

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2007

О ПРИРОДЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ВО ВСЕЛЕННОЙ «ЧЁРНЫХ ДЫР»
И ДИНАМИКЕ ВСЕЛЕННОЙ
Григорян С.С.

Ս.Ս. Գրիգորյան

Տիեզերքում դիտվող “սև խոռոչների” բնույթի և Տիեզերքի դինամիկայի մասին

Ձևակերպված է դրույթ՝ որ բնական պրոցեսները նկարագրող տեսական-քանակական մոդելները չպետք է պարունակեն կենտրոնացված եզակիություններ ֆիզիկական պարամետրերի անվերջ արժեքների առկայությամբ և այդ հիմքի վրա ձևակերպված է պնդում Ա. Էյնշտեյնի ձգողականության տեսության ոչ պիտանիության մասին աստղաֆիզիկական և տիեզերական երևույթների նկարագրման համար: Կառուցված է նեյտրոնային աստղերի և “սև խոռոչների” քանակական մոդել՝ հիմնված դասական մեխանիկայի և Նյուտոնի ձգողականության տեսության, ֆոտոնների վրա ձգողականության դաշտի ուժային ազդեցության պատկերացման և տարրական մասնիկների ժամանակակից տեսության վրա: Մոդելի շրջանակներում լուծված է “մուլթ” աստղերի հավասարակշռության խնդիրը և նրանց քայքայման դինամիկան փոխազդեցությունների ժամանակ: Մտցված է ենթադրություն նեյտրոնային մատերիայի քվարկային վերածվելու “կոլլապսի” վերաբերյալ՝ խտության թռիչքաձև աճով ճնշումով հասնելով որոշ կրիտիկական մեծության, որը բերում է քվարկային միջուկով և նեյտրոնային մանտիայով սառը գոյացությունների ձևավորմանը ընդահանուր զանգվածի որոշ սահմանային (շեմային) արժեքի գերազանցման դեպքում: Ցույց է տրված, որ այդ գոյացությունները օժտված են “սև խոռոչների” ճառագայթումը պահելու հատկությամբ – նրանք հաղիսանում են Միտչել-Լապլասի դասական “մուլթ մարմինների” կոնկրետ ֆիզիկական կառուցվածք: Այդպիսի մարմինների փոխազդեցության դինամիկ խնդրի լուծման մեջ հայտնաբերվել է շատ ուժեղ տաքացված մատերիա ծնող նոսրացման հարվածային ալիքների առաջացում, որի ցրիվ գալու և սառելու ժամանակ կատարվում է ջրածնի ռեկոմբինացիա, դրանով իսկ կատարվում է փոխակերպման ցիկլիկ պրոցես ջրածնի՝ աստղերի-մուլթ մարմինների- ջրածնի ամպերի: Քննարկվում են տեսությունից բխող այլ հետևանքներ:

S. S. Grigorian

On the Nature of “Black Holes“ observable in the Universe and dynamics of the Universe

A theoretical model is constructed relating the mechanics and physics of dark neutron stars and “black holes“ identifying on the sky by observations. The model is based on classical Newton’s mechanics and his gravitation law, and the modern physics of elementary particles. As a starting point of consideration the concept is formulated stating that any mathematical construction for description of natural phenomena has to predict the quantitative values in framework of such a description with no infinite figures. In this respect the General relativity theory by A. Einstein is recognized here as a theoretical model which is not applicable to Nature description, for this model in general case leads to mathematical singularity appearance. Instead, the proposed model describes statics and dynamics of the neutron stars and “black holes“ without any mathematical singularity. The statics of these objects has an important feature: when the mass of cold star is growing a collapse of the star occurs at definite “critical“ value of that — the internal core of finite size contracts very significantly due to abrupt increase of the matter density when the neutron medium at large pressures generated by self-gravitation of the star condenses in quark medium having much more high density. This process divides the observing dark stars in two classes — consisting of neutron stars and neutron — quark stars, identifying now as “black holes“. The consideration of dynamical processes arising at collisions or close interactions of neutron and neutron — quark stars at the framework of proposed model discovers a very important phenomenon — the strong rarefaction shock wave formation in the course of dynamical interaction, generating the mighty flows of very hot neutron gas which due to intense collisions between particles generates a mixture of protons, leptons and photons in which during adiabatic cooling the process of hydrogen recombination arises, so the “initial“ hydrogen masses, generating the ordinary bright stars, at the end of their evolution with neutron and neutron — quark dark and “cold“ remnants formation during dynamical interaction of that regenerates the “secondary“ hydrogen. So, the “life“ of matter in the Universe is a cyclic transformation and regeneration of hydrogen in the course of stars formation and their death. The constructed picture of the matter’s “life“ in the Universe is in good accordance with the Mitchell — Laplace hypothesis of dark stars existence, the V. A. Hambartsumyan’s hypothesis on protostars existence, the author’s hypothesis on possibility of existence of “island“ system with very small density having the property of “black hole“, and possibility of being such a system the observable part of the Universe. The theory explains also the nature of cosmic rays, background radiation, dark matter in galaxies and the “Big bang“.

Сформулировано положение, что теоретические количественные модели, предназначенные для описания природных процессов, не должны содержать сосредоточенных особенностей с бесконечными значениями физических параметров, и на этой основе сформулировано утверждение о непригодности теории гравитации А. Эйнштейна для описания астрофизических и космологических явлений. Построена количественная модель нейтронных звезд и «чёрных дыр», основанная на классической механике и теории гравитации И. Ньютона, представлении о силовом воздействии гравитационного поля на фотоны и на современной теории элементарных частиц. В рамках модели решена задача о равновесии «тёмных» звезд и динамике их разрушения при взаимодействиях. Введено предположение о «коллапсе» нейтронной материи в кварковую со скачкообразным ростом плотности при достижении давлением некоторой критической величины, приводящем к формированию холодных образований с кварковым ядром и нейтронной мантией при общей массе, превышающей некоторое «пороговое» значение. Показано, что эти образования обладают свойством «чёрных дыр» удерживать излучение – они являются конкретным физическим построением для классических «тёмных тел» Митчелла – Лапласа. В решении динамической задачи о взаимодействии таких тел выявлено возникновение ударных волн разрежения, порождающих очень сильно нагретую материю, при разлёте и охлаждении которой происходит рекомбинация водорода, тем самым осуществляется циклический процесс преобразования водорода в звезды – тёмные тела – облака из водорода. Обсуждаются другие следствия теории.

В 1916 году Альберт Эйнштейн опубликовал свою теорию гравитации – т.н. общую теорию относительности (ОТО), имевшую целью устранить небольшие количественные отклонения предсказаний теории гравитации Исаака Ньютона от фактов, регистрируемые в астрономических наблюдениях. Основной «физический» эффект, содержащийся в ОТО, состоит в том, что присутствие в пространстве материи (массы) приводит к искривлению континуума пространство–время, к изменению его метрики, причём это происходит не только в местах, где располагается материя, но и вне этих мест – в пустоте. Этот эффект значительно усиливается при приближении к областям, где имеется материя.

Одно из первых точных решений задач для математической модели ОТО – простейшей стационарной центрально-симметричной задачи о метрике пространства–времени вокруг сосредоточенной конечной массы, построенное Карлом Шварцшильдом в том же 1916 году, показало, что модель ОТО вместо того, чтобы устранить «малые» несоответствия теории Ньютона данным наблюдений, приводит к весьма существенным и неожиданным качественным и количественным эффектам вокруг «точечной» массы – порождает сложную математическую особенность («сингулярность») в точке и определяет «гравитационный радиус» R_g – расстояние от центра симметрии в задаче, на котором имеется другая особенность, в частности, невозможность выхода фотонов за пределы сферы с этим радиусом. Внутри этой сферы, кроме того, кардинально меняется метрика пространства–времени и возникают странные проблемы причинно-следственного характера. Построенные позднее различные другие точные решения уравнений ОТО («космологические» решения Александра Фридмана, обобщения решения Шварцшильда на случаи вращающейся массы (точечной!), наличия магнитного поля и др.) – все без исключения также содержат математические сингулярности. Впоследствии Стивеном Хокингом была доказана теорема, устанавливающая, что эволюция решения математической задачи для модели ОТО при весьма общих и мало ограничительных предположениях об исходных данных приводит к возникновению в решении сингулярностей!

С моей точки зрения, этого всего было достаточно, чтобы сделать простой вывод о непригодности модели ОТО для описания гравитационных процессов в природе, ибо в математических построениях, претендующих на описание любых естественных явлений, не должно быть особенностей (сингулярностей) с бесконечными значениями физических величин. Однако такой вывод почему-то в науке сделан не был. Более того, решения А.А.Фридмана, содержащие «вселенские» сингулярности, с привлечением некоторых наблюдательных фактов (закона «разбегания» галактик Э. Хаббла, факта существования «реликтового» излучения) были «канонизированы» и стали основой современной космологии...

Важно отметить ещё одну теоретическую работу – американских физиков Роберта Оппенгеймера и Георгия Волкова [1], в которой изучался аналог задачи Шварцшильда, но для массы, распределённой в конечном объёме. В этой работе при использовании уравнений ОТО и конкретного уравнения состояния вида $p = f(\rho)$ (p и ρ – давление и плотность) для распределённой массы было установлено, что равновесное решение задачи без особенностей существует только для значений суммарной массы m , не превышающих некоторую конечную величину m_* . Удивительный результат, всецело определяемый сильнейшей нелинейностью уравнений ОТО. Можно показать, что этот результат не зависит от деталей уравнения состояния (от вида функции f , при определённых естественных ограничениях на поведение f при больших p). Вывод авторами работы [1] был сделан такой: поскольку при $m > m_*$ равновесной конфигурации без сингулярностей не существует, в реальности происходит «коллапс» с собиранием всей массы в точку, т.е. осуществляется решение Шварцшильда. И даже была выполнена работа [2], в которой количественно описывалась динамика такого коллапса. Правда, при этом было принято, что давлением материи можно пренебречь, что, конечно, недопустимо, поэтому эта работа в принципе неудовлетворительна, даже в рамках ОТО. Курьёзность ситуации ещё и в том, что при $m < m_*$ одна и та же задача имеет два решения, и существенно разных: решение Оппенгеймера и Волкова без сингулярностей и решение Шварцшильда, имеющее сингулярность. Какое из них предпочесть? Такой вопрос ни у кого из лиц, занимавшихся этой проблематикой, даже не возникал.

Начиная с 1971 г., когда в космос была выведена аппаратура для регистрации источников рентгеновского излучения «на небе» (американский спутник «Ухуру»), было обнаружено множество (уже много сотен в наше время) таких источников – в составе двойных звёздных систем с одной видимой (оптической) и одной невидимой компонентами, а также в активных ядрах галактик. Анализ рентгеновских сигналов от таких объектов, возникающих, по существующим представлениям, при ускоряющемся натекании (аккреции) массы на гравитирующий невидимый объект из его окрестностей, и теоретические рассуждения о возможной их физической природе привели к заключению, что невидимые компоненты двойных систем с массой, меньшей трёх солнечных, – это нейтронные звёзды (компактные образования из «спрессованных» гравитацией нейтронов, формирующиеся на последних стадиях эволюции достаточно массивных светящихся звёзд), а объекты с большими массами, включая и тёмные объекты с массами порядка $10^6 - 10^{10}$ солнечных масс в активных ядрах галактик, – это сингулярные объекты ОТО, т.н. «чёрные дыры» (наименование связано с тем, что, как выше отмечалось, свет из центральной области решения Шварцшильда не может «вырваться» наружу). В качестве доказательства приводятся два факта: 1) по особым характеристикам рентгеновского излучения (его периодичности и т.п.) делается вывод, что маломассивные объекты имеют твёрдую внешнюю поверхность, на которую натекает газ, «высасываемый» гравитацией этого объекта из оптической компоненты, поэтому делается заключение, что это – нейтронные звёзды; 2) отсутствие таких характеристик у рентгеновского излучения – это свидетельство отсутствия у тёмного объекта твёрдой поверхности, и, значит, этот объект есть сколлапсировавшая материя, собранная в точку, это – сингулярность ОТО. Разделяющая эти две разновидности объектов величина массы по порядку величины согласуется с результатом работы Оппенгеймера и Волкова (уточнённым позднее), целиком обязанного своим существованием модели ОТО, и из этого делается вывод о торжестве ОТО в интерпретации феномена «чёрных дыр».

Таково современное положение дел в этой области астрофизики.

Однако приведённые выше выводы некорректны, просто потому, что они основаны на ОТО с её физически недопустимыми сингулярностями, и они – не единственно «возможная» интерпретация наблюдательных данных. Мной предлагается другая их интерпретация, минимально «нагруженная» недоказуемыми допущениями типа ОТО. Предлагаемая модель состоит в принятии простейшей теории гравитации – закона всемирного тяготения Ньютона и предположения о том, что фотоны также испытывают воздействие этого тяготения (как и «массовая» материя). Это допущение основано на зарегистрированном прямыми наблюдениями во время полного солнечного затмения факте искривления световых лучей в гравитационном поле Солнца, интерпретированном блестящим астрономом сэром Артуром Эддингтоном (правда, на базе ОТО).

Предположения этой модели были сделаны впервые очень давно – Джоном Митчеллом в 1783 г. и, несколько позднее, Пьером Симоном Лапласом, в 1798 г. Из них следует существование гравитационного радиуса, определяемого простой формулой

$$R_g = 2Gm / c^2, \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная Ньютона, m – масса гравитирующего тела, c – скорость света. Удивительным является совпадение выражения (1) для R_g у Митчелла – Лапласа и в решении Шварцшильда, несмотря на существенно разные, физически и математически, исходные положения в двух теоретических подходах.

Приняв отмеченные два допущения, можно решить задачу Оппенгеймера – Волкова для любого уравнения состояния типа $p = f(\rho)$ и убедиться в том, что в этой модели нет эффекта несуществования решения задачи при «больших» величинах суммарной массы объекта m . В частности, при простейшем виде уравнения состояния $\rho = \text{const} = \rho_*$, что является хорошим приближением в статических задачах рассматриваемого типа (но не в динамических – см. ниже), решение получается в явном виде в элементарных функциях. Если в этом решении в качестве ρ_* принять плотность нейтронного вещества ($\rho_* = \rho_n \approx 10^{14}$ г/см³), то получается, что радиус R_b такого тела при его массе $m < m_*$ оказывается больше гравитационного (по Митчеллу – Лапласу)

$$R_b = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_*}} > \frac{2Gm}{c^2} = R_g, \quad m < m_*. \quad (2)$$

В области $m > m_*$ верно обратное неравенство, т.е. такое тело есть «тёмная звезда» Митчелла–Лапласа. Когда $R_b = R_g$, $\rho_* = \rho_{**}$, и для ρ_{**} получается формула

$$\rho_{**} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{c^2}{2G} \right)^3 \frac{1}{m^2} = 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{m_s}{m} \right)^2 \text{ (г/см}^3\text{)}, \quad (3)$$

где m_s – масса Солнца. Отсюда видно, что при $\rho_{**} = \rho_n \approx 10^{14}$ г/см³ получается $m = m_* \approx 14m_s$. Таким образом, в области $m < 14m_s$ рентгеновские источники должны бы быть нейтронными звёздами, в то время как признаками таковых обладают лишь объекты с $m < 2m_s \div 3m_s$.

Моё объяснение этого факта состоит в следующем. Известно в современной физике элементарных частиц, что нейтроны (и протоны) состоят из «более элементарных» частиц – кварков, которые, как и нейтроны, являются фермионами [3]

и «газ» из них описывается уравнением состояния «холодного» вида $p = f(\rho)$ (конечно, с другой функцией f , чем у нейтронного «газа»). Понятно, что при сжатии гравитационными силами достаточно большой массы m произойдёт «коллапс» нейтронного «газа» – при определённом пороговом значении давления p_* произойдёт скачкообразное сжатие почти всего нейтронного вещества с возрастанием плотности от $\rho_* = \rho_n$ до плотности кваркового вещества $\rho_* = \rho_q$. А дальнейший рост давления будет сжимать уже кварковое вещество. Для объекта заданной массы его радиус R_{bq} в «кварковом» состоянии будет значительно меньше радиуса в «нейтронном» состоянии, $R_{bq} \ll R_{bn}$, поскольку $\rho_q \gg \rho_n$. А это означает, что при $\rho = \rho_* = \rho_n$ с ростом массы m достигнется такое его значение, при котором резко возрастёт плотность и уменьшится радиус тела – произойдёт кварковый коллапс. При этом гравитационный радиус этого тела R_g не изменится (R_g линейно зависит от m , но не зависит от ρ). Таким образом, произойдёт скачкообразное падение R_b от значения $R_{bn} > R_g$ до значения $R_{bq} \ll R_g$, т.е. тело из состояния «нормальной» нейтронной звезды скачком превратится в невидимую звезду Митчелла–Лапласа. Детальное исследование этой проблемы, приведённое ниже, обнаруживает удивительные особенности решения, имеющие очень важное значение в качественном и количественном отношениях.

Итак, принимаем уравнения состояния для нейтронного и кваркового веществ в простейшем виде

$$\rho = \begin{cases} \rho_n, & p \leq p_* \\ \rho_q, & p > p_* \end{cases}, \quad (4)$$

где, как отмечалось, p_* – «пороговое» значение давления, при котором нейтронное вещество скачком переходит в сильно уплотнённое кварковое. Конечно, представление (4) является идеализацией, ибо и при $p < p_*$ будет какая-то зависимость $\rho_n = \rho_n(p)$, но с малым изменением ρ_n при росте p , а при $p > p_*$ будет $\rho = \rho_q(p)$ с еще меньшей сжимаемостью кваркового вещества. Но эти малые эффекты не изменяют основных свойств решаемой задачи, для которой представление (4) вполне приемлемо. Уравнение равновесия в радиально-симметричной задаче для вещества при ньютоновом законе тяготения имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)}{r^2}M(r), \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\xi)\xi^2 d\xi, \quad (5)$$

где r – радиальная координата, отсчитываемая от центра системы, $\rho(r)$ – значение плотности на этом расстоянии, $M(r)$ – суммарная масса вещества внутри сферы радиуса r . Для представления (4) имеем из (5) (если всюду $\rho = \rho_n$)

$$p = p(0) - \frac{2\pi}{3} G\rho_n^2 r^2, \quad (6)$$

и, принимая $p(R) = 0$, R – внешний радиус тела (в действительности, $p(R) = p_0 > 0$, где p_0 – давление, при котором любое вещество сжимается до нейтронного состояния, однако, как будет ясно из дальнейшего, p_0 намного меньше интересующих нас давлений, близких к значению p_* , при котором происходит «смятие» нейтронной массы в кварковую), получаем

$$p(0) = \frac{2\pi}{3} G \rho_n^2 R^2. \quad (7)$$

Это – максимальное давление в недрах тела и именно оно будет достигать значения p_* при $R = R_*$ и массе M_* , поэтому

$$R_* = \left(\frac{3}{2\pi} \frac{p_*}{G \rho_n^2} \right)^{1/2}, \quad M_* = \frac{4\pi}{3} \rho_n R_*^3. \quad (8)$$

Дальнейшие изменения состояния тела будут характеризоваться образованием вокруг его центра однородного ядра из кваркового вещества с радиусом r_* и плотностью ρ_q и «мантии» из нейтронного вещества, заполняющей сферический слой в интервале $r_* \leq r \leq R$. При этом для $M(r)$ получается формула

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \rho_q r^3, & 0 \leq r \leq r_*, \\ \frac{4\pi}{3} \rho_q r_*^3 + \frac{4\pi}{3} \rho_n (r^3 - r_*^3), & r_* \leq r \leq R, \end{cases} \quad (9)$$

а для распределения давлений – формула

$$p = \begin{cases} p_* + \frac{2\pi}{3} G \rho_q^2 (r_*^2 - r^2), & 0 \leq r \leq r_*, \\ p_* + \frac{2\pi}{3} \rho_n^2 \left[r_*^2 - r^2 - 2 \left(\frac{\rho_q}{\rho_n} - 1 \right) r_*^3 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r} \right) \right], & r_* \leq r \leq R, \end{cases} \quad (10)$$

Давление p на границе ядра и мантии непрерывно и равно p_* .

При $r = R$ из (9) получаем

$$\frac{M}{M_*} \equiv X = (1 + \nu u^3) Y^3, \quad (11)$$

а из (10) при $r = R$ и $p(R) = 0$ – соотношение

$$\frac{R}{R_*} \equiv Y = \left[1 + (2\nu - 1)u^2 - 2\nu u^3 \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Здесь приняты обозначения

$$\nu = \frac{\rho_q}{\rho_n} - 1, \quad u = \frac{r_*}{R}. \quad (13)$$

Соотношения (11), (12) задают в параметрическом виде зависимость $Y = Y(X, \nu)$, которая, естественно, переходит в

$Y = X^{1/3} \left(Y(u, 0) = (1 - u^2)^{-1/2}, X(u, 0) = Y^3 = (1 - u^2)^{-3/2} \right)$ для однородной (без скачка плотности) среды.

Асимптотика зависимостей (11), (12) при $u \rightarrow 0, X \rightarrow Y \rightarrow 1$ имеет вид

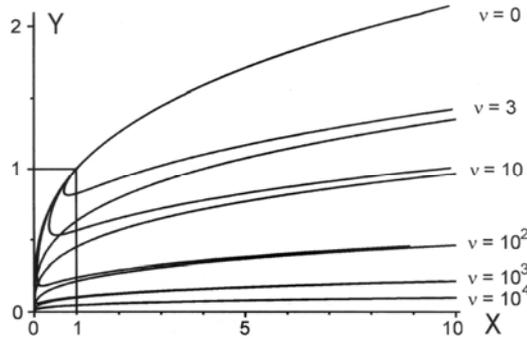
$$Y = 1 - \frac{1}{2} \left[(2\nu - 1)u^2 - 2\nu u^3 \right] + o(u^4) = 1 - \left(\nu - \frac{1}{2} \right) u^2 + \nu u^3 + \dots, \quad (14)$$

$$X = \left[1 - \frac{3}{2} \left[(2\nu - 1)u^2 - 2\nu u^3 \right] + o(u^4) \right] (1 + \nu u^3) = 1 - 3 \left(\nu - \frac{1}{2} \right) u^2 + 4\nu u^3 + \dots, \quad (15)$$

Из этих представлений следует, что для $0 \leq \nu < 1/2$ с ростом u от нуля X и Y растут от их значений 1 при $u = 0$, причём кривые $Y = Y(X, \nu)$ в точке $X = Y = 1$ имеют общую касательную с предельной при $\nu = 0$ кривой $Y = X^{1/3}$. В области $1/2 < \nu < \infty$ весь пучок этих кривых имеет такое же касание. При $\nu = 1/2$ асимптотика имеет вид $X = 1 + 2u^3 + \dots, Y = 1 + \frac{1}{2}u^3$, то есть эта единственная кривая пучка отходит от точки $X = Y = 1$ под конечным углом к кривой $Y = X^{1/3}$. При $u \rightarrow 1$ получается асимптотика

$$Y \rightarrow \left[2(1 + \nu)(1 - u) \right]^{-1/2} \rightarrow \infty, X \rightarrow (1 + \nu)Y^3 \rightarrow \infty, \text{ т.е. } Y = \left(\frac{X}{1 + \nu} \right)^{1/3},$$

что при $\nu = 0$ совпадает с $Y = X^{1/3}$, а при $\nu \rightarrow \infty$ $Y \rightarrow \left(\frac{\rho_n}{\rho_q} X \right)^{1/3}$.



Фиг.1

Картина распределения семейства кривых $Y = Y(X, \nu)$ в показана на фиг. 1. Удивительным фактом является то, что при $\nu > 1/2$ росту радиуса r_* кваркового ядра (росту u) соответствует не только уменьшение Y , т.е. общего радиуса тела R , но и уменьшение X , т.е. массы тела! Таким образом, зависимость $Y = X^{1/3}$ чисто нейтронного тела с переходом к нейтронно-кварковому образованию с ростом u сначала совершает «попятное» движение в область $X < 1$ и лишь затем выходит на монотонную ветвь с приведённой выше асимптотикой. Всё это означает некую

неустойчивость построенного статического решения в области $0 < X \leq 1$: сечение прямой $X = \text{const} < 1$ с кривыми семейства определяет три точки – одну на $Y = X^{1/3} < 1$ (чисто нейтронная конструкция) и две на ветви $Y = Y(X, \nu)$, которая при некотором $X_* = X_*(\nu) < 1$ имеет вертикальную касательную. А это означает, что достаточно интенсивное динамическое воздействие на чисто нейтронную звезду в диапазоне $X_*(\nu) \leq X < 1$ может привести к образованию кваркового ядра конечных размеров, сопровождающемуся резким (скачкообразным) уменьшением общего размера тела R , причём такой скачок может произойти в две возможные точки – одну на ветви, идущей от точки $X = Y = 1$ до точки $X = X_*(\nu)$, другую – на нижней ветви, идущей от точки $X = X_*(\nu)$ вниз и затем, пройдя точку $X = X_{**}(\nu)$, где касательная к кривой $Y = Y(X, \nu)$ горизонтальна, вверх к асимптотике $Y = \left(\frac{X}{1+\nu}\right)^{1/3}$ при $X \rightarrow \infty$. Скачкообразный переход в первую из

этих точек следует считать нереализуемым, ибо из него дальнейший рост ядра (параметра u) соответствует уменьшению общей массы (уменьшается X). Для второй точки такой переход вполне реален, ибо квазистатический рост ядра из этого состояния определяется ростом общей массы системы (например, за счёт её плавного нарастания в процессе спокойной аккреции вещества извне). Принципиально важно, что при таких скачках радиус тела может стать меньше гравитационного радиуса Митчелла–Лапласа, и световые сигналы из окрестностей возникшей скачком нейтронно-кварковой конструкции будут не в состоянии выйти за пределы этого радиуса, то есть конструкция будет представлять из себя «чёрную дыру»!

Скачкообразное уменьшение Y из точки $X = Y = 1$ при постоянном $X = 1$ будет происходить обязательно, ибо точка $X = Y = 1$ выделена тем, что в центре нейтронного тела давление уже достигло значения P_* – давления перехода нейтронной материи в кварковую, поэтому для возникновения скачка не требуется сильных (конечной интенсивности) воздействий – для этого будет достаточно малых динамических воздействий. Таким образом, после достижения системой состояния $X = Y = 1$ ($M = M_*(p_*)$, $R = R_*(p_*)$) существование чисто нейтронных звёзд становится невозможным, и дальнейший, даже очень малый, прирост массы скачком переводит систему в нейтронно-кварковую звезду с кварковым ядром конечного (не малого) радиуса (именно этот случай отмечен выше, в общей части статьи). При этом радиус такого образования может быть и больше гравитационного радиуса для общей массы конструкции, тогда по всем признакам наблюдательных данных она будет классифицироваться как «нейтронная» звезда. Понятно, что это будет в случае небольших значений ν , т.е. небольшого превышения плотностью кваркового вещества плотности нейтронного. Но поскольку реальные оценки, основанные на современной теории элементарных частиц [3], дают для ν величину в несколько (много) десятичных порядков, то, как будет показано ниже, скачок из точки $X = Y = 1$ даёт величину $Y = Y_C$, существенно меньшую величины $Y_g = R_g/R_*$.

А из этого следует, что именно величина массы $M = M_*$ ограничивает сверху диапазон значений масс нейтронных звёзд. Для всех значений $M > M_*$ нейтронно-кварковая конструкция будет «чёрной дырой» («нормальным» небесным телом без

сингулярностей), ибо для них будет соблюдаться условие $R = R_C = R_* Y_C < R_* Y_g(1) = R_g(M_*)$.

Факт двузначности функции $Y = Y(X, \nu)$ при $\nu > 1/2$ ($\rho_q / \rho_n > 3/2$) в области $X < 1$ и вытекающая из него необходимость введения скачкообразного сокращения радиуса нейтронной звезды при значении её массы $M = M_*(p_*)$ мной был установлен и осознан по физическому содержанию 7 июля 2006 года – в день юбилея 70-летия академика Ю.С. Осипова – президента Российской академии наук, и на юбилейном приёме 10 июля я ему сказал, что делаю юбилейный подарок – посвящая это научное открытие ему, академику Ю.С. Осипову, президенту РАН. Он подарок принял, и здесь я хочу это событие «обнародовать».

Определим теперь, при каких значениях параметров задачи (p_* , ν и т.п.) будет соблюдаться условие $Y_C(\nu) < Y_g$. Из формулы (1) и формул (8) для M_* , R_* следует, что

$$Y_g = \frac{R_g}{R_*} = \frac{2GM_*}{c^2 R_*} = 4 \frac{p_*}{\rho_n c^2}. \quad (16)$$

Легко показать, что асимптотика величины $Y_C = Y(X=1, \nu)$ при $\nu \ll 1$ есть $Y_C = \nu^{-1/3} + \dots$, и, таким образом, условие $Y_g > Y_C$ представляется при $\nu \ll 1$ в виде

$$\nu^{-1/3} < 4 \frac{p_*}{\rho_n c^2}. \quad (17)$$

Из данных наблюдений для нейтронных звёзд и «чёрных дыр» известно, что при критической массе $M = M_* = 3M_s$ будет $R_g < R_*$, т.е. $Y_g < 1$. Действительно, при $R = R_g$ плотность тела выражается простой формулой (3), и чтобы было $\rho = \rho_n \approx 10^{14}$ г/см³, должно быть $M \approx 10M_s$, что втрое больше M_* , т.е. при $M = M_* = 3M_s$ будет $R = R_* > R_g$. Таким образом, окончательно при $\nu \ll 1$ получаем ограничения на p_*

$$\nu^{-1/3} < 4 \frac{p_*}{\rho_n c^2} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{\rho_n c^2}{4\nu^{1/3}} < p_* < \frac{\rho_n c^2}{4}. \quad (18)$$

Полагая $\rho_n = 10^{14}$ г/см³ = 10^{16} кгсек²/м⁴, при $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ м²/сек², получаем оценку $\frac{\rho_n c^2}{4} \approx 2.5 \cdot 10^{28}$ кг/см². При $\nu = 10^3$ имеем $\frac{\rho_n c^2}{4\nu^{1/3}} \approx 2.5 \cdot 10^{27}$ кг/см², а при $\nu = 10^6$ $\frac{\rho_n c^2}{4\nu^{1/3}} \approx 2.5 \cdot 10^{26}$ кг/см². Таким образом, для p_* получились оценки

$2.5 \cdot 10^{26} \div 2.5 \cdot 10^{27}$ кг/см² < p_* < $2.5 \cdot 10^{28}$ кг/см², ибо оценки $10^3 \leq \nu \leq 10^6$ для $\nu = \rho_q / \rho_n - 1$ представляются разумными [3]. Полученные числа позволяют оценить характерную величину давления перехода нейтронного вещества в кварковое. Здесь мы имеем замечательную ситуацию: «измерение» p_*

осуществляется построенной рациональной моделью макрокосмических объектов очень больших масс и сведениями из современной теории элементарных частиц, а имея оценку p_* из других данных о макрокосмических событиях рассматриваемого масштаба (например, о динамических процессах), можно по полученным здесь соотношениям оценить характеристику микромира $\rho_q = (1 + v)\rho_n$, что другими средствами, по-видимому, и невозможно сделать. В этом отношении мир нейтронных звёзд и «чёрных дыр» – это лаборатория для исследований по физике элементарных частиц в условиях очень больших, конечно, недостижимых в земных условиях, давлений и плотностей материи.

Подводя итог изложенному выше, можно заключить, что регистрируемое изменение характеристик рентгеновского излучения, исходящего от тёмных объектов (нейтронных звёзд и «чёрных дыр»), в области значений масс $M \square 3M_s$, связано не с эффектами ОТО, а со скачкообразной перестройкой нейтронной звезды в намного более компактное образование – не имеющую никаких сингулярностей нейтронно-кварковую звезду, приобретающую основную характеристику «чёрной дыры» – способность «запирать» фотоны в её окрестности, ограниченной классической гравитационным радиусом Митчелла–Лапласа. Таким образом, построенная модель является подтверждающей гипотезу Митчелла–Лапласа теорией, опирающейся вовсе не на ОТО с её физически неприемлемыми математическими сингулярностями, а на классическую механику, закон тяготения Ньютона и представления современной физики элементарных частиц.

В обширной литературе, посвящённой выявлению физического механизма возникновения интенсивного рентгеновского излучения невидимыми (тёмными) нейтронными звёздами и «чёрными дырами», построены количественные модели аккреции газа на эти объекты, т.е. перетекания газа из близко расположенных обычных (светящихся) звёзд к невидимым. Мной разработана простая математическая модель и этого явления, также в рамках классической механики и физики, свободная от существенного произвольного допущения о влиянии турбулентности на процесс аккреции, имеющегося во всех работах по аккреции. Однако здесь эта теория представлена не будет – она составит содержание другой работы.

Для завершения исследования вопроса о финальных стадиях эволюции звёзд нужно рассмотреть динамические задачи для нейтронных и нейтронно-кварковых звёзд, что и сделано ниже.

Уравнение состояния вида $p = f(\rho)$ характеризует сплошную среду с разделяющейся внутренней энергией. Для такой среды термодинамическая модель имеет вид

$$e(v, s) = e_1(v) + e_2(s), \quad p = f(v) = -\frac{de_1}{dv} > 0, \quad (19)$$

$$s = s(T) = \int \frac{c_v(T)}{T} dT, \quad e_2 = e_2(T), \quad c_v = \frac{de_2}{dT} = c_v(T),$$

где e – внутренняя энергия, s – энтропия, T – абсолютная температура, $v = 1/\rho$ – удельный объём [4]. Рассматриваемая нейтронно-кварковая среда есть частный случай среды (19), у которой $p = f(v)$ имеет вид, изображенный на фиг. 2А.

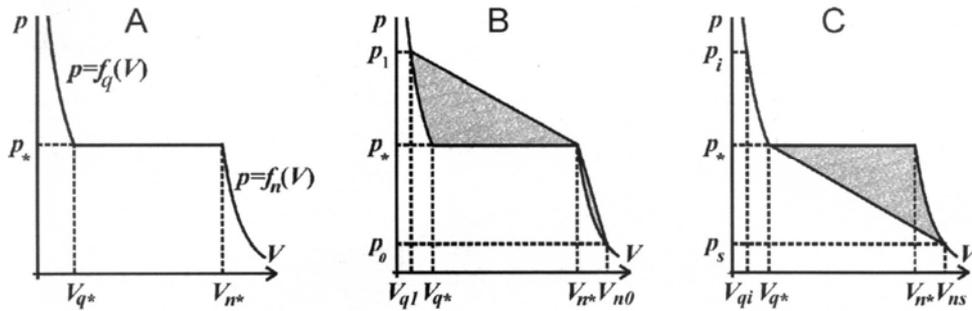
Для такой среды рассмотрим задачи об «ударном» нагружении и «ударном» разгрузении, когда к поверхности среды скачкообразно прикладывается высокое давление или, наоборот, – начальное высокое давление в среде скачкообразно снимается на её поверхности. Эти задачи автомодельны и допускают точные решения. Не приводя здесь деталей построения (очень простых) этих решений и

результатирующих их явных формульных описаний, представим интересующие нас здесь результаты графически на фиг. 2B и фиг. 2C, соответственно.

Приложение к поверхности полупространства из нейтронного вещества, находящегося под давлением p_0 , давления p_1 , превышающего «критическое» давление p_* , порождает автомодельное решение с бегущими вглубь полупространства двумя ударными волнами – в одной происходит скачок из точки v_0, p_0 в точку $v_n(p_*)$, p_* (быстрая волна), в другой – скачок из точки $v_n(p_*)$, p_* в точку $v_q(p_1)$, p_1 . Это – единственное построение, удовлетворяющее второму закону термодинамики. По этому решению, в среде происходит нагрев, мера которого показана в виде затемнённых областей на фиг. 2B (нагрев происходит в два этапа на фронтах двух ударных волн). Величина нагрева (рост температуры в скачках) определяется соотношениями:

$$e_2(T_*) - e_2(T_0) = \text{величине затемнённой площади для первого скачка,}$$

$$e_2(T_1) - e_2(T_*) = \text{величине затемнённой площади для второго скачка.}$$



Фиг. 2

Снятие начального давления p_i , имеющегося в кварковом полупространстве, за счёт скачкообразного понижения давления на его поверхности до давления $p_s < p_*$ приводит к картине, изображенной на фиг. 2C: по среде распространяется непрерывная волна разрежения из точки $v_q(p_i)$, p_i до точки $v_q(p_*)$, p_* – это тоже быстрая волна, за ней следует скачок разрежения из точки $v_q(p_*)$, p_* до точки $v_n(p_s)$, p_s . Этот скачок удовлетворяет требованию второго закона термодинамики о росте энтропии S и температуры T на скачке, и нагрев на скачке определяется соотношением

$$e_2(T_s) - e_2(T_i) = \text{площади затемнённой области на фиг. 2C.}$$

Величины нагревов и в случае ударного нагружения, и в случае ударного разгружения нейтронно-кварковой среды весьма велики, и их легко оценить по построенным решениям. Действительно, из-за того, что кривые $v_q = v_q(p)$ и $v_n = v_n(p)$ пологи к оси давлений, их просто можно заменить прямыми линиями

$v_q = \text{const}$, $v_n = \text{const}$, и тогда затемнённая площадь F_c для второй (главной) ударной волны на фиг. 2B будет равна

$$F_c = 0.5(p_1 - p_*) [v_n(p_*) - v_q(p_*)] = 0.5(p_1 - p_*)(v_n - v_q), \quad (20)$$

а для фиг. 2C затемнённая площадь F_r будет равна

$$F_r = 0.5(p_* - p_s) [v_n(p_*) - v_q(p_*)] = 0.5(p_* - p_s)(v_n - v_q), \quad (21)$$

Особый интерес представляет величина нагрева в скачке разрежения, определяемая по (21) при $p_s = 0$ и $v_q \ll v_n$:

$$e_2(T_s) - e_2(T_i) \approx 0.5 p_* v_n = 0.5 \frac{P_*}{\rho_n}, \quad (22)$$

и если для оценок принять $c_{vn}(T) = \text{const} = c_{vn}$, $c_{vq}(T) = \text{const} = c_{vq}$, из (22) получится

$$c_{vn} T_s - c_{vq} T_i \approx c_{vn} T_s = 0.5 \frac{P_*}{\rho_n}, \quad T_s = 0.5 \frac{P_*}{\rho_n c_{vn}}, \quad (23)$$

Однако, поскольку мало что известно о теплоёмкостях нейтронного и кваркового веществ c_{vn} и c_{vq} , формула (23) не позволяет сделать оценку нагрева в величинах абсолютных температур.

Правая часть (22), определяющая рост тепловой составляющей внутренней энергии среды, при оценках p_* и ρ_n , приведенных выше, составляет $0.5 \cdot 2.5 \cdot 10^{27} \text{ кГ/см}^2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3 \approx 10^{27} \text{ кГ/см}^2 \cdot 10^{-16} \text{ м}^4/\text{кГсек}^2 = 10^{15} \text{ м}^2/\text{сек}^2$ при средней оценке для p_* . Для крайних оценок p_* результат будет отличаться на один порядок в каждую сторону, т.е. $10^{14} \text{ м}^2/\text{сек}^2 \leq 0.5 \frac{P_*}{\rho_n} \leq 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2$. Эти величины составляют

от $10^{-3} c^2$ до $0.1 c^2$, где $c^2 \approx 10^{17} \text{ м}^2/\text{сек}^2$ – квадрат скорости света. Таким образом, в скачке разрежения получается «чудовищный» нагрев нейтронной среды, который эту холодную при её образовании материю превращает в очень сильно нагретый, уже разреженный нейтронный газ, разлетающийся в пустоту; у реальных нейтронно-кварковых звёзд из-за трёхмерности процесса – со значительным дальнейшим адиабатическим расширением и охлаждением. В результате этого нейтроны «разваливаются» на протоны, электроны и множество других лептонов и фотонов, и при достижении в разлетающемся облаке температуры рекомбинации водорода последний будет массово синтезироваться!

Таким образом, описанный динамический процесс ставит точку в конце эволюции звёзд (из водорода), когда их холодные нейтронно-кварковые «останки» при столкновениях полностью разрушаются и очень энергично разлетаются в сильно нагретом состоянии (за счёт накопленной в них до динамического разрушения «холодной» внутренней энергии, «взятой» из собственного гравитационного поля «умершей» звезды) и на определённой стадии адиабатического охлаждения «приготовленной» таким образом плотной газовой среды вновь превращаются в исходное вещество – газообразный водород и смесь лептонов и фотонов.

Интенсивность нагрева холодного нейтронно-кваркового вещества в случае столкновения двух объектов из подобной материи и, следовательно, энергетика последующего его разлёта в ударных волнах разрежения и адиабатического охлаждения с образованием водорода будет весьма высокой, если скорость

«лобового» столкновения нейтронно-кварковых останков звёзд будет достаточно велика. В этом случае нагрев будет двухступенчатым (если пренебречь «слабым» нагревом в предвестниковой быстрой ударной волне) и определяться величинами затемнённых областей на фиг. 2B и фиг. 2C (конечно, детали «газодинамических» расчётов будут уже не столь простыми, как в рассмотренных выше двух простейших задачах, но для оценок результирующей интенсивности нагрева можно нагревы на фиг. 2B и фиг. 2C сложить, связав предварительно расчётом величину результирующего максимального давления соударения p_i (фиг. 2C) со скоростью v_0 столкновения рассматриваемых тел, что с помощью описанных выше автомодельных решений делается очень просто – с явными формулами. Эти формулы таковы (при $\rho = \rho_n(p)$ и $\rho = \rho_q(p)$ для нейтронной и кварковой материй, соответственно)

$$p_i = \frac{\rho_0 v_0^2}{1 - \rho_0 / \rho_{ni}} \leq p_*, \quad v_0 \leq v_{0*} = \sqrt{\frac{p_*}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{n*}}\right)}, \quad (24)$$

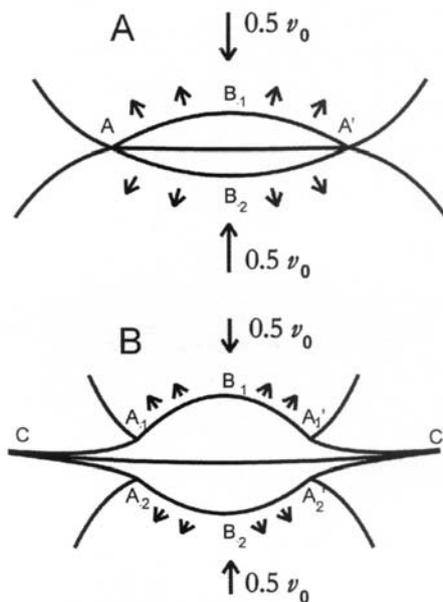
$$\rho_0 = \rho_n(0), \quad \rho_{n*} = \rho_n(p_*);$$

$$p_i = p_* + \frac{\rho_{n*}}{1 - \frac{\rho_{n*}}{\rho_q(p_i)}} (v_0 - v_{0*})^2 \leq p_{i*}, \quad v_{0*} < v_0 \leq v_{0**}, \quad (25)$$

$$v_{0**} = v_{0*} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{q**}}\right) / \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{n*}}\right), \quad \rho_{q**} = \rho_q(p_{i*}), \quad (26)$$

где v_{0**}, p_{i*} – значения v_0 и p_i , соответствующие условиям, когда скорости предвестниковой и основной ударных волн сравниваются (исчезает двухволновая конфигурация);

$$p_i = \frac{\rho_0 v_0^2}{1 - \rho_0 / \rho_{qi}}, \quad v_0 \geq v_{0**}, \quad \rho_{qi} = \rho_q(p_i). \quad (27)$$



Фиг. 3

По этим формулам можно определить давление p_i на пятне контакта двух соударяющихся выпуклых тел на самых ранних стадиях соударения, когда образующиеся в них ударные волны представляют собой очень пологие поверхности и присоединены к границе пятна контакта (фиг. 3A; AA' – проекция пятна контакта, AB_1A' , AB_2A' – проекции ударных волн на плоскость фигуры). С течением времени наступает момент, когда эти поверхности отрываются от границы пятна контакта, и образуется кольцевая быстро

расширяющаяся свободная поверхность (с нулевым давлением на ней), через которую сжатое ударными волнами вещество разлетается в виде тонкой дискообразной струи с огромными скоростями (фиг. 3B; A_1CA_2 , $A_1'C_1A_2'$ – проекция струи). Такая задача о начальной стадии динамики лобового соударения выпуклых тел из обычных материалов с образованием струи была рассмотрена в моей работе [5]; случай косоуго соударения был рассмотрен моим аспирантом В.Дж. Меджлумяном в кандидатской диссертации. Скорости в струе получаются очень большими в сравнении со скоростью соударения V_0 – возникает своеобразный кумулятивный эффект. Для рассматриваемого случая соударения нейтронных и нейтронно-кварковых тел этот эффект, очевидно, имеет важное значение – он, в частности, определяет скорости и конфигурацию облака разлетающейся сильно нагретой материи.

По формулам (24)–(26) можно оценить порядок скоростей соударения, нужных для возникновения ударных волн сжатия и последующего разрежения. Из (24) для V_{0*} получаем при полученных выше оценках для p_* при

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho_{n*}} = 10^{-\kappa} v_{0*} = 10^{-\kappa/2} \sqrt{2.5 \cdot 10^{27} \text{ кг/см}^2 : 10^{14} \text{ г/см}^3} = 10^{-\kappa/2} \cdot 1.6 \cdot 10^4 \text{ км/сек.}$$

И при $\kappa = 2, 4, 6$ получаем, соответственно, $v_{0*} \approx 1.6 \cdot 10^3, 1.6 \cdot 10^2, 16$ км/сек.

Поскольку зависимость $\rho_n = \rho_n(p)$ неизвестна, приведённые значения κ можно принять для оценки порядков величин. Для $v_0 = v_{0**}$ имеем, по (26),

$$v_{0**}/v_{0*} = 10^\kappa \left(1 - \rho_0/\rho_{q**}\right) \approx 10^\kappa \left(\text{ибо } \rho_0/\rho_{q**} \approx \rho_0/\rho_q(p_{i*}) \ll 1\right), \text{ т.е.}$$

получаются значения $v_{0**} \approx 1.6 \cdot 10^5, 1.6 \cdot 10^6, 1.6 \cdot 10^7$ км/сек.

Уже при $\kappa = 2$ получается v_{0**} порядка скорости света c . Поскольку полученные значения v_{0**} очень велики, это означает, что при реальных скоростях соударений состояния с одноволновой конфигурацией недостижимы. Если же $v_0 = a v_{0*}$, то для p_i по (24) и (25) получается

$$p_i - p_* \approx a^2 p_* \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{n*}}\right) = 10^{-\kappa} p_* a^2, \text{ и чтобы при этом было } p_i - p_* \ll p_*,$$

нужно $a \ll 10^{\kappa/2}$. Для принятых выше оценок κ имеем $a \approx 10, 100, 1000$, а для v_0 получаем $v_0 \approx 1.6 \cdot 10^4$ км/сек (независимо от κ !). Полученные числа позволяют оценить нагрев в ударных волнах сжатия, предшествующий нагреву в ударной волне разрежения, – чтобы эти нагревы были одного порядка, нужно иметь скорость соударения $v_0 \approx 1.6 \cdot 10^4$ км/сек.

Рассмотренные выше динамические эффекты, возможные при тесных взаимодействиях нейтронных и нейтронно-кварковых звёзд (их непосредственных столкновениях друг с другом или при близком прохождении, вызывающем

интенсивные приливные эффекты, выводящие их из устойчивого состояния), казалось бы, маловероятны из-за разреженности звёздного «населения» Вселенной. Однако это население собрано в сгустки – звёздные скопления, галактики, скопления галактик, в которых распределение звёзд и газопылевых облаков материи существенно неоднородно – плотность распределения возрастает при приближении к центру скопления и достигает там значительных величин, образуя ядро скопления. Ядра многих галактик активны – наблюдаются мощные радиационные потоки из них – проявления протекающих там интенсивных физических процессов, которые, бесспорно, связаны с тесными взаимодействиями плотных сгустков массы (светящихся и тёмных нейтронных и нейтронно-кварковых звёзд и газопылевых облаков). Факт значительного возрастания со временем плотности распределения звёзд в ядрах скоплений в процессе их эволюции был установлен и теоретически ещё в ранней работе В.А. Амбарцумяна [6]. Таким образом, существует эволюционный механизм образования у звёздных скоплений густонаселённых ядер, где рассмотренные выше динамические эффекты становятся реальными. Об этом свидетельствует, в частности, открытый В.А. Амбарцумяном в конце 40-х годов прошлого столетия факт группового рождения звёзд из единых материнских образований – открытие звёздных ассоциаций, состоящих из очень молодых звёзд. Это открытие привело В.А. Амбарцумяна к формулировке гипотезы о существовании протозвёзд [7] – неких невидимых объектов, которые, разрушаясь взрывным процессом, рождают обычные (светящиеся) звезды. Таким образом, построенная здесь теория подтверждает эту гипотезу В.А. Амбарцумяна, а существование ассоциаций из молодых одновозрастных звёзд подтверждает сделанный из этой теории вывод о реальности динамического распада нейтронно-кварковых звёзд, приводящего к восстановлению из их материи водорода, из которого вновь образуются «обычные» звёзды. Эта теория одновременно является подтверждением и исходной гипотезы Митчелла – Лапласа о существовании «тёмных» звёзд. Из этой теории также следует объяснение природы т.н. тёмной материи во Вселенной, т.е. факта необходимости предположения о существовании в звёздных системах (скоплениях, галактиках) невидимой массы, гравитационное воздействие которой на видимые (светящиеся) звёзды позволяет количественно «свести концы с концами» в динамике этих систем (при этом оказывается, что тёмная материя составляет около 90% всей массы системы). В самом деле, поскольку, с одной стороны, в основном объёме звёздной системы (вне её ядра) звёзды расположены очень далеко друг от друга, так что их столкновения маловероятны, а с другой стороны, продолжительность «жизни» светящихся звёзд относительно мала в сравнении с таковой для самих звёздных систем, то из этого следует, что основной объём этих систем «заселён» уже «умершими» звёздами – нейтронными и нейтронно-кварковыми звёздами, которые «живут» там неопределённо долго, лишённые возможности тесных взаимодействий с последующей регенерацией водорода. Новые же светящиеся звёзды в этот объём заносятся коллективной динамикой в плотном по населению ядре, где процессы регенерации водорода из звёздных останков возможны и постоянно протекают. Здесь уместно ещё отметить, что выявляемое наблюдениями существование в активных ядрах галактик «чёрных дыр» с массами порядка 10^6 – 10^{10} масс Солнца не

обязательно означает, что эти образования представляют собой единые объекты, – это могут быть скопления нейтронных и нейтронно-кварковых звёзд, и коллективное их воздействие на соседние объекты (обычные звёзды, газовые и пылевые облака), порождающее множественную аккрецию материи на них, формирует суммарный эффект рентгеновского и иных излучений, регистрируемых наблюдениями. К числу этих «иных» излучений следует отнести космические лучи – потоки частиц с очень высокими энергиями. Таким образом, построенная здесь теория объясняет также и природу генерирования космических лучей. Здесь же отметим, что она может дать объяснение и вероятной природы квазаров.

Наконец, нужно отметить, что ещё в работе [8] я высказал гипотезу о возможности существования «чёрных дыр» малой плотности – разреженных «островных» систем во Вселенной, у которых гравитационный радиус больше радиуса (размера) самого материального скопления. В такой системе излучение (фотоны) будет «заперто», оно будет в нём неограниченно «блуждать», поглощаться сгустками массы и переизлучаться, в результате образуется некий средний фон равновесного излучения. В работе [8] высказана гипотеза о том, что наблюдаемая часть Вселенной, вероятно, и есть такая островная система, а так называемое реликтовое излучение – такой фон запертого в «чёрной дыре» равновесного излучения. Это заключение хорошо согласуется с установленными наблюдениями фактом очень малой величины равновесной чернотельной температуры (единицы градусов Кельвина) реликтового излучения, поскольку основное население этой системы – холодные тёмные останки светящихся звёзд. Построенная теория подтверждает высокую вероятность реальности положений и этих двух гипотез.

В той же работе [8] высказано также предположение о том, что так называемый Большой взрыв – это событие в конечной наблюдаемой части Вселенной, в такого рода островной системе. Здесь к этому можно добавить, что это событие могло быть результатом сжатия островной системы на определённой стадии её эволюции, когда основная её масса собралась к центру в виде плотного скопления «умерших» звёзд, которое по описанному здесь механизму «взорвалось» и превратило всю эту массу в разлетающуюся сильно нагретую «элементарную» материю, а далее всё происходило по существующей ныне теории эволюции Большого взрыва.

В заключение следует сказать, что изложенное выше представляет собой простейшее построение, основанное на теории тяготения Ньютона и современных представлениях о физике микромира, показывающее, что «чёрные дыры» это вполне «нормальные» физические образования без каких-либо сингулярностей, согласующееся с существующими представлениями о строении материи и управляющих её «жизнью» силах и не требующее интеллектуальных сверхусилий для размещения этих образований в прокрустовом ложе ОТО, которая приводит к неприемлемым физическим предсказаниям и поэтому непригодна для описания природных явлений. Конечно, построенная здесь конструкция может претерпеть какие-то количественные изменения в деталях, если использовать теорию гравитации, приемлемым образом уточняющую закон тяготения Ньютона и не порождающую сингулярностей. Но всё это уже «не принципиально».

Основные положения представленной выше теории и моей теории аккреции (упомянуто в тексте) были доложены на Ломоносовских чтениях в МГУ в 2005 г., и в 2006 г. и на трёх международных конференциях в 2005 г.: в Центре управления полётами (г. Королёв), в г.Уфа (конференция была посвящена 65-летию академика Р.И. Нигматулина) и в г.Горис (Армения). Краткая статья опубликована в трудах последней конференции [9].

В заключение я выражаю глубокую благодарность академику А.М. Черепашуку за предоставление основных публикаций по проблеме, а также Е.Н. Швориной, А.К. Цатуряну и Д.А. Шестакову за помощь в оформлении работы.

Работа поддержана грантом РФФИ N 05-01-01117 и госконтрактом N 02.445.11.7502.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оппенгеймер Ю.Р., Волков Г.М. О массивных нейтронных сердцевирах. *Phys. Rev.*, 55, 374 (1939).
2. Оппенгеймер Ю.Р., Снайдер Т. О безграничном гравитационном сжатии. *Phys. Rev.*, 56, 455(1939).
3. Сисакян А.Н. Избранные лекции по физике частиц. Дубна: ОИЯИ, 2004. 377 с.
4. Григорян С.С. О некоторых специальных вопросах термодинамики сплошных сред.// ПММ. 1960. Т.24. Вып.4. С. 651-662.
5. Григорян С.С. О динамике начальной стадии соударения тел с большими скоростями. // В сб.: «Некоторые вопросы механики сплошной среды», под ред. С.С. Григоряна. Изд. МГУ, 1978. С.157-172.
6. Амбарцумян В.А. Ученые записки МГУ, 1938, т. 22, с.19.
7. Амбарцумян В.А. О протозвездах. //ДАН Арм.ССР. 1953. Т.16. С.97-102.
8. Григорян С.С. О динамике и строении Вселенной. //В сб.: «Проблемы современной механики». Ч. 1, под ред. Л.И. Седова. М.: Изд. МГУ, 1983.
9. Григорян С.С. О природе наблюдаемых во Вселенной «чёрных дыр». Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Тр. V Международной конференции. 1-7 октября. Горис (Армения). Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. С.157–162.

Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
19.03.2007

УДК 539.3, 624.04

СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ
 КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Баблоян А.А., Багдасарян А.В.

Ключевые слова: полуплоскость, отверстие, трещина, напряжение, перемещение.
Key words: half-plane, opening, crack, tension, displacement.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան

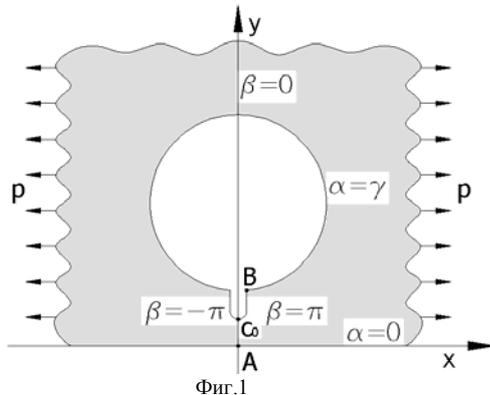
Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ներքին ճարով թուլացված կիսահարթության համար

Բերվում է կլոր անցքով և կիսահարթության եզրին ուղղահայաց ուղղաձիգ ներքին ճարով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը: Անցքի և կիսահարթության եզրերին, ինչպես նաև ճարի ափերին ազդում են սիմետրիկ բաշխված նորմալ բեռնվածքներ: Անվերջության վրա կիսահարթությունը ձգվում է հավասարաչափ բաշխված p ինտենսիվության բեռնվածքով (նկար-1):

A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan

Symmetric Problem of Elasticity Theory for a Half-Plane Weakened with a Round Opening and an Internal Crack

The article presents the solution of a symmetric problem of elasticity theory for an elastic half-plane weakened by a round opening and a rectilinear internal crack, the latter being perpendicular to the edge of the half-plane. Symmetrically distributed normal loadings are given at the edges of the opening, the half-plane and banks of the split. On the infinity the half-plane spreads by equally distributed loadings with p intensity (fig.1).



Приводится решение задачи теории упругости для упругой полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и внутренней прямолинейной трещиной, перпендикулярной к границе полуплоскости. Трещина начинается от края отверстия и продолжается до точки c_0 . На границах отверстия, полуплоскости и на берегах трещины задаются симметрично распределенные нормальные нагрузки. На бесконечности полуплоскость растягивается равномерно распределенными нагрузками интенсивности p (фиг.1).

Задачу будем решать методом Фурье с использованием биполярной системы координат [1].

$$x = \frac{a \sin \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad x + iy = ai \operatorname{cth} \frac{\alpha + i\beta}{2} \quad (1)$$

Граничные условия для половины области будут:

$$a\sigma_\alpha(0, \beta) = f_1(\beta), \quad a\sigma_\alpha(\gamma, \beta) = f_2(\beta), \quad (0 \leq \beta \leq \pi) \quad (2)$$

$$\tau_{\alpha\beta}(0, \beta) = 0, \quad \tau_{\alpha\beta}(\gamma, \beta) = 0, \quad (0 \leq \beta \leq \pi), \quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha, \pi) = 0, \quad (0 \leq \alpha \leq \gamma) \quad (3)$$

$$a\sigma_\beta(\alpha, \pi) = f_0(\alpha), \quad (c_0 \leq \alpha \leq \gamma), \quad v(\alpha, \pi) = v_0, \quad (0 \leq \alpha \leq c_0) \quad (3)$$

Бигармоническую функцию Эйри ищем в виде

$$g\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta) \cos \delta_m \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\alpha) \cos n\beta \quad (4)$$

Функции Φ_0 , $a_m(\beta)$ и $b_n(\alpha)$, а также формулы для напряжений и перемещений приведены в работах [–3]. Удовлетворяя граничным условиям и рассматривая полученные соотношения как неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка, после ряда преобразований, для определения неизвестных коэффициентов в (4) получим бесконечные системы:

$$\begin{aligned} \chi_n X_n + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m \delta_m}{\gamma \Delta(m,n)} &= (-1)^n \int_0^{\pi} [w_1(\beta) + w_2(\beta)] \cos n\beta d\beta - \\ &- \frac{\pi(-1)^n}{2} \left[\frac{d_n(0) - d_n(\gamma)}{n+1} \operatorname{cth} \frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) + d_n(\gamma) \right] \quad (n=1,2,\dots) \\ \eta_n Y_n + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8Z_m \delta_m}{\gamma \Delta(m,n)} &= (-1)^n \int_0^{\pi} [w_1(\beta) - w_2(\beta)] \cos n\beta d\beta - \\ &- \frac{\pi(-1)^n}{2} \left[\frac{d_n(0) + d_n(\gamma)}{n+1} \operatorname{th} \frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) - d_n(\gamma) \right] \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 1, \quad \chi_n = \frac{\operatorname{sh}(n\gamma) + n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2 - 1)[\operatorname{ch}(n\gamma) - \operatorname{ch}\gamma]}, \quad (n=2,3,\dots) \\ \eta_1 &= \frac{\gamma - \operatorname{th}\gamma}{4}, \quad \eta_n = \frac{\operatorname{sh}(n\gamma) - n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2 - 1)[\operatorname{ch}(n\gamma) + \operatorname{ch}\gamma]}, \quad (n=2,3,\dots) \\ \Delta(m,n) &= \delta_m^4 + 2(n^2 + 1)\delta_m^2 + (n^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные X_0, Y_0 будем определять из уравнений

$$\begin{aligned} &\pi(d_0(0) + d_0(\gamma) + X_0 [\operatorname{ch}\gamma + 1 + \gamma \operatorname{cth}(\gamma/2)]) + \\ &+ \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m \delta_m}{\gamma \Delta(m,n)} = \int_0^{\pi} [w_1(\beta) + w_2(\beta)] d\beta \\ &\pi(d_0(0) - d_0(\gamma) + Y_0 [\operatorname{ch}\gamma - 1 - \gamma \operatorname{th}(\gamma/2)]) + \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8Z_m \delta_m}{\gamma \Delta(m,n)} = \int_0^{\pi} [w_1(\beta) - w_2(\beta)] d\beta \end{aligned} \quad (7)$$

Соответствующие (5)–(7) обозначения приведены в работе [3]. Нормы систем (5) не превосходят $2/\pi$. Из смешанных граничных условий (3) получаются парные тригонометрические уравнения. С использованием результатов [4,5] эти парные уравнения сводятся к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

$$2A_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k} A_k = b_m, \quad (m=1,2,\dots) \quad (8)$$

$$\text{где} \quad a_{m,k} = kN_k \int_c^{\pi} z_m(\cos\theta) z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m,k}| = O(m^{-0.5}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
b_m &= m \int_0^c F_1(\theta) z_m(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - m \int_c^\pi F_2(\theta) z_m(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
z_m(x) &= P_m(x) - P_{m+1}(x), \quad y_m(x) = P_m(x) + P_{m+1}(x) \\
F_1(\theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{g_1'(x) \sin(x/2) dx}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}}, \quad F_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{g_2(z) \sin(x/2) dx}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \\
A_m &= \frac{2\delta_m^2 Z_m}{\gamma(1 + \delta_m^2)}, \quad g_1'(x) = -\frac{2\mu v_0}{1 - \nu} \operatorname{sh} \alpha + \frac{\pi}{2} [b_0'(\alpha) + b_0'''(\alpha)] \\
g_2(x) &= \Phi_0''(\alpha, \pi) - w_0''(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n''(\alpha)
\end{aligned} \tag{10}$$

С использованием бесконечных систем (8) вычисляются значения следующих рядов:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} A_m \cos(mx) &= 2g_1(0) - \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \left\{ \int_c^x \frac{F_2(\theta) \operatorname{ctg}(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} A_k N_k \int_c^\pi \frac{z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg}(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} - \int_0^c \frac{F_1(\theta) \operatorname{ctg}(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \right\} \quad (c \leq x \leq \pi)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} A_m (1 + N_m) \cos(mx) &= 2^{-1/2} \cos \frac{x}{2} \left\{ -\frac{K_I}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} - \int_x^c \frac{F_1'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \right. \\
&\left. \sum_{k=1}^{\infty} k^2 A_k N_k \int_x^c \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg}(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \int_c^\pi \frac{F_2'(\theta) \operatorname{ctg}(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \right\} + g_2(\pi)
\end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициент интенсивности напряжений –

$$K_I = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k N_k \cos c - F_1(c) + F_2(c) \tag{13}$$

Доказательство регулярности уравнений (8) приведено в работах [4,5].

С использованием значений рядов (11) и (12) легко вычисляются значения контактных напряжений в области $(0 \leq \alpha < c)$ и нормальных перемещений $v(\alpha, 0)$ в области $(c_0 \leq \alpha \leq \gamma, \beta = 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
2. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: ГТТИ, 1950.
3. Баблоян А.А., Багдасарян А.В. Симметричная задача для полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.15–22.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. /Докторская диссертация. – Ленинград: 1979, 346 с.

Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
23.05.2007

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В.

Ключевые слова: нестационарная, смешанная, граничная, штамп, полупространство.

Keywords: unsteady, mixed, boundary, punch, halfspace.

Ա.Գ. Բագդոև, Ա.Վ. Վարդանյան, Ս.Վ. Վարդանյան

Առաձգական կիսատարածության համար ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդրի լուծումը

Դիտարկվում է իզոտրոպ առաձգական կիսատարածության համար խառը եզրային խնդիր: Ենթադրվում է, որ մի եզրն ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրում սրված են տեղափոխությունները: Խնդիրը Լապլասի և Ֆուրյեի ձևափոխությունների միջոցով բերվում է երեք հավասարումից բաղկացած Վիներ-Հոփի հավասարումների համակարգի: Վերջիններս բերվում են երեք հատ Ֆրեդհոլմի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որը լուծվում է թվային եղանակով: Ստացված են լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները:

A.G. Bagdоеv, A.V. Vardanyan, S.V. Vardanyan

The solution of non stationary mixed boundary value problem for elastic half space

The problems of solution of elastic half space motion parameters when on its boundary are given mixed conditions in stresses and displacements forms are considered. The solution is obtained by method of integral transforms Laplace and Fourier and solution of three Winner-Hopf equations, which is carried out to system of Fredholm integral equations. The numerical solution is done. The stress intensity coefficients are calculated.

Рассматривается задача определения напряжений на границе упругого полупространства по заданным перемещениям. Решение находится методом интегральных трансформант Лапласа и Фурье, оно приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, которая решается путем приведения к системе трех интегральных уравнений Фредгольма. Получены численные решения.

1. Постановка задачи и ее сведение к системе Винера-Хопфа. Рассматривается задача движения изотропного, упругого полупространства $z \geq 0$, на границе которого $z = 0$ вдоль полуплоскости $x \geq 0$ заданы перемещения $u_{1,2,3}$, а вне нее граница свободна от напряжений. Эта задача является обобщением задачи [1,2] о передаче перемещений от пластины, контактирующей с полупространством, с учетом граничного условия также и для нормального перемещения. Решение рассматриваемых динамических смешанных граничных задач для полупространства получается методом интегральных преобразований, приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, или, что то же самое, к векторной задаче Гильберта, которая сводится к системе [3-7] трех интегральных уравнений Фредгольма. Дается численное решение задачи путем обращения интегральных преобразований [8] с определением коэффициентов интенсивности напряжений. В ходе решения используется известная особенность около края, разделяющего граничные условия, которая известна из решения соответствующей статической плоской задачи теории упругости [9]. Динамические задачи о дифракции сдвиговых волн на полубесконечных включениях и конечных трещин другими методами решены в работах [10-12]. Плоская динамическая задача, подобная пространственной задаче [1], решена в [13]. Пространственные стационарные динамические задачи о штампе исследованы другим подходом в [16].

Уравнения теории упругости имеют вид $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$,

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b^2 \Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где по повторяющимся индексам суммируется от 1 до 3, $j=1,2,3$, Δ есть оператор Лапласа, a, b есть скорости продольных и поперечных волн.

Граничные условия имеют вид ($z=0, |y| < \infty$),

$$\sigma_{zz} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, -\infty < x < 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -P\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t), \quad u_2 = -Q\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t) \\ u_3 &= -R\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t) \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, P, Q, R, ξ', η' – постоянные. Это есть задача определения функции Грина, из решения которой можно получить решение общей задачи для произвольных условий для $u_{1,2,3} \cdot U_{1,2,3}^0(t, x, y)$, обозначая полученные далее решения задач (1.2), (1.3)

$$U_j = PU_j^P(t, x - \xi', y - \eta') + QU_j^Q + RU_j^R, \quad j=1,2,3$$

соответственно, для перемещений при $z=0$, в виде

$$\begin{aligned} U_j(t, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t \left\{ \frac{\partial U_1^0(\tau, \xi'', \eta'')}{\partial \tau} U_j^P(t - \tau, x - \xi'', y - \eta'') + \right. \\ \left. + \frac{\partial U_2^0(\tau, \xi'', \eta'')}{\partial \tau} U_j^Q(t - \tau, x - \xi'', y - \eta'') + \right. \\ \left. + \frac{\partial U_3^0(\tau, \xi'', \eta'')}{\partial \tau} U_j^R(t - \tau, x - \xi'', y - \eta'') \right\} d\tau d\xi'' d\eta'' \end{aligned}$$

В заключительной части статьи приводится также решение для включаемых при $t=0$ постоянных перемещений на поверхности $z=0, x>0$, заданных на прямоугольнике, вне которого перемещения отсутствуют. Обозначая через \bar{U}_j преобразование Лапласа по t от u_j , а через $\bar{\bar{U}}_j$ преобразование Фурье по x, y от $\bar{U}_j|_{z=0}$, можно написать решение в виде:

$$\bar{\bar{U}}_j = \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{U}}_j^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \exp(\bar{\alpha}ix + \bar{\beta}iy + \bar{\gamma}_n iz) d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим соотношения

$$\bar{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad s = -i\omega, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b \quad (1.5)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, и

$$\bar{\bar{U}}_2^{(1)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}, \quad \bar{\alpha} \bar{\bar{U}}_1^{(2)} + \bar{\beta} \bar{\bar{U}}_2^{(2)} + \bar{\gamma}_2 \bar{\bar{U}}_3^{(2)} = 0, \quad \bar{\bar{U}}_3^{(1)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.4) в граничные условия (1.2), (1.3) и обращая преобразования Фурье по x, y , можно получить:

$$\begin{aligned}
i\bar{U}_1^{(1)} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2} + i\bar{U}_1^{(2)}\bar{\gamma}_2 + \frac{i\bar{\alpha}\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho} &= \frac{\tau_{xz}^-}{b^2\rho} \\
i\bar{U}_2^{(1)} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2} + i\bar{U}_2^{(2)}\bar{\gamma}_2 + \frac{i\bar{\beta}\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho} &= \frac{\tau_{yz}^-}{b^2\rho} \\
\bar{U}_3^{(2)} &= -\frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(1)} + \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho} \\
\bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_1^{(2)} &= P\varphi_0 + U_1^+, \quad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_2^{(2)} = Q\varphi_0 + U_2^+ \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3^{(1)} + \bar{U}_3^{(2)} &= R\varphi_0 + U_3^+, \quad \frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(1)} - \bar{\alpha}\bar{U}_1^{(2)} - \bar{\beta}\bar{U}_2^{(2)} = 0 \\
\varphi_0 &= -\frac{\exp(-i\bar{\alpha}\xi' - i\bar{\beta}\eta')}{4\pi^2 s}
\end{aligned}$$

$$U_{1,2,3}^+ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-st - i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}y} U_{1,2,3}(t, x, y, 0) dt \quad (1.8)$$

$$\tau_{xz, yz}^-, \sigma_{zz}^- = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-st - i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}y} \tau_{xz, yz}^-, \sigma_{zz}^- dt$$

где индекс (+) означает функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) – функции, аналитические в нижней полуплоскости.

2. Решение системы Винера-Хопфа. Исключая из (1.7) функции $\bar{U}_{1,2,3}$, можно получить систему трех уравнений Винера-Хопфа, которая после введения обозначений в безразмерных переменных величинах

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\eta, \quad \bar{\beta} = \frac{\omega}{\alpha}\lambda, \quad \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{\omega}{\alpha}\gamma_{1,2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - \eta^2 - \lambda^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2 - \lambda^2}$$

в матричной форме примет вид:

$$A\Phi^+ + B\Phi^- + C = 0 \quad (2.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 f & a_0 & 0 \\ a_3 \eta & a_3 \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \chi\lambda \\ 0 & 1 & \chi\eta \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\Phi^+ = \gamma_1^+ \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_3^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi^- = \frac{ia}{b^2\rho\omega\gamma_1^-} \begin{pmatrix} \tau_{yz}^- \\ \tau_{xz}^- \\ -\sigma_{zz}^- \end{pmatrix}, \quad C = \gamma_1^+ A \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \varphi_0 \quad (2.3)$$

$$\gamma_1^\pm(\eta) = \sqrt{\sqrt{1-\lambda^2} \pm \eta}$$

$$\gamma_2 a_0(\eta) = (4\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_2^2 + \eta^2 + \lambda^2)\lambda\eta$$

$$\gamma_2 a_1(\eta) = 4\gamma_1\gamma_2\lambda^2 + (\gamma_2^2 - \lambda^2)^2 + \eta^2(\gamma_2^2 + \lambda^2) \quad (2.4)$$

$$\gamma_2 a_1(\eta)f(\eta) = 4\gamma_1\gamma_2\eta^2 + (\gamma_2^2 - \eta^2)^2 + \lambda^2(\gamma_2^2 + \eta^2)$$

функции a_0, a_1, f зависят от λ как от параметра. Кроме того, в (2.2)

$$a_2 = \frac{b^2}{\gamma_2 a^2}(\gamma_1\gamma_2 + \eta^2 + \lambda^2), \quad \gamma_2 a_3 = \frac{b^2}{a^2}(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2^2 + \eta^2 + \lambda^2) \quad (2.5)$$

$$\gamma_2 \chi = \frac{b^2}{a^2}(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2^2 + \eta^2 + \lambda^2)$$

Система Винера-Хопфа (2.1) запишется в виде задачи Гильберта

$$\Phi^+ = G\Phi^- + g \quad (2.6)$$

где

$$G = -A^{-1}B, \quad g = -\gamma_1^+ \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \Phi_0 \quad (2.7)$$

Следует отметить, что в первоначальной переменной $\bar{\alpha}$ матрица $G(\bar{\alpha})$ имеет в

знаменателе множители $\left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{C_R}\right)\left(\bar{\alpha} + \frac{\omega}{C_R}\right)$, где C_R есть скорость волн Релея.

Однако, как показано в [14,15], параметр ω в преобразовании Лапласа может быть предположен комплексным с малой положительной мнимой частью, и поэтому $G(\bar{\alpha})$ для действительных $\bar{\alpha}$ не имеет особенностей. Эти факты относятся также к точкам ветвления $\pm \frac{\omega}{a}, \pm \frac{\omega}{b}$. Переходя к безразмерной переменной η , можно

интегрирование по ξ проводить вблизи отмеченных точек $\pm \frac{a}{C_R}, \pm 1, \pm \frac{a}{b}$ в комплексной плоскости, и снова $G(\xi)$ не имеет особенностей и теория [3] применима.

Решение уравнения (2.6) можно найти в виде [3]

$$\Phi(\eta) = \frac{X(\eta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{X^+(\xi)\}^{-1} \frac{g(\xi)}{\xi - \eta} d\xi \quad (2.8)$$

где матрицы $X = X^+ X^-$ удовлетворяют однородной задаче Гильберта

$$X^+ = GX^- \quad (2.9)$$

или в форме факторизации

$$G = X^+(X^-)^{-1} \quad (2.10)$$

Как показано в [3], задача определения X^- может быть приведена к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$X^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\eta)G(\xi) - E}{\xi - \eta} X^-(\xi) d\xi = \gamma(\eta) \quad (2.11)$$

где матрица $\gamma(\eta)$ представляет собой аналитическое поведение $X^-(\eta)$ для больших η .

3. Численное решение граничных задач. Таким образом, нужно факторизовать матрицу $G(\eta)$, которая на прямой $(-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию H , но проверив ее поведение для $\eta \approx \infty$.

Из (2.4), (2.5) получится

$$\begin{aligned} a_0 &\approx \frac{2\frac{b^2}{a^2} - 1}{i} \lambda \operatorname{sgn} \eta, \quad a_1 \approx i|\eta| \\ a_1 f &\approx \frac{2\frac{b^2}{a^2} - 1}{i} |\eta|, \quad a_2 \approx \frac{\frac{b^2}{a^2} + 1}{2i|\eta|} \\ a_3 &\approx \frac{b^2}{a^2 i |\eta|}, \quad \chi = \frac{b^2}{a^2 i |\eta|} \end{aligned} \quad (3.1)$$

и из (2.2) получится

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{b^2}{a^2} & & & \\ 2\frac{b^2}{a^2} \lambda \operatorname{sgn} \eta & i|\eta| & & 0 \\ & 1 + \frac{b^2}{a^2} & & \\ 2\frac{b^2}{a^2} |\eta| & 2\frac{b^2}{a^2} \lambda & -1 & \\ & & 1 + \frac{b^2}{a^2} & \\ \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} \eta & 2\frac{b^2}{a^2} \lambda & -1 & \end{pmatrix}, \quad B \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b^2}{a^2 i |\eta|} \lambda \\ 0 & 1 & \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} \eta \\ & & 1 + \frac{b^2}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{2i|\eta|} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Отсюда можно получить, учитывая, что из (2.7) в основном порядке члены с λ не дают вклада в G .

$$G(\eta) \approx \frac{1}{2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i\frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta \\ 2 - 2\frac{b^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Как видно, матрица $G(\eta)$ имеет разрыв первого рода при $\eta = \pm\infty$, который следует устранить. Согласно [3] можно получить особенность решения системы (2.1), вводя $\kappa = \frac{1}{\eta}$ при $\kappa = \pm 0$, изучая уравнение

$$\left| G^{-1}(+0)G(-0) - \bar{\lambda}E \right| = 0 \quad (3.4)$$

Тогда, с учетом (3.3) получится

$$\bar{\lambda}_1 = 1, \bar{\lambda}_2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \bar{\lambda}_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (3.5)$$

и если полагать $\bar{\lambda} = e^{2\pi s_2}$, особенность решения будет [3]

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{\frac{1}{2} + is_2}, s_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (3.6)$$

что соответствует, после обратного преобразования по x , особенности при $x \approx 0$, $x^{-1/2}$, $x^{-1/2 \pm is_2}$, последняя известна для решения плоской задачи о штампе [9].

Из (2.1) можно в раскрытом виде записать, полагая $(\bar{\tau}_{yz}^-, \bar{\tau}_{xz}^-, \bar{\sigma}_{zz}^-) = \frac{\omega}{a} (\bar{\tau}_{yz}^-, \bar{\tau}_{xz}^-, \bar{\sigma}_{zz}^-)$,

$$\begin{aligned} a_0 U_1^+ \gamma_1^+ + a_1 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_3 \lambda \frac{\bar{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + P \varphi_0 a_0 \gamma_1^+ + Q \varphi_0 a_1 \gamma_1^+ &= 0 \\ a_1 f U_1^+ \gamma_1^+ + a_0 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{xz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_3 \eta \frac{\bar{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_1 f P \varphi_0 \gamma_1^+ + Q \varphi_0 a_0 \gamma_1^+ &= 0 \\ a_3 \eta U_1^+ \gamma_1^+ + a_3 \lambda U_2^+ \gamma_1^+ - U_3^+ \gamma_1^+ + \\ + a_2 \frac{\bar{\sigma}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + P \varphi_0 a_3 \eta \gamma_1^+ + Q \varphi_0 \lambda a_3 \gamma_1^+ - R \varphi_0 \gamma_1^+ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу (3.1) для $|\eta| \sim \infty$ в первом уравнении в основных порядках получится

$$U_2^+ \gamma_1^+ + \frac{i \bar{\tau}_{yz}^-}{b^2 \rho \gamma_1^-} + \gamma_1^+ \varphi_0 Q = 0 \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что задача для компонент перемещений и напряжений по оси y разделяется от задачи для соответствующих компонент по осям x, z , причем для первой задачи в соответствии с первым корнем в (3.5), имеет место непрерывное на оси η значение коэффициента для $U_2^+ \gamma_1^+$, $\frac{\bar{\tau}_{yz}^-}{\gamma_1^-}$ при $|\eta| \approx \infty$, и получится порядок

этих решений $\frac{1}{\eta}$, т.е. для τ_{yz} особенность $x^{-1/2}$. Оставшиеся два уравнения для $|\eta| \approx \infty$ дают при удерживании только слагаемых, влияющих на особенность, после отбрасывания свободных членов с φ_0

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) U_1^+ \gamma_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-} - i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} \eta U_1^+ \gamma_1^+ - U_3^+ \gamma_1^+ &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда получают уравнения

$$\begin{aligned}
U_1^+ \gamma_1^+ - i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta U_3^+ \gamma_1^+ &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \\
\frac{b^2}{a^2} i \operatorname{sgn} \eta U_1^+ \gamma_1^+ + U_3^+ \gamma_1^+ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Обозначая [12]

$$\left(U_1^+ \pm i U_3^+ \right) \gamma_1^+ = V_{1,2}^+, \quad \frac{\bar{\tau}_{xz}^- \pm i \bar{\sigma}_{zz}^-}{2 b^2 i \rho \gamma_1^-} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = \Omega_{1,2}^- \tag{3.10}$$

можно из (3.9) получить скалярные уравнения

$$V_1^+ - \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta V_1^+ = \Omega_1^-, \quad V_2^+ + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} \eta V_2^+ = \Omega_2^- \tag{3.11}$$

Каждое уравнение является скалярной однородной задачей Гильберта с разрывными коэффициентами при $\frac{1}{\eta} = \pm 0$:

$$V_1^+ \bar{g}(\eta) = \Omega_1^-, \quad V_2^+ \bar{g}(-\eta) = \Omega_2^- \tag{3.12}$$

Отношения коэффициентов в левых частях в точке $\frac{1}{\eta} = -0$ к их значениям в точке $\frac{1}{\eta} = +0$, будут соответственно, $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, причем для $|\eta| \approx \infty$

выражение $\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+} \right)^{2is_2} = e^{2is_2 \left(\ln \left| \frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+} \right| + i \arg \frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+} \right)}$, $\arg \frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$ изменится при движении от

$\eta = -\infty$ до $\eta = \infty$, от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и отношение указанного выражения при $\eta = -\infty$ к значению при $\eta = \infty$ будет $e^{2\pi s_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, поэтому, умножив (3.11),

соответственно, на $\left(\gamma_1^- / \gamma_1^+ \right)^{\pm 2is_2}$, получим непрерывные коэффициенты $\bar{g}_1(\pm\eta) = \bar{g}(\pm\eta) \left(\gamma_1^- / \gamma_1^+ \right)^{\pm 2is_2}$ уравнений (3.12) для функций $\tilde{\phi}^+$, $\tilde{\psi}^+$, $\Omega_{3,4}^-$ где

$$\begin{aligned}
V_1^+ &= \tilde{\phi}^+ \left(\gamma_1^+ \right)^{-2is_2}, \quad V_2^+ = \tilde{\psi}^+ \left(\gamma_1^+ \right)^{2is_2} \\
\Omega_1^- &= \Omega_3^- \left(\gamma_1^- \right)^{-2is_2}, \quad \Omega_2^- = \Omega_4^- \left(\gamma_1^- \right)^{2is_2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Приведенные соотношения об изменении аргументов степеней γ_1^\pm после формулы (3.12) наглядны для размерных функций $\bar{\gamma}_1^\pm(\bar{\alpha}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2} \pm \bar{\alpha}}$, для которых $\bar{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2}$ значения находятся в верхней и нижней полуплоскостях, и

остаются в силе для безразмерных функций $\gamma_1^\pm(\eta)$.

Из (3.10), (3.13) можно получить

$$U_1^+ \gamma_1^+ = \frac{1}{2} \tilde{\phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2}, \quad U_3^+ \gamma_1^+ = \frac{1}{2i} \tilde{\phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} - \frac{1}{2i} \tilde{\psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} \quad (3.14)$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-} = \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} + \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2}, \quad \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{b^2 \rho \gamma_1^-} = \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} - \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2}$$

и подставить в исходную систему (3.7), которую следует записать для функций $\tilde{\phi}^+$, $\tilde{\psi}^+$, $\Omega_{3,4}^-$ и преобразовать подобно преобразованию для больших η системы (3.9).

Первое уравнение (3.7) дает, с учетом того, что U_2^+ и $\bar{\tau}_{yz}^-$ не заменяются,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 \tilde{\phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} + \frac{1}{2} a_0 \tilde{\psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} + a_1 U_2^+ \gamma_2^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} - a_3 \lambda \frac{i \gamma_1}{2} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} + \\ + a_3 \lambda \frac{i \gamma_1}{2} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} + P \phi_0 a_0 \gamma_1^+ + Q \phi_0 a_1 \gamma_1^+ = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так же, как при выводе (3.9), следует подставить из третьего уравнения (3.7) первое слагаемое во второе уравнение и получить

$$\begin{aligned} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2) U_1^+ \gamma_1^+ + a_3 \eta U_3^+ \gamma_1^+ + (a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda) U_2^+ \gamma_1^+ = \frac{\bar{\tau}_{xz}^- \gamma_1 a_2}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + \\ + (a_3^2 \eta^2 - a_1 f) P \phi_0 \gamma_1^+ + (a_3^2 \eta \lambda - a_0) Q \phi_0 \gamma_2^+ - a_3 \eta R \phi_0 \gamma_1^+ \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следует совместно решать систему (3.15), (3.16) и третье уравнение (3.7), причем последние два уравнения в переменных (3.10), (3.13) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 + \frac{a_3 \eta}{i} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - \frac{a_3 \eta}{i} \right) + \\ + (a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda) \gamma_1^+ U_2^+ = \frac{\gamma_1}{b^2} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} a_2 + \frac{\gamma_2}{b^2} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} a_2 + \\ + \frac{\gamma_1}{a^2 + 1} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} a_2 + \frac{\gamma_2}{a^2 + 1} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} a_2 + \\ + (a_3^2 \eta^2 - a_1 f) P \phi_0 \gamma_1^+ + (a_3^2 \eta \lambda - a_0) Q \phi_0 \gamma_1^+ - a_3 \eta R \phi_0 \gamma_1^+ \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} \left(a_3 \eta - \frac{1}{i} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} \left(a_3 \eta + \frac{1}{i} \right) + \\ + a_3 \lambda \gamma_1^+ U_2^+ = - \frac{\gamma_1}{b^2} \frac{a_2}{i} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} + \frac{\gamma_1}{b^2} \frac{a_2}{i} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} - \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$- a_3 \eta P \phi_0 \gamma_1^+ - a_3 \lambda Q \phi_0 \gamma_1^+ + R \phi_0 \gamma_1^+$$

далее следует к (3.17a) прибавить и вычесть, умноженное на i , (3.17b), тогда получится система

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 1) + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 + 2ia_3 \eta + 1) + \\ & + (a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda + ia_3 \lambda) \gamma_1^+ U_2^+ = \frac{2\gamma_2}{(b/a)^2 + 1} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} a_2 + \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} & + (a_3^2 \eta^2 - a_1 f - ia_3 \eta) P \varphi_0 \gamma_1^+ + (a_3^2 \eta \lambda - a_0 - ia_3 \lambda) Q \varphi_0 \gamma_1^+ + (i - a_3 \eta) R \varphi_0 \gamma_1^+ \\ & \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 + 2 \frac{a_3 \eta}{i} + 1 \right) + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 1) + \\ & + (a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda - ia_3 \lambda) \gamma_1^+ U_2^+ = \frac{2a_2 \gamma_2}{(b/a)^2 + 1} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} + \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$+ (a_3^2 \eta^2 - a_1 f + ia_3 \eta) P \varphi_0 \gamma_1^+ + (a_3^2 \eta^2 - a_0 + ia_3 \lambda) Q \varphi_0 \gamma_1^+ - (i + a_3 \eta) R \varphi_0 \gamma_1^+$$

Система (3.15), (3.18a), (3.18b) связывает векторы

$$\Phi_1^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}^+ \\ \tilde{\Psi}^+ \\ \bar{U}_2^+ \gamma_1^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{pmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \\ \frac{\bar{\tau}_{yz}}{b^2 i \rho \gamma_1^-} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

При $|\eta| \approx \infty$ из (3.18a) выпадает $\tilde{\Phi}^+$, а из (3.18b) выпадает $\tilde{\Psi}^+$, что согласуется с (3.9). Систему (3.18a), (3.18b), (3.15) можно записать в виде:

$$A_1 \Phi_1^+ + B_1 \Phi_1^- + C_1 = 0 \quad (3.20)$$

где

$$A_1 = (a_{ij}), \quad B_1 = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 1) (\gamma_1^+)^{-2is_2}, \quad a_{12} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 + 2ia_3 \eta + 1) (\gamma_1^+)^{2is_2}$$

$$a_{13} = a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda + ia_3 \lambda, \quad a_{21} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 2ia_3 \eta + 1) (\gamma_1^+)^{-2is_2}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{1}{2}(a_0 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 1)(\gamma_1^+)^{2is_2}, \quad a_{23} = a_0 a_2 - a_3^2 \eta \lambda - ia_3 \lambda \\
a_{31} &= \frac{1}{2} a_0 (\gamma_1^+)^{-2is_2}, \quad a_{32} = \frac{1}{2} a_0 (\gamma_1^+)^{2is_2}, \quad a_{33} = a_1, \quad b_{11} = 0 \\
b_{12} &= -\frac{2a_2 \gamma_1}{b^2 + 1} (\gamma_1^-)^{2is_2}, \quad b_{13} = 0, \quad b_{21} = -\frac{2a_2 \gamma_1}{b^2 + 1} (\gamma_1^-)^{-2is_2}, \quad b_{22} = 0
\end{aligned} \quad (3.21)$$

$$b_{23} = 0, \quad b_{31} = -\frac{a_3 \lambda i \gamma_1}{2} (\gamma_1^-)^{-2is_2}, \quad b_{32} = \frac{a_3 \lambda i \gamma_1}{2} (\gamma_1^-)^{2is_2}, \quad b_{33} = -\gamma_1$$

$$C_1 = -\Phi_0 \gamma_1^+ \begin{pmatrix} a_3^2 \eta^2 - a_1 f - ia_3 \eta & a_3^2 \eta \lambda - a_0 - ia_3 \lambda & -a_3 \eta + i \\ a_3^2 \eta^2 - a_1 f + ia_3 \eta & a_3^2 \eta \lambda - a_0 + ia_3 \lambda & -a_3 \eta - i \\ -a_0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Систему (3.20) можно привести к задаче Гильберта (2.6), (2.7), где следует у всех векторов и матриц ставить нижний номер 1. При этом, как следует из вышеприведенных исследований для $|\eta| \approx \infty$, матрица $G_1(\eta)$ непрерывна на всей оси с нулевым индексом и постоянная на бесконечности. Тогда, согласно [3], можно для $X_1^-(\eta)$ получить систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$X_1^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1^-(\eta) G_1(\xi) - E}{\xi - \eta} X_1^-(\xi) d\xi = \gamma(\eta) \quad (3.22)$$

причем можно считать матрицу $\gamma(\eta)$ постоянной, $\gamma(\eta) = E$, где $\mathbf{G}_1 = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1$. Выбираются в безразмерной переменной интегрирования ξ пределы $(-5, 5)$ и для η интервал $(-5, 5)$ и проводится численное интегрирование системы (3.22), (3.21) по программе Mathematica 5, причем получены элементы матрицы 3-го порядка $\mathbf{X}_1^-(\eta)$. Для проверки точности выбора интервала по ξ $(-5, 5)$ взят также интервал интегрирования $(-10, 10)$, причем результаты расчетов $\mathbf{X}_1^-(\eta)$ для интервала по η $(-5, 5)$ оказались близкими к полученным выше. Затем из алгебраической системы

$\mathbf{X}_1^+ = \mathbf{G}_1 \mathbf{X}_1^-$ найдены $\{\mathbf{X}_1^+\}^{-1}$. Тогда можно найти по аналогии с (2.8)

$$\Phi_1^-(\eta) = \frac{\mathbf{X}_1^-(\eta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathbf{X}_1^+(\xi)\}^{-1} \frac{\mathbf{g}(\xi)}{\xi - \eta} d\xi. \quad (3.19)$$

можно провести обратное преобразование Лапласа и Фурье, и при $z=0, x>0$ получить напряжения в виде:

$$\frac{a}{b^2 \rho} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ \frac{2\tau_{yz}}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} s^2 ds \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{s}{a}\eta x - \frac{s}{a}\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\frac{s}{a}\xi\xi'} e^{\frac{s}{a}\lambda\eta'} X_1^-(\eta) \bullet$$

$$\bullet \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \frac{\gamma_1^-(\eta)}{\xi - \eta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\gamma_1^-)^{-2is_2} & (\gamma_1^-)^{2is_2} \\ \frac{1}{i} (\gamma_1^-)^{-2is_2} & -\frac{1}{i} (\gamma_1^-)^{2is_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \end{pmatrix} \\ \frac{\tilde{\tau}_{yz}}{b^2 i \rho \gamma_1^-} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \\ \frac{\tilde{\tau}_{yz}}{b^2 i \rho \gamma_1^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \{X_1^+(\xi)\}^{-1} \gamma_1^+(\xi) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Вычисляя первый интеграл, а затем интеграл от $\delta\left(t - \frac{\eta x}{a} + \frac{\xi' \xi}{a} - \lambda \frac{y - \eta_1}{a}\right)$, можно получить при $z=0$ напряжения под штампом в виде двукратных интегралов. В случае $z=0$, $x > 0$, $x \approx 0$, получится решение вблизи края

$$\eta_0 = \frac{t + \frac{\xi' \xi}{a} - \lambda \frac{y - \eta_1}{a}}{x} a, \quad \gamma_1^-(\eta_0) \approx i \eta_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a}{b^2 \rho} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2} + is_2} i I_1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2} - is_2} i I_2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2} + is_2} I_1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2} - is_2} I_2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} i I_3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

где

$$I_{1,2} = i^{\mp 2is_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^5 d\lambda \int_{-5}^5 d\xi \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi' \xi}{a}\right)^{\frac{1}{2} \mp is_2} \tilde{\Omega}_{3,4}^-$$

$$I_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^5 d\lambda \int_{-5}^5 d\xi \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi' \xi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\tau}_{yz}}{b^2 i \rho \gamma_1^-}$$

и согласно свойствам преобразования Лапласа

$$t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi'}{a} \xi > 0 \quad (3.26)$$

проведены расчеты по формулам (3.22)-(3.25), причем вычислены интегралы, в которых опущен $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. Расчеты интегралов проводятся на компьютере по

вышеуказанной программе.

Для значений $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, $y = 0$, $t = 0.1$, $\frac{\xi'}{at} = 0.2$, $\frac{\eta'}{at} = 0.2$ результаты расчетов для $I_{1,2,3}$ коэффициентов при (P, Q, R) даны в табл. 1.

Таблица 1

	P	Q	R
I₁	-11384.5-37286.9 <i>i</i>	-5410440 -914067 <i>i</i>	-1593.92+654.23 <i>i</i>
I₂	-104.866+120.574 <i>i</i>	-2964.81+31720.2 <i>i</i>	-69.0587+26.5321 <i>i</i>
I₃	-13757.5+4982.91 <i>i</i>	-118745.-160854 <i>i</i>	84065.1 +508648 <i>i</i>

В случае заданных граничных перемещений вместо (1.2), (1.3) в виде

$$z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0, -\infty < x < 0$$

$$(u_1, u_2, u_3) = -(P, Q, R) H(\eta_1 - |y|) H(\xi_0 - x) H(t)$$

$$0 < x < \infty$$

где η_1, ξ_0 – постоянные, получится в (1.7)

$$\varphi_0 = -\frac{\exp(-i\bar{\beta}\eta_1) - \exp(i\bar{\beta}\eta_1)}{4\pi^2 s \bar{\alpha} \bar{\beta}} \{1 - \exp(-i\bar{\alpha}\xi_0)\}$$

Следует отметить, что граничные значения $u_{1,2,3}$ на линиях $x = \xi_0$, $|y| = \eta_1$ имеют разрывы, однако всегда можно их слегка сгладить, полагая, например,

$$H(\xi_0 - x) \approx (\xi_0 - x)_+^\alpha, \text{ где } (\xi_0 - x)_+^\alpha = \begin{cases} (\xi_0 - x)^\alpha, & x < \xi_0 \\ 0, & x > \xi_0 \end{cases}$$

есть известная обобщенная функция, и в пределе полагать $\alpha = 0$. При этом вся процедура решения не меняется, только в результирующих формулах следует в φ_0 под интегралами сделать соответствующие изменения, которые в силу сходимости интегралов в указанном предельном переходе вблизи края $z = 0$, $x \approx 0$, $|y| < \infty$ снова дадут решение, полученное в работе.

Тогда, повторяя все выкладки, можно показать, что $X_1^-(\eta)X_1^+(\eta)$ будут прежними, а при $z = 0$, $x \approx 0$, из (2.3), в котором делится на $-s^2$, экспонента в интеграле по λ заменяется на $\left\{ e^{-\frac{s}{a}\lambda(y-\eta_1)} - e^{\frac{s}{a}\lambda(y+\eta_1)} \right\}$ и ставится $\frac{1}{\lambda}$, в (3.24)

добавится множитель $\frac{1}{\xi} \left(e^{\frac{\xi_0}{a} \xi} - 1 \right)$, получится

$$a^3 \frac{\frac{b^2}{a^2} + 1}{2b^2 \rho} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} + is_2} (I_4 - I'_4) + \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} - is_2} (I_5 - I'_5) \right) \\ -i \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} + is_2} (I_4 - I'_4) + i \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} - is_2} (I_5 - I'_5) \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2}} (I_6 - I'_6) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$I_{4,5} = \int_{-5}^5 \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi_0}{a} \xi \right)^{-\frac{1}{2} \mp is_2} \frac{1}{2} (-1)^{\mp is_2} \tilde{\Omega}_{3,4}^- \frac{d\xi}{\xi}$$

$$I_6 = \int_{-5}^5 \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi_0}{a} \xi \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 \rho i \gamma_1^-} d\xi$$

при этом, $I'_{4,5,6}$ получаются заменой η_1 на $-\eta_1$.

Третью граничную задачу можно задать в виде условий (1.2) и $u_{1,2,3} = -(P, Q, R) H(\eta_1 - |y|) H(t)$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Тогда

$$\varphi_0 = -\frac{e^{-i\beta\eta_0} - e^{i\beta\eta_0}}{4\pi^2 \alpha \beta s}$$

В видоизмененном интеграле (3.23) имеется единственный полюс [12] $\xi = 0$ и получится

$$\begin{pmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \\ \frac{\tau_{yz}^-}{b^2 \rho i \gamma_1^-} \end{pmatrix} = \frac{X_1^-(\eta)}{\eta} \{X_1^+(0)\}^{-1} \gamma_1^+(0) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда в (3.27) следует считать $I_{4,5} \rightarrow I_{7,8}$, $I'_{4,5} \rightarrow I'_{7,8}$, $I_6 \rightarrow I_9$, $I'_6 \rightarrow I'_9$,

$$I_{7,8} = \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2} \mp is_2} \frac{1}{2} (-1)^{\mp is_2} \tilde{\tilde{\Omega}}_{3,4}^- \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$I'_{7,8}$ получаются заменой η_1 на $-\eta_1$.

$$I_9 = \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\tilde{\tau}}_{yz}^-}{b^2 \rho i \gamma_1^-} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3 \\ \tilde{\Omega}_4 \\ \frac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 \rho i \gamma_1^-} \end{pmatrix} = 2\pi i \{X_1^+(0)\}^{-1} \gamma_1^+(0) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

В виде таких же квадратур получится и решение вдоль всей полуплоскости $z = 0, x > 0$, при этом в случае наличия вместо множителя $\mathbf{H}(\mathbf{t})$ произвольной функции $f(t)$ в (1.3) для компонент смещения $U_{1,2,3}$ решение для напряжений найдется из полученных выше в форме свертки, а затем из уравнения движения системы численно может быть найден закон его движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Погосян С.М. Решение смешанной динамической задачи для упругого полупространства // Докл. НАН РА. 2005. Т.105. № 4. С. 46-53.
2. Петросян С.З. Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства. /Кандидатская диссертация. Институт механики НАН Армении. Ереван. 2002.
3. Векуа Н.П. Система сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379с.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
5. Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, Monatsch. für Math. und Phzs. XIX, 1908, 211-245.
6. Hilbert D. Grundzuge der Integralgluchungen. Drittltes Abschuft. 1912. Leipzig-Berlin.
7. Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для систем функций // УМН. 1952.Т.7. Вып. 4. С. 3-54.
8. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С. 15-23.
9. Adrian Loghin, Paul F. Joseph Asymptotic solution for mixed mode loading of cracks and wedges in power law hardening materials // Engineering Fracture Mechanics. 68. 2001. 1511-1534.
10. Саркисян В.С., Караханян И.М. Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во НАН Армении. 2002. С. 266-280.
11. Агаян К.Л., Григорян Э. Х., Джилавыян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 35-47.
12. Nakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading.// V International conference October 1-7, Goris, 2005, The problems of dynamics of interaction of deformable media, 61-65pp.
13. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 497-505.
14. Baker B.R. Dynamic stresses created by a moving crack // Trans. ASME Ser. E. J. Applied Mechanics. 1962. Vol. 29. №3.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1949. 635с.

16. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.10.2006

УДК 539.3

ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН С РАВНОМЕРНО-НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ ,
КОГДА ДВА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КРАЯ ПЛАСТИНКИ ШАРНИРНО
ЗАКРЕПЛЕНЫ, А ДВА ДРУГИХ СВОБОДНЫ

Василян Н.Г.

Ключевые слова: пластина, перемещение, перерезывающие силы, прогиб, точность.

Key words: plate, displacement, intersecting forces, flexure, exactness.

Ն.Գ. Վասիլյան

Հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երկու եզրը հողակապորեն ամրացված մյուս երկուսը ազատ, սալի ծոման խնդիրը

Այս աշխատանքում դիտակված է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ հաստատուն հաստությամբ իզոտրոպ սալի ծոմանը, որի երկու եզրը հողակապորեն ամրացված են մյուս երկուսը ազատ: Լուծված է խնդիրը ըստ Կիրխոֆի տեսության և ըստ ճշգրտված տեսության և համեմատված են արդյունքները տեղափոխությունների և կտրող ուժի համար: Ըստ արդյունքների սալի ծոման դեպքում տեղափոխության մեծագույն արժեքը ստացվում է ըստ Կիրխոֆի տեսության հարաբերական հաստության ճշտությամբ, ի տարբերություն շատ խնդիրների, որտեղ ստացվում է հարաբերական հաստության քառակուսու ճշտությամբ:

N.G.Vasilyan

The solution of bending plates problem with uniformly normal load , which two opposite edges of the plate jointly supported, other two edges are free

This article is about the solution of plates bending problem with uniformly normal load, when two opposite edges of the plate jointly supported, other two edges are free is received. The problem is solved both by Kirchhoff theory and by improved theory. The results for displacements and intersecting forces are compared. As a result, we received, that maximal flexure of the plate for the concerned problem has order exactness relative thickness by the theory of Kirchgov in compare with majority of problems for which order exactness is quadrate relative thickness.

В статье получено решение задач изгиба пластин с равномерно-нормальной нагрузкой, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны. Задача решена по теории Кирхгофа и по уточненной теории. Сравниваются результаты для перемещений и перерезывающих сил. В результате получаем, что максимальный прогиб пластинки по теории Кирхгофа для рассматриваемой задачи имеет точность порядка относительной толщины в отличие от большинства задач, для которых точность – порядок квадрата относительной толщины. Перемещение в центре пластинки имеет точность квадрата относительной толщины.

1. Пусть прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ в декартовой системе координат занимает область: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Принимается справедливое допущение теории пластин Кирхгофа.

Согласно теории Кирхгофа уравнение изгиба пластины имеет вид

$$D\Delta^2 w = q \quad (1.1)$$

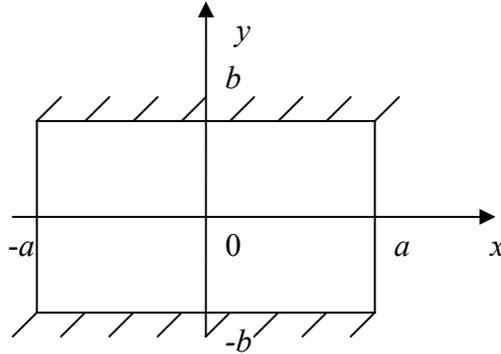
Предполагается, что две кромки пластинки шарнирно закреплены

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (1.2)$$

а две другие свободны

$$\begin{aligned}
 M_x = 0 & \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \\
 N_x = 0 & \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right)
 \end{aligned}
 \quad \text{при } x = \pm a \quad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.



Фиг.1

Решение этой задачи приводится во многих монографиях и, в частности, в [1]. В книге С.П. Тимошенко [2] написано: «Прямоугольная пластинка, свободно опертая по двум противоположным сторонам (в теории Кирхгофа условие свободного опирания и шарнирного закрепления не отличаются) и удовлетворяющая произвольным краевым условиям по двум другим краям была в свое время исследована М. Леви (1877) и Э. Эстеваном (1900)».

Решение задачи в этой системе координат, когда $q(x, y) = \text{const}$, будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y \quad (1.4^*)$$

чтобы удовлетворить условиям шарнирного закрепления (1.2), $q(x, y)$ разложим в ряд:

$$q = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos} \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad (1.4^{**})$$

где $a_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}$.

Подставляя (1.4^{*}) и (1.4^{**}) в (1.1) и удовлетворяя (1.3) условиям, получим решение

$$w = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[1 + \frac{\nu S_n}{(1-\nu)\delta_n} \text{ch} \lambda_n x + \frac{\nu \text{sh} \lambda_n a}{\delta_n} \lambda_n x \text{sh} \lambda_n x \right] \cos \lambda_n y \quad (1.4)$$

где

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, \quad w_0 = \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5} \quad (1.5)$$

$$S_n = (1 + \nu) \operatorname{sh} \lambda_n a - (1 - \nu) \lambda_n a \operatorname{ch} \lambda_n a \quad (1.6)$$

$$\delta_n = (3 + \nu) \operatorname{sh} \lambda_n a \operatorname{ch} \lambda_n a - (1 - \nu) \lambda_n a$$

Из (1.4) при $\nu=0$ получается решение рассматриваемой пластинки для цилиндрического изгиба

$$w_* = w_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{5b^2}\right) \quad (1.7)$$

и w_0 есть максимальный прогиб пластинки при цилиндрическом изгибе. Известно, что сумма этого ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{5\pi^5}{1536} \quad (1.8)$$

В случае удлиненного прямоугольника

$$\frac{a}{b} \gg 1, \quad \operatorname{ch} \lambda_n a, \operatorname{sh} \lambda_n a \approx \frac{1}{2} e^{\lambda_n a} \quad (1.9)$$

Из (1.4) получается следующая приближенная формула для прогиба на кромке $x = a$:

$$w(a, y) \approx w_0 \left[1 + \frac{\nu(1 + \nu)}{(3 + \nu)(1 - \nu)}\right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{5b^2}\right) \quad (1.10)$$

Максимальное отличие от цилиндрического изгиба не зависит от y и имеет место при $\nu=0.5$

$$\frac{w(a, y)}{w_*} = \frac{10}{7} \approx 1.43 \quad (1.11)$$

Из функции прогиба (1.4) можно получить и остальные расчетные формулы пластинки. В частности, выражение для перерезывающего усилия в угловой точке имеет вид:

$$N_y(a, b) = q_0 b \left[1 + \frac{16\nu}{(1 - \nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_n a - (1 - \nu)\lambda_n a}{(2n - 1)^2 \delta_n}\right] \quad (1.12)$$

Отсюда, в приближении (1.9) получается

$$N_y(a, b) \approx \frac{(1 + 3\nu)}{(1 - \nu)} q_0 b \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим теперь задачу изгиба прямоугольной пластинки на основе уточненной теории. Для данной задачи особое значение имеет уточнение граничных условий свободного края. Так как теория Кирхгофа на свободном краю вместо трех условий равенства нулю изгибающего, крутящего моментов и перерезывающих усилий, удовлетворяет двум условиям равенства нулю изгибающего момента обобщенного перерезывающего усилия, уравнение изгиба пластинки имеет вид [3]:

$$\Delta \Phi = -\frac{3}{4h} q, \quad -D \Delta w + \frac{8\chi h^3}{3(1 - \nu)} \Delta \Phi - \frac{4h}{3} \Phi = 0, \quad \Delta \Psi - \frac{1}{\chi h^2} \Psi = 0 \quad (2.1)$$

где $\chi=2/5$ соответствует уравнениям теории С.А. Амбарцумяна, $\chi=1/3$ – уравнениям теории Э.Рейснера. Искомые в теории С.А. Амбарцумяна функции φ_1, φ_2 ,

характеризующие поперечные сдвиги [4], выражаются через функции Φ , Ψ следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

Функции θ_1 , θ_2 , характеризующие углы поворота в теории Э.Рейснера [5], выражаются через функции Φ , Ψ следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right), \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Осредненные граничные условия шарнирного закрепления относительно искомым функций w , Φ , Ψ имеют вид [3]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2\chi}{G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (2.4)$$

Условия равенства нулю изгибающего, крутящего момента и перерезывающих усилий на свободном краю записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2\chi}{G} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\chi}{G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.1), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного закрепления (2.4), имеет вид:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cos \lambda_n y \quad (2.6)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \sin \lambda_n y$$

Подставляя (2.6) в (2.1) и используя разложение

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad a_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \quad (2.7)$$

получим следующую последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi_n'' - \lambda_n^2 \varphi_n = -\frac{3}{4h} q_0 a_n,$$

$$f_n'' - \lambda_n^2 f_n + \frac{4h}{3D} \varphi_n = -\frac{2\chi h^2}{(1-\nu)D} q_0 a_n \quad (2.8)$$

$$\psi_n'' - \frac{1 + \chi h^2 \lambda_n^2}{\chi h^2} \psi_n = 0$$

Общее решение первого уравнения системы (2.8) получается в виде

$$\varphi_n = D_n \operatorname{ch} \lambda_n x + C_n \operatorname{sh} \lambda_n x + \frac{3a_n}{4h\lambda_n^2} q_0 \quad (2.9)$$

После подстановки (2.9) во второе уравнение системы (2.8) находим общее решение для

$$f_n = A_n \operatorname{ch} \lambda_n x + B_n \operatorname{sh} \lambda_n x - \frac{2h}{3\lambda_n D} (C_n x \operatorname{ch} \lambda_n x + D_n x \operatorname{sh} \lambda_n x) + \frac{q_0 a_n}{D \lambda_n^4} \left(1 + \frac{2\chi}{1-\nu} \lambda_n^2 h^2\right) \quad (2.10)$$

Общим решением третьего уравнения системы (2.8) будет

$$\Psi_n = F_n \operatorname{sh} p_n x + G_n \operatorname{ch} p_n x \quad (2.11)$$

где

$$p_n = (\sqrt{\chi} h)^{-1} \sqrt{1 + \chi \lambda_n^2 h^2} \quad (2.12)$$

3. Произвольные постоянные $A_n, B_n, C_n, D_n, F_n, G_n$ должны определяться из граничных условий на кромках $x = \pm a$ (2.5). Их нахождение упростится, если вместо условия при $x = -a$ использовать условия симметрии относительно оси $x = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (3.1)$$

Условие (3.1) можно получить из условий скользящего контакта, приведенных в [3]. С учетом (2.6), условия (3.1) принимают вид

$$f_n' = 0, \quad f_n''' = 0, \quad \Psi_n = 0 \quad (3.2)$$

Подстановка (2.10), (2.11) в (3.2) дает

$$C_n = B_n = G_n = 0 \quad (3.3)$$

Подставляя (2.9), (2.10), (2.11) в (2.6) и удовлетворяя граничным условиям на краю $x = a$ (2.5), получим выражения для неизвестных коэффициентов:

$$F_n = -(\operatorname{sh} p_n a)^{-1} \operatorname{sh} \lambda_n a D_n, \quad A_n = \frac{2h}{3D\lambda_n^2} D_n \left(\lambda_n a \operatorname{cth} \lambda_n a - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \quad (3.4)$$

$$D_n = -\frac{3q_0 \nu a_n}{2h\lambda_n^2 \operatorname{cth} \lambda_n a} \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - (1-\nu)\lambda_n a \left[\operatorname{cth} \lambda_n a - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \operatorname{th} \lambda_n a \right] - \right.$$

$$\left. -4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} \frac{\operatorname{th} \lambda_n a}{\operatorname{th} p_n a} \right\}^{-1}$$

Используя (3.4) в выражениях (2.9)-(2.11), а затем в (2.6), можно найти все расчетные формулы для пластинки. В частности, в приближении (1.9) прогиб пластинки на краю $x = a$ определяется следующим образом:

$$w(a, y) \approx \frac{q_0}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - \nu \lambda_n a - \right. \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \left. -4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} \operatorname{cth} p_n a \right\}^{-1} + 1 + \frac{2\chi h^2 \lambda_n^2}{1-\nu} \right] \cos \lambda_n y$$

Из приведенного решения для $q = \text{const}$ с использованием разложения (2.7) легко получить решение для частных случаев заданной нагрузки. Например, когда $q = q_0 \cos \lambda_1 y$, то $a_1 = q_0$ и $a_n = 0$ при $n > 1$, или $q = q_0 (\cos \lambda_1 y + \alpha \cos \lambda_2 y)$, то $a_1 = q_0$, $a_2 = \alpha q_0$ и $a_n = 0$ при $n > 2$. Пусть теперь $q = q_N \cos \lambda_N y$, тогда $a_n = 0$ при $n < N$, и $a_N = q_N$ при $n = N$. Если принять

$$q = q_0 \cos \lambda_1 y, \quad h^2/b^2 \ll 1 \quad (3.6)$$

то формула прогиба будет иметь вид:

$$w(a, y) = \frac{16q_0 b^4}{\pi^4 D} \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} + \frac{2\pi\sqrt{\chi}\nu(1+\nu)}{b(1-\nu)(3+\nu)^2} \frac{h}{b} \right] \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (3.7)$$

отсюда получится следующее выражение для максимального прогиба пластинки в середине края $y = 0$:

$$w(a, 0) \approx \frac{16q_0 b^4}{\pi^4 D} \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} \left(1 + \frac{2\pi\sqrt{\chi}}{(3+\nu)} \frac{h}{b} \right) \right] \quad (3.8)$$

В приближении (1.9) выражение перерезывающего усилия в угловой точке пластины имеет вид:

$$N_y(a, b) \approx \frac{2q_0 b}{\pi} \left[1 - \frac{\nu \left(\frac{\pi\sqrt{\chi}}{2} \frac{h}{b} - 1 \right)}{\pi\sqrt{\chi} \frac{h}{b} (3+\nu)} \left(1 + \frac{2\sqrt{\chi}\pi}{3+\nu} \frac{h}{b} \right) \right] \quad (3.9)$$

Прогиб в центре пластины по теории Кирхгофа, учитывая (1.9), имеет следующий вид:

$$w(0, 0) \approx \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5} \quad (3.10)$$

По уточненной теории прогиб пластины можно вычислить по приближенной формуле

$$w(0, 0) \approx \frac{q_0}{D} \frac{64b^4}{\pi^5} \left(1 + \frac{\pi^2 \chi}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{b^2} \right) \quad (3.11)$$

При принятом выше допущении (3.6) прогиб пластины в центре имеет вид

$$w_0(0, 0) \approx \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5} \quad (3.12)$$

По большинству решения задач уточненная теория приводит к появлению дополнительных членов порядка h^2/b^2 . В формулах (3.8) и (3.9) для рассматриваемой задачи после пренебрежения h^2/b^2 остаются также члены порядка h/b .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
2. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. М.: Гостехиздат, 1957. 536с.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел", посв. 80-летию С.А.Амбарцумяна. Ереван: "Гитутюн", 2002. С.67-88.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
6. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин.// Изв. РАН. МТТ.1992. №3. С.48-64с.

УДК 539.3

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Геворкян Г. З., Киракосян Р.М.

Ключевые слова: пластина, ортотропная, нелинейная теория, поперечные сдвиги.

Keywords: Plate, Orthotropic, Nonlinear Theory, Transverse Shears.

Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի երկրաչափորեն ոչ գծային ճշգրտված տեսության մասին

[3] մոդելի շրջանակներում արտածվում են փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հավասարումները և ձևակերպվում են եզրային պայմանները՝ ընդլայնական սահբերի հաշվառմամբ: Համեմատության նպատակով նշված հավասարումներն ու եզրային պայմանները ստացվում են նաև [4] մոդելի հիման վրա: Որպես օրինակ լուծվում է գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-շերտի խնդիրը հավասարաչափ բաշխված մակերևութային նորմալ բեռի դեպքում: Դիտարկվում են եզրային պայմանների երկու տարբերակներ: Առաջինում սալ-շերտի երկար կողմերը իրար նկատմամբ չտեղափոխվող հենարաններին ամրացված են հողակապորեն, իսկ մյուսում՝ ամրակցված են: Ստացված արդյունքների հիման վրա արվում են որակական և քանակական եզրակացություններ:

G.Z. Gevorgyan, R.M. Kirakosyan

On the Geometrically Nonlinear Refined Theory of Variable Thickness Orthotropic Plates

On the base of [3] differential equations and boundary conditions of geometrically nonlinear theory of variable thickness orthotropic plates with the account of transverse shears are obtained. As an example a problem for linear variable thickness orthotropic plate in action of uniformly distributed surface loadings is solved.

На основе модели [3] выведены разрешающие дифференциальные уравнения и сформулированы краевые условия геометрически нелинейной теории ортотропных пластин переменной толщины при учете деформаций поперечных сдвигов. С целью сравнения отмеченные уравнения и краевые условия получены еще и на основе модели [4]. В качестве примера решены задачи ортотропной пластины-полосы линейно-переменной толщины при действии равномерно распределенной поверхностной нагрузки, нормальной к срединной плоскости. Рассмотрены случаи, когда пластина-полоса шарнирно закреплена и защемлена. На основе анализа полученных результатов сделаны качественные и количественные заключения.

Обширную литературу о нелинейных теориях пластин и оболочек и их многочисленных применениях можно найти в [5]– [7].

1. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ рассмотрим ортотропную пластину переменной толщины h , симметричную относительно срединной плоскости. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины, а ось z направим перпендикулярно к ней. Попытаемся получить систему разрешающих дифференциальных уравнений и сформулировать краевые условия геометрически нелинейной теории рассматриваемой пластины при учете деформаций поперечных сдвигов. Будем считать, что:

а) нормальное к срединной плоскости пластины перемещение $u_z = w$ не зависит от координаты z ;

б) влияние нормального напряжения σ_z пренебрежительно мало;

в) по сравнению с единицей малы не только деформации (удлинения и сдвиги), но и углы поворота элементов пластины.

В силу вышеизложенного, во всех исходных соотношениях и уравнениях нелинейной теории упругости сохраним только те нелинейные члены, которые содержат прогиб w и его производные [1]. Тогда общеизвестные выкладки приводят к следующей системе разрешающих уравнений для равновесия дифференциального элемента срединной плоскости [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= -X_2, & \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= -Y_2 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \\ &= -Z_2 - X_2 \frac{\partial w}{\partial x} - Y_2 \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= N_x - hX_1, & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= N_y - hY_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь, как обычно, T_x, T_y, S, N_x, N_y и M_x, M_y, M_{xy} – усилия и моменты,

$$\begin{aligned} X_1 &= (X^+ - X^-)/2, & Y_1 &= (Y^+ - Y^-)/2 \\ X_2 &= X^+ + X^-, & Y_2 &= Y^+ + Y^-, & Z_2 &= Z^+ + Z^- \end{aligned} \quad (1.2)$$

Через X^\pm, Y^\pm, Z^\pm обозначены проекции интенсивностей нагрузок на поверхностях $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно.

Следуя [3], для тангенциальных перемещений по осям x и y напишем

$$u_x = u + z(a_{55}\varphi - \partial w / \partial x), \quad u_y = v + z(a_{44}\psi - \partial w / \partial y) \quad (1.3)$$

Здесь

$$a_{55}\varphi - \partial w / \partial x = \theta_x, \quad a_{44}\psi - \partial w / \partial y = \theta_y \quad (1.4)$$

– углы поворота нормального элемента пластинки в плоскостях xOz и yOz соответственно, a_{55}, a_{44} – соответствующие коэффициенты сдвигов материала, φ, ψ – искомые функции координат x, y .

С учетом (1.3), (1.4) и обобщенного закона Гука ортотропного тела, для усилий и моментов пластинки в рамках модели [3] получим:

$$\begin{aligned} T_x &= h \left\{ B_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ T_y &= h \left\{ B_{22} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\ S &= h B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] \\
M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \\
M_{xy} &= -\frac{h^3 B_{66}}{12} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
N_x &= \frac{1}{3h} \left[h^2 (2\varphi + X_1) + 3 \left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \\
N_y &= \frac{1}{3h} \left[h^2 (2\psi + Y_1) + 3 \left(M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

В рамках модели [4] отличаются только выражения поперечных сил. Вместо (1.6) имеем:

$$N_x = h\varphi, \quad N_y = h\psi \tag{1.7}$$

С учетом выражений усилий и моментов из (1.1) получим систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомым функций u , v , w , φ , ψ . В рамках модели [3] эта система имеет вид:

$$\begin{aligned}
&h \left[B_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left\{ B_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial x} + \\
&+ B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} = -X_2 \\
&h \left[B_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left\{ B_{22} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial y} + \\
&+ B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = -Y_2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
&h^2 \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
&- h \left\{ \left[8 + a_{55} h \left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left[8 + a_{44} h \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2B_{66}h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - 16 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \varphi + \frac{\partial h}{\partial y} \psi \right) - \\
& -12 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \\
& = 4 \left[3 \left(Z_2 + X_2 \frac{\partial w}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) - X_1 \frac{\partial h}{\partial x} - Y_1 \frac{\partial h}{\partial y} \right] \\
& h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2h \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \\
& -h^2 \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] - \\
& -2h \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + a_{44} \left(B_{12} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] + \underline{8}\varphi = \underline{8}X_1 \\
& h^2 \left[B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2h \left[\left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \\
& -h^2 \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] - \\
& -2h \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + a_{55} \left(B_{12} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \underline{8}\psi = \underline{8}Y_1
\end{aligned}$$

Ради простоты в третьем уравнении системы (1.8) выражения усилий T_x , T_y и S не подставлены.

В рамках модели [4] первые два уравнения системы (1.8) остаются без изменения. Третье уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned}
& h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \varphi + \frac{\partial h}{\partial y} \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -Z_2 - X_2 \frac{\partial w}{\partial x} - Y_2 \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Четвертое и пятое уравнения отличаются от соответствующих уравнений системы (1.8) только тем, что в них вместо подчеркнутых коэффициентов $\underline{2}$ и $\underline{8}$ фигурируют коэффициенты 3 и 12, соответственно.

Разрешающая система дифференциальных уравнений в рамках обеих моделей имеет десятый порядок. В соответствии с этим на каждом краю пластинки следует ставить по пять краевых условий. Приведем некоторые условия для края $x = \text{const}$.

а) Условия свободного края.

По модели [3]

$$\begin{aligned}
B_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] &= 0 \quad (T_x = 0) \\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \quad (S = 0) \\
2\varphi + X_1 &= 0 \quad (N_x = 0) \\
B_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= 0 \quad (M_x = 0) \\
2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad (M_{xy} = 0)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В рамках модели [4] третье условие свободного края заменяется условием

$$\varphi = 0 \tag{1.11}$$

а остальные остаются без изменений.

б) Условия шарнирно опертого края.

В рамках обеих моделей третье условие свободного края заменяется условием $w = 0$, а остальные остаются без изменений.

Заметим, что второе условие (1.10) можно в рамках обеих моделей заменить условием

$$\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44} \psi = 0 \quad (u_y = 0) \tag{1.12}$$

в) Условия заделанного края:

$$\begin{aligned}
u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - a_{55} \varphi &= 0 \quad (u_x = 0) \\
v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - a_{44} \psi &= 0 \quad (u_y = 0) \\
w &= 0 \quad (u_z = 0)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Возможны и другие условия. Аналогичным образом можно сформулировать условия для края $y = \text{const}$.

Как и следовало ожидать, плоская задача и задача изгиба в геометрически нелинейной постановке не разделяются друг от друга. Это очевидно, поскольку как в дифференциальных уравнениях, так и в краевых условиях участвуют величины и плоской задачи, и задачи изгиба.

2. Рассмотрим пластинку-полосу ширины l , толщина которой вдоль длины не изменяется, а вдоль ширины изменяется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 x \tag{2.1}$$

Полоса несет равномерно распределенную поверхностную нагрузку интенсивности q , перпендикулярную к срединной плоскости:

$$X_1 = X_2 = 0, \quad Z_2 = q \tag{2.2}$$

В рассмотренном случае второе и пятое уравнения системы (1.1) удовлетворяются автоматически, а остальные принимают вид:

$$\frac{dT_x}{dx} = 0, \quad \frac{dN_x}{dx} = -q - T_x \frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{dM_x}{dx} = N_x \quad (2.3)$$

Проинтегрировав (2.3), получим:

$$T_x = \text{const}, \quad N_x = C_1 - qx - T_x \frac{dw}{dx}, \quad M_x = C_2 + C_1 x - \frac{qx^2}{2} - T_x w \quad (2.4)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Имея в виду (1.6), (1.7), для функции φ получим:

а) в рамках модели [3]–

$$\varphi = \frac{3}{2h^2} \left[C_1 h_0 - C_2 h_1 - \frac{qx}{2} (2h_0 + h_1 x) - T_x \left(h \frac{dw}{dx} - h_1 w \right) \right] \quad (2.5)$$

б) в рамках модели [4]–

$$\varphi = \frac{1}{h} \left(C_1 - qx - T_x \frac{dw}{dx} \right) \quad (2.6)$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$x = l \bar{x}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad h = h_0 H, \quad s = h_0 / l, \quad \gamma = h_1 / s, \quad H = 1 + \gamma \bar{x}, \quad \chi = a_{55} B_{11}$$

$$q = B_{11} \bar{q}, \quad T_x = B_{11} h_0 T, \quad N_x = B_{11} h_0 N, \quad \varphi = B_{11} \bar{\varphi}, \quad M_x = B_{11} h_0^2 M \quad (2.7)$$

$$C_1 = B_{11} h_0 \bar{C}_1, \quad C_2 = B_{11} h_0^2 \bar{C}_2$$

С учетом (2.4)–(2.7) и выражения момента (1.5) приходим к разрешающему дифференциальному уравнению второго порядка относительно прогиба срединной плоскости:

а) по модели [3]–

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{3\chi T}{2H} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{3\chi \gamma T}{H^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \frac{3\bar{T}}{s^2 H^3} (4 - \chi \gamma^2 s^2) \bar{w} = \\ & = \frac{6\bar{q} \bar{x}^2}{s^4 H^3} - \frac{3\chi \bar{q}}{2s^2 H^3} - \frac{3\bar{C}_1}{s^3 H^3} (4\bar{x} + \chi \gamma^2 s^3) - \frac{3\bar{C}_2}{s^2 H^3} (4 - \chi \gamma^2 s^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

б) по модели [4]–

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\chi T}{H} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi \gamma T}{H^2} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \frac{12T}{s^2 H^3} \bar{w} = \\ & = \frac{6\bar{q} \bar{x}^2}{s^4 H^3} - \frac{\chi \bar{q}}{s^2 H^2} - \frac{C_1}{s^3 H^3} (12\bar{x} + \chi \gamma s^2 H) - \frac{12\bar{C}_2}{s^2 H^3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Задачу будем решать для двух вариантов краевых условий. В одном из них длинные края пластинки-полосы шарнирно закреплены, а в другом защемлены. Расстояние между опорами неизменно. Эти условия имеют вид:

1) шарнирное закрепление–

$$\bar{w} \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{x}=1}} = 0, \quad \left(2s^2 \bar{C}_2 + 2s \bar{C}_1 \bar{x} - \bar{q} \bar{x}^2 \right) \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{x}=1}} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0 \right) \quad (2.10)$$

Из последних двух условий следует:

$$\bar{C}_2 = 0, \quad \bar{C}_1 = \frac{\bar{q}}{2s} \quad (2.11)$$

II) защемление. В этом случае первые два условия (2.10) сохраняются, а последние два заменяются следующими условиями:

$$\left(s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\Phi} \right) \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0, \quad \left(u_x \Big|_{x=0} = 0 \right) \quad (2.12)$$

С учетом (2.5)-(2.7) эти условия принимают вид:

а) в рамках модели [3]–

$$\left\{ 2s^2 H (2H + 3\chi T) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - 6\chi\gamma s^2 T \bar{w} - 3\chi [2s\bar{C}_1 - 2\gamma s^2 C_2 - \bar{q} \bar{x} (2 + \gamma \bar{x})] \right\} \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0 \quad (2.13)$$

б) в рамках модели [4]–

$$\left[s^2 (H + \chi T) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \chi (\bar{q} \bar{x} - s\bar{C}_1) \right] \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0 \quad (2.14)$$

Отметим, что к приведенным условиям нужно добавить условие неизменности расстояния между краями пластинки-полосы, из которого следует:

$$T = \frac{\gamma s^2}{2} \cdot \frac{\int_0^1 (d\bar{w}/d\bar{x})^2 d\bar{x}}{\ln(1 + \gamma)} \quad (2.15)$$

В случае пластинки-полосы постоянной толщины $\gamma = 0$ и (2.15) принимает вид

$$T = \frac{s^2}{2} \cdot \int_0^1 (dw/dx)^2 dx \quad (2.16)$$

Численное решение задачи удобно реализовать по следующей схеме последовательных приближений, включающей метод коллокаций. Для первого приближения принимается $T_1 = 0$ и по методу коллокаций решается разрешающее уравнение. Имея коэффициенты ряда w_1 , удовлетворяющего соответствующим краевым условиям, по формуле (2.15) вычисляется значение T_1' . Для второго приближения принимается $T_2 = (T_1 + T_1')/2$ и после решения этого приближения по формуле (2.15) вычисляется значение T_2' . Для третьего приближения принимается $T_3 = (T_2 + T_2')/2$ и т.д. Таким образом,

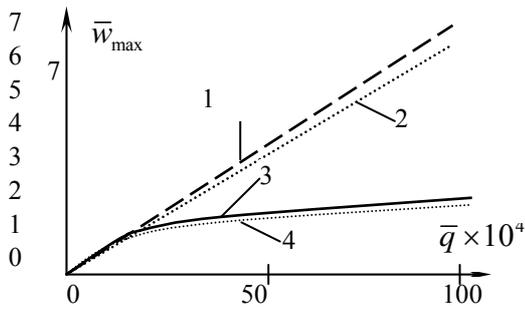
$$T_{n+1} = (T_n + T_n')/2, \quad T_1 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Заметим, что если заданное значение T_n меньше действительного значения T , то $T_n' > T$ и наоборот. Следовательно, действительное значение T всегда будет находиться между начальным T_n и конечным T_n' значениями любого приближения, т.е всегда удовлетворяется одно из следующих неравенств:

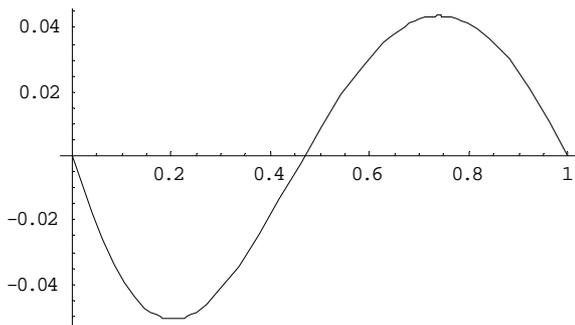
$$T_n < T < T_n' \quad \text{или} \quad T_n > T > T_n' \quad (2.18)$$

Это обстоятельство обеспечивает большую скорость сходимости. Процесс итерации следует прекращать при достижении желаемого сближения T_n и T_n' . В случае пластинки-полосы постоянной толщины $\gamma = 0$, $H = 1$ и разрешающие уравнения (2.8) и (2.9) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами,

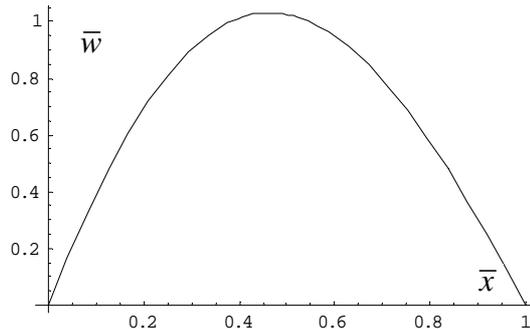
допускающими аналитически замкнутые решения. Однако это существенно не упрощает решения задачи, поскольку условие (2.16) приводит к сложному трансцендентному уравнению [1], которое можно решать все же численно. Поэтому решение задачи для пластинки-полосы постоянной толщины целесообразно получить как частный случай решения задачи пластинки-полосы переменной толщины, заменив условие (2.15) условием (2.16) и положив $\gamma = 0$.



Фиг. 1. 1 – по линейной теории [3], 2 – по линейной теории [4], 3 – по [3] с учетом нелинейности, 4 – по [4] с учетом нелинейности



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Рассмотрим ортотропные пластинки-полосы постоянной и линейно-переменной толщин. На фиг. 1 приведены графики максимальных прогибов в зависимости от нагрузки \bar{q} по теориям [3] и [4] по линейной теории и с учетом нелинейности.

На фиг. 2 и 3 приведены графики горизонтального перемещения срединной плоскости \bar{u} и прогиба \bar{w} в зависимости от \bar{x} по теории [3]. По теории [4] они качественно не отличаются. Графики фиг. 1–3 построены при $\gamma = 1; s = 0,1; \chi = 10$ в случае шарнирного закрепления.

В табл. 1 и 2 представлены безразмерные значения некоторых величин, определенных по теориям [3] и [4]. Через \bar{x}_1 и \bar{x}_2 обозначены значения безразмерных координат сечений с максимальным прогибом \bar{w}_m и с максимальным отношением w/h соответственно. В последних графах таблиц приведены числа итераций, обеспечивающих точность 0,1%.

Анализ графиков и данных таблиц приводит к следующим заключениям.

1. Во всех рассмотренных случаях учет геометрической нелинейности в рамках теорий [3] и [4] приводит к качественно одинаковым результатам:

а) максимальные прогибы существенно уменьшаются по сравнению с прогибами, полученными по геометрически линейной постановке;

б) эта тенденция сравнительно сильно проявляется в случае шарнирного, чем заделанного крепления краев пластины-полосы к несмещающимся опорам;

в) с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала (с увеличением параметра χ) как максимальные прогибы \bar{w}_1 и \bar{w}_n , полученные по

геометрически линейной и нелинейной постановкам, так и их отношение $\bar{w}_л / \bar{w}_н$ умеренно растут;

г) значения тангенциального усилия T по обеим теориям практически совпадают и с увеличением параметра χ растут незначительно;

д) числа итераций, обеспечивающих одинаковую точность получения расчетных величин, безразличны по отношению к краевым условиям и по обеим теориям практически совпадают;

е) максимальные значения перемещения \bar{u} в несколько десятков раз меньше максимальных значений \bar{w} .

Таблица 1

Шарнирное закрепление				T	\bar{x}_1	$\bar{w}_м$	\bar{x}_2	$(w/h)_м$	число итер.	
по теории [3]	$\gamma=0,$ $s=0,15,$ $q=0,005$	χ	0	л	0	0,5	1.5432	0,5	1.5432	0
				н	0.02459	0.5	0.6601	0.5	0.6601	8
		3	л	0	0,5	1.668	0,5	1.668	0	
			н	0.02537	0.5	0.6676	0.5	0.6676	8	
		10	л	0	0,5	1.960	0,5	1.960	0	
			н	0.02684	0.5	0.6815	0.5	0.6815	9	
	$\gamma=1,$ $s=0,1,$ $q=0,005$	χ	0	л	0	0.4398	2.561	0.3698	1.824	0
				н	0.03747	0.4546	1.009	0.3818	0.7116	8
		3	л	0	0.4383	2.753	0.3676	1.963	0	
			н	0.03846	0.4573	1.019	0.3829	0.7177	8	
		10	л	0	0.4354	3.203	0.3632	2.290	0	
			н	0.04038	0.4628	1.0382	0.3856	0.7291	8	
по теории [4]	$\gamma=0,$ $s=0,15,$ $\bar{q}=0,005$	χ	0	л	0	0,5	1.5432	0,5	1.5432	0
				н	0.02459	0.5	0.6601	0.5	0.6601	8
		3	л	0	0,5	1.626	0,5	1.626	0	
			н	0.02512	0.5	0.6652	0.5	0.6652	8	
		10	л	0	0,5	1.821	0,5	1.821	0	
			н	0.02618	0.5	0.6754	0.5	0.6754	9	
	$\gamma=1,$ $s=0,1,$ $\bar{q}=0,005$	χ	0	л	0	0.4398	2.561	0.3698	1.824	0
				н	0.03747	0.4546	1.009	0.3818	0.7116	8
		3	л	0	0.4399	2.695	0.3694	1.919	0	
			н	0.03816	0.4571	1.016	0.3832	0.7157	9	
		10	л	0	0.4402	3.008	0.3684	2.143	0	
			н	0.03958	0.4623	1.031	0.3861	0.7239	9	

2. Результаты теорий [2] и [3] количественно мало отличаются друг от друга. Теория [3] по сравнению с теорией [2] приводит к несколько большим значениям максимальных прогибов. В случае шарнирного крепления разница между ними не превышает 6%, а в случае заделки—3%. Причем разница больше для пластин-полос переменной толщины. Это объясняется тем, что влияние изменения напряжения τ_{xz} по толщине для пластин переменной толщины больше, чем для пластин постоянной толщины, а теория [2] это влияние не учитывает.

Разумеется, разница между результатами теорий [2] и [3] для сильно анизотропных пластин переменной толщины и конечных размеров в плане может оказаться существенной.

Таблица 2

Защемление			T	\bar{x}_1	\bar{w}_m	\bar{x}_2	(w/h)	число итер.		
по теории [3]	$\gamma=0,$ $s=0,05,$ $q=0,0005$	χ	0	л	0	0,5	5.000	0,5	5.000	0
				н	0.01705	0.5	1.663	0.5	1.663	6
		3	л	0	0,5	5.224	0,5	5.224	0	
			н	0.01737	0.5	1.693	0.5	1.693	9	
		10	л	0	0,5	5.749	0,5	5.749		
	н		0.01814	0.5	1.742	0.5	1.742	10		
	$\gamma=1,$ $s=0,05,$ $q=0,001$	χ	0	л	0	0.4228	1.626	0.3807	1.161	0
				н	0.01129	0.4200	1.117	0.3848	0.7938	7
		3	л	0	0.4227	1.780	0.3787	1.271	0	
			н	0.01214	0.4320	1.172	0.3839	0.8325	7	
10		л	0	0.4224	2.137	0.3747	1.529			
	н	0.01404	0.4374	1.271	0.3831	0.9016	8			
по теории [4]	$\gamma=0,$ $s=0,05,$ $\bar{q}=0,0005$	χ	0	л	0	0,5	5.000	0,5	5.000	0
				н	0.01705	0.5	1.663	0.5	1.663	6
		3	л	0	0,5	5.149	0,5	5.149	0	
			н	0.01726	0.5	1.684	0.5	1.684	6	
		10	л	0	0,5	5.5	0,5	5.5		
			н	0.01778	0.5	1.722	0.5	1.722	9	
	$\gamma=1,$ $s=0,05,$ $\bar{q}=0,001$	χ	0	л	0	0.4227	1.627	0.3807	1.1607	0
				н	0.01129	0.4300	1.117	0.3848	0.7938	7
		3	л	0	0.4236	1.730	0.3802	1.234	0	
			н	0.01186	0.4320	1.155	0.3848	0.8203	8	
		10	л	0	0.4399	1.970	0.3791	1.405		
			н	1.220	0.4368	0.5664	0.3852	0.8718	8	

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 211с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА. 2000. 122с.
4. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеориздат, 1956. 272с.
6. Муштари Х.М. Нелинейная теория оболочек (сб. научн. тр.). М.: Наука, 1990. 223с.
7. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука, 1997. 272с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.12.2006

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Р.С.

Ключевые слова: асимптотический метод, связанные краевые задачи, термоупругость, динамические задачи для пластин.

Keywords: asymptotic method, coupled boundary problems, thermoelasticity, dynamic problems for plates.

Ռ.Ս. Գևորգյան

Իզոտրոպ սալի ջերմաառաձգականության խնդրի լուծման մասին

Կինեմատիկական և խառը եզրային պայմաններով սալերի և թաղանթների համար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական եղանակով լուծելն արդյունավետ էր [1-3]: Ասիմպտոտիկական մեթոդը կիրառվում է սալերի ջերմաառաձգականության տեսության դինամիկ կապակցված խնդիրների լուծման համար, լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բոլոր բաղադրիչները նախապես ներկայացնելով Ֆուրյեի ձևափոխության իրենց պատկերների միջոցով:

R.S. Gevorgyan

On Asymptotic Solution of Thermoelastic Problem for Isotropic Plates

The asymptotic method of the solution of boundary value problem of elasticity theory is effective for anisotropic plates and shells with the kinematical and mixed boundary conditions [1-3]. In this work the asymptotic method is applied for the solution of connected dynamic problems of thermoelasticity for plates, at first represented all components of stress tensors and transfer vector with its Fourier transformation images.

Асимптотический метод решения краевых задач теории упругости оказался эффективным для анизотропных пластин и оболочек с кинематическими и смешанными граничными условиями [1-3]. В работе асимптотический метод применяется для решения связанных динамических задач термоупругости для пластин, предварительно представив все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения их образами преобразования Фурье.

1. Имеем пластину в прямоугольной системе координат занимающую область

$$\Omega_* = \{x, y, z : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l = \min\{a, b\}\}.$$

На поверхности $z = -h$ пластины (фиг.1) заданы компоненты вектора перемещения и изменение температуры, действие которого учитывается по модели Дюгамеля-Неймана (Duhamel-Neumann).

$$\begin{aligned} u_j(x, y, -h, t) &= u_j^-(x, y, t), \quad j = x, y, z \\ \theta(x, y, -h, t) &= \theta^-(x, y, t) \\ \theta &= T - T_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

а на противоположной поверхности $z = h$ задана температурная функция

$$\theta(x, y, +h, t) = \theta^+(x, y, t) \quad (1.2)$$

вместе с компонентами вектора перемещения

$$u_j(x, y, +h, t) = u_j^+(x, y, t), \quad j = x, y, z \quad (1.3)$$

или напряжениями

$$\sigma_{jz}(x, y, h, t) = \sigma_{jz}^+(x, y, t), \quad j = x, y, z \quad (1.4)$$

или с одной из комбинаций следующих смешанных условий:

$$\begin{aligned} u_z(x, y, h, t) &= u_z^+(x, y, t), \\ \sigma_{jz}(x, y, h, t) &= \sigma_{jz}^+(x, y, t), \quad j = x, y \end{aligned} \quad (1.5)$$

либо

$$\begin{aligned} u_j(x, y, h, t) &= u_j^+(x, y, t), \quad j = x, y \\ \sigma_{zz}(x, y, h, t) &= \sigma_{zz}^+(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины и изменение ее температурного поля, предполагая процесс установившимся, поскольку не заданы начальные условия. Не заданы также граничные условия на торцах $x = \pm a$, $y = \pm b$ пластины, поскольку решается внутренняя задача.

Для решения поставленной задачи необходимо найти решение системы уравнений [4]

$$\begin{aligned} G\nabla^2 \vec{u} + \frac{G}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} + \vec{X} &= \gamma^* \text{grad } \theta + \rho \ddot{\vec{u}} \\ \nabla^2 \theta - \left(\frac{1}{\chi} \right) \dot{\theta} - \eta^* \text{div } \dot{\vec{u}} &= -\frac{P}{\chi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.1), (1.2) и одной из комбинаций условий (1.3)-(1.6).

Перепишем систему (1.7) в координатной форме

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u_x + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \Delta + X &= \gamma^* \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho \ddot{u}_x \quad (x, y, z, X, Y, Z) \\ \nabla^2 \theta - \frac{1}{\chi} \dot{\theta} - \eta^* \frac{\partial}{\partial t} \Delta &= -\frac{P}{\chi} \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, $\chi = \lambda^* / c_\varepsilon$ – коэффициент температуропроводности, λ^* – коэффициент теплопроводности, $\gamma^* = \frac{2\alpha^* G(1+\nu)}{1-2\nu}$, α^* – коэффициент линейного расширения, $P = \frac{W^*}{\lambda^*}$, W^* – удельная плотность источника теплоты, $\eta^* = \gamma^* \frac{T_0}{\lambda^*}$, T_0 – начальная абсолютная температура, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, X, Y, Z – компоненты объемных сил.

Перепишем также связь между компонентами тензора напряжений, вектора перемещения и изменения температуры в виде закона Дюгамеля- Неймана [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \Delta - \gamma^* \theta & (x, y, z) \\ \sigma_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & (x, y, z)\end{aligned}\quad (1.9)$$

Пусть в граничных условиях (1.1)-(1.6) и в уравнениях (1.8) заданные функции имеют соответственно вид:

$$U(x, y, \pm h, t) = U^\pm(x, y) \sin \omega t, \quad U = \{u_j, \sigma_{jz}\}, \quad j = x, y, z \quad (1.10)$$

$$X(x, y, z, t) = X_1(x, y, z) \sin \omega t, \quad (X, Y, Z, P) \quad (1.11)$$

Тогда целесообразно представить все неизвестные величины соотношений (1.8), (1.9): компоненты вектора перемещения, тензора напряжений, а также функцию изменения температурного поля в виде:

$$Q(x, y, z, t) = Q_1(x, y, z) \sin \omega t + Q_2(x, y, z) \cos \omega t \quad (Q, \theta) \quad (1.12)$$

Подставив (1.11) - (1.12) в (1.8), получаем

$$\begin{aligned}G \nabla^2 u_{xk} + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_k + X_k &= \gamma^* \frac{\partial \theta_k}{\partial x} - \omega^2 \rho u_{xk} & (x, y, z) \quad k = 1, 2 \\ \nabla^2 \theta_1 + \frac{\omega}{\chi} \theta_2 + \omega \eta^* \Delta_2 &= -\frac{P_1^*}{\chi}\end{aligned}\quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \theta_2 - \frac{\omega}{\chi} \theta_1 - \omega \eta^* \Delta_1 = 0$$

В системе уравнений (1.13) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l} \quad (1.14)$$

$$u_k = \frac{u_{xk}}{l}, \quad v_k = \frac{u_{yk}}{l}, \quad w_k = \frac{u_{zk}}{l}, \quad k = 1, 2$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}G \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \zeta} \right) + l X_k &= \\ = \gamma^* \frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} - \varepsilon^{-2} \omega^2 \rho h^2 u_k & \\ (\xi, \eta; u_k, v_k; X_k, Y_k) \quad X_2 = Y_2 = 0 & \quad (k = 1, 2) \\ G \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial \eta \partial \zeta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \zeta^2} \right) + & \\ + l Z_1 = \gamma^* \varepsilon^{-1} \frac{\partial \theta_k}{\partial \zeta} - \omega^2 \rho h^2 \varepsilon^{-2} w_k & \quad (k = 1, 2)\end{aligned}\quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega h^2}{\chi} \varepsilon^{-2} \theta_2 + \omega \eta^* \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} \right) &= -l \frac{P_1^*}{\chi} \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega h^2}{\chi} \varepsilon^{-2} \theta_1 - \omega \eta^* h^2 \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (1.15) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε . Ее решение складывается из решений внутренней задачи и задачи пограничного слоя. Доказано [1-3, 5, 6], что решение внутренней задачи доминирует во внутренних точках пластины, начиная с расстояния $(1,5 \div 2)h$ от ее боковой поверхности. Ближе к боковой поверхности к решению внутренней задачи налагается согласованное с ним решение задачи пограничного слоя, которое экспоненциально быстро затухает по мере удаления от боковой поверхности.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения:

$$Q_k(x, y, z) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q} Q_k^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad k = 1, 2 \quad (1.16)$$

где Q_k – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u_j , тензора напряжений σ_{ij} и изменение температуры θ , χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, который для всех перемещений $\chi_u = 0$, для всех напряжений $\chi_\sigma = -1$, а для температурной функции $\chi_\theta = -1$ [1-3].

Такие асимптотические порядки впервые введены в [1] для краевых задач полос и пластин с аналогичными (1.1)-(1.6) кинематическими и смешанными граничными условиями.

Представим заданные объемные силы и источник тепла в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} X_1(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S l^{-1} \varepsilon^{s-2} X_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (X, Y, Z) \\ P_1^*(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S l^{-2} \varepsilon^{s-3} P_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Это означает, что объемные силы и источник тепла могут влиять на напряженно-деформированное состояние, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-3} .

Подставив (1.16), (1.17) в (1.14) и приравняв коэффициенты при ε^s ($s = 0, 1, 2, \dots, S$) в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.16), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики.

В результате получается система разрешающих уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2 \rho h^2}{G} u_k^{(s)} &= R_{uk}^{(s)} \quad (u_k, v_k) \quad k = 1, 2 \quad (1.18) \\ R_{uk}^{(s)} &= -\frac{1}{G} X_k^{(s)} + \frac{\gamma^*}{G} \frac{\partial \theta_k^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w_k^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k^{(s-2)}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_k^{(s-2)}}{\partial \xi \partial \eta} \\ &(\xi, \eta; u_k, v_k; X_k, Y_k) \quad k = 1, 2 \quad X_2^{(s)} = Y_2^{(s)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_k^{(s)}}{\partial \xi^2} + \omega^2 \rho h^2 \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} w_k^{(s)} &= \beta^* \frac{\partial \theta_k^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{wk}^{(s)} \quad k=1,2 \\
\frac{\partial^2 \theta_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega h^2}{\chi} \theta_2^{(s)} + \omega \eta^* h^2 \frac{\partial w_2^{(s)}}{\partial \zeta} &= R_{\theta 1}^{(s)} \\
\frac{\partial^2 \theta_2^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega h^2}{\chi} \theta_1^{(s)} - \omega \eta^* h^2 \frac{\partial w_1^{(s)}}{\partial \zeta} &= R_{\theta 2}^{(s)}, \quad \beta^* = \alpha^* \frac{1+\nu}{1-\nu} \\
R_{wk}^{(s)} &= -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} Z_k^{(s)} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_k^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_k^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) - \\
&- \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w_k^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_k^{(s-2)}}{\partial \eta^2} \right) \quad k=1,2 \\
R_{\theta 1}^{(s)} &= -\frac{1}{\chi} P_1^{(s)} - \omega \eta^* h^2 \left(\frac{\partial u_2^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \theta_1^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta_1^{(s-2)}}{\partial \eta^2} \\
R_{\theta 2}^{(s)} &= \omega \eta^* h^2 \left(\frac{\partial u_1^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \theta_2^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta_2^{(s-2)}}{\partial \eta^2}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

а компоненты тензора напряжений (1.9), с учетом (1.12), (1.14), принимают вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxk}^{(s)} &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial w_k^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma^* \theta_k^{(s)} + R_{xxk}^{(s)} \quad (x, y) \\
R_{xxk}^{(s)} &= \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \quad (x, y; \xi, \eta; u, v) \\
\sigma_{xyk}^{(s)} &= G \left(\frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
\sigma_{zzk}^{(s)} &= \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial w_k^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma^* \theta_k^{(s)} + R_{zzk}^{(s)} \\
R_{zzk}^{(s)} &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
\sigma_{xzk}^{(s)} &= G \left(\frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{yzk}^{(s)} = G \left(\frac{\partial v_k^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad k=1,2
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений (1.18), (1.19), удовлетворяющее одной из комбинаций граничных условий (1.1)-(1.6) с учетом (1.12).

2. Система уравнений (1.18) состоит из четырех уравнений, которые независимы друг от друга в первом приближении, т. е. они могут быть связаны только после первого шага итерации. Назовем их квазисвязанными уравнениями. Их общие решения имеют вид:

$$u_k^{(s)} = M_{uk}^{(s)} \sin \gamma \zeta + N_{uk}^{(s)} \cos \gamma \zeta + J_{uk}^{(s)}(\zeta)$$

$$J_{uk}^{(s)} = \frac{1}{\gamma} \int_0^\zeta R_{uk}^{(s)}(\tau) \sin \gamma(\zeta - \tau) d\tau, \quad \gamma = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (u, v) \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

Система (1.19) состоит из четырех уравнений, связанных с первого шага итерации. Ее решение имеет вид:

$$w_1^{(s)} = A_1^{(s)} \operatorname{sh} \alpha_1 \zeta \sin \beta_1 \zeta + B_1^{(s)} \operatorname{sh} \alpha_1 \zeta \cos \beta_1 \zeta + C_1^{(s)} \operatorname{ch} \alpha_1 \zeta \sin \beta_1 \zeta +$$

$$+ D_1^{(s)} \operatorname{sh} \alpha_1 \zeta \cos \beta_1 \zeta - (A_2^{(s)} \varphi_2 + D_2^{(s)} \psi_2) \operatorname{sh} \alpha_2 \zeta \sin \beta_2 \zeta -$$

$$- (B_2^{(s)} \varphi_2 - C_2^{(s)} \psi_2) \operatorname{sh} \alpha_2 \zeta \cos \beta_2 \zeta - (B_2^{(s)} \psi_2 + C_2^{(s)} \varphi_2) \operatorname{ch} \alpha_2 \zeta \sin \beta_2 \zeta +$$

$$+ (A_2^{(s)} \psi_2 - D_2^{(s)} \varphi_2) \operatorname{ch} \alpha_2 \zeta \cos \beta_2 \zeta + J_{w1}^{(s)}(\zeta)$$

$$w_2^{(s)} = (A_1^{(s)} \varphi_1 + D_1^{(s)} \psi_1) \operatorname{sh} \alpha_1 \zeta \sin \beta_1 \zeta + (B_1^{(s)} \varphi_1 - C_1^{(s)} \psi_1) \operatorname{sh} \alpha_1 \zeta \cos \beta_1 \zeta +$$

$$+ (B_1^{(s)} \psi_1 + C_1^{(s)} \varphi_1) \operatorname{ch} \alpha_1 \zeta \sin \beta_1 \zeta + (D_1^{(s)} \varphi_1 - A_1^{(s)} \psi_1) \operatorname{ch} \alpha_1 \zeta \cos \beta_1 \zeta +$$

$$+ A_2^{(s)} \operatorname{sh} \alpha_2 \zeta \sin \beta_2 \zeta + B_2^{(s)} \operatorname{sh} \alpha_2 \zeta \cos \beta_2 \zeta + C_2^{(s)} \operatorname{ch} \alpha_2 \zeta \sin \beta_2 \zeta +$$

$$+ D_2^{(s)} \operatorname{ch} \alpha_2 \zeta \cos \beta_2 \zeta + J_{w2}^{(s)}(\zeta)$$

$$\theta_1^{(s)} = \frac{A_1^{(s)}}{\beta^*} E_1(\zeta) + \frac{B_1^{(s)}}{\beta^*} L_1(\zeta) + \frac{C_1^{(s)}}{\beta^*} P_1(\zeta) + \frac{D_1^{(s)}}{\beta^*} K_1(\zeta) -$$

$$- \frac{1}{\beta^*} (A_2^{(s)} \varphi_2 + D_2^{(s)} \psi_2) E_2(\zeta) - \frac{1}{\beta^*} (B_2^{(s)} \varphi_2 - C_2^{(s)} \psi_2) L_2(\zeta) -$$

$$- \frac{1}{\beta^*} (B_2^{(s)} \psi_2 + C_2^{(s)} \varphi_2) P_2(\zeta) + \frac{1}{\beta^*} (A_2^{(s)} \psi_2 - D_2^{(s)} \varphi_2) K_2(\zeta) + J_{\theta 1}^{(s)}(\zeta) \quad (2.2)$$

$$\theta_2^{(s)} = \frac{1}{\beta^*} (A_1^{(s)} \varphi_1 + D_1^{(s)} \psi_1) E_1(\zeta) + \frac{1}{\beta^*} (B_1^{(s)} \varphi_1 - C_1^{(s)} \psi_1) L_1(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{\beta^*} (B_1^{(s)} \psi_1 + C_1^{(s)} \varphi_1) P_1(\zeta) + \frac{1}{\beta^*} (D_1^{(s)} \varphi_1 - A_1^{(s)} \psi_1) K_1(\zeta) +$$

$$+ \frac{A_2^{(s)}}{\beta^*} E_2(\zeta) + \frac{B_2^{(s)}}{\beta^*} L_2(\zeta) + \frac{C_2^{(s)}}{\beta^*} P_2(\zeta) + \frac{D_2^{(s)}}{\beta^*} K_2(\zeta) + J_{\theta 2}^{(s)}(\zeta)$$

$$E_k(\zeta) = \alpha_k \left(1 + \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{ch} \alpha_k \zeta \sin \beta_k \zeta + \beta_k \left(1 - \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{sh} \alpha_k \zeta \cos \beta_k \zeta$$

$$L_k(\zeta) = \alpha_k \left(1 + \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{ch} \alpha_k \zeta \cos \beta_k \zeta - \beta_k \left(1 - \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{sh} \alpha_k \zeta \sin \beta_k \zeta$$

$$P_k(\zeta) = \alpha_k \left(1 + \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{sh} \alpha_k \zeta \sin \beta_k \zeta + \beta_k \left(1 - \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right) \operatorname{ch} \alpha_k \zeta \cos \beta_k \zeta$$

$$\begin{aligned}
K_k(\zeta) &= \alpha_k \left(1 + \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) \text{sh} \alpha_k \zeta \cos \beta_k \zeta - \beta_k \left(1 - \frac{P}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) \text{ch} \alpha_k \zeta \sin \beta_k \zeta \\
\Phi_k(\alpha_k, \beta_k) &= \frac{1}{\Delta_k} \left[\alpha_k^2 \left(c + \frac{pq}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) (\alpha_k^2 - 3\beta_k^2 + p) - \left(c - \frac{pq}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) (3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + p) \right] \\
\Psi_k(\alpha_k, \beta_k) &= \frac{\alpha_k \beta_k}{\Delta_k} \left[\left(c + \frac{pq}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) (3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + p) - \left(c - \frac{pq}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right) (\alpha_k^2 - 3\beta_k^2 + p) \right] \\
\Delta_k &= \alpha_k^2 (\alpha_k^2 - 3\beta_k^2 + p)^2 + \beta_k^2 (3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + p)^2 > 0 \quad (k=1,2)
\end{aligned}$$

$J_{wk}^{(s)}(\zeta)$, $J_{\theta k}^{(s)}(\zeta)$ $k=1,2$ – частные решения системы связанных неоднородных (с правой частью) уравнений (1.9), а $\lambda = \pm(\alpha_k \pm i\beta_k)$, $k=1,2$ – решения характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}
\lambda^2 + p & \lambda^2 + p & -\beta^* \lambda & -\beta^* \lambda \\
-r\lambda & 0 & -q & \lambda^2 \\
0 & r\lambda & \lambda^2 & q \\
0 & \lambda^2 + p & 0 & -\beta^* \lambda
\end{vmatrix} = 0$$

$$p = \gamma^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad q = \frac{\omega h^2}{\chi}, \quad r = \omega \eta^* h^2, \quad \beta^* = \alpha^* \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$c = q + r\beta \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{(p+(-1)^k f)^2 + (c+(-1)^k \varphi)^2} - (p+(-1)^k f)^2} \\
\beta_k &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{(p+(-1)^k f)^2 + (c+(-1)^k \varphi)^2} + (p+(-1)^k f)^2} \\
f &= \sqrt{\frac{\sqrt{(p^2 + c^2)^2 + 16p^2 q(q-c)} + (p^2 - c^2)}{2}} \\
\varphi &= \text{sgn}(c-2q) \sqrt{\frac{\sqrt{(p^2 + c^2)^2 + 16p^2 q(q-c)} - (p^2 - c^2)}{2}} \quad (k=1,2)
\end{aligned}$$

Общие решения (2.1), (2.2) содержат 16 функций интегрирования $M_{uk}^{(s)}$, $N_{uk}^{(s)}$ (u, v) и $A_k^{(s)}$, $B_k^{(s)}$, $C_k^{(s)}$, $D_k^{(s)}$ ($k=1,2$), которые однозначно определяются из граничных условий с учетом преобразований (1.10).

Удовлетворив граничным условиям (1.1) (1.3), получаем восемь функций интегрирования

$$\begin{aligned}
M_{uk}^{(s)} &= \frac{1}{2 \sin \gamma} \left(u_k^{+(s)} - u_k^{-(s)} - J_{uk}^{(s)}(\zeta = 1) + J_{uk}^{(s)}(\zeta = -1) \right) \\
N_{uk}^{(s)} &= \frac{1}{2 \cos \gamma} \left(u_k^{+(s)} + u_k^{-(s)} + J_{uk}^{(s)}(\zeta = 1) - J_{uk}^{(s)}(\zeta = -1) \right) \\
(u, v), \quad k = 1, 2 \quad u_2^{\pm(s)} = v_2^{\pm(s)} &= 0 \\
u_1^{\pm(0)} = \frac{u_x^{\pm}}{l}, \quad u_k^{\pm(s)} = 0 \quad s > 0 \quad (x, y, u, v), \quad \sin 2\gamma \neq 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (1.1)-(1.3), (2.2) получаем остальные восемь функций интегрирования $A_k^{(s)}, B_k^{(s)}, C_k^{(s)}, D_k^{(s)}$ $k = 1, 2$ как решения матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} A_1^{(s)} \\ D_1^{(s)} \\ A_2^{(s)} \\ D_2^{(s)} \end{pmatrix} = \|a_{ij}^*\|_{4 \times 4}^{-1} \begin{pmatrix} W_1^{+(s)} \\ W_2^{+(s)} \\ \beta^* \theta_{*1}^{-(s)} \\ \beta^* \theta_{*2}^{-(s)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^* &= \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \beta_1, & a_{12}^* &= \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \beta_1 \\
a_{13}^* &= \psi_2 \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \beta_2 - \varphi_2 \operatorname{sh} \alpha_2 \sin \beta_2, & a_{14}^* &= -\psi_2 \operatorname{sh} \alpha_2 \sin \beta_2 - \varphi_2 \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \beta_2 \\
a_{21}^* &= \varphi_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \beta_1, & a_{22}^* &= \psi_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \beta_1 + \varphi_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \beta_1 \\
a_{23}^* &= \operatorname{sh} \alpha_2 \sin \beta_2, & a_{24}^* &= \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \beta_2 \\
a_{31}^* &= E_1(1), & a_{32}^* &= K_1(1) \\
a_{33}^* &= \psi_2 K_2(1) - \varphi_2 E_2(1), & a_{34}^* &= -\varphi_2 K_2(1) - \psi_2 E_2(1) \\
a_{41}^* &= \varphi_1 E_1(1) - \psi_1 K_1(1), & a_{42}^* &= \psi_1 E_1(1) + \varphi_1 E_2(1) \\
a_{43}^* &= E_2(1), & a_{44}^* &= K_2(1)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
W_1^{\pm(s)} &= \frac{1}{2} \left(u_{z1}^{+(s)} \pm u_z^{-(s)} - J_{w1}^{(s)}(\zeta = 1) \mp J_{w1}^{(s)}(\zeta = -1) \right) \\
W_2^{\pm(s)} &= -\frac{1}{2} \left(J_{w2}^{(s)}(\zeta = 1) \pm J_{w2}^{(s)}(\zeta = -1) \right) \\
\theta_{*1}^{\pm(s)} &= \frac{1}{2} \left(\theta_1^{+(s)} \pm \theta_1^{-(s)} - J_{\theta 1}^{(s)}(\zeta = 1) \mp J_{\theta 1}^{(s)}(\zeta = -1) \right) \\
\theta_{*2}^{\pm(s)} &= \frac{1}{2} \left(J_{\theta 2}^{(s)}(\zeta = 1) \pm J_{\theta 2}^{(s)}(\zeta = -1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} B_1^{(s)} \\ C_1^{(s)} \\ B_2^{(s)} \\ C_2^{(s)} \end{pmatrix} = \|b_{ij}^*\|_{4 \times 4}^{-1} \begin{pmatrix} W_1^{-(s)} \\ W_2^{-(s)} \\ \beta^* \theta_{*1}^{+(s)} \\ \beta^* \theta_{*2}^{+(s)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_{11}^* &= \text{sh}\alpha_1 \cos \beta_1, & b_{12}^* &= \text{ch}\alpha_1 \sin \beta_1 \\
b_{13}^* &= -\varphi_2 \text{sh}\alpha_2 \cos \beta_2 - \psi_2 \text{ch}\alpha_2 \sin \beta_2, & b_{14}^* &= \psi_2 \text{sh}\alpha_2 \cos \beta_2 - \varphi_2 \text{ch}\alpha_2 \sin \beta_2 \\
b_{21}^* &= \varphi_1 \text{sh}\alpha_1 \cos \beta_1 + \psi_1 \text{ch}\alpha_1 \sin \beta_1, & b_{22}^* &= \varphi_1 \text{ch}\alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \text{sh}\alpha_1 \cos \beta_1 \\
b_{23}^* &= \text{sh}\alpha_2 \cos \beta_2, & b_{24}^* &= \text{ch}\alpha_2 \sin \beta_2 \\
b_{31}^* &= L_1(1), & b_{32}^* &= P_1(1) \\
b_{33}^* &= -\varphi_2 L_2(1) - \psi_2 P_2(1), & b_{34}^* &= \psi_2 L_2(1) - \varphi_2 P_2(1) \\
b_{41}^* &= \varphi_1 L_1(1) + \psi_1 P_1(1), & b_{42}^* &= \varphi_1 P_1(1) - \psi_1 L_1(1) \\
b_{43}^* &= L_2(1), & b_{44}^* &= P_2(1)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение краевой задачи с граничными условиями (1.1)-(1.3) представляется рекуррентными формулами (1.16), (2.1)-(2.5).

Аналогичным образом можно представить решения краевых задач с граничными условиями (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) или (1.6).

В качестве примера рассмотрим частный случай: жестко закрепленные лицевые поверхности пластины нагреваются периодически

$$u_j(x, y, \pm h, t) = 0, \quad j = x, y, z, \quad \theta(x, y, \pm h, t) = \theta_1^\pm(x, y) \sin \omega t \quad (2.6)$$

Компоненты тензора напряжений, вектора перемещения и температурная функция определяются по формулам (1.16), (1.20), (2.1), (2.2), (2.3), где функции интегрирования с асимптотической точностью первого шага итерации имеют вид:

$$M_{uk} = N_{uk} = M_{vk} = N_{vk} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.7)$$

$$A_2 = -A_1 I_1 - D_1 S_1, \quad D_2 = A_1 I_2 + D_1 S_2$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\Delta_A} [\text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2 + (\varphi_1 \text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2 + \psi_2 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{\Delta_A} [\text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2 + (\varphi_1 \text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1 + \psi_1 \text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2 - \psi_2 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\Delta_A} [\text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2 + (\varphi_1 \text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2 - \psi_2 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{\Delta_A} [\text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2 + (\varphi_1 \text{ch}\alpha_1 \cos \beta_1 - \psi_1 \text{sh}\alpha_1 \sin \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{sh}\alpha_2 \sin \beta_2 - \psi_2 \text{ch}\alpha_2 \cos \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_A = \psi_2 (\text{sh}^2 \alpha_2 \sin^2 \beta_2 + \text{ch}^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_2) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{\beta^* H_1}{2} \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{G_1 H_2 - G_2 H_1}, & D_1 &= \frac{\beta^* G_1}{2} \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{G_1 H_2 - G_2 H_1} \\
&& & G_1 H_2 - G_2 H_1 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \varphi_1 E_1 - \psi_1 K_1 - E_2 I_1 + K_2 I_2, & H_1 &= \varphi_1 K_1 + \psi_1 E_1 - E_2 S_1 + K_2 S_2 \\
G_2 &= E_1 + (\varphi_2 E_2 - \psi_2 K_2) I_1 - (\varphi_2 K_2 + \psi_2 E_2) I_2 \\
H_2 &= K_1 + (\varphi_2 E_2 - \psi_2 K_2) S_1 - (\varphi_2 K_2 + \psi_2 E_2) S_2 \\
B_2 &= B_1 I_3 + C_1 S_3, & C_2 &= -B_1 I_4 - C_1 S_4 \\
E_k &= E_k(1), & L_k &= L_k(1), & P_k &= P_k(1), & K_k &= K_k(1), & k &= 1, 2 \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\Delta_B} [\text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1 \text{ch} \alpha_2 \sin \beta_2 + (\varphi_1 \text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1 + \psi_1 \text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{ch} \alpha_2 \sin \beta_2 - \psi_2 \text{sh} \alpha_2 \cos \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{\Delta_B} [\text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1 \text{ch} \alpha_2 \sin \beta_2 + (\varphi_1 \text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{ch} \alpha_2 \sin \beta_2 - \psi_2 \text{sh} \alpha_2 \cos \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{\Delta_B} [\text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1 \text{ch} \alpha_2 \cos \beta_2 + (\varphi_1 \text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1 + \psi_1 \text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{sh} \alpha_2 \cos \beta_2 + \psi_2 \text{sh} \alpha_2 \sin \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= -\frac{1}{\Delta_B} [\text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1 \text{sh} \alpha_2 \cos \beta_2 + (\varphi_1 \text{ch} \alpha_1 \sin \beta_1 - \psi_1 \text{sh} \alpha_1 \cos \beta_1) \times \\
&\quad \times (\varphi_2 \text{sh} \alpha_2 \cos \beta_2 + \psi_2 \text{ch} \alpha_2 \sin \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_B = \psi_2 (\text{sh}^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_2 + \text{ch}^2 \alpha_2 \sin^2 \beta_2) \neq 0$$

$$B_1 = -\frac{\beta^* H_3}{2} \frac{\theta_1^+ + \theta_1^-}{G_3 H_4 - G_4 H_3}, \quad C_1 = \frac{\beta^* G_3}{2} \frac{\theta_1^+ + \theta_1^-}{G_3 H_4 - G_4 H_3}$$

$$G_3 = \varphi_1 L_1 + \psi_1 P_1 + L_2 I_3 - P_2 I_4, \quad H_3 = \varphi_1 P_1 - \psi_1 L_1 + L_2 S_3 - P_2 S_4$$

$$G_4 = L_1 - (\varphi_2 L_2 + \psi_2 P_2) I_3 + (\varphi_2 P_2 - \psi_2 L_2) I_4$$

$$H_4 = P_1 - (\varphi_2 L_2 + \psi_2 P_2) S_3 + (\varphi_2 P_2 - \psi_2 L_2) S_4$$

Из-за громоздкости формул точность вычислений ограничена первым шагом итерационного процесса.

Заметим, что выведенные рекуррентные формулы (1.16), (1.20), (2.1)-(2.5) позволяют получить аналитические решения поставленных краевых задач с любой асимптотической точностью с помощью компьютера за считанные минуты.

Приведенные решения получены при ограничениях (1.10)-(1.12), наложенных на граничные условия (1.1)-(1.6) и на заданные в уравнениях (1.8) функции.

Указанных ограничений можно избежать, заменив все заданные в (1.1)-(1.6), (1.8) функции их образами преобразования Фурье [7]

$$Q^{\pm}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} Q_1^{\pm}(x, y, z, \omega) \sin \omega t d\omega$$

$$Q_1^{\pm}(x, y, z, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} Q^{\pm}(x, y, z, t) \sin \omega t dt$$

$$(Q^{\pm}, X, Y, Z, P; Q_1^{\pm}, X_1, Y_1, Z_1, P_1^*) \quad (2.9)$$

а неизвестные величины: компоненты вектора перемещения, а также температурную функцию искать в виде

$$Q(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [Q_1(x, y, z, \omega) \sin \omega t + Q_2(x, y, z, \omega) \cos \omega t] d\omega \quad (2.10)$$

и соответственно,

$$\dot{Q}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [Q_1(x, y, z, \omega) \cos \omega t - Q_2(x, y, z, \omega) \sin \omega t] \omega d\omega$$

$$\ddot{Q}(x, y, z, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [Q_1(x, y, z, \omega) \sin \omega t + Q_2(x, y, z, \omega) \cos \omega t] \omega^2 d\omega \quad (2.11)$$

Такие представления оставляют в силе все выведенные формулы для образов искомых величин. После решения краевых задач возникнет необходимость возвратиться к оригиналам искомых величин, применив обратное преобразование Фурье.

Таким образом, асимптотический метод, примененный в [2,3] для решения неклассических краевых задач для анизотропных слоистых пластин и оболочек, можно применить и для решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости, заранее представив неизвестные величины их образами преобразования Фурье.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS-06-100017-8886.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. "Гитутюн", 2005. 468с.
3. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271-278.
4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
5. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сб. научн. тр. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С. 51-58.
6. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. С. 3-15.
7. Бейтман Г., Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований Т.1. М.: Наука, 1966. 344с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
20.09.2006

УДК 539.3

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ
ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: разномодульный материал, статическая устойчивость, стержень.

Keywords: different-modulus material, statical stability, beam.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Վերադարձ տարամոդալ նյութից ձողի կայունության խնդրին

Ուսումնասիրվում է տարամոդալ նյութից ձողի կայունությունը, երբ նրա վրա ազդում են երկու կենտրոնացված ուժեր, ծայրերից հավասար հեռավորության վրա: Երկու դեպք է դիտարկված, երբ ուժերն ուղղված են մեկը մյուսի ուղղությամբ, կամ էլ՝ հակառակ ուղղությամբ: Գալսված ուժերի հեռավորությունից և նյութի հատկությունից նախնական վիճակի լարվածության մի քանի դեպքեր են հնարավոր: Հետազոտվել է բոլոր դեպքերի համար կայունության խնդիրները, հողակապային և ամրակցված եզրային պայմանների դեպքերում: Համեմատության համար դիտարկված է նաև մեկ ուժի դեպքը:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan

The return to problem of stability for different-modulus material of beam

The stability of beam made from different-modulus material when two concentrated force act on equal distance from it ends is investigated. Two cases are investigated when forces are directed one to another and vice vere. In dependence from property of material and from points of application of force there are obtained rather different stresses states and therefore different statements of problem of stability.

Задачи устойчивости составных стержней или стержней из разномодульного материала имеют характерную особенность. Оказывается, если сосредоточенная сила действует в точке соединения материалов [1] (для разномодульности, в точке раздела интервалов растяжение–сжатие [2,3]), независимо от ее поведения (следающая или нет), статический подход определения критических сил вполне пригоден. В дальнейшем подобные [1-3] задачи были рассмотрены для вязкоупругих стержней [4] и для разномодульно-вязкоупругих стержней при движущей нагрузке [5].

В настоящей работе исследуется устойчивость стержня из разномодульного материала при двух сосредоточенных силах, когда они приложены на одинаковых расстояниях от концов. Рассматриваются два случая, когда силы направлены друг к другу и, наоборот, для двух случаев крайних условий – шарнирное опирание и жесткое защемление. Для сравнения приводится также случай устойчивости при одной силе. В зависимости от точек приложения сил и свойства материала, совершенно различными получаются напряженные состояния и, следовательно, различными получаются постановки и решения задач по устойчивости.

1. Стержень на двух концах закреплен в продольном направлении. На одинаковых расстояниях (b) от концов действуют одинаковые по величине сосредоточенные силы P . Общая длина стержня – $2(a + b) = l$. Рассматриваются два случая.

а) Силы направлены друг к другу (от близкого конца в противоположном направлении). Относительно средней точки стержня имеется симметрия. Тогда в срединной части ($2a$) стержня будет сжимающая сила

$$P_1 = -P \frac{bE^-}{aE^+ + bE^-} = -P \frac{\alpha\beta}{1 + \beta(\alpha - 1)} \quad (1.1)$$

а у концов

$$P_2 = P \frac{aE^+}{aE^+ + bE^-} = P \frac{1 - \beta}{1 + \beta(\alpha - 1)} \quad (1.2)$$

здесь E^+ – коэффициент упругости при растяжении, а E^- – при сжатии, $\alpha = E^- / E^+$, $\beta = b / (a + b)$.

в) В случае, когда силы направлены в сторону ближайшего конца, то в сжимающейся части (у концов) будет

$$P_1 = -P \frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta + \alpha(1 - \beta)} \quad (1.3)$$

а в средней части –

$$P_2 = P \frac{\beta}{\beta + \alpha(1 - \beta)} \quad (1.4)$$

2. Уравнения устойчивости в зависимости от того, часть стержня сжатая или растянутая, будут различными. Для первого случая ((1.1), (1.2)) соответствующими уравнениями будут:

$$E^- J \frac{d^4 w_1}{dx^4} - P_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad E^+ J \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

которые в безразмерных величинах превратятся

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + k_1^2 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} - k_2^2 \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = 0 \quad (2.2)$$

здесь

$$k_1^2 = \lambda \frac{\beta[\alpha + \beta(1 - \alpha)]}{4[1 + \beta(\alpha - 1)]}, \quad k_2^2 = \lambda \frac{(1 - \beta)[\beta + \alpha(1 - \beta)]}{4[1 + \beta(\alpha - 1)]}$$

$$\lambda = \frac{4P(a + b)^2}{EJ}, \quad E = \frac{E^+ b + E^- a}{a + b}, \quad \xi = \frac{x}{a + b} \quad (2.3)$$

E – приведенный (осредненный) модуль упругости. Решениями уравнений (2.2) соответственно будут

$$w_1 = c_1 \cos k_1 \xi + c_2 \cos k_1 \xi + c_3 \xi + c_4$$

$$w_2 = d_1 \operatorname{ch} k_2 \xi + d_2 \operatorname{sh} k_2 \xi + d_3 \xi + d_4 \quad (2.4)$$

Начало координаты ξ берем в точке приложения силы, тогда независимо от рассматриваемых случаев, общими будут следующие условия: условия симметрии в срединной точке –

$$w_1' = w_1''' = 0 \quad \text{при } \xi = 1 - \beta \quad (2.5)$$

В точке приложения силы $\xi = 0$ имеем

$$w_1 = w_2, \quad w_1' = w_2'; \quad E^- w_1'' = E^+ w_2'' \quad (2.6)$$

а на конце $\xi = -\beta$ единственное неизменное условие

$$w_2 = 0 \quad \text{при} \quad \xi = -\beta \quad (2.7)$$

Итак, рассмотрим несколько случаев. Если на конце имеется шарнирное условие, то к (2.7) прибавится еще

$$w_2'' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = -\beta \quad (2.8)$$

В точке $\xi = 0$ в качестве четвертого условия изучим случай, когда сила следящая:

$$E^- w_1''' = E^+ w_2''' \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (2.9)$$

и когда она «мертвая»:

$$E^- (w_1''' + k_1^2 w_1') = E^+ (w_2''' - k_2^2 w_2') \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (2.10)$$

Безразмерная критическая сила $\lambda_{кр}$ определится после удовлетворения условий (2.5)-(2.10).

Задача I. Из условий (2.5)-(2.9) $\lambda_{кр}$ определяется из уравнения

$$k_1 \operatorname{tg} k_1 (1 - \beta) = k_2 \operatorname{cth} k_2 \beta \quad (2.11)$$

Задача II. Из условий (2.5)-(2.8) и (2.10):

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 (1 - \beta) + \alpha k_1 \operatorname{cth} k_2 \beta = 0 \quad (2.12)$$

Если на конце $\xi = -\beta$ имеется условие жесткой заделки, то вместо (2.8) возьмем

$$w_2' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = -\beta \quad (2.13)$$

Задача III. Из условий (2.5)-(2.7), (2.9) и (2.13):

$$\alpha k_1 k_2 \operatorname{sh} k_2 \beta + \operatorname{tg} k_1 (1 - \beta) [k_2^2 + \alpha k_1^2 (1 - \operatorname{ch} k_2 \beta)] = 0 \quad (2.14)$$

Задача IV. Из условий (2.5)-(2.7), (2.10) и (2.13):

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 (1 - \beta) + \alpha k_1 \operatorname{th} k_2 \beta = 0 \quad (2.15)$$

3. Если силы направлены к близким концам (случай б), то уравнения устойчивости согласно (1.3) и (1.4) будут

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} - k_3^2 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} + k_4^2 \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь

$$k_3^2 = \lambda \frac{\beta [1 + \beta (\alpha - 1)]}{4 [\beta + \alpha (1 - \beta)]}, \quad k_4^2 = \lambda \frac{(1 - \beta) [1 + \beta (\alpha - 1)]}{4 [\beta + \alpha (1 - \beta)]} \quad (3.2)$$

Выражение λ сохраняет вид (2.3), но уже для выражения приведенного коэффициента E должны брать

$$E = \frac{aE^+ + bE^-}{a + b} \quad (3.3)$$

Здесь изучим только случай шарнирного опирания –

$$w_2 = w_2'' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = -\beta \quad (3.4)$$

Задача V. Наряду с условиями (2.5), первыми двумя условиями (2.6) и (3.3) должны быть удовлетворены еще следующие:

$$E^+ w_1'' = E^- w_2'' \quad \text{и} \quad E^+ w_1''' = E^- w_2''' \quad (3.5)$$

Тогда уравнение для определения $\lambda_{кр}$ будет

$$k_4 \operatorname{ctg} k_4 \beta + k_3 \operatorname{th} k_3 (1 - \beta) = 0 \quad (3.6)$$

Задача VI. Все перечисленные условия в задаче V, кроме последнего в (3.5). Вместо него возьмем

$$E^+ (w_1''' - k_3^2 w_1') = E^- (w_2''' + k_4^2 w_2') \quad (3.7)$$

тогда имеем

$$k_3 \operatorname{ctg} k_4 \beta = \alpha k_4 \operatorname{th} k_3 (1 - \beta) \quad (3.8)$$

4. Для сравнения с предыдущими задачами рассмотрен также случай, когда сила одна.

Тогда в сжатой части стержня сила будет

$$P_1 = -P \frac{\alpha \beta}{2 + \beta(\alpha - 1)} \quad (4.1)$$

а в растянутой –

$$P_1 = P \frac{2 - \beta}{2 + \beta(\alpha - 1)} \quad (4.2)$$

Решая уравнения типа (2.2) и удовлетворяя условиям на концах –

$$\begin{aligned} w_2 = w_1'' = 0 \quad \text{при } \xi = -\beta \\ w_1 = w_1'' = 0 \quad \text{при } \xi = 2 - \beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

для случая „мертвой» силы получим (задача VII)

$$k_5 \operatorname{ctg} k_5 (2 - \beta) + k_6 \operatorname{cth} k_6 \beta = 0 \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_5^2 = \lambda \beta k, \quad k_6^2 = \lambda (2 - \beta) k \\ k = \frac{1}{4} \frac{\beta + \alpha (2 - \beta)}{2 + \beta(\alpha - 1)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь параметр λ имеет вид (2.3), но только E будет:

$$E = \frac{E^+ b + E^- (2a + b)}{2(a + b)}$$

Для случая следящей силы (задача VIII) соответствующее уравнение будет

$$\begin{aligned} k_5 k_6 [\alpha \beta k_5^3 - (2 - \beta) k_6^3] [\alpha k_5 \operatorname{cth} k_6 \beta - k_6 \operatorname{ctg} k_5 (2 - \beta)] - \\ - (\alpha k_5^2 + k_6^2) (\alpha \beta k_5^3 + k_6^3) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6), в частности, получатся результаты [3] (стр.120).

5. Для всех рассмотренных задач найдены первые критические параметры (безразмерная критическая сила) для различных α и β .

$$\alpha = 0,2; 0,4; 1; 2,5; 5$$

$$\beta = 0,1; 0,2; \dots, 0,9$$

Случай $\alpha = 1$ соответствует однородному материалу. Номера таблиц соответствуют номерам задач.

Таблица 1

α	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
----------	-----	-----	-----	-----	-----

λ .					
0,1	329,24	173,08	100,20	49,037	30,497
0,2	121,98	78,418	52,278	30,892	22,405
0,3	64,475	48,813	37,328	26,402	21,611
0,4	40,334	35,250	30,844	25,974	23,586
0,5	28,128	28,128	28,128	28,128	28,128
0,6	21,385	24,470	27,965	33,209	36,570
0,7	17,729	23,417	30,623	43,294	52,894
0,8	16,558	25,757	38,635	65,383	90,149
0,9	20,149	38,329	66,205	135,28	217,53,00

Таблица 2

0,1	1514,4	728,82	361,76	118,78	53,94
0,2	670,28	385,69	214,01	84,045	46,068
0,3	424,77	280,97	173,89	81,774	52,148
0,4	321,98	239,38	165,18	93,261	67,848
0,5	277,18	228,83	176,27	120,08	98,791
0,6	268,14	244,67	211,23	174,99	162,71
0,7	297,52	300,75	293,25	298,99	316,77
0,8	408,40	462,60	517,25	661,13	813,64
0,9	915,22	1199,1	1591,8	2635,0	3915,0

Таблица 3

0,1	1519,6	740,79	382,48	144,34	63,508
0,2	624,53	334,54	178,27	73,528	41,567
0,3	346,23	194,57	111,85	55,175	36,784
0,4	211,69	126,29	81,919	49,980	38,635
0,5	135,29	89,142	67,174	51,266	45,358
0,6	90,075	68,266	60,874	56,356	58,757
0,7	63,233	57,452	61,463	74,214	85,246
0,8	48,361	55,539	72,184	110,21	146,29
0,9	46,046	72,528	116,04	225,51	356,28

Таблица 4

0,1	1549,2	775,36	414,61	164,92	80,718
0,2	678,69	399,89	232,59	101,21	56,229
0,3	427,60	286,87	182,85	90,831	57,834
0,4	323,04	242,11	170,02	98,737	71,539
0,5	277,58	230,12	178,98	123,56	101,32
0,6	268,28	245,26	212,70	177,16	164,44
0,7	297,56	300,98	293,96	300,20	317,84
0,8	408,41	462,66	517,48	661,62	814,12
0,9	915,22	1199,1	1591,8	2635,1	3915,1

Таблица 5

0,1	484,48	921,60	1591,8	3252,9	5230,4
0,2	221,67	344,83	517,25	875,34	1206,9
0,3	169,78	224,25	293,25	414,60	506,53
0,4	161,53	184,82	211,23	250,83	276,22
0,5	176,27	176,27	176,27	176,27	176,27
0,6	216,00	188,77	165,18	139,09	126,31
0,7	300,37	227,40	173,89	123,00	100,67
0,8	499,35	321,01	214,00	126,46	91,71
0,9	1188,6	624,86	361,76	177,03	110,10

Таблица 6

0,1	144,11	96,291	66,205	45,479	34,442
0,2	76,632	56,392	38,635	23,277	15,317
0,3	60,710	45,492	30,623	16,437	9,742
0,4	57,819	42,697	27,965	13,563	7,398
0,5	62,337	44,458	28,128	12,496	6,361
0,6	74,992	50,754	30,844	12,736	6,112
0,7	102,03	64,239	37,328	14,578	6,660
0,8	165,63	94,432	52,278	19,761	8,725
0,9	384,46	190,43	100,20	37,932	16,79

Таблица 7

0,1	400,31	185,85	100,07	44,364	25,019
0,2	170,29	89,520	51,827	25,362	15,774
0,3	99,978	58,485	36,355	19,576	13,220
0,4	67,840	43,612	29,074	17,180	12,460
0,5	50,214	35,150	25,107	16,246	12,553
0,6	39,481	29,890	22,857	16,167	13,233
0,7	32,505	26,486	21,670	16,733	14,447
0,8	27,793	24,289	21,253	17,897	16,252
0,9	24,559	22,971	21,489	19,723	18,803

Таблица 8

0,1	870,65	388,08	195,75	73,937	35,821
0,2	395,40	197,45	105,58	43,343	23,332
0,3	245,38	134,90	76,433	34,160	20,137
0,4	174,78	104,40	62,621	30,484	19,456
0,5	135,07	86,763	55,016	29,148	19,942
0,6	110,37	75,574	50,550	29,061	21,044
0,7	94,042	68,052	47,823	29,582	21,899
0,8	82,754	62,698	45,913	29,744	19,286
0,9	74,752	58,400	43,732	27,276	13,638

Из приведенных таблиц можно сделать ряд выводов.

1. То, что критические значения λ при случае защемленных концов балки должны быть больше, чем при шарнирном опирании, очевидно, однако, если в задаче Эйлера это отношение равно четырем, то здесь различные в зависимости от α и β и наименьшее его значение имеет порядок около двух.

2. Почти для всех α (для задач I-VI) с увеличением β значение критической силы уменьшается, а потом возрастает, т.е. имеется определенный β , при котором она минимальная.
3. При воздействии одной силы (п.4) критическая сила больше, чем при воздействии двух сил для случая, когда она „мертвая» и меньше, когда следящая.
4. Для случаев, когда силы направлены друг к другу, значения критических сил, как правило, больше, когда силы действуют „мертвым» образом, чем при следящей. А вот для случая, когда силы направлены к концам, имеется совершенно обратная картина.

Можно, конечно, сделать еще ряд выводов, но оставим их для читателей, конечно, если они найдутся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee Q.E., Reissner E. Note on a Problem Beam Buckling. //J.Applied Mech. and Physics (ZAMP). 1975. V.26. P. 839-843.
2. Исабебян Н.Г. Об одной задаче устойчивости стержня, изготовленного из разномодульного материала. Механика. /Межвузовский сб. научных трудов. Ереван. 1988. Вып.4. С.97-101.
3. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разнсопротивляю-щихся растяжению и сжатию. Ереван: Изд-во РАУ. 2004. 187 с.
4. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. ¹4. С.3-12.
5. Мовсисян Л.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. // Изв. РАН. МТТ. 1994. ¹4. С.171-175.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.05.2006

УДК 536.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНСТРУКТИВНО И ФИЗИЧЕСКИ
НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ
АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա. Պ. Եանկովսկի

Գոնաստրուկտիվ և ֆիզիկական անհամասեռ կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության
ստացիոնար խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում

Ձևակերպված է շերտավոր կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության եռաչափ ստացիոնար խնդիրը՝ շերտերի ընդհանուր անիզոտրոպիայի և անհամասեռության դեպքում: Կառուցված են ձևակերպված խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծությունները, ձողերի կողմնային մակերևույթների վրա տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Կատարված է ստացված երկչափ և միաչափ հավասարումների և եզրային պայմանների անալիզ և ուսումնասիրված են ջերմահաղորդականության խնդիրների լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները

Yu.V. Nemirovskii, A.P. Yankovskii

The Asymptotic Analysis of the Stationary Problem of Thermal Conduction in the Constructively and
Physically Nonuniform Composit Balks at General form Anisotropy

The three-dimensional problem of a stationary thermal conduction of schistose composit balks of constant cross section is formulated at the general anisotropy and inhomogeneity of materials of stratum. Exterior asymptotic decompositions of solutions of a task in view are constructed at different boundary conditions on lateral surfaces of cores. The gained two-dimensional and one-dimensional resolving equations and boundary problems are analysed and asymptotic properties of solutions of problems of a thermal conduction are explored.

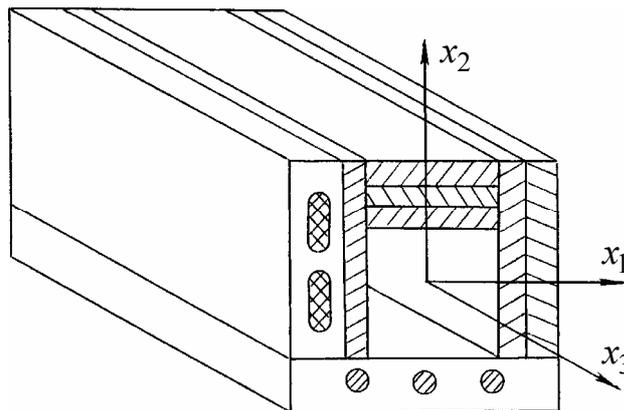
Сформулирована трехмерная задача стационарной теплопроводности слоистых композитных стержней постоянного поперечного сечения при общей анизотропии и неоднородности материалов слоев. Построены внешние асимптотические разложения решений поставленной задачи при разных граничных условиях на боковых поверхностях стержней. Проанализированы получающиеся двумерные и одномерные разрешающие уравнения и граничные задачи и исследованы асимптотические свойства решений задач теплопроводности.

При построении математических методов исследования пространственного стационарного поля температур тонкостенных элементов конструкций (стержней, пластин, оболочек) исследователи всегда пытались свести решение трехмерной задачи к совокупности решений некоторых более простых двумерных и одномерных задач. Способов понижения размерности решаемых задач разработано такое количество [1, 2], что их детальный анализ далеко выходит за рамки настоящего исследования. При этом, учитывая малый размер в поперечном направлении, авторы разными способами стремятся избавиться от поперечной координаты, сводя проблему к решению краевых задач в плане (для пластин) или вдоль оси (для стержней). Наличие малого геометрического параметра позволяет разыскивать решение трехмерной задачи теплопроводности тонкостенных конструкций асимптотическими методами интегрирования. Разработке этих методов для однослойных анизотропных тонкостенных конструкций посвящены, например, работы [3, 4 и др.]. Однако на сегодняшний день отсутствуют аналогичные исследования для конструктивно неоднородных (слоистых) тонкостенных композитных изделий. Целью настоящей работы является изучение с

использованием асимптотического анализа трехмерной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных анизотропных стержней.

Рассмотрим стержень с постоянным по длине произвольным поперечным сечением, состоящим из произвольного числа M анизотропных слоев, выполненных из различных неоднородных материалов (фиг. 1). Граница между слоями в поперечном сечении не обязательно прямолинейна, а может быть произвольной кривой, в том числе и замкнутой. Для краткости изложения продольные стержни, посредством которых осуществлено армирование, также будем называть слоями. Материалы слоев могут быть неоднородны как в поперечном сечении, так и в продольном направлении. Все слои пронумеруем: $m = 1, 2, \dots, M$, где m – номер слоя. Свяжем со стержнем прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 так, чтобы ось x_3 была направлена вдоль оси стержня, а переменные x_1, x_2 определяли координаты точек в поперечном сечении (фиг.1).

Введем обозначения: $T^{(m)}$ – температура m -го слоя; $q_i^{(m)}$ – компоненты вектора теплового потока в m -м слое; $\lambda_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – коэффициенты теплопроводности материала m -го слоя; $w^{(m)}$ – плотность мощностей внутренних источников тепла в m -м слое; q_n – заданный тепловой поток через боковую поверхность A стержня; $\alpha^{(m)}$ – коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m -м слоем стержня и окружающей средой на боковой поверхности; T_∞ – температура окружающей среды со стороны боковой поверхности стержня; T_l^∞, T_r^∞ – температура окружающей среды со стороны левой («left») и правой («right») торцевых плоскостей стержня, определяемых координатами $x_3 = x_l, x_3 = x_r$ ($x_r > x_l$) соответственно; q_l, q_r – заданный тепловой поток через левую и правую торцевые плоскости стержня соответственно; $\alpha_l^{(m)}, \alpha_r^{(m)}$ – коэффициенты теплообмена по закону Ньютона между m -м слоем стержня и окружающей средой на левом и правом торцах соответственно.



Фиг. 1. Слоистый стержень

Будем рассматривать такие стержни, для которых продольный размер $L = x_r - x_l$ больше характерного размера H поперечного сечения (например, H – наибольшее расстояние между точками поперечного сечения) и для которых отношение

$$\varepsilon = H / L \quad (1)$$

является малым параметром.

Пусть T_e – характерное значение температуры; λ_e – характерное (эталонное) значение коэффициента теплопроводности. Перейдем к безразмерным переменным, функциям и величинам, для простоты не меняя их обозначений,

$$\begin{aligned} x_k &\leftrightarrow x_k / H \quad (k = 1, 2), \quad x_3 \leftrightarrow (x_3 - x_l) / L, \quad x_s \leftrightarrow (x_s - x_l) / L \quad (s = l, r) \\ T^{(m)} &\leftrightarrow T^{(m)} / T_e, \quad T_\infty \leftrightarrow T_\infty / T_e, \quad q_i^{(m)} \leftrightarrow q_i^{(m)} / q_e, \quad \lambda_{ij}^{(m)} \leftrightarrow \lambda_{ij}^{(m)} / \lambda_e \\ (i, j = 1, 2, 3), \quad q_n &\leftrightarrow q_n / q_e, \quad \alpha^{(m)} \leftrightarrow \alpha^{(m)} H / \lambda_e, \quad T_s^\infty \leftrightarrow T_s^\infty / T_e \quad (2) \\ q_s &\leftrightarrow q_s / q_e, \quad \alpha_s^{(m)} \leftrightarrow \alpha_s^{(m)} H / \lambda_e \quad (s = l, r), \quad w^{(m)} \leftrightarrow w^{(m)} H / q_e, \quad q_e \equiv \lambda_e T_e / H \end{aligned}$$

Далее будем считать, что изменения малого параметра ε в (1) вызваны изменением длины L стержня при фиксированном значении H , тогда в (2) безразмерные переменные, функции и величины, x_k ($k = 1, 2$), T_∞ , q_n , $\alpha^{(m)}$, $w^{(m)}$, $\lambda_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2, 3$), T_s^∞ , q_s , $\alpha_s^{(m)}$ ($s = l, r$) имеют порядок $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Стационарная задача теплопроводности композитного стержня с учетом (1), (2) описывается следующими безразмерными уравнениями и соотношениями: уравнением теплопроводности

$$\partial_1 q_1^{(m)} + \partial_2 q_2^{(m)} + \varepsilon \partial_3 q_3^{(m)} = w^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (3)$$

законом теплопроводности Фурье

$$q_i^{(m)} = -\lambda_{i1}^{(m)} \partial_1 T^{(m)} - \lambda_{i2}^{(m)} \partial_2 T^{(m)} - \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T^{(m)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

условиями сопряжения на границе контакта i -го и j -го слоев

$$q_1^{(i)} n_1 + q_2^{(i)} n_2 = q_1^{(j)} n_1 + q_2^{(j)} n_2, \quad T^{(i)} = T^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j) \quad (5)$$

граничными условиями на боковой поверхности A стержня

$$\beta(q_1^{(p)} n_1 + q_2^{(p)} n_2) = \gamma q_n + \delta \alpha^{(p)} (T^{(p)} - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (6)$$

граничными условиями на левой

$$-\beta_l q_3^{(m)} = \gamma_l q_l(x_1, x_2) + \delta_l \alpha_l^{(m)} (T^{(m)} - T_l^\infty), \quad x_3 = x_l = 0 \quad (7)$$

и правой

$$\beta_r q_3^{(m)} = \gamma_r q_r(x_1, x_2) + \delta_r \alpha_r^{(m)} (T^{(m)} - T_r^\infty), \quad x_3 = x_r = 1, \quad 1 \leq m \leq M \quad (8)$$

торцевых плоскостях. Здесь $\partial_i(\square) = \partial(\square) / \partial x_i$ – оператор частного дифференцирования; n_1, n_2 – компоненты вектора единичной нормали к боковой поверхности A стержня или к границе контакта слоев (смотря по смыслу); $\beta(\mathbf{x})$, $\gamma(\mathbf{x})$, $\delta(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in A$) – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на боковой поверхности стержня; β_s , γ_s , δ_s – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на левом ($s = l$) или правом ($s = r$) торцах стержня; индекс p в (6) пробегает только те значения от 1 до M , для которых p -й слой имеет частью своей границы боковую поверхность A стержня.

Наличие малого параметра ε в уравнении (3) и в соотношениях (4) указывает на то, что граничная задача (3)–(8) является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи будем разыскивать в виде

$$T^{(m)} = T_*^{(m)} + T_l^{(m)} + T_r^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (9)$$

где $T_*^{(m)}$ – основное температурное поле в m -м слое; $T_l^{(m)}, T_r^{(m)}$ – поправки к основному полю в погранслоях в окрестности левого и правого торцов стержня, соответственно.

Далее настоящее исследование посвящено определению основного температурного поля $T_*^{(m)}$ в стержне. При этом будем различать два случая: 1) на боковой поверхности стержня задан только тепловой поток; 2) на боковой поверхности задан закон конвективного теплообмена или условия общего вида (6). В обоих случаях потребуем, чтобы функция $T_*^{(m)}$ удовлетворяла уравнению (3), соотношениям (4), условиям сопряжения (5) и граничным условиям (6) на боковой поверхности стержня. Вопрос о выполнении граничных условий на торцах стержня для функции пока оставим открытым.

В соответствии с терминологией, принятой в [5], задачу о нахождении функции $T_*^{(m)}$, удовлетворяющей уравнениям (3)–(6) внутри стержня и на его боковой поверхности, будем называть *полукраевой*, так как существуют участки границы стержня (его торцы), на которых краевые условия для этой функции временно не заданы.

Кроме того, в соответствии с [5], введем *определение*. Пусть дано дифференциальное уравнение $L(T(\mathbf{x}), \varepsilon) = 0$, функциональную последователь-

ность $\left\{ T(\mathbf{x}, \varepsilon) \right\}_{K=0}^{\infty}$ будем называть формальным асимптотическим решением этого уравнения, если существует монотонная неограниченно возрастающая функция $N(K)$ такая, что для любого K выполняется равенство

$$L\left(T(\mathbf{x}, \varepsilon), \varepsilon \right) = O\left(\varepsilon^{N(K)} \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

Элемент последовательности $T(\mathbf{x}, \varepsilon)$ будем называть формальным асимптотическим приближением решения уравнения с точностью $O\left(\varepsilon^{N(K)} \right)$. Если равенство, аналогичное (10), выполняется для части или всех краевых условий, то будем говорить о формальном асимптотическом решении полукраевой или краевой задачи соответственно.

Случай первый. На боковой поверхности задан только тепловой поток ($\beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$, в (6)). Примем для функции $T_*^{(m)}$ следующее правило аппроксимации (внешнее разложение)

$$T_*^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^K T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M, \quad K \geq 0 \quad (11)$$

где K – порядковый номер правила аппроксимации (номер асимптотического приближения); $T_k^{(m)}$ – характеристические функции температурного поля.

Представим компоненты вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ в виде

$$q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^K Q_{i,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (i = 1, 2), \quad q_3^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{K-1} Q_{3,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (12)$$

где $Q_{j,k}^{(m)}$ ($1 \leq m \leq M$, $j = 1, 2, 3$) – характеристические функции компонент вектора теплового потока, и потребуем выполнения следующих равенств между характеристическими функциями $T_k^{(m)}$ и $Q_{j,k}^{(m)}$:

$$Q_{i,k}^{(m)} = -\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} - \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \quad (i = 1, 2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad T_{-1}^{(m)} \equiv 0) \quad (13)$$

$$Q_{3,k}^{(m)} = -\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} - \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \quad (0 \leq k \leq K-1, \quad T_{-1}^{(m)} \equiv 0, \quad 1 \leq m \leq M)$$

Подставим разложения (11), (12) в закон теплопроводности (4) и учтем (13), тогда получим, что в общем случае анизотропии все соотношения в законе Фурье выполняются приближенно:

$$\begin{aligned} q_i^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K-1} \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)} \quad (i = 1, 2) \\ q_3^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K-2} \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_K^{(m)} - \\ &- \varepsilon^{K-2} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{K-1}^{(m)} - \varepsilon^{K-1} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (14)$$

Если рассматривается анизотропия специального вида, когда одна из главных осей теплофизической анизотропии материала каждого слоя совпадает с продольным направлением стержня, т.е.

$$\lambda_{i3}^{(m)} = \lambda_{3i}^{(m)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq M \quad (15)$$

то первые два равенства (14) выполняются точно, а третье равенство – асимптотически с точностью порядка $O(\varepsilon^{K-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим (11), (12) в условия сопряжения решения (5) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , тогда получим цепочку равенств

$$Q_{1,k}^{(i)} n_1 + Q_{2,k}^{(i)} n_2 = Q_{1,k}^{(j)} n_1 + Q_{2,k}^{(j)} n_2, \quad T_k^{(i)} = T_k^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (16)$$

Подставим разложения (12) в уравнение теплопроводности (3) и граничные условия (6), где $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , учитывая свойства $w^{(m)} = O(1)$, $q_n = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда получим цепочки равенств

$$\partial_1 Q_{1,k}^{(m)} + \partial_2 Q_{2,k}^{(m)} + \partial_3 Q_{3,k-1}^{(m)} = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}) \quad (1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq k \leq K, \quad Q_{3,-1}^{(m)} \equiv 0) \quad (17)$$

$$Q_{1,k}^{(p)} n_1 + Q_{2,k}^{(p)} n_2 = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (18)$$

где δ_{2k} – символ Кронекера ($\delta_{22} = 1$, $\delta_{2k} = 0$ при $k \neq 2$). Подставим теперь в равенства (16)–(18) выражения (13), тогда получим цепочки равенств:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \right) - \partial_3 \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_{k-1}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-2}^{(m)} \right) &= \\ = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r T_k^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 T_{k-1}^{(i)} \right) = \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r T_k^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 T_{k-1}^{(j)} \right) \quad (20)$$

$$T_k^{(i)} = T_k^{(j)} \quad (0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$-\sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_k^{(p)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(p)} \right) = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (21)$$

где

$$T_{-k}^{(m)} \equiv 0 \quad (1 \leq m \leq M, \quad k \geq 1) \quad (22)$$

Анализ уравнений (19)–(21) с учетом (22) позволяет заключить, что для любого k функцию $T_k^{(m)}$ можно представить в виде:

$$T_k^{(m)}(\mathbf{x}) = T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) + \theta_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) D_3 \theta_{k-1}(x_3) + \theta_k(x_3), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq m \leq M \quad (23)$$

где

$$D_3(\square) = d(\square) / dx_3, \quad \theta_k(x_3) \equiv T_k^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3), \quad x_3 \in [0, 1] \quad (24)$$

$T_{*k}^{(m)}$, $\theta_{*k}^{(m)}$, θ_{k-1} , θ_k – подлежащие определению функции, причем в силу (22), (24)

$$T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \theta_{-k}(x_3) \equiv 0 \quad (k \geq 1) \quad (25)$$

$$T_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0, \quad \theta_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0, \quad 0 \leq k \leq K, \quad x_3 \in [0, 1] \quad (26)$$

x_1^0, x_2^0 – координаты некоторой фиксированной точки поперечного сечения стержня; m в (24), (26) и далее в аналогичных равенствах соответствует номеру слоя, которому принадлежат точки (x_1^0, x_2^0, x_3) при $x_3 \in [0, 1]$.

Продемонстрируем, как можно последовательно определить все функции, входящие в (23). Для этого подставим разложение (23) в равенства (19)–(21):

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j (T_{*k}^{(m)} + \theta_{*k}^{(m)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_{*k-1}^{(m)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] - \\ & -\partial_3 \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_{*k-1}^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_{*k-2}^{(m)} D_3 \theta_{k-3} + \theta_{k-2}) \right] = \end{aligned} \quad (27)$$

$$= \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq k \leq K$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r (T_{*k}^{(i)} + \theta_{*k}^{(i)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(i)} + \theta_{*k-1}^{(i)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] = \\ & = \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r (T_{*k}^{(j)} + \theta_{*k}^{(j)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(j)} + \theta_{*k-1}^{(j)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$T_{*k}^{(i)} + \theta_{*k}^{(i)} D_3 \theta_{k-1} = T_{*k}^{(j)} + \theta_{*k}^{(j)} D_3 \theta_{k-1} \quad (0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^2 n_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j (T_{*k}^{(p)} + \theta_{*k}^{(p)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(p)} + \theta_{*k-1}^{(p)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] = \\ & = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (29)$$

Потребуем, чтобы функция $\theta_{*k}^{(m)}$ с учетом (26) удовлетворяла следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j \theta_{*k}^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \right) &= 0 \quad (1 \leq m \leq M), \quad \theta_{*k}^{(i)} = \theta_{*k}^{(j)} \quad (30) \\ \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r \theta_{*k}^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \right) &= \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r \theta_{*k}^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \right) \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j) \\ -\sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j \theta_{*k}^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \right) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in A), \quad \theta_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0 \quad (0 \leq k \leq K) \end{aligned}$$

Переменная x_3 в граничных задачах (30) выступает в качестве параметра и для каждого k эти задачи полностью идентичны, поэтому достаточно задачу (30) решить при любом k (например, при $k = 0$) и положить

$$\theta_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) = \theta_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv \theta_*^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq m \leq M \quad (31)$$

Краевая задача (30) является двумерной (по переменным x_1, x_2 , так как x_3 выступает в качестве параметра) задачей типа Неймана. Такие граничные задачи хорошо изучены [6]. Если материал каждого слоя обладает анизотропией специального вида (15), то из (30), (31) следует $\theta_*^{(m)} \equiv 0$. В случае общей анизотропии функция $\theta_*^{(m)} \neq 0$ и определяется теплофизическими свойствами материалов слоев (коэффициентами $\lambda_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, 3$). Далее будем считать, что граничная задача (30) уже решена.

Перепишем равенства (27)–(29) с учетом (30), (31):

$$-\partial_3 \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-3} + \theta_{k-2}) \right] - \quad (32)$$

$$-\sum_{i=1}^2 \partial_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_{*k}^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M$$

$$T_{*k}^{(i)} = T_{*k}^{(j)}, \quad \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r T_{*k}^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(i)} + \theta_*^{(i)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \quad (33)$$

$$= \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r T_{*k}^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(j)} + \theta_*^{(j)} D_3 \theta_{k-2}) \right] \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$-\sum_{i=1}^2 n_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_{*k}^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(p)} + \theta_*^{(p)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A) \quad (34)$$

Проинтегрируем уравнение (32) по площади F поперечного сечения стержня, а граничное условие (34) – по контуру Γ поперечного сечения и применим формулу Остроградского – Гаусса, тогда с учетом условий сопряжения (33) получим условие разрешимости полукраевой задачи (32)–(34):

$$\begin{aligned}
& -D_3 \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \lambda_{3j}^{(m)} (\partial_j T_{*k-1}^{(m)} + \partial_j \theta_{*k-1}^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) dF + \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \lambda_{33}^{(m)} [D_3 \theta_{k-2} + \right. \\
& \left. + \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_{*k-2}^{(m)} D_3 \theta_{k-3})] dF \right\} = \delta_{2k} \left(\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} w^{(m)}(\mathbf{x}) dF - \int_{\Gamma} q_n d\Gamma \right), \quad x_3 \in [0, 1]
\end{aligned} \quad (35)$$

где F_m – площадь поперечного сечения m -го слоя стержня. (Аналогичное условие разрешимости граничной задачи (30) приводит к тождеству $0 \equiv 0$.)

Предположим, что в (32)–(35) функции $T_{*k-1}^{(m)}(\mathbf{x})$, $T_{*k-2}^{(m)}(\mathbf{x})$, $\theta_{k-3}(x_3)$ уже известны, тогда равенство (35) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $\theta_{k-2}(x_3)$, которое можно записать так:

$$-D_3 (G_k(x_3) + H_*(x_3) D_3 \theta_{k-2}(x_3)) = W_k(x_3), \quad x_3 \in [0, 1], \quad 0 \leq k \leq K \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}
G_k(x_3) & \equiv \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_{*k-1}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_{*k-2}^{(m)} D_3 \theta_{k-3}) \right] dF \\
W_k(x_3) & \equiv \delta_{2k} \left(\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} w^{(m)}(\mathbf{x}) dF - \int_{\Gamma} q_n(\Gamma, x_3) d\Gamma \right) \quad (0 \leq k \leq K) \\
H_*(x_3) & \equiv \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j \theta_{*k-1}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) dF
\end{aligned} \quad (37)$$

Общий интеграл уравнения (36) имеет вид:

$$\theta_{k-2}(x_3) = - \int_0^{x_3} \frac{dt}{H_*(t)} \left(G_k(t) + \int_0^t W_k(s) ds \right) + C_{k-2}^* \int_0^{x_3} \frac{ds}{H_*(s)} + C_{k-2}^{**} \quad (38)$$

где C_{k-2}^* , C_{k-2}^{**} – постоянные интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий на торцах стержня ($x_3 = 0$, $x_3 = 1$).

Так как функции $T_{*k-1}^{(m)}$, $T_{*k-2}^{(m)}$, θ_{k-3} в (32)–(34), (37) предполагаются известными, а функция θ_{k-2} определена в (38), равенства (32)–(34) с учетом первого уравнения (26) образуют двумерную (по переменным x_1, x_2) граничную задачу для определения функции $T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x})$, причем переменная x_3 здесь выступает в качестве параметра. Эта краевая задача является задачей типа Неймана и достаточно хорошо изучена [6].

Выясним вопрос об определении постоянных интегрирования C_{k-2}^* , C_{k-2}^{**} в (38). В точности краевые условия (7), (8) на торцах в континууме точек $(x_1, x_2) \in F$, $x_3 = 0$ или $x_3 = 1$ не могут быть выполнены без рассмотрения пограничных слоев, возникающих вблизи торцов стержня. Для определения же постоянных в (38) потребуем выполнения граничных условий на торцах стержня в интегральном смысле (проинтегрировав (7), (8) по площади поперечного сечения), тогда после

подстановки в (7), (8) разложений (11), (12) и собирания слагаемым при одинаковых степенях ε , получим цепочки интегральных равенств

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (-\beta_l Q_{3,k}^{(m)} - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_k^{(m)}) dF &= \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_l^\infty) dF \quad (x_3 = 0) \\ \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\beta_r Q_{3,k}^{(m)} - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_k^{(m)}) dF &= \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_r^\infty) dF \quad (x_3 = 1) \end{aligned} \quad (39)$$

Подставим сюда выражения для $Q_{3,k}^{(m)}$ из (13), тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} [\beta_l (\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_k^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_k^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)}) - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_k^{(m)}] dF &= \\ = \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_l^\infty) dF \quad (x_3 = 0) \\ \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} [-\beta_r (\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_k^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_k^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)}) - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_k^{(m)}] dF &= \\ = \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_r^\infty) dF \quad (x_3 = 1, \quad 0 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (40)$$

Выполнение равенств (39) или (40) является необходимым и достаточным условием затухания погранслоев в стержне [3].

Покажем, как по изложенной выше схеме можно последовательно с увеличением k определить все функции, входящие в разложения (11), (23). Предполагаем, что граничная задача (30) уже решена и функция $\theta_*^{(m)}(\mathbf{x})$ (см. (31)) уже известна. Тогда при $k = 0$ из (26), (32)–(34) с учетом (25) получим $T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, поэтому из (23), (25) имеем

$$T_0^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv T_0^{(m)}(x_3) = \theta_0(x_3) \quad (T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0) \quad (41)$$

Аналогично, при $k = 1$ из (26), (32)–(34) с учетом (25) и $T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$ получим $T_{*1}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, поэтому из (23) с учетом (31) следует:

$$T_1^{(m)}(\mathbf{x}) = \theta_*^{(m)}(\mathbf{x}) D_3 \theta_0(x_3) + \theta_1(x_3) \quad (T_{*1}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0) \quad (42)$$

после чего из (40) при $k = 0$ с учетом (41) и (22) имеем

$$\theta_0(0) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \delta_l \alpha_l^{(m)} dF = 0, \quad \theta_0(1) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \delta_r \alpha_r^{(m)} dF = 0 \quad (43)$$

а из (38) при $k = 2$ с учетом (37), (25) и $T_{*0}^{(m)} = T_{*1}^{(m)} = 0$ можно определить функцию $\theta_0(x_3)$, постоянные интегрирования которой C_0^* , C_0^{**} вычисляются из (43), где предполагается, что интегралы по площади поперечного сечения не равны нулю. После этого функция $T_0^{(m)}$ в силу (41) будет однозначно определена.

Аналогично, из (40) при $k = 1$ с учетом (41), (42) получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\beta_l D_3 \theta_0 \left(\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 \theta_*^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 \theta_*^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) - \right. \\
& \left. - \delta_l \alpha_l^{(m)} \left(\theta_*^{(m)} D_3 \theta_0 + \theta_1(x_3) \right) \right] dF = 0 \quad (x_3 = 0) \\
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[-\beta_r D_3 \theta_0 \left(\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 \theta_*^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 \theta_*^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) - \right. \\
& \left. - \delta_r \alpha_r^{(m)} \left(\theta_*^{(m)} D_3 \theta_0 + \theta_1(x_3) \right) \right] dF = 0 \quad (x_3 = 1, \quad 0 \leq k \leq K)
\end{aligned} \tag{44}$$

Так как функция $\theta_0(x_3)$ однозначно определена, то из (26), (32)–(34) с учетом (25) и $T_{*0}^{(m)} = T_{*1}^{(m)} = 0$ можно определить функцию $T_{*2}^{(m)}(\mathbf{x})$, а затем из (38) при $k = 3$ с учетом (37) – и функцию $\theta_1(x_3)$, постоянные интегрирования которой C_1^* , C_1^{**} вычисляются из (44). После этого функция $T_1^{(m)}$ в силу (42) также будет однозначно определена. Далее по схеме (23)–(40) при $2 \leq k \leq K$ можно однозначно определить и все оставшиеся характеристические функции $T_k^{(m)}$ в разложении (11).

Равенства (43), (44) справедливы при $\delta_l \neq 0$, $\delta_r \neq 0$. Пусть на правом торце стержня задан тепловой поток ($\beta_r = \gamma_r = 1$, $\delta_r = 0$ в (8)), тогда второе равенство (43) выполняется тождественно, а постоянные C_0^* , C_0^{**} можно определить из первого равенства (43) и второго равенства (44), которое при $\delta_r = 0$ не зависит от θ_1 , но в силу (38) содержит постоянную C_0^* . Аналогично, постоянные C_1^* , C_1^{**} определяются из первого интегрального равенства (44) и второго равенства (40) при $k = 2$ с учетом $\delta_r = 0$ и т.д. для остальных постоянных C_k^* , C_k^{**} ($2 \leq k \leq K$). Подобные рассуждения справедливы и в том случае, когда на левом торце задан тепловой поток ($\beta_l = \gamma_l = 0$, $\delta_l = 0$ в (7)), а на правом торце – граничное условие общего вида (8) или задана температура ($\beta_r = \gamma_r = 0$, $\delta_r \alpha_r^{(m)} \equiv 1$).

Отметим, что после подстановки аппроксимаций (11), (12) в граничные условия (7), (8) и интегрирования этих соотношений по площади поперечного сечения с учетом равенств (39) получим приближенное выполнение (в интегральном смысле) граничных условий на торцах стержня:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[-\beta_l q_3^{(m)} - \gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} \left(T^{(m)} - T_l^\infty \right) \right] dF = -\varepsilon^{K-2} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \beta_l Q_{3,K}^{(m)} dF, \quad x_3 = 0 \\
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\beta_r q_3^{(m)} - \gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} \left(T^{(m)} - T_r^\infty \right) \right] dF = \varepsilon^{K-2} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \beta_r Q_{3,K}^{(m)} dF, \quad x_3 = 1
\end{aligned} \tag{45}$$

Если на торцевых поверхностях заданы значения температуры ($\beta_l = \beta_r = 0$, $\gamma_l = \gamma_r = 0$, $\delta_l \alpha_l^{(m)} = \delta_r \alpha_r^{(m)} \equiv 1$), то граничные условия (7), (8) в интегральном смысле выполняются точно в силу равенства нулю правых частей в (45).

Так как при задании внешнего разложения (11), (12) с учетом равенств (13), (16)–(18) при любом номере аппроксимации $K \geq 0$ тождественно выполняются уравнение теплопроводности (3), граничное условие (6) и условия сопряжения

решения (5) и только равенства (4) (см. (14)) и граничные условия (7), (8) (в интегральном смысле, см. (45)) выполняются приближенно, то согласно введенному выше определению в первом случае граничных условий, заданных на боковой поверхности ($\beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$ в (6)), в силу равенств (14), (45) формулы (11), (12) дают формальное асимптотическое решение полукраевой задачи (3)–(6) с точностью $O(\varepsilon^{K-2})$ и краевой задачи (3)–(8), где граничные условия (7), (8) выполняются в интегральном смысле, – с той же точностью.

Рассмотрим интересный с практической точки зрения случай, когда функции $w^{(m)}$, q_n в (32), (34), (37) суть полиномы порядка $n_w^{(m)}$, n_q по переменной x_3 соответственно, коэффициенты которых являются функциями переменных x_1, x_2 . Обозначим через $n_p = \max(n_w, n_q)$, где $n_w = \max_{1 \leq m \leq M} n_w^{(m)}$. Пусть свойства материалов слоев не зависят от продольной координаты ($\partial_3 \lambda_{ij}^{(m)} = 0$, $1 \leq m \leq M$, $i, j = 1, 2, 3$), тогда из граничной задачи (30), (31) следует $\partial_3 \theta_*^{(m)} = 0$, а из (37) получаем $H_* = \text{const}$. При этом из (37), (38) с учетом (25) при $k = 2$ вытекает, что $\theta_0(x_3)$ – полином порядка не выше $n_p + 2$. Последующий анализ по схеме (32)–(38) с учетом (41), (42) показывает, что функции $T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x})$ суть полиномы по переменной x_3 порядка не выше $n_p + 2 - k$ ($2 \leq k \leq K$), коэффициенты которых зависят от переменных x_1, x_2 , а функции $\theta_k(x_3)$ – также полиномы порядка не выше $n_p + 2 - k$ ($0 \leq k \leq K$). Отсюда и из (23), (37), (38) имеем

$$\begin{aligned} T_k^{(m)}(\mathbf{x}) &= T_{*k}^{(m)}(x_1, x_2) + \theta_*^{(m)}(x_1, x_2) C_{k-1}^* / H_* + x_3 C_k^* / H_* + C_k^{**} \quad (k = n_p + 2) \\ T_k^{(m)}(\mathbf{x}) &= \theta_*^{(m)}(x_1, x_2) C_{k-1}^* / H_* + x_3 C_k^* / H_* + C_k^{**} \quad (k \geq n_p + 3) \end{aligned} \quad (46)$$

Если на одном из торцов стержня задан тепловой поток (например, на правом: $\beta_r = \gamma_r = 1$, $\delta_r = 0$), а на другом – граничное условие общего вида (например, на левом: $\delta_l \neq 0$), то из (40) с учетом (46) получаем: $C_k^* = 0$ при $k \geq n_p + 2$, $C_k^{**} = 0$ при $k \geq n_p + 3$, а значит, в силу (14) следует точное выполнение закона Фурье (4) и интегральных равенств (45) при задании аппроксимации (11), (12) порядка $K \geq n_p + 3$. Аналогичный результат получается и при задании температуры на каждом торце стержня ($\beta_l = \gamma_l = \beta_r = \gamma_r = 0$, $\delta_l \alpha_l^{(m)} = \delta_r \alpha_r^{(m)} = 1$ в (7), (8), (40)). В случае же анизотропии специального вида (15) равенства (14) при указанных граничных условиях на торцах в силу (46) выполняются точно уже при $K \geq n_p + 2$.

Случай второй. На боковой поверхности стержня задано граничное условие (6) общего вида. Предполагается, что функция переключения $\delta(\Gamma, x_3) \geq 0$ при любом фиксированном значении $x_3 \in [0, 1]$ на некоторой части контура Γ поперечного сечения может быть равна нулю (но не равна нулю на всем Γ) и хотя бы в одной

точке контура или на его части $\delta(\Gamma, x_3) > 0$ при $x_3 \in [0, 1]$, причем эта точка или участок (участки) могут быть разными при разных x_3 .

Примем для функции $T_*^{(m)}$ в (9) и компонент вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ в отличие от (11), (12) следующие правила аппроксимации:

$$T_*^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^K T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M, \quad K \geq 0 \quad (47)$$

$$q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^K Q_{i,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (i=1, 2), \quad q_3^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{K-1} Q_{3,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M \quad (48)$$

По-прежнему потребуем выполнения равенств (13) между характеристическими функциями $T_k^{(m)}$ и $Q_{j,k}^{(m)}$, тогда после подстановки разложений (47), (48) в закон теплопроводности (4) с учетом (13) получим, что в общем случае анизотропии все соотношения в законе Фурье выполняются приближенно

$$\begin{aligned} q_i^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K+1} \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)} \quad (i=1, 2) \\ q_3^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^K \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_K^{(m)} - \\ &- \varepsilon^K \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{K-1}^{(m)} - \varepsilon^{K+1} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (49)$$

Если рассматривается анизотропия специального вида (15), то первые два равенства (49) выполняются точно, а третье равенство – асимптотически с точностью порядка $O(\varepsilon^K)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим разложения (47), (48) в равенства (3), (5), (6) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , учитывая свойства $w^{(m)} = O(1)$, $q_n = O(1)$, $T_\infty = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда из (6) получим цепочку равенств

$$\beta(\mathbf{x}) (Q_{1,k}^{(p)} n_1 + Q_{2,k}^{(p)} n_2) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_k^{(p)} = \delta_{0k} (\gamma(\mathbf{x}) q_n - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_\infty), \quad \mathbf{x} \in A \quad (50)$$

а из (3), (5) получим равенства (16), (17), в которых следует δ_{2k} заменить на δ_{0k} ($\delta_{00} = 1$, $\delta_{0k} = 0$ при $k \geq 1$).

Подставим теперь в уравнения (16), (17), (50) выражения (13), тогда из (50) следует

$$\begin{aligned} -\beta(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_k^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 T_{k-1}^{(p)} \right) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_k^{(p)} &= \\ = \delta_{0k} (\gamma(\mathbf{x}) q_n(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_\infty(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (51)$$

а из (16), (17) вытекают равенства (19), (20), в которых нужно учесть (22) и заменить δ_{2k} на δ_{0k} (далее при ссылках на формулу (19) будем учитывать в ней замену $\delta_{2k} \leftrightarrow \delta_{0k}$).

В силу (22) равенства (19), (20), (51) при каждом $k \geq 0$ образуют двумерную (по переменным x_1, x_2 , так как x_3 выступает в качестве параметра) краевую задачу относительно функции $T_k^{(m)}$ при граничных условиях общего вида. Из

предположения о том, что при каждом $x_3 \in [0, 1]$ функция переключения $\delta(\Gamma, x_3) > 0$ хотя бы в одной точке контура Γ , следует единственность решения рассматриваемой граничной задачи, которая достаточно хорошо изучена [6]. Решая последовательно с увеличением $k \geq 0$ граничные задачи (19), (20), (51) с учетом (22), определим все характеристические функции $T_k^{(m)}$ в разложении (47).

Если характеристические функции удовлетворяют граничным задачам (19), (20), (51) в сечении стержня, то с учетом (47), (48), (16), (17), (22) можно убедиться в том, что для K -й аппроксимации функции температуры $T_*^{(m)}$ (47) и компонент вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ (48) уравнение теплопроводности (3), граничные условия (6), условия сопряжения решения (5) выполняются тождественно, а соотношения закона Фурье (4) – приближенно с асимптотической точностью $O(\varepsilon^K)$ (см. (49)). Следовательно, в случае анизотропии общего вида семейство функций (47), (48) обеспечивает точность формального асимптотического решения полукраевой задачи (19), (20), (51) порядка $O(\varepsilon^K)$; в случае же анизотропии специального вида (15) из (19), (20), (51), (22) следует, что в (47) характеристические функции $T_k^{(m)} \equiv 0$ при четных k , поэтому из (49) вытекает точность формального асимптотического решения полукраевой задачи (19), (20), (51) порядка $O(\varepsilon^{K+1})$, где $K \geq 0$ – четное число.

Исследуем важный с практической точки зрения случай, когда функции $w^{(m)}$, q_n , T_∞ в (3), (6) суть полиномы порядка $n_w^{(m)}$, n_q , n_T по переменной x_3 соответственно, коэффициенты которых являются заданными функциями переменных x_1, x_2 . Обозначим через $n_p = \max(n_w, n_q, n_T)$, где $n_w = \max_{1 \leq m \leq M} n_w^{(m)}$. Пусть свойства материалов слоев не зависят от продольной координаты x_3 ($\partial_3 \lambda_{ij}^{(m)} = 0$, $1 \leq m \leq M$, $i, j = 1, 2, 3$), тогда из граничной задачи (19), (20), (51) с учетом (22) следует, что характеристическая функция $T_k^{(m)}(\mathbf{x})$ – полином по переменной x_3 порядка $n_p - k$ ($k \geq 0$), коэффициенты которого зависят от переменных x_1, x_2 . Следовательно, из (49) вытекает точное решение полукраевой задачи (19), (20), (51) при $K \geq n_p + 1$ (здесь $K \geq 0$ – любое натуральное число) в случае анизотропии общего вида и при $K \geq n_p$ (здесь $K \geq 0$ – четное число) в случае анизотропии специального вида (15).

Граничные условия (7), (8) на торцах стержня при использовании разложений (47), (48) могут быть выполнены лишь в исключительных случаях. В общем же случае краевые условия (7), (8) на торцах в континууме точек могут быть выполнены лишь после рассмотрения погранслоев, возникающих вблизи торцов стержня.

Замечание 1. Решения (11), (47), полученные для основного температурного поля в стержне для первого и второго случаев граничных условий на боковой поверхности, качественно обладают теми же свойствами, что и полученные авторами в [4] асимптотические разложения температурного поля в анизотропных пластинах.

Аналогичными свойствами должны были бы обладать и решения для стержней в [3]. Но там для второго случая граничных условий было введено дополнительное предположение, что критерий Био достаточно мал ($H\alpha^{(p)} = A^{(p)}\varepsilon^2$, $A^{(p)} = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) и использовано внешнее разложение решения в виде (47), поэтому, в отличие от полученных выше результатов, характеристические функции $T_k^{(m)}$ в [3] обладают двуконстантным произволом, позволяющим удовлетворить в некотором смысле (например, интегрально) граничным условиям на торцах стержня. В [8] авторы исследовали особенности решения задачи теплопроводности анизотропных пластин методом разделения переменных с последующим анализом асимптотических свойств этого решения. Там показано, что при реализации на лицевых поверхностях пластин теплообмена по закону Ньютона (аналог второго случая граничных условий в настоящем исследовании) внешнее разложение решения по малому параметру ε не обладает интегральными произволами, как и в настоящей работе, но при малом значении критерия Био погранслои могут глубоко проникать в анизотропную пластину (и даже могут пронизывать всю область, занимаемую пластиной в плане). Поэтому важным является построение температурных поправок в погранслоях (определение функций $T_l^{(m)}$, $T_r^{(m)}$ в (9)) стержня, однако этот вопрос выходит за рамки настоящего исследования.

Замечание 2. Если во втором случае граничных условий, заданных на боковой поверхности стержня, вместо внешнего разложения (47), (48) использовать (11), (12), то в конечном итоге получим цепочки разрешающих уравнений (19), (20), (51), где следует δ_{0k} заменить на δ_{2k} . Тогда с учетом (22) из граничных задач (19), (20), (51) будем иметь $T_0^{(m)}(\mathbf{x}) = T_1^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, $T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \neq 0$ при $2 \leq k \leq K$, т.е. вновь получим разложение вида (47).

Полученные в настоящей работе внешние асимптотические разложения и сделанные на их основе оценки точности представления температуры могут быть использованы при расчетах на прочность и податливость стержневых композитных конструкций, так как используемые на практике приближенные теории деформирования стержней (Бернулли, Тимошенко и др.) дают приемлемую точность лишь на некотором удалении от торцов, т.е. за пределами погранслоев или локальных эффектов, распространяющихся в глубину стержня на расстояние порядка его толщины. Разработанный метод может оказаться эффективным и при исследовании основного напряженного состояния в композитных стержнях методом асимптотического расщепления [5], когда такие конструкции подвергаются термосиловому нагружению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. / Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 1. – М.: Высш. школа, 1982. 327 с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. / Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 2. – М.: Высш. школа, 1982. 304 с.
3. Зино Е.И., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 224 с.

4. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Уточнение асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин // Математические методы и физико-механические поля. 2005. Т.48. № 2. С. 157 – 171.
5. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004. 409 с.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
7. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Сравнительный анализ структурных моделей теплопроводности волокнистых сред и сведение трехмерной задачи теплопроводности армированных пластин к двумерной // Конструкции из композитных материалов. 2004. № 3. С.36–51.

Институт теоретической и прикладной механики
СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию
6.09.2007

УДК 539.376

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Туманян Р.С.

Ключевые слова: кольцеобразный стрингер, ползучесть, контактные напряжения, операторы Вольтерра, коэффициенты интенсивностей.

Keywords: ring-shaped stringer, creep, contact stress, Volterra's operator, stress intensity factor.

Ռ. Ս Թումանյան

Բեռի փոխանցումը երկու միատեսակ օղակաձև վերորակներից առաձգական անվերջ սալին սողի հաշվառումով

Սողի տեսության դրվածքով դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր՝ երկու միատեսակ օղակաձև վերորակներից առաձգական անվերջ սալին բեռի փոխանցման մասին: Խնդրի լուծումը բերվում է ըստ ժամանակի Վոլտերի օպերատոր պարունակող սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարման լուծման: Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարումը բերված է Վոլտերի երկրորդ սեռի գծային ինտեգրալ հավասարումների անվերջ համակարգի: Կատարված է այդ համակարգի հետազոտություն ըստ սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր:

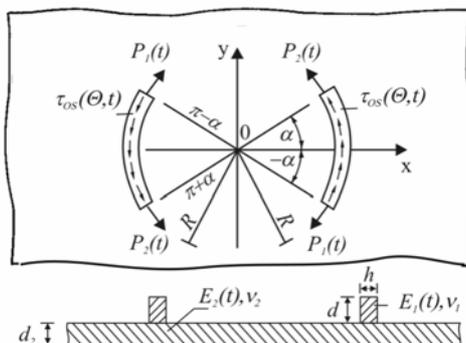
R. S. Tumanyan

A load transfer from the similar ring cover plate to an elastic infinite one taking into account the creep

A contact sum is observed by creep theories order, on transfer from the similar ring cover plate to an elastic infinite one. A sum is reduced to Volter's operator containing singular integral-differential equation's solution by time. By means of chebishev's orthogonal multiple-member system an equation was brohght to Volter's linear integral equation's infinite system on second degree. The investigation of mentioned system was done by principle of pressured reflections. Particular cases were observed.

В постановке теории ползучести рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от двух кольцеобразных стрингеров к упругой бесконечной пластине. Решение задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени. При помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева это уравнение сведено к бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Проведено исследование этих систем по принципу сжимающих отображений. Рассмотрены частные случаи.

1. Пусть бесконечная пластина высотой d_2 , на своей верхней грани усилена двумя одинаковыми кольцеобразными стрингерами с круговыми осями радиусов R , имеющими высоту d , ширину h , угол раствора $2a$ ($0 < a < \pi/2$) и расположенными симметрично относительно вертикальной оси OY (фиг.1).



Фиг. 1

Требуется определить контактные напряжения под стрингерами и коэффициенты их интенсивностей на концах стрингеров в любой момент времени t , если в момент времени $t = \tau_0$ к концам стрингеров в направлении их осей приложены сосредоточенные силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ и одновременно их верхние грани в этом же направлении загружены произвольными тангенциальными силами

интенсивности $\tau_{OS}(\Theta, t)$. При этом считается, что $h, d \ll R$ ($h < d$).

Предполагается, что контактирующие между собой элементы (пластина, стрингер) изготовлены из упруго-ползучих материалов и обладают свойством ползучести, которая характеризуется неоднородностью процесса старения.

Предполагается также, что коэффициент поперечного сжатия при деформациях ползучести $\nu_2(t, \tau)$ равен коэффициенту поперечного сжатия при упруго-мгновенных деформациях $\nu_1(t)$ и постоянен во времени:

$$\nu_1(t) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const}$$

Основные реологические характеристики стрингера: $C_1(t, \tau)$ – мера ползучести, $E_1(t)$ – модуль упруго-мгновенной деформации, τ_1 – постоянный по его длине возраст, а соответствующие характеристики для пластины – $C_2(t, \tau)$, $E_2(t)$, τ_2 .

В указанной постановке выведем определяющие уравнения поставленной задачи. Для этого, как в [1], воздействие кольцеобразных стрингеров заменим неизвестными осевыми тангенциальными $\bar{\tau}_S(\Theta, t)$ и поперечными радиальными $\bar{q}_S(\Theta, t)$ контактными напряжениями.

Приняв во внимание [1], при помощи известных результатов [2] с учетом ползучести вычислим деформацию бесконечной пластины в окружном направлении $\varepsilon_{\Theta}^{(2)}(\Theta, t)$ и осевую деформацию стрингера $\varepsilon_1(\Theta, t)$. На основании условия контакта $\varepsilon_{\Theta}^{(2)}(\Theta, t) = \varepsilon_1(\Theta, t)$ ($-\alpha < \Theta < \alpha$, $t \geq \tau_0$) решение поставленной задачи сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени:

$$(1 - L_2^0) \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\text{ctg} \frac{U - \Theta}{2} + K(U - \Theta) \right] \varphi'(U, t) dU + \nu_0 C(t) - f_2(t) \right\} = \quad (1)$$

$$= \lambda(t)(1 - L_1^0) [\varphi(\Theta, t) + f_1(\Theta, t)] \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha, t) = 0, \quad \varphi(\alpha, t) = g(t) \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$L_i^0 [X(t)] = \int_{\tau_0}^t E_i^*(t) K_i^*(t, \tau) X(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2)$$

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad E_i^*(t) = E_i(t + \rho_i)$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[E_i^{-1}(\tau) + C_i(t, \tau) \right], \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0 \quad (3)$$

$$\lambda(t) = \frac{8\pi d_2 R E_2^*(t)}{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2) h d E_1^*(t)}, \quad \nu_0 = \frac{4(1 - \nu_2)}{3 - \nu_2}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta, t) &= \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau(U, t) dU, \quad C(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau(U, t) dU \\ f_1(\Theta, t) &= p_1(t) - \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU \\ f_2(t) &= v_0 \left\{ \alpha [p_1(t) + p_2(t)] + \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau_0(U, t) dU \right\} \\ K(U - \Theta) &= \operatorname{tg} \frac{U - \Theta}{2} - 2 \sin(U - \Theta) \\ \tau(U, t) &= \bar{\tau}_s(U, t) R / P_0, \quad \tau_0(U, t) = \tau_{0s}(U, t) R / P_0 \\ p_1(t) &= P_1(t) / P_0, \quad p_2(t) = P_2(t) / P_0, \quad P(t) = P_0 g(t) \end{aligned}$$

v_2 – коэффициент Пуассона бесконечной пластины, $\tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t)$ – тангенциальные контактные напряжения под кольцеобразными стрингерами.

При этом, как вытекает из [1], радиальные контактные напряжения будут определяться по формуле:

$$\begin{aligned} q(\Theta, t) &= -p_1(t) - \varphi(\Theta, t) + \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU \\ q(\Theta, t) &= \bar{q}_s(\Theta, t) R / P_0 \end{aligned} \quad (4)$$

и при больших R можно считать $\bar{q}_s(\Theta, t) \approx 0$.

Следует отметить, что интеграл в (1) понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) представим в виде бесконечного ряда [3, 4]:

$$\begin{aligned} \tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t) &= \frac{\sec(\Theta/2)}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \alpha)}} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) T_n \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0) \end{aligned} \quad (5)$$

где $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева первого рода, $X_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени и подлежащие определению.

Отсюда после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta, t) &= \sec \frac{\alpha}{2} \left\{ X_0(t) \left[\pi - \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n(t) \sin \left[n \cdot \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad (-\alpha \leq \Theta \leq \alpha, t \geq \tau_0) \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2), непосредственно находим:

$$X_0(t) = \pi^{-1} \cos(\alpha/2) g(t)$$

Далее, следуя известной процедуре [3,4], для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$Y_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)}(t)Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t B_{m,n}^{(2)}(t,\tau)Y_n(\tau)d\tau = N_m(t) \quad (6)$$

$$(m = 1, 2, \dots; t \geq \tau_0)$$

Отметим, что исходя из (5), для коэффициентов интенсивностей тангенциальных контактных напряжений в концевых точках стрингера получим:

$$A_1(t) = \lim_{\Theta \rightarrow \alpha} \sqrt{\alpha - \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \right] E_2^*(t) \quad (7)$$

$$A_2(t) = \lim_{\Theta \rightarrow -\alpha} \sqrt{\alpha + \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n(t) \right] E_2^*(t)$$

3. Исследования бесконечных систем уравнений (6) проведены согласно принципу сжимающих отображений [6], придерживая при этом методику, изложенную в [5]. Исследования показали, что при выполнении условия $t \in [\tau_0, T]$

$$\sup_m \sup_n \sum_{n=1}^{\infty} \left[|B_{m,n}^{(1)}(t)| + \int_{\tau_0}^t |B_{m,n}^{(2)}(t,\tau)| d\tau \right] < 1$$

бесконечная система (6) имеет единственное решение, которое можно найти методом редукции или последовательных приближений.

4. Рассмотрим частные случаи, когда ядра ползучести имеют вид [7-9]:

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_i(\tau)} + \varphi_i(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \right\}$$

$$\varphi_i(\tau) = C_i + \frac{A_i}{\tau} \quad (i = 1, 2)$$

и для вязкоупругих характеристик пластины и стрингера приняты:

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu$$

$$C_1 = C_2 = C, \quad \tau_1 = \tau_0, \quad \rho_1 = 0$$

$$A_1 = A_2 = A, \quad \rho_2 = \tau_2 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1$$

Предполагая $\tau_{0S}(\Theta, t) \equiv 0$, рассмотрим два случая нагружения стрингеров.

В первом случае (симметричное нагружение) в момент времени $t = \tau_0$ к стрингерам прилагаются сосредоточенные силы постоянной величины $P_1(t) = P_1 = \text{const}$, $P_2(t) = P_2 = \text{const}$, причем $P_1 = P_2$. Тогда $p_1(t) = p_1 = 1$, $p_2(t) = p_2 = 1$, $g(t) = 1$, $P(t) = P_0 = P_1$, $\tau(-\Theta, t) = -\tau(\Theta, t)$, $q(\alpha, t) = -1$ и вместо (5) будем иметь:

$$\tau(\Theta, t) = \frac{E \sec(\Theta/2)}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n-1}(t) \cos \left[(2n-1) \arccos(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}) \right] \quad (8)$$

$$(-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0)$$

а вместо (4):

$$q(\Theta, t) = -1 + E \sec \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} Y_{2n-1}(t) \sin \left[(2n-1) \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (9)$$

$$(-\alpha \leq \Theta \leq \alpha, t \geq \tau_0)$$

Соответствующая (6) бесконечная система примет вид:

$$Y_{2m-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 K_{2m-1, 2n-1}^{(1)} + K_{2m-1, 2n-1}^{(2)}) Y_{2n-1}(t) - E \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 K_{2m-1, 2n-1}^{(1)} + K_{2m-1, 2n-1}^{(2)}) \times$$

$$\times \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) Y_{2n-1}(\tau) d\tau - E \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) Y_{2m-1}(\tau) d\tau = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{E} \left\{ f_{2m-1} - \nu_0 h_{2m-1} \left[C(t) - E \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) C(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (m = 1, 2, \dots; t \geq \tau_0)$$

где

$$f_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{2}{\pi} (\lambda_0 + 2\alpha \nu_0) \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1} \left[1 - E \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) d\tau \right] \quad (m = 1, 2, \dots; t \geq \tau_0)$$

$$h_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{2}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$K^*(t, \tau) = K_1^*(t, \tau) = K_2^*(t, \tau) = -\frac{A}{\tau^2} + \left[A \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{\gamma}{\tau} \right) - C\gamma \right] e^{-\gamma(t+\rho_2-\tau)}$$

$$K_{2m-1, 2n-1}^{(1)} = \frac{2}{(2n-1)\pi^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \sin(2m-1)\varphi \sin(2n-1)\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$K_{2m-1, 2n-1}^{(2)} = -(-1)^{m+n} 8(2m-1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2(m+n-1)} -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi} \right)^{2n-1} \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin(2m-1)\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

$$C(t) = G(t) + \int_{\tau_0}^t L(t, \tau) C(\tau) d\tau$$

$$L(t, \tau) = \frac{\nu_0 [E_2^*(t)]^2 K_2^*(t, \tau) \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(h)}(t)}{1 + E_2^*(t) \nu_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n^{(h)}(t)}, \quad G(t, \tau) = \frac{\left[Y_0(t) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n^{(f)}(t) \right] E_2^*(t)}{1 + E_2^*(t) \nu_0 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(h)}(t)}$$

$$C_n = 2 \sec \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right) \cos n \varphi d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Y_0(t) = \left[\pi E_2^*(t) \right]^{-1} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_0 = \frac{8\pi d_2 R}{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2)hd} = \text{const}$$

$\{Y_m^{(f)}(t)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{Y_m^{(h)}(t)\}_{m=1}^{\infty}$ являются решениями бесконечной системы (6) при правых частях $[E_2^*(t)\{f_m\}]_{m=1}^{\infty}$ и $[E_2^*(t)\{h_m\}]_{m=1}^{\infty}$, соответственно.

Для коэффициентов интенсивностей тангенциальных контактных напряжений будем иметь: $A_2(t) = -A_1(t)$

$$A_1(t) = \frac{E}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n-1}(t)$$

Во втором случае (кососимметричное нагружение) также $P_1(t) = P_1 = \text{const}$, $P_2(t) = P_2 = \text{const}$, причем $P_2 = -P_1$.

В этом случае

$$p_1(t) = p_1 = -1/2, \quad p_2(t) = p_2 = 1/2, \quad g(t) = 1, \quad P(t) = P_0 = 2P_2,$$

$\tau(-\Theta, t) = \tau(\Theta, t)$, $q(\alpha, t) = -1/2$ и соответствующие (8)–(10) формулы будут:

$$\tau(\Theta, t) = \frac{E \sec(\Theta/2)}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \alpha)}} \left\{ \frac{1}{E\pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}(t) \cos \left[2n \arccos(\text{tg} \frac{\Theta}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}) \right] \right\} \quad (11)$$

$$(-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0)$$

$$q(\Theta, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos(\text{tg} \frac{\Theta}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}) + \frac{E}{2} \sec \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Y_{2n}(t) \sin \left[2n \arccos(\text{tg} \frac{\Theta}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}) \right] \quad (12)$$

$$(-\alpha \leq \Theta \leq \alpha, t \geq \tau_0)$$

$$Y_{2m}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 K_{2m,2n}^{(1)} + K_{2m,2n}^{(2)}) Y_{2n}(t) - E \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 K_{2m,2n}^{(1)} + K_{2m,2n}^{(2)}) \times \\ \times \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) Y_{2n}(\tau) d\tau - E \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) Y_{2m}(\tau) d\tau = \frac{1}{E} f_{2m} \quad (m = 1, 2, \dots; t \geq \tau_0) \quad (13)$$

где

$$f_{2m} = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2\lambda_0}{\pi^3} \sin \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \frac{\varphi \sin \varphi \sin 2m\varphi}{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi + (-1)^m \frac{2}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} (\text{tg} \frac{\alpha}{4})^{2m} \left[4m \cos \frac{\alpha}{2} (2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1) + 1 \right] - \\ & -\frac{2}{\pi^2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \text{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi}} \right) \frac{\text{tg} \varphi \sin 2m\varphi}{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi \end{aligned} \right\} \times \\ \times \left[1 - E \int_{\tau_0}^t K^*(t, \tau) d\tau \right] \quad (m = 1, 2, \dots; t \geq \tau_0)$$

$$K_{2m,2n}^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \text{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \sin 2m\varphi \sin 2n\varphi}{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$K_{2m,2n}^{(2)} = -(-1)^{m+n} 16m \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}\right)^{2(m+n)} -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi - 1}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi} \right)^{2n} \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin 2m\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

Для коэффициентов интенсивностей тангенциальных контактных напряжений будем иметь:

$$A_1(t) = A_2(t) = \frac{E}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{1}{E\pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}(t) \right]$$

Автор благодарит профессора Мхитаряна С. М. за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманян Р.С. Передача нагрузки от двух одинаковых кольцеобразных брусьев к упругой бесконечной пластине // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т. 38. №4. С. 5-15.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К периодической контактной задаче для полубесконечности с упругими накладками // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 172-178.
5. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. № 3. С. 3-17.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 324с.
8. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старееющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №3. С. 153-164.
9. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

Ванадзорский филиал Государственного инженерного университета Армении

Поступила в редакцию
13.11.2006

УДК 531.36

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ K_{Δ}^{ω} -
УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ
Аванян М. В.

Ключевые слова: K_{Δ}^{ω} -устойчивость, эрмитова форма, колебательная система, функция Ляпунова, жорданова нормальная форма матрицы, эрмитова норма матрицы.

Keywords: K_{Δ}^{ω} -stability, Hermitian form, oscillatory system, Lyapunov's function, Jordanian normal form of the matrix, Hermitian normal form of the matrix.

Մ. Վ. Ավանյան

Լյապունովի ֆունկցիան K_{Δ}^{ω} -կայունության խնդրի դրվածքում $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ դիֆերենցիալ
հավասարման համար

Դիտարկվում է մի որոշ տեսքի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, որով նկարագրվում են մեխանիկական համակարգերի պարամետրական տատանումները: Ժամանակի տրված միջակայքում նախապես տրված $\omega(t) > 0$ ֆունկցիայով այդ հավասարման համար կառուցվում է Լյապունովի ֆունկցիա, որի միջոցով հետազոտվում է նրա տրիվյալ լուծման K_{Δ}^{ω} -կայունությունը:

M. V. Avanyan

The Lyapunov's function in the setting of the K_{Δ}^{ω} -stability for the $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ differential equations

There is considered the second order differential equation of definite type, by which are described parametric oscillations of the mechanical systems. By the function $\omega(t) > 0$, that is given in the given interval of time, there is constructed the Lyapunov's function and there is considered the K_{Δ}^{ω} -stability of it's trivial solution.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка одного типа, которыми описываются параметрические колебания механических систем. Для этого уравнения строится функция Ляпунова на данном интервале времени при наперед заданной функции $\omega(t) > 0$, с помощью которой исследуется K_{Δ}^{ω} -устойчивость тривиального решения этой системы.

Приведем определение K_{Δ}^{ω} -устойчивости. В [1] вводится K_{Δ}^{ω} -класс $n \times n$ -матриц $G(t) = (G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на интервале $\Delta = [t_0, \infty)$ следующим условиям: а) $|\det G(t)| \neq 0$, б) эрмитова норма столбцов $G_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) матрицы $G(t)$ совпадает с наперед заданной положительной функцией

$$\omega(t) : \|G_j(t)\| = \sqrt{(G_j(t), G_j(t))} = \omega(t).$$

Затем приводятся следующие определения.

Определение 1. Если в заданном классе K_{Δ}^{ω} существует такая матрица $G(t)$,

что при достаточно малом числе $\rho > 0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x(t_0) = x_0$ которого удовлетворяет условию $(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2$, при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условию $(G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t)) \leq \rho^2$, то невозмущенный процесс K_Δ^ω устойчив на $[t_0, \infty)$. В противном случае процесс неустойчивый.

Определение 2. Невозмущенный процесс называется асимптотически K_Δ^ω -устойчивым при $t \rightarrow +\infty$ (или на $[a, +\infty)$), если: а) K_Δ^ω устойчив на $[a, +\infty)$; б) для любого $t_0 \in [a, +\infty)$ существует такое число $\rho = \rho(t_0)$, что все возмущения $x(t)$ процесса, удовлетворяющие условию $(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2$, обладают свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Легко доказывается, что при $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ из K_Δ^1 -устойчивости на $[t_0, \infty)$ всегда следует K_Δ^ω -устойчивость.

Из определения 1 следует, что начальные и последующие области предельных отклонений для возмущений $x(t)$ определяются с помощью положительно определенной эрмитовой формы [2]:

$$V(t, x) = x^* B(t) x$$

$$\left(B(t) = G^{-1*}(t) G^{-1}(t), G(t) \in K_\Delta^\omega, \sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}(t)} = \omega(t) t \in [t_0, \infty) \right) \quad (1)$$

Пусть возмущенный процесс описывается следующим дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \varphi(t)x = 0, \quad \varphi(t) \in C^1 \{t \in [t_0, \infty)\} \quad (2)$$

Известно, что существуют такие колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению ее параметров со временем и тогда уравнение движений таких систем представляется в виде (2).

Примем $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, тогда уравнение (2) будет эквивалентно следующей неавтономной системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\varphi(t)x_1 \quad (3)$$

Система (3) в матричной форме имеет вид:

$$\dot{x} = P(t)x, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Возможны следующие случаи:

1. $\varphi(t) \equiv 1$ на $[t_0, \infty)$, тогда уравнение (2) имеет вид $\ddot{x} + x = 0$, общим решением которого является

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t = a \cos(t + \alpha) \quad \left(a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -c_2 / c_1 \right) \quad (5)$$

Из (5) следует, что тривиальное решение уравнения (2) K_Δ^ω устойчиво на

$[t_0, \infty)$ (неасимптотически) [3].

Построим функцию Ляпунова. Она определяется по формуле [4]

$$V(x_1, x_2) = \frac{\omega^2}{\alpha^2} (B_1 x, x), \quad B_1 = S^{-1} * S^{-1} \quad (B_1^{-1} = SS^*)$$

где матрица S удовлетворяет условию $S^{-1}PS = J(P)$, ($J(P)$ – жорданова нормальная форма матрицы P) и имеем:

$$S = \begin{pmatrix} 1+2i & -1-3i \\ -2+i & -3+i \end{pmatrix} \quad S^{-1} = (-0.05 + 0.05i) \begin{pmatrix} -3+i & 1+3i \\ 2-i & 1+2i \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}PS = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = J(P) \quad B_1 = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & i \\ -i & 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} Sp B_1^{-1}} = \sqrt{15}$$

Следовательно,

$$V(x_1, x_2) = \frac{\omega^2}{200} (x_1^2 + x_2^2) \quad B = \frac{\omega^2}{\alpha^2} B_1 \quad \sqrt{\frac{1}{2} Sp B^{-1}} = \omega \quad (6)$$

Она положительно определенная, а ее производная по t , в силу системы (3), удовлетворяет условию $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$. Значит, функция (6) удовлетворяет условиям теоремы о K_{Δ}^{ω} -устойчивости [2], т. е. является функцией Ляпунова для системы (3) при $\varphi(t) \equiv 1$.

2. Пусть $\varphi(t) \leq 1$ на $[t_0, \infty)$. Предположим, что

$$\varphi(t) = 1 - [1 - \varphi(t_0)] \exp[-(t - t_0)] \quad (7)$$

и наперед заданная положительная функция $\omega(t)$ определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \omega(t_0) \exp[\varphi(t) - \varphi(t_0)] \quad (8)$$

Возьмем следующую диагональную матрицу:

$$K(t) = \text{diag} \{ \exp[\varphi(t) - 1], \exp[\varphi(t) - 1] \}$$

столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму: $\alpha(t) = \exp[\varphi(t) - 1]$. Тогда положительно определенной матрице

$$B(t) = K^{-1*}(t) K^{-1}(t) = \text{diag} \{ \exp[-2(\varphi(t) - 1)], \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \}$$

соответствует положительно определенная эрмитова форма:

$$V(t, x) = (B(t)x, x) = \|x\|^2 \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \quad (9)$$

где $\sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}(t)} = \exp[\varphi(t) - 1] = \alpha(t)$ и на $[t_0, \infty)$ выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} = \exp[\varphi(t) - \varphi(t_0)] = \frac{\exp[\varphi(t) - 1]}{\exp[\varphi(t_0) - 1]} = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} \quad (10)$$

Производная по t функции $\|x\|^2$ в силу системы (3) будет

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = 2x_1 x_2 (1 - \varphi(t)) \quad (11)$$

Так как для $\forall x_i$ имеет место неравенство $x_i \leq \|x\|$, то из (11) получаем следующее неравенство:

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} \leq 2(1 - \varphi(t))\|x\|^2 \text{ на } [t_0, \infty) \quad (12)$$

Полная производная по t функции $V(t, x)$ в силу системы (3) с учетом (12) будет удовлетворять на $[t_0, \infty)$ неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -2[\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1]\|x\|^2 \exp[-2(\varphi(t) - 1)] \quad (13)$$

Из (7) получаем

$$\dot{\varphi}(t) = -[\varphi(t_0) - 1] \exp[-(t - t_0)] = -[1 + (\varphi(t_0) - 1) \exp[-(t - t_0)]] + 1$$

или $\dot{\varphi}(t) = -[\varphi(t) - 1]$, откуда на $[t_0, \infty)$ имеем следующее равенство:

$$\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1 = 0 \quad (14)$$

В силу (14), из (13) следует

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad (x \in D_x, t \in [t_0, \infty)) \quad (15)$$

Таким образом, при (7) и (8) для положительно определенной эрмитовой формы (9) выполняются условия (10) и (15), т.е. функция (9) удовлетворяет всем условиям теоремы о K_Δ^ω -устойчивости [2], значит имеем функцию Ляпунова.

3. Пусть на $[t_0, \infty)$ $\varphi(t) \geq 1$. Предположим, что

$$\varphi(t) = 1 + [\varphi(t_0) - 1] \exp[-(t - t_0)] \quad (16)$$

и наперед заданная положительная функция $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \omega(t_0) \exp[-(\varphi(t) - \varphi(t_0))] \quad (17)$$

Возьмем диагональную матрицу

$$K(t) = \text{diag} \{ \exp[-(\varphi(t) - 1)], \exp[-(\varphi(t) - 1)] \}$$

столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму $\alpha(t) = \exp[-(\varphi(t) - 1)]$.

Тогда положительно определенной матрице

$$B(t) = K^{-1*}(t) K^{-1*}(t) = \text{diag} \{ \exp[2(\varphi(t) - 1)], \exp[2(\varphi(t) - 1)] \}$$

соответствует положительно определенной эрмитова форма

$$V(t, x) = (B(t)x, x) = \|x\|^2 \exp[2(\varphi(t) - 1)] \quad (18)$$

где $\sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}(t)} = \exp[-(\varphi(t) - 1)] = \alpha(t)$ и на $[t_0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} = \exp[-(\varphi(t) - \varphi(t_0))] = \frac{\exp[-(\varphi(t) - 1)]}{\exp[-(\varphi(t_0) - 1)]} = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} \quad (19)$$

Так как производная по t функция $\|x\|^2$ в силу системы (3) имеет вид

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = -2x_1x_2[\varphi(t) - 1]$$

то в силу условия $\varphi(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ имеет место неравенство :

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} \leq 2[\varphi(t) - 1]\|x\|^2 \quad (t \in [t_0, \infty)) \quad (20)$$

Тогда полная производная функции $V(t, x)$ по t в силу системы (3) с учетом неравенства (20) будет удовлетворять на $[t_0, \infty)$ неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq 2[\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1]\|x\|^2 \exp\{2[\varphi(t) - 1]\} \quad (21)$$

в котором в силу (16) $\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) - 1 = 0$ на $[t_0, \infty)$, следовательно,

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad (t \in [t_0, \infty)) \quad (22)$$

Получили, что положительно определенная эрмитова форма (18) удовлетворяет условиям (19) и (22) (условиям теоремы о K_{Δ}^{ω} -устойчивости [2]), т.е. является функцией Ляпунова для системы (3) и, следовательно, для уравнения (2) при $\varphi(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале. // Итоги науки и техники. Общая механика. 1976. Т. 3. С.43-124.
2. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложение. // Тематический сб. науч. трудов МАИ. 1975. Вып. 339. С. 5-11.
3. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С. 844-849.
4. Ավանյան Վ. Տ., Ավանյան Մ. Վ., Ավանյան Ն. Վ.: Գծային ավտոնոմ համակարգի համար Լյապունովի ֆունկցիայի կառուցումը և նրա որոշ կիրառությունները: // Մաթեմատիկական բարձրագույն դպրոցում: Միջբուհական գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու, Ճարտարագետներ. Երևան. 2003թ. պրակ 5, էջ 69-76:

Государственный инженерный университет
Армении

Поступила в редакцию
4.10.2006

УДК 539.3

УЧЕТ МЕЖЭЛЕМЕНТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ
ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ

Геворкян Г. А., Севян С. Л.

Ключевые слова: конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, плоская задача теории упругости.

Keywords: finite elements, junction transferences, quadratic programming, problems of plane elasticity.

Գ. Ա. Գևորգյան, Ս. Լ. Սևյան

Միջտարրային տեղափոխությունների անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի
մեթոդով առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման ժամանակ

Առաջարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման միջտարրային տեղափոխությունների անընդհատություն հաշվառումով ուղղանկյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ:

G. A. Gevorgyan, S. L. Sevyan

Taking into account interelemental uninterruptedness of displacements in solving the problems of plane elasticity by finite-element method

A modification of rectangular finite-element method for solving problems of plane elasticity is proposed when interelemental continuousness of displacements is taking into account.

Предлагается модификация метода прямоугольных конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости с учетом межэлементной непрерывности перемещений.

При использовании метода конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости вид аппроксимирующих полиномов функции перемещений не является единственным [1]. При этом, в зависимости от выбора вида этих полиномов возникают разного рода неувязки. Так, если перемещения изменяются линейно вдоль сторон элемента, то выбранное поле перемещений внутри элемента и при переходе через границы элементов непрерывно, но условия равновесия элемента не выполняются. Если же перемещения изменяются по квадратичному закону вдоль сторон элемента, то поле перемещений не удовлетворяют требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений, но выполняются условия равновесия элемента.

Здесь предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при которой решения плоской задачи теории упругости с учетом межэлементной непрерывности перемещений сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дает возможность включить в ограничения квадратичного программирования условия непрерывности перемещений по всей линии контакта между смежными элементами и, тем самым, устранить неувязку.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Прямоугольный элемент имеет узлы лишь в четырех точках (фиг. 1).

Обозначим через $R_s = (R_{1,x}^s, R_{1,y}^s, R_{2,x}^s, R_{2,y}^s, \dots, R_{4,x}^s, R_{4,y}^s)^T$ – вектор узловых усилий, $q_s = (u_1^s, v_1^s, u_2^s, v_2^s, \dots, u_4^s, v_4^s)^T$ – вектор узловых перемещений,

$$\begin{aligned}
K_{ii}^{(0)} &= -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, \dots, 2n\}; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, \dots, 2n\} \\
K_{ij}^{(r)} &= -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}, i \in \{r, \dots, 2n\}, j \in \{r+1, \dots, 2n\} \\
d_{ii} &= K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что r является вектором дополнительных переменных и исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомого вектора q получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \{0, 5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0, \text{ условие совместности перемещений, краевые условия} \} \quad (3)$$

Здесь $D = \frac{Eh}{4ab(1-\nu^2)} \|d_{ij}\|$ – диагональная матрица порядка $2n$, $C = -R$ –

вектор-столбец порядка $2n$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_{2n})$ – матрица коэффициентов обозначений (2), $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{2n-1,j})^T, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$.

Вдоль сторон s -го элемента перемещения (1) изменяются по квадратичному закону. Так как для определения компонентов перемещения на каждой стороне имеется лишь два угловых смещения, то поле перемещений не удовлетворяет требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений.

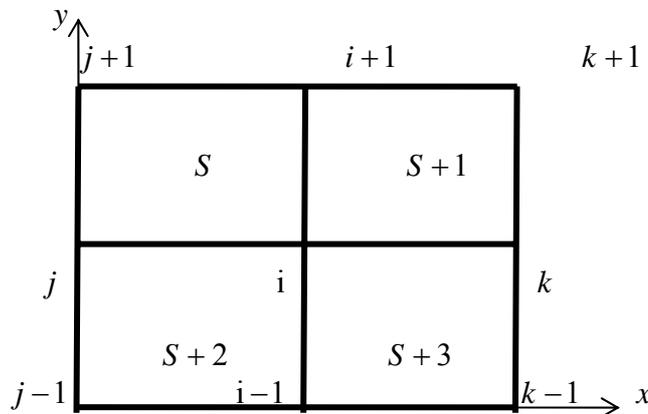
Для обеспечения непрерывности на границах разделов элементов, сходящихся в i -ом узле (фиг.2), введем дополнительные точки и напишем условия непрерывности перемещений в смежном сечении вдоль границы разделов соответствующих конечных элементов в этих точках, имеем

$$u^s(a, \frac{b}{2}) = u^{s+1}(0, \frac{b}{2}); \quad v^s(\frac{a}{2}, b) = v^{s+1}(\frac{a}{2}, 0) \quad (4)$$

$$u^s(\frac{a}{2}, b) = u^{s+2}(\frac{a}{2}, 0); \quad v^s(\frac{a}{2}, b) = v^{s+2}(\frac{a}{2}, 0) \quad (5)$$

$$u^{s+2}(a, \frac{b}{2}) = u^{s+3}(0, \frac{b}{2}); \quad v^{s+2}(\frac{a}{2}, b) = v^{s+3}(\frac{a}{2}, 0) \quad (6)$$

$$u^{s+1}(\frac{a}{2}, b) = u^{s+3}(\frac{a}{2}, 0); \quad v^{s+1}(\frac{a}{2}, b) = v^{s+3}(\frac{a}{2}, 0) \quad (7)$$



Фиг. 2. i -й узел

С учетом формул (1) условия (4)–(7) перепишем в виде:

$$v^{j-1} - 2v^{i-1} + v^{k-1} = v^j - 2v^i + v^k \quad (8)$$

$$v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1} = v^{j-1} - 2v^j + v^{j+1} \quad (9)$$

$$u^{j-1} - 2u^{i-1} + u^{k-1} = u^j - 2u^i + u^k \quad (10)$$

$$u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} = u^{j-1} - 2u^j + u^{j+1} \quad (11)$$

$$v^j - 2v^i + v^k = v^{j+1} - 2v^{i+1} + v^{k+1} \quad (12)$$

$$v^{i-1} - 2v^i + v^{i+1} = v^{k-1} - 2v^k + v^{k+1} \quad (13)$$

$$u^j - 2u^i + u^k = u^{j+1} - 2u^{i+1} + u^{k+1} \quad (14)$$

$$u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1} = u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1} \quad (15)$$

Исключая из (8) и (9), (10) и (11), соответственно, v^i и u^i , находим

$$-v^{i-1} + v^{k-1} + v^j - v^k + v^{i+1} - v^{j+1} = 0 \quad (16)$$

$$-u^{i-1} + u^{k-1} + u^j - u^k + u^{i+1} - u^{j+1} = 0 \quad (17)$$

Отметим, что при исключении из условий (12) и (13), (14) и (15) v^i и u^i , также получаются связи (16) и (17).

Аналогично, исключая v^i и u^i из (8) и (13), (9) и (11), (10) и (15), (11) и (14), имеем:

$$-v^{i-1} + v^{j-1} + v^j - v^k + v^{i+1} - v^{k+1} = 0 \quad (18)$$

$$-u^{i-1} + u^{j-1} + u^j - u^k + u^{i+1} - u^{k+1} = 0 \quad (19)$$

Таким образом, для обеспечения непрерывности на всех границах разделов элементов, сходящихся в i -м узле, взамен условий (8)–(15) достаточно выполнения равенств (16) и (17) или (18) и (19).

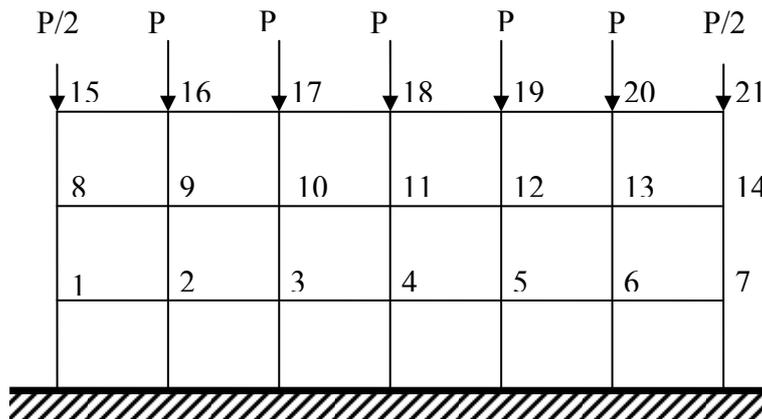
Перепишем все необходимые условия непрерывности перемещений заданными соотношениями (16) и (17), (18) и (19) или (8)–(15) в виде системы уравнений

$$Hq = 0 \quad (20)$$

где H – матрица порядка $n \times 2(\hat{n} + 1)$, \hat{n} – количество внутренних узлов.

С учетом равенств (22) задача (3) примет вид

$$\min \{0, 5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0, Hq = 0, \text{краевые условия}\} \quad (21)$$



Фиг. 3. Балка-стенка. Сетка 6 x 3.

Пример. Рассмотрим задачу об определении деформированного состояния балки-стенки (фиг.3), защемленной по своей нижней грани, и к верхней грани которой приложены нагрузки в виде сочетания сосредоточенных нагрузок. Балка-стенка имеет размеры 6х3м (фиг.3), толщину $h = 15$ см, изготовлена из материала с модулем упругости 3000000 тс/м² и коэффициентом Пуассона 0,2. Заданы нагрузки $P = 1$ тс. Для выявления эффекта учета непрерывности перемещений произведены расчеты без учета непрерывности перемещений для сеток 6 х 3 и 12 х 6 и с учетом непрерывности перемещений для сетки 6 х 3. Результаты расчетов приведены в таблице. Отметим, что при проведения расчетов с учетом непрерывности перемещений использованы: для узлов 2,3,9,10 – формулы (18) и (19), для узлов 5, 6, 12, 13 – формулы (18) и (19), а для узлов 4, 11, 18 – формулы (12) и (14).

Таблица значений перемещений

Узел	без учета непрерывности перемещений, сетка 6 х 3		без учета непрерывности перемещений, сетка 12х6		с учетом непрерывности перемещений, сетка 6 х 3	
	U (мм)	V (мм)	U (мм)	V (мм)	U (мм)	V (мм)
1	-0.017439	-0.049862	-0.017255	-0.049703	-0.013506	-0.049094
2	-0.008551	-0.042692	-0.009181	-0.043365	-0.007553	-0.043032
3	-0.003768	-0.04157	-0.004010	-0.041728	-0.004258	-0.041546
4	0	-0.041101	0	-0.041310	0	-0.041288
5	0.003768	-0.04157	0.004010	-0.041728	0.004258	-0.041546
6	0.008551	-0.042692	0.009181	-0.043365	0.007553	-0.043032
7	0.017439	-0.049862	0.017255	-0.049703	0.013506	-0.049094
8	-0.024002	-0.093511	-0.024031	-0.093194	-0.023763	-0.094508
9	-0.015492	-0.088246	-0.015318	-0.088311	-0.014515	-0.086959
10	-0.007176	-0.084865	-0.007295	-0.085355	-0.006987	-0.085217
11	0	-0.084042	0	-0.084489	0	-0.084703
12	0.007176	-0.084865	0.007295	-0.085355	0.006987	-0.085217
13	0.015492	-0.088246	0.015318	-0.088311	0.014515	-0.086959
14	0.024002	-0.093511	0.024031	-0.093194	0.023763	-0.094508
15	-0.028975	-0.137603	-0.028488	-0.137335	-0.032655	-0.13902
16	-0.019665	-0.132912	-0.019329	-0.132914	-0.019174	-0.131338
17	-0.009966	-0.129407	-0.009634	-0.129766	-0.008952	-0.12934
18	0	-0.128131	0	-0.128753	0	-0.129121
19	0.009966	-0.129407	0.009634	-0.129766	0.008952	-0.12934
20	0.019665	-0.132912	0.019329	-0.132914	0.019174	-0.131338
21	0.028975	-0.137603	0.028488	-0.137335	0.032655	-0.13902

Исходя из этой таблицы, легко заметить, что значения перемещений балки-стенки без учета непрерывности перемещений для сетки 12х6 даже менее точны, чем с учетом непрерывности перемещений для сетки 6 х 3, т.е. значения последней наиболее близки к точному решению. При этом, первая задача сводится к решению системы линейных уравнений с 84 неизвестными, а вторая задача сводится к решению задачи квадратичного программирования с 42 неизвестными и 63 ограничениями (41 из ограничений – неравенство).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галлагер Р. Г. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
2. Turner M. J., Gough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. //J. Aero. Sci., Sept. 1956. 23. № №23, 9. P. 805-824.

Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
4.04.2007

С О Д Е Р Ж А Н И Е
60 тома 2007 г. «Изв. НАН Армении. Механика»

1. **Аванян М.В.** – Функция Ляпунова в постановке задачи K_{Δ}° -устойчивости для $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ дифференциальных уравнений4– 93
2. **Аветисян В.В., Мартиросян С.Р.** – Оптимальный управляемый поиск электромеханическим манипулятором при минимальных световых энергозатратах..... 2–100
3. **Аветисян В.В.** – Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта1–3
4. **Агаларян О.Б.** – К плоской задаче составного клина с радиальной трещиной конечной длины 3–7
5. **Агаловян Л.А., Погосян А.М.** – Вынужденные колебания трехслойной ортотропной пластинки при неполном контакте между слоями..... 3–46
- **Агаян К.Л.** – см. №29
6. **Азарян Н.А., Геворкян Г.А.** – Учет условия непрерывности при решении задач изгиба пластин методом конечных элементов..... 2–21
7. **Азатян Г.Л.** – Вынужденные колебания ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления2–29
8. **Акопян С.А., Мовсисян Л.А.** – К распространению вязкоупругих волн в цилиндрической оболочке и родственные задачи 3–57
9. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Гнуни В.Ц., Казарян К.Б.** – Об одном способе уменьшения максимального напряжения троса космического лифта.....1–10
- **Арустамян А.М.** – см. №26
10. **Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.** – Зависимость критерия усталостной прочности от частоты (на англ. яз.)1–15
- **Арутюнян Р.А.** – см. №10
11. **Арутюнян Р.А., Морозов Н.Ф.** – Механика длительной термической деградации керамических материалов.....1–19
- **Атоян Л.А.** – см. №35
12. **Баблоян А.А., Багдасарян А.В.** – Симметричная задача для полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и трещиной 3–15
13. **Баблоян А.А., Багдасарян А.В.** – Симметричная задача для полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и внутренней трещиной 4–20
- **Багдасарян А.В.** – см. №№ 12, 13
14. **Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц.** – Устойчивость цилиндрической оболочки частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении....1–25
15. **Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В.** – Решение нестационарной смешанной граничной задачи теории упругости для полупространства.....4–23
16. **Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.** – Возбужденные посредством системы поверхностных электродов гармонические колебания пьезокерамического полупространства с туннельным отверстием.....3–77

17. **Белубекян В.М.** – Локализованная неустойчивость равномерно сжатой пластинки.....1–33
18. **Белубекян М.В., Мартиросян К.Л.** – К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях.....2–41
 - **Белубекян М.В.** – см. №9
19. **Белубекян Э.В., Погосян А.Г.** – Оптимальное проектирование прямоугольной ребристой пластинки из композиционного материала по критерию устойчивости1–38
20. **Берберян А.Х.** – Отражение и преломление электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и упругой диэлектрической изотропной среды1–44
 - **Берберян А.Х.** – см. №35
 - **Варданыан А.В.** – см. №15
 - **Варданыан С.В.** – см. №15
21. **Габриелян Миша Саркисович** – К 70-летию со дня рождения.....3–3
22. **Геворкян Г.А., Севян С.Л.** – Учет межэлементной непрерывности перемещений при решении плоских задач теории упругости методом конечных элементов 4–98
 - **Геворкян Г.А.** – см. №6
23. **Геворкян Г.З., Киракосян Р.М.** – К геометрически нелинейной уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины.....4–43
24. **Геворкян Г.З., Киракосян Р.М.** – Об одной неклассической задаче ортотропной пластины-полосы линейно-переменной толщины.....1–50
25. **Геворкян Р.С.** – Об асимптотическом решении задачи термоупругости для изотропных пластин..... 4–53
26. **Геворкян С.Х., Арустамян А.М.** – К задаче динамической устойчивости ортотропной пологой оболочки.....1–57
 - **Гнуни В.Ц.** – см. №№ 9, 14
27. **Григорян С.С.** – О природе наблюдаемых во Вселенной «черных дыр» и динамике Вселенной.....4–3
28. **Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.** – Приближенные решения нелинейного обобщенного уравнения пульсаций пузырька.....3–101
29. **Григорян Э.Х., Агаян К.Л.** – Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство.....3–23
 - **Григорян** – см. №34
30. **Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н.** – Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат..3–114
31. **Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д.** – Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны с тремя шарнирно закрепленными краями2–47
32. **Варданыан С.А., Саркисян С.О.** – Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин3–64
33. **Василян Н.Г.** – Задача изгиба пластин с равномерно-нормальной нагрузкой, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны..... 4–37

34. **Восканян А.Р., Григорян Э.Х.** – Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с кусочно-однородным бесконечным упругим включением2–3
35. **Даноян З.Н., Атоян Л.А., Берберян А.Х.** – Щелевые волны в пьезоэлектрических слоистых средах.....1–63
36. **Егназарян Т.А., Макарян В.С.** – Граничная задача для упругой полуплоскости при наличии трещины, находящейся под сжимающей нагрузкой1–70
- **Захарянц** – см. №53
 - **Казарян К.Б.** – см. №9
37. **Киракосян Р.М.** – К 70-летию со дня рождения..... 3–5
- **Киракосян Р.М.** – см. №№ 23, 24
 - **Макарян В.С.** – см. №36
38. **Максимова Л.А.** – Предельное статически определимое состояние осесимметричной задачи1–77
- **Мартirosян К.Л.** – см. №18
 - **Мартirosян С.Р.** – см. №2
39. **Мартirosян Э.В.** – Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны в экранированном магнитном поле.....2–92
- **Мачкалян Р.Н.** – см. №30
40. **Минасян А.Ф., Тоноян В.С.** – Контактная задача для упругой неоднородной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом 3–38
- **Мирзоян Е.С.** – см. №47
 - **Мирзоян С.Е.** – см. №47
41. **Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.** – Возвращение к задаче устойчивости стержня из разномодульного материала4–64
- **Мовсисян Л.А.** – см. №8
 - **Морозов Н.Ф.** – см. №11
42. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** – Асимптотический анализ стационарной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных композитных стержней при анизотропии общего вида..... 4–71
43. **Немировский Ю.В.** – Гибридное и оптимальное проектирование композитных пластин 1–82
44. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** – Рациональное профилирование вязкопластических оболочек при действии нагрузок взрывного типа 1–89
- **Нерсисян** – см. №41
 - **Оганян Г.Г.** – см. №28
45. **Петросян Т.Л., Симонян А.М.** – Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести 2–114
- **Погосян А.Г.** – см. №19
 - **Погосян А.М.** – см. №5
46. **Погосян А.М.** – О характере вынужденных колебаний двухслойной пластинки во второй краевой задаче 2–69
- **Саакян Р.Д.** – см. №31
47. **Саркисян В.С., Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е.** – Напряженное состояние массивных упруго-ползучих тел, армированных тонкими абсолютно жесткими включениями..... 2–59

48. Саркисян С.В. – Уточнение условий на лицевых поверхностях пластинки переменной толщины 1–95
- Саркисян С.О. – см. №32
 - Севян С.Л. – см. №22
 - Симонян А.М. – см. №45
 - Тоноян В.С. – см. № 40
49. Туманян Р.С. – Передача нагрузки от двух одинаковых кольцеобразных стрингеров к бесконечной пластине с учетом ползучести 4–86
50. Туманян Г.А., Петросян А.С. – Способ изготовления беспористых длинномерных заготовок горячей экструзией3–127
- Фильштинский М.Л. – см. № 16
51. Хачатрян В.М. – Поверхностные электроупругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой (класса 6 мт)–полупространство (43 мт) . 3–87
52. Члингярян А.С. – Управление с поведением в игровой задаче сближения с m целевыми множествами для систем с постоянной динамикой3–121
53. Шемян А.Л., Шемян Л.А. – Контактное взаимодействие кольцевого в плане штампа и упругого слоя в режиме граничного трения3–93
54. Шемян Г.Г., Захарянц В.В. – Потеря статической устойчивости ротора электрической машины в магнитном поле статора 2–110
- Шемян Л.А. – см. № 53
55. Элоян А.В. – Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба балки.1–99
56. Эшматов Б.Х. – Динамическая устойчивость вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей 2–80
- Янковский А.П. – см. №№ 42, 44

Բովանդակություն	Содержание
<p>Ս.Ս. Գրիգորյան Տիեզերքում դիտվող «սև խոռոչների» բնույթի և Տիեզերքի դինամիկայի մասին Ա.Հ. Բարբոյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան. Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ներքին ճաքով թուլացված կիսահարթության համար</p>	<p>3 Григорян С.С. О ПРИРОДЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ВО ВСЕЛЕННОЙ «ЧЁРНЫХ ДЫР» И ДИНАМИКЕ ВСЕЛЕННОЙ</p>
<p>Ա.Գ. Բազդոն, Ա.Վ. Վարդանյան, Ս.Վ. Վարդանյան Առաձգական կիսատարածության համար ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդրի լուծումը</p>	<p>20 Баблоян А.А., Багдасарян А.В. СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ</p> <p>23 Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА</p>
<p>Ն.Գ. Վասիլյան Հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երկու եզրը հողակապորեն ամրացված մյուս երկուսը ազատ, սալի ծոման խնդիրը</p>	<p>37 Василян Н.Г. ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН С РАВНОМЕРНО-НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ, КОГДА ДВА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КРАЯ ПЛАСТИНКИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕНЫ, А ДВА ДРУГИХ СВОБОДНЫ</p>
<p>Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի երկրաչափորեն ոչ զծային ճշգրտված տեսության մասին</p>	<p>43 Геворкян Г. З., Киракосян Р.М. К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ</p>
<p>Ռ.Ս. Գևորգյան Իզոտրոպ սալի ջերմատարածականության խնդրի լուծման մասին</p>	<p>53 Геворкян Р.С. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН</p>
<p>Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան Վերադարձ տարամոդալ կյուբից ձողի կայունության խնդրին</p>	<p>64 Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. ВОЗВРАЩЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА</p>
<p>Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա. Պ. Եանկովսկի Կոնստրուկտիվ և ֆիզիկական անհամասեռ կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության ստացիոնար խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում</p>	<p>71 Немировский Ю.В., Янковский А.П. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНСТРУКТИВНО И ФИЗИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА</p>
<p>Ռ. Ս Թումանյան Բեռի փոխանցումը երկու միատեսակ օղակաձև վերորակներից առաձգական անվերջ սալին սողքի հաշվառումով</p>	<p>86 Туманян Р.С. ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ</p>
<p>Մ.Վ. Ավանյան Լյապունովի ֆունկցիան K_{Δ}^{ω} օկայունության խնդրի դրվածքում $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ դիֆերենցիալ հավասարման համար</p>	<p>93 Аванян М. В. ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ K_{Δ}^{ω} - УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ</p>

		УРАВНЕНИЙ
		Содержание
	3	Григорян С.С.
Ս.Ս. Գրիգորյան		О ПРИРОДЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ВО ВСЕЛЕННОЙ
Տիեզերքում դիտվող «սև խոռոչների» բնույթի և		«ЧЁРНЫХ ДЫР» И ДИНАМИКЕ ВСЕЛЕННОЙ
Տիեզերքի դինամիկայի մասին	20	Баблюян А.А., Багдасарян А.В.
Ա.Հ. Բարբոյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան.		СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ներքին ճաքով		ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ
բովանգված կիսահարթության համար		ОТВЕРСТИЕМ И ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ
	23	Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В.
Ա.Գ. Բագդոև, Ա.Վ. Վարդանյան, Ս.Վ. Վարդանյան		РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
Առաձգական կիսատարածության համար ոչ		СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ
ստացիոնար խառը եզրային խնդրի լուծումը		ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ
	37	ПОЛУПРОСТРАНСТВА
Ն.Գ. Վասիլյան		Василян Н.Г.
Հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ,		ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН С РАВНОМЕРНО-
երկու եզրը հողակապտրեն ամրացված մյուս երկուսը		НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ, КОГДА ДВА
ազատ, սալի ծածկն խնդիրը		ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КРАЯ ПЛАСТИНКИ
	43	ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫ, А ДВА ДРУГИХ
Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան		СВОБОДНЫ
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի		Геворкян Г. З., Киракосян Р.М.
երկրաչափորեն ոչ զծային ճշգրտված տեսության		К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ
մասին		УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ
Ռ.Ս. Գևորգյան		ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ
Իզոտրոպ սալի ջերմաստձագակնության խնդրի	53	Геворкян Р.С.
լուծման մասին		ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
	64	ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ
Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան		ПЛАСТИН
Վերադարձ տարածողայ նյութից ձողի կայունության		Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.
խնդիրն		ВОЗВРАЩЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ
	71	СТЕРЖНЯ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО
Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա. Պ. Յանկովսկի		МАТЕРИАЛА
Կոնստրուկտիվ և ֆիզիկական անհամասեռ		Немировский Ю.В., Янковский А.П.
կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության		АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ստացիոնար խնդրի ախտաբանական անալիզը		СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ
ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում		ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНСТРУКТИВНО И
	86	ФИЗИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ
Ռ. Ս Թումանյան		КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ
Բեռի փոխանցումը երկու միատեսակ օղակաձև		АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА
վերորակներից առաձգական		Туманян Р.С.
անվերջ սալին սողքի հաշվառումով		ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ
Մ. Վ. Ավանյան		ОДИНАКОВЫХ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ
Լյապունովի ֆունկցիան K_{Δ}^{ω} -կայունության խնդրի	93	СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С
դրվածքում $\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ դիֆերենցիալ		УЧЕТОМ ПОЛЗУЩЕСТИ
հավասարման համար		Аванян М. В.
		ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА В ПОСТАНОВКЕ
		задачи K_{Δ}^{ω} - устойчивости для
		$\ddot{x} + \varphi(t)x = 0$ дифференциальных
		УРАВНЕНИЙ

<p>ՄԵԽԱՆԻԿԱ</p> <p>■ МЕХАНИКА</p> <p>MECHANICS</p>	<p>■ Ինդեքս 77708 Индекс</p> <p>Հատոր</p> <p>Том 60N°4 2007</p> <p>Volume</p>
--	---

(Շարունակություն)
Գ. Ա. Գևորգյան, Ս. Լ. Սևյան
Միջտարրային տեղափոխությունների
անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի
մեթոդով առաձգականության տեսության հարթ
խնդիրների լուծման ժամանակ
“ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա”
2007թ. 60 հատորի
ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

(Продолжение)
98 Геворкян Г. А., Севян С. Л.
УЧЕТ МЕЖЭЛЕМЕНТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ
103 КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
С О Д Е Р Ж А Н И Е
60 2-го 2007 г. “Изв. НАН Армен, , ,
Механ, ка”