ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

ГАБРИЕЛЯН МИША САРКИСОВИЧ
(к 70-летию со дня рождения)

В этом году исполнилось 70 лет профессору, доктору физико-математических наук, члену Национального комитета Армении по теоретической и прикладной механике Мише Саркисовичу Габриеляну.

М.С.Габриелян родился 12 июня 1937 года в Ереване, в семье рабочего. В 1959 году после окончания физико-математического факультета Ереванского государственного университета был назначен ассистентом кафедры теоретической механики. Затем он поступил в аспирантуру Института математики Екатеринбурга (Свердловск) под руководством академика Н.Н.Красовского. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы стабилизации и оптимального управления механическими системами».

После окончания аспирантуры он поступил на работу в Институт механики АН Арм.ССР, затем был приглашен старшим преподавателем на кафедру теоретической механики физико-математического факультета ЕГУ.

В 1987г. М.С.Габриелян успешно защитил докторскую диссертацию по теме «Дифференциальные игры с m целевыми множествами», получив ученую степень доктора физико-математических наук. В 1988 году ему было присвоено научное звание профессора.

Профессор М.С.Габриелян занимался в ЕГУ и административной деятельностью. В 1965-1974гг. был заместителем декана механико-математического факультета, в 1982-1993 гг. – заведующим кафедрой теоретической механики.

Широк круг научных интересов профессора М.С.Габриеляна. Его ранние научные исследования посвящены вопросам оптимальной стабилизации и управления механическими системами. Затем были исследования по теории дифференциальных игр. В случае многоцелевых множеств профессор М.С.Габриелян решил задачи приближения всех целевых множеств и отклонения одного, приближения одного и отклонения многих, когда порядок приближения является фиксированным. Им доказано альтернативное утверждение для четырех разных дифференциальных игр в случае многоцелевых множеств. Удалось построить стабильные множества для таких игровых задач, показать существование оптимальных траекторий в классе чисто позиционных и кусочно-позиционных стратегий. Используя конечную память, он сформулировал условие «мини-макса» и построил стратегии игроков и стабильных множеств на базе соответствующих программ.

Профессор М.С.Габриелян решил задачи приближения и отклонения при отсутствии условия седловой точки при нефиксированном порядке приближения целевых множеств в малой игре. Построив специальным образом семейство стабильных множеств, профессор М.С.Габриелян смог доказать теоремы относительно ε-равновесия в классе различных стратегий как в случае неизменной, так и поэтапно изменяющейся динамики.

В 1980-ые годы научные интересы профессора М.С.Габриеляна относятся к проблемам, посвященным теориям стабильности движения, оптимальному управлению и стабилизации систем с распределенными параметрами. Были продолжены научные исследования в области стохастических дифференциальных игр, оптимального управления механическими системами мощности континуума.

Широкий круг выполненных научных работ способствовал тому, что сегодня на кафедре под его руководством ведутся исследования в разных областях механики и прикладной математики: «Теория дифференциальных игр», «Теория оптимального управления и наблюдения», «Теория оптимального управления манипуляционными роботами» и др.

Кроме научных работ, профессор М.С.Габриелян внес большой вклад в создание учебно-методической литературы. Сегодня для любого, кто изучает предмет «Теоретическая механика», настольной книгой стала «Руководство к решению задач по теоретической механике», выпуски 1-4 (соавторы 1-3 вып. – М.Манукян, В.Саркисян, 4 вып. - М.Манукян, В.Саркисян, М.Минасян). А учебник «Курс теоретической механики» (соавтор – Э.Манукян) предназначен студентам АГИУ и АГАУ.

Огромен вклад М.С.Габриеляна также в дело создания на кафедре новых специализаций. Многие его ученики успешно работают в разных областях народного хозяйства. Один из них защитил докторскую, а 9 – кандидатские диссертации.

Профессор М.С. Габриелян и сегодня полон новых идей и с присущей ему энергией решает научные и организационные вопросы. Свой большой опыт и знания ученого и педагога он бескорыстно отдает молодым сотрудникам и студентам во имя развития национальной науки.

Научная общественность Армении и редакция журнала «Известия НАН Армении, Механика» поздравляют М.С. Габриеляна с юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

КИРАКОСЯН РАЗМИК МАКАРОВИЧ
(к 70-летию со дня рождения)

Доктору технических наук, профессору Размику Макаровичу Киракосяну исполнилось 70 лет.

Р. М. Киракосян родился в 1937г. в Ереване. В 1954г. окончил среднюю школу с золотой медалью. В 1959г. окончил гидростроительный факультет Ереванского политехнического института с отличием. Был сталинским стипендиатом. Окончил аспирантуру мех.-мат. факультета Ереванского госуниверситета. В 1964г. в Институте проблем механики АН СССР (Москва) защитил диссертацию и получил ученую степень кандидата технических наук. В 1986г. в МИСИ (Московский инженерно-строительный институт) защитил диссертацию и получил ученую степень доктора технических наук. В 1990г. получил звание профессора.

С 1962г. по сей день работает в Институте механики Национальной Академии Наук Армении. Автор около 100 научных статей и пяти монографий, посвященных строительной механике, теориям пластичности, ползучести и общей физике.

Его первые работы, посвященные вопросам нелинейной ползучести и релаксации тонкостенных конструкций, в частности, оболочек вращения – конус, цилиндр, сфера получили высокую оценку специалистов. Известны его работы для пластин и балок, находящихся в упруго-пластическом состоянии. Высокую научную ценность имеет монография «Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов», Ереван, 2000, Изд. «Гитутюн» НАН РА.

Большая часть его результатов была доложена на съездах, конференциях, симпозиумах, посвященных актуальным вопросам теоретической и прикладной механики.

Велики его заслуги в деле подготовки научных кадров. Об этом свидетельствует, в частности, монография «Современные теории пластичности» Ереван, ЕрПИ, 1999, а также пособия по физике, изданные в Армении и России. Под его научным руководством защищен ряд кандидатских диссертаций. Его ученики успешно работают в различных ВУЗах и научных центрах.

Помимо научной деятельности занимался еще и преподавательской работой. В Ереванском архитектурно-строительном институте долгие годы читал лекции по сопротивлению материалов и строительной механике.

Является ученым секретарем Специализированного Совета по защите диссертаций при Институте механики.

Научная общественность Армении и редакция журнала «Известия НАН Армении, Механика» поздравляют Размика Макаровича Киракосяна с юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ СОСТАВНОГО КЛИНА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Агаларян О.Б.

Ключевые слова: Составное упругое тело, концентраторы напряжения, явление малонапряженности.
Keywords: Compound elastic body, stress concentrator, understressed effect.

Հ. Բ. Աղալարյան
Ծերջավոր ճաքով թուլացված բաղադրյալ սեպի հարթ խնդրի մասին

Դիտարկվում է կամայական անկյունային բացվածքով երկու սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի՝ որը պարունակում է վերջավոր երկարությամբ շառավղային ճաք, լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը առաձգականության տեսության հարթ խնդրի դրվածքով: Նախապես, ներմուծվում են երկու նոր անհայտ ֆունկցիաներ, որոնք հնարավորություն են տալիս խառը եզրային խնդրի լուծումը հանգեցնել այնպիսի խնդրի լուծմանը, երբ եզրային պայմանները տրված են միայն լարումների թենզորի կոմպոնենտների միջոցով. Այնուհետև, ներմուծված անհայտ ֆունկցիաները որոշելու համար ճաքի եզրերի վրա տրված պայմաններից արտածվում են սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգ; Ընդ որում, օգտագործվում են նոր կոմբինացված մեխանիկական պարամետրեր, որոնք էապես պարզեցնում են վերջնական արտահայտությունների անալիտիկական տեսքերը. և որոնց փոփոխման տիրույթը, ի տարբերություն Դանդերսի պարամետրերի /3/ հանդիսանում է քառակուսի, որի կենտրոնը հանդիսանում է կոորդինատների սկզբնակետը իսկ կողմի երկարությունը հավասար է երկուսի.

Ստացված լուծումների հիման վրա որոշվում են ինչպես լարումների վարքը սեպերի միացման գագաթի շրջակայքում այնպես էլ լարումների ինտենսիվության գործակիցները ճաքի գագաթներում:

H.B. Aghalaryan
On Plane Problem Compound Wedge with Radial Crack

In the statement of plane problem of the theory of elasticity the stress-strain state of compound wedge made from two different materials and contained on the common bound crack of the finite length is considered. In the polar coordinate system new unknown functions that allow the solution of mixed problem brought to the solution of the problem with boundary conditions only for the component of stress tensor are inserted.

On the base of received solution both behavior of stress and the coefficients of stress concentration in the crack apex and in a vicinity of connection of compound body are determined.

В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается напряженно-деформированное состояние составного клина, изготовленного из двух различных материалов и содержащей на общей грани трещину конечной длины. В полярной координатной системе предварительно вводятся новые неизвестные функции, что позволяет решение смешанной задачи свести к решению задачи с граничными условиями, написанными только относительно компонент тензора напряжений. Далее из граничных условий на берегах трещины для определения вводимых функций при помощи интегрального преобразования Меллина получается система сингулярных интегральных уравнений. При этом используются новые комбинированные физические параметры, которые существенно упрощают окончательные аналитические выражения и в отличие от параметра Дандерса они изменяются в квадрате с центром в начале координат и длиной стороны, равной двум.

На основе полученного решения определяется как поведение напряжений, так и коэффициенты концентрации напряжений в вершинах трещины и в окрестности соединения составного тела.

В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается напряженно-деформированное состояние составного клина, изготовленного из двух различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Принимается, что на общей грани содержится трещина произвольного расположения и длины. Составное тело нагружено внешними нормальными и касательными нагрузками, которые приложены к берегам трещины, равны по величине и противоположны по направленнию, а внешные грани свободны от нагрузок. Из решенных краевых задач для составных тел отметим [1-4] .

1.Пусть Ω_i $(i=1,2)$ – два бесконечных клина, которые соединены вдоль их общих граней и находятся в плоском деформированном состоянии. В полярной координатной системе (r,ϑ) имеем следующие уравнения статики:

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+r\dfrac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r}+2\tau_{r\vartheta}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

и уравнение неразрывности, написанное в компонентах напряжений

$$\Delta(\sigma_r+\sigma_\vartheta)=0, \text{ где } \Delta=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \tag{1.2 }$$

Компоненты напряжения и деформации связаны по закону Гука.

$$\begin{cases} \varepsilon_r=\dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_r-\left(1-\dfrac{m}{4}\right)(\sigma_r+\sigma_\vartheta)\right] \\ \varepsilon_\vartheta=\dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_\vartheta-\left(1-\dfrac{m}{4}\right)(\sigma_r+\sigma_\vartheta)\right] \\ \gamma_{r\vartheta}=\dfrac{1}{\mu}\tau_{r\vartheta} \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\mu-$ модуль сдвига, а m – величина, связанная с постоянным коэффициентом Пуассона соотношением $m=4(1-\nu)$ для плоского деформированного состояния, а $m=\dfrac{4}{1+\nu}-$для обобщенного плоского напряженного состояния. Компоненты деформации и компоненты вектора перемещения u,v связаны линейными сотноошениями:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\vartheta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\vartheta}, \qquad \gamma_{r\vartheta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.4}$$

Систему уравнений (1.1) – (1.2) необходимо решить со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,-\alpha_1)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,-\alpha_1)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}(r,\alpha_2)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,\alpha_2)=0 \end{cases}, \qquad (0\le r\le\infty) \tag{1.5}$$

На общей грани клиньев имеем условия непрерывности напряжений и перемещений

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,0)=\sigma_\vartheta^{(2)}(r,0) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,0=\tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,0)\right) \end{cases} (0\le r\le\infty), \quad \begin{cases} u^{(1)}(r,0)=u^{(2)}(r,0) \\ v^{(1)}(r,0)=v^{(2)}(r,0) \end{cases}, \ r\notin(l_1,l_2) \tag{1.6}$$

где $(i=1,2)$ – для первого и второго клиньев. (l_1, 0) и (l_2, 0) – координаты концов трещины.

На границах разреза заданы внешние уравновешенные нормальные и касательные нагрузки .

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,0) = \sigma_\vartheta^{(2)}(r,0) = p(r) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,0) = \tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,0) = \tau(r) \end{cases}, \qquad r \in (l_1, l_2) \tag{1.7}$$

С учетом соотношения (1.4) после дифференцирования по r два последних условия (1.5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(1)}(r,0) - \varepsilon_r^{(2)}(r,0) = \varphi(r) = \begin{cases} \varphi(r) & r \in (l_1, l_2) \\ 0 & r \notin (l_1, l_2) \end{cases} \\ \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\varepsilon_r^{(1)}(r,0) - \varepsilon_r^{(2)}(r,0)\right) - \dfrac{\partial}{\partial r} r\left(\gamma_{r\vartheta}^{(1)}(r,0) - \gamma_{r\vartheta}^{(2)}\right) = \psi(r) = \begin{cases} \psi(r) & r \in (l_1, l_2) \\ 0 & r \notin (l_1, l_2) \end{cases} \end{cases} \tag{1.8}$$

где введенные неизвестные функции φ и ψ имеют одинаковый характер по аргументу в окрестности концентраторов напряжений и отличны от нуля лишь на границе разреза. Тогда с учетом закона Гука (1.8) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_r^{(1)}(r,0) - \left(1 - \dfrac{m'}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\vartheta^{(2)}\right)\right] - \dfrac{1}{2\mu^{ii}}\left[\sigma_r^{(2)} - \left(1 - \dfrac{m^{ii}}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_2^{(2)}\right)\right] = \varphi(r) \\ \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left\{\dfrac{1}{2\mu'}\left[\sigma_r^{(1)} - \left(1 - \dfrac{m'}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\vartheta^{(2)}\right)\right] - \dfrac{1}{2\mu^{ii}}\left[\sigma_r^{(2)} - \left(1 - \dfrac{m^{ii}}{4}\right)\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\vartheta^{(2)}\right)\right]\right\} - \\ -\dfrac{\partial}{\partial r} r\left[\dfrac{1}{\mu'}\tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,0) - \dfrac{1}{\mu^{ii}}\tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,0)\right] = \psi(r) \end{cases} \tag{1.9}$$

Таким образом, фактически решение смешанной краевой задачи сводится к решению первой краевой задачи в соответствующих областях, когда все граничные условия написаны относительно компонентов напряжения, для их решения применим интегральное преобразование Меллина [3].

С этой целью введем образы функции σ_ϑ, σ_r , $\tau_{r\vartheta}$ следующими формулами:

$$\tilde{\sigma}_r(s,0) = \int_0^\infty \sigma_r(r,\vartheta) r^s dr, \quad \tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta) = \int_0^\infty \sigma_\vartheta(r,\vartheta) r^s dr, \quad \tilde{\tau}_{r\theta}(s,\vartheta) = \int_0^\infty \tau_{r\vartheta}(r,\vartheta) r^s dr \tag{1.10}$$

Далее, применяя интегральное преобразование Меллина к уравнениям равновесия (1.1) и к уравнению сплошности, для функции $\tilde{\sigma}(s,\vartheta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4\tilde{\sigma}(s,\vartheta)}{d\vartheta^4} + \left[(s+1)^2 + (s-1)^2\right]\frac{d^2\tilde{\sigma}(s,\vartheta)}{d\vartheta^2} + \left(s^2 - 1\right)^2 \tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta) = 0 \tag{1.11}$$

Функции $\tilde{\sigma}_r(s,\vartheta)$ и $\tilde{\tau}_{r\vartheta}(s,\vartheta)$ выражаются через $\tilde{\sigma}_\vartheta$ по формулам :

$$\tilde{\tau}_{r\vartheta}(s,\vartheta) = \frac{1}{s-1}\frac{d\tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta)}{d\vartheta}, \qquad \tilde{\sigma}_r(s,\vartheta) = \frac{1}{s(s-1)}\frac{d^2\tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta)}{d\vartheta^2} - \frac{1}{s}\tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta)$$

Общее решение имеет вид

$$\tilde{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta) = a_i\cos(s+1)\vartheta + b_i\cos(s-1)\vartheta + c_i\sin(s+1)\vartheta + d_i\sin(s-1)\vartheta \tag{1.12}$$

Здесь a_i, b_i, c_i, d_i – неизвестные функции, зависящие от комплексного параметра S. Из преобразованных граничных условий, написанных относительно компонентов напряжений, приходим к следующей алгебраической системе из восьми уравнений относительно неизвестных функций:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 - a_2 - b_2 = 0 \\ (s+1)c_1 + (s-1)d_1 - (s+1)c_2 - (s-1)d_2 = 0 \\ \dfrac{1-s-m'}{\mu'}a_1 - \dfrac{s-1}{\mu'}b_1 - \dfrac{1-s-m^{ii}}{\mu^{ii}}a_2 + \dfrac{s-1}{\mu^{ii}}b_2 = 2(s+1)\varphi(s) \\ \dfrac{1+s-m'}{\mu'}c_1 + \dfrac{s-1}{\mu'}d_1 - \dfrac{1+s-m^{ii}}{\mu^{ii}}c_2 - \dfrac{s-1}{\mu^{ii}}d_2 = \dfrac{2(s-1)}{s+1}\psi(s) \\ \cos(s+1)\alpha_1 a_1 + \cos(s-1)\alpha_1 d_1 - \sin(s+1)\alpha_1 c_1 - \sin(s-1)\alpha_1 d_1 = 0 \\ (s+1)\sin(s+1)\alpha_1 a_1 + (s-1)\sin(s-1)\alpha_1 b_1 + (s+1)\cos(s+1)\alpha_1 c_1 + \cos(s) = 0 \\ \cos(s+1)\alpha_2 a_2 + \cos(s-1)\alpha_2 b_2 + \sin(s+1)\alpha_2 c_2 + \sin(s-1)\alpha_2 d_2 = 0 \\ (s+1)\sin(s+1)\alpha_2 a_2 + (s-1)\sin(s-1)\alpha_2 b_2 - (s+1)\cos(s+1)c_2 - \cos(s) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

При решении последней алгебраической системы уравнений будем рассматривать два случая: первый, когда $\mu^{i} = \mu^{ii}$ и второй, когда $\mu^{ii} \neq \mu^{i}$. Тогда нетрудно заметить, что уравнения, содержащие физические параметры, можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} -ma_1 + a_2 = \varphi_1(s) \\ -mc_1 + c_2 = \psi_1(s) \end{cases} \tag{1.14}$$

где введены обозначения:

$$m = \frac{m^{i}}{m^{ii}}; \quad \varphi_1(s) = \frac{2\mu}{m^{ii}}(s-1)\varphi(s); \quad \psi_1(s) = \frac{2\mu(s-1)}{m^{ii}(s+1)}\psi(s) \tag{1.15}$$

Во втором случае вместо (1.14) будем иметь:

$$\begin{cases} (1-s-a)a_1 + (1-s)b_1 + ba_2 = \varphi_1(s) \\ (1+s-a)c_1 + (s-1)d_1 + bc_2 = \psi_1(s) \end{cases} \tag{1.16}$$

Здесь введены новые физические параметры (a,b) и функции φ_1 и ψ_1, имеющие следующий вид:

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu^{ii}m^{i}}{\mu^{ii} - \mu^{i}} \\ b = \dfrac{\mu^{i}m^{ii}}{\mu^{ii} - \mu^{i}} \end{cases}; \qquad \begin{cases} \varphi_1(s) = 2\dfrac{\mu^{i}\mu^{ii}}{\mu^{ii} - \mu^{i}}(s-1)\varphi(s) \\ \psi_1(s) = 2\dfrac{\mu^{i}\mu^{ii}}{\mu^{ii} - \mu^{i}}\dfrac{s-1}{s+1}\psi(s) \end{cases} \tag{1.17}$$

Рассмотрение этих двух случаев исчерпывает всевозможные значения физических параметров поставленной задачи.

Из последних четырех уравнений системы (1.13), определяя $a_1\ c_1\ a_2\ c_2$, получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_1 s\right]b_1 - \frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 s\right]d_1 \\ c_1 &= \frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1 s\right]b_1 - \frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_1 s\right]d_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$a_2 = -\frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_2 s\right]b_2 + \frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2 s\right]d_2$$
$$c_2 = -\frac{1}{s+1}\left[s\sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2 s\right]b_2 - \frac{1}{s+1}\left[s\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_2 s\right]d_2$$

Эти выражения являются аналитическими функциями в соответствующей полосе регулярности $\left(\varepsilon - 1 \le \operatorname{Re} s \le 0\right)$, полученной от исследования поведения компонентов напряжения при $r \to 0$ и при $r \to \infty$. Для компактности последующих вычислений введем в рассмотрение следующие вспомогательные функции по формулам:

$$F^{\pm}\left(s,x\right) = s\sin 2x \pm \sin 2sx, \quad E^{\pm}\left(s,x\right) = s\cos 2x \pm \cos 2sx \qquad (1.19)$$

Тогда с учетом (1.19) и (1.14) , подставляя значения a_1, c_1 и a_2, c_2 в первые четыре уравнения системы (1.13), в итоге, для случая $\mu^{ii} = \mu^{i}$ определение остальных неизвестных функций b_1, d_1 и b_2, d_2 сводится к решению следующей системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases} \left[-E^{+}\left(\alpha_1\right) + 1 + s\right]b_1 - F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1 + \left[E^{+}\left(\alpha_2\right) - 1 - s\right]b_2 - F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2 = 0 \\ F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1 - \left[E^{-}\left(\alpha_1\right) + 1 - s\right]d_1 + F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2 + \left[E^{-}\left(\alpha_2\right) + 1 - s\right]d_2 = 0 \\ -mE^{+}\left(\alpha_1\right)b_1 - mF^{-}\left(\alpha_1\right)d_1 + E^{+}\left(\alpha_2\right)b_2 - F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2 = \tilde{\varphi}_1\left(s\right) \\ mF^{+}\left(\alpha_1\right)b_1 - mE^{-}\left(\alpha_1\right)d_1 + F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2 + E^{-}\left(\alpha_2\right)d_2 = \psi_1\left(s\right) \end{cases} \qquad (1.20)$$

В случае $\mu^{i} \ne \mu^{ii}$ с учетом (1.16) и после некоторых очевидных преобразований с целью упрощения структуры системы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \left[E^{+}\left(\alpha_1\right) - 1 - s\right]b_1 + F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1 - \left[E^{+}\left(\alpha_2\right) - 1 - s\right]b_2 + F^{-}\left(\alpha_2\right)d_2 = 0 \\ F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1 - \left[E^{-}\left(\alpha_1\right) + 1 - s\right]d_1 + F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2 + \left[E^{-}\left(\alpha_2\right) + 1 - s\right]d_2 = 0 \\ \left[\left(s+a\right)E^{+}\left(\alpha_1\right) - s\left(1+s\right)\right]b_1 + \left(s+a\right)F^{-}\left(\alpha_1\right)d_1 - \\ -\left[\left(1+b\right)E^{+}\left(\alpha_2\right) - 1 - s\right]b_2 + (1+b)F^{-}(\alpha_2)d_2 = \tilde{\varphi}_1(s) \\ \left(s-a\right)F^{+}\left(\alpha_1\right)b_1 - \left[\left(s-a\right)E^{-}\left(\alpha_1\right) + s\left(1-s\right)\right]d_1 - \\ -\left(1+b\right)F^{+}\left(\alpha_2\right)b_2 - \left[(1+b)E^{-}(\alpha_2) + 1 - s\right]d_2 = \tilde{\psi}_2(s) \end{cases} \qquad (1.21)$$

Решая систему уравнений (1.20) или (1.21), определяя неизвестные функции $\tilde{\sigma}_{\vartheta}\left(s,\vartheta\right)$ и $\tilde{\tau}_{r\vartheta}\left(s,\vartheta\right)$, применяя обратное преобразование Меллина, для компонент напряжения получим интегральные выражения. Далее, из граничных условий на берегах трещины для определения неизвестных функций $\varphi\left(r\right)$, $\psi\left(r\right)$ приходим к системе интегральных уравнений. Опуская эти промежуточные выкладки, приведем результат вычислений в случае $\mu'' = \mu' = \mu$

$$\begin{cases} \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{11}(t,r)\varphi(t)\,dt + \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{12}(t,r)\psi(t)\,dt = p(r) \\ \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{21}(t,r)\varphi(t)\,dt + \int\limits_{l_1}^{l_2} K_{22}(t,r)\,\psi(t)\,dt = \tau(r) \end{cases} \tag{1.22}$$

Здесь введены следующие обзначения:

$$K_{11}(t,r)=\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1+y^2}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_1 y)-K_1(y,\alpha_1)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_2 y)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy-$$

$$-\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{(1+y^2)y}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)\sin^2\alpha_1-K_1(y,\alpha_1)\sin^2\alpha_2\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{12}(t,r)=\frac{8\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{y}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)(y\sin 2\alpha_1-\mathrm{sh}2\alpha_1 y)+K_1(y,\alpha_1)(y\sin 2\alpha_2-\mathrm{sh}2\alpha_2 y)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{21}(t,r)=\frac{8\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1+y^2}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times \tag{1.23}$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)(y\sin 2\alpha_1+\mathrm{sh}2\alpha_1 y)+K_1(y,\alpha_1)(y\sin 2\alpha_2+\mathrm{sh}2\alpha_2 y)\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

$$K_{22}(t,r)=\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\left[mK_1(y,\alpha_2)K_1(y,\alpha_1)-K_1(y,\alpha_1)K_1(y,\alpha_2)\right]\cos\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy-$$

$$-\frac{16\mu}{\pi mr}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)}\times$$

$$\times\left[mK_1(y,\alpha_2)\sin^2\alpha_1-K_1(y,\alpha_1)\sin^2\alpha_2+y\left(mK_1(y,\alpha_2)\,\mathrm{sh}^2\alpha_1 y-K_1(y,\alpha_1)\,\mathrm{sh}^2(\alpha_2 y)\right)\right]\sin\left(y\ln\frac{t}{r}\right)dy$$

Вещественные функции $K_1(y,\alpha_1)$ и $\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)$ имеют следующий вид:

$$K_1(y,\alpha)=y^2\sin^2\alpha-\mathrm{sh}^2 y\alpha$$

$$\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)=4(1+y^2)\left[m^2K_1(y,\alpha_1+\alpha_2)-m\left(K_1(y,\alpha_1+\alpha_2)-K_1(y,\alpha_1)-K\right)\right]$$

При выводе системы, предварительно на основе известного неравенства

$$\sin\alpha\, y\le \mathrm{sh}(\alpha y)\ ,\ \alpha\ge 0\ ,\ y\ge 0$$

было доказано, что уравнение $\Delta_m(y,\alpha_1,\alpha_2)=0$ не имеет отличного от нуля корней на мнимой оси в комплексной плоскости, то есть функции $€_{\vartheta}(s,\vartheta)$ и $€_{r\vartheta}(s,\vartheta)$ не имеют на этой прямой полюсов и являются аналитическими функциями. Отметим, что это справедливо не только для механических значений параметра $m\in[1,2]$, но также для любого положительного значения этой величины. В отличие $\Delta_m=0$ уравнение $\Delta(s,\alpha_1,\alpha_2)=0$ имеет счетные множества комплексных, в том числе, чисто мнимых корней, которые могут влиять на вид окончательной системы интегральных уравнений.

Опираясь на свойства подынтегральных выражений $K_{ij}(r,t)$ при $r \to 0$, $r \to \infty$, с использованием значения следующих интегралов:

$$\int_0^\infty \text{th}As\sin(s\ln\frac{t}{r})ds = \frac{e\sqrt{r^e t^e}}{t^e - r^e}\ ;\ \int_0^\infty \text{cth}As\sin(s\ln\frac{t}{r})\,ds = e\frac{t^e + r^e}{t^e - r^e}\ ;\ e = \frac{\pi}{2A}$$

и делая соответствующим образом замену переменных, систему интегральных уравнений (1.22) приводим к интегральным уравнениям с выделенными особеностями ядер, то есть:

$$\begin{gathered}\int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{11}^{(1)}(\xi, x)\right]\varphi_1'(\xi)\,d\xi + \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{12}^{(1)}(\xi, x)\right]\psi_1'(\xi)\,d\xi = P_1^{(1)}(x)\\ \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{21}^{(1)}(\xi, x)\right]\varphi_1'(\xi)\,d\xi + \int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{\xi - x} + K_{22}^{(1)}(\xi, x)\right]\psi_1'(\xi)\,d\xi = T_1^{(1)}(x)\end{gathered} \tag{1.24}$$

Здесь $K_{ij}^{(1)}(\xi, x)$, $\varphi_1(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $P_1^{(1)}(x)$ $T_1^{(1)}(x)$ выражаются через известные функции, которые из-за громоздкости не приводятся. Необходимо отметить, что если в окрестностях вершин трещины заданы условия скольжения, то есть $\tau_{r\vartheta}^{i} = \tau_s = \text{const}$ [5], то тогда представляя неизвестные функции $\varphi_1'(\xi)$ и $\psi_1'(\xi)$ в виде сумм ортогональных многочленов, для неизвестных коэффициентов известным путем получим систему бесконечных алгебраических уравнений. После решения этой системы и возвращаясь к старым переменным (r,t), обычным путем при помощи предельного перехода нетрудно выписать выражения для коэффициентов интенсивностей в концах трещины. В общем случае, систему уравнений можно решить численными методами с сочетанием выводящих асимптотических формул в окрестностях вершин трещины, которые нетрудно получить из (1.20) или (1.21). Далее, для определения асимптотических выражений компонент напряжения в окрестности соединения клиньев берется соответствующий путь интегрирования, используется лемма Жордана и теория вычетов. При этом, характер напряжения в окрестности определяется соответствующим образом расположенным корнем некоторого трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием к нулю главного определителя системы (1.21) или (1.22).

Эти уравнения имеют вид:

– при $(\mu' = \mu'' = \mu)$

$$\Delta_m(s,\alpha_1,\alpha_2,m) = m^2 K(s,\alpha_2) + m\left[K(s,\alpha_1+\alpha_2) - K(s,\alpha_1) - K(s,\alpha_2)\right] + K(s,\alpha_1) = 0$$

– в случае $\mu' \neq \mu''$

$$\begin{gathered}\Delta(s,\alpha_1,\alpha_2,a,b) = K(s,\alpha_2)a^2 + K(s,\alpha_1)b^2 + \big(K(s,\alpha_1+\alpha_2) - K(s,\alpha_1) - K(s,\alpha_2)\big)ab -\\ -4K(s,\alpha_2)\sin^2(s\alpha_1)a + 4K(s,\alpha_1)\sin^2(s\alpha_2)b + 4K(s,\alpha_1)K(s,\alpha_2) = 0\end{gathered}$$

Введенная новая неизвестная функция $K(s,x)$ выражается следующим образом:

$$K(s,x) = \sin^2(s,x) - s^2\sin^2 x$$

Из уравнения $\Delta_m = 0$ при $m = 1$ получается известный результат для однородного клина с раствором угла $(\alpha_1 + \alpha_2)$ [1].

Необходимо отметить, что уравнение $\Delta_m = 0$ легко получается и из уравнения $\Delta = 0$. Для этого достаточно подставить выражения физических параметров a и b

и после очевидных преобразований произвести предельный переход $\mu' \to \mu''$. Именно это свойство является причиной того, что оно по сравнению с ранее известными результатами (2.3) имеет возможно простой, симметричный и компактный вид.

Аналогичным способом, как это предложено в работе [6], для малых значений параметра расстояния конца трещины от внешной поверхности, нетрудно вывести систему интегральных уравнений, в которых в отличие от (1.22) предельный переход $a \to 0$ возможнен. Таким образом, рассмотренных два класса задач исчерпывают всевозможные положения трещины на линии соединения клиньев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967.
2. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1987.
3. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //ПМ. 1972. №3.
4. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения. // ПМ.1982. № 7. С.
5. Черепанов Г. П. Механика разрушения композитных материалов М : Наука, 1984.
6. Агаларян О.Б. Напряженно-деформированное состояние составного тела, изготовленного из двух упругих клиньев различного раствора. // В кн.: Ереван: Изд.АН Арм ССР, 1990. с.
7. Агаларян О. Б., Таманян Г. Ю. К задаче продольного сдвига составного клина с радиальной трещиной произвольной длины при различных граничных условиях .// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С. 3–9.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.07.2004

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3 , 624.04

СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Баблоян А.А., Багдасарян А.В.

Ключевые слова: полуплоскость, ослабленная полуплоскость, отверстие, трещина, напряжение, перемещение.
Key words: half-plane, weakened half-plane, opening, crack, tension, displacement.

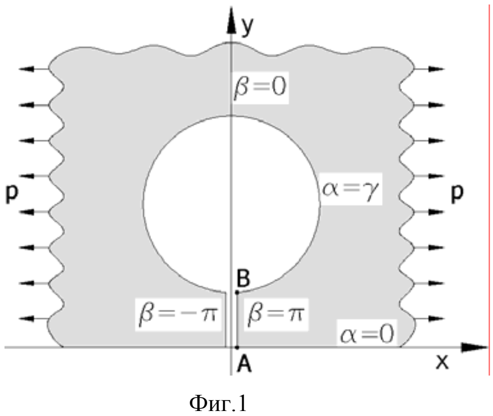
Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ Բաղդասարյան.
Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ճաքով թուլացված կիսահարթության համար

Բերվում է կլոր անցքով և կիսահարթության եզրին ուղղահայաց ուղղաձիգ ճաքով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը: Անցքի և կիսահարթության եզրերին, ինչպես նաև ճաքի ափերին տրված են սիմետրիկ բաշխված նորմալ բեռնվածքներ: Անվերջության վրա կիսահարթությունը ձգվում է հավասարապես բաշխված p ինտենսիվության բեռնվածքով (նկ.1):

A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan
Symmetric Problem of Elasticity Theory for a Half-Plane Weakened with a Round Opening and a Crack

The article presents the solution of a symmetric problem of elasticity theory for an elastic half-plane weakened by a round opening and a rectilinear crack, the latter being perpendicular to the edge of the half-plane. Symmetrically distributed normal loadings are given at the edges of the opening, the half-plane and banks of the split. On the infinity the half-plane spreads by equally distributed loadings with ***p*** intensity (fig.1).

Приводится решение задачи теории упругости для упругой полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и прямолинейной трещиной, перпендикулярной к границе полуплоскости. На границах отверстия, полуплоскости и на берегах трещины задаются симметрично распределенные нормальные нагрузки. На бесконечности полуплоскость растягивается равномерно распределенными нагрузками



Фиг.1

интенсивности ***p*** (фиг.1). Аналогичная задача была решена другим методом в работе [8].

В силу симметрии задачу будем решать для половины рассматриваемой области $(x \geq 0, \beta \geq 0)$, удовлетворяя при этом условиям симметрии на линии $\beta = 0$.

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha,0)=0,\quad \mathrm{v}(\alpha,0)=0 \tag{1}$$

Граничные условия для половины области будут:

$$\begin{aligned}
&a\sigma_{\alpha}(0,\beta)=f_1(\beta),\quad a\sigma_{\alpha}(\gamma,\beta)=f_2(\beta),\quad (0\le\beta\le\pi)\\
&\tau_{\alpha\beta}(0,\beta)=0,\quad \tau_{\alpha\beta}(\gamma,\beta)=0,\quad (0\le\beta\le\pi)\\
&a\sigma_{\beta}(\alpha,\pi)=f_0(\alpha),\quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi)=0,\quad (0\le\alpha\le\gamma)
\end{aligned} \tag{2}$$

Задачу будем решать методом Фурье с использованием биполярной системы координат.

$$x=\frac{a\sin\alpha}{\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta},\quad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta},\quad x+iy=ai\,\mathrm{cth}\frac{\alpha+i\beta}{2} \tag{3}$$

Известно [1-3], что плоская задача теории упругости сводится к определению бигармонической функции Φ. В биполярной системе координат бигармоническое уравнение приводится к виду [4-5]

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi)=0\\
&\alpha g(\alpha,\beta)=\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta
\end{aligned} \tag{4}$$

где $g(\alpha,\beta)$ – мера отображения (3).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $g\Phi$ формулами [3-4]

$$\begin{aligned}
&a\sigma_{\alpha}(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\alpha\right](g\Phi)\\
&a\sigma_{\beta}(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right](g\Phi)\\
&a\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=-(\mathrm{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}(g\Phi)\\
&u(\alpha,\beta)=\frac{g(\alpha,\beta)}{2\mu}[(1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}]\\
&\mathrm{v}(\alpha,\beta)=\frac{g(\alpha,\beta)}{2\mu}[(1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}]
\end{aligned} \tag{5}$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, а Ψ выражается через функцию Φ формулой:

$$g\Psi(\alpha,\beta)=(1-\nu)\iint\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right](g\Phi)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,\quad \delta_m=\frac{m\pi}{\gamma} \tag{6}$$

Решение уравнения (4) для рассматриваемой задачи ищем в виде суммы двух рядов Фурье

$$g\Phi(\alpha,\beta)=\Phi_0(\alpha,\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\beta)\cos\delta_m\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\alpha)\cos n\beta \tag{7}$$

где

$$a_m(\beta) = \mathrm{A}_m \,\mathrm{sh}(\delta_m\beta)\sin\beta + \mathrm{B}_m \,\mathrm{ch}(\delta_m\beta)\cos\beta, \quad (m = 1, 2, ...)$$
$$b_n(\alpha) = \mathrm{E}_n \mathrm{ch}[(n+1)\alpha] + \mathrm{F}_n \,\mathrm{ch}[(n-1)\alpha] + \mathrm{G}_n \mathrm{ch}[(n+1)(\gamma-\alpha)] +$$
$$+ \mathrm{H}_n \,\mathrm{ch}[(n-1)(\gamma-\alpha)], \quad (n = 2, 3, ...)$$
$$b_1(\alpha) = \mathrm{E}_1 \mathrm{ch}\,2\alpha + \mathrm{F}_1 \,\mathrm{ch}\,2(\gamma-\alpha) + \mathrm{G}_1 + \mathrm{H}_1\alpha$$
$$b_0(\alpha) = \mathrm{E}_0 \mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{F}_0\alpha\,\mathrm{ch}(\gamma-\alpha) + \mathrm{G}_0 \,\mathrm{ch}(\gamma-\alpha) + \mathrm{H}_0(\gamma-\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha \tag{8}$$
$$\delta_m = m\pi/\gamma, \quad (0 \le \alpha \le \gamma, \quad 0 \le \beta \le \pi)$$

Первое слагаемое формулы (7) имеет вид

$$\Phi_0(\alpha,\beta) = \Phi_1(\alpha,\beta) + \Phi_2(\alpha,\beta), \quad \Phi_2(\alpha,\beta) = ap\left[\cos\beta - \frac{0.5\sin^2\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}\right]$$
$$\Phi_1(\alpha,\beta) = c_0\left[2\cos\beta + (\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)\log\frac{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha + \cos\beta}\right] \tag{9}$$

причем функцией Φ_2 задается равномерно распределенная нормальная нагрузка на бесконечности с интенсивностью p .

Разложим функцию Φ_0 в ряд Фурье

$$\Phi_0(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\alpha)\cos(n\beta)$$
$$d_0(\alpha) = (-0.5ap + 2c_0)e^{-\alpha}, \quad d_1(\alpha) = ap - (0.5ap + 2c_0)e^{-\alpha}$$
$$d_n(\alpha) = (4c_0\frac{n\,\mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{sh}\alpha}{n^2 - 1} + ap\mathrm{sh}\alpha)e^{-n\alpha}, \quad (n = 2, 4, 6...) \tag{10}$$
$$d_n(\alpha) = (ap\mathrm{sh}\alpha - 4c_0 n^{-1}\,\mathrm{ch}\,\alpha)e^{-n\alpha}, \quad (n = 3, 5, 7...)$$

С учетом (10) представим формулу (7) в виде

$$g\Phi(\alpha,\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta)\cos(\delta_m\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}[b_n(\alpha) + d_n(\alpha)]\cos(n\beta) \tag{11}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) на касательные напряжения, получим

$$b_n'(0) + d_n\,'(0) = b_n'(\gamma) + d_n\,'(\gamma) = 0, \quad a_m'(\pi) = 0, \quad (n, m = 1, 2, ...) \tag{12}$$

Из граничных условий (2) для нормальных напряжений, с учетом (12), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$(\mathrm{ch}\,\alpha + 1)\frac{\partial^2 g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha^2} - \mathrm{sh}\,\alpha\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha} - g\Phi(\alpha,\pi) = F_0(\alpha)$$
$$(1 - \cos\beta)\frac{\partial^2 g\Phi(0,\beta)}{\partial\beta^2} - \sin\beta\frac{\partial g\Phi(0,\beta)}{\partial\beta} + g\Phi(0,\beta) = F_1(\beta) \tag{13}$$
$$(\mathrm{ch}\,\gamma - \cos\beta)\frac{\partial^2 g\Phi(\gamma,\beta)}{\partial\beta^2} - \sin\beta\frac{\partial g\Phi(\gamma,\beta)}{\partial\beta} + \mathrm{ch}\,\gamma\, g\Phi(\gamma,\beta) = F_2(\beta)$$
$$F_0(\alpha) = f_0(\alpha), \quad F_1(\beta) = f_1(\beta) + C_1, \quad F_2(\beta) = f_2(\beta) + C_2$$

Из формул (7) и (12) имеем

$$\left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = b_0\,'(0)+d_0\,'(0),\quad \left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\gamma} = b_0\,'(\gamma)+d_0\,'(\gamma)$$

$$\left.\frac{\partial g\Phi(\alpha,\pi)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi} = a_0\,'(\pi)=0 \tag{14}$$

Учитывая эти соотношения для постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулах (13), получим следующие значения:

$$C_1=0,\quad C_2=\operatorname{sh}\gamma[b_0\,'(\gamma)+d_0\,'(\gamma)] \tag{15}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (13) будут

$$\begin{gathered} g\Phi(0,\beta)=w_1(\beta)=a_1(1-\cos\beta)+b_1\sin\beta+Q_1(\beta) \\ g\Phi(\gamma,\beta)=w_2(\beta)=a_2(\operatorname{ch}\gamma\cos\beta-1)+b_2\sin\beta+Q_2(\beta) \\ g\Phi(\alpha,\pi)=w_0(\alpha)=a_0(\operatorname{ch}\alpha+1)+b_0\operatorname{sh}\alpha+Q_0(\alpha) \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} Q_1(\beta)=\int_{\varepsilon}^{\beta}\frac{\sin\eta-\sin\beta+\sin(\beta-\eta)}{(1-\cos\eta)^2}F_1(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta \\ Q_2(\beta)=\int_{0}^{\beta}\frac{\sin\eta-\sin\beta+\operatorname{ch}\gamma\sin(\beta-\eta)}{(\operatorname{ch}\gamma-\cos\eta)^2}F_2(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta \\ Q_0(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}\frac{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}\xi+\operatorname{sh}(\alpha-\xi)}{(\operatorname{ch}\xi+1)^2}F_0(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \end{gathered} \tag{17}$$

Для сходимости первого интеграла формул (16) будем считать, что граница полуплоскости $(\alpha=0)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $(y=0,$ $x=\pm\infty)$ свободна от внешних напряжений. Это условие в биполярных координатах записывается в виде

$$f_1(\beta)=0,\quad (0\le\beta<\varepsilon<<\pi) \tag{18}$$

Постоянные интегрирования в формулах (16) будем определять из следующих условий:

1) непрерывности функции $g\Phi$ в угловых точках $A(0,\pi)$ и $B(\gamma,\pi)$;

2) четности функции $g\Phi$ по переменной β;

3) ограниченности функции $g\Phi$ при $\alpha\to\infty$ и $\gamma=\infty$.

Подставляя значения функции $g\Phi$ из (11) в (16) и умножая обе части первых двух уравнений (16) на $\cos n\beta$ $(n=0,1,2,..)$ и интегрируя в пределах $(0,\pi)$, получим

$$\frac{\pi}{2}[b_n(\gamma_k)+d_n(\gamma_k)]+\sum_{m=0}^{\infty}\cos\delta_m\gamma_k\int_0^{\pi}a_m(\beta)\cos n\beta\,\mathrm{d}\,\beta=\int_0^{\pi}w_k(\beta)\cos n\beta\,\mathrm{d}\,\beta$$

$$\pi[b_0(\gamma_k)+d_0(\gamma_k)]+\sum_{m=0}^{\infty}\cos\delta_m(\gamma_k)\int_0^{\pi}a_m(\beta)\,\mathrm{d}\,\beta=\int_0^{\pi}w_k(\beta)\,\mathrm{d}\,\beta \tag{19}$$

$$(k=1,2;\ n=1,2,..)$$

где $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \gamma$.

Аналогичным образом, если обе части последнего уравнения (16) умножить на $\cos\delta_m\alpha$ $(m = 0,1,2,..)$ и проинтегрировать по α в пределах $(0,\gamma)$, получим

$$a_m(\pi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\gamma} \int_0^{\gamma} b_n(\alpha)\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha = \frac{2}{\gamma}\int_0^{\gamma} [w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha$$

$$a_0(\pi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma} \int_0^{\gamma} b_n(\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} [w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha,\ \ (m = 1,2,..) \quad (20)$$

Старые неизвестные постоянные, входящие в (7-8) или (11), будем определять из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\,\mathrm{G}_n\,\mathrm{sh}[(n+1)\gamma] + (n-1)\mathrm{H}_n\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] - d_n(0) = 0\\
&(n+1)\,\mathrm{E}_n\,\mathrm{sh}[(n+1)\gamma] + (n-1)\mathrm{F}_n\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] + d_n(\gamma) = 0\\
&(n-1)(\mathrm{F}_n + \mathrm{H}_n)\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] = (-1)^n X_n / \pi\\
&(n-1)(-\mathrm{F}_n + \mathrm{H}_n)\mathrm{sh}[(n-1)\gamma] = (-1)^n Y_n / \pi, \quad (n \ge 2)
\end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\begin{aligned}
&-2\mathrm{F}_1\mathrm{sh}(2\gamma) + \mathrm{H}_1 + d_1(0) = 0, \quad 2\,\mathrm{E}_1\,\mathrm{sh}(2\gamma) + \mathrm{H}_1 + d_1(\gamma) = 0\\
&\pi(2\,\mathrm{G}_1 + \mathrm{H}_1\gamma) = -2X_1, \quad 2\pi\mathrm{H}_1 = Y_1
\end{aligned} \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0)\mathrm{sh}\gamma = (\mathrm{F}_0 + \mathrm{H}_0)(\mathrm{ch}\,\gamma - 1), \quad (\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0) = X_0\\
&(\mathrm{G}_0 - \mathrm{E}_0)\mathrm{sh}\gamma = (\mathrm{F}_0 - \mathrm{H}_0)(\mathrm{ch}\,\gamma + 1), \quad (\mathrm{G}_0 - \mathrm{E}_0) = Y_0
\end{aligned} \quad (21.3)$$

$$\mathrm{A}_m + \delta_m\,\mathrm{B}_m = 0, \quad \gamma(1 + \delta_m{}^2)\mathrm{sh}(\pi\delta_m)\,\mathrm{B}_m = -2Z_m \quad (21.4)$$

где X_n, Y_n и Z_m $(m,n = 0,1,2,...)$ – новые неизвестные постоянные.

Вычисляя интегралы, входящие в (19) и (20), после ряда преобразований, для определения новых неизвестных постоянных получим следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{Z_m\,\mathrm{cth}(\pi\delta_m)}{1 + \delta_m{}^2} + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{4nX_n}{\pi\Delta(m,n)} = \int_0^{\gamma} [w_0(\alpha) - \Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha -\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[(n-1)^2 + \delta_m{}^2][d_n(0) - d_n(\gamma)]}{\Delta(m,n)} - \frac{2(\mathrm{E}_0 + \mathrm{G}_0)\mathrm{sh}\gamma}{(1 + \delta_m{}^2)^2}, \ \ (m = 2,4,6..)\\
&\chi_n X_n + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = (-1)^n \int_0^{\pi} [w_1(\beta) + w_2(\beta)]\cos n\beta\,\mathrm{d}\,\beta -\\
&-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0) - d_n(\gamma)}{n+1}\mathrm{cth}\frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) + d_n(\gamma)\right] \quad (n = 1,2,...)
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{Z_m \operatorname{cth}(\pi\delta_m)}{1+\delta_m{}^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4nY_n}{\pi\Delta(m,n)}=\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha)-\Phi_0(\alpha,\pi)]\cos(\delta_m\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[(n-1)^2+\delta_m{}^2][d_n(0)-d_n(\gamma)]}{\Delta(m,n)}-\frac{2(\mathrm{G}_0-\mathrm{E}_0)\operatorname{sh}\gamma}{(1+\delta_m{}^2)^2},\ (m=1,3,5..)$$

$$\eta_n Y_n+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=(-1)^n\int_0^{\pi}[w_1(\beta)-w_2(\beta)]\cos n\beta\,d\beta-\tag{23}$$

$$-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0)+d_n(\gamma)}{n+1}\operatorname{th}\frac{(n+1)\gamma}{2}+d_n(0)-d_n(\gamma)\right]\quad(n=1,2,...)$$

где

$$\chi_1=1,\quad \chi_n=\frac{\operatorname{sh}(n\gamma)+n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma)-\operatorname{ch}\gamma]},\quad (n=2,3,...)$$

$$\eta_1=\frac{\gamma-\operatorname{th}\gamma}{4},\quad \eta_n=\frac{\operatorname{sh}(n\gamma)-n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma)+\operatorname{ch}\gamma]},\quad (n=2,3,...)\tag{24}$$

$$\Delta(m,n)=\delta_m{}^4+2(n^2+1)\delta_m{}^2+(n^2-1)^2$$

Постоянные X_0, Y_0 и c_0 будем определять из следующих уравнений:

$$2X_0\operatorname{sh}\gamma+\frac{\gamma X_1}{\pi}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4nX_n}{\pi(n^2-1)^2}=\int_0^{\gamma}[w_0(\alpha)-\Phi_0(\alpha,\pi)]\,d\alpha-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{d_n(0)-d_n(\gamma)}{(n+1)^2},\quad (m=0)$$

$$\pi\Big(d_0(0)+d_0(\gamma)+X_0\left[\operatorname{ch}\gamma+1+\gamma\operatorname{cth}(\gamma/2)\right]\Big)+$$

$$+\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=\int_0^{\pi}[w_1(\beta)+w_2(\beta)]\,d\beta\tag{25}$$

$$\pi\Big(d_0(0)-d_0(\gamma)+Y_0\left[\operatorname{ch}\gamma-1-\gamma\operatorname{th}(\gamma/2)\right]\Big)+$$

$$+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)}=\int_0^{\pi}[w_1(\beta)-w_2(\beta)]\,d\beta$$

Исследуем бесконечные системы. Для оценки сумм модулей коэффициентов при неизвестных постоянных заменим эти суммы интегралами с точностью до бесконечно малых величин.

$$\int_0^{\infty}\frac{n\,dn}{\Delta(m,n)}=\frac{1}{4\delta_m}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta_m{}^2-1}{2\delta_m}\right)\right],\quad \int_0^{\infty}\frac{\delta_m\,d\delta_m}{\Delta(m,n)}=\frac{1}{8n}\log\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2}$$

$$\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\frac{8\delta_m(n^2-1)}{\gamma\Delta(m,n)}=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{5n4}+...\right)\left[1+o(n)\right]\tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(\delta_m{}^2+1)}{\pi\Delta(m,n)}=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3\delta_m{}^2}+\frac{1}{5\delta_m{}^4}+...\right)\left[1+o(n)\right]$$

С использованием (26) легко доказать, что нормы бесконечных систем не превосходят $2/\pi$. Если внешняя нагрузка достаточно гладкая, то свободные члены бесконечных систем будут стремиться к нулю. Таким образом, бесконечные системы вполне регулярны и их можно решать методом редукции или последовательных приближений.

Выражая старые коэффициенты через новые и подставляя эти значения в формулы (8) для функций $a_m(\beta)$ и $b_n(\alpha)$, получим

$$b_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n\operatorname{ch}[(n-1)\alpha](X_n-Y_n)}{(n-1)\operatorname{sh}[(n-1)\gamma]}+\frac{(-1)^n\operatorname{ch}[(n-1)(\gamma-\alpha)](X_n+Y_n)}{(n-1)\operatorname{sh}[(n-1)\gamma]}-\right.$$
$$-\frac{\operatorname{ch}[(n+1)(\gamma-\alpha)][(-1)^n(X_n+Y_n)-2\pi d_n(0)]}{(n+1)\operatorname{sh}[(n+1)\gamma]}-$$
$$\left.-\frac{\operatorname{ch}[(n+1)\alpha][(-1)^n(X_n-Y_n)+2\pi d_n(\gamma)]}{(n+1)\operatorname{sh}[(n+1)\gamma]}\right),\quad (n=2,3,...)$$

$$b_1(\alpha)=-\frac{1}{4\pi}\big(4X_1+Y_1[-2\alpha+\operatorname{sech}(\gamma)\operatorname{sh}(2\alpha-\gamma)+\gamma]-$$
$$-2\pi\operatorname{csch}(2\gamma)[\operatorname{ch}[2(\alpha-\gamma)]d_1(0)-\operatorname{ch}(2\alpha)d_1(\gamma)]\big),\quad (n=1) \tag{27}$$

$$b_0(\alpha)=\frac{1}{2}\big(\operatorname{cth}(\gamma/2)X_0[-\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha\operatorname{ch}(\alpha-\gamma)+\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}(\alpha-\gamma)+\gamma\operatorname{ch}\alpha]-$$
$$-\operatorname{th}(\gamma/2)Y_0[-\alpha(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{ch}(\alpha-\gamma))+\operatorname{sh}\alpha+\operatorname{sh}(\alpha-\gamma)+\gamma\operatorname{ch}\alpha],\quad (n=0)$$

$$a_m(\beta)=\frac{2Z_m[\cos\beta\operatorname{ch}(\beta\delta_m)-\delta_m\sin\beta\operatorname{sh}(\beta\delta_m)]}{-\gamma(1+\delta_m{}^2)\operatorname{sh}(\pi\delta_m)},\quad (m=1,2,...)$$

Исследование бесконечных систем [6-7] показывает, что неизвестные постоянные имеют следующие асимптотические поведения:

$$X_k=x_0/k,\quad Y_k=y_0/k,\quad Z_k=z_0/\gamma_m,\quad (k,m>>1) \tag{28}$$

Если граничные значения касательных напряжений равны нулю, то $x_0=y_0=z_0$. В этом случае нормальные напряжения в угловых точках $A(0,\pi)$ и $B(\gamma,\pi)$ остаются ограниченными. В противном случае нормальные напряжения в этих точках будут иметь логарифмические особенности.

В том случае, когда на берегах трещины задаются условия гладкого контакта $\mathrm{v}_\beta(\alpha,\pi)=\mathrm{v}_0$, $\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi)=0$ $(0\le\alpha\le\gamma)$, то есть в трещину помещено абсолютно жесткое тело постоянной толщины, будем иметь

$$\frac{\partial g\Psi(\alpha,\pi)}{\partial\alpha}-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha+1}g\Psi(\alpha,\pi)=2\mu v_o,\quad a_m{}'(\pi)=0 \tag{29}$$

где

$$
\Psi(\alpha,\pi)=(1-\nu)\left\{-\sum_{m=1}^{\infty}\left[(\delta_m{}^2+1)\int_0^{\pi}a_m(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right]\frac{\sin(\delta_m\alpha)}{\delta_m}+\right.
$$
$$
\left.+\pi\left[b_0{}'(\alpha)+d_0{}'(\alpha)-\int\left(b_0(\alpha)+d_0(\alpha)\right)\mathrm{d}\,\alpha\right]\right\} \tag{30}
$$

Рассматривая условие (1) как дифференциальное уравнение и решая его, получим

$$
g\Psi(\alpha,\pi)=\mathrm{C}_0(\mathrm{ch}\,\alpha+1)+\frac{2\mu\,\mathrm{v}_0}{1-\nu}\mathrm{sh}\,\alpha \tag{31}
$$

Подставляя значения $\Psi(\alpha,\pi)$ из (30) в (31) и обращая полученный тригонометрический ряд, получим

$$
2\delta_m Z_m=[1-(-1)^m]\left(\frac{\mu\,\mathrm{v}_0}{1-\nu}-\pi Y_0\right),\quad (m=1,2,\ldots)
$$
$$
C_0=0,\quad X_0=-\frac{\mu\,\mathrm{v}_0}{\pi(1-\nu)} \tag{32}
$$

Точные значения постоянных X_k и Y_k $(k=1,2,\ldots)$ можно получить из (22) и (23) с учетом (32). Значения постоянных X_0, Y_0 и c_0 определяются из последних двух уравнений (25) с учетом (32).

Таким образом, в этом случае задача решается точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: ГТТИ. 1950.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. // Докторская диссертация. Ленинград: 1979. 346 с.
6. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. Киев: Академпериодика, 2002. 342 с.
7. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. Думка, 1978. 311 с.
8. Григорян С.С., Тер-Петросян Г.В. Определение роста граничной трещины полости полупространства// IV Всесоюзная конференция “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Одесса: 1989. 89 с.

Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
6.02.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ИЗ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА В СОСТАВНОЕ УПРУГОЕ ПРОСТРАНСТВО*

Григорян Э.Х., Агаян К.Л.

Ключевые слова: волновод, составное пространство, контакт, функциональное уравнение, волны Лява, асимптотика.

Key words: waveguide, composite, contact, functional equation, Love’s waves, asymptotics.

Է. Խ. Գրիգորյան, Կ.Լ. Աղայան

Սահքի հարթ ալիքի ցրումը առաձգական ալիքատարից առաձգական տարածությունում

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական սալից (ալիքատարից) դեպի առաձգական տարածություն սահքի հարթ ալիքի ճառագայթման խնդիրը: Սալը տեղադրված է տարածության մեջ և միացված է նրա հետ մասնակիորեն: Սալի չմիացված մասից տարածվում է սահքի հարթ ալիքը և ճառագայթվում է բաղադրյալ տարածությունում: Խնդրի լուծումը բերվում է երկու անկախ Վիներ-Հոպֆի տիպի ֆունկցիոնալ հավասարումների, որոնք լուծվում են ֆակտորիզացիայի մեթոդով: Ստացված են վերջավոր արտահայտություններ, սալի և տարածության յուրաքանչյուր մասում ալիքային դաշտը որոշելու համար: Բերված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք ներկայացնում են ալիքային դաշտը հեռավոր տիրույթներում և կոնտակտային տեղամասերի ծայրակետերի շրջակայքում: Այդ բանաձևերից հետևում է ա) սալի և տարածության ալիքային թվերի որոշակի հարաբերությունների դեպքում սալում ծավալային ալիքի տարածման վարքը փոքրանում է և համընկնում է համասեռ դեպքի հետ, բ) ճառագայթված ծավալային ալիքը սալի մեջ տարածվում է տարածությունում սահքի ծավալային ալիքի տարածման արագությամբ:

E.Kh. Grigoryan, K.L. Agayan

Radiation of a Plane Shear Wave from an Elastic Waveguide to a Composite Elastic Space

The radiation of a plane shear wave from an elastic strip (waveguide) to an elastic space is investigated in this paper. The strip is embedded into a space and is partially bonded with it. A given plane shear wave propagates from the free part of the strip and radiates into the composite space. The problem’s solution is led to a system of two uncoupled functional Wiener-Hopf type equations which are solved via the method of factorization. Closed form expressions are obtained which determine the wavefield in all the parts of the strip and space. Asymptotic expressions are provided which represent the wavefield in the far field and in the neighborhood of the contact zones. From these formulas it follows that: a) in the cases of several values of the ratio of the wave numbers of the strip and space the order of vanishing of the volume wave in the strip becomes less and equal to the one in the case of a homogeneous material, b) the radiated volume wave in the strip has a velocity of propagation equal to the volume wave’s velocity in the space.

В работе исследована задача об излучении плоской сдвиговой волны из упругого слоя (волновода) в упругое пространство. Слой вложен в пространство и соединен с ней частично. Со стороны несоединенной части слоя распространяется заданная плоская сдвиговая волна и излучается в составное пространство. Решение задачи сведено к двум независимым функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа, которые решаются методом факторизации. Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в каждой части слоя и пространства. Приведены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах и около концов контактных участков. Из этих формул следует: а) при определенных отношениях волновых чисел слоя и пространства порядок убывания объемной волны в слое уменьшается и совпадает с однородным случаем, б) излученная объемная волна в слое распространяется со скоростью распространения объемной волны в пространстве.

---

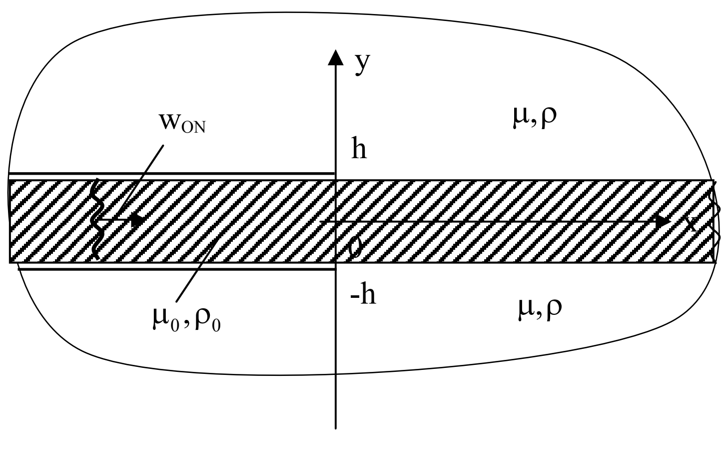
* Основные результаты предлагаемой статьи были доложены на V Международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” 1-7 октября, Горис, 2005.

Изучение распространения волн в упругом слое и пространстве было предметом многочисленных исследований, достаточно полный перечень которых можно найти в [1]. В работах [2-5] рассмотрены задачи о распространении сдвиговых волн в составном упругом пространстве.

В настоящей работе исследуется динамическая контактная задача об излучении плоской сдвиговой волны, распространяющейся внутри свободной части упругого волновода (слоя), в составное упругое пространство. Решение задачи сведено к двум независимым функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа, которые решаются методом факторизации. Следует отметить, что аналогичная задача для однородного пространства рассмотрена в известной монографии [6].

Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в слое и в пространстве. Получены также асимптотические формулы, представляющие амплитуды перемещений в дальных зонах волновода и пространства. При этом, оказывается, что в слое излученная объемная волна распространяется со скоростью распространения объемной волны в пространстве. Приведены асимптотические формулы, определяющие поведение амплитуд сдвиговых напряжений около концов контактных зон (трещин).

1. Рассмотрим составное упругое пространство, составленное из упругого слоя и двух одинаковых упругих полупространств, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Слой с модулем сдвига μ_0 и плотностью ρ_0, занимающий область $\Omega_0\left(|x| < \infty, |y| \le h, |z| < \infty\right)$, по своим граничным полуплоскостям $\left(x \ge 0, y = \pm h\right)$ соединен (жесткий контакт) с верхним $\Omega_+\left(y > h\right)$ и нижним $\Omega_-\left(y < -h\right)$ полупространствами с одинаковыми упругими характеристиками μ, ρ. Слой и полупространства по полуплоскостям $\left(x \le 0, y = \pm h\right)$ не контактируют и свободны от напряжений (фиг.1).



Фиг.1.

Пусть внутри свободной части волновода $\left(x < 0\right)$ по направлению оси Ox движется распространяющаяся плоская сдвиговая волна с амплитудой

$$w_{ON}(x,y) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos\frac{\pi N}{2h}(y-h), \quad -\infty < x < \infty, \quad |y| \le h \tag{1.1}$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0^2 - (\pi N/2h)^2}, \qquad k_0 > \pi N/2h \tag{1.2}$$

$\cos \pi N(y-h)/2h$ – собственные функции краевой задачи уравнения Гельмгольца для слоя со свободными границами. Здесь A_N – постоянная, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число, $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ – скорость распространения сдвиговой волны в слое, ω –частота колебаний.

Гармонический множитель $e^{-i\omega t}$, как обычно, опускается, т.е. задача решается в амплитудах.

Считается, что других волн, бегущих по волноводу, нет. Число N может быть одним из чисел 0,1,2,…, таким, что $N < 2hk_0/\pi$, которое обеспечивает распространяемость волн (1.1) по волноводу. Среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить излученное волновое поле в слое и в пространстве.

Уравнения движения в амплитудах перемещений имеют вид [7]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{Bmatrix} k^2 \\ k_0^2 \end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} w \\ w_0 \end{Bmatrix} = 0, \quad (x,y) \in \begin{Bmatrix} \Omega_- \cup \Omega_+ \\ \Omega_0 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

где $w(x,y)$ и $w_0(x,y)$ – амплитуды перемещений в областях $\Omega_- \cup \Omega_+$ и Ω_0, соответственно. $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в пространстве.

Для формирования граничных условий заметим, что на свободных поверхностях отсутствуют напряжения τ_{yz}, а на поверхностях соприкасания выполняются условия полного контакта. Так что граничные и контактные условия при помощи $w(x,y)$ и $w_0(x,y)$ запишутся в виде:

$$\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=\pm h\mp 0} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pm h\pm 0} = 0, \qquad x < 0 \tag{1.4}$$

$$w(x, \pm h \pm 0) = w_0(x, \pm h \mp 0), \qquad x \ge 0 \tag{1.5}$$

$$\mu\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pm h\pm 0} = \mu_0\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=\pm h\mp 0}, \qquad x > 0 \tag{1.6}$$

Решение задачи должно удовлетворять также условию уходящей волны, к которому обратимся в дальнейшем.

Здесь имелось в виду, что [7]

$$\tau_{yz}(x,y) = \mu\,\partial w/\partial y, \quad \tau_{xz}(x,y) = \mu\,\partial w/\partial x \tag{1.7}$$

Перейдем к решению краевой задачи (1.3)-(1.6). Поскольку в областях Ω_- и Ω_+ имеются только излученные волны, то решение волнового уравнения (1.3), представляющее на бесконечности уходящие волны, после преобразования Фурье по переменной x можно представить в виде

$$\bar{w}(\sigma, y)=\begin{cases} A(\sigma)e^{-\gamma y}, & y\geq h \\ B(\sigma)e^{\gamma y}, & y\leq -h \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\bar{w}(\sigma, y)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)e^{-i\sigma x}dx, \qquad \gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2} \tag{1.9}$$

где $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$–неизвестные функции. При этом, функция из (1.9) $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $(-\infty<\sigma<\infty)$, т.е. действительная ось обходит точки ветвления $\sigma=-k$ сверху, а точку $\sigma=k$ – снизу [6].

В области Ω_0 положим, как обычно,

$$W_0(x,y)=w_0(x,y)-w_{0N}(x,y), \qquad -\infty<x<\infty \tag{1.10}$$

где $w_{0N}(x,y)$ дается (1.1).

Подставляя (1.10) в (1.3), после преобразования Фурье ее решение представим в виде:

$$\begin{aligned}\overline{W_0}(\sigma,y)&=\bar{w}_0(\sigma,y)-2\pi A_N\delta(\sigma+\gamma_N)\cdot\cos\frac{\pi N}{2h}(y-h)=\\ &=C_0(\sigma)\operatorname{ch}(\gamma_0 y)+D_0(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma_0 y), \qquad |y|\leq h\end{aligned} \tag{1.11}$$

где $C_0(\sigma)$ и $D_0(\sigma)$– неизвестные функции, $\delta(\sigma)$–известная функция Дирака, а

$$\gamma_0(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_0^2} \tag{1.12}$$

Введем функции

$$f^+(x)=\theta(x)f(x), \quad f^-(x)=\theta(-x)f(x) \tag{1.13}$$

где $\theta(x)$– функция Хевисайда.

Применив теперь преобразование Фурье к граничным условиям (1.4)-(1.6), с учетом (1.13), и удовлетворяя им при помощи (1.8) и (1.11), приходим к следующим двум функциональным уравнениям типа Винера-Хопфа:

$$\bar{S}^-(\sigma)+\bar{K}_{11}(\sigma)\bar{D}'^+(\sigma)=-\pi A_N(1+\cos\pi N)\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{1.14}$$

$$\bar{D}^-(\sigma)+\bar{K}_{22}(\sigma)\overline{S'^+}(\sigma)=-\pi A_N(1-\cos\pi N)\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{1.15}$$

$$\bar{K}_{11}(\sigma)=\frac{\mu_*\overline{K_1}(\sigma)}{h\gamma_0^2\overline{E_1}(\sigma)}, \quad \bar{K}_{22}(\sigma)=\frac{\mu_*\overline{K_2}(\sigma)}{\gamma_0\overline{E_2}(\sigma)}, \quad \mu_*=\frac{(\mu_0+\mu)}{4\mu} \tag{1.16}$$

$$\overline{E_1}(\sigma)=(\gamma_0 h)^{-1}e^{-\gamma_0 h}\operatorname{sh}(\gamma_0 h), \quad \overline{E_2}(\sigma)=e^{-\gamma_0 h}\operatorname{ch}(\gamma_0 h) \tag{1.17}$$

$$\overline{K_1}(\sigma)=L_1(\sigma)/2\mu\mu_*\gamma e^{\gamma_0 h}, \qquad \overline{K_2}(\sigma)=L_2(\sigma)/2\mu\mu_*\gamma e^{\gamma_0 h} \tag{1.18}$$

$$L_1(\sigma)=\mu_0\gamma_0\operatorname{sh}(\gamma_0 h)+\mu\gamma\operatorname{ch}(\gamma_0 h), \quad L_2(\sigma)=\mu_0\gamma_0\operatorname{ch}(\gamma_0 h)+\mu\gamma\operatorname{sh}(\gamma_0 h) \tag{1.19}$$

Неизвестные функции из (1.8) и (1.11) определяются при помощи решений функциональных уравнений (1.14) и (1.15) следующим образом:

$$C_0(\sigma)=\bar{D}'^+(\sigma)/4\gamma_0\operatorname{sh}(\gamma_0 h), \qquad D_0(\sigma)=\bar{S}'^+(\sigma)/4\gamma_0\operatorname{ch}(\gamma_0 h) \tag{1.20}$$

$$A(\sigma)+B(\sigma)=-\mu_0\bar{D}'^+(\sigma)e^{\gamma h}/\mu\gamma, \quad A(\sigma)-B(\sigma)=-\mu_0\bar{S}'^+(\sigma)e^{\gamma h}/\mu\gamma \tag{1.21}$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функциональных уравнений (1.14) и (1.15), к которым можно применить стандартный метод Винера-Хопфа [6,8].

Прежде чем перейти к решению функциональных уравнений, отметим, что в дальнейшем (в основном) будем предполагать, что $k < k_0$, т.е. будем придерживаться в пределах появления локализованных (поверхностных) волн [7].

Функции $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ из (1.19) имеют действительные корни при $k < \sigma < k_0$ [7,9,10]. Обозначим эти корни $\sigma_m^{(1)}$ и $\sigma_m^{(2)}$, соответственно, т.е. $L_1\left(\sigma_m^{(1)}\right) = 0,\ L_2\left(\sigma_m^{(2)}\right) = 0$. Число этих корней и их расспределение на вещественной оси существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_0^2 - k^2}$.

Исследования показывают, что если

$$(n-1)\pi < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \le (2n-1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

то $L_1(\sigma)$ имеет ровно $2n$ корней, расположенных на интервалах

$$(hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 < \left(\pm h\sigma_m^{(1)}\right)^2 < (hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2 \qquad m = 1,2,\ldots,n \tag{1.22}$$

при этом, $(hk)^2 > (hk_0)^2 - (2n-1)^2 \pi^2/4$, а $L_2(\sigma)$ имеет $2(n-1)$ корней, расположенных на интервалах

$$(hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2 < \left(\pm h\sigma_m^{(2)}\right)^2 < (hk_0)^2 - (2n-2m-1)^2 \pi^2/4 \qquad n = 2,3,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots,(n-1) \tag{1.23}$$

при этом $(hk)^2 < (hk_0)^2 - (n-1)^2 \pi^2$.

Если же

$$(2n-1)\pi/2 < h\sqrt{k_0^2 - k^2} \le \pi n, \quad n = 1,2,\ldots \tag{1.24}$$

то $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ имеют по $2n$ корней, находящихся, соответственно, на интервалах

$$(hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 < \left(\pm h\sigma_m^{(1)}\right)^2 < (hk_0)^2 - (n-m)^2 \pi^2 \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

при этом, $(hk)^2 < (hk_0)^2 - (2n-1)^2 \pi^2/4$,

$$(hk_0)^2 - (n-m+1)^2 \pi^2 < \left(\pm h\sigma_m^{(2)}\right)^2 < (hk_0)^2 - (2n-2m+1)^2 \pi^2/4 \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{2.25}$$

при этом, $(hk)^2 > (hk_0)^2 - \pi^2 n^2$.

Чтобы удовлетворялось условие уходящей волны, считается, что действительная ось обходит отрицательные корни $\sigma = -\sigma_m^{(i)}$ $(j = 1,2)$ функции $L_j(\sigma)$ сверху, а положительные корни $\sigma = -\sigma_m^{(j)}$ – снизу.

Перейдем теперь к решению функциональных уравнений (1.14) и (1.15). Из (1.16)–(1.18) нетрудно видеть, что точки $\sigma = \pm k_0$ не являются точками ветвления для функций $\overline{K}_{11}(\alpha)$ и $\overline{K}_{22}(\alpha)$. Однако факторизацию $\overline{K}_{11}(\sigma)$ и $\overline{K}_{22}(\sigma)$ целесообразно проводить таким образом, чтобы полученное решение при $k = k_0$ и $\mu = \mu_0$ (однородный случай) в явном виде совпало с решением соответствующей задачи, рассмотренной в [6]. Для этого $\overline{K}_{11}(\sigma)$ и $\overline{K}_{22}(\sigma)$ представлены в виде (1.16), где уже точки $\sigma = \pm k_0$ являются точками ветвления для $\overline{K}_j(\sigma)$ и $\overline{E}_j(\sigma)$ $(j = 1{,}2)$. Так что, при факторизации $\overline{K}_j(\sigma)$ и $\overline{E}_j(\sigma)$ предполагается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$, и $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} = -i\sqrt{k_0^2 - \sigma^2}$.

Рассмотрим сначала уравнение (1.14). Факторизуем $\overline{K}_1(\sigma)$ из (1.18), представив ее в виде [6]

$$\overline{K}_1(\sigma) = \overline{K}_1^+(\sigma) \cdot \overline{K}_1^-(\sigma) \tag{1.26}$$

где $\overline{K}_1^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) > 0$, а $\overline{K}_1^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) < 0, \quad \alpha = \sigma + i\tau$. В (1.26)

$$\begin{gathered}
\overline{K}_1^+(\sigma) = \exp\left(\overline{F}_1^+(\sigma)\right), \qquad \overline{K}_1^-(\sigma) = \exp\left(\overline{F}_1^-(\sigma)\right) \\
\overline{F}_1^+(\sigma) = \int\limits_0^\infty F_1(x) e^{i(\sigma+io)x} dx, \quad \overline{F}_1^-(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^0 F_1(x) e^{i(\sigma+io)x} dx \\
F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \ln \overline{K}_1(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = \\
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \ln\left[1 + \frac{\mu_0(\gamma_0 - \gamma) + (\mu\gamma - \mu_0\gamma_0) e^{-2\gamma_0 h}}{(\mu + \mu_0)\gamma}\right] e^{-i\sigma x} d\sigma
\end{gathered} \tag{1.27}$$

Из (1.18) и (1.27) следует, что при $|\sigma| \to \infty$ $\overline{K}_1(\sigma) \to 1$, а $\ln \overline{K}_1(\sigma) = O\left(|\sigma|^{-2}\right)$. Следовательно, $F(x) \sim O(1)$ при $|x| \to 0$. Тогда из (1.27) следует, что $\overline{F}^\pm(\sigma) = O\left((\sigma \pm i0)^{-1}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, функции $\overline{K}_1^\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности [6].

С другой стороны, известна явная факторизация функции $\overline{E}_1(\sigma)$ из (1.17) [6]

$$\overline{E}_1(\sigma) = (\gamma_0 h)^{-1} e^{-\gamma_0 h} \operatorname{sh}(\gamma_0 h) = \overline{E}_1^+(\sigma) \overline{E}_1^-(\sigma) \tag{1.28}$$

$$\overline{E}_1^\pm(\sigma) = \exp\left[\mp\chi_1(\sigma) - \overline{T}_\pm(\sigma)\right] \prod_{n=1}^\infty \left(1 \mp \frac{ia_n\sigma}{\sqrt{1 - k_0^2 a_n^2}}\right) e^{\pm i a_n \sigma}, \quad a_n = \frac{h}{\pi n}$$

$$\chi_1(\sigma) = -\frac{ih\sigma}{\pi}\left(1 + C + \ln\frac{2\pi}{hk_0}\right) + \frac{\sigma h}{2}$$

$$\overline{T}_+(\sigma) = \frac{ih\sqrt{\sigma^2 - k_0^2}}{\pi}\ln\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}}{k_0}, \quad \overline{T}_-(\sigma) = \overline{T}_+(-\sigma) \tag{1.29}$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

Здесь под $\ln\alpha$ понимается ветвь, для которой $\ln(-1) = i\pi$. При этом, функция $\overline{E}_1^{\pm}(\sigma)$ из (1.28) стремится к нулю как $(\sigma + i0)^{-1/2}$ при $|\sigma| \to \infty$.

Подставляя (1.26) и (1.28) в (1.14) и используя представление

$$2\pi i\delta(\sigma + \gamma_N) = (\sigma + \gamma_N - i0)^{-1} - (\sigma + \gamma_N + i0)^{-1} \tag{1.30}$$

где первое слагаемое регулярно в нижней полуплоскости, а второе – в верхней, получим

$$\overline{M}^-(\sigma) = \frac{(\sigma - k_0)\overline{E}_1^-(\sigma)}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\overline{S}^-(\sigma) + \frac{iA_N(1 + \cos\pi N)}{2}\frac{k_0 + \gamma_N}{\sigma + \gamma_N - i0}\frac{\overline{E}_1^-(-\gamma_N)}{\overline{K}_1(-\gamma_N)} =$$

$$= \mu_*\frac{\overline{K}_1^+(\sigma)\overline{D}'^+(\sigma)}{h(\sigma + k_0)\overline{E}_1^+(\sigma)} + \frac{A_N(1 - \cos\pi N)}{2i}\frac{\overline{E}_1^-(-\gamma_N)}{\overline{K}_1(-\gamma_N)}\frac{k_0 + \gamma_N}{\sigma + \gamma_N + i0} = \overline{M}^+(\sigma) \tag{1.31}$$

Следуя [8,11], применим обратное преобразование к (1.31), получим

$$M^+(x) = M^-(x), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.32}$$

которое может иметь место, если только

$$M^+(x) = M^-(x) = \sum_{k=0}^{m} l_k\delta^{(k)}(x) \tag{1.33}$$

где $\delta^{(k)}(x) - k$ -тая производная $\delta(x)$ [11,12].

Применив к (1.32) обобщенное преобразование Фурье, с учетом (1.33) получим

$$\overline{M}^+(\sigma) = \overline{M}^-(\sigma) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k l_k\sigma^k \tag{1.34}$$

Теперь, имея в виду поведение функций $\overline{K}_1^{\pm}(\sigma)$ и $\overline{E}_1^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ и порядок убывания неизвестных функций $\overline{S}^-(\sigma)$ и $\overline{D}'^+(\sigma)$ [1,13]:

$$\overline{S}^-(\sigma) = O\left(|\sigma|^{-1}\right), \quad \overline{D}'^+(\sigma) = O\left(|\sigma|^{-1/2}\right), \ |\sigma| \to \infty \tag{1.35}$$

из (1.31) и (1.34) получим, что $l_k = 0\left(k = \overline{0, m}\right)$, т.е.

$$\overline{M}^+(\sigma) = \overline{M}^-(\sigma) \equiv 0 \tag{1.36}$$

Следовательно, из (1.31) получим окончательное решение функционального уравнения (1.14) в виде

$$\overline{D}'^+(\sigma) = \frac{iA_N(1 + \cos\pi N)}{2\mu_*(k_0 + \gamma_N)^{-1}}\frac{h\overline{E}_1^-(-\gamma_N)}{\overline{K}_1^-(-\gamma_N)}\frac{(\sigma + k_0)}{(\sigma + \gamma_N + i0)}\frac{\overline{E}_1^+(\sigma)}{\overline{K}_1^+(\sigma)} \tag{1.37}$$

Аналогичным путем решение функционального уравнения (1.15) представляется в виде

$$\overline{S}'^{+}(\sigma)=\frac{iA_N(1-\cos\pi N)}{2\mu_*}\frac{\sqrt{k_0+\gamma_N}\,\overline{E}_2^{-}(-\gamma_N)}{\overline{K}_2^{-}(-\gamma_N)}\frac{\sqrt{\sigma+k_0}}{(\sigma+\gamma_N+i0)}\frac{\overline{E}_2^{+}(\sigma)}{\overline{K}_2^{+}(\sigma)} \tag{1.38}$$

где $\overline{K}_2^{+}(\sigma)$ и $\overline{K}_2^{-}(\sigma)$ определяются формулами, аналогичными (1.26) и (1.27), заменяя в них индекс “1” на “2”, притом,

$$F_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{\mu_0(\gamma_0-\gamma)-(\mu\gamma-\mu_0\gamma_0)e^{-2\gamma_0 h}}{(\mu+\mu_0)\gamma}\right]e^{-i\sigma x}dx \tag{1.39}$$

Функции $\overline{E}_2^{\pm}(\sigma)$ $\left(\overline{E}_2(\sigma)=\overline{E}_2^{+}(\sigma)\overline{E}_2^{-}(\sigma)\right)$ имеют вид [6]

$$\overline{E}_2^{\pm}(\sigma)=\exp\left[\mp\chi_2(\sigma)-\overline{T}_{\pm}(\sigma)\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\mp\frac{ib_n\sigma}{\sqrt{1-k_0^2b_n^2}}\right)e^{\pm ib_n\sigma}$$

$$\chi_2(\sigma)=-\frac{ih\sigma}{\pi}\left(1-C+\ln\frac{\pi}{2hk_0}\right)+\frac{\sigma h}{2},\quad b_n=2h/\pi(2n-1) \tag{1.40}$$

где $\overline{T}_{\pm}(\sigma)$ дается формулой (1.30).

Таким образом, решение поставленной выше задачи дается формулами (1.37) и (1.38), т. к. имея $\overline{D}'^{+}(\sigma)$ и $\overline{S}'^{+}(\sigma)$, при помощи (1.20) и (1.21) можем определить неизвестные A,B,C_0,D_0 и, тем самым, искомое решение.

Из (1.27) и (1.39) следует, что $\overline{F}_j^{+}(\sigma)=\overline{F}_j^{-}(-\sigma)$ и, следовательно, $\overline{K}_j^{+}(\sigma)=\overline{K}_j^{-}(-\sigma)$ $(j=1,2)$. При этом, $\overline{F}_j^{+}(\sigma)$ можно вычислить по формуле

$$\overline{F}_j^{+}(\sigma)=\frac{1}{2}\ln\overline{K}_j(\sigma)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{K}_j(t)\frac{dt}{t-\sigma},\quad j=1,2 \tag{1.41}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Переходим к определению излученного волнового поля. Отметим, что здесь целесообразно отдельно рассматривать случаи четных и нечетных N.

а) Если N четное число, то бегущая по волноводу волна является четной относительно $y=0$ функцией (четная задача) и $1+\cos\pi N=2,\ 1-\cos\pi N=0$. Тогда из (1.38) следует, что $\overline{S}'^{+}(\sigma)=0$, а из (1.20) и (1.21) получим

$$\begin{gathered}C_0(\sigma)=\overline{D}'^{+}(\sigma)/4\gamma_0\,\mathrm{sh}(\gamma_0 h),\quad D_0(\sigma)=0\\ A(\sigma)=B(\sigma)=-\mu_0 e^{\gamma h}\overline{D}'^{+}(\sigma)/2\mu\gamma\end{gathered} \tag{2.1}$$

Подставляя эти выражения в (1.8) и (1.11) с учетом (1.10) и (1.39), после обратного преобразования получим выражение для амплитуды перемещений в виде

$$w(x,y)=\frac{-iA_N}{4\pi\mu_*}\bar{M}_1^+(\gamma_N)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{M}_1^+(\sigma)e^{\gamma(h-|y|-i\sigma x)}}{\gamma(\sigma)h(\sigma+\gamma_N+i0)}d\sigma \text{ при } |y|\geq h \tag{2.2}$$

$$w_0(x,y)=w_{0N}(x,y)+\frac{iA_N}{4\pi\mu_*}\bar{M}_1^+(\gamma_N)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{M}_1^+(\sigma)\operatorname{ch}(\gamma_0 y)e^{-i\sigma x}}{h(\sigma+\gamma_N+i0)\gamma_0\operatorname{sh}(\gamma_0 h)}d\sigma \tag{2.3}$$

при $-h\leq y\leq h$, где

$$\overline{M}_1^\pm(\sigma)=h(\sigma\pm k_0)\overline{E}_1^\pm(\sigma)/\overline{K}_1^\pm(\sigma) \tag{2.4}$$

б) Если N –нечетное число, то бегущая по волноводу волна является нечетной относительно $y=0$ функцией (нечетная задача) и $1+\cos\pi N=0$, $1-\cos\pi N=2$. Тогда, аналогичным путем вместо (2.2) и (2.3) соответственно, будем иметь

$$w(x,y)=\frac{A_N\operatorname{sgn}y}{4\pi\mu_*}\bar{M}_2^+(\gamma_N)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{M}_2^+(\sigma)e^{\gamma(h-|y|-i\sigma x)}}{\gamma(\sigma+\gamma_N+i0)h}d\sigma \text{ при } |y|\geq h \tag{2.5}$$

$$w_0(x,y)=w_{0N}(x,y)-\frac{A_N\overline{M}_2^+(\gamma_N)}{4\pi\mu_*}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{M}_2^+(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma_0 y)e^{-i\sigma x}}{(\sigma+\gamma_N+i0)h\gamma_0\operatorname{ch}(\gamma_0 y)}d\sigma \tag{2.6}$$

при $-h\leq y\leq h$, где

$$\overline{M}_2^\pm(\sigma)=h(\sigma\pm k_0)\overline{E}_2^\pm(\sigma)/\overline{K}_2^\pm(\sigma) \tag{2.7}$$

Таким образом, решение задачи в общем случае представляется в виде суммы решений (2.2) и (2.5) в областях $|y|\geq h$, и суммы решений (2.3) и (2.6) в области $-h\leq y\leq h$. Отметим, что при $\mu=\mu_0$, $k=k_0$, т.е. для однородного случая решения (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6) точно совпадают с соответствующими решениями, приведенными в [6].

Для вычисления интегралов по вещественной оси, входящих в формулы (2.2)-(2.6), переходим на комплексную плоскость, разрезанную указанным на фиг.2 образом.

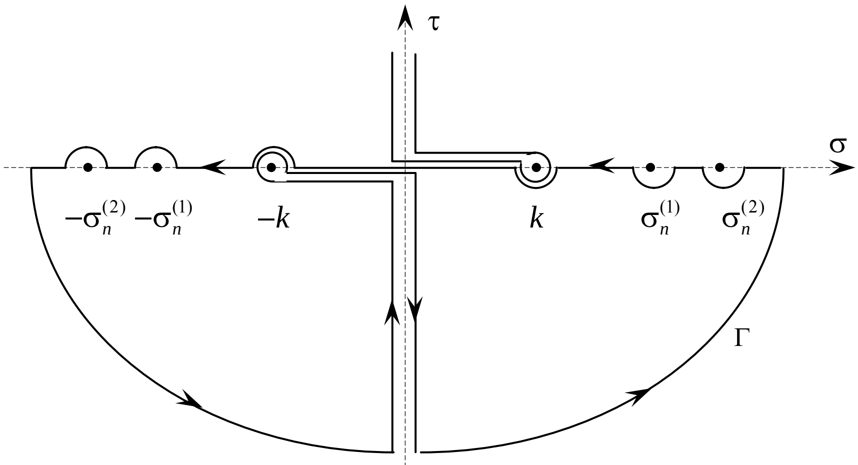
Рассмотрим область $-h\leq y\leq h,\ x>0$. Для этой области путь интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ (фиг.2). Следовательно, в этом случае, в интегралах (2.3) и (2.6) при помощи формул (1.17)-(1.19), (1.26) и (1.30) следует перейти от “+” функции к “-“ функциям. После этих преобразований перемещение $w_0(x,y)$ для $x>0$ можно представить в виде

$$w_0(x,y)=-\frac{iA_{2N}\overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu\gamma(\sigma)\operatorname{ch}(\gamma_0 y)e^{-i\sigma x}}{\overline{M}_1^-(\sigma)L_1(\sigma)(\sigma+\gamma_{2N}-i0)}d\sigma- \tag{2.8}$$

$$-\frac{A_{2N+1}\overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu\gamma(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma_0 y)e^{-i\sigma x}}{\overline{M}_2^-(\sigma)L_2(\sigma)(\sigma+\gamma_{2N+1}-i0)}d\sigma,\quad x>0,\ -h\leq y\leq h$$

где $\overline{M}_j^\pm(\sigma)$ $(j=1,2)$ даются формулами (2.4) и (2.7). Отметим, что полюс в точке $\alpha=-(\sigma+i0)$ в интегралах (2.3) и (2.6) вследствие представления (1.30), всегда дает составляющая, которая гасит подающую волну. Этим и обусловлено отсутствие падающей волны в $w_0(x,y)$ (2.8).

В знаменателях подынтегральных выражений (2.8) входят функции $L_1(\sigma)$ и



Фиг.2

$L_2(\sigma)$, задаваемые формулами (1.9). Функции $L_j(\alpha)$ $(i=1{,}2)$ очевидно не имеют чисто мнимых корней [6,9]. Они не могут иметь также комплексных корней в разрезанной комплексной плоскости (фиг.2), поскольку, если полагать, что в первой четверти $\alpha=\alpha_0^{(j)}$, $(j=1{,}2)$ является комплексным корнем $L_j(\alpha)$, то тогда и $\overline{\alpha}_0^{(j)}$ будет корнем $L_j(\alpha)$, так как в этом случае имеем $\overline{\sqrt{\alpha^2-k^2}}=\sqrt{\overline{\alpha}^2-k^2}$. Но тогда нетрудно убедиться, что поле перемещений имеет составляющее в виде приходящей волны из "+" бесконечности, т. е. нарушается физический смысл задачи.

Таким образом, подынтегральные функции в (2.8) внутри контура интегрирования Γ (фиг.2.) имеют только простые полюса в точках $\sigma=-\sigma_m^{(i)}(i=1{,}2)$, т.е. в отрицательных действительных корнях функции $L_i(\sigma)$, о которых было сказано выше.

Имея в виду эти замечания, по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.8) получим следующее представление амплитуд перемещений в рассматриваемой области:

$$w_0(x,y)=-\frac{A_{2N}\overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{\pi i\lambda^{-1}}\int_0^\infty\frac{\left(\overline{M}_1^-(-i\tau)\right)^{-1}\alpha\alpha_0\sin(h\alpha_0)\cos(\alpha_0 y)}{\alpha_0^2\sin^2(h\alpha_0)+\lambda^2\alpha^2\cos^2(h\alpha_0)}\frac{e^{-\tau x}d\tau}{\gamma_{2N}-i\tau}+$$

$$+\frac{A_{2N+1}\overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\pi\lambda^{-1}}\int_0^\infty\frac{\left(\overline{M}_2^-(-i\tau)\right)^{-1}\alpha\alpha_0\cos(\alpha_0 h)\sin(\alpha_0 y)e^{-i\sigma x}}{\alpha_0^2\cos^2(\alpha_0 h)+\lambda^2\alpha^2\sin^2(\alpha_0 h)}\frac{e^{-\tau x}d\tau}{\gamma_{2N+1}-i\tau}-$$

$$-\frac{A_{2N}}{\pi\lambda^{-1}}\overline{M}_1^+(\gamma_{2N})\int_{-k}^0\frac{\left(\overline{M}_1^-(\sigma)\right)^{-1}\beta\beta_0\sin(h\beta_0)\cos(y\beta_0)}{\beta_0^2\sin^2(h\beta_0)+\lambda^2\beta^2\cos^2(h\beta_0)}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\gamma_{2N}+\sigma}+$$

$$+\frac{iA_{2N+1}}{\pi\lambda^{-1}}\overline{M}_2^+(\gamma_{2N+1})\int_{-k}^0\frac{\left(\overline{M}_2^-(\sigma)\right)^{-1}\beta\beta_0\cos(h\beta_0)\sin(y\beta_0)}{\beta_0^2\cos^2(h\beta_0)+\lambda^2\beta^2\sin^2(h\beta_0)}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\gamma_{2N}+\sigma}+\Lambda(x,y)$$

$$x>0,\quad -h\le y\le h \tag{2.9}$$

где

$$\alpha=\sqrt{k^2+\tau^2},\ \alpha_0=\sqrt{k_0^2+\tau^2},\ \beta=\sqrt{k^2-\sigma^2},\ \beta_0=\sqrt{k_0^2-\sigma^2} \tag{2.10}$$

$$\Lambda(x,y)=\frac{A_{2N}\overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m^{(1)}}{\sigma_m^{(1)}-\gamma_{2N}}\cos\left(\sqrt{k_0^2-\left(\sigma_m^{(1)}\right)^2}\,y\right)e^{i\sigma_m^{(1)}x}-$$

$$-\frac{A_{2N+1}\overline{M}_2^+(\gamma_{2N})}{2\pi}\sum_{m=1}^{n_1}\frac{a_m^{(2)}}{\sigma_m^{(2)}-\gamma_{2N+1}}\sin\left(\sqrt{k_0^2-\left(\sigma_m^{(2)}\right)^2}\,y\right)e^{i\sigma_m^{(2)}x} \tag{2.11}$$

$$a_m^{(j)}=\frac{\mu\sqrt{\left(\sigma_m^{(j)}\right)^2-k^2}}{\overline{M}_j^-\left(-\sigma_m^{(j)}\right)L_j'\left(-\sigma_m^{(j)}\right)},\quad L_j'(\sigma)=\partial L_j/\partial\sigma\quad (j=1,2) \tag{2.12}$$

Здесь $n_1=n-1$ при $(n-1)\pi<h\sqrt{k_0^2-k^2}\le\frac{(2n-1)\pi}{2}$ и $n_1=n$ при $(2n-1)\pi/2<h\sqrt{k_0^2-k^2}\le\pi n,\quad \lambda=\mu/\mu_0$.

Следует отметить, что в (2.9) составляющая $\Lambda(x,y)$ представляет сумму локализованных излученных волн, распространяющихся по несвободной части слоя. При этом, волновым числам $\sigma_m^{(1)}$ соответствуют известные поверхностные волны Лява.

Определение перемещений в дальней $x\to+\infty$ зоне рассматриваемой области сводится к определению асимптотических поведений интегральных составляющих из (2.9) при $x\to+\infty$. Не останавливаясь здесь (и в дальнейшем) на этих довольно-таки громоздких вычислениях, приведем окончательные результаты, определяющие волновое поле в дальней $x\to+\infty$ зоне. Оно дается формулой

$$w_0(x,y)=\left(C_{2N}\cos\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,y\right)-C_{2N+1}\sin\left(\sqrt{k_0^2-k^2}\,y\right)\right)e^{i\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)}\times$$
$$\times\left((kx)^{-3/2}+O\left(x^{-5/2}\right)\right)-\Lambda(x,y),\qquad -h\le y\le h,\qquad x\to+\infty \tag{2.13}$$

Здесь $\Lambda(x,y)$ дается (2.11), а

$$C_{2N}=\frac{A_{2N}\lambda\ \overline{M}_1^+(\gamma_{2N})}{2\pi i\overline{M}_1^+(k)}\sqrt{\frac{2\pi k}{k_0^2-k^2}}\frac{1}{(\gamma_{2N}-k)\sin\left(h\sqrt{\left(k_0^2-k^2\right)}\right)} \tag{2.14}$$

$$C_{2N+1}=\frac{A_{2N+1}\lambda\ \overline{M}_2^+(\gamma_{2N})}{2\pi i\overline{M}_2^+(k)}\sqrt{\frac{2\pi k}{k_0^2-k^2}}\frac{1}{(\gamma_{2N+1}-k)\cos\left(h\sqrt{\left(k_0^2-k^2\right)}\right)}$$

Из (2.13) следует, что при $|y|\le h,\ \ x\to+\infty$ волновое поле представляется в виде суммы сдвиговой объемной волны и конечного числа локализованных волн. Так что неволновые части из (2.9) в асимптотике сокращаются и в итоге остается волновая часть. Из (2.13) также следует, что объемная сдвиговая волна (2.13) в слое движется со скоростью распространения сдвиговой волны в пространстве, которое означает, что оно в асимптотике $(x\to+\infty)$ “диктует” свою скорость распространения объемной волны в слое.

В заключении данного пункта следует отметить, что представление (2.13) получено при условиях

$$h\sqrt{k_0^2-k^2}\ne\pi(n-1),\quad h\sqrt{k_0^2-k^2}\ne\frac{\pi(2n-1)}{2},n=1,2,\dots.$$

В этих особых случаях, когда

$$h\sqrt{k_0^2-k^2}=\pi(n-1)\,\text{или}\ h\sqrt{k_0^2-k^2}=\pi(2n-1)/2,\quad n=1,2,\dots \tag{2.15}$$

из (2.14) следует, что $C_N\to\infty$ (явление типа резонанса) и, следовательно, представление (2.13) уже непригодно. Исследование этих особых случаев показало, что асимптотика объемной волны в рассматриваемой $-h\le y\le h,\ \ x\to+\infty$ области дается формулами

$$\left[w_0(x,y)\right]_{\text{об}}=\frac{A_{2(n-1)}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^{n-1}\,\overline{M}_1^+\left(\gamma_{2(n-1)}\right)}{\overline{M}_1^+(k)}\frac{hk}{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{kx}}+O\left(x^{-3/2}\right)\right)\times$$
$$\times e^{i(kx-\pi/4)}\cos\frac{\pi(n-1)}{h}y \tag{2.16}$$

при $h\sqrt{k_0^2-k^2}=\pi(n-1),\quad n=1,2,\dots,$

$$\left[w_0(x,y)\right]_{\text{об}} = A_{2n-1}(-1)^n \frac{\bar{M}_2^+\left(\gamma_{2(n-1)}\right)}{\sqrt{2\pi}\bar{M}_2^+(k)} \frac{hk}{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{kx}} + O\left(x^{-3/2}\right)\right)\times$$
$$\times e^{i(kx-\pi/4)} \sin\frac{\pi(2n-1)}{2h} y \tag{2.17}$$

при $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \dfrac{\pi(2n-1)}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Таким образом, в указанных (2.15) особых случаях амплитуда объемной волны в слое имеет порядок убывания $O\left(x^{-1/2}\right)$ (подобно однородному случаю) при $x \to +\infty$. При этом, оказывается, что если для некоторого фиксированного n^* $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi\left(n^* - 1\right)$, то поверхностная волна, соответствующая волновому числу $\sigma_{n^*}^{(1)}$, не появляется, а если $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi\left(2n^* - 1\right)/2$, то отсутствует поверхностная волна с волновым числом $\sigma_{n^*}^{(2)}$. По-видимому, за счет этого и снижается порядок убывания объемной волны (2.16) и (2.17) при $x \to \infty$.

3. Волновое поле в области $(-h \le y \le h, \ x < 0)$ определяется суммой решений (2.3) и (2.6). Переходим в разрезанную комплексную плоскость (фиг.2), замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Подынтегральные функции внутри контура интегрирования имеют только простые полюса в точках

$$\xi_m = \sqrt{k_0^2 - (\pi m/h)^2}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\eta_m = \sqrt{k_0^2 - \left(\pi(2m-1)/2h\right)^2}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Тогда, для амплитуды перемещений $w_0(x,y)$ в области $-h \le y \le h, \ x < 0$ получим

$$w_0(x,y) = w_{0N}(x,y) - A_{2N}\frac{2\mu}{\mu+\mu_0}\left[\frac{\bar{E}_1^+(k_0)\bar{E}_1(\gamma_{2N})}{\bar{K}_1^+(k_0)\bar{K}_1^+(\gamma_{2N})}e^{-ik_0x} -\right.$$
$$\left. -\bar{M}_1^+(\gamma_{2N})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m \bar{M}_1^+(\xi_m)}{h\xi_m(\gamma_{2N}+\xi_m)}\cos\left(\frac{\pi m}{h}y\right)e^{-i\xi_m x}\right] + \tag{3.2}$$
$$+A_{2N+1}\frac{2\mu\bar{M}_2^+(\gamma_{2N+1})}{\mu+\mu_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\bar{M}_2^+(\eta_m)}{h\eta_m(\gamma_{2N+1}+\eta_m)}\sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2h}y\right)e^{-i\eta_m x}$$

Здесь w_{0N} – падающая волна, а остальные – отраженные волны.

Из (3.1) следует, что из всех ξ_m и η_m лишь конечные числа вещественны, а остальные – мнимые. Следовательно, в волноводе $(x < 0)$ будут возбуждены конечное число распространяющихся отраженных волн и бесконечное число нераспространяющихся отраженных волн. При этом, из (3.2) видно, что при

$\mu \to 0$, т.е. когда полупространства отсутствуют, то в волноводе остается только падающая волна.

В частном $N = 0$ случае, когда падает одна нулевая волна, и если $2hk_0 < \pi$, то будем иметь только одну распространяющуюся отраженную волну, которая при $x \to -\infty$ имеет вид

$$w_0(x, y)_{\text{отр}} = -A_0 \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \left[\frac{\bar{E}_1^+(k_0)}{\bar{K}_1^+(k_0)} \right]^2 e^{-ik_0 x} \tag{3.3}$$

Для однородного $(\mu = \mu_0,\ k = k_0)$ случая, рассмотренного в [6], получим

$$w_0(x, y)_{\text{отр}} = -A_0 \left[\bar{E}_1^+(k_0) \right]^2 e^{-ik_0 x} \tag{3.4}$$

Коэффициенты при $\exp(-ik_0 x)$ в (3.3) и (3.4) представляют собой коэффициенты отражения. Отношение этих коэффициентов отражения однородной задачи к неоднородному дается формулой

$$\left(\sqrt{\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}} \bar{K}_1^+(k_0) \right)^2 = \\ = \left(\exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{\psi(\sigma) - 1 + (\lambda - \psi(\sigma)) e^{-2k_0 h\sqrt{\sigma^2 - 1}}}{1 + \lambda} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - 1} \right) \right)^2 \tag{3.5}$$

где $\psi(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - 1} / \sqrt{\sigma^2 - \upsilon^2}$, $\upsilon = k/k_0$, $\lambda = \mu/\mu_0$, а интеграл понимается в смысле главного значения.

4. Волновое поле в полупространствах $\Omega_\pm$, как было отмечено, представляется суммой решений (2.2) и (2.5). Для определения асимптотических поведений этих полей в дальних зонах полупространств следует отдельно рассматривать области $x < 0$ и $x > 0$.

Для области $|y| \ge h,\ \ x < 0$ путь интегрирования в разрезанной (фиг.2) комплексной плоскости замыкаем в верхней полуплоскости. Подынтегральные функции в этом случае имеют единственную точку ветвления $\sigma = k$ и не имеют полюса. Переходя затем в полученных интегралах к полярным координатам

$$x = r\cos\theta, \quad |y| - h = r\sin\theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \tag{4.1}$$

при помощи подстановок

$$t(\sigma, \theta) = -\sqrt{k^2 - \sigma^2}\sin\theta + \sigma|\cos\theta| \tag{4.2}$$

$$t(\sigma, \theta) = +\sqrt{k^2 - \sigma^2}\sin\theta + \sigma|\cos\theta| \tag{4.3}$$

получим следующее асимптотическое представление для амплитуды перемещений при $r \to \infty,\ |y| \ge h,\ \ x < 0$:

$$w(x,y)=\frac{2\mu_0}{\sqrt{2\pi}(\mu+\mu_0)}\left[A_{2N}\frac{\bar{M}_1^+\left(k\left|\cos\theta\right|\right)\bar{M}_1^+\left(\gamma_{2N}\right)}{h\left(k\left|\cos\theta\right|+\gamma_{2N}\right)}+\right.$$

$$\left.+iA_{2N+1}\operatorname{sgn}y\frac{\bar{M}_2^+\left(k\left|\cos\theta\right|\right)\bar{M}_2^+\left(\gamma_{2N+1}\right)}{h\left(k\left|\cos\theta\right|+\gamma_{2N+1}\right)}\right]\frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}+O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.4}$$

Отметим, что при $\theta\to\pi$ из (4.4) получим аимптотику амплитуды перемещений граничных точек полупространств $y=|h|\pm 0,\ x\to-\infty$ (берегов трещин). Следовательно, при помощи (3.2) и (4.4) можно определить разность перемещений берегов трещин при $x\to-\infty$.

Для области $|y|\geq h,\quad x>0$ путь интегрирования в разрезанной комплексной плоскости (фиг.2) замыкаем в нижней полуплоскости. Подынтегральные функции в этом случае имеют единственную точку ветвления $\sigma=-k$ и полюса в отрицательных нулях $L_j(\sigma)$, т.е. в точках $\sigma=-\sigma_m^{(j)}\quad(j=1,2)$. Переходя затем к полярным координатам (4.1), при помощи подстановки

$$t(\sigma,\theta)=\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta+\sigma\cos\theta,\ 0<\theta<\pi/2 \tag{4.5}$$

получим следующую асимптотическую формулу для амплитуды перемещений объемной волны, при $r\to\infty,\ |y|>h,\quad x>0$:

$$\left[w(x,y)\right]_{\text{об}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[A_{2N}\frac{\bar{M}_1^+\left(\gamma_{2N}\right)}{\bar{M}_1^+\left(k\cos\theta\right)}\frac{\left(\gamma_{2N}-k\cos\theta\right)^{-1}k}{1+i\dfrac{\mu k\sin\theta\operatorname{ctg}\left(h\sqrt{k_0^2-k^2\cos^2\theta}\right)}{\mu_0\sqrt{k_0^2-k^2\cos^2\theta}}}+\right.$$

$$\left.+A_{2N+1}\operatorname{sgn}y\frac{\bar{M}_2^+\left(\gamma_{2N+1}\right)}{\bar{M}_2^+\left(k\cos\theta\right)}\frac{k\left(\gamma_{2N+1}-k\cos\theta\right)^{-1}}{1-i\dfrac{\mu k\sin\theta\operatorname{tg}\left(h\sqrt{k_0^2-k^2\cos^2\theta}\right)}{\mu_0\sqrt{k_0^2-k^2\cos^2\theta}}}\right]\frac{i\sin\theta}{\sqrt{kr}}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}+$$

$$+O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.6}$$

5. Распределение амплитуды сдвиговых напряжений $\tau_{z\theta}$ около концов контактных линий (около концов трещин) можно получить из (2.8). Оно представляется формулой

$$\tau_{z\theta}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2r}}\cos\theta/2+O(1),\quad r\to 0,\ |\theta|\leq\pi \tag{5.1}$$

где

$$K_{III}=\frac{2\mu\mu_0}{\sqrt{\pi h}\left(\mu+\mu_0\right)}\left[iA_{2N}\bar{M}_1^{+}\left(\gamma_{2N}\right)\operatorname{sgn}y-e^{-i\pi/4}A_{2N+1}\bar{M}_2^{+}\left(\gamma_{2N+1}\right)\right] \qquad (5.2)$$

$r=\sqrt{x^2+\left(|y|-h\right)^2}$, $\bar{M}_i^{\pm}\left(\sigma\right)$ даются формулами (2.4) и (2.7).

Отметим, что при получении асимптотической формулы (5.1) были использованы следующие предельные значения факторизованных функций при $|\sigma|\to\infty$:

$$\bar{K}_i^{\pm}\left(\sigma\right)\to 1, \quad \left(i=1,2\right), \quad \bar{E}_1^{\pm}\left(\sigma\right)\to\frac{e^{\pm\pi/4}}{\sqrt{2h\left(\sigma\pm i0\right)}}, \quad \bar{E}_2^{\pm}\left(\sigma\right)\to\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5.3)$$

где $\left(\sigma\pm i0\right)^{1/2}=\sigma_{+}^{1/2}\pm i\sigma_{-}^{1/2}$, $\qquad \sigma_{\pm}^{1/2}=\theta\left(\pm\sigma\right)|\sigma|^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283с.
2. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Манукян Э.А. Дифракция волн Лява на конечной или бесконечной трещине. /В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 1984. С.13-17.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство. /В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2005. С.19-23.
5. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Саратов: 2005. 330с.
6. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 782с.
8. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. / Уч. записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
9. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.
10. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335с.
11. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965.
12. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 283с.
13. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632-646.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.08.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Минасян А.Ф., Тоноян В.С.

Ключевые слова: упругость, парные интегральные уравнения, сингулярные уравнения.
Key words: elasticity, crack, contact problem, isotropic material, composite.

Հ.Ֆ. Մինասյան, Վ. Ս. Տոնոյան

Ուղղաձիգ կիսաանվերջ ճաքով բաղադրյալ կիսահարթության համար մի կոնտակտային խնդրի մասին

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության կլիսանվերջ երկարությամբ ճեղք ունեցող առաձգական բաղադրյալ կիսահարության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը: Կիսահարությունը կազմված է երկու համասեռ և իզոտրոպ քառորդ հարթություններից, տարբեր առաձգական հատկություններով, որոնց նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին: Նյութերի բաժանման գծի երկայնքով տարված է եզրից վերջավոր հեռավորության վրա գտնվող կիսաանվերջ ճեղք: Կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա կիրառ□ված է կամայական հիմքով կոշտ դրոշմը, այնպես, որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միաժամանակ և նրա դիրքը ճեղքի նկատմամբ անհամաչափ է:

H.F. Minasyan, V.S.Tonoyan

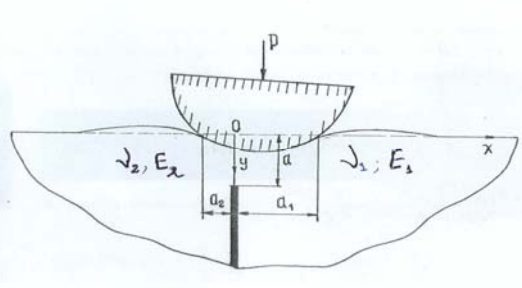
Contact Problem for the Elastic Inhomogeneous half plane with vertical half-infinite cut

Mixed problems for the composite plane and half plane with crack and first main problem for composite plane and half plane with crack as well as the main problem of composite plane were considered in works [1-6].
Consider the solution of the flat elasticity theory contact problem for the inhomogeneous half plane cut along a materials boundary line, starting with the distance “a” from the horizontal boundary.
Half plane consists of the two homogeneous and isotropic quadrants with the different elastic properties and the boundary line of these materials is perpendicular to the half plane boundary.
To the half plane boundary is applied hard die with arbitrary base so that the die is located simultaneously on the both materials and situated nonsymmetrical with respect to cut (Fig.1).
It is suggested that the friction between the die and half plane is absent.

Смешанные задачи для составной плоскости и полуплоскости с трещиной и первая основная задача составной плоскости и полуплоскости рассмотрены в работах [1-6].

Рассмотрим решение контактной задачи плоской теории упругости для неоднородной полуплоскости, разрезанной вдоль линии раздела материалов, начиная с расстояния “a“ от горизонтальной границы.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости.



Фиг.1

К границе полуплоскости приложен жесткий штамп с произвольным основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно разреза (фиг.1).

Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует.

Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. В полубесконечном разрезе отсутствует нормальное давление. На линии раздела материалов вне разреза заданы условия полного контакта. Требуется определить контактные напряжения, действующие под штампом и на стыке двух четверть-плоскостей, а также размеры зоны контакта. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие величину зоны контакта.

Поставленная задача сводится к решению уравнения (a)

$$\Delta^2\Phi_i(x,y)=\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi_i}{\partial y^2\partial x^2}+\frac{\partial^4\phi_i}{\partial y^4}=0 \qquad i=1,2 \tag{a}$$

при следующих граничных условиях контакта или жесткого соединения квадрантов:

$$\begin{gathered}\mathrm{v}_1(x,0)=f_1(x),\quad 0\le x\le a_1,\quad \mathrm{v}_2(x,0)=f_2(x),\quad -a_2\le x\le 0\\ \sigma_y^{(1)}(x,0)=0,\quad a_1<x<\infty,\quad \sigma_y^{(2)}(x,0)=0,\quad -\infty<x<-a_2\end{gathered} \tag{1}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=0,\quad 0<x<\infty,\quad \tau_{xy}^{(2)}(x,0)=0,\quad -\infty<x<0 \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y),\quad \tau_{xy}^{(1)}(0,y)=\tau_{xy}^{(2)}(0,y)\quad 0<y<a\\ u_1(0,y)=-u_2(0,y)\qquad \mathrm{v}_1(0,y)=\mathrm{v}_2(0,y)\qquad 0<y<a\\ \sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)=0,\qquad \tau_{xy}^{(1)}(0,y)=-\tau_{xy}^{(2)}(0,y)=0\quad a<y<\infty\end{gathered} \tag{3}$$

Полагаем, что это решение в области I правого квадранта принимает значение $\Phi_1(x,y)$, а в области левого квадранта – $\Phi_2(x,y)$.

Бигармоническую функцию напряжений для решения рассматриваемой задачи берем в виде (6)

$$\Phi_i(x,y)=\int_0^\infty\left[A_i(\alpha)+(-1)^{i+1}\alpha xB_i(\alpha)\right]\exp\left[(-1)^i\alpha x\right]\cos(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+(-1)^{i+1}\int_0^\infty\left[C_i(\beta)+\beta yD_i(\beta)\right]\exp[-py]\sin\beta x d\beta$$

$$(i=1,2,\quad 0\le y<\infty,\qquad 0\le x<\infty\ \text{ при } i=1;\quad \infty<x\le 0\ \text{ при } i=2)$$

Напряжения и перемещения в кусочно-однородной полуплоскости через бигармоническую функцию будут определены известными формулами из [7].

Удовлетворяя условиям (1), (2) и (3), получим:

$$C_i(\beta)=D_i(\beta),\qquad (i=1,2),\qquad A_2(\alpha)=A_1(\alpha) \tag{4}$$

$$\alpha B_2(\alpha)=2\alpha A_1(\alpha)-\alpha B_1(\alpha)-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta^4D_1(\beta)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}d\beta-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta^4D_2(\beta)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}d\beta \tag{5}$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \beta D_1(\beta)\sin\beta x d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) & 0 \le x \le a_1 \\
\int\limits_0^\infty \beta^2 D_1(\beta)\sin\beta x d\beta = \int\limits_0^\infty \alpha^2\left[A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)\right]e^{-dx} d\alpha & a_1 < x < \infty
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \beta D_2(\beta)\sin\beta x d\beta = -\frac{E_2}{2} f_2(x) & -a_2 \le x \le 0 \\
\int\limits_0^\infty \beta^2 D_2(\beta)\sin\beta x d\beta = -\int\limits_0^\infty \left[A_1(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right]e^{\alpha x} d\alpha & \\
 & -\infty < x < -a_2
\end{cases}
\tag{7}
$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \alpha A_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha = 0 & a < y < \infty \\
\int\limits_0^\infty \alpha\left[A_1^*(\alpha) - B_1^*(\alpha) - E_1^*(\alpha)\right]\sin\alpha y d\alpha = 0 &
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
l_1\int\limits_0^\infty A_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha + l_2\int\limits_0^\infty B_1^*(\alpha)\cos\alpha y d\alpha = \int\limits_0^\infty \beta\left(-l_2 + l_4\beta y\right)\times \\
\times D_1(\beta)e^{-\beta y} l d\beta + 2l_6 y\int\limits_0^\infty \beta^2 D_2(\beta)e^{-\beta y} d\beta \\
l_1\int\limits_0^\infty A_1^*(\alpha)\sin(\alpha y)\,d\alpha - l_5\int\limits_0^\infty B_1^*(\alpha)\sin(\alpha y)\,d\alpha = \frac{8}{\pi E_2}\int\limits_0^\infty \beta^4 D_1(\beta)\,d\beta\times \\
\times\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma y dy}{\left(\gamma^2+\beta^2\right)^2} + \frac{8}{\pi E_2}\int\limits_0^\infty \beta^4 D_2(\beta)\,d\beta g\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma y d\gamma}{\left(\gamma^2+\beta^2\right)^2} \qquad 0 < y < a
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
l_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}, \quad l_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}, \quad l_3 = \frac{1-\nu_2}{E_2} - \frac{1-\nu_1}{E_1}
$$

$$
l_4 = \frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}, \quad l_5 = \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2}, \quad l_6 = \frac{1-\nu_2}{E_2}
\tag{10}
$$

$$
A_1^*(\alpha) = \alpha A_1(\alpha), \quad B_1^*(\alpha) = \alpha B_1(\alpha), \quad B_2^*(\alpha) = \alpha B_2(\alpha), \quad E_1^*(\alpha) = \alpha E_1(\alpha)
$$

$$
\alpha E_1^*(\alpha) = \frac{4}{\pi}\alpha\int\limits_0^\infty \frac{\beta^4 D_1(\beta)d\beta}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}
\tag{11}
$$

Используя результаты работы [3], из парных интегральных уравнений (6) и (7) $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ выразим через функции $A_1^*(\alpha)$, $B_1^*(\alpha)$ и $B_2^*(\alpha)$

$$\beta D_1(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{a_1}\Psi_1(t)J_0(\beta t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)J_0(\beta t)dt \tag{12}$$

$$\beta D_2(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)J_0(\beta\tau)d\tau+\frac{2}{\pi}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)J_0(\beta t)d\tau \tag{13}$$

$$\Psi_1(t)=\frac{E_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{t}\frac{xf_1(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx \tag{14}$$

$$\Psi_2(\tau)=\frac{E_2}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}\frac{xf_2(x)}{\sqrt{\tau^2-x^2}}dx \tag{15}$$

$$\begin{gathered}F_1(t)=t\int_0^{\infty}\alpha^2A_1(\alpha)K_0(\alpha t)d\alpha-2t\int_0^{\infty}\alpha^2B_1(\alpha)K_0(\alpha t)d\alpha+\\+\int_0^{\infty}\alpha^3B_1(\alpha)K_1(\alpha t)d\alpha\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}F_2(\tau)=\tau\int_0^{\infty}\alpha^2A_1(\alpha)K_0(\alpha\tau)d\alpha-2\tau\int_0^{\infty}\alpha^2B_2(\alpha)K_0(\alpha\tau)d\alpha+\\+\tau^2\int_0^{\infty}\alpha^3B_2(\alpha)K_1(\alpha\tau)d\alpha\end{gathered} \tag{17}$$

$J_i(x)$–функции Бесселя первого рода с действительным аргументом, а $K_i(x)$–функции Макдональда.

Для решения системы (8) и (9), учитывая результаты работы [4], применим метод преобразующих операторов. Будем иметь

$$A_1^*(\alpha)=\int_0^{a}H(z)\cos(\alpha z)dz \tag{18}$$

$$B_1^*(\alpha)=\int_0^{a}H(z)\cos(dz)dz-\int_0^{a}s(z)\sin(dz)dz-\alpha E_1^*(\alpha) \tag{19}$$

Подставляя выражения функций $\alpha\mathrm{A}^*(\alpha)$, $\alpha\mathrm{B}_1^*(\alpha)$ из (18) и (19) в уравнение (9), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}s(y)+\dfrac{1}{\pi}\dfrac{l_5}{l_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{H(z)dz}{z-y}=\chi_1(y)\\[2ex] H(y)-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{l_5}{l_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{s(z)dz}{z-y}=\chi_2(y)\end{cases} \tag{20}$$

где $$H(z)=\frac{2}{\pi}\int_z^{a}\frac{\Phi(t)dt}{\sqrt{t^2-z^2}},\quad s(z)=\frac{2}{\pi}z\int_z^{a}\frac{\Psi(t)dt}{\sqrt{t^2-z^2}} \tag{21}$$

$$s(-z)=-s(z),\qquad H(-z)=H(z),\qquad z\in(-a,a)$$

$$\chi_1(y)=\frac{4}{\pi^2}k_3\int_0^{a_1}\frac{\left(t^2+2y^2\right)\Psi(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}}+\frac{4}{\pi^2}k_3\int_{a_1}^{\infty}\frac{\left(t^2+2y^2\right)F_1(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{y^2+t^2}}-$$
$$-\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{l_2E_2}\int_0^{a_2}\frac{\left(t^2+2y^2\right)\Psi_2(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}}-\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{l_2E_2}\int_{a_2}^{\infty}\frac{\left(t^2+2y^2\right)F_2(t)dt}{\left(t^2+y^2\right)\sqrt{t^2+y^2}} \quad (22)$$

$$\chi_2(y)=\frac{4}{\pi^2}k_1y\int_0^{a_1}\frac{\left(2t^2-y^2\right)\Psi_1(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+$$
$$+\frac{4}{\pi^2}k_2y\int_0^{a_2}\frac{\left(2t^2-y^2\right)\Psi_2(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+\frac{4}{\pi^2}k_1y\int_{a_1}^{\infty}\frac{\left(2t^2-y^2\right)F_1(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}+$$
$$+\frac{4}{\pi^2}k_2y\int_0^{a_1}\frac{\left(2t^2-y^2\right)F_2(t)dt}{\left(y^2+t^2\right)^2\sqrt{t^2+y^2}}$$

$$k_1=1+\frac{l_4}{l_5},\qquad k_2=\frac{l_4}{l_5},\quad k_3=\frac{l_2}{l_5}-\frac{2}{E_2l_5}$$

$H(a)=0,\quad s(0)=0,\quad s(a)=0$. Приведя систему (20) аналогичным образом, как в работе [6], получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\lambda(y)+\frac{i}{\pi}\frac{l_5}{l_2}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda(r)dr}{r-y}=F(y) \quad (23)$$

где введены обозначения

$$s(y)+iH(y)=\lambda(y),\quad \lambda_1(y)+i\lambda_2(y)=F(y) \quad (24)$$

такое уравнение рассматривалось в работах [8, 9].

Используя результаты работы [8], получаем

$$\lambda(y)=\frac{F(y)}{\theta}-\frac{1}{\theta\pi i(y+a)^{1-m}(y-a)^m}\times$$
$$\times\int_{-a}^{a}\frac{(\tau+a)^{1-m}(\tau-a)^m}{\tau-y}F(\tau)d\tau+\frac{c}{(y+a)^{1-m}(y-0)^m} \quad (25)$$

где $m=\frac{1}{2}-i\gamma,\qquad k=\frac{(1+\nu_1)E_2+(3-\nu_2)E_1}{(3-\nu_1)E_2+(1+\nu_2)E_1}$

$$\theta=1-\left(\frac{l_5}{l_2}\right)^2,\qquad \gamma=\frac{1}{2\pi}\ln k \quad (26)$$

Разделяя действительную и мнимую части выражения (25), найдем

$$s(y)=\frac{\chi_1(y)}{\theta}-\frac{1}{\theta\pi\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\times$$
$$\times\left[\chi_1(\tau)\sin\gamma\ln\frac{y-s}{y+a}\frac{\tau+c}{\tau-c}+\chi_2(\tau)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}\frac{\tau+a}{\tau-a}\right]d\tau- \quad (27)$$

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\sin\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}$$

$$H(y)=\frac{\chi_2(y)}{\theta}+\frac{1}{\theta\pi\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\times$$

$$\times\left[\chi_1(\tau)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+c}\frac{\tau+a}{\tau-a}-\chi_2(\tau)\sin\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}\frac{\tau+a}{\tau-a}\right]d\tau+ \tag{28}$$

$$+\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\cos\gamma\ln\frac{a-y}{y+a}$$

Для определения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ получаем систему интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [4-6] примет вид:

$$\begin{cases} F_1(z)=\Omega_1(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)K_2(z,t)dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(t)K_2(z,t)dt \\ F_2(z)=\Omega_2(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)K_3(z,t)dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(t)K_4(z,t)dt \end{cases} \tag{29}$$

Систему (29) можно решить методом последовательных приближений, так как доказывается, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{a_1}^{\infty}|K_1(z,t)|dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}|K_2(z,t)|dt<1 \\ \int\limits_{a_1}^{\infty}|K_3(z,t)|dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}|K_4(z,t)|dt<1\end{gathered} \tag{30}$$

а функции $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $z\to\infty$. Решая систему (29), получаем выражение функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Далее по формулам (12), (13) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам [7] определены в любой точке полуплоскости.

Нормальные напряжения $\sigma_y^{(1)}(x,0),\ \sigma_y^{(2)}(x,0)$ под штампом $(y=0)$, выраженные через функцию $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяются по формулам:

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_1\sqrt{a_1^2-x^2}}\left[\Psi_1(a_1)+F_1(a_1)\right]+w_1(x) \tag{31}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_2\sqrt{a_2^2-x^2}}\left[\psi_2(a_2)+F_2(a_2)\right]+w_2(x) \tag{32}$$

где $w_j(x)$ $(j=1,2)$–регулярные функции.

Нормальные перемещения вне штампа $(y=0)$, выраженные через функцию $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяются по формулам:

$$\mathrm{v}_1(x,0)=\frac{4}{\pi E_1}\int_0^{a_1}\frac{\Psi_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}+\frac{4}{\pi E_1}\int_{a_2}^{\infty}\frac{F_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad a_1<x<\infty \tag{33}$$

$$\mathrm{v}_2(x,0)=\frac{4}{\pi E_2}\int_0^{a_2}\frac{\Psi_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}+\frac{4}{\pi E_2}\int_{a_2}^{\infty}\frac{F_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad -\infty<x<-a_2 \tag{34}$$

Напряжения $\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)$ вне разреза на линии $(x=0)$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, определяются по формулам:

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(1)}(0,y)=\sigma_x^{(2)}(0,y)=\frac{\pi}{2}\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\cos\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}+\frac{\pi}{2}\frac{\chi_2(y)}{\theta}+\\ +\frac{1}{2\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}}{\tau-y}\left[\chi_1(y)\cos\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}\frac{a+\tau}{a-\tau}-\right.\\ \left.-\chi_2(\tau)\sin\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}\frac{a+\tau}{a-\tau}\right]d\tau \qquad 0<y<a\end{gathered} \tag{35}$$

Как видно из (27), (28), решение сингулярного уравнения (25) имеет осциллирующую особенность на концах интервала $(-a,a)$.

При получении формул (20), (21) были использованы методы обобщенных функций [10].

Напряжения $\tau_{xy}^{(1)}(0,y)=\tau_{xy}^{(2)}(0,y)$ вне разреза на линии $(x=0)$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, определяются по формулам:

$$\tau_{xy}^{(i)}(0,y)=-\frac{\pi}{2}\frac{c}{\sqrt{a^2-y^2}}\sin\gamma\ln\frac{a-y}{a+y}+\omega_2(y)$$

где $\omega_2(y)$ регулярна.

Формулы (31), (32), (33) и (34) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта a_1,a_2. Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями:

$$\psi_1(a_1)+F_1(a_1)=0; \quad \psi_2(a_2)+F_2(a_2)=0 \tag{36}$$

В частном случае, когда $E_1=E_2$; $\nu_1=\nu_2$; $a_1=a_2$ и $a\to 0$, получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М.А. Садовским [3]. Когда $a\to 0$ и материалы квадрантов различные, то получается решение контактной задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [4].

Пусть $a_2 < a_1$, так что давление под штампом имеет особенность типа $\rho^{-1/2}$, где ρ – расстояние от угловой точки штампа.

Условие равновесия штампа определяется формулой:

$$P = \int_0^{a_1} \sigma_y^{(1)}(x,0)\,dx + \int_{-a_2}^{0} \sigma_y^{(2)}(x,0)\,dx = \frac{\pi\delta}{2}(E_1 - E_2) + \frac{\pi}{2}\left[F_1(a_1) - F_2(a_2)\right]$$

Вычисление ведем по суммарной вертикальной нагрузке, действующей в сечении $f(x) = \text{const}$, где $c = \dfrac{P}{\pi}$.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные до первого порядка включительно, в интервале $x \in (-a_2, a_1)$ и в точке $x = 0$ имеют равенство $f_1(0) = f_2(0)$ и $f_1'(0) = f_2'(0)$. Следует отметить, что в функциональном пространстве L_1 доказывается, что

$$\int_{a_1}^{\infty} \left|K_1(z,t)\right| dt + \int_{a_2}^{\infty} \left|K_2(z,t)\right| dt < 1$$

$$\int_{a_1}^{\infty} \left|K_3(z,t)\right| dt + \int_{a_2}^{\infty} \left|K_4(z,t)\right| dt < 1$$

которая обеспечивает условия разрешимости системы интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода относительно $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашбаух Н.Е. Развитие конечной трещины, перпендикулярной к поверхности рааздела двух материалов.//ПМ (тр. амер. о-ва механиков). 1973. Т.40. N2. С.312-314.
2. Боджи Д.В. Действия касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням.// ПМ(тр. амер. о-ва механиков). 1968. Т.35. №3. С.29-37.
3. Минасян А.Ф., Тоноян В.С. О контактной задаче для упругой составной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1980. Т.33. №6. С.18-42.
4. Минасян А.Ф., Тоноян В.С. Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Докл. АН Арм. ССР. 1988. Т.37. №1. С.22-28.
5. Минасян А.Ф. Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. Ереван: Изд."Гитутюн" НАН Армении, 2006. 306с.
6. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №3. С.3-17.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: ОНТИ, 1937.

8. Патваканян Ю.В., Минасян А.Ф., Тоноян В.С. Контактные задачи для бесконечной полосы и составной полуплоскости с вертикальными разрезами. /Всесоюзная научная конференция. “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Тезисы докладов. Днепропетровск. 1981.
9. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512с.
11. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439с.
12. Sadowsky M.A. Stress concentration caused by multiple punches and cracks. Papers Amer. Soc. Mech. Engr. N.A.16. 1955.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
31.05.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ НИЖНИМИ СЛОЯМИ

Агаловян Л. А., Погосян А. М.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, асимптотический метод, трехслойный, вынужденные колебания, жестко закрепленный, резонанс, вектор перемещения.
Keywords: orthotropic plate, asymptotic method, three-layer, forced vibrations, rigidly fixed, resonance, displacement vector.

Լ. Ա. Աղալովյան, Հ. Մ. Պողոսյան
Եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները ստորին շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի առկայության դեպքում

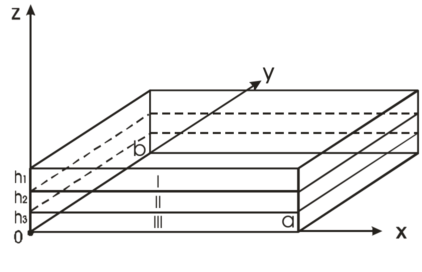
Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ ստորին շերտերի միջև առկա է ոչ լրիվ կոնտակտ, իսկ վերին շերտերի միջև՝ լրիվ կոնտակտ: Սալի ստորին մակերևույթին հաղորդված են արտաքին դինամիկ գրգռումներ, իսկ վերին մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Որոշված է լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկան, կառուցված է իտերացիոն պրոցես անհայտ մեծությունները որոշելու համար: Ստացված է խնդրի ընդհանուր ասիմպտոտիկական լուծումը, մասնավոր դեպքում արտածված է փակ լուծում: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

L. A. Aghalovyan, H. M. Poghosyan
The forced vibrations of three-layer orthotropic plate at incomplete contact between bottom layers

The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of orthotropic plate at incomplete contact between bottom layers and at full contact between the top layers is solved by the asymptotic method. The bottom obverse surface is subject to external dynamic influences, and top - is rigidly fixed. The common asymptotic solution of the problem is found. The closed solution for particular type of problems is found. It is known, that constant tangential displacements acting to the third layer do not influence in stress-strain state of the first and second layer. The resonance arising conditions are established.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях трехслойной ортотропной пластинки при неполном контакте между нижними и при полном контакте между верхними слоями. Нижняя лицевая поверхность подвержена внешним динамическим воздействиям, а верхняя жестко закреплена. Найдена асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, построен итерационный процесс для определения искомых величин. Найдено общее асимптотическое решение, для частного типа задач получено замкнутое решение. Установлены условия возникновения резонанса.

1. Рассматривается задача о вынужденных колебаниях трехслойной ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z): x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ 0\le z\le h,$ $h=h_1+h_2+h_3,\quad h<<l=\min(a,b)\}$ при неполном контакте между третьим и вторым и полном контакте между первым и вторым слоями (фиг. 1).



Фиг.1

Требуется определить решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial z}=\rho_k\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\quad\left(x,y,z;u^k,v^k,w^k\right),\ k=I,II,III$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial x}=a_{11}^k\sigma_{xx}^k+a_{12}^k\sigma_{yy}^k+a_{13}^k\sigma_{zz}^k\quad\left(u^k,v^k,w^k;x,y,z;1,2,3\right)\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial x}=a_{66}^k\sigma_{xy}^k,\ \frac{\partial w^k}{\partial x}+\frac{\partial u^k}{\partial z}=a_{55}^k\sigma_{xz}^k,\ \frac{\partial w^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial z}=a_{44}^k\sigma_{yz}^k$$

при следующих граничных и контактных условиях:
граничные условия:

$$u^{III}\left(z\right)=u^-\left(x,y\right)\exp\left(i\Omega t\right),\ \left(u,v,w\right)\ \text{при}\ z=0\tag{1.2}$$

$$u^I\left(z\right)=v^I\left(z\right)=w^I\left(z\right)=0\ \text{при}\ z=h_1+h_2+h_3\tag{1.3}$$

где Ω – частота вынуждающего воздействия.

На поверхности контакта $z=h_3$ заданы условия неполного контакта между слоями:

$$w^{II}\left(h_3\right)=w^{III}\left(h_3\right),\ \sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{zz}^{III}\left(h_3\right)$$

$$\sigma_{xz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{xz}^{III}\left(h_3\right)=f_2\sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right),\ \sigma_{yz}^{II}\left(h_3\right)=\sigma_{yz}^{III}\left(h_3\right)=f_3\sigma_{zz}^{II}\left(h_3\right)\tag{1.4}$$

на поверхности контакта $z=h_2+h_3$ заданы условия полного контакта между слоями:

$$u^I\left(h_2+h_3\right)=u^{II}\left(h_2+h_3\right),\ v^I\left(h_2+h_3\right)=v^{II}\left(h_2+h_3\right)$$

$$w^I\left(h_2+h_3\right)=w^{II}\left(h_2+h_3\right),\ \sigma_{zz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{zz}^{II}\left(h_2+h_3\right)$$

$$\sigma_{xz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{xz}^{II}\left(h_2+h_3\right),\ \sigma_{yz}^I\left(h_2+h_3\right)=\sigma_{yz}^{II}\left(h_2+h_3\right)\tag{1.5}$$

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [2,3], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3) и условиях контакта (1.4) , (1.5) будем искать в виде [2]:

$$\left(u^k,v^k,w^k\right)=\left(u_x^k\left(x,y,z\right),u_y^k\left(x,y,z\right),u_z^k\left(x,y,z\right)\right)\exp\left(i\Omega t\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k\left(x,y,z,t\right)=\sigma_{jm}^k\left(x,y,z\right)\exp\left(i\Omega t\right)$$

$$\alpha,\beta=x,y,z\ ;\ [\ j,m=1,2,3,\ k=I,II,III\tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.1), затем перейдя к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi=\frac{x}{l},\ \eta=\frac{y}{l},\ \zeta=\frac{z}{h},\ \varepsilon=\frac{h}{l},\ U^k=\frac{u_x^k}{l},\ V^k=\frac{u_y^k}{l},\ W^k=\frac{u_z^k}{l}\tag{2.2}$$

получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему, решение которой будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\sigma_{ij}^{k} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(k,s)},\ U^{k} = \varepsilon^{s}U^{(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),\ \left(U,V,W\right) \tag{2.3}$$

$$i,j = 1,2,3,\ \ s = \overline{0,N},\ \ k = I,II,III$$

Обозначение $s = \overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям от числа 0 до *N*.

Подставив (2.3) в преобразованные уравнения (1.1), получим рекуррентную систему для определения $\sigma_{ij}^{(k,s)}$, $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$; $k = I,II$; $i,j = 1,\ 2,\ 3$. Из этой системы следуют:

$$\sigma_{12}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{k}}\left[\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right],\ \sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{k}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{44}^{k}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = -A_{23}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{22}^{(k,s)} = -A_{13}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(k,s)} = A_{11}^{k}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

где

$$A_{11}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{22}^{k} - \left(a_{12}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}},\ A_{22}^{k} = \frac{a_{22}^{k}a_{33}^{k} - \left(a_{23}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}},\ A_{33}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{33}^{k} - \left(a_{13}^{k}\right)^{2}}{\Delta^{k}}$$

$$A_{12}^{k} = \frac{a_{33}^{k}a_{12}^{k} - a_{13}^{k}a_{23}^{k}}{\Delta^{k}},\ A_{13}^{k} = \frac{a_{11}^{k}a_{23}^{k} - a_{12}^{k}a_{13}^{k}}{\Delta^{k}},\ A_{23}^{k} = \frac{a_{22}^{k}a_{13}^{k} - a_{12}^{k}a_{23}^{k}}{\Delta^{k}}$$

$$\Delta^{k} = a_{11}^{k}a_{22}^{k}a_{33}^{k} + 2\,a_{12}^{k}a_{13}^{k}a_{23}^{k} - a_{22}^{k}\left(a_{13}^{k}\right)^{2} - a_{11}^{k}\left(a_{23}^{k}\right)^{2} - a_{33}^{k}\left(a_{12}^{k}\right)^{2}$$

Функции $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial^{2}U^{(k,s)}}{\partial\zeta^{2}} + a_{55}^{k}\rho_{k}\,\Omega_{*}^{2}U^{(k,s)} = R_{U}^{(k,s)}$$

$$R_{U}^{(k,s)} = -\frac{\partial^{2}W^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta} - a_{55}^{k}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\frac{\partial^{2}V^{(k,s)}}{\partial\zeta^{2}} + a_{44}^{k}\rho_{k}\,\Omega_{*}^{2}V^{(k,s)} = R_{V}^{(k,s)} \tag{2.5}$$

$$R_{V}^{(k,s)} = -\frac{\partial^{2}W^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta} - a_{44}^{k}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$A_{11}^{k}\frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial\zeta^2}+\rho_k\,\Omega_*{}^2 W^{(k,s-1)}=R_W^{(k,s)}$$

$$R_W^{(k,s)}=A_{23}^{k}\frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}+A_{13}^{k}\frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta}-\frac{\partial\sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

Решениями уравнений (2.5) будут:

$$U^{(k,s)}=U_0^{(k,s)}\left(\zeta,\eta,\zeta\right)+U_\tau^{(k,s)}\left(\zeta,\eta,\zeta\right),\ \left(U,V,W\right);\ k=I,II,III \qquad (2.6)$$

где величины с индексом “0 – решения однородных, а с индексом “τ”– частные решения неоднородных уравнений.

$$U^{(k,s)}=C_1^{(k,s)}\left(\xi,\eta\right)\sin a_1^k\Omega_*\zeta+C_2^{(k,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_1^k\Omega_*\zeta+U_\tau^{(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) \qquad (2.7)$$

$$(a_1,a_2,a_3;\ C_1,C_2;C_3,C_4;C_5,C_6;\ U,V,W),\ k=I,II,III$$

$$a_1^k=\sqrt{a_{55}^k\rho_k},\ a_2^k=\sqrt{a_{44}^k\rho_k},\ a_3^k=\sqrt{\rho_k/A_{11}^k}$$

3. Удовлетворив граничным и контактным условиям (1.2)-(1.5), в результате получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций $C_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$; $i=1,2...6$, $k=I,II,III$:

$$C_6^{(III,s)}=W^{-s}-W_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_5^{(I,s)}\sin a_3^I\Omega_*\zeta_1+C_6^{(I,s)}\cos a_3^I\Omega_*\zeta_1=-W_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$C_5^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3+C_6^{(II,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_5^{(III,s)}\sin a_3^{III}\Omega_*\zeta_3-$$
$$-C_6^{(III,s)}\left(\xi,\eta\right)\cos a_3^{III}\Omega_*\zeta_3=W_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=\zeta_3\right)-W_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_3\right)$$

$$\sqrt{A_{11}^{III}\rho_{III}}\,\Omega_*\left[C_5^{(III,s)}\cos a_3^{III}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(III,s)}\sin a_3^{III}\Omega_*\zeta_3\right]-\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times$$
$$\times\left[C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right]=b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{33}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_5^{(I,s)}\sin a_3^I\Omega_*\zeta_2+C_6^{(I,s)}\cos a_3^I\Omega_*\zeta_2-C_5^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_6^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_2=W_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-W_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right) \qquad (3.1)$$

$$\sqrt{A_{11}^{I}\rho_{I}}\,\Omega_*\left[C_5^{(I,s)}\cos a_3^I\Omega_*\zeta_2-C_6^{(I,s)}\sin a_3^I\Omega_*\zeta_2\right]-\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times$$
$$\times\left[C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_2-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_2\right]=b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_2)-b_{33}^{I,s}(\zeta=\zeta_2)$$

$$C_2^{(III,s)}=U^{-s}-U_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_1^{(I,s)}\sin a_1^I\Omega_*\zeta_1+C_2^{(I,s)}\cos a_1^I\Omega_*\zeta_1=-U_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}}\times$$

$$\times\left(C_1^{(III,s)}\cos a_1^{III}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(III,s)}\sin a_1^{III}\Omega_*\zeta_3\right)=b_{13}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_3-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-f_2\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times$$

$$\times\left(C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right)=f_2b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_1^{(I,s)}\sin a_1^{I}\Omega_*\zeta_2+C_2^{(I,s)}\cos a_1^{I}\Omega_*\zeta_2-C_1^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_2^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_2=U_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-U_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right) \qquad (3.2)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{I}}{a_{55}^{I}}}\left(C_1^{(I,s)}\cos a_1^{I}\Omega_*\zeta_2-C_2^{(I,s)}\sin a_1^{I}\Omega_*\zeta_2\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\times$$

$$\times\left(C_1^{(II,s)}\cos a_1^{II}\Omega_*\zeta_2-C_2^{(II,s)}\sin a_1^{II}\Omega_*\zeta_2\right)=b_{13}^{II,s}(\zeta=\zeta_2)-b_{13}^{I,s}(\zeta=\zeta_2)$$

$$C_4^{(III,s)}=V^{-s}-V_\tau^{(III,s)}\left(\zeta=0\right)$$

$$C_3^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_1+C_4^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_1=-V_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_1\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\times$$

$$\times\left(C_3^{(III,s)}\cos a_2^{III}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(III,s)}\sin a_2^{III}\Omega_*\zeta_3\right)=b_{23}^{III,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_3-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_3\right)-f_3\Omega_*\sqrt{A_{11}^{II}\rho_{II}}\times \qquad (3.3)$$

$$\times\left(C_5^{(II,s)}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-C_6^{(II,s)}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3\right)=f_3b_{33}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)$$

$$C_3^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_2+C_4^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_2-C_3^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_2-$$
$$-C_4^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_2=V_\tau^{(II,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)-V_\tau^{(I,s)}\left(\zeta=\zeta_2\right)$$

$$\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{I}}{a_{44}^{I}}}\left(C_3^{(I,s)}\cos a_2^{I}\Omega_*\zeta_2-C_4^{(I,s)}\sin a_2^{I}\Omega_*\zeta_2\right)-\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\times$$

$$\times\left(C_3^{(II,s)}\cos a_2^{II}\Omega_*\zeta_2-C_4^{(II,s)}\sin a_2^{II}\Omega_*\zeta_2\right)=b_{23}^{II,s}(\zeta=\zeta_3)-b_{23}^{I,s}(\zeta=\zeta_3)$$

где

$$\zeta_1=\frac{h_1+h_2+h_3}{h}=1,\quad \zeta_2=\frac{h_2+h_3}{h},\quad \zeta_3=\frac{h_3}{h} \qquad (3.4)$$

$$U^{-(0)}=u^-/l,\quad V^{-(0)}=v^-/l,\quad W^{-(0)}=w^-/l$$

$$U^{-(s)}=V^{-(s)}=W^{-(s)}=0,\quad s>0$$

$$b_{13}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{55}^{k}}\left[\frac{\partial U_{\tau}^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right],\ b_{23}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{44}^{k}}\left[\frac{\partial V_{\tau}^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$b_{33}^{(k,s)}=A_{11}^{k}\frac{\partial W_{\tau}^{(k,s)}}{\partial\zeta}-A_{23}^{k}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}^{k}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta},\ k=I,II,III$$

Решив системы (3.1)-(3.3), определим значения $C_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$; $i=1,2...6$, $k=I,II,III$:

$$\begin{gathered}
C_1^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_1^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1},\ C_2^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_2^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}\\
C_3^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_3^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_2},\ C_4^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_4^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_2}\\
C_5^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_5^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_3},\ C_6^{(k,s)}(\xi,\eta)=\frac{P_6^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_3}
\end{gathered}\tag{3.5}$$

где $P_i^{(k,s)}(\xi,\eta)$, $i=1,2...6$, $k=I,II,III$ получаются из определителей Δ_j, $j=1,2,3$ систем (3.1)-(3.3), заменой соответствующих столбцов столбцом из свободных членов (U,V,W).

Подставив значения $C_i^{(k,s)}$ в (2.7), получим окончательное решение:

$$U^{(k,s)}=\frac{P_1^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}\sin a_1^k\Omega_*\zeta+\frac{P_2^{(k,s)}(\xi,\eta)}{\Delta_1}\cos a_1^k\Omega_*\zeta+U_{\tau}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)\tag{3.6}$$

$$(a_2,a_3;\ P_3,P_4;P_5,P_6;\ \Delta_2,\Delta_3;V_{\tau},W_{\tau};V,W);\ k=I,II,III$$

где

$$\Delta_1=-\frac{1}{2}\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\cos\Omega_*a_1^{III}\zeta_3\left[\cos\Omega_*\left(a_1^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_1^{II}(\zeta_3-\zeta_2)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_1^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_1^{II}(\zeta_2-\zeta_3)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\right]$$

$$\Delta_2=-\frac{\Omega_*^3}{2}\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3a_2^{III}\left[\cos\Omega_*\left(a_2^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_2^{II}(\zeta_3-\zeta_2)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_2^I(\zeta_1-\zeta_2)+a_2^{II}(\zeta_2-\zeta_3)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\right]$$

(3.7)

$$\Delta_3 = -\frac{1}{2}\Omega_*^2\Big[\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(2\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}-\right.$$

$$-\left(\cos\Omega_*\left(\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)+\cos\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\right)\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}\rho_{III}A_{11}^{III}}\Big)\times$$

$$\times\Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\Big(\sin\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\left(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\right)+$$

$$+\sin\Omega_*\left(\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)\left(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\right)\Big)\Big)+$$

$$+\Big(2\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(-\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\right)+$$

$$+\Big(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\Big(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\right)+\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times$$

$$\times\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}-\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\right)\Big)\Big)\Big)\Big]$$

Считаем, что $$\Delta_j \neq 0;\ \ j = 1,2,3 \tag{3.8}$$

Условия (3.8) будут выполнены, если Ω не является частотой собственных колебаний [4], в противном случае, если Ω такова, что хотя бы одна из величин Δ_j равна нулю, произойдёт резонанс.

Компоненты тензора напряжений определятся по формулам:

$$\sigma_{12}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^k}\left[\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{13}^{(k,s)} = \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{55}^k}}\Omega_*\left(C_1^{(k,s)}\cos a_1^k\Omega_*\zeta - C_2^{(k,s)}\sin a_1^k\Omega_*\zeta\right) + \frac{1}{a_{55}^k}\left[\frac{\partial U_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(k,s)} = \sqrt{\frac{\rho_k}{a_{44}^k}}\Omega_*\left(C_3^{(k,s)}\cos a_2^k\Omega_*\zeta - C_4^{(k,s)}\sin a_2^k\Omega_*\zeta\right) + \frac{1}{a_{44}^k}\left[\frac{\partial V_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = -A_{23}^k a_3^k\Omega_*\left(C_5^{(k,s)}\cos a_3^k\Omega_*\zeta - C_6^{(k,s)}\sin a_3^k\Omega_*\zeta\right) -$$
$$- A_{23}^k\frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^k\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^k\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(k,s)} = -A_{13}^k a_3^k\Omega_*\left(C_5^{(k,s)}\cos a_3^k\Omega_*\zeta - C_6^{(k,s)}\sin a_3^k\Omega_*\zeta\right) -$$
$$- A_{13}^k\frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^k\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^k\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta} \tag{3.9}$$

$$\sigma_{33}^{(k,s)} = A_{11}^k a_3^k \Omega_* \left(C_5^{(k,s)} \cos a_3^k \Omega_* \zeta - C_6^{(k,s)} \sin a_3^k \Omega_* \zeta \right) +$$

$$+ A_{11}^k \frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}$$

4. Рассмотрим частный случай, пусть:

$$U^- = \text{const}, \; V^- = \text{const}, \; W^- = \text{const} \tag{4.1}$$

При s = 0 будем иметь:

$$b_{13}^{(k,0)} = b_{23}^{(k,0)} = b_{33}^{(k,0)} = 0$$

$$U^{(k,0)} = \frac{P_1^{(k,0)}(\xi,\eta)}{\Delta_1} \sin a_1^k \Omega_* \zeta + \frac{P_2^{(k,0)}(\xi,\eta)}{\Delta_1} \cos a_1^k \Omega_* \zeta \tag{4.2}$$

$$(a_1, a_2, a_3; P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6; \; \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3; U, V, W); \; k = I, II, III$$

где

$$P_1^{(I,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \rho_{II} \sqrt{\frac{A_{11}^{II} \rho_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3$$

$$P_1^{(II,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \sqrt{\frac{\rho_{II} \rho_{III} A_{11}^{II}}{a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \left[\sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) + \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \times$$

$$\left. \times \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) \right]$$

$$P_1^{(III,0)} = -\frac{1}{2} \Omega_*^3 \left[\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \cos \Omega_* \left(a_1^I (\zeta_1 - \zeta_2) + a_1^{II} (\zeta_3 - \zeta_2) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \cos \Omega_* \left(a_1^I (\zeta_1 - \zeta_2) + a_1^{II} (\zeta_2 - \zeta_3) \right) \right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \left[U^- \sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{55}^{III}}} \sin \Omega_* \zeta_3 a_1^{III} + C_{56}^{(0)} f_2 \sqrt{\rho_{II} A_{11}^{II}} \right]$$

$$P_2^{(I,0)} = C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \rho_{II} \sqrt{\frac{A_{11}^{II} \rho_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \tag{4.3}$$

$$P_2^{(II,0)} = -C_{56}^{(0)} f_2 \Omega_*^3 \sqrt{\frac{\rho_{II} \rho_{III} A_{11}^{II}}{a_{55}^{III}}} \cos \Omega_* a_1^{III} \zeta_3 \left[\sin \Omega_* a_1^I \zeta_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 + \right.\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) + \cos \Omega_* a_1^I \zeta_1 \times$$

$$\left. \times \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos \Omega_* a_1^I \zeta_2 \sin \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin \Omega_* a_1^I \zeta_2 \cos \Omega_* a_1^{II} \zeta_2 \right) \right]$$

$$P_2^{(III,0)}=-\frac{1}{2}\Omega_*^3U^-\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{55}^{II}a_{55}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3a_1^{III}\left[\cos\Omega_*\left(a_1^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_1^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)+\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}}\right)\cos\Omega_*\left(a_1^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_1^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\right]$$

$$P_3^{(I,0)}=-C_{56}^{(0)}f_3\Omega_*^3\rho_{II}\sqrt{\frac{A_{11}^{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*a_2^I\zeta_1\cos\Omega_*a_2^{III}\zeta_3$$

$$P_3^{(II,0)}=-C_{56}^{(0)}f_2\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*a_2^{III}\zeta_3\times$$

$$\times\left[\sin\Omega_*a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_*a_2^{II}\zeta_2\sin\Omega_*a_2^I\zeta_2-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\cos\Omega_*a_2^I\zeta_2\cos\Omega_*a_1^{II}\zeta_2\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_*a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_*a_2^I\zeta_2\cos\Omega_*a_2^{II}\zeta_2+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\sin\Omega_*a_2^I\zeta_2\sin\Omega_*a_2^{II}\zeta_2\right)\right]$$

$$P_3^{(III,0)}=-\frac{1}{2}\Omega_*^3\left[\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\left[V^-\sqrt{\frac{\rho_{III}}{a_{44}^{III}}}\sin\Omega_*\zeta_3a_2^{III}+C_{56}^{(0)}f_3\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\right]$$

$$P_4^{(I,0)}=C_{56}^{(0)}f_3\Omega_*^3\rho_{II}\sqrt{\frac{A_{11}^{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*a_2^{III}\zeta_3\sin\Omega_*a_2^I\zeta_1$$

$$P_4^{(II,0)}=C_{56}^{(0)}f_3\Omega_*^3\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}A_{11}^{II}}{a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*a_2^{III}\zeta_3\times$$

$$\times\left[\sin\Omega_*a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\sin\Omega_*a_2^{II}\zeta_2\sin\Omega_*a_2^I\zeta_2+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\cos\Omega_*a_2^I\zeta_2\cos\Omega_*a_2^{II}\zeta_2\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\Omega_*a_2^I\zeta_1\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}\cos\Omega_*a_2^I\zeta_2\sin\Omega_*a_2^{II}\zeta_2-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\sin\Omega_*a_2^I\zeta_2\cos\Omega_*a_2^{II}\zeta_2\right)\right]$$

$$P_4^{(III,0)}=-\frac{1}{2}\Omega_*^3V^-\left[\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}-\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\times\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_3-\zeta_2\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}}+\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}}\right)\cos\Omega_*\left(a_2^I\left(\zeta_1-\zeta_2\right)+a_2^{II}\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)\right]\sqrt{\frac{\rho_{II}\rho_{III}}{a_{44}^{II}a_{44}^{III}}}\cos\Omega_*\zeta_3a_2^{III}$$

$$P_5^{(I,0)}=W^-\sqrt{\rho_{II}\rho_{III}A_{11}^{II}A_{11}^{III}}\,\Omega_*^2\cos\Omega_*a_3^I\zeta_1$$

$$P_5^{(II,0)}=\left[\left(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\right)\times\right.$$

$$\times\sin\Omega_* a_3^I\zeta_1+\cos\Omega_* a_3^I\zeta_1\left(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2+\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\right)\right]W^-\Omega_*^2\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}$$

$$P_5^{(III,0)}=-W^-\Omega_*^2\left[-\frac{1}{2}\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\left(2\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\left(\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\cos\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\right)+\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\left(\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}-\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\Omega_*\left(\zeta_1 a_3^I+\left(\zeta_3-\zeta_2\right)a_3^{II}\right)+\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}+\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\right)\sin\Omega_*\left(\zeta_1 a_3^I+\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}+\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\left(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(\rho_{II}A_{11}^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cos\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)\right)+\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times\right.$$

$$\times\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}-\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\right)+\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cdot\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}+\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\cdot\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\right)\right)\right)\right]$$

$$P_6^{(I,0)}=-W^-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\Omega_*^2\sin\Omega_* a_3^I\zeta_1$$

$$P_6^{(II,0)}=-\left[\left(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\right)\times\right.$$

$$\times\sin\Omega_* a_3^I\zeta_1+\cos\Omega_* a_3^I\zeta_1\left(\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_* a_3^I\zeta_2\sin\Omega_* a_3^{II}\zeta_2-\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_* a_3^{II}\zeta_2\sin\Omega_* a_3^I\zeta_2\right)\right]W^-\Omega_*^2\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}$$

$$P_6^{(III,0)}=-W^-\Omega_*^2\frac{1}{2}\left[\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^I\left(\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(2\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\left(\cos\left(\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)+\cos\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\right)\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\right)+$$

$$+\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\left(\sin\Omega_*\left(\zeta_2 a_3^{II}-\left(a_3^{II}+a_3^{III}\right)\zeta_3\right)\left(\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}-\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}+\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\right)\sin\Omega_*\left(\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\zeta_3 a_3^{III}\right)\right)\right)+2\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^I\left(\sin\Omega_*\zeta_1 a_3^I\times\right.$$

$$\times\left(-\rho_{II}A_{11}^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}+\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\Omega_*\left(\zeta_2-\zeta_3\right)a_3^{II}\right)+\left(\sin\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}+\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\right)\sqrt{\rho_I A_{11}^I}\cos\Omega_*\zeta_1 a_3^I+\cos\Omega_*\zeta_2 a_3^{II}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\sqrt{\rho_{II}A_{11}^{II}}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}-\sqrt{\rho_{III}A_{11}^{III}}\sin\Omega_*\zeta_3 a_3^{II}\cos\Omega_*\zeta_3 a_3^{III}\right)\right)\right)\right]$$

$$C_{56}^{(0)}=\frac{P_5^{(II,0)}}{\Delta_3}\cos a_3^{II}\Omega_*\zeta_3-\frac{P_6^{(II,0)}}{\Delta_3}\sin a_3^{II}\Omega_*\zeta_3$$

Несложно убедиться, что при $s > 0$

$$U^{(k,s)} = V^{(k,s)} = W^{(k,s)} = 0, \\ \sigma_{ij}^{(k,s)} = 0, \quad i, j = 1,2,3; \quad k = I, II, III \tag{4.4}$$

Следовательно, приближению $s = 0$ соответствует точное решение:

$$u^k = \left(\frac{P_1^{(k,0)}}{\Delta_1} \sin a_1^k \Omega_* \zeta + \frac{P_2^{(k,0)}}{\Delta_1} \cos a_1^k \Omega_* \zeta \right) l \exp(i\Omega t) \tag{4.5}$$

$$(a_1, a_2, a_3;\ P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6;\ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3; u, v, w);\ k = I, II, III$$

Напряжения вычисляются по формулам (2.3), (2.4). Из полученного точного решения (4.4), как и для двухслойной пластинки, когда между слоями осуществляется кулоново трение, а лицевая поверхность верхнего слоя жестко закреплена [5] или свободна [6], следует любопытный факт – величины слоев расположенных выше поверхности неполного контакта (в нашем случае I, II слои) не зависят от величин u^-, v^-, т.е. наличие кулоново трения между третьим и вторым слоями приводит к тому, что сообщаемые нижнему слою тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого и второго слоев. Установленная выше качественная картина с большой точностью выполняется и тогда, когда u^-, v^- переменны по координатам. При полном же контакте между слоями напряженно-деформированные состояния всех слоев зависят от u^-, v^-, w^- [7]. Установленный выше факт можно использовать в расчетах фундаментов-оснований сооружений в сейсмостойком строительстве для уменьшения негативного влияния сейсмических сил.

The authors express their gratitude to INTAS, grant Ref. No 03-51-5547 and NFSAT, grant Ref. GRSP 05/06, which made this investigation possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва. Наука, 1997. 415с.
2. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2002. С. 9-19.
3. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. //В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ, 1997. С.132-135.
4. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Асимптотика собственных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. //В сб.: V Международная конференция “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2005. С. 14-22.
5. Агаловян Л. А., Погосян А. М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С. 36-47.

6. Погосян А. М. Асимптотика вынужденных колебаний двухслойной ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче при кулоновом трении между слоями. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, V Международная конференция 1-7 октября, Горис, 2005г. Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2005. С. 287-296.
7. Оганесян Р. Ж. Асимптотика вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при полном контакте между слоями. //В. сб.: "Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести". Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2006.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.04.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Акопян С.А., Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: вязкоупругость, волна, частота, цилиндрическая оболочка, граничная задача.
Keywords: viscoelastic, wave, frequence, cylindrical shell, boundary problem.

S.A. Hakobyan, L.A. Movsisyan
About Propagation of Viscoelastic Wave in Cylindrical Shell and Linewrice Problems

Propagation of wave in nonmoment theory of tipical viscoelastic materials of cylindrical shell is considered. Boundary problem when in end of semi infinite cylinder acts load is investigated for different cases. Exact and asymptotic solutions are given.

Ս.Ա. Հակոբյան, Լ.Ա. Մովսիսյան
Առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթում ալիքների տարածման մասին և նման խնդիրներ

Անմոմենտ տեսությամբ ուսումնասիրվում է ալիքների տարածման խնդիրը գլանային թաղանթում, երբ նյութը տիպիկ առաձգամածուցիկ է: Դիտարկվում է նաև եզրային խնդիր, երբ կիսաանվերջ գլանի եզրում կիրառվում է հաստատուն ճիգ: Տրվում է ճշգրիտ և ասիմպտոտիկ մոտեցման եղանակներ: Ձողի համար դիտարկվել է նաև նույն խնդիրը, երբ նրա նյութը Կելվինի-Ֆոխտի տիպի է:

Задача распространения волн в цилиндрической оболочке в безмоментной постановке изучена для вязкоупругого типичного материала. Для такого же полубесконечного цилиндра рассмотрена задача, когда на конце мгновенно прикладывается усилие. Предлагается приближенный метод нахождения усилий. Для стержней приводится решение аналогичной задачи, когда материал – типа Кельвина-Фойгта.

1. Уравнения движений оболочки (безмоментное состояние) имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad,\quad T_2=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Предполагается, что материал оболочки обладает вязкоупругим свойством по Кельвину-Максвеллу [1]

$$\sigma=E\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon,\quad \Gamma^*\varepsilon=\frac{E-H}{En}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau$$

Если перейти к безразмерным координатам

$$\xi=\frac{x}{R},\qquad \tau=\frac{at}{R}\quad,\qquad a^2=\frac{E}{\rho\left(1-\nu^2\right)} \tag{1.2}$$

то уравнения движений в перемещениях будут

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\nu\frac{\partial w}{\partial\xi}=\left(1+K^*\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\\ \nu\frac{\partial u}{\partial\xi}-w=\left(1+K^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2},\ K^*-\Gamma^*=K^*\Gamma^*\end{gathered} \tag{1.3}$$

Будем искать решение (1.3) в виде

$$\left(u,w\right)=\left(u_0,w_0\right)\exp i\omega\left(\tau-q\xi\right) \tag{1.4}$$

В (1.4) $q=q_1+iq_2$ – комплексное число, обратная величина q_1 – безразмерная фазовая скорость, а q_2 характеризует затухание волн, ω – безразмерная частота – произведение истинной частоты на R/a.

Подставляя (1.4) в (1.3) для определения q_i, получим

$$q_1=\left(\frac{B+\sqrt{B^2+C^2}}{2A}\right)^{1/2},\quad q_2=\left(\frac{-B+\sqrt{B^2+C^2}}{2A}\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

Здесь

$$A=F^2+K_s^2,\ B=\left[\left(1+K_c\right)D+K_s^2\right]F-K_s^2\left[D-\left(1+K_c\right)\right]$$

$$C=-K_s\left\{\left[D-\left(1+K_c\right)\right]F+\left(1+K_c\right)\mathbf{D}+K_s^2\right\},\ F=D-\frac{v^2}{\omega^2}$$

$$D=\frac{1}{\omega^2}-\left(1+K_c\right),\ K_c=\frac{E-H}{H}\frac{1}{1+\omega^2\beta^2},\quad K_s=\omega\beta K_c\ ,\ \beta=\frac{Ena}{RH} \tag{1.6}$$

В случае упругости $\left(K_c=K_s=0\right)$ фазовая скорость есть

$$C=\frac{a}{q_1}=a\sqrt{\frac{1-v^2-\omega^2}{1-\omega^2}} \tag{1.7}$$

При больших ω волна распространяется почти со скоростью (1.7), но с затуханием

$$q_2\approx-\frac{1}{2}K_s \tag{1.8}$$

Для малых частот

$$C=a_\infty\sqrt{\frac{1-v^2-\beta\omega^2}{1-\beta\omega^2}}\quad ,a_\infty=a\sqrt{\frac{H}{E}}\quad ,\ \beta=\frac{E}{H} \tag{1.9}$$

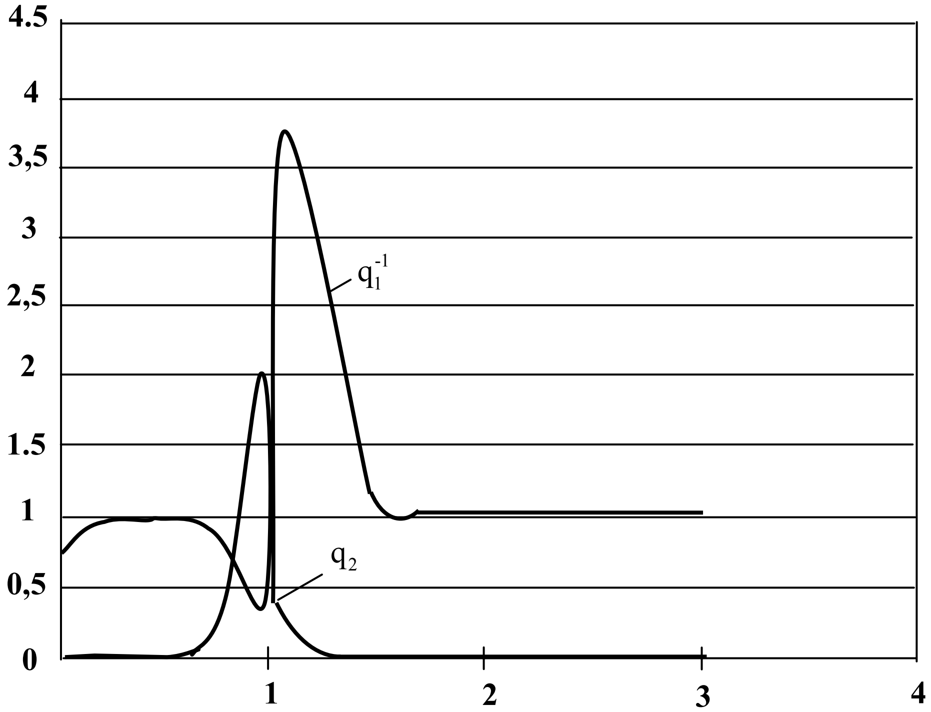
На фиг.1 приведены типичные кривые q^{-1} и q_2 в зависимости от ω для $E=2H$ и $\beta=100$.

2. Рассмотрим теперь граничную задачу. Пусть в момент $\tau=0$ на конце $\xi=0$ полубесконечной оболочки прикладывается сжимающее осевое усилие и удерживается постоянным

$$T_1=\frac{Eh}{R\left(1-v^2\right)}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-w\right)=-T_0\ \text{при}\ \xi=0 \tag{2.1}$$

Для упругой задачи такая задача эквивалентна случаю, когда один конец цилиндра движется в сторону второго с постоянной скоростью [4]. Однако для вязкоупругой задачи это не так и в п.4 различие будет показано на одном примере.

Начальные условия задачи пусть будут нулевыми. Тогда подвергая уравнения (1.3) с условием (2.1) и учитывая ограниченность осевого и



Фиг.1

кольцевого усилий на бесконечности, для последних будем иметь

$$\overline{T}_1 = -\frac{T_0}{p}e^{-\lambda\xi} \quad , \qquad \overline{T}_2 = -\frac{vT_0}{p}\,\frac{p^2(1+K(p))-1}{p^2(1+K(p))-v^2}\overline{e}^{\lambda\xi}$$

$$\lambda = p(1+K(p))^{1/2}\sqrt{\frac{1+p^2(1+K(p))}{1-v^2+p^2(1+K(p))}} \tag{2.2}$$

$$K(p) = G\frac{1}{p+\alpha}\ ,\quad G = \frac{E-H}{H}\alpha\ ,\quad \alpha = \frac{HR}{naE}$$

В общем виде произвести обратные преобразования от (2.2) не удается, сверх того, даже для упругого случая интегралы эти вычислялись методом стационарной фазы [4].

Для малых времен (больших p) для усилий имеем

$$T_1 = -T_0 e^{-\frac{G}{2}\xi}H(\tau-\xi)\ ,\ T_2 = -vT_0 e^{-\frac{G}{2}\xi}H(\tau-\xi) \tag{2.3}$$

где $H(\tau-\xi)$ – единичная функция, т.е. имеется стержневое приближение.

В работе [5] решение подобной задачи предлагалось строить в виде ряда по малому параметру–коэффициенту Пуассона v .

Так что здесь также приходится довольствоваться таким способом. Но дело в том, что даже в такой постановке, когда первый член разложения соответствует стержневому приближению, опять-таки произвести обратное преобразование не из приятных занятий. Сравнительно легко достигается цель для среды Максвелла $\alpha = 0$. Тогда усилие определится формулой

$$T_1(\xi,\tau) = -\frac{T_0}{2\pi}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-p\xi\sqrt{1+\frac{G}{P}}}\ \frac{e^{p\xi}}{p}dp \tag{2.4}$$

Подынтегральная функция имеет точки ветвления в $p = 0$ и $p = -G$. На плоскости p проводится разрез между этими точками и показывается, что вычисление интеграла (2.4) сводится к интегрированию подынтегральной функции по верхнему и нижнему берегам этого разреза и в окончательном виде

$$T_1^0(\xi,\tau) = -T_0\left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^G \frac{1}{z}e^{-\tau z}\sin\xi\sqrt{z(G-z)}dz\right], \quad \tau > \xi \tag{2.5}$$

Приведем некоторые формулы обращения, которые, помимо того, что они необходимы для определения $T_1(\xi,\tau)$ $(\alpha \neq 0)$, сами собой представляют определенный интерес и возможно понадобятся при решении аналогичных задач.

Вот некоторые из этих формул:

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\gamma\sqrt{1+p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left\{e^{-\frac{\gamma^2}{4\tau}} - \gamma\int_\gamma^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\sqrt{z^2-\gamma^2}} J_1\left(\sqrt{z^2-\gamma^2}\right)dz\right\}$$

$$\frac{1}{p\sqrt{p}}\Phi\left(\frac{1}{p}\right) \doteq \int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{\tau z}}{\sqrt{\pi z}}\cdot\varphi(z,\tau)dz$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha\xi\sqrt{1+Gp}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left\{e^{-\frac{G\alpha^2\xi^2}{4\tau}} - \right.$$

$$\left. - \xi\alpha\int_{\alpha\xi}^\infty \frac{e^{-\frac{Gz^2}{4\tau}}}{\sqrt{z^2-\alpha^2\xi^2}} J_1\left(\sqrt{z^2-\alpha^2\xi^2}\right)dz\right\} = \varphi(\xi,\tau) \tag{2.6}$$

Здесь J_1 – функция Бесселя, и формулы эти получены на основании общих теорем операционного исчисления и табличных данных [6-8].

На основании этих формул показывается, что определение T_1 сводится к решению уравнения Вольтерра первого рода –

$$e^{-\alpha\tau}T_1^0 = \int_\xi^\tau T_1(\xi,\theta)\varphi'_\alpha(\xi,\tau-\theta)d\theta \tag{2.7}$$

где $$\varphi_\alpha(\xi,\tau) = e^{-\alpha\tau}\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{\tau z}}{\sqrt{\pi z}}\varphi(\xi,z)dz$$

3. Итак, разложим преобразование перемещения в виде рядов [5]

$$\overline{u} = \overline{u}_0 + v^2\overline{u}_2 + \ldots, \qquad \overline{w} = v\overline{w}_1 + \ldots \tag{3.1}$$

Если в разложениях довольствоваться членами до v^2, то усилия в таком приближении будут

$$\bar{T}_1 = \frac{d\bar{u}_0}{d\xi}\ , \quad \bar{T}_2 = \bar{E}\nu\left(\frac{d\bar{u}_0}{d\xi} - \bar{w}_1\right), \quad \bar{E} = \frac{Eh}{R^2}\left(1-\Gamma(p)\right) \tag{3.2}$$

где $\bar{u}_0$ и $\bar{w}_1$ должны быть определены из

$$\frac{d^2\bar{u}_0}{d\xi^2} = p^2\left(1+\frac{G}{p+\alpha}\right)\bar{u}_0$$

$$\left[1+p^2\left(1+\frac{G}{p+\alpha}\right)\right]\bar{w}_1 = \frac{d\bar{u}_0}{d\xi} \tag{3.3}$$

Дело в том, что, как отмечалось выше, да и в такой форме определить $\bar{u}_0$ и $\bar{w}_1$ и соответственно усилие и иметь дело с выражениями (2.6), (2.7) не только занятие не из приятных, но и абсолютно необозримых. Надо учесть, что уже в (3.2) и (3.3) скорость упругой волны уже $a_0 = a(\nu = 0)$.

В системе (3.3) есть еще малый параметр α (2.2) , т.е

$$\varepsilon = \alpha = \frac{HR}{Ena_0}\quad ,G = k\varepsilon \tag{3.4}$$

Для стержня в качестве R можно брать какую-нибудь характерную длину.

Граничное условие (2.1), как это принято и для стержня в [1, с.292], строго говоря, корректно только для небольших времен и более естественно предполагать, что усилие действует в некотором промежутке времени $0 \le \tau \le \tau_0$. Тогда условие относительно $\bar{u}_0$ будет иметь вид

$$\frac{d\bar{u}_0}{d\xi} = -\frac{T_0}{\bar{E}p}\left(1-e^{-p\tau_0}\right) \text{ при } \xi = 0 \tag{3.5}$$

В виде ряда по ε , разлагая $\bar{u}_0$ и p

$$\bar{u}_0 = \upsilon_0 + \varepsilon\upsilon_1 + \ldots, \qquad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots \tag{3.6}$$

Из (3.3) получим

$$\begin{gathered}\frac{d^2\upsilon_0}{d\xi^2} = p_0^2\upsilon_0 \\ \frac{d^2\upsilon_1}{d\xi^2} = p_0^2\upsilon_1 + \left(2p_1 + k\right)p_0\upsilon_0\end{gathered} \tag{3.7}$$

Систему (3.7) можно решить последовательно, но, как видно из второго уравнения, в правой части присутствует секулярный член и для устранения «резонанса» должны требовать

$$p_1 = -\frac{k}{2} \tag{3.8}$$

откуда и определяется неизвестный параметр p_1. Условие (3.5), также представляя в виде ряда по ε , окончательно для T_1 и T_2 получим:

$$-\frac{T_1}{T_0}=\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}(\tau-\xi)\right]H(\tau-\xi)-$$

$$-\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}(\tau-\tau_0-\xi)\right]H(\tau-\tau_0-\xi)-\frac{\varepsilon k}{2}\tau_0 H\ (\tau-\tau_0-\xi)$$

$$-\frac{T_0}{vT_0}=-\frac{T_1}{T_0}+\cos\left[(\tau-\xi)-\cos(\tau-\tau_0-\xi)+\frac{\varepsilon k}{4}\{\sin(\tau-\xi)-\right.$$

$$-\sin(\tau-\tau_0-\xi)-(\tau-\xi)\cos(\tau-\xi)+(\tau-\tau_0-\xi)\cos(\tau-\tau_0-\xi)+$$

$$\left.+2\tau_0\left[\cos(\tau-\tau_0-\xi)-1\right]+2\left[\cos(\tau-\xi)-\cos(\tau-\tau_0-\xi)\right]\right\} \qquad (3.9)$$

В последней формуле, хотя не везде указано это, понятно, что аргументы функций должны удовлетворять условию $\tau-\tau_0<\xi<\tau$.

4. Здесь рассмотрим задачу для стержня, когда материал типа Кельвина-Фойгта

$$\sigma=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}+n\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right) \qquad (4.1)$$

В безразмерных координатах преобразованные перемещения и напряжения определятся

$$\overline{u}=Ce^{-pN\xi}\ ,\ \ \overline{\sigma}=-CpN^{-1}e^{-pN\xi}\ \ ,\ \ N=(1+np)^{-1/2} \qquad (4.2)$$

Граничное условие $\xi=0,\ \ \overline{\sigma}=-\dfrac{\sigma_0}{p}$ дает

$$\overline{u}=-\frac{\sigma_0}{p^2}Ne^{-pN\xi}\ \ ,\ \ \overline{\sigma}=-\frac{\sigma_0}{p}e^{-pN\xi} \qquad (4.3)$$

Оригиналы функций находятся после кропотливых преобразований на основании известных формул [6-9] и в окончательном виде имеют вид:

$$u(\xi,r)=\frac{2n\sigma_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\xi/n}^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi}{n}\left(z-\frac{\xi}{n}\right)}\right)\left\{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\tau}{n}}}\exp\left[-\left(y^2-\frac{z^2}{4y^2}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{n}-y^2}\right)+\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}-y^2}\operatorname{erf}\ \left(\sqrt{\eta}\right)d\eta\right]dy\right\}dz$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}=\sqrt{\frac{n}{\pi\tau}}e^{-\frac{\tau}{n}}\int\limits_0^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi z}{n}}\right)\exp\left[-\frac{n}{\tau}\left(z+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]dz+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi y}{n}}\right)dy\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\tau}{n}}}\exp\left\{-\frac{1}{4z^2}\left[4z^4\left(y+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]\right\}dz \qquad (4.4)$$

Последние формулы приведены скорее всего для того, чтобы показать, насколько они неудобные для практических целей и разумнее всего пользоваться асимптотическими методами. В частности, для малых времен для напряжения имеем выражение

$$\sigma(\xi,\tau) = -\sigma_0\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\pi\tau}}\right)\right] \tag{4.5}$$

Как известно, формулы (4.4) верны для $\xi < \tau$. Если нагрузка действует в интервале $0 \le \tau \le \tau_0$, то к (4.4) добавляются соответствующие слагаемые, где вместо τ должны фигурировать $\tau - \tau_0$, как в предыдущем пункте.

Как уже отмечалось, в п.2 решения упругих задач, когда напряжение приложенно на конце, адекватны задаче, когда край с постоянной скоростью движется в сторону другого при соответствующем подборе постоянных. Для вязкоупругого случая это не имеет места. Покажем это для рассматриваемого случая. Когда конец стержня движется в сторону второго со скоростью $c-u=-\frac{cR}{a}\tau$ при $\xi=0$, то при $c=\frac{a_0\sigma_0}{E}$ упругая задача эквивалентна предыдущей. Для данной задачи у нас $\overline{\sigma}$ определится как

$$\overline{\sigma} = -E\frac{c}{a_0}\,\frac{\sqrt{1+np}}{p}e^{-\frac{p\xi}{\sqrt{1+np}}} \tag{4.6}$$

Для малых времен оригинал функции (4.6) есть

$$\sigma(\xi\tau) = -E\frac{c}{a_0}\sqrt{\frac{n}{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\pi\tau}\right) \tag{4.7}$$

Как видно из (4.5) и (4.7), выражения для напряжения для обеих задач существенно отличаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
2. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд. ИЛ, 1961. 104 с.
3. Мовсисян Л.А. Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях. //Докл.Арм.ССР. 1972. Т. 55. №. С.211-218.
4. Берковиц Г.М. Продольный удар полубесконечной цилиндрической оболочки. // ПМ (тр. АОИМ). Сер. Е. 1963. Т. 30. № 3. С.31-39.
5. Мовсисян Л.А. О потере устойчивости цилиндрических оболочек при продольном ударе. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №6. С.57-64.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: ГИФМЛ, 1958. 678 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблица интегральных преобразований. Т.I. М.: Наука, 1969. 343 с.
8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 831 с.

Институт математики,
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
2.05.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Варданян С.А., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, тонкая пластинка, асимптотический метод.
Key words: micropolar, thermoelasticity, thin plate, asymptotic method

Ս. Ա. Վարդանյան, Ս. Հ. Սարգսյան
Միկրոպոլյար բարակ սալի ջերմաառաձգականության հավասարումների և եզրային պայմանների ասիմպտոտիկ անալիզը

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է ջերմային լարումների եզրային խնդիրը բարակ սալի եռաչափ տիրույթում, տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով առաձգականության ոչ սիմետրիկ, մոմենտային, միկրոպոլյար տեսության դրվածքով: Քանի որ եզրային խնդիրը սինգուլյար գրգռված է փոքր պարամետրով (որը բնութագրում է սալի բարակությունը), նրա լուծման համար կիրառվում է ասիմպտոտիկ մեթոդ: Ցույց է տրվում, որ եզրային խնդրի ասիմպտոտիկան էականորեն կապված է սալի նյութի անչափ առաձգական հաստատունների արժեքների հետ: Այս տեսանկյունից, կախված սալի նյութի առաձգական անչափ հաստատունների արժեքներից, կառուցվում են երեք տարբեր ասիմպտոտիկաներ: Նրանցից առաջինը հանգեցնում է միկրոպոլյար բարակ սալերի՝ ազատ պտույտներով ջերմաառաձգականության տեսությանը, երկրորդը՝ միկրոպոլյար սալերի կաշկանդված պտույտներով ջերմաառաձգականության տեսությանը, երրորդը՝ միկրոպոլյար սալերի ՝փոքր սահքային՝ կոշտությամբ ջերմաառաձգականության տեսությանը: Կառուցված և հետազոտված են նաև համապատասխան միկրոպոլյար սահմանային շերտերը:

S. A. Vardanyan, S. H. Sargsyan
Asymptotic analysis of the equations and boundary conditions of thermoelasticity of micropolar thin plates

In the framework of the asymmetrical momental micropolar theory in the present work the boundary value problem of thermal stresses in a three-dimensional thin plate with independent fields of displacements and rotations is studied on the basis of asymptotic method.
Depending on the values of physical dimensionless constants of the material three applied two-dimensional theories of thermoelasticity of micropolar thin plate are constructed (theories with independent rotations, with constrained rotations and with small shift rigidity).

В данной работе рассматривается краевая задача температурных напряжений в постановке несимметричной, моментной, микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в трехмерной тонкой области пластинки. Так как краевая задача сингулярно-возмущенная с малым параметром (который характеризует тонкостенность пластинки) для ее решения принимается асимптотический метод. Показывается, что асимптотика краевой задачи существенным образом связана со значениями безразмерных упругих констант материала пластинки. С этой точки зрения в зависимости от значения упругих безразмерных констант материала пластинки строятся три различные асимптотики. Первая из них приводит к теории термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением, второе – к теории термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением, третье – к теории термоупругости микрополярных пластин “с малой сдвиговой” жесткостью. Построены и изучены соответствующие микрополярные погранслои.

Введение. Трехмерная несимметричная теория термоупругости изложена в работах [1,2]. В работе [3] на основе симбиоза основных положений несимметричной теории упругости и уточненных теорий пластин и оболочек [4,5] построена теория микрополярных пластин и оболочек. В работе [6] изучена задача температурных напряжений в микрополярных пластинках и оболочках.

Один из основных методов построения общей теории тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости является асимптотический метод [7-11]. В работах [12, 13] разработан асимптотический подход для построения общей теории микрополярных тонких пластин. В зависимости от значений физических безразмерных констант микрополярного материала пластинки построены три различные теории микрополярных пластин со свободным вращением, со стесненным вращением и теории с “малой сдвиговой жесткостью”. Построены и изучены соответствующие теории микрополярных погранслоев. В данной работе асимптотический подход, разработанный в [12,13], развивается в теории температурных напряжений в микрополярных пластинках.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое теплопроводное тело. Оси α_1, α_2 криволинейной ортогональной системы координат отнесем к срединной плоскости пластинки, ось α_3 будет перпендикулярна к срединной плоскости пластинки. Будем исходить из основных уравнений статической задачи трехмерной несимметричной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТТУ с НППВ) [1,2]:

уравнения равновесия –

$$\sigma_{ji,j}=0\,,\ \mu_{ji,j}+\text{э}_{ijk}\sigma_{jk}=0 \tag{1.1}$$

физические соотношения –

$$\begin{cases}\sigma_{ji}=(\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+(\lambda\gamma_{kk}-\vartheta\Theta)\cdot\delta_{ij}\\ \mu_{ji}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ij}+\beta\chi_{kk}\delta_{ij}\end{cases} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения –

$$\gamma_{ij}=u_{j,i}-\text{э}_{kij}\cdot\omega_k\,,\quad \chi_{ij}=\omega_{j,i} \tag{1.3}$$

уравнение стационарной теплопроводности –

$$\Delta\Theta=0 \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij},μ_{ij} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{ij},χ_{ij} –компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\vec{u}$ – вектор перемещения; $\vec{\omega}$ – вектор независимого поворота точек тела-пластинки; Θ – функция температуры точек трехмерного тела пластинки; $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие константы материала пластинки; α_t – коэффициент теплового расширения материала пластинки, $\vartheta=(2\mu+3\lambda)\alpha_t$; Δ – трехмерный оператор Лапласа; H_i $i=1,\ 2$ представляют обратные величины коэффициентов Ламе для выбранной ортогональной системы координат.

На лицевых плоскостях $\alpha_3=\pm h$ пластинки считаются заданными: силовые и моментные напряжения и температура:

$$\sigma_{3i}=\pm p_i^{\pm}\,,\quad \mu_{3i}=\pm m_i^{\pm}\quad (i=1,\ 2,\ 3),\qquad \Theta=T^{\pm}\quad \text{при}\ \ \alpha_3=\pm h \tag{1.5}$$

где $\pm p_i^{\pm}$, $\pm m_i^{\pm}$ $(i=1,2,3)$ – компоненты внешних заданных усилий и моментов, а $T^{\pm}$ – значения температуры на лицевых плоскостях пластинки.

На боковой цилиндрической поверхности $(\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2)$ пластинки, в общем случае, для механической части задачи считаем заданными граничные условия смешанного типа:

$$\sigma_{ji}n_j=p_i^*,\quad \mu_{ji}n_j=m_i^*\quad \text{на}\ \ \Sigma_1;\quad \vec{u}=\vec{u}_*,\ \ \vec{\omega}=\vec{\omega}_*\quad \text{на}\ \ \Sigma_2 \tag{1.6}$$

где p_i^*, m_i^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов; $\vec{u}_*$, $\vec{\omega}_*$ – заданные векторы перемещения и поворота; n_i – компоненты вектора нормали к боковой цилиндрической поверхности пластинки. На боковой цилиндрической поверхности Σ для температурного поля может быть задана либо температура, либо граничное условие второго рода, либо граничное условие типа теплообмена (для определенности далее примем, что на $\sum$ также задана температура).

Решение поставленной задачи (1.1)-(1.6) для пластинки, как это имеет место в классической теории упругости, складывается из суммы решений симметричной по α_3 и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по α_3 величины будут σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{21}, μ_{13}, μ_{23}, μ_{31}, μ_{32}, u_1, u_2, ω_3, Θ, нечетные – σ_{31}, σ_{13}, σ_{32}, σ_{23}, μ_{11}, μ_{22}, μ_{33}, μ_{12}, μ_{21}, ω_2, ω_3, u_3; в обратно-симметричной задаче – наоборот).

Предполагается, что толщина пластинки мала по сравнению с характерным размером ее a в срединной плоскости пластинки ($2h << a$, $\delta = h/a << 1$ –малый геометрический параметр, который будет считаться основным малым параметром поставленной задачи).

Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) и температурное состояние тонкого трехмерного тела, образующего пластинку, состоит из внутреннего НДС и температуры, охватывающей всю пластинку и погранслои, локализующиеся вблизи боковой поверхности пластинки. Для приближенного определения как внутреннего НДС и температуры, так и краевого НДС и температуры будем применять асимптотический подход, развитый в работах [12–14].

2. Введение безразмерных координат, величин и безразмерных физических параметров. Для построения внутреннего итерационного процесса в уравнениях (1.1)-(1.6) НТТУ с НППВ перейдем к безразмерной системе координат и к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi = \frac{\alpha_1}{a}, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{a}, \quad \zeta = \frac{\alpha_3}{h} \tag{2.1}$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \; \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \; \bar{\mu}_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{a\mu}, \; \bar{\Theta} = \frac{\Theta}{T_0}, \; \bar{\alpha}_t = \alpha_t \cdot T_0 \tag{2.2}$$

где T_0 – некоторая определенная температура.

При определении как внутреннего НДС, так и краевого НДС пластинки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала пластинки. С этой точки зрения будем вводить следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{\mu}, \quad \frac{\beta}{a^2\mu}, \quad \frac{\gamma}{a^2\mu}, \quad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \tag{2.3}$$

в которых присутствует также масштабный фактор.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s Q^{(s)} \tag{2.4}$$

где Q –любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимых поворотов и температура; q – натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений. В зависимости от значений безразмерных физических констант (2.3) ниже строятся три разные асимптотики.

3. **Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.** Будем предполагать, что безразмерные физические константы (2.3) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \qquad \frac{\beta}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\gamma}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \sim 1 \tag{3.1}$$

В этом случае в выражении (2.4) для q получим:

для симметричной по ζ задачи (термоупругое обобщенное плоское напряженное состояние):

$$\begin{aligned} &q = 2 \ \text{для} \ \bar{\sigma}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 12,\ 21),\ \bar{\mu}_{i3},\ \bar{\mu}_{3i},\ \bar{u}_i \ (i = 1,\ 2),\ \omega_3,\ \bar{\Theta}, \\ &q = 1 \ \text{для} \ \bar{\sigma}_{i3},\ \bar{\sigma}_{3i} (i = 1,\ 2),\ \bar{\mu}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 21),\ \bar{u}_3,\ \omega_i (i = 1,\ 2), \\ &q = 0 \ \text{для} \ \bar{\sigma}_{33}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

для обратно-симметричной по ζ задачи (термоупругий изгиб):

$$\begin{aligned} &q = 2 \ \text{для} \ \overset{\text{т}}{\bar{\sigma}}_{11},\ \overset{\text{т}}{\bar{\sigma}}_{22},\ \bar{\Theta} \\ &q = 1 \ \text{для} \ \bar{\sigma}_{i3},\ \bar{\sigma}_{3i} (i = 1,\ 2),\ \bar{u}_3,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \bar{\mu}_{mn} \ (mn: 11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 21) \\ &q = 0 \ \text{для} \ \overset{\text{с}}{\bar{\sigma}}_{11},\ \overset{\text{с}}{\bar{\sigma}}_{22},\ \bar{\sigma}_{33},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\mu}_{i3},\ \bar{\mu}_{3i},\ \bar{u}_i (i = 1, 2),\ \omega_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В исходном асимптотическом приближении получены следующие качественные результаты:

–для задачи плоского напряженного состояния: перемещения u_1, u_2 и независимый поворот ω_3 постоянны по толщине пластинки, а перемещение u_3 и независимые повороты ω_1, ω_2 – линейные функции от ζ; силовые напряжения σ_{mn} $(mn: 11, 12, 21, 22)$ и моментные напряжения μ_{kl} $(kl: 13, 23, 31, 32)$ тоже постоянны по толщине пластинки, а силовые напряжения σ_{kl} и моментные напряжения μ_{mn}, μ_{33} –линейные функции от ζ; σ_{33} состоит из постоянного и квадратичного по ζ частей;

– для задачи изгиба: перемещение u_3 состоит из постоянного и квадратичного по ζ частей, независимые повороты ω_1, ω_2 постоянны по толщине пластинки, независимый поворот ω_3 – линейная функция от ζ; силовые напряжения $\sigma_{kl} (kl: 13, 23, 32, 31)$ состоят из постоянного и квадратичного по ζ частей, моментные напряжения μ_{mn}, μ_{33} $(mn: 11, 12, 21, 22)$ постоянны по толщине пластинки, моментные напряжения μ_{kl} – линейные функции от ζ, а перемещения u_1, u_2 и силовые напряжения σ_{mn}, σ_{33} состоят из линейного и кубического по ζ частей.

Отметим, что как при асимптотике (3.2), так и при асимптотике (3.3) для температуры получим линейный закон изменения по толщине пластинки. Этот результат независен от значений физических безразмерных констант (2.3) (он имеет место как при (2.1), так и при других значениях этих физических параметров рассматриваемых ниже).

Введем вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты.

Для задачи обобщенного термоупругого плоского напряженного состояния :

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\ \left(ii:11,22,33\right),\ \ S_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}d\alpha_3,\ \ L_{kl}=\int_{-h}^{h}\mu_{kl}d\alpha_3,\ \ T_1=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\text{И}d\alpha_3$$

$$M_{kl}=\int_{-h}^{h}\sigma_{kl}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad \Lambda_{mn}=\int_{-h}^{h}\mu_{mn}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad \Lambda_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}\alpha_3 d\alpha_3 \tag{3.4}$$

Для задачи термоупругого изгиба:

$$N_{kl}=\int_{-h}^{h}\sigma_{kl}d\alpha_3,\qquad M_{mn}=\int_{-h}^{h}\sigma_{mn}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad M_{33}=\int_{-h}^{h}\sigma_{33}\alpha_3 d\alpha_3 \tag{3.5}$$

$$L_{mn}=\int_{-h}^{h}\mu_{mn}d\alpha_3,\ \ L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3,\ \ \Lambda_{kl}=\int_{-h}^{h}\mu_{kl}\alpha_3 d\alpha_3,\qquad T_2=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}\text{И}\alpha_3 d\alpha_3$$

Как результат асимптотического метода внутреннего итерационного процесса, приведем при $s=0$ двумерные уравнения микрополярных термоупругих пластин со свободным вращением:

Обобщенное плоское термоупрогое напряженное состояние:

уравнения равновесия

$$\begin{gathered}
H_1\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(S_{12}+S_{21}\right)=-\left(p_1^++p_1^-\right)\\
H_1\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(S_{12}+S_{21}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)=-\left(p_2^++p_2^-\right)\\
H_1\frac{\partial L_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}L_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}L_{23}+S_{12}-S_{21}=-\left(m_3^++m_3^-\right)
\end{gathered}\tag{3.6}$$

соотношения упругости

$$T_{11}=\frac{2Eh}{1-\upsilon^2}\left[\Gamma_{11}+\upsilon\Gamma_{22}\right]-\frac{2Eh}{1-\text{x}}б_t T_1\ \ \left(1\leftrightarrows 2\right),\ \ S_{12}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{12}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{21}\right]\ \left(1\leftrightarrows 2\right)$$

$$L_{13}=2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{13}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{31}\quad\left(1\rightarrow 2\right) \tag{3.7}$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered}
\Gamma_{11}=H_1\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2\ \ \left(1\rightleftarrows 2\right),\ \ \Gamma_{12}=H_1\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1-O_3\\
\Gamma_{21}=H_2\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2+O_3\ ,\ \ k_{13}=H_1\frac{\partial O_3}{\partial\alpha_1}\ \ \left(1\rightarrow 2\right)
\end{gathered}\tag{3.8}$$

Здесь $L_{31}=h\left(m_1^+-m_1^-\right)\ \left(1\rightarrow 2\right),\quad T_1=\left(T^++T^-\right)/2.$ (3.9)

Термоупругий изгиб микрополярных пластин

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^+ + p_3^-\right)+\frac{1}{2}\nabla^2 M_T \quad (3.10)$$

$$H_1\frac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^+ + m_1^-\right)$$

$$H_1\frac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+L_{21}\right)-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^+ + m_2^-\right)$$

соотношения упругости

$$N_{13}=2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{13}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}N_{31} \quad \left(1\to 2\right)$$

$$L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{21}\right] \quad \left(1\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}}2\right) \quad (3.11)$$

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\gamma+\beta\right)}{2\gamma+\beta}k_{11}+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}k_{22}\right]+\frac{\beta}{2\gamma+\beta}L_{33} \quad \left(1\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}}2\right)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2, \qquad \Gamma_{23}=H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1 \quad (3.12)$$

$$k_{11}=H_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2 \quad \left(1\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}}2\right), \quad k_{12}=H_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1 \quad \left(1\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}}2\right)$$

здесь

$$N_{3i}=h\left(p_i^+ - p_i^-\right)+\frac{3}{2}H_i\frac{\partial M_T}{\partial\alpha_i} \quad \left(i=1,2\right)$$

$$M_T=-\frac{Eh^2}{3(1-x)}б_t\left(T^+ - T^-\right), \quad L_{33}=h\left(m_3^+ - m_3^-\right) \quad (3.13)$$

Построив термоупругий микрополярный погранслой и изучив взаимодействие внутренней задачи и погранслоев, получим граничные условия для двумерных уравнений пластин.

Для обобщенного термоупругого плоского напряженного состояния микрополярных пластин со свободным вращением:

1) для загруженного края

$$T_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^* d\alpha_3, \qquad S_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^* d\alpha_3, \qquad L_{13}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_3^* d\alpha_3 \quad (3.14)$$

2) для жестко- защемленного края

$$V_1\Big|_{\Gamma}=0, \qquad V_2\Big|_{\Gamma}=0, \qquad \Omega_3\Big|_{\Gamma}=0 \quad (3.15)$$

Для термоупругого изгиба микрополярных пластин со свободным вращением

1) для загруженного края

$$N_{13}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_3^* dx_3-\frac{1}{2}\frac{\partial M_T}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma}, \qquad L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^* dx_3, \qquad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^* dx_3-M_T\Big|_{\Gamma} \quad (3.16)$$

2) для свободно опертого края

$$W\Big|_{\Gamma}=\frac{1}{2h}\frac{2\alpha-\mu}{4\mu\alpha}M_T\Big|_{\Gamma},\quad L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*dx_3,\quad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3-M_T\Big|_{\Gamma} \qquad (3.17)$$

3) для жестко- защемленного края

$$W\Big|_{\Gamma}=-\frac{1}{2h}\frac{1}{4\mu}M_T\Big|_{\Gamma},\quad \Omega_1\Big|_{\Gamma}=0,\quad \Omega_2\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (3.18)$$

Система уравнений (3.6)-(3.8) и граничные условия (3.14), (3.15) представляют собой математическую модель обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Система уравнений (3.10)-(3.12) и граничные условия (3.16)-(3.18) представляют собой математическая модель термоупругого изгиба микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что как определяющая система обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением, так и определяющая система термоупругого изгиба микрополярных пластин со свободным вращением являются системами шестого порядка с тремя граничными условиями на каждом боковом контуре срединной плоскости пластинки.

4. Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением.

Предположим, что безразмерные физические константы материала пластинки (2.3) теперь представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu}\sim 1,\qquad \frac{\beta}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\beta},\qquad \frac{\gamma}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\gamma},\qquad \frac{\varepsilon}{a^2\mu}\sim\delta^2\overline{\varepsilon} \qquad (4.1)$$

где $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\varepsilon}$ – величины порядка единицы.

В этом случае для краевой задачи (1.1)-(1.7) НТТУ имеет место отличное от (3.2), (3.3) асимптотика. Ограничимся задачей изгиба. В выражении (3.4) для q будем иметь:

$$\begin{aligned}
&q=0 \text{ для } \overline{\sigma}_{33},\ \overline{\mu}_{3i},\ \overline{\mu}_{i3}\ (i=1,\ 2),\quad q=3 \text{ для } \overline{u}_3,\ \omega_i\ (i=1,\ 2)\\
&q=1 \text{ для } \overline{\sigma}_{3i},\ \overline{\sigma}_{i3}\ (i=1,\ 2),\ \overline{\mu}_{mn}\ (mn:11,22,33,12,21)\\
&q=2 \text{ для } \overline{\sigma}_{mn}\ (mn:11,22,12,21),\ \overline{u}_i\ (i=1,\ 2),\ \omega_3,\ \overline{\Theta}
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Асимптотика (4.1), (4.2) имеет следующие особенности (исходное асимптотическое приближение):

а) повороты точек срединной плоскости пластинки выражаются через прогибы пластинки в этих точках.

б) температура по толщине пластинки распределена линейным образом; далее часть величин можно объединить, относительно которых получаются двумерные определяющие уравнения. Система этих уравнений представляет систему двумерных уравнений термоупругости микрополярных пластин со стесненным вращением. Для величин μ_{33} , μ_{31}, μ_{32} получаются отдельные дифференциальные уравнения по независимой переменной ζ, где переменные ξ, η выступают как параметры.

Главным результатом является определяющая система двумерных уравнений термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^++p_3^-\right)$$

$$H_1\frac{\partial\left(L_{11}-M_{12}\right)}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial\left(L_{21}-M_{22}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-M_{12}-L_{22}-M_{21}\right)-$$

$$-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{12}+M_{11}+L_{21}-M_{22}\right)+N_{23}=-\left(m_1^++m_1^-\right)+h\left(p_2^+-p_2^-\right)\qquad(4.3)$$

$$H_1\frac{\partial\left(L_{12}+M_{11}\right)}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial\left(L_{22}+M_{21}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+M_{11}+L_{21}-M_{22}\right)-$$

$$-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}+M_{21}-L_{11}+M_{12}\right)-N_{13}=-\left(m_2^++m_2^-\right)-h\left(p_1^+-p_1^-\right)$$

физико-геометрические соотношения

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\upsilon^2)}\left[\left(H_1\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_2\right)+\upsilon\left(H_2\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_1\right)\right]-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2,\quad\left(1\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{}}2\right)$$

$$M_{12}=\frac{2Eh^3}{3(1+\upsilon)}\left(H_1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_1+H_2\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_2\right)-\frac{h\left(k_1-\operatorname{th}k_1\right)\left(m_3^+-m_3^-\right)}{k_1}$$

$$M_{21}^{(0)}=\frac{Eh^3}{3(1+\upsilon)}\left(H_1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\beta_1+H_2\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\beta_2\right)+\frac{h\left(k_1-\operatorname{th}k_1\right)\left(m_3^+-m_3^-\right)}{k_1}$$

$$L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(H_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\right)+\left(\gamma-\varepsilon\right)\left(H_2\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\right)\right]\quad\left(1\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{}}2\right)$$

$$L_{11}=4h\gamma\left(H_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2\right)+\frac{h\ \operatorname{th}k_1}{k_1}\frac{\beta}{2\gamma+\beta}\left(m_3^+-m_3^-\right)\quad\left(1\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{}}2\right)\qquad(4.4)$$

здесь

$$\beta_1=h\Omega_2=-hH_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1},\qquad\beta_2=-h\Omega_1=-hH_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\qquad(4.5)$$

Используя уравнения (4.3), (4.4), получим одно разрешающее уравнение для теории термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

$$D^*\nabla^2\nabla^2W=h\left(H_1\frac{\partial\left(p_1^+-p_1^-\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(p_1^+-p_1^-\right)+H_2\frac{\partial\left(p_2^+-p_2^-\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(p_2^+-p_2^-\right)\right)+$$

$$+H_1\frac{\partial\left(m_2^++m_2^-\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(m_2^++m_2^-\right)-H_2\frac{\partial\left(m_1^++m_1^-\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(m_1^++m_1^-\right)+$$

$$+\left(p_3^++p_3^-\right)+\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t\nabla^2T_2\qquad(4.6)$$

где D^* – жесткость на изгиб микрополярных пластин со стесненным вращением:

$$D^*=D+2h(\gamma+\varepsilon),\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-x^2)}\qquad(4.7)$$

где D –классическая жесткость пластинки.

Отметим, что без учета температурной части задачи, по методу гипотез разрешающее уравнение (4.6) впервые получено в работе [15].

Разрешающее уравнение термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением имеет вид уравнения Софи Жермен-Лагранжа по классической теории для термоупругого изгиба пластин. Главная разница здесь в жесткостях.

Для величин μ_{33}, μ_{3n} $\left(n=1,2\right)$ получим следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{\mu}_{33}}{\partial \zeta^2} - k_1^2 \overline{\mu}_{33} = 0 \\ \overline{\mu}_{33}\left(\zeta = \pm 1\right) = \pm \tilde{m}_3^{\pm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{\mu}_{3n}}{\partial \zeta^2} - k_2^2 \overline{\mu}_{3n} = \zeta \overset{1}{F}_n\left(\xi,\eta\right) + \operatorname{sh} k_1 \zeta \cdot \overset{2}{F}_n\left(\xi,\eta\right) \\ \overline{\mu}_{3n}\left(\zeta = \pm 1\right) = \pm m_n^{\pm} \end{cases} \tag{4.8}$$

Построив соответствующий термоупругий микрополярный погранслой и изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоев, получим граничные условия для двумерных уравнений термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением:

1) для загруженного края

$$\left.\left(N_{13} + H_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(M_{12} - L_{11}\right)\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} \left[p_3^* + H_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\alpha_3 p_2^* - m_1^*\right) \right] d\alpha_3$$
$$\left.\left(L_{12} + M_{11}\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} \left(\alpha_3 p_1^* + m_2^*\right) d\alpha_3 \tag{4.9}$$

2) для свободно опертого края

$$\left.w\right|_{\Gamma} = 0, \qquad \left.\left(L_{12} + M_{11}\right)\right|_{\Gamma} = \int_{-h}^{h} (\alpha_3 p_1^* + m_2^*) d\alpha_3 \tag{4.10}$$

3) для жестко- защемленного края

$$\left.W\right|_{\Gamma} = 0, \qquad \left.H_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{4.11}$$

Система уравнений (4.3), (4.4) и граничные условия (4.9)–(4.11) представляют собой математическую модель термоупругого изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением. Эта система является системой четвертого порядка (как в классической теории термоупругости пластин) с двумя граничными условиями на каждом боковом контуре срединной плоскости пластинки.

Отметим, что граничные условия (4.9) впервые по методу гипотез получены в работе [16].

5. Двумерные уравнения термоупругости микрополярных пластин “с малой сдвиговой жесткостью”.

В начале работы было сказано, что в зависимости от значений безразмерных упругих констант материала пластинки (2.3) возможно построение разных асимптотик краевой задачи (1.1)-(1.6) НТТУ с НППВ. В предыдущих двух пунктах построены и изучены две разные асимптотики такого рода. На основе этих асимптотик построены две различные теории термоупругости микрополярных пластин со свободным вращением и со стесненным вращением. Построены также соответствующие теории погранслоев.

В зависимости от значений безразмерных упругих констант (2.3) возможно построение третьей, отличной от предыдущих, асимптотики. Для величин (2.3) примем представления:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim \delta^2\bar{\alpha}, \qquad \frac{\beta}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\gamma}{a^2\mu} \sim 1, \qquad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \sim 1 \tag{5.1}$$

Будем рассматривать задачу изгиба. В разложениях (2.4) для q получим:

$$\begin{cases} q = 0 \text{ для } \bar{\sigma}_{33}, \quad q = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_{3i}, \ \bar{\sigma}_{i3} \ (i = 1,\ 2), \ \bar{\mu}_{33} \\ q = 2 \text{ для } \bar{\sigma}_{mn} \ (mn: 11, 22, 12, 21), \ \bar{u}_i \ (i = 1,\ 2), \ \bar{\mu}_{3i}, \ \bar{\mu}_{i3} \ (i = 1,\ 2), \ \omega_3, \ \bar{\Theta} \\ q = 3 \text{ для } \bar{u}_3, \ \omega_i \ (i = 1,\ 2), \ \bar{\mu}_{mn} \ (mn:\ 11, 22, 12, 21) \end{cases} \tag{5.2}$$

В исходном асимптотическом приближении получены следующие качественные результаты: перемещение u_3 и независимые повороты ω_1, ω_2 постоянны по толщине пластинки, а перемещения u_1, u_2 и независимый поворот ω_3 – линейные функции от ζ; силовые напряжения $\sigma_{kl}\ (kl: 13, 23, 32, 31)$ и моментные напряжения μ_{mn}, μ_{33} $(mn: 11, 12, 21, 22)$ постоянны по толщине пластинки, а силовые напряжения σ_{mn}, σ_{33} и моментные напряжения μ_{kl} – линейные функции от ζ.

Отметим, что при асимптотике (5.1), (5.2) в уравнениях термоупругости микрополярных пластин величины “чисто моментного” происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений, для которой получены отдельные граничные условия. Для “силовой” части задачи получим своеобразную сдвиговую теорию пластин, в которой углы поворота обусловлены “чисто моментной ” частью задачи.

Сформулируем эти отдельные группы уравнений.

Уравнения термоупругости “чисто моментной” части задачи изгиба пластин:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} H_1 \dfrac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1} + H_2 \dfrac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2} - \dfrac{H_1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\left(L_{11} - L_{22}\right) - \dfrac{H_2}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\left(L_{12} + L_{21}\right) = -\left(m_1^+ + m_1^-\right) \\ H_1 \dfrac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1} + H_2 \dfrac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2} - \dfrac{H_1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\left(L_{12} + L_{21}\right) - \dfrac{H_2}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\left(L_{22} - L_{11}\right) = -\left(m_2^+ + m_2^-\right) \end{cases} \tag{5.3}$$

соотношения термоупругости

$$L_{12} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12} + (\gamma-\varepsilon)k_{21}\right] \ \left(1 \rightleftarrows 2\right); \ L_{11} = 2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}k_{11} + \frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}k_{22}\right] \ \left(1 \rightleftarrows 2\right) \tag{5.4}$$

геометрические соотношения

$$k_{11} = H_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} - \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\Omega_2, \qquad k_{12} = H_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\Omega_1 \ \left(1 \rightleftarrows 2\right) \tag{5.5}$$

Здесь $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ – компоненты изгиба-кручения точек срединной плоскости пластинки, Ω_1, Ω_2 – независимые повороты вокруг осей α_1 и α_2 точек срединной плоскости пластинки.

Уравнения термоупругости “чисто силовой” части задачи изгиба пластин:

уравнения равновесия

$$H_1\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}N_{13}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}N_{23}=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)$$

$$N_{31}-\left[H_1\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)-2\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}H\right]=h\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right) \quad (5.6)$$

$$N_{32}-\left[H_1\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}-2\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}H-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)\right]=h\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right)$$

физические соотношения

$$N_{13}=2h\cdot 4б\Gamma_{13}+N_{31}\,,\quad N_{23}=2h\cdot 4б\Gamma_{23}+N_{32}$$

$$M_{11}=-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon^2\right)}\left(K_{11}-\upsilon K_{22}\right)-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2$$

$$M_{22}=-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon^2\right)}\left(K_{22}-\upsilon K_{11}\right)-\frac{2Eh^2}{3\left(1-\upsilon\right)}\alpha_t T_2 \quad (5.7)$$

$$M_{12}=M_{21}=H=\frac{4\mu h^2}{3}K_{12}$$

здесь $T_2=\left(T^{+}-T^{-}\right)/2$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2,\quad \Gamma_{23}=H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1,\quad K_{11}=h\left[H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{H_2^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right]$$

$$K_{22}=h\left[H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{H_1^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right] \quad (5.8)$$

$$K_{12}=-h\left[H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right)+H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right)\right]$$

Здесь, W – перемещение по оси α_3 (прогиб пластинки), а Γ_{13}, Γ_{23} – сдвиговые деформации, K_{11}, K_{22}, K_{12} – изгибно-крутильные деформации в точках срединной плоскости пластинки.

Система (5.6)-(5.8) “силовой” двумерной части задачи изгиба пластин может привести к одному разрешающему уравнению относительно перемещения $W\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$:

$$D\nabla^2\nabla^2 W+8h\alpha\left[\left(H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right)\left(H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\Omega_2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right)\left(H_2\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\Omega_1\right)\right]=$$

$$=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right)+h\left(H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right)\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right)+$$

$$+\left(H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right)\left(p_2^+-p_2^-\right)+\frac{2Eh^2}{3(1-\upsilon)}\alpha_t\nabla^2T_2 \qquad (5.9)$$

Если коэффициент $8h\alpha$ назовем сдвиговой-моментной жесткостью, имея ввиду, что коэффициент α – это тоже модуль сдвига как и классический модуль μ, то представленную теорию с учетом (5.1) можем трактовать как теорию термоупругости микрополярных пластин с “малой сдвиговой жесткостью”.

Отдельно, для случая (5.1) строятся микрополярные термоупругие погранслои и изучаются свойства погранслойных решений. Далее изучается взаимодействие внутренней задачи и погранслоев. На основе этих исследований получим граничные условия двумерных уравнений (5.3)-(5.5) и (5.6)-(5.8):

1) для загруженного края:

$$L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3,\qquad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3$$

$$\left(N_{13}+H_2\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3+\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3d\alpha_3,\qquad M_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3d\alpha_3 \qquad (5.10)$$

2) для свободно опертого края

$$W\Big|_{\Gamma}=0,\qquad M_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3d\alpha_3;\quad L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*dx_3,\quad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3. \qquad (5.11)$$

3) для жестко- защемленного края:

$$W\Big|_{\Gamma}=0,\qquad H_1\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\Big|_{\Gamma}=0,\quad \Omega_1\Big|_{\Gamma}=0,\quad \Omega_2\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (5.12)$$

Система уравнений (5.3)-(5.8) и граничные условия (5.10)-(5.12) представляют собой математическую модель термоупругого изгиба микрополярных пластин с “малой сдвиговой жесткостью”.

Сформулированы также погранслойные граничные задачи, т.е. дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия погранслойных задач.

Заключение. Представлен асимптотический подход построения двумерных математических моделей термоупругости микрополярных тонких пластин на основе НТТУ с НППВ. Существенен тот факт, что конкретная математическая модель термоупругости микрополярных тонких пластин зависит от значений безразмерных физических констант микрополярного тела пластинки, в которых присутствует масштабный фактор. Следовательно, построенные математические модели термоупругости микрополярных тонких пластин возможно найдут применение при изучении соответствующих задач структурной механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости. //Прикл. Механика. 1967. Т. III. Вып. 1. С. 3-17.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.
3. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266с.
5. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
6. Амбарцумян С. А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №3. С. 20-33.
7. Green A. E. Boundary-layer equations in the linear theory of elastic shells// Proc. Roy. Soc., Ser. A. 1962. Vol. 269. №1339. P. 39-49.
8. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд . Тбилисск. Ун-та, 1975.С. 51-149.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
10. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Наука, 1997. 414 с.
11. Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 260с.
12. Sargsyan S.H. On some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16./Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P. 201-210.
13. Саркисян С. О. Граничные задачи теории пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1.
14. Sargsyan S. H., Vardanyan S. A. Asymptotic Theory of Thermoelastic Micropole Thin Plates// Proceedings of the 5-th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. 8-11 June 2003, Blacksburg. V. A. Vol. 1. MA5-3-1 – MA5-3-4.
15. Геворкян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений// Прикл. Механика. 1966. Т.2. Вып. 10. С. 36-43.
16. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикл. Механика. Тр. Америк. Об-ва инж.- механиков. Серия Е. 1964. Т. 31, №4. С. 149-150.

Гюмрийский гос. Педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 16.04.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

HARMONIC OSCILLATIONS OF A PIEZOCERAMIC HALF-SPACE WITH A TUNNEL OPENING EXCITED BY A SYSTEM OF SURFACE ELECTRODES

Bardzokas D.I., Filshtinsky M.L.

Keywords: harmonic vibrations, piezoceramic half-space, electroelasticity, antiplane deformation, tunnel cavity.
Ключевые слова: гармонические колебания, пьезокерамическое полупространство, электроупругость, антиплоская деформация, туннельная полость.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի

Մակերևույթային էլեկտրոդների համակարգի միջոցով թունելային անցքով պյեզոկերամիկ կիսատարածության մեջ ներդաշնակ տատանումների գրգռումը

Հոդվածում ընդհանրացվում է նախկին [9] աշխատանքում հետազոտված թունելային անցքով էլեկտրոդավորված անսահմանափակ միջավայրի համար էլեկտրոառաձգականության խառը խնդիրը կիսատարածության դեպքում՝ եզրային մակերևույթի վրա տարբեր եզրային պայմանների համար: Բերվում է թվային օրինակ:

Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский

Возбужденные посредством системы поверхностных электродов гармонические колебания пьезокерамического полупространства с туннельным отверстием

В данной статье обобщается ранее исследованная в [9] смешанная задача электроупругости для неограниченной среды с электродированной туннельной полостью на случай полупространства с отличными на его границе краевыми условиями. Приводится численный пример.

An antiplane stationary dynamic problem of electroelasticity in a piezoceramic half-space weakened by a tunnel cavity with a system of active surface electrodes is studied. Two types of boundary conditions on the boundary of a half-space are considered: (1) a half-space boundary free of forces and bounded with vacuum; (2) a half-space boundary connected and covered by grounded electrodes. Applying the ideas of the method of images integral representations of the solutions which automatically satisfy the edge conditions on the boundary of a half-space and also the conditions of radiation at infinity are constructed. Allowing for these representations the boundary problem of electroelasticity is reduced to a system of singular integrodifferential equations of the second kind with explosive kernels. Results of parametric investigations characterizing the behaviour of the components of an electroelastic field on the boundary and in the area of a piecewise-homogeneous halfspace are given.

1. Introduction

In piezoelectric media with failures the interaction of electric and mechanical fields may be brought to electric, mechanical and mixed electromechanical breakages. The edges of the electrodes are the sources of concentration of the components of an electroelastic field and consequently, in these areas microcracks or break-downs may appear [1]. Recently, numerous attempts have been made to analyse a crack in piezoelectric materials. The first attempt to analyze the piezoelectric crack problems was made by [2], who analysed a slit crack in a piezoelectric solid. He assumed that the crack face was traction free, but that the cracks were permeable, i.e. that the electric potential and normal components of the electric displacement are continuous across the crack surface. As discussed by Suo [3] this assumption is not physically realistic as there will clearly be a potential drop across the lower capacitance crack. Pak [4] has also studied extensively the mode III crack problem in a piezoelectric solid and the electroelastic fields in and around a circular piezoelectric inhomogenity subjected to antiplane loading. In the mode III problem, Pak [5] has employed a complex variable approach to solve the stress and electric field intensity factor for various electroelastic loading configurations.

Assuming that the electrodes are weightless and have negligibly small rigidity many static and dynamic boundary problems of electroelasticity of piezoelectrics with surface electrodes were considered Kudryavtsev [6], Parton and Kudryavtsev [7], Bardzokas and Senik [8], Bardzokas [1].

In the given article investigated by Bardzokas and Filshtinsky [9], a mixed antiplane problem of electroelasticity for an unbounded medium with an electroded tunnel cavity is generalized for a case of a halfspace at different edge conditions on its boundary. Numerical examples are given.

2. Statement of a problem

Referring to Cartesian coordinates $Ox_1x_2x_3$, let the piezoceramic half-space be weakened by a tunnel along the symmetry axis of material x_3 opening, the cross-section of which is limited by an arbitrary (in some way) smooth contour C (Fig.1a). On a surface which is free from mechanical stress, there are positioned $2n$ infinite (in the direction of the axis x_3) thin electrodes with given differences of electric potentials and the unelectroded areas of the opening are conjugated with vacuum (air). The boundaries of the k-th electrode are determined by quantities α_{2k-1} and α_{2k} $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ and the electric potential on it is prescribed by quantity $\phi_k^* = \mathrm{Re}\left(\Phi_k^* e^{-i\omega t}\right)$. It is assumed that the cross-section of the cavity is symmetrical to the axis x_2 and the electrodes are weightless and have negligibly small rigidity. The disposition of the electrodes cannot be quite arbitrary; the conditions of matching will be given below.

In quasistatic approximation the system of equations of an antiplane boundary problem of electroelasticity is reduced to differential equations with respect to displacement $u_3 = \mathrm{Re}\left(U_3 e^{-i\omega t}\right)$ and electric potential $\phi = \mathrm{Re}\left(\Phi e^{-i\omega t}\right)$ Parton and Kufdryavtsev [7].

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad e_{15}\nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \phi = 0 \tag{2.1}$$

Here $c_{44}^E, \varepsilon_{11}^S, e_{15}$ and ρ are the shear modulus measured at constant electric field, the dielectric permeability measured at constant deformation, the piezoelectric constant and the mass density of the material, respectively, t is time.

From system (2.1) the following relations follow

$$\nabla^2 u_3 - c^{-2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \nabla^2 F = 0$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} u_3 + F, c = \sqrt{\frac{c_{44}^E\left(1+k_{15}^2\right)}{\rho}}, k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^S}} \tag{2.2}$$

where c is the shear wave velocity in a piezoelectric medium, k_{15} is the factor of an electromechanical connection.

The components of the electroelastic field are expressed by functions u_3 and F according to the formulas

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^{2}\right)u_3 + e_{15}F\right] \tag{2.3}$$

$$D_1 - iD_2 = -2\varepsilon_{11}^{S}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2\frac{\partial}{\partial z}\left(F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^{S}}u_3\right), z = x_1 + ix_2$$

Here σ_{ij} are stresses of longitudinal shear, D_j and E_j are the components of the vector induction and strengths of the electric field, respectively.

Mechanical and electric boundary conditions on the surface of the cavity allowing for (2.2), (2.3) may be represented in the form

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^{2}\right)u_3 + e_{15}F\right\} = 0 \text{ on } C$$

$$\phi = F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^{S}}u_3 = \phi^*\left(\zeta, t\right), \zeta \in C_\phi$$

$$D_n = -\varepsilon_{11}^{S}\frac{\partial F}{\partial n} = 0 \text{ on } C \setminus C_\phi \tag{2.4}$$

Here C_ϕ is a part of the contour C corresponding to the electrodized surface of the cavity; differential operator $\partial/\partial n$ designates a derivative along the normal to the contour C.

Equations (2.2) recorded for the peak values of functions u_3 and F obtain the form

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^{S}}U_3 + F^*, \gamma = \frac{\omega}{c} \tag{2.5}$$

where γ is the wave number.

Consider two types of boundary conditions on the boundary of a half-space $\left(x_2 = 0\right)$

a) a half-space is fixed rigidly and covered by grounded electrodes along the boundary

$$u_3 = 0, \phi = 0 \tag{2.6}$$

b) a halfspace is free from forces and is bounded with vacuum

$$\sigma_{23} = 0, D_2 = 0 \tag{2.7}$$

Hence, the edge problem of electroelasticity is reduced to the definition of functions U_3 and F^* from differential equations of Helmholtz and Laplace (2.5) and boundary conditions (2.4), (2.6) or (2.7).

3. Singular Integrodifferential Equations of a Boundary Value Problem

To solve this problem it is necessary to have integral representations of the solutions which satisfy conditions (2.6) or (2.7) and also conditions of radiation at infinity automatically. Using the conception of the method of images More and Feshbah [9] we represent the sought-for functions in the form

$$U_3\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{c_{44}^{E}}\int_C p\left(\zeta\right)\left[H_0^{(1)}\left(\gamma r\right) - AH_0^{(1)}\left(\gamma r_1\right)\right]ds \tag{3.1}$$

$$F^*\left(x_1, x_2\right) = \int_C f\left(\zeta\right)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\left(\ln r - A\ln r_1\right)ds, \quad r = \left|\zeta - z\right|, r_1 = \left|\overline{\zeta} - z\right|, \zeta \in C$$

Here $H_\nu^{(1)}(x)$ is the Hankel-function of the first kind of order ν, ds is an element of the arc length of contour C; value $A=-1$ corresponds to a halfspace free from force and bounded with vacuum; $A=1$ corresponds to a connected halfspace which is covered by grounded electrodes. At $A=0$ we have an unlimited space with a tunnel cavity.

Substituting the limiting values of functions (3.1) at $z \to \zeta_0 \in C$ in boundary conditions (2.4) and using the procedure of integrating by parts of divergency integrals we come to the system of singular integrodifferential equations of the second kind

$$2ip(\zeta_0)+\int_C \{p(\zeta)g_1(\zeta,\zeta_0)+f'(\zeta)g_2(\zeta,\zeta_0)\}ds = N_1(\zeta_0) \qquad (3.2)$$

$$-\pi f(\zeta_0)+\int_C \{p(\zeta)g_3(\zeta,\zeta_0)+f(\zeta)g_4(\zeta,\zeta_0)\}ds = N_2(\zeta_0),\ \zeta_0 \in C_\phi$$

$$\int_C f'(\zeta)g_5(\zeta,\zeta_0)\,ds = 0,\ \zeta_0 \in C \setminus C_\phi$$

where kernels g_m $(m=1,2,...,5)$ and the right parts are determined by expressions

$$g_1(\zeta,\zeta_0)=\frac{2}{\pi i}\operatorname{Re}\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta-\zeta_0}+\gamma\left[H_1(\gamma r_0)\cos(\psi_0-\alpha_0)-AH_1^{(1)}(\gamma r_{10})\cos(\psi_0-\alpha_{10})\right]$$

$$g_2(\zeta,\zeta_0)=\frac{e_{15}}{1+k_{15}^2}g_5(\zeta,\zeta_0),\ g_3(\zeta,\zeta_0)=\frac{k_{15}^2}{e_{15}}\left[H_0^{(1)}(\gamma r_0)-AH_0^{(1)}(\gamma r_{10})\right]$$

$$g_4(\zeta,\zeta_0)=\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\psi}}{\zeta-\zeta_0}-\frac{Ae^{i\psi}}{\zeta-\overline{\zeta}_0}\right\},\ f'(\zeta)=\frac{df}{ds}$$

$$g_5(\zeta,\zeta_0)=\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta-\zeta_0}+\frac{Ae^{i\psi_0}}{\overline{\zeta}-\zeta_0}\right\}$$

$$N_1(\zeta_0)=0,\quad N_2(\zeta_0)=\Phi^*(\zeta_0),\quad \psi=\psi(\zeta),\ \psi_0=\psi(\zeta_0),\ \zeta,\zeta_0\in C$$

$$r_0=|\zeta-\zeta_0|,\ \alpha_0=\arg(\zeta-\zeta_0),\ r_{10}=|\overline{\zeta}-\zeta_0|,\ \alpha_{10}=\arg(\overline{\zeta}-\zeta_0)$$

Here ψ is the angle between the normal to contour C and axis x_1, $\Phi^*(\zeta_0)$ is the piecewise constant function determining the values of electric potentials on the system of electrodes. Kernels $g_2(\zeta,\zeta_0)$, $g_5(\zeta,\zeta_0)$ are singular, the other kernels due to the assumption of smoothness of contour C may possess not more than slight singularities.

Calculating functions $p(\zeta)$ and $f(\zeta)$ from system (3.2) by formulas (2.3) and introducing integral representations (3.1) it is possible to define all the components of the electroelastic field in the area of the halfspace.

4. Definition of components of an electroelastic field in a halfspace

Let us find an expression for the amplitude of density distribution of electric charges $q_k(\beta)$ on k-th electrode. Introducing the parametrization of contour C with the help of equality $\zeta=\zeta(\beta)$ $(0\le\beta\le 2\pi)$ and allowing for the fact that the opening surface is bounded with vacuum we write down

$$q_k(\beta) = D_n^{(k)}(\beta), \alpha_{2k-1} < \beta < \alpha_{2k} \quad (4.1)$$

Here $D_n^{(k)}(\beta)$ represents the amplitude of the normal component of the electric induction vector on the corresponding electroded area of contour C.

Due to (2.3), (3.1), (4.1) we find

$$q_k(\beta_0) = -\varepsilon_{11}^S \int_C f'(\zeta) \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta-\zeta_0} + \frac{Ae^{i\psi_0}}{\overline{\zeta}-\zeta_0}\right\} ds, \zeta_0 \in C_{\phi_k} \quad (4.2)$$

where C_{ϕ_k} is a part of contour C which k-th electrode is located on.

Integrating expression (4.2) by variable β_0 in the limits from α_{2k-1} to α_{2k} we obtain the peak value of total charge Q_k of k-th electrode referring to the unit of its length. The current flowing through the given electrode and equal to the conduction current in the generator circuit may be defined by formula

$$I_k(t) = \operatorname{Re}\left\{i\omega e^{-i\omega t} \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} q_k(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0\right\}, s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0} \quad (4.3)$$

By analogy we find the expressions for the peak values of the other mechanical and electric quantities in the area of a piecewise-homogeneous halfspace. We have

$$\sigma_{13}^* = (1+k_{15}^2)\gamma \int_C p(\zeta)\left\{H_1^{(1)}(\gamma r)\cos\alpha - AH_1^{(1)}(\gamma r_1)\cos\alpha_1\right\} ds +$$

$$+e_{15} \int_C f'(\zeta) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds$$

$$\sigma_{23}^* = (1+k_{15}^2)\gamma \int_C p(\zeta)\left\{H_1^{(1)}(\gamma r)\sin\alpha - AH_1^{(1)}(\gamma r_1)\sin\alpha_1\right\} ds +$$

$$+e_{15} \int_C f'(\zeta) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds \quad (4.4)$$

$$E_1^* = -\frac{k_{15}^2\gamma}{e_{15}} \int_C p(\zeta)\left\{H_1^{(1)}(\gamma r)\cos\alpha - AH_1^{(1)}(\gamma r_1)\cos\alpha_1\right\} ds -$$

$$-\int_C f'(\zeta) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds$$

$$E_2^* = -\frac{k_{15}^2\gamma}{e_{15}} \int_C p(\zeta)\left\{H_1^{(1)}(\gamma r)\sin\alpha - AH_1^{(1)}(\gamma r_1)\sin\alpha_1\right\} ds -$$

$$-\int_C f'(\zeta) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds$$

$$D_1^* = -\varepsilon_{11}^S \int_C f'(\zeta) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds$$

$$D_2^* = -\varepsilon_{11}^S \int_C f'(\zeta) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{A}{\overline{\zeta} - z}\right] ds$$

$\alpha = \arg(\zeta - z)$, $\alpha_1 = \arg(\overline{\zeta} - z)$, $\zeta \in C$

5. A direct piezoelectric effect in a halfspace (space) with an electroded tunnel cavity

Let us apply the above described approach to a situation where a fixed and grounded along boundary $x_2 = 0$ piezoceramic halfspace with a tunnel opening is used as a generator of electric energy. In this case as mechanical exciters are considered two flat monochromatic shear waves which propagate in positive and negative directions of axis x_1 and have the following values of displacement amplitude u_3 and electric potential ϕ, respectively

$$U_3^{(1)} = \tau_1 \left(e^{-i\gamma x_1} - Ae^{i\gamma x_1} \right), U_3^{(2)} = \tau_2 \left(e^{i\gamma x_1} - Ae^{-i\gamma x_1} \right)$$
$$\Phi^{(j)} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} U_3^{(j)} \left(j = 1,2 \right) \tag{5.1}$$

Here value $A = 1$ corresponds to the fixed halfspace with zero potential on the boundary, value $A = 0$ corresponds to space.

For definiteness, assume that the cross-section of the cavity has vertical and horizontal axes of symmetry and on its surface there are two symmetrically located infinitely long electrodes (Fig. 1b). To obtain potential differences $2V(t)$ in the process of the medium deformation there should appear electric charges of different signs on the electroded platings which require matching of displacement amplitude in monochromatic waves. Therefore in (5.1) it is necessary $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$.

The generating energy is used in the external electric circuit closing the electrodes and in the form of a model it may be represented by losses on an element with conductivity Y (Fig. 1b). In this case the value of the potential difference on electrodes $2V(t)$ and the current in circuit $I(t)$ are unknowns. To obtain the electric boundary condition of the considered problem it is necessary to involve Ohm's law for external circuit [10].

$$I(t) = 2YV(t) \tag{5.2}$$

Construction of the solution of the boundary problem consists of assignment of unknown electric potential differences $2V(t)$ on the electrodes, i.e. in application of boundary conditions (2.4) under the action of harmonic waves. Thus from equalities (4.2), (4.3) and (5.2) we can define unknown potential amplitude $V(t)$ on the electrode

$$V^*(\omega) = \frac{i\tau\omega\varepsilon_{11}^S B_1}{2Y - i\omega\varepsilon_{11}^S B_2} \tag{5.3}$$

$$B_m = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} A_m(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \; (m = 1,2)$$

$$A_m(\beta_0) = -\int_C f'_m(\zeta) \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{Ae^{i\psi_0}}{\overline{\zeta} - \zeta_0} \right\} ds$$

Here functions $f_m(\zeta)\,(m=1,2)$ represent "standard" solutions of system (3.2) according to the right parts

$$N_1^{(1)}(\zeta_0)=2i\gamma c_{44}^E(1+A)\cos\psi_0\cos\gamma\xi_{10}\;,\;\; N_2^{(1)}(\zeta_0)=\frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}^S}i(1+A)\sin\gamma\xi_{10} \quad (5.4)$$

$$N_1^{(2)}(\zeta_0)=0\,,\quad N_2^{(2)}(\zeta_0)=\begin{cases}1,\alpha_1<\beta_0<\alpha_2\,,\\ -1,\alpha_3<\beta_0<\alpha_4\,,\end{cases}\quad \zeta_0=\xi_{10}+i\,\xi_{20}\in C$$

where quantities $\alpha_k\left(k=\overline{1,4}\right)$ assign the location of the electrodes.

From formula (5.3) we obtain two cases for interrupted circuit $(Y=0)$ and short circuit $(Y\to\infty)$. In the first case the total charge on the electrodes do not change in the process of the medium deformation, and in the second it is obvious that $V(t)=0$.

6. Results of a numerical investigation

As an example of the first case consider a halfspace from ceramic $PZT-4$ Berlincourt [11] with circular opening $\zeta=\mathrm{Re}^{i\beta}+ih(\beta\in[0,2\pi])$ excited by two electrodes with the amplitude difference of electric potentials $2\Phi^*$ located symmetrically to axis x_2 $(\alpha_1=-\pi/7,\alpha_2=\pi/7,\;\alpha_3=6\pi/7,\alpha_4=8\pi/7)$. Solution of the system of integrodifferential equations (3.2) was carried out by the scheme of the quadrature method (see Appendix A).

For the considered case in Fig. 2 the changes of quantity $Q^*=\left|Q_1/\left(\varepsilon_{11}^S\Phi^*\right)\right|$ are shown, characterizing the amplitude of total electric charge Q_1 on the electrode as a function of the normalized wave number γR for different variants of boundary conditions on the boundary halfspace $(h/R=2.5)$. It is seen that in case of restrained halfspace $(A=1)$ quantity Q^* may exceed its static analogue by 26%. Influence of the inertial effect in the space is hardly seen.

The behaviour of quantity $\mu=\left|q_2(\beta)/\left(\varepsilon_{11}^S\Phi^*\right)\right|$ on the electrodes at $h/R=1.5,\gamma R=1$ for various values of the boundary condition identificator A is represented in Fig. 3. As it follows from the last singular equation in (3.2) and expression (4.2), the intensity of the charge distribution (a normal component of the electric induction vector) has singularities of root type on the edge electrodes which are confirmed by curves in Fig. 3.

Fig. 4 illustrates the level line of the module of displacement amplitude $|U_3|$ in the area covering the opening for different conditions on boundary $x_2=0$ at $\gamma R=1,\,h/R=7.5$. The lighter zones conform to the maximum values of quantity $|U_3|$. Fig. a,b and c are given for values of parameter $A=0{,}1$ and -1, respectively.

Distribution of the moduli of stress amplitude $\left|\sigma_{13}^{*}\right|$ and $\left|\sigma_{23}^{*}\right|$ in the nearest and furtherest zones at $\gamma R = 1$, $h/R = 7.5$ for values $A = 0,1$ and -1 is represented in Fig. 5 and 6, respectively. It should be noted here that in statics $(\omega = 0)$ the electric loading of the medium in the condition of antiplane deformation does not cause any mechanical stress in it.

Now consider a case of excitation of conjugated fields by four electrodes, the disposition of which is fixed by the values $\alpha_k = (2k-1)\pi/8 \quad \left(k = \overline{1,8}\right)$.

In Figs. 7a and 7b the behaviour of quantities $Q_1^* = \left|Q_1/\left(\varepsilon_{11}^S V\right)\right|$, $Q_3^* = \left|Q_3/\left(\varepsilon_{11}^S V\right)\right|$ at the most remote and nearest electrodes on the boundary of a halfspace is given, respectively, as a function of γR for various variants of edge conditions for boundary halfspace $\left(h/R = 2.5\right)$. On the electrodes the potentials were assigned as follows $\Phi_1^* = V$, $\Phi_2^* = -V$, $\Phi_3^* = V$, $\Phi_4^* = -V$.

Results of the investigation of the distribution of the level lines of quantities $\left|U_3\right|$, $\left|\sigma_{13}^*\right|$ and $\left|\sigma_{23}^*\right|$ in the vicinity of the circular opening are given in Fig. 8,9 and 10, respectively. In calculations we supposed $\gamma R = 1$, $h/R = 7.5$, $\Phi_1^* = V$, $\Phi_2^* = -V$, $\Phi_3^* = V$, $\Phi_4^* = -V$. Fig. 11 illustrates the level lines of quantities $\left|\sigma_{13}^*\right|$ and $\left|\sigma_{63}^*\right|$ for a free halfspace in case of $\Phi_1^* = V$, $\Phi_2^* = -V$, $\Phi_3^* = -V$, $\Phi_4^* = V$ at $\gamma R = 1$.

The graphs of the amplitude module changing, relating to electrical potential $\left\langle V^* \right\rangle = \left|\varepsilon_{11}^S V^* / \tau e_{15}\right|$ on the electrode, as a function of γR, under the action of harmonic waves type (5.1) are given for the values of parameter $A = 0$ and 1, respectively, in Figs. 12a and 12b $\left(h/R = 2.5\right)$. Calculations were fulfilled by formula (5.3) for the mode of "idle running" (disconnected electrodes). Curves 1-3 conform to the following variants of disposition of the electrodes $\alpha_1 = -\pi/7$, $\alpha_2 = \pi/7$, $\alpha_3 = 6\pi/7$, $\alpha_4 = 8\pi/7$; $\alpha_1 = -\pi/4$, $\alpha_2 = \pi/4$, $\alpha_3 = 3\pi/4$, $\alpha_4 = 5\pi/4$ and $\alpha_1 = -\pi/3$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\alpha_3 = 2\pi/3$, $\alpha_4 = 5\pi/3$.

Analysis of the results show that more efficient electroacustic transformation of energy is observed at the smallest area of electroded plating and it must be mentioned here that in a halfspace it is much more higher than in a space.

7. Concluding Remarks

From the given results it follows that in the conditions of reverse piezoelectric effect the pictures of distribution of mechanical quantities in a halfspace substantially change according to the type of edge conditions on the boundary of a halfspace and the assigned electrical potentials on the system of electrodes. In case of antiplane deformation the stresses of longitudinal shear on a free from mechanical loading surface do not have singularities on the edges of electrodes Bardzokas [1]. The numerical investigation based on the constructed here algorithm confirms it.

It is necessary to note that as the reflected from the boundary of a halfspace conjugated wave field introduces appearance of additional charges on pair (connected to a separate generator) electrodes, the latter should be located symmetrically to the axis x_2 (a case when the centres of the electrodes lie on this axis is obviously excluded). Otherwise the system of integral equations (3.2) becomes unsolvable.

The constructed algorithm may be generalized in case of n tunnel openings C_m $\left(m=\overline{1,n}\right)$ with cross-section of canonical form if their symmetry centers are located on axis x_2. For this in (3.2) it should be assumed $p(\zeta)=\left\{p_m(\zeta),\zeta\in C_m\right\}$, $f(\zeta)=\left\{f_m(\zeta),\zeta\in C_m\right\}$, $C=\bigcup_{m=1}^{n}C_m$.

Appendix A

Let us consider one of the numerical realization of the system (3.2). Let us build the interpolating Lagrange polynomial for the sought-for functions $p(\zeta)$ and $f'(\zeta)$ in the nodes $\beta_j=2\pi(j-1)/N$ $\left(j=\overline{1,N}\right)$. Such polynomial has the form (Ivanov, 1968)

$$L_N\left[\{p_*,f_*'\};\beta\right]=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{p_j^0,f_j^0\right\}\sin\frac{N\left(\beta_j-\beta\right)}{2}\operatorname{cosec}\frac{\beta_j-\beta}{2} \tag{A1}$$

$$p(\zeta)=p_*(\beta),\, p_j^0=p_*\left(\beta_j\right),\, f(\zeta)=f_*(\beta),\, f_j^0=f_*'\left(\beta_j\right)$$

It must be mentioned here that the formulas (A1) are valid for odd numbers of the node division of the contour C.

Integration of the formula (A1) for function $f_*'(\beta)$ using the equation Prudnikov [13]

$$\int\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}dx=2\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin 2kx}{2k}+x$$

brings to the following expression for the function $f_*(\beta)$

$$M_N\left[f_*(\beta);\beta\right]=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f_j^0\Omega_j(\beta)+A$$

$$\Omega_j(\beta)=-2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{\sin k\left(\beta_j-\beta\right)-\sin k\beta_j}{k}+\beta \tag{A2}$$

Constant A appearing here must be determined from the conditions of the periodicity of the function $f_*(\beta)$ which due to (A2) has the following form

$$\sum_{j=1}^{N}f_j^0=0 \tag{A3}$$

Applying (A2) we also find the quadrature formula

$$\int_0^{2\pi}f_*(\beta)G\left(\beta,\beta^*\right)d\beta=\frac{2\pi}{N^2}\sum_{j=1}^{N}f_j^0\sum_{m=1}^{N}\Omega_{jm}G\left(\beta_m,\beta^*\right)+A\frac{2\pi}{N}\sum_{m=1}^{N}G\left(\beta_m,\beta^*\right) \tag{A4}$$

where $\Omega_{jm}=\Omega_j\left(\beta_m\right)$. In the node collocations $\beta_\ell^*=\pi(2\ell-1)/N$ $\left(\ell=\overline{1,N}\right)$ the polynomial (A1) has the following value at odd value of N

$$L_N\left[p_*(\beta);\beta_\ell^*\right]=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}p_j^0(-1)^{\ell+j}\operatorname{cosec}\frac{\beta_\ell^*-\beta_j}{2}\quad\left(\ell=\overline{1,N}\right) \tag{A5}$$

For the singular integral in (3.2) the formula analogous to the formula of calculating regular integrals Panasyuk [14] appears

$$\int_0^{2\pi} f_*'(\beta_j)\operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta(\beta)-\zeta_0(\beta_\ell^*)}s'(\beta)\,d\beta=\frac{2\pi}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j^0\operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_0(\beta_\ell^*)}}{\zeta(\beta_j)-\zeta_0(\beta_\ell^*)}s'(\beta_j) \quad \text{(A6)}$$

Now, substituting the integrals in (3.2) by finite sums of the formulas (A.4), (A.6) and using the equalities (A.2), (A.3) and (A.5) we come to the system $2N+1$ of algebraic equations related to the values of functions $p(\zeta)$ and $f'(\zeta)$ in the nodes of interpolation $\beta_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ and constant A.

The work was carried out in the framework of an agreement on scientific cooperation between the National Technical University of Athens and the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (NAS) of Armenia.

References

1. Bardzokas D., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges // Strength of Materials. 1994. № 7. P. 510-513.
2. Parton V.Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials. / Acta Astronaut. 3 (1976). 671-683.
3. Suo Z, Kuo C.M.: Barnett, D.M. and Willis, J.R., Fracture mechanics for pizoelectric ceramics, J. Mech. Phys. Solids 40 (1992) 739-765.
4. Pak Y.E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity. // Int. J. Solids Struct. 29 (1992). 2403-2419.
5. Pak Y.E. Crack extension force in a piezoelectric materials // J. Appl. Mech. 112. (1990) 647-653.
6. Kudryavtsev B.A. Electroelastic state of a half-plane from piezoceramics with two boundary electrodes //Probl. Prochnosti. 1982. № 7. P. 56-59.
7. Parton V.Z. and Kudryavtsev B.A. Electromatgnetoelasticity. New York: Gordon and Breach, 1988.
8. Bardzokas D., Senik N.A. The Excitation of symmetric and antisymmetric Lamb waves in a piezoelectric strip by surface electrodes //J. Appl. Mech. 1993. Vol. 57. № 6. P. 1047-1055.
9. Bardzokas D., Filshtinsky M.L. Electroelasticity of piecewise-uniform bodies. - Sumy (Ukraine): University Book, 2000. - 308 p. (in Russian).
10. Tamm I.E. Bases of the theory of electricity. - M.: Nauka, 1976. - 616 p.
11. Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. Ppezoelectric and piezomagnetic materials and their functions as transducers. In: Physical acoustics, V.1, Part A. Edited by W.P. Mason. Academic Press, New-York, 1964.
12. Ivanov V.V. The theory of methods of approximation and its application to numerical solution of singular integral equations. - K.: Nauk. Dumka, 1968. - 288 p.
13. Prudnikov A.P., Brychkov I.A., Marychev O.I. Integrals and series. M.: Nauka, 1981, 799p. (In Russian).
14. Panasyuk V.V., Savruk M.P. and Nazarchuk Z.T. Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems. - Kyiv, Naukova Dumka, 1984, p. 344, (in Russian).

National Technical University of Athens, Greece
Sumy State University, Ukraine

Received
18.05.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОАКТИВНОЙ СИСТЕМЕ СЛОЙ (класса 6mm)-ПОЛУПРОСТРАНСТВО(класса 43m)

Хачатрян В.М.

Ключевые слова: электроупругий, сдвиговой, волна, слой, полупространство.
Key words: electroelastic, shear, wave, layer, half-space.

Վ.Մ. Խաչատրյան
Մակերևութային էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքները պիեզոակտիվ շերտ(6mm դասի)-կիսատարածություն (43m դասի) համակարգում

Դիտարկվում է պիեզոակտիվ առաձգական կիսատարածություն`(43m դասի պիեզոէլեկտրիկ) պիեզոակտիվ ծածկույթով(6mm դասի պիեզոէլեկտրիկ): Շերտը և կիսատարածությունը գտնվում են սահող կոնտակտի վիճակում, որտեղ շոշափող մեխանիկական լարումները հավասար են զրոյի: Շերտում և կիսատարածությունում մակերևութային ալիքների փոխազդեցությունը պայմանավորված է նրանց բաժանման եզրում էլեկտրական դաշտի անընդհատությամբ: Վերլուծվում են մակերևութային էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքների գոյության առանձնահատկությունները:

V.M. Khachatryan
Surface electroelastic shear waves in a system of piezoactive layer and half-space

A piezoactive half-space with a piezoactive layer on its surface is considered. Material of the layer is piezoelectric of class 6mm and material of the half-space is piezoelectric of class 43m. The layer and the half-space are in a condition of the sliding contact, where shear mechanical stresses are taken to be zero. Interaction between shear waves in the layer and the half-space is due to continuity of electrical field on their boundary. Features of existence of surface electroelastic shear waves are analyzed.

Рассматривается пьезоактивное упругое полупространство (класса 43m) с пьезоактивным покрытием (класса 6mm). Слой и полупространство находятся в состоянии скользящего контакта, где касательные механические напряжения между пьезоэлектриками принимаются равными нулю. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела. Проанализированы особенности существования поверхностных электроупругих сдвиговых волн.

1. Большое количество работ посвящено исследованию сдвиговых поверхностных электроупругих волн в системе слой-полупространство, когда материалы либо слоя, либо полупространства пьезоактивны (напр., [1,2]). Имеются также работы, посвященные исследованию сдвиговых волн, локализованных вдоль границы двух пьезоэлектрических полупространств [3-5]. В [6] приводится решение задачи типа Лява, когда слой и полупространство состоят из различных пьезоэлектрических материалов, обладающих кубической симметрией. В [7] рассматривается пьезоактивное упругое полупространство с пьезоактивным покрытием. Материалы полупространства и слоя являются пьезоэлектриками класса 6mm с различными свойствами. Касательные напряжения между пьезоэлектриками принимаются равными нулю. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела.

В настоящей работе также рассматривается задача, где и слой, и полупространство пьезоактивны и касательные напряжения между ними равны нулю, но в отличие от вышеприведенного случая, материал полупространства является пьезоэлектриком класса 43m кубической симметрии, а материал слоя – пьезоэлектриком класса 6mm гексагональной симметрии. Эта задача интересна тем, что в отличие от пьезокристалла класса 6mm полупространство из пьезокристалла 43m не позволяет локализации волны на свободной поверхности полупространства. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обусловливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела.

В прямоугольной системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, слой – область $-\infty < x < \infty, -h \le y < 0$, $-\infty < z < \infty$. Вакуум занимает область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < -h$, $-\infty < z < \infty$.

Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская электроупругая задача) для полупространства имеют вид [8]:

$$a_1^2 \Delta W_1 + 2\frac{e_{14}^{(1)}}{\rho_1}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} = \frac{\varepsilon_{11}^{(1)}}{2e_{14}^{(1)}}\Delta \varphi_1 \tag{1.1}$$

Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская электроупругая задача) для слоя имеют вид [9,10]:

$$a_2^2 \Delta W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}, \qquad \Delta W_2 = \frac{\varepsilon_{11}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\Delta \varphi_2 \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2)

$$a_1^2 = \frac{c_{44}^{(1)}}{\rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{c_{44}^{(2)}(1+\chi_2)}{\rho_2}, \quad \chi_2 = \frac{[e_{15}^{(2)}]^2}{\varepsilon_{11}^{(2)} c_{44}^{(2)}} \tag{1.3}$$

где W_1 и W_2 – упругие перемещения, а φ_1 и φ_2 – электрические потенциалы, соответственно, в полупространстве и в слое, $c_{44}^{(1)}$ и $c_{44}^{(2)}$ — модули сдвига материалов полупространства и слоя, χ_2 – коэффициент электромеханической связи материала слоя, $e_{14}^{(1)}$ и $e_{15}^{(2)}$ – пьезоэлектрические модули, соответственно, для материалов полупространства и слоя.

Условия контакта между слоем и полупространством математически задаются в виде:

$$\sigma_{23}^{(1)} = 0, \ \sigma_{23}^{(2)} = 0, \ \varphi_1 = \varphi_2, \ D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.4}$$

где $\sigma_{23}^{(1)}$ и $\sigma_{23}^{(2)}$ – касательные напряжения, $D_2^{(1)}$ и $D_2^{(2)}$ – нормальные компоненты индукции электрического поля в соответственных областях. На свободной поверхности слоя $y = -h$ имеют место условия

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \tag{1.5}$$

Условие электрически закрытой границы $\varphi_2 = 0$ изолирует слоистую сплошную среду от вакуума. В другом случае мы должны были решить также уравнения электростатики для вакуумной области.

Требуется найти решения уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.4), (1.5) и следующим условиям затухания по глубине полупространства:

$$\lim_{y\to\infty} W_1 = 0, \quad \lim_{y\to\infty} \varphi_1 = 0 \tag{1.6}$$

Общее решение уравнений (1.1) в виде гармонических волн, удовлетворяющее условиям затухания (1.6), получается в виде:

$$W_1 = [A_1 \exp(-kp_1 y) + B_1 \exp(-kp_2 y)]\exp i(\omega t - kx) \tag{1.7}$$

$$\varphi_1=\frac{c_{44}^{(1)}}{2ie_{14}^{(1)}}[A_1(\frac{1-\eta}{p_1}-p_1)\exp(-kp_1y)+B_1(\frac{1-\eta}{p_2}-p_2)\exp(-kp_2y)]\exp i(\omega t-kx)$$

при условии $$0<\eta<1. \qquad (1.8)$$

В (1.7)

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\eta+4\chi_1+\sqrt{\eta^2+8\chi_1(2-\eta)+16\chi_1^2}}$$

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\eta+4\chi_1-\sqrt{\eta^2+8\chi_1(2-\eta)+16\chi_1^2}}$$

где $\eta=\dfrac{\omega^2}{k^2a_1^2}$, $\chi_1=\dfrac{[e_{14}^{(1)}]^2}{\varepsilon_{11}^{(1)}c_{44}^{(1)}}$ –коэффициенты электромеханической связи материала полупространства.

Общее решение уравнений (1.2) в виде гармонических волн следующее:

$$W_2=[A_2\exp(k\sqrt{1-\theta\eta}y)+B_2\exp(-k\sqrt{1-\theta\eta}y)]\exp i(\omega t-kx) \qquad (1.9)$$

$$\varphi_2=[C\exp(ky)+D\exp(-ky)+\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}[A_2\exp(k\sqrt{1-\theta\eta}y)+B_2\exp(-k\sqrt{1-\theta\eta}y)]]\exp i(\omega t-kx)$$

где $\vartheta=\dfrac{a_1^2}{a_2^2}$.

В (1.7)-(1.9) A_1, A_2, B_1, B_2, C, D – произвольные постоянные.

2. Используя связи между напряжениями и индукцией электромагнитного поля с одной стороны, перемещениями и потенциалом с другой, граничные условия (1.4) и (1.5) приведем к виду:

$$\left.\begin{array}{l} c_{44}^{(1)}\dfrac{\partial W_1}{\partial y}+e_{14}^{(1)}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,\quad c_{44}^{(2)}\dfrac{\partial W_2}{\partial y}+e_{15}^{(2)}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0 \\ \varphi_1=\varphi_2,\quad e_{14}^{(1)}\dfrac{\partial W_1}{\partial x}-\varepsilon_{11}^{(1)}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}=e_{15}^{(2)}\dfrac{\partial W_2}{\partial y}-\varepsilon_{11}^{(2)}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{array}\right\},\quad \text{при } y=0 \qquad (2.1)$$

$$c_{44}^{(2)}\frac{\partial W_2}{\partial y}+e_{15}^{(2)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0,\quad \varphi_2=0 \qquad \text{при } y=-h \qquad (2.2)$$

Подстановка (1.7), (1.9) в граничные условия (2.1), (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных (в следующих уравнениях учитывается, что B_1 определяется посредством A_1, а A_1, в свою очередь, определяется посредством A_2, B_2, C, D):

$$C-D+(1-\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}A_2-(1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}B_2=0 \qquad (2.3)$$

$$\exp(-\zeta)C+\exp(\zeta)D+\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}\exp(-\gamma_2\zeta)A_2+\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}\exp(\gamma_2\zeta)B_2=0 \qquad (2.4)$$

$$\exp(-\zeta)C-\exp(\zeta)D+(1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\exp(-\gamma_2\zeta)A_2-(1+\chi_2)\gamma_2\frac{c_{44}^{(2)}}{e_{15}^{(2)}}\exp(\gamma_2\zeta)B_2=0 \qquad (2.5)$$

$$(L+\varepsilon_{11}^{(2)})C+(L-\varepsilon_{11}^{(2)})D+L\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}A_2+L\frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}B_2=0 \tag{2.6}$$

где
$$L=\frac{\varepsilon_{11}^{(1)}(p_2^2+1-\eta)}{2\gamma_1(p_2^2+\gamma_1)}[1+(2\chi_1-\eta)(1-\gamma_1)+\frac{p_2^3-p_1^3}{p_2-p_1}\gamma_1],$$

а
$$\gamma_1=\sqrt{1-\eta}\,,\ \gamma_2=\sqrt{1-\vartheta\eta}\,,\ \zeta=kh \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) постоянные C и D определяются посредством A_2 и B_2 следующим образом:

$$C=-\frac{e_{15}^{(2)}}{2e^{-\zeta}\varepsilon_{11}^{(2)}}[(1+\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(-\gamma_2\zeta)A_2+(1-\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(\gamma_2\zeta)B_2]$$
$$D=-\frac{e_{15}^{(2)}}{2e^{\zeta}\varepsilon_{11}^{(2)}}[(1-\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(-\gamma_2\zeta)A_2+(1+\gamma_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2})\exp(\gamma_2\zeta)B_2] \tag{2.8}$$

Подстановка (2.8) в (2.3) и (2.6) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_2 и B_2:

$$[[\frac{\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{\zeta}}-\frac{\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{-\zeta}}]\exp(-\gamma_2\zeta)+\gamma_2(1+\chi_2)]A_2+$$
$$+[[\frac{\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{\zeta}}-\frac{\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2)}{2e^{-\zeta}}]\exp(\gamma_2\zeta)-\gamma_2(1+\chi_2)]B_2=0$$
$$[[\frac{(L-\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{\zeta}\chi_2}+\frac{(L+\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{-\zeta}\chi_2}]\exp(-\gamma_2\zeta)-L]A_2+$$
$$+[[\frac{(L-\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2+\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{\zeta}\chi_2}+\frac{(L+\varepsilon_{11}^{(2)})(\chi_2-\gamma_2(1+\chi_2))}{2e^{-\zeta}\chi_2}]\exp(\gamma_2\zeta)-L]B_2=0 \tag{2.9}$$

Из системы (2.9) условия существования ненулевых решений получаются в виде трансцендентного уравнения:

$$\Gamma(\eta,\zeta,\chi_1,\chi_2)\equiv L[2\chi_2(1+\chi_2)\gamma_2+(\chi_2^2+\gamma_2^2(1+\chi_2)^2)\operatorname{sh}(\zeta\gamma_2)\operatorname{sh}(\zeta)-2\chi_2(1+\chi_2)\gamma_2\operatorname{ch}(\zeta\gamma_2)\operatorname{ch}(\zeta)]+$$
$$+\varepsilon_{11}^{(2)}(1+\chi_2)\gamma_2[\chi_2\operatorname{ch}(\zeta\gamma_2)\operatorname{sh}(\zeta)-\gamma_2(1+\chi_2)\operatorname{sh}(\zeta\gamma_2)\operatorname{ch}(\zeta)]=0 \tag{2.10}$$

3. Из уравнения (2.10) видно, что $\eta=\frac{1}{\vartheta}$ является решением, но это решение тривиальное.

В длинноволновом приближении относительно толщины слоя ($\zeta<<1$) уравнение (2.10) приводится к виду:

$$\vartheta\eta(1+\chi_2)=1$$

Отсюда получается корень

$$\eta=\frac{1}{\vartheta(1+\chi_2)} \tag{3.1}$$

который будет удовлетворять условию (1.8), если

$$\vartheta(1+\chi_2)>1$$

Здесь длина волны велика только по сравнению с толщиной слоя и полупространство не теряет своего назначения.

Уравнение (2.10) в частном случае $\zeta \to \infty$ (коротковолновое приближение – могут существовать волны, локализованные у границы контакта двух полупространств) распадается на два уравнения:

$$\Gamma_1(\eta, \infty, \chi_1, \chi_2) \equiv L[\chi_2 - (1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta}] + \varepsilon_{11}^{(2)}(1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta} = 0 \quad (3.2)$$

$$\Gamma_2(\eta, \infty, \chi_2) \equiv \chi_2 - (1+\chi_2)\sqrt{1-\vartheta\eta} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) имеет решение:

$$\eta = \vartheta^{-1}[1 - \frac{\chi_2^2}{(1+\chi_2)^2}]$$

при условии $1 - \frac{\chi_2^2}{(1+\chi_2)^2} < \vartheta$.

4.Пусть граничат пьезоэлектрик класса 43m $GaAs$ ($c_{44} = 5.94 \times 10^{10}$ н/м^2, $\rho = 5.307 \times 10^3$ кг/м^3, $e_{14} = -0.16$ кл/м^2, $\varepsilon_{11} = 9.73 \times 10^{-11}$ ф/м) и пьезоэлектрик класса 6mm ZnO ($c_{44} = 4.25 \times 10^{10}$ н/м^2, $\rho = 5.68 \times 10^3$ кг/м^3, $e_{15} = -0.59$ кл/м^2, $\varepsilon_{11} = 7.38 \times 10^{-11}$ ф/м).

Таблица 1

ζ	η_1	η_2	η_3
$\zeta << 1$	0.669221	-	-
0.001	0.669222	-	-
0.05	0.669281	-	-
0.1	0.66947	-	-
0.3	0.672117	-	-
0.5	0.170154	0.680539	-
1.0	0.602692	0.768529	-
5.0	0.664186	0.818872	-
10	0.676513	0.752176	0.875203

В табл. 1 приводятся значения корней уравнения (2.10) с учетом (2.7) (безразмерных характеристик скоростей локализованных волн) в зависимости от относительной толщины слоя ζ. В первой строчке приведено значение корня, полученное по приближенной формуле (3.1).

Для этих пьезоэлектриков рассмотрим уравнение (3.2). Из уравнения (3.2) для промежутка $0 < \eta < \frac{a_2^2}{a_1^2}$ численным образом получается решение $\eta_1 = 0.677445$.

Из уравнения (3.3) получается решение $\eta_2 = 0.736075$.

Теперь рассмотрим уравнение (2.10). Для случая, когда $\zeta = 100$ для промежутка $0 < \eta < \frac{a_2^2}{a_1^2}$ численным образом получаются два решения, которые совпадают с вышеполученными решениями η_1 и η_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даноян З.Н., Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем. //Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48. 3. С.43-52.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. Ереванского университета, 2006. 492 с.
3. Maerfeld C., Tournois P. Pure shear elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media. //Appl. Phys. Lett. 1971. V.19. 4. P.117-121
4. Аветисян А.С., Маргарян Дж. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т.47. 3-4. С.31-36.
5. Li. Sh. The electromagneto-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: the Bleustein–Gulyaev mode. //J. Appl. Phys. 1996. V.80. №9. P.5264-5267.
6. Zakharenko A. Love-type waves in layered systems consisting of two cubic piezoelectric crystals. //Journal of sound and vibration. 2005. V.285. P.877-886.
7. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Поверхностные электроупругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой-полупространство. //Ереванский Государственный Университет. Ученые записки. 2006. 3. С.25-30.
8. Cheng N.C., Sun C.T. Wave propagation in twolayered piezoelectric plates. //J. Acoust. Soc. Amer., 1975. V57. №3. P.632-639.
9. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
10. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едиториел УРСС. 2003. 336с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.01.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦЕВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА И УПРУГОГО СЛОЯ В РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ

Шекян А. Л., Шекян Л. А.

Ключевые слова: упругость, контакт, слой, кольцевой штамп, трение, износ, тепловыделение.
Key words: Elasticity, contact, layer, circular ring punch, friction, wear, heat excretion.

Ա. Լ. Շեկյան, Լ. Ա. Շեկյան
Օղակաձև դրոշմի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցությունը սահմանային շփման ռեժիմում

Ուսումնասիրված է իր առանցքի շուրջը հավասարաչափ պտտվող պլանում օղակաձև դրոշմի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության առանցքահամաչափ խնդիրը շփման, մաշման և շփումից անջատված ջերմության գործոնների հաշվառումով: Խնդիրը բերված է ոչ գծային հավասարումների համակարգի և վերջինիս հետազոտությունը կատարված է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա:Դիտարկված է թվային օրինակ:

A L. Shekyan, L. A. Shekyan
The contact interaction of the circular punch ring and elastic layer in conditions of boundary friction

An axisymetric problem of the contact interacting of uniformly rotating about its axis punch with a rigidly closid an elastic layer in respons to friction, wear and heat excretion from friction is considered.The problem is reduced to the solution of nonlinear equatons, the inverstigation of which follows by compressed reflecton prinsiples. Numerical example is presented.

Проводится исследование осесимметричной контактной задачи для вращающегося вокруг своей оси кольцевого штампа и упругого слоя, находяшихся в режиме граничного трения. Учитывается износ трущихся поверхностей и тепловыделение от трения. Приведен численный пример.

Проводится теоретическое исследование осесимметричной контактной задачи теории упругости для вращающегося вокруг своей оси кольцевого в плане штампа и упругого защемленного одним краем слоя, находящихся в режиме граничного трения. Учитываются факторы износа трущихся поверхностей и тепловыделения от трения.

Среди исследований, проведенных в этом направлении, можно отметить[1-5] и др.

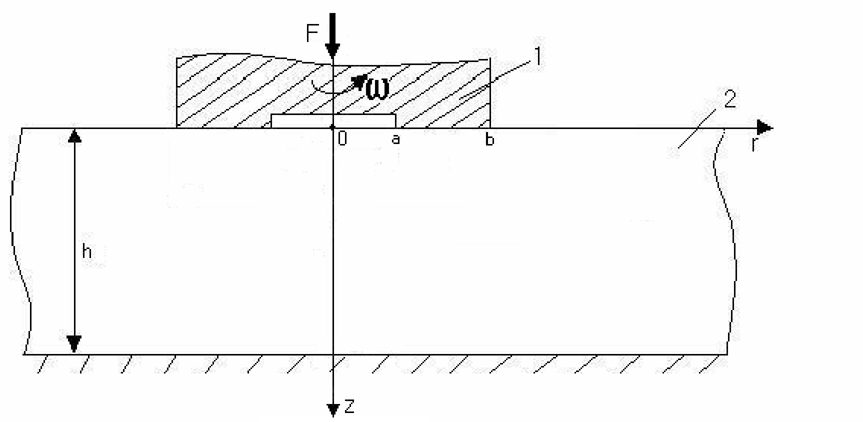
Задача сведена к замкнутой системе нелинейных уравнений и на основе принципа сжимающих отображений проведено исследование полученной системы.

Рассматриваемую контактную задачу можно трактовать как простейшую модель взаимодействия вала и подпятника (опор скольжения для восприятия осевых нагрузок вала) в узлах трения инженерных конструкций, когда к трущимся поверхностям поступает смазка без избыточного давления. При таком условии упорные подшипники работают только в режиме граничного трения, так как в отличие от подшипников скольжения, их трущиеся поверхности плоскопараллельные и с повышением скорости скольжения в зоне трения не может быть получен необходимый клиновый масляный зазор режима жидкостного трения, каким получается в подшипниках скольжения.

Актуальность проблемы обусловлена тем, что в машинах и механизмах, машиностроении, транспорте, сельском хозяйстве, добывающей промышленности и др., велики потери выработанной энергии на преодоление трения, а износ и повреждение их отдельных деталей часто лимитируют работу всего устройства, ремонт которых требует больших расходов. При этом, исследованию соответствующей контактной задачи предшествует разработка мероприятий по снижению указанных затрат.

1.Постановка задачи и вывод основных уравнений

Пусть штамп 1 с плоским кольцевым основанием с внутреним и внешним радиусами a и b $(a<b)$ под действием внешних вертикальных сил с равнодействуюшей F равномерно вращается вокруг своей оси z и вдавливается в упругий слой 2, защемленный своей нижней поверхностью (фиг. 1).



Фиг. 1

Считаем, что тела 1 и 2 находятся в режиме граничного трения, характерными особенностями которого являются факторы изнашивания и тепловыделение от трения.

Требуется определить законы распределения контактных напряжений, действующих в зоне трения, меру погружения штампа в слое, а также потери мощности в узле трения.

В принятых предположениях условие равенства нормальных перемещений граничных точек слоя и штампа в зоне трения $(a \le r \le b, z=0)$ имеет вид

$$U_w + U_T + U_E = \delta \tag{1}$$

где U_W, U_T U_E – вертикальные перемещения, обусловленные соответственно износом, температурной деформацией и упругой деформацией слоя, δ – мера погружения штампа в слое, h – толщина слоя.

Согласно экспериментам [6], скорость изнашивания может быть выражена степенной функцией

$$\frac{\partial U_W}{\partial t} = K_1 \left[p(r,t) \right]^m (\omega r)^n \tag{2}$$

где ω – угловая скорость штампа, t – время, $1 \le m < 3, n \approx 1$, K_1 – коэффициент пропорциональности, зависящий от материалов пары трения и геометрии трущихся поверхностей, причем для переработанных поверхностей $m \approx 1$, $p(r,t)$ – контактное нормальное напряжение в точке с координатом r и в момент времени t, притом, после начального небольшого неустановившегося периода его изменение со временем незначительно, т.е можно считать $p(r,t) \approx p(r)$.

Для определения U_T будем считать, что часть выделенной от трения тепловой энергии постоянным потоком переходит в слой через ее граничные точки контактной области и смазочные камеры. При этом предполагается, что в слое установлено стационарное температурное поле, распределение которого $T(r,z)$ относительно окружающей среды удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

во всех внутренних точках слоя $\left(0 \le r < \infty, 0 < z < h\right)$, а на поверхности слоя – граничным условиям

$$-\lambda \frac{\partial T(r,0)}{\partial z} = \begin{cases} Q = \mathrm{const} & 0 \le r < b \\ 0, & b < r < \infty \end{cases} \tag{4}$$

$$T(r,h) = 0, \qquad (0 \le \mathrm{r} < \infty)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Q – величина теплового потока, которая, согласно экспериментам, пропорциональна средней мощности сил трения [7]

$$Q = K_2 \omega \int_a^b \tau(r) r^2 dr \tag{5}$$

Здес K_2 – тепловой эквивалент работы сил трения, а $\tau(r)$ – касательное контактное напряжение, которое определяется законом Кулона [5]

$$\tau(r) = f\ p(r), \quad (a \le r \le b) \tag{6}$$

где f – коэффициент трения.

Решение граничной задачи (3)-(4) имеет вид [8]

$$T(r,z) = \frac{Qb}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{J_1(b\alpha)\mathrm{sh}\alpha(h-z)}{\alpha \mathrm{ch}\alpha h} J_0(\alpha r) d\alpha \tag{7}$$

а температурные напряжения выражаются формулами:

$$\sigma_r^T = -\frac{QE\alpha_T b}{2\lambda r} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha b)}{\alpha^2} \frac{\mathrm{sh}\alpha(h-z)}{\mathrm{ch}\alpha h} J_1(\alpha r) d\alpha$$

$$\sigma_\varphi^T = -\frac{QE\alpha_T b}{2\lambda r} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha b)}{\alpha^2} \frac{\mathrm{sh}\alpha(h-z)}{\mathrm{ch}\alpha h} \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] d\alpha \tag{8}$$

$$\tau_{rz}^T = \tau_{r\varphi}^T = \sigma_z^T = 0$$

где α_T – коэффициент температурного расширения, E – модуль упругости материала слоя, $J_0(z), J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода.

Теперь, учитывая зависимость Дюгамеля-Неймана [8]

$$\varepsilon_z^T = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^T - \nu\left(\sigma_r^T + \sigma_\theta^T + \sigma_z^T \right) \right] + \alpha_T T \tag{9}$$

на основе (7) и (8) получим

$$U_T=\frac{(1+\nu)Qb\alpha_T}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{ch}\alpha h}{\alpha^2\mathrm{ch}\alpha h}J_1(\alpha b)J_0(\alpha r)d\alpha \tag{10}$$

где ν – коэффициент Пуассона материала слоя.

Наконец, для определения упругих перемещений U_E, которые получают граничные точки слоя в зоне трения, когда поверхность слоя $z=h$ защемлена, а в точках $a\le r\le b, z=0$ действуют осесимметрично распределенные контактные напряжения $p(r)$ и $\tau(r)$, соответственно, воспользуемся формулой (см.[1] с. 277-282, а также [9] с. 399-400)

$$U_E=\frac{2(1-\nu^2)}{Eh}\int_a^b p(\rho)\rho d\rho\int_0^\infty L(u)J_0\left(\frac{ru}{h}\right)J_0\left(\frac{\rho u}{h}\right)du \tag{11}$$

где

$$L(u)=\frac{2\varpi \mathrm{sh}2u-4u}{2\varpi\mathrm{ch}2u+4u^2+1+\varpi},\ \ \varpi=3-4\nu \tag{12}$$

В число основных уравнений задачи входят также уравнения равновесия штампа

$$2\pi\int_a^b p(r)rdr=F,\qquad 2\pi\int_a^b \tau(r)r^2dr=M \tag{13}$$

где F и M – соответственно, внешние осевая сжимающая сила и вращающий момент пары, действующие на штамп.

Таким образом, для определения основных неизвестных задачи имеются уравнения (1)-(13), которые, как выясняется ниже, образуют полную систему уравнений относительно этих неизвестных.

2.Исследование полученой системы уравнений

Для проведения полного математического исследования полученной системы уравнений целесообразно ввести следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered}\xi=\frac{r}{b},\varepsilon=\frac{a}{b},\delta_0=\frac{\delta}{b},p_0(\xi)=\frac{K_1t}{b}(\omega r)^n\left[p(r)\right]^m\\ \theta=\frac{1-\nu^2}{hE}\left[\frac{b^{1+m+n}}{K_1\omega^n t}\right]^{\frac{1}{m}},\mu=\frac{K_2Eh\omega b^3}{2\lambda(1-\nu)}\alpha_T f\\ K(\xi,\eta)=\int_0^\infty L(u)J_0\left(\frac{b\xi}{2h}u\right)J_0\left(\frac{b\eta}{2h}u\right)du\\ q(\xi)=\int_0^\infty\left[1-\left(\mathrm{ch}\frac{2hu}{b}\right)^{-1}\right]u^{-2}J_1(u)J_0(\xi u)du\end{gathered} \tag{14}$$

Тогда, учитывая (2), (5), (6), (10) и (11), из условия (1) получим уравнение

$$p_0(\xi)+\theta\int_\varepsilon^1\left[K(\xi,\eta)-\mu g(\xi)\eta\right]\eta^{\frac{m-n}{m}}\left[p_0(\eta)\right]^{\frac{1}{m}}d\eta=\delta_0,\ \ (\varepsilon\le\xi\le1) \tag{15}$$

которое относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$ является нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна [10]. В уравнение (15) входит также неизвестное безразмерное жесткое перемещение штампа δ_0. Для определения $p_0(\xi)$ и δ_0, кроме (15) воспользуемся также первым уравнением равновесия (13) , которое с учетом (14) можно записать в виде

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^{\frac{1}{m}}\xi^{1-\frac{n}{m}}d\xi = F_0 \tag{16}$$

где F_0 – безразмерная сжимающая сила

$$F_0 = \frac{1}{2\pi}\left[K_1\omega^n t b^{n-1-2m}\right]^{\frac{1}{m}} F \tag{17}$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$ и δ_0 из системы нелинейных уравнений (15) и (16).

Мощность $N = M\omega$, потерянная при преодолении сил трения в рассматриваемом узле инженерной конструкции, определяется с помощью второго уравнения равновесия (13), которое с учетом (14) принимает вид

$$N_0 = \int\limits_{\varepsilon}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^{\frac{1}{n}}\xi^{2-\frac{n}{m}}d\xi \tag{18}$$

где введено обозначение

$$N_0 = \frac{1}{2\pi}\left[K_1\omega^{n-m} t b^{n-1-3m}\right]^{\frac{1}{m}} N \tag{19}$$

Полное математическое исследование системы уравнений (15) , (16) проводим на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций [11]. С этой целью, следуя [12], введем в рассмотрение пространство X всех непрерывных на отрезке $\xi \in [\varepsilon, 1]$ функций $x(\xi)$ с чебышевской метрикой

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{\varepsilon \le \xi \le 1}\left|x_1(\xi) - x_2(\xi)\right| \tag{20}$$

где x_1, x_2 – две произвольные функции из X. В пространстве X рассмотрим оператор $y = A(x)$, определяемый формулой

$$y(\xi) = W - \theta\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left[K(\xi,\eta) - \mu g(\xi)\eta\right]\eta^{\frac{m-n}{m}}\left|x(\eta)\right|^{\frac{1}{m}}d\eta, \quad (\varepsilon \le \xi \le 1) \tag{21}$$

где $x(\xi) \in X$, а W– произволоное положительное число. Учитывая (14), нетрудно убедиться, что $y(\xi) \in X$. Пусть, далее, S – замкнутый шар в X с центром 0 и с произвольным радиусом $R > 0$. На основе (20) и (21) можно утверждать, что для всех $x(\xi) \in X$, т. е. при

$$\rho(0, x) = \max_{\varepsilon \le \xi \le 1}\left|x(\xi)\right| \le R \tag{22}$$

выполняется условие

$$\rho(0, y) \le W + \theta R^{1/m}\psi \tag{23}$$

где

$$\psi = \max_{\varepsilon \le \beta\xi \le 1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left|K(\xi,\eta) - \mu g(\xi,\eta)\eta\right|\eta^{\frac{m-n}{m}}d\eta \tag{24}$$

На основании (20) и (21) следует также, что если $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$ – два произвольных элемента из S и $y_i = A(x_i), (i = 1, 2, ...)$, то

$$\rho(y_1, y_2) \le \frac{\theta}{m} R^{\frac{1}{m}-1} \psi \rho(x_1, x_2) \tag{25}$$

Из соотношений (23) и (24) вытекает, что если параметры W и R выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$W + \theta R^{\frac{1}{m}} \psi \le R, \quad \frac{\theta}{m} R^{\frac{1}{m}-1} \psi < 1 \tag{26}$$

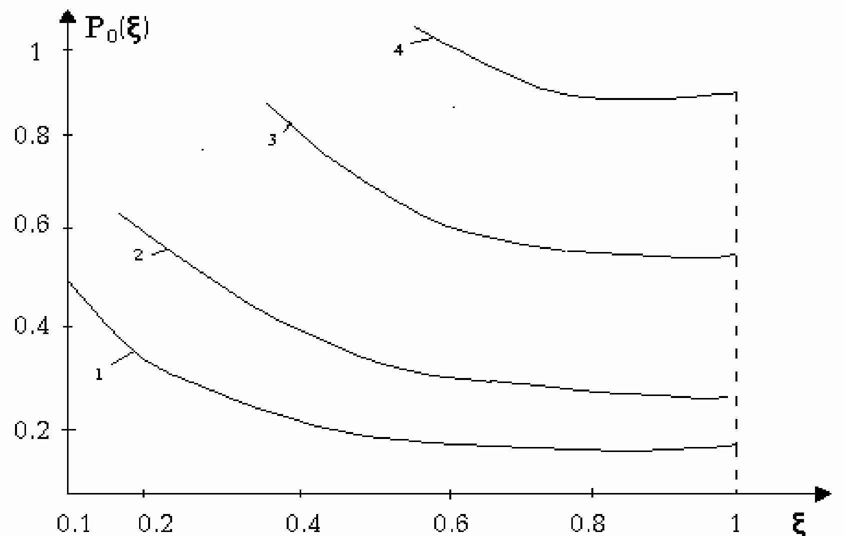
то оператор A будет отображать замкнутый шар S в себя и будет сжимающим [10]. Тогда оператор A в шаре S будет иметь неподвижную точку x^*, которая единственная и ее можно найти методом последовательных приближений

$$x_{i+1} = A(x_i), \quad i = 0, 1, ... \tag{27}$$

отправляясь от любого начального элемента $x_0 \in S$. Полученная по метрике (20) последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ сходится к неподвижной точке x^*, которая удовлетворяет уравнению $x^* = A(x^*)$ и является искомой функцией $p_0(\xi)$. Наконец, с помощью (16) устанавливаем зависимость F_0 от принятого значения W, что можно трактовать как зависимость $\delta_0 = W$ от безразмерной внешней силы F_0.

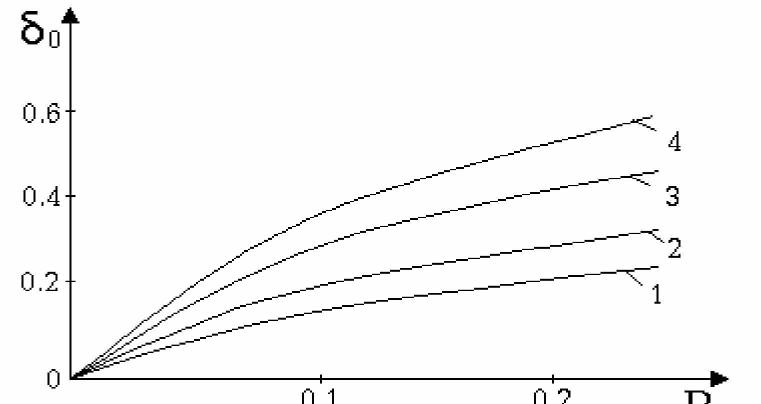
3. Анализ числовых результатов

Используя формулы (27) и отправляясь от начального элемента $x_0 \equiv 0$, с помощью ЭВМ получены решения интегрального уравнения (15) для некоторых значений безразмерного параметра ε и при следуюших значениях безразмерных параметров: $F_0 = 0.2$; $m = n = 1$; $\mu = 0.1$; $\theta = 0.05$; $\chi = 2$; $h/b = 0.5$. Важно отметить, что при таких значениях параметров интегральное уравнение (15) переходит в линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, а условия



Фиг. 2

(23) существования и единственности его решения переходят в известное [10] условие $\theta\psi < 1$, которое в рассматриваемом примере выполняется.



Фиг. 3

Согласно этим вычислениям, на фиг. 2 линиями 1, 2, 3, 4 изображены законы распределения безразмерных контактных давлений $p_0(\xi)$ в области их определения $\xi \in [\varepsilon;1]$, соответствующих значениям параметра $\varepsilon = 0.1;\ 0.2;\ 0.4;\ 0.6$. Как видно из этих графиков, значение $p_0(\varepsilon)$ безразмерного контактного давления на внутренней границе (т. е. на окружности $r = a$) для малых значений ε значительно больше, чем значения $p_0(1)$ безразмерного контактного давления на внешней границе контактной области (т. е. на окружности $r = b$). Кроме того, контактное давление достигает своего минимума вблизи точки $\xi = 1$.

На фиг. 3 линиями 1,2,3,4 изображены зависимости δ_0 от F_0 для указанных выше значений параметров $m,\ n,\ \mu,\ \theta,\ \chi,\ h/b$ и соответствуюших при $\varepsilon = 0.1;\ 0.2;\ 0.4;\ 0.6$.

Авторы благодарят профессора С. М. Мхитаряна за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 309с.
2. Александров В. М. , Коваленко Е. В. К теории контактных задач при наличии нелинейного износа // МТТ. 1982. №4. С. 98-108.
3. Акопян В. Н., Мхитарян С. М. К осесимметричной контактной задаче теории упругости при наличии износа. // Докл. АН АрмССР. 1982. Т. 75. №3. С. 140-144.
4. Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашиваемых штампов //МТТ. 1987. №6. С. 62-68
5. Александров В. М., Аннакулова Г. К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. №1. С. 154-160.
6. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн.1. М.: Наука, 1978. 400с.
7. Богатин О. Б., Моров В. А., Тихонов А. Г. Проблемы моделирования нестационарного термоконтактного взаимодействия в трибосистемах // Трение и износ. 1992. Т. 13. №1. С. 172-184.
8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962. 364с.
9. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
10. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ., 1960. 300с.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа М.: Наука, 1965. 360с.
12. Мхитарян С. М., Шекян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых тел, изготовленных из степенно-упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С. 15-32.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 534.14: 517.93

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПУЛЬСАЦИЙ ПУЗЫРЬКА

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.

Ключевые слова: пульсация, нелинейность, пузырек.
Keywords: pulsation, nonlinearity, bubble.

Շ.Հ. Գրիգորյան, Գ.Գ. Օհանյան

Պղպջակի զարկումները նկարարագրող ոչ գծային ընդհանրացրած հավասարման մոտավոր լուծումները

Ստացված է անսեղմելի մածուցիկ հեղուկում մենակյաց պղպջակի զարկումները նկարագրող ընդհանրացված հավասարումը: Դիտարկված են ազատ և հարկադրված տատանումների խնդիրները: Այն պարագայում, երբ հաստատուն ամպլիտուդայով և հաճախությամբ արտաքին հարկադրական ուժը տրվում է սինուսոիդալ տեսքով, դուրս է բերված ամպլիտուդա-հաճախային բնութագրիչի հավասարումը, որն կայունացած զարկումների դեպքում նկարագրում է ռեզոնանսային կորը: Ցույց է տրված զարկումների ամպլիտուդայի թռիչքաձև փոփոխության հնարավորությունը: Երկրորդական ռեզոնանսների պարագայում գտնված են պղպջակի մակերևույթի փոփոխության օրենքները ըստ ժամանակի:

Sh.H. Grigoryan, G.G. Oganyan

Approximate Solutions of Generalized Equation of Bubble Pulsation with the Full Account of the Quadratic Nonlinearity

The bubble pulsation equation is obtained with quadratic nonlinearities more completely taking into account nonlinearity effects. The equation of amplitude-frequency characteristic is derived for external force with constans amplitude and frequency and sinusoidal variation on time. The equation of resonant curve is obtained for stationnare regime of pulsation. Possibility of jamped change of pulsation of amplitude is shown.

Получено уравнение пульсации пузырька с квадратичными нелинейностями, более полно учитывающее нелинейные эффекты. Рассмотрены задачи свободных и вынужденных колебаний. При вынуждающей внешней силе, синусоидально изменяющейся во времени с заданной амплитудой и частотой, получено уравнение амплитудно-частотной характеристики, которое в случае установившегося режима пульсаций является уравнением резонансной кривой. В последнем случае показана возможность скачкообразного изменения амплитуды пульсаций. При исследовании вторичных резонансов выявлены законы изменения во времени сферической формы поверхности пузырька.

В несжимаемой жидкости свободные и вынужденные колебания одиночного пузырька неизменяемой сферической формы в линейной постановке исследованы многими авторами, в частности, в [1-3]. В нелинейной постановке подобные задачи рассмотрены в [2,4] методами численного анализа. В настоящей работе на основе упрощенной модели разреженной пузырьковой смеси [3] выведено уравнение со всеми тремя квадратичными нелинейностями, описывающее пульсации пузырька. Асимптотическими методами гармонического анализа [5,6] исследованы задачи свободных и вынужденных колебаний.

1. Исходные уравнения. Пусть одиночный сферический газовый пузырек находится в безграничной вязкой несжимаемой жидкости. Полагая, что термодинамическое поведение газа в пузырьке является адиабатическим, радиальное движение системы жидкость-пузырек можно описать системой уравнений [3]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2}\rho_1 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}, \qquad \rho_1 = \mathrm{const}$$

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right)^{\gamma}, \qquad \rho_2 R^3 = \mathrm{const}, \qquad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}} \tag{1.1}$$

Здесь t –время, p –давление, ρ –плотность, R –радиус пузырька, c_p и c_v – удельные теплоемкости, γ –показатель адиабаты газа, μ –динамическая вязкость жидкости. Индексы 1,2 и 0 отнесены, соответственно к жидкости, газу и состоянию покоя (равновесия). Предположим, что в любой момент времени отклонения физических параметров смеси от своих равновесных значений малы

$$p_2 = p_0(1 + p_2'), \quad p_1 = p_0(1 + p_1'), \quad \rho_2 = \rho_{20}(1 + \rho_2'), \quad R = R_0(1 + R') \tag{1.2}$$

Здесь штрихи отнесены к избыточным значениям параметров и в дальнейшем опускаются. Подставляя (1.2) в уравнения Рэлея-Лэмба, адиабатического состояния газа и сохранения его массы в пузырьке, систему (1.1) приведем к упрощенному виду:

$$p_2 - p_1 = \frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2}\left[\frac{d^2R}{dt^2} + R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] + \frac{4\mu}{p_0}\frac{dR}{dt}$$

$$p_2 = -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2}R^2, \qquad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \tag{1.3}$$

в котором малые члены порядка R^3 и выше пренебрежены в сравнении с оставленными, ω_{ar} – линейная частота собственных колебаний пузырька. Исключая из (1.3) избыточное давление p_2, получим уравнение с тремя нелинейностями

$$\ddot{R} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta\dot{R} - \alpha R^2 + R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma}p_1 = 0$$

$$\delta = \frac{2\mu}{\rho_1}\frac{1}{R_0^2} = \frac{2}{3\gamma}\frac{\mu}{p_0}\omega_{ar}^2, \qquad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2}\omega_{ar}^2 \tag{1.4}$$

где точки над искомой функцией R означают, как обычно, дифференцирование по t. Полученное уравнение без пятого и шестого слагаемых, порознь и вместе взятых, как объект математического исследования, приведено в [5,6].

Для построения приближенного решения нелинейного уравнения используется асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [5]. Решение ищется в виде разложения функции R в ряд по степеням безразмерного малого параметра ε, характеризующего малость амплитуды пульсаций a

$$R = \varepsilon r_1(a,\varphi) + \varepsilon^2 r_2(a,\varphi) + \varepsilon^3 r_3(a,\varphi) + \cdots, \qquad r_1 = a\cos\varphi, \ \varphi = \omega_{ar}t + \beta \tag{1.5}$$

Здесь β –фаза, r_1 –решение линейного варианта уравнения (1.4) без диссипативного слагаемого, где величины a и β –постоянные. При учете нелинейных и диссипативных эффектов a и β, однако, полагаются уже не постоянными, а медленно меняющимися по t функциями. Поэтому их производные можно представить в виде рядов по степеням ε.

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1(a) + \varepsilon^2 \phi_2 + \cdots, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} + \dot{\beta} \tag{1.6}$$

где коэффициенты A_1, A_2 и ϕ_1, ϕ_2 определяются в процессе построения равномерно-пригодного решения во втором приближении. Согласно методу, в качестве новых независимых переменных принимаются функции a и φ. Вывод необходимых преобразований подробно изложен в [5,6] и их использование позволяет записать уравнение (1.4) в виде:

$$\begin{gathered}
\omega_{ar}^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \omega_{ar}^2 R + \varepsilon 2\omega_{ar}\left(\phi_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi}\right) + \varepsilon^2\left[\left(\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2\right)\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \right. \\
\left. + 2\left(\omega_{ar} A_2 + A_1 \phi_1\right)\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} + A_1^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + A_1 \frac{dA_1}{da}\frac{\partial R}{\partial a} + A_1 \frac{d\phi_1}{da}\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right] = \\
= -2\delta\left[\omega_{ar}\frac{dR}{d\varphi} + \varepsilon\left(A_1 \frac{\partial R}{\partial a} + \phi_1 \frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)\right] + \alpha R^2 - R\left\{\omega_{ar}^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \varepsilon 2\omega_{ar} \times \right. \\
\times\left(\phi_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi}\right) + \varepsilon^2\left[\left(\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2\right)\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + 2\left(\omega_{ar}A_2 + A_1\phi_1\right)\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \varphi} + \right. \\
\left.\left. + A_1^2 \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + A_1 \frac{dA_1}{da}\frac{\partial R}{\partial a} + A_1 \frac{d\phi_1}{da}\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right]\right\} - \frac{3}{2}\left\{\omega_{ar}^2\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 + \varepsilon 2\omega_{ar} \times \right. \\
\times\left[A_1 \frac{\partial R}{\partial \varphi}\frac{\partial R}{\partial a} + \phi_1\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[A_1^2\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^2 + 2A_1\phi_1 \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \right. \\
\left.\left. + \phi_1^2\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\omega_{ar}\frac{\partial R}{\partial \varphi}\left(A_2 \frac{\partial R}{\partial a} + \phi_2 \frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)\right]\right\} - \frac{\omega_{ar}}{3\gamma} p_1 + 0\left(\varepsilon^3\right)
\end{gathered} \tag{1.7}$$

2. Свободные колебания. Полагается, что избыточное давление в жидкости (вынуждающая сила) отсутствует, т.е. в уравнениях (1.4) и (1.7) принимается $p_1 \equiv 0$.

Подстановка разложения (1.5) в уравнение (1.7) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε приводит в первом (порядка ε) приближении к однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} + r_1 = 0, \qquad r_1 = a\cos\varphi \tag{2.1}$$

Во втором приближении будем иметь

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi^2} + r_2 = -\frac{2}{\omega_{ar}}\left(\phi_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial a \partial \varphi}\right) + \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} r_1^2 - r_1 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi}\right)^2$$

Подставляя решение (2.1) в правую часть уравнения, получим

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi^2}+r_2=\frac{2}{\omega_{ar}}\left(a\phi_1\cos\varphi+A_1\sin\varphi\right)+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_{ar}^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_{ar}^2}+\frac{5}{2}\right)\cos 2\varphi$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного и какого-либо частного решения неоднородного уравнений. Общее решение однородного уравнения включается в решение (2.1) и потому не приводится. Частные решения неоднородного уравнения с первыми двумя слагаемыми дают значения $\phi_1=0,\ A_1=0,$ а с последними членами определяют функцию

$$r_2\left(a,\varphi\right)=\frac{a^2}{4}\frac{2\alpha-\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2}\left[1-\frac{1}{3}\frac{2\alpha+5\omega_{ar}^2}{2\alpha-\omega_{ar}^2}\cos 2\varphi\right]=$$
$$=\frac{3\gamma}{4}\left(1-\frac{\gamma+2}{3\gamma}\cos 2\varphi\right)a^2 \tag{2.2}$$

В третьем приближении (порядка ε^3), с учетом $A_1=\phi_1=0$, находим

$$\frac{\partial^2 r_3}{\partial\varphi^2}+r_3=-\frac{2}{\omega_{ar}}\left(\phi_2\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi^2}+A_2\frac{\partial^2 r_1}{\partial a\partial\varphi}\right)-2\frac{\delta}{\omega_{ar}}\frac{\partial r_1}{\partial\varphi}+2\frac{\alpha}{\omega_{ar}^2}r_1r_2-$$
$$-r_1\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi^2}-r_2\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi^2}-3\frac{\partial r_1}{\partial\varphi}\frac{\partial r_2}{\partial\varphi} \tag{2.3}$$

Подстановка решений (2.1) и (2.2) в (2.3) позволяет выявить явный вид неоднородного уравнения относительно функции $r_3\left(a,\varphi\right)$, откуда определяются коэффициенты $A_2\left(a\right)$ и $\phi_2\left(a\right)$. Не приводя выкладок, аналогичных при получении формулы (2.2), выпишем частные решения

$$\phi_2=-\frac{a^2}{48}\frac{\left(2\alpha-\omega_{ar}^2\right)\left(10\alpha+\omega_{ar}^2\right)}{\omega_{ar}^3},\qquad A_2=-\delta a \tag{2.4}$$

Сама функция r_3 предстанет в виде

$$r_3=\frac{\left(2\alpha+11\omega_{ar}^2\right)\left(2\alpha+5\omega_{ar}^2\right)}{192\omega_{ar}^4}a^3\cos 3\varphi \tag{2.5}$$

Тогда, в силу формул (2.4) и разложений (1.6), амплитуда и фаза осцилляций определяются через формулы

$$a=a_0e^{-\delta t},\ \ a_0=a\left(0\right),\ \beta=\frac{3\gamma\left(5\gamma+2\right)}{32}\frac{\omega_{ar}}{\delta}a^2,\ \ \varphi=\omega_{ar}t+\beta \tag{2.6}$$

Здесь a_0–постоянная интегрирования, величина β, как и следовало ожидать, является функцией от квадрата амплитуды. Приближенное решение (1.5) теперь предстанет в явном виде

$$R=a\cos\varphi-\frac{\gamma+3}{4}a^2\cos 2\varphi+\frac{3\left(\gamma-1\right)}{4}a^2+0\left(a^3\right) \tag{2.7}$$

В отсутствие вязкости $(\delta = 0)$ вновь получим решение (2.7), в котором, однако, будет фигурировать нелинейная частота Ω

$$a = a_0 = \mathrm{const}, \quad \varphi = \Omega t, \ \Omega = \omega_{ar}\left[1 - \frac{3\gamma\left(5\gamma+2\right)}{16}a_0^2\right]$$

Без учета дополнительных нелинейностей – пятого и шестого членов уравнения (1.4)–будем иметь

$$\Omega_* = \omega_{ar}\left[1 - \frac{5\left(3\gamma+1\right)^2}{48}a_0^2\right]$$

Поскольку $\Omega > \Omega_*$, постольку полный учет квадратичных нелинейных эффектов увеличивает нелинейную частоту колебаний, которая, тем не менее, меньше частоты собственных колебаний пузырька.

3. Вынужденные колебания. Предположим, что вдали от пузырька избыточное давление в жидкости совершает периодические колебания с заданной частотой ω. Полагая в (1.4) $p_1 = 3\gamma F\cos\omega t$, где $F = \mathrm{const}$ определяет амплитуду вынуждающей силы, перепишем уравнение в виде

$$\ddot{R} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta\dot{R} - \alpha R^2 + R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\omega_{ar}^2 F\cos\omega t \qquad (3.1)$$

Поскольку при вынужденных колебаниях возникают резонансные явления, то для нахождения их значений частот предварительно строится прямое разложение, откуда будут выявлены условия, при которых оно становится непригодным [5,6]. Вкратце опишем эту процедуру, аналогичную проведенной в [6]. Разложение (1.5) подставляется в уравнение (3.1) и далее коэффициенты при каждой степени ε приравниваются к нулю. Для функций r_1, r_2 получаются уравнения, решения которых позволяют получить формулу для функции R. Однако, анализ получаемого таким путем приближенного решения свидетельствует, что оно не является равномерно-пригодным разложением второго порядка, поскольку при значениях частот $\omega = \omega_{ar}$ и $\omega = 2\omega_{ar}$, $\omega = \omega_{ar}/2$ реализуются резонансы, называемые, соответственно, главным и вторичными.

а. Главный (основной) резонанс на частоте $\omega \approx \omega_{ar}$.

Потребуем, чтобы неоднородность, исходящая от внешнего воздействия, проявлялась одновременно с нелинейностью и диссипацией (затуханием), которые в задаче свободных колебаний появляются в членах порядка ε^3 в третьем приближении. Поэтому примем, что $F \sim \varepsilon^3$. Подстановка разложения (1.5) в уравнение (3.1) и последующие выкладки вновь приводят для первого и второго приближений к решениям (2.1) и (2.2), определяющим форму свободных колебаний. В третьем приближении получим уравнение (2.3) с добавлением слагаемого $(-F\cos\omega t)$ в правой части. Подстановка функций (2.1), (2.2) в полученное уравнение и ввод в рассмотрение параметра расстройки частоты $\sigma = \omega_{ar} - \omega$ дает

$$\frac{\partial^2 r_3}{\partial\varphi^2}+r_3=\left[\frac{2}{\omega_{ar}}\phi_2+\frac{a^2}{24}\frac{\left(2\alpha-\omega_{ar}^2\right)\left(10\alpha+\omega_{ar}^2\right)}{\omega_{ar}^4}-\frac{1}{a}F\cos\left(\sigma t+\beta\right)\right]a\cos\varphi+$$

$$+\left[\frac{2}{\omega_{ar}}A_2+2\frac{\delta}{\omega_{ar}}-F\sin\left(\sigma t+\beta\right)\right]\sin\varphi-\frac{\left(2\alpha+5\omega_{ar}^2\right)\left(2\alpha+11\omega_{ar}^2\right)}{\omega_{ar}^4}\frac{a^3}{8}\cos 3\varphi \quad (3.2)$$

В силу требования отсутствия секулярных членов в решении будем иметь

$$A_2\left(a\right)=-\delta a+\frac{\omega_{ar}}{2}F\sin\left(\sigma t+\beta\right)$$

$$\phi_2\left(a\right)=-\frac{a^2}{48}\frac{\left(2\alpha-\omega_{ar}^2\right)\left(10\alpha+\omega_{ar}^2\right)}{\omega_{ar}^3}+\frac{\omega_{ar}}{2a}F\cos\left(\sigma t+\beta\right) \quad (3.3)$$

Подставляя соотношения (3.3) в разложения (1.8), приходим к неавтономной системе, в которой введением новой безразмерной переменной

$$\nu=\sigma t+\beta,\quad \dot{\varphi}=\dot{\nu}+\omega_{ar}-\sigma \quad (3.4)$$

исключается явная зависимость от t и система уравнений преобразовывается в автономную

$$a\dot{\nu}=\sigma a-\frac{a^3}{48}\frac{\left(2\alpha-\omega_{ar}^2\right)\left(10\alpha+\omega_{ar}^2\right)}{\omega_{ar}^3}+\frac{\omega_{ar}}{2}F\cos\nu$$

$$\dot{a}=-\delta a+\frac{\omega_{ar}}{2}F\sin\nu \quad (3.5)$$

Отметим, что исследование основного резонанса иным способом–методом многих масштабов [6], – вновь приводит к системе (3.5) и формулам (2.1), (2.2).

Исследуем установившиеся $\left(\dot{a}=0,\ \dot{\nu}=0\right)$ пульсации пузырька и выведем уравнение резонансной кривой, выявляющей зависимость амплитуды a_0 от расстройки частоты σ. Тогда из системы (3.5) следует соотношение

$$\left(B_2a_0^2\right)^3-2\sigma_1\left(B_2a_0^2\right)^2+\left(\sigma_1^2+\delta_1^2\right)B_2a_0^2=\frac{B_0}{4}F^2$$

$$B_2=\frac{\left(2\alpha-\omega_{ar}^2\right)\left(10\alpha+\omega_{ar}^2\right)}{48\omega_{ar}^4},\quad \sigma_1=\frac{\sigma}{\omega_{ar}}=1-\frac{\omega}{\omega_{ar}},\ \ \delta_1=\frac{\delta}{\omega_{ar}} \quad (3.6)$$

представляющее собой искомое безразмерное уравнение резонансной кривой. В плоскости $\left(\sigma_1,a_0\right)$ уравнение касательной к резонансной кривой имеет вид

$$\frac{da_0}{d\sigma_1}=\frac{a_0\left(B_2a_0^2-\sigma_1\right)}{\sigma_1^2-4B_2a_0^2\sigma_1+3\left(B_2a_0^2\right)^2+\delta_1^2} \quad (3.7)$$

Приравняв в нулю уравнение (3.7), определим зависимость максимального значения амплитуды a_0 от расстройки σ_1, подстановка которой в (3.6) выявляет, в свою очередь, ее зависимость от величины внешней вынуждающей силы

$$\left(a_0\right)_{\max}^2=\frac{\sigma_1}{B_2},\ \ \left(a_0\right)_{\max}=\frac{1}{2}\frac{F}{\delta_1}$$

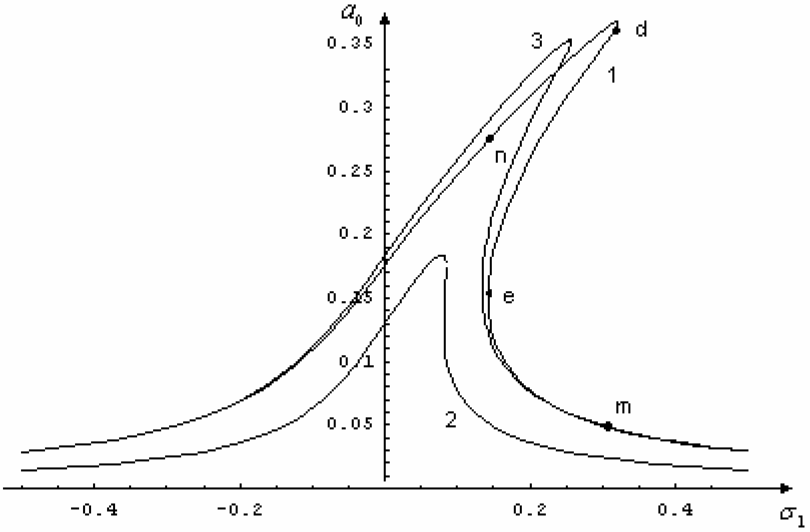
Уравнение вертикальной касательной находится из требования $da_0/d\sigma_1 = \infty$, т.е. равенства нулю знаменателя в (3.7), откуда определяются абсциссы вертикальной касательной

$$\sigma_1^{(1.2)} = 2B_2a_0^2 \pm \sqrt{\left(B_2a_0^2\right)^2 - \delta_1^2}$$

Из требования $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}$ находим значение критической силы внешнего воздействия

$$F_{\text{кр}}^{(2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{B_2}} = \sqrt{\frac{8}{B_2}\delta_1^3}, \quad \sigma_1 = 2\delta_1, \quad \left(a_0\right)_{\text{кр}}^2 = \frac{\delta_1}{B_2} \tag{3.8}$$

Очевидно, что каждому исходному радиусу пузырька и сорту газа соответствуют свои значения критической силы.



Фиг.1 Резонансные кривые для пульсирующих в воде пузырьков равного радиуса с одинаковым исходным давлением. Кривая 1 соответствует воздушному пузырьку при $\delta_1 = 0.04$ и $F = 2F_{\text{кр}}^{(2)} = 2.9442\cdot10^{-2}$; 2–тому же пузырьку при $F = F_{\text{кр}}^{(2)} = 1.4725\cdot10^{-2}$; 3–пузырьку с CO_2 при $\delta_1 = 0.04167$ и $F = 1.75F_{\text{кр}}^{(2)} = 2.9442\cdot10^{-2}$.

Обозначим через $F_{\text{кр}}^{(1)}$ критическое значение внешней вынуждающей силы в случае частичного учета нелинейных эффектов, т.е. пренебрежения пятым и шестым слагаемыми уравнения (3.1), а через $B_1 = \left(5/12\right)\left(\alpha/\omega_{ar}^2\right)^2$ –коэффициент в уравнении (3.6) вместо B_2. Очевидно, что $B_2 < B_1$ и, в силу (3.8), имеем $F_{\text{кр}}^{(2)} > F_{\text{кр}}^{(1)}$. При значениях $F > F_{\text{кр}}^{(2)} > F_{\text{кр}}^{(1)}$ на резонансных кривых проявится гистерезис (фиг.1, кривые 1,3) и будут иметь место скачкообразные изменения амплитуды пульсаций пузырька. Однако, при выполнении требования $F > F_{\text{кр}}^{(1)}$

возможна реализация значения $F \le F_{\text{кр}}^{(2)}$ и тогда явление гистерезиса отсутствует, т.е. резонансная кривая однозначна (фиг.1, кривая 2).

На фиг.1 при одинаковом исходном давлении p_0 приведены резонансные кривые, отнесенные к пульсирующим в воде пузырькам равного радиуса R_0, которые находятся под воздействием разных значений внешних сил F. Кривые 1 и 2 относятся к воздушному пузырьку $\left(\gamma = 1.4;\ B_2 = 2.3625\right)$ при $\delta_1 = 0.04$ и, соответственно, $F = 2F_{\text{кр}}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$, $F = F_{\text{кр}}^{(2)} = 1.4721 \cdot 10^{-2}$. Кривая 3 отнесена к пузырьку того же радиуса с углекислым газом CO_2 $\left(\gamma = 1.29;\ B_2 = 2.0468\right)$ при $\delta_1 = 0.04167,\ F = 1.75F_{\text{кр}}^{(2)} = 2.9442 \cdot 10^{-2}$. Характерной особенностью каждой из кривых является степень искривленности, зависящая от значений параметров γ, δ_1 и F. С переходом от воздуха к CO_2, т.е. уменьшением γ, кривая 3 в сравнении с 1 менее искривлена (более полога). Резкие искривления резонансных кривых, обусловленные наличием нелинейных эффектов, приводят к явлениям срыва и скачка амплитуды пульсации, что подтверждается анализом поведения, например, кривой 1. Действительно, передвижение по ней вдоль положительного направления оси σ_1, соответствующее уменьшению величины частоты ω вынуждающей силы, приводит к медленному увеличению амплитуды до максимального значения $a_0 = 0.368$ и последующему ее уменьшению до $a_0 = 0.3673$ (точка d, $\sigma_1 = 0.3412$). По его достижению происходит срыв (скачкообразное уменьшение) значения до $a_0 = 0.0462$ (точка $m,\ \sigma_1 = 0.3212$) и далее с уменьшением ω имеет место плавный спад значения амплитуды. Передвижения вдоль отрицательного направления оси σ_1, соответствующее, наоборот, увеличению ω, приводит к медленному увеличению амплитуды до значения $a_0 = 0.01506$ (точка $e, \sigma_1 = 0.1428$). По его достижению значение амплитуды скачком увеличивается до $a_0 = 0.2748$ (точка n, $\sigma_1 = 0.1428$) и с увеличением ω происходит медленный спад значения a_0.

б. Вторичные резонансы. При их рассмотрении будет использован менее трудоемкий метод Ван-дер-Поля. Для компактной записи приводимых результатов удобно представлять искомые решения в комплексной форме. Решением линейного неоднородного варианта уравнения (3.1) является функция

$$R\left(t\right) = Ae^{i\omega_{ar}t} + \Lambda e^{i\omega t} + \left(\text{к.с.}\right), \quad A = \frac{a}{2}e^{i\beta}, \quad \Lambda = \frac{\omega_{ar}^2}{\omega^2 - \omega_{ar}^2}\frac{F}{2} \tag{3.9}$$

$$\dot{R}\left(t\right) = i\omega_{ar}Ae^{i\omega_{ar}t} + i\omega\Lambda e^{i\omega t} + \left(\text{к.с.}\right) \tag{3.10}$$

где комплексная A и ее сопряженная $\overline{A}$ амплитуды, а также фаза β являются постоянными величинами. Согласно идее метода, полагается [5,6], что решение нелинейного уравнения (3.1) вновь можно искать в виде (3.9), (3.10), однако, уже с медленно меняющимися по t функциями $A(t)$, $\bar{A}(t)$ и $\beta(t)$. Здесь символ (к.с.) означает совокупность комплексно-сопряженных функций. Дифференцирование (3.9) с последующим комбинированием с (3.10) дает связь

$$\dot{\bar{A}} = -Ae^{2i\omega_{ar}t} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.1) и учитывая связь (3.11), приходим к искомому уравнению первого приближения относительно комплексной амплитуды

$$\begin{aligned}
&i\dot{A}\left[1+Ae^{i\omega_{ar}t}+\Lambda e^{i\omega t}+(k.c)\right]=-i\delta\left[Ae^{i\omega_{ar}t}+\frac{\omega}{\omega_{ar}}\Lambda e^{i\omega t}-(k.c)\right]e^{-i\omega_{ar}t}+\\
&+\frac{\alpha}{2\omega_{ar}}\Big\{2A\Lambda\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)+\Lambda^2\left[e^{i(2\omega-\omega_{ar})t}+e^{-i(2\omega+\omega_{ar})t}\right]+\\
&+2\bar{A}\Lambda\left[e^{i(\omega-2\omega_{ar})t}+e^{-i(\omega+2\omega_{ar})t}\right]+A^2\left(e^{i\omega_{ar}t}+e^{-i3\omega_{ar}t}\right)+2\left(A\bar{A}+\Lambda^2\right)e^{-i\omega_{ar}t}\Big\}+\\
&+A\Lambda\left[\frac{\omega^2+\omega_{ar}^2+3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}}e^{i\omega t}+\frac{\omega^2+\omega_{ar}^2-3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}}e^{-i\omega t}\right]+\frac{5}{4}\frac{\omega^2}{\omega_{ar}}\Lambda^2\left[e^{i(2\omega-\omega_{ar})t}+\right.\\
&\left.+e^{-i(2\omega+\omega_{ar})t}\right]+\bar{A}\Lambda\left[\frac{\omega^2+\omega_{ar}^2-3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}}e^{i(\omega-2\omega_{ar})t}+\frac{\omega^2+\omega_{ar}^2+3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}}e^{-i(\omega+2\omega_{ar})t}\right]+\\
&+\frac{5}{4}\omega_{ar}\left(A^2e^{i\omega_{ar}t}+\bar{A}^2e^{-3i\omega_{ar}t}\right)+\left(\frac{\omega_{ar}}{4}A\bar{A}+\frac{\omega^2}{4\omega_{ar}}\Lambda^2\right)e^{-i\omega_{ar}t}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

При выводе укороченных уравнений, описывающих в первом приближении вторичные резонансы, в уравнении (3.12) оставляются в рассмотрение лишь медленно меняющиеся слагаемые.

б1. Субгармонический резонанс на частоте $\omega \approx 2\omega_{ar}$. Близость вынуждающей частоты к удвоенной собственной отразим через параметр расстройки $\sigma = \omega - 2\omega_{ar}$. Тогда, согласно (3.12), укороченное линейное уравнение предстанет с переменным коэффициентом в неоднородной части

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{2\alpha+\omega_{ar}^2+\omega^2-3\omega\omega_{ar}}{2\omega_{ar}}\bar{A}\Lambda e^{i\sigma t}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{\left(2+\sigma_{11}\right)^2-1},\quad \sigma_{11}=\frac{\sigma}{\omega_{ar}}=\frac{\omega}{\omega_{ar}}-2$$

Подстановка $A = Be^{i\sigma t/2}$ преобразует его в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{B}+\frac{2\delta+i\sigma}{2}B = -i\omega_{ar}E\Lambda\bar{B},\qquad E=\frac{2\alpha-\omega_{ar}^2+\sigma\left(\sigma+\omega_{ar}\right)}{2\omega_{ar}^2}$$

Представляя комплексную амплитуду в виде $B = B_1 + iB_2$, для действительных B_1, B_2 получим систему связанных уравнений

$$\dot{B}_1+\delta B_1+\left(E\Lambda-\frac{\sigma_{11}}{2}\right)\omega_{ar}B_2=0,\quad \dot{B}_2+\delta B_2+\left(E\Lambda+\frac{\sigma_{11}}{2}\right)\omega_{ar}B_1=0$$

Опуская стандартные выкладки для разрешения полученной системы, выпишем общее решение для функции $B(t)$

$$B=b_1e^{\chi_1 T}+b_2e^{\chi_2 T}-i\sqrt{\frac{EF+\Sigma}{EF-\Sigma}}\left(b_1e^{i\chi_1 T}-b_2e^{i\chi_2 T}\right),\ b_{1,2}=\text{const},\ T=\omega_{ar}t$$

$$\Sigma=\sigma_{11}\left(\sigma_{11}+1\right)\left(\sigma_{11}+3\right),\ \chi_{12}=-\delta_1\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma_{11}}{\Sigma}\sqrt{E^2F^2-\Sigma^2},\ \delta_1=\frac{\delta}{\omega_{ar}} \tag{3.13}$$

Для того, чтобы амплитуда пульсаций пузырька оставалась малой, но конечной величиной, необходимо выполнение требования $B\to 0$ при $t\to\infty$ для фиксированных значений σ_{11} и δ_1. Такое условие налагает ограничение на величину вынуждающей силы F и потому решение (3.9) запишется в разных формах. Действительно, показатели экспонент в (3.13) являются вещественными и неположительными $\left(\chi_{1.2}\le 0\right)$ в диапазоне

$$\frac{\Sigma}{E}\le F\le\frac{\Sigma}{E}\sqrt{1+\left(2\frac{\delta_1}{\sigma_{11}}\right)^2}$$

Тогда решение (3.9) предстанет в виде функции

$$R(t)=2\left(b_1e^{\chi_1 T}+b_2e^{\chi_2 T}\right)\cos\left(\frac{2+\sigma_{11}}{2}T\right)+\frac{\sigma_{11}}{\Sigma}F\cos\left(\sigma_{11}+2\right)T+$$
$$+2\sqrt{\frac{EF+\Sigma}{EF-\Sigma}}\left(b_1e^{\chi_1 T}-b_2e^{\chi_2 T}\right)\sin\left(\frac{\sigma_{11}+2}{2}T\right) \tag{3.14}$$

Величины $\chi_{1.2}$ являются комплексными при значениях $F<\Sigma/E$ и решение (3.9) запишется в виде

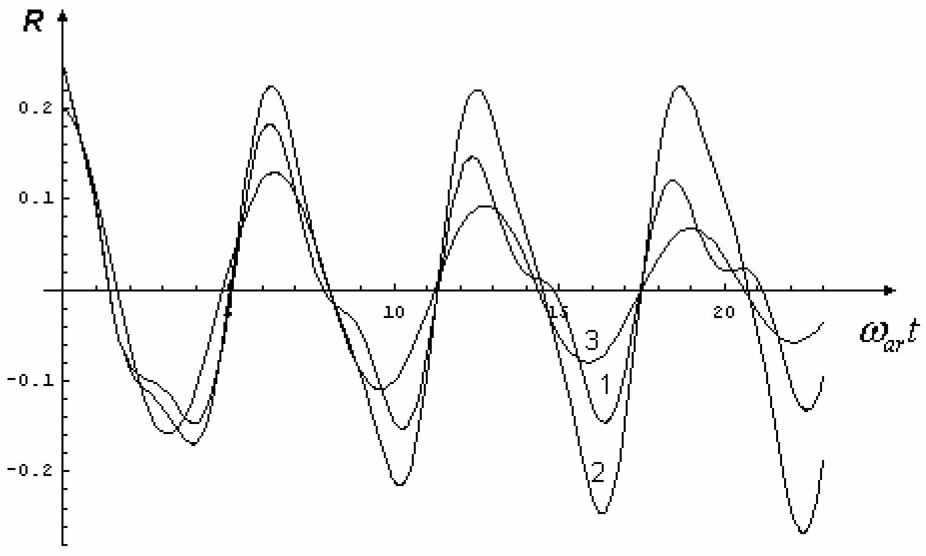
$$R(t)=2b_1e^{-\delta_1 T}\left[1-\sqrt{\frac{\Sigma+EF}{\Sigma-EF}}\right]\cos\left(\frac{\sigma_{11}+2}{2}+\frac{\sigma_{11}}{2\Sigma}\sqrt{\Sigma^2-E^2F^2}\right)T+$$
$$+2b_2e^{-\delta_1 T}\left[1+\sqrt{\frac{\Sigma+EF}{\Sigma-EF}}\right]\cos\left[\frac{\sigma_{11}+2}{2}-\frac{\sigma_{11}}{2\Sigma}\sqrt{\Sigma^2-E^2F^2}\right]T+$$
$$+\frac{\sigma_{11}}{\Sigma}F\cos\left(\sigma_{11}+2\right)T \tag{3.15}$$

При очень больших значениях времени T решения (3.14) и (3.15) стремятся к предельной функции

$$R(t)=\frac{\sigma_{11}}{\Sigma}F\cos\left(\sigma_{11}+2\right)T$$

На фиг.2 для пульсаций воздушного $\left(\gamma=1.4\right)$ пузырька в воде представлены графики решениий (3.14) –кривые 1, 2 и (3.15) – кривая 3. Согласно определению

δ_1 из (1.4) и (3.6), величина значения δ_1 обратно пропорциональна квадрату исходного радиуса R_0. Для достаточно мелкого пузырька $(\delta_1 = 0.08)$ с самого начала Эффект диссипации преобладает над линейностью и амплитуда пульсаций сразу уменьшается (кривая 1, $b_1 = b_2 = 0.05,\ \sigma_{11} = 0.08,\ F = 0.1678$). Для пузырька большого размера $(\delta_1 = 0.038)$ при тех же исходных данных вначале нелинейность доминирует над диссипацией и посему происходит увеличение амплитуды, продолжающееся до момента $t = 16\pi/\omega_{ar}$. По истечении этого времени начинается процесс преобладания диссипации над нелинейностью и амплитуда медленно убывает – кривая 2. Для пульсаций, описываемых решением (3.15) при исходных данных $\sigma_{11} = 0.08,\ \delta_1 = 0.08$, но с меньшей вынуждающей силой $F = 0.0934$, амплитуда сразу уменьшается – кривая 3. Численный анализ свидетельствует, что характер поведения кривой, соответствующий пузырьку большего радиуса $(\delta_1 = 0.038)$, совпадает с кривой 3. Этот факт можно объяснить не только доминированием диссипативного эффекта над нелинейными, но и малостью величины внешней вынуждающей силы F.



Фиг.2. Графики решений при субгамоническом резонансе на частоте $\omega = 2\omega_{ar}$.
Кривые 1,2 соответствуют решению (3.14), 3–решению (3.15).

б2. Субгармонический резонанс на частоте $\omega \approx \omega_{ar}/2$. Вводя в рассмотрение параметр расстройки частоты $\sigma = \omega - \omega_{ar}/2$, из (3.11) получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{2\alpha + 5\omega^2}{4\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i2\sigma t}, \quad \Lambda = \frac{2F}{\left(2\sigma_{12}+1\right)^2 - 4}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = \frac{\omega}{\omega_{ar}} - \frac{1}{2}$$

общим решением которого является функция

$$A = A_0 e^{-\delta_1 T} - \frac{i}{\delta_1 + i2\sigma_{12}} \frac{2\alpha + 5\omega^2}{4\omega_{ar}^2} \Lambda^2 e^{i2\sigma_{12}T}, \quad \frac{1}{\delta_1 + i2\sigma_{12}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_1^2 + 4\sigma_{12}^2}} e^{-i\operatorname{arctg} 2\sigma/\delta}$$

где A_0 – значение комплексной амплитуды в начальный момент времени $t = 0$. Тогда решение (3.9) можно записать в явном виде

$$\begin{gathered} R(t) = a_0 e^{-\delta_1 T} \cos\left(T + \beta_0\right) + \frac{4F}{\left(2\sigma_{12}+1\right)^2 - 4} \cos\left(\frac{2\sigma_{12}+1}{2} T\right) + \\ + \frac{8\alpha + 5\omega_{ar}^2 \left(2\sigma_{12}+1\right)^2}{2\omega_{ar}^2} \frac{1}{\left[\left(2\sigma_{12}+1\right)^2 - 4\right]^2} \frac{F^2}{\sqrt{\delta_1^2 + 4\sigma_{12}^2}} \times \\ \times \sin\left[\left(2\sigma_{12}+1\right)T - \operatorname{arctg}\frac{2\sigma_{12}}{\delta_1}\right] \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь, в силу обозначений из (3.9), a_0 и β_0 –значения действительных амплитуды и фазы в момент $T = 0$.

б3. Помимо рассмотренных резонансов, из (3.12) следует, что возможен резонанс на очень низкой вынуждающей частоте $\omega \approx 0$, которому соответствует уравнение

$$\begin{gathered} i\dot{A}\left[1 + \Lambda\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)\right] = -i\delta A + \\ + A\Lambda\left[\frac{2\alpha + \omega_{ar}^2 + \omega^2}{2\omega_{ar}}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + \frac{3}{2}\omega\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right] \qquad \Lambda = -\frac{F}{2} \end{gathered}$$

Отделяя действительную и мнимую части, придем к уравнениям относительно амплитуды a и фазы β. При их интегрировании учтем, что в силу порядков $F \sim \varepsilon^3$, $\omega/\omega_{ar} \sim \varepsilon^4$ имеет место соотношение $\left|F\cos\omega t\right| << 1$. Тогда

$$a(t) = a_0 e^{-\delta_1 T}, \quad \beta(t) = \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}} \frac{F}{\omega} \sin\frac{\omega}{\omega_{ar}} T + \beta_0, \quad a_0 = a(0), \quad \beta_0 = \beta(0)$$

и решение (3.9) предстанет в виде функции

$$R(t) = a_0 e^{-\delta_1 T} \cos\left(T + \frac{2\alpha + \omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}^2} \frac{\omega_{ar}}{\omega} F \sin\frac{\omega}{\omega_{ar}} T + \beta_0\right) - F\cos\omega t$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsation air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Amer.. 1959. V.31. N12. pp.1654-1667.
2. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука. 1987. 464с.
4. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука. 1968. С.129-165.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
6. Nayfeh A.S. Introduction to perturbation teqniques. Ect.: Wiley. 1981. = Найфе А. Введение в теорию возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
7. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет
Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 17.07.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика
УДК 62-50

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ СОЕДИНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н.

Ключевые слова: кинематика, упругий манипулятор, криволинейные координаты.
Key words: kinematics, elastic manipulator, curvilinear coordinates.

Ա.Ա Ղուկասյան, Հ.Ն. Մաճկալյան
Առաձգական հանգույցներով մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան կորագիծ կոորդինատական համակարգում

Ուսումնասիրված է առաձգական հանգույցներով բազմօղակ մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան կորագիծ կոորդինատական համակարգում: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում Լյամեի ընդհանրացված մատրիցայի միջոցով ստացված են մանիպուլյատորի օղակների բնութագրիչ կետերի և բռնիչի շարժման արագությունների ու արագացումների համար ընդհանրացված արտահայտություններ: Ստացված բանաձևերը թույլ են տալիս կորագիծ կոորդինատական համակարգում հեշտությամբ որոշել տարբեր կոնստրուկցիաներով առաձգական մանիպուլյատորների կինեմատիկական առնչությունները: Որպես օրինակ որոշված է մեկ առաձգական հանգույցով երկօղակ մանիպուլյատորի բռնիչի շարժման արագությունը գլանային կոորդինատական համակարգում:

A.A.Ghukasyan, H.N.Matshkalyan
The movement kinematics of manipulator with elastic joints in the curvilinear coordinate system

Movement kinematics of the multilink manipulator with elastic joints in the curvilinear coordinate system is studied. Within the bounds of the linear theory of elasticity by generalized Lyame matrix general expressions for speed and acceleration of the characteristic points of the links and manipulator handle are received. The received formulas allow to easily determine the kinematics of different constructions of the manipulators with elastic joints in the curvilinear coordinates. As an example movement velocity of a twolink manipulator with one elastic joint is determined in the cylindrical coordinate system.

Исследована кинематика движения многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. В рамках линейной теории упругости получены обобщенные выражения для скорости и ускорения характерных точек звеньев и схвата упругого манипулятора через обобщенные матрицы Лямэ. Полученные формулы позволяют в криволинейных координатах легко определить кинематические соотношения различных конструкций манипуляторов с упругими соединительными узлами. В качестве примера определена скорость движения схвата двухзвенного манипулятора с одним упругим узлом в цилиндрической системе координат.

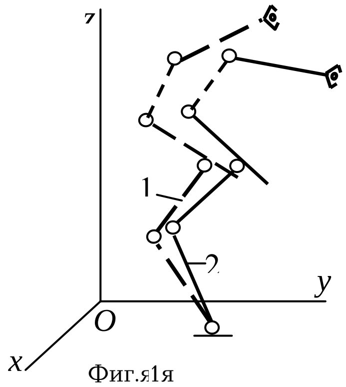
1.Скорость движения в криволинейных координатах.

Рассмотрим модель манипулятора, представленного на фиг.1, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [1]. Обобщенные координаты жесткой модели манипулятора, определяющие его конфигурацию в пространстве OXYZ, обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, а через $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ – дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах. Заметим, что здесь как координаты α_j $(j = 1, 2, ..., n)$, так и координаты β_k $(k = 1, 2, ..., m)$ зависят только от времени.

Положения точек манипулятора в пространстве зависят как от обобщенных координат жесткой модели, так и от дополнительных координат, обусловленных упругостью конструкции. Следовательно, криволинейные координаты манипулятора s_i $(i=1,2,3)$ также будут зависеть от вышеназванных координат [2, 4]

$$s_i = s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \quad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

Согласно предположению о высокой жесткости соединительных узлов ($C_k \sim \varepsilon^{-1}$) и малости углов упругого поворота звеньев ($\beta_k \sim \varepsilon, (k=1,2,...,m; \varepsilon << 1)$ [3], криволинейные координаты манипулятора можно представить в виде разложения по формуле Тейлора с точностью ε



Фиг.я1я

1 – конфигурацияяупругойямоделия манипулятораяя
2я– яконурацияяабсолю2нояжес2койямоделия

$$s_i = s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \beta_k}\beta_k + o(\varepsilon^2)$$

$(i=1,2,3)$ (1.2)

где $s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0) = s_i^*(\boldsymbol{\alpha})$.

Скорость движения характерных точек (центр масс звеньев, центр соединительных узлов, положение схвата и т.д.) манипулятора в зависимости от обобщенных координат α_j, β_k и скоростей $\dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_k$ (j=1,2,..., n; $k=1,2,...m$), можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = &\left[H_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right)\right]\mathbf{s}_1^0 + \\ &+\left[H_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right)\right]\mathbf{s}_2^0 + \\ &+\left[H_3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right)\right]\mathbf{s}_3^0\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{s}_\mathbf{i}^\mathbf{0}$ $(i=1,2,3)$ – единичные векторы касательной к координатным линиям s_i $(i=1,2,3)$ соответственно, H_i $(i=1,2,3)$ - коэффициенты Лямэ.

Введем обобщенную матрицу Лямэ [4] $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ элементы которого зависят от коэффициентов Лямэ H_i $(i=1,2,3)$ и от обобщенных координат манипулятора α_j, β_k ($j=1, 2,...,n;$ $k=1,2,...,m$).

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \left\{ H_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{3,n} \qquad (1.4)$$ я

Введем также матрицу $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ с элементами

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \left\{ H_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right\}_{i,k=1}^{3,m} \qquad (1.5)$$

Вектор скорости (1.3) в криволинейной системе координат с учетом введенных матриц (1.4) и (1.5) можно представить в виде суммы двух слагаемых

я $$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} \qquad (1.6)$$ я

При $\beta = 0$ формула (1.6) совпадает с формулой для абсолютно жесткой модели [4], поскольку $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0) = \mathbf{H}^*(\boldsymbol{\alpha})$.

Предположения $C_k \sim \varepsilon^{-1}$ и $\beta_k \sim \varepsilon\,(k = 1,2,...,m; \varepsilon << 1)$ и разложение (1.2) позволяют вектор скорости движения элементов манипулятора в криволинейных координатах представить в рамках скорости движения абсолютно жесткой модели с добавлением слагаемого, порядок которого не превышает ε я

я $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) \qquad (1.7)$$

где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$– скорость движения жесткой модели манипулятора, а $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ – скорость, обусловленная упругостью соединительных узлов манипулятора, ($\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) \sim \varepsilon$).

Поскольку коэффициенты Лямэ зависят от дополнительных обобщенных координат манипулятора, то при малых деформациях их также можно представить в виде разложения

я $$H_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = H_i(\boldsymbol{\alpha},0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_i(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \beta_k}\beta_k + O(\varepsilon^2) \; (i = 1,2,3) \qquad (1.8)$$

Подставляя (1.2), (1.8) в (1.3), вектор скорости движения манипулятора с точностью ε можно представить в виде

я $$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\beta}} \qquad (1.9)$$

Согласно (1.7)

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\beta}} \end{gathered} \qquad (1.10)$$ я

Здесь обобщенная матрица Лямэ $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)$ имеет размерность ($3 \times n$) с элементами

я $$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0) = \left\{ H_i(\boldsymbol{\alpha},0) \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{3,n} \qquad (1.11)$$

а обобщенная матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ имеет размерность ($3 \times n$)

я $$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(H_i(\boldsymbol{\alpha},0) \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_j} \right) \beta_k \right\}_{i,j=1}^{3,n} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[H_i(\boldsymbol{\alpha},0) \frac{\partial^2 s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \beta_k \partial \alpha_j} + \frac{\partial H_i(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \beta_k} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_j} \right] \beta_k \right\}_{i,j=1}^{3,n} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

($i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2, ..., m$).

При $\beta_k = 0 \quad (k = 1,2,...,m), \quad H_2^*(\alpha,0) = 0$.

Матрица $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0)$ имеет размерность (3xm)

я
$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0) = \left\{ H_i(\boldsymbol{\alpha},0) \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \beta_k} \right\}_{i,k=1}^{3,m} \tag{1.13}$$

2. Ускорение движения в криволинейных координатах. Определяя скорость движения характерных точек манипулятора с упругими соединительными узлами в общем случае по формуле (1.6) и с точностью до ε по формуле (1.9), можно найти проекции вектора ускорения на осях криволинейной системы координат. Проекции вектора ускорения в криволинейной системе координат в общем случае имеют вид [2]

я
$$w_i = \frac{1}{H_i} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{s}_i} \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{v^2}{2} \right\} \quad (i = 1,2,3) \tag{2.1}$$

Для упругого манипулятора $s_i = s_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad H_i = H_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (i = 1,2,3)$.

В соответствии с (1.3) вектор скорости движения манипулятора зависит от обобщенных координат α_j, β_k и скоростей $\dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_k \quad (j = 1,2,...,n;\ k = 1,2,...,m)$я

я
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \tag{2.2}$$я

а модуль определяется выражением

я
$$|\mathbf{v}|^2 = \sum_{i=1}^{3} \left[H_i^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k \right)^2 \right] \tag{2.3}$$

где

я
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \dot{\beta}_k = \dot{s}_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и произведя необходимые вычисления с учетом (2.4), определим проекции вектора ускорения $\mathbf{w}$ на осях криволинейной системы координат. Компоненты вектора ускорения будут зависеть от обобщенных координат $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, скоростей $(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ и ускорений $(\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ манипулятора

$$w_i = w_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (i = 1,2,3) \tag{2.5}$$

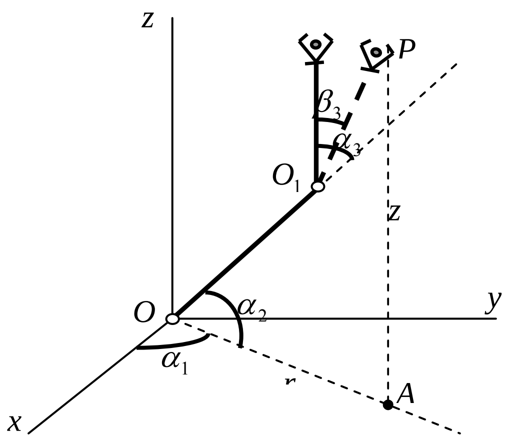
С учетом (1.8) выражение (2.3) будет иметь вид

я $$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}|^2 &= \sum_{i=1}^{3}\left(H_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\frac{d}{dt}s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(H_i(\boldsymbol{\alpha},0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_i(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\beta_k}\beta_k\right)\frac{d}{dt}\left(s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\beta_k}\beta_k\right)\right]^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left\{\left[H_i(\boldsymbol{\alpha},0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_i(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\beta_k}\beta_k\right]\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j + \right. \\
&\left. + H_i(\boldsymbol{\alpha},0)\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\beta_k}\beta_k\right\}^2 + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$ я (2.6)

Подставляя (2.6) в (2.1) и произведя необходимые вычисления, компоненты вектора ускорения при малых деформациях в криволинейной системе координат также можно представить в виде суммы двух слагаемых

я $$w_i = w_i^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + w_i^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (i=1,2,3)$$ я (2.7)

где слагаемые $w_i^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ $(i=1,2,3)$ соответствуют ускорению абсолютно жесткой модели манипулятора, а $w_i^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$ $(i=1,2,3)$ зависят от упругости соединительных узлов манипулятора и имеют порядок ε.



Фиг.яя2я

3. В качестве примера определим скорость движения схвата двухзвенного манипулятора (фиг. 2) в криволинейной системе координат. Обобщенные координаты абсолютно жесткой модели манипулятора обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Дополнительную обобщенную координату, обусловленную упругостью шарнира O1, обозначим через β_3 (фиг.2), а линейные размеры звеньев – через l_1, l_2, соответственно.

Скорость схвата рассматриваемого манипулятора удобно исследовать цилиндрическими координатами (φ, r, z).

я $$
\begin{aligned}
s_1 &= \varphi = \alpha_1(t) \\
s_2 &= r = r^*(\alpha_2,\alpha_3,\beta_3) = l_1\cos\alpha_2 + l_2\cos[\alpha_2 + (\alpha_3-\beta_3)] \\
s_3 &= z = z^*(\alpha_2,\alpha_3,\beta_3) = l_1\sin\alpha_2 + l_2\sin[\alpha_2 + (\alpha_3-\beta_3)]
\end{aligned}
$$ я (3.1)

Предполагая, что жесткость соединительного узла O1 велика ($O_3 \sim \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \ll 1$), а угол поворота β_3 мал ($\beta_3 \sim \varepsilon$), разложение (1.2) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\varphi = \alpha_1$$

я $$r = r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0) + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0)}{\partial \beta_3}\beta_3 + O(\varepsilon^2) \quad \text{я} \qquad (3.2)$$

$$z = z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0) + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0)}{\partial \beta_3}\beta_3 + O(\varepsilon^2)$$

Скорость движения характерных точек манипулятора в общем случае определяется выражением (1.9). Представим эту формулу в цилиндрических координатах для определения скорости движения схвата рассматриваемого упругого манипулятора. Коэффициенты Лямэ имеют следующий вид:

я $$H_\varphi = H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = r(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3); \; H_r = H_2 = 1; \quad H_z = H_3 = 1 \qquad (3.3)$$

В силу (3.1) с точностью до ε, имеем

я $$H_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = H_1(\boldsymbol{\alpha}, 0) + \frac{\partial H_1(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \beta_3}\beta_3 \quad \text{я} \qquad (3.4)$$

где $H_1(\boldsymbol{\alpha}, 0) = l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)$, $\frac{\partial H_1(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \beta_3}\beta_3 = l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)\beta_3$

Определим элементы обобщенных матриц Лямэ $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0)$.

Матрица (1.11) для рассматриваемого манипулятора, согласно (3.3), (3.4), имеет следующие элементы:

я $$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \sin\alpha_2 - l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & -l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Вектором скорости движения схвата абсолютно жесткой модели манипулятора является $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, или в проекциях

$$v_{1,\varphi} = \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)]$$

я $$v_{1,r} = -l_1 \dot{\alpha}_2 \sin\alpha_2 - l_2(\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\sin(\alpha_2 + \alpha_3) \qquad (3.6)$$

$$v_{1,z} = l_1 \dot{\alpha}_2 \cos\alpha_2 + l_2(\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\cos(\alpha_2 + \alpha_3)$$

Определим элементы матрицы $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Проведя необходимые вычисления с учетом (3.3), получим

я $$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \beta_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \beta_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \quad \text{я} \qquad (3.7)$$

Аналогичными вычислениями получим элементы обобщенной матрицы $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0)$.

я $$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & 0 & -l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} \quad \text{я} \qquad (3.8)$$

Проекции вектора скорости движения схвата, обусловленные упругостью узла O_1 (фиг.2), согласно (1.10), (3.7) и (3.8), имеют вид

$$v_{2,\varphi} = \dot{\alpha}_1 l_2 \beta_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)$$

я $$v_{2,r} = l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\cos(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \text{ я} \qquad (3.9)$$

$$v_{2,z} = l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\sin(\alpha_2 + \alpha_3) - l_2 \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)$$

где $v_{2,\varphi}, v_{2,r}, v_{2,z}$ имеют порядок (.

Следовательно, проекции вектора скорости движения схвата рассматриваемого упругого манипулятора имеют следующий вид:

$$v_\varphi = \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)] + \dot{\alpha}_1 \beta_3 l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)$$

я $$v_r = -l_1 \dot{\alpha}_2 \sin\alpha_2 - l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 - \dot{\beta}_3)\sin(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\cos(\alpha_2 + \alpha_3) \text{ я}$$

$$v_z = l_1 \dot{\alpha}_2 \cos\alpha_2 + l_2 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 - \dot{\beta}_3)\cos(\alpha_2 + \alpha_3) + l_2 \beta_3 (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\sin(\alpha_2 + \alpha_3)$$

я

ЛИТЕРАТУРАя

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы М.: Наука, 1989. 400 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
3. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт N231, ИПМ АН СССР. М.: 1984.66 с.я
4. Ղուկասյան Ա.Ա. Ընդհանրացված կորագիծ կոորդինատների մի կիրառության մասին: Գիտությունը և կրթությունը Արցախում: 2002. դ3,4.

я

Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна

Поступила в редакцию 18.07.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика

УДК 519.95

УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЕМ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ С m ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННОЙ ДИНАМИКОЙ

Члингарян А.С.

Ключевые слова: дифференциальные игры, устойчивость решений, управление с поводырем
Key words: differential games, solution’s stability, control with guide.

Ա.Ս. Չլինգարյան
Ուղղորդով ղեկավարումը շատ նպատակային բազմություններին մոտեցման խաղային խնդրում հաստատուն դինամիկայով համակարգերի համար

Ուղղորդով ղեկավարումը, որը մեկ բազմության համար ներմուծվել է Ն.Ն. Կրասովկու կողմից, ընդլայնված է m նպատակային բազմությունների համար [2]: Ենթադրվում է որ նպատակային բազմություններին մոտեցման հաջորդականությունը ֆիքսված է իսկ համակարգի դինամիկան հաստատուն է: Պրոցեդուրան իրենից ներկայացնում է օժանդակ համակարգի՝ ուղղորդի ներմուծման մեջ, որը շարժվում է տրված ստաբիլ բազմությունով: Նախնական և օժանդակ համակարգերի շարժումները ձևավորվում են այնպես, որ խաղի ընթացքում նրանք փոխադարձաբար հսկվեն, ինչը ապահովում է լուծումների կայունությունը ըստ ինֆորմացիոն աղավաղումների:

A.S. Chlingaryan
Control with guidance in the pursuit game with m target domains for systems with constant dynamics

Control with guidance introduced by Krasovsky for one target set [1] is extended to the case of m [2] target sets. It is assumed that the consequence of the meetings with the target sets is fixed and the system has constant dynamics. The procedure consists in introducing a secondary system – a guidance, which moves by the given stable bridge. The movements of the initial and the secondary systems are formed in such a way that in the process of the game they track each other, which guarantees ensures the stability of the solutions with respect to informational disturbances.

Управление с поводырем, введенное Н.Н. Красовским для одного целевого множества [1], распространено на случай m [2] целевых множеств. Предполагается, что последовательность встреч с целевыми множествами зафиксирована, а динамика системы постоянная. Процедура заключается во введении в рассмотрение вспомогательной системы - поводыря, движущейся по заданному стабильному мосту. Движения исходной и вспомогательной систем формируются так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались, что обеспечивает устойчивость решений относительно информационных помех.

1. Опишем процедуру управления с поводырем для первого игрока в игре сближения. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, \mathrm{v}) \tag{1.1}$$

Здесь $f : [t_0, \infty) \times R^n \times P \times Q \to R^n$ – непрерывная функция; $P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ – компакты, характеризующие возможности игроков.

Динамика поводыря характеризуется таким же дифференциальным уравнением:

$$\dot{w} = f(t, w, u^*, \mathrm{v}^*) \tag{1.2}$$

где $w \in R^n$, $u^* \in P$, $\mathrm{v}^* \in Q$.

Предполагается [2], что функция $f(t,x,u,\mathrm{v})$ удовлетворяет:

1.Условию бесконечной продолжимости решения, т.е.

$$\left|x' f(t,x,u,\mathrm{v})\right| \le \chi(1+\|x\|^2) \text{ при } (t,x,u,\mathrm{v}) \in [t_0,\infty)\times R^n \times P\times Q$$

где χ – постоянное число;

2. любой ограниченной области

$G \subset R^{n+1} = [\{t,x\} : t \in [-\infty,\infty], x \in R^n]$ условию Липшица:

$$\left\| f(t,x^{(1)},u,\mathrm{v}) - f(t,x^{(2)},u,\mathrm{v})\right\| \le \lambda_G \left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\| \text{ при } (t,x^{(i)},u,\mathrm{v}) \in G\times P\times Q$$

$$(i=1,2)$$

Предполагается также, что выполняется условие седловой точки маленькой игры ([1], с.38), т.е.

$$\min_{u\in P}\max_{\mathrm{v}\in Q} s'_* f(t_*,x_*,u,\mathrm{v}) = \max_{\mathrm{v}\in Q}\min_{u\in P} s'_* f(t_*,x_*,u,\mathrm{v}) \qquad (1.3)$$

при $s_* \in R^n$ $(t_*,x_*) \in [t_0,\infty)\times R^n$.

Допустим, что заданы замкнутые, ограниченные и выпуклые множества M_k $(k \in I)$ и N в пространстве $\{t,x\} \in [-\infty,\infty]\times R^n$ $(I = (1,2,...,m))$. И плата определяется равенством

$$\gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tilde{\tau}_1(x[\cdot]),...,\tilde{\tau}_m(x[\cdot]))$$

Здесь $x[\cdot] = \{x[t] : t \ge t_0\}$ – реализовавшееся движение системы (1.1) ;

$\sigma : [t_0,\infty]^m \to (-\infty,\infty]$ – заданная функция;

$\tilde{\tau}_k(x[\cdot]) = \min\{\tilde{\tau} : \tilde{\tau} \in T(x[\cdot],M_k,N)$, где $T(x[\cdot],M_k,N) = \{\tau : \tau \ge t_0, (t,x[t]) \in N\}$ при $t_0 \le t \le \tau$, $(\tau,x[\tau]) \in M_k\}$;

в случае $T(x[\cdot],M_k,N) = \varnothing$ полагаем $\tilde{\tau}_k(x[\cdot]) = \infty$ $(k \in I)$ [1].

Предполагается [2], что функция σ удовлетворяет следующим условиям:

I. На множестве $[t_0,\infty)^m$ функция σ принимает конечные значения и непрерывна;

II. $\sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) = \infty$, если хотя бы одно $\tilde{\tau}_i = \infty$;

III. множество $\Sigma(c) = \{(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) : \sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}_m) \le c\}$ ограниченно для любого конечного числа c;

IV. неравенство $\sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}'_i,...,\tilde{\tau}_m) \le \sigma(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}''_i,...,\tilde{\tau}_m)$ справедливо для любых наборов $(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}'_i,...,\tilde{\tau}_m)$ и $(\tilde{\tau}_1,...,\tilde{\tau}''_i,...,\tilde{\tau}_m)$, удовлетворяющих неравенству $\tilde{\tau}'_i \le \tilde{\tau}''_i$.

Предположим, что последовательность встреч с целевыми множествами $M_1,...,M_m$ строго зафиксирована. Тогда, как и в [3], из семейства u-стабильных мостов $W_k(t_i \mid i \in I \setminus \{i_1,...,i_{m-k}\})$ $k = 0,...,m-1$ [2] выбирается одна ветвь u-стабильных мостов $W_k(t_1,t_2,...,t_{m-k})$, здесь

$k = 0,...,m-1$, которая к моментам времени $t_1,...,t_m$ обрывается соответственно на целевых множествах $M_1,...,M_m$.

Итак, при прицеливании на множество M_1, т.е. при $t \in [t_0, t_1]$ нужно воспользоваться управлением $u^e[t]$, экстремальным к мосту $W_0(\cdot)$. Для множества M_2 берем управление $u^e[t]$ $t \in [t_1, t_2]$, экстремальное к мосту $W_1(\cdot, t_1)$, где t_1 – момент встречи с целевым множеством M_1. Аналогичным образом выбираются управления для следующих интервалов времени.

2. Выберем некоторую систему Δ полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 1, 2, ...)$, покрывающих полуось $[t_0, \infty)$. Сначала возьмем первый отрезок времени $[t_0, t_1]$. Предположим, что имеются информационные помехи, вследствие которых на всем отрезке времени $[t_0, t_1]$ разность между $x^*[t]$ и реализовавшимся на деле значением фазового вектора $x[t]$ удовлетворяет оценке

$$\left\| x^*[t] - x[t] \right\| \le \zeta_1 \quad (t_0 \le t \le t_1) \tag{2.1}$$

Это осуществимо, поскольку движения $x[t]$ меняются непрерывно в зависимости от начальных условий [1].

Пусть (t_0, x_0) – начальная позиция системы (1.1), $x_0^* = x^*[t_0]$ – результат неточного измерения первым игроком фазового вектора x_0. В качестве начальной позиции для вспомогательной системы (1.2) выберем точку $(t_0, w_0) \in W_0(\cdot)$, ближайшую к позиции (t_0, x_0^*), если таких точек не одна, то выбираем любую из них. На первом промежутке $[t_0, \tau_1]$ движения $x[t]$ и $w(t)$ определим следующим образом. Полагаем, что вектор $\mathrm{v}_*^{(0)} \in Q$ удовлетворяет соотношению

$$\max_{\mathrm{v} \in Q} \min_{u \in P} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}) = \min_{u \in P} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}_*^{(0)})$$

В качестве движения поводыря $w(t)$ $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ возьмем то решение уравнения в контенгенциях:

$$\dot{w}(t) \in \Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}^0) \quad (w(t_0) = w_0,\ t_0 \le t \le \tau_1)$$
$$(\Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}) = CO[f : f = f(t, w, u, \mathrm{v});\ u \in P]$$

для которого выполняется условие

$$(t, w(t)) \in W_0(\cdot) \ \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1$$

где $\tau = \tau_1$, если на отрезке $[t_0, \tau_1]$ точка $(t, w(t))$ не попадает на M_1; в противном случае $\tau \le \tau_1$ – момент времени, когда точка $(t, w(t))$ впервые попадает на множество M_1. Существование такого движения $w(t)$ вытекает из свойства u-стабильности множества $W_0(\cdot)$ и условия $(t_0, w_0) \in W_0(\cdot)$.

Для построения движения $x[t]$ при $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ определяем вектор $u^{(0)} \in P$ из условия

$$\min_{u \in P} \max_{\mathrm{v} \in Q} (x_0^* - w_0)' f(t_0, x_0^*, u, \mathrm{v}) = \max_{\mathrm{v} \in Q} (x_0^* - w_0)' f_1(t_0, x_0^*, u_*^{(0)}, \mathrm{v})$$

Постоянное управление $u[t] = u^{(0)}$, $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$ в паре с некоторой измеримой реализацией управления второго игрока $\mathrm{v}[t] \in Q$ определяет движение $x[t]$ при $(t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$, т.е.

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u^{(0)}, \mathrm{v}[t]) \quad (x[t_0] = x_0,\ t_0 \le t \le \tau_1 \le t_1)$$

Предположим, что движения $x[t]$ и $w(t)$ определены на отрезке $[t_0, \tau_i]$, причем выполняются условия

$$(t, w(t)) \in W_0(t; t_0, x_0),\ (t, w(t)) \notin M_1 \text{ при } t_0 \le t \le \tau_i \le t_1$$

Для построения движения $w(t)$ на следующем участке (τ_i, τ_{i+1}) выберем управление $\mathrm{v}_*^{(i)} \in Q$ из условия:

$$\max_{\mathrm{v} \in Q} \min_{u \in P} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}) =$$
$$= \min_{u \in P} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}_*^{(i)})$$

где $x^*[\tau_i]$ и $x[\tau_i]$ удовлетворяют условию (2.1). Движение поводыря определим так, чтобы оно удовлетворяло уравнению в контенгенциях

$$\dot{w}(t) \in \Phi_u(t, w(t), \mathrm{v}_*^{(i)}) \quad (\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$$

и для него выполнялось условие

$$(t, w(t)) \in W_0(t; t_0, x_0) \text{ при } \tau_i \le t \le \tau \le t_1$$

где $\tau = \tau_{i+1}$, если на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ точка $(t, w(t))$ не попадает на M_1; в противном случае $\tau \le \tau_1$ – момент времени, когда точка $(t, w(t))$ впервые попадает на множество M_1. Существование такого движения $w(t)$, как и выше, вытекает из свойства u-стабильности множества $W_0(t; t_0, x_0)$ и условия $(\tau_i, w(\tau_i)) \in W_0(t; t_0, x_0)$.

Управление $u[t] = u^{(i)}$ $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$ в системе (1.1) выберем из условия

$$\min_{u \in P} \max_{\mathrm{v} \in Q} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u, \mathrm{v}) =$$
$$= \max_{\mathrm{v} \in Q} (x^*[\tau_i] - w(\tau_i))' f(\tau_i, x^*[\tau_i], u^{(i)}, \mathrm{v})$$

Это постоянное управление $u[t] = u^{(i)}$, $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$ в паре с некоторой измеримой реализацией управления второго игрока $\mathrm{v}[t] \in Q$ определяет движение $x[t]$ при $(\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$, т.е.

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u^{(i)}, \mathrm{v}[t]) \quad (\tau_i \le t \le \tau_{i+1} \le t_1)$$

Указанная процедура продолжается последовательно до тех пор, пока точка $(t, w(t))$ не попадет на множество M_1. Поскольку множество $W_0(t;\, t_0, x_0)$ обрывается на M_1 к моменту времени t_1, то движущаяся по этому мосту $W_0(t; t_0, x_0)$ точка $(t, w(t))$ не позже чем к моменту времени t_1 попадет на множество M_1.

Причем в момент времени t_1 имеет место оценка [2]

$$\rho^2(t_1) \le \rho^2(t_0) e^{2\lambda(t_1 - t_0)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_1)) \frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t_1 - t_0)} - 1] \qquad (2.2)$$

где $\rho^2(t) = \| x[t] - w(t) \|^2$ $(t_0 \le t \le t_1)$, из которой видно, что $\rho^2(t_1) \to 0$ при $\zeta_1 \to 0$ и $\delta \to 0$. Как и в [3], обозначим правую часть в (2.2) через $\varepsilon_1(\zeta_1, \delta)$. Следовательно, по теореме 57.1 [1] в момент времени t_1 движение $x[t]$ попадет в ε_1-окрестность сечения множества M_1 гиперплоскостью $t_1 = \text{const}$, т.е. на множество $M_1^{\varepsilon_1} = [(t', x') : t' = t_1, \|x' - x\| \le \varepsilon_1(\zeta_1, \delta), x \in M_1]$.

Теперь возьмем второй орезок времени $[t_1, t_2]$. Предположим, что на всем этом отрезке разность между $x^*[t]$ и $x[t]$ удовлетворяет оценке

$$\|x^*[t] - x[t]\| \le \zeta_2 \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

Для этого интервала из ветви u-стабильных мостов $W_k(t_1, t_2, ..., t_{m-k})$, где $k = 0, ..., m-1$, выбирается мост $W_1(t;\, t_0, x_0, t_1)$ и экстремальная к нему стратегия $u^{(e)}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$. Движение вспомогательной системы (1.2) продолжится из точки $(t_1, w[t_1])$, одновременно принадлежащей множествам M_1 и $W_1(t; t_0, x_0, t_1)$. Движение $x[t]$ продолжается из позиции $(t_1, x[t_1]) \in M_1^{\varepsilon_1}$. Тогда по теореме из 57.1 [1] не позже чем к моменту времени t_2 движение $x[t]$ попадет в некоторую ε_2-окрестность сечения множества M_2 гиперплоскостью $t_2 = \text{const}$, т.е. на множество $M_2^{\varepsilon_2} = [(t', x') : t' = t_2, \|x' - x\| \le \varepsilon_2(\zeta_2, \delta), x \in M_2]$. Причем

$$\varepsilon_2(\zeta_2, \delta) = \rho^2(t_2) \le \rho^2(t_1) e^{2\lambda(t_2 - t_1)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_2)) \frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t_2 - t_1)} - 1]$$

где $\rho^2(t) = \|x[t] - w(t)\|^2$ $(t_1 \le t \le t_2)$.

Продолжая аналогичные рассуждения для следующих целевых множеств, на конечном интервале $[t_{m-1}, t_m]$ получим: движение $x[t]$ попадет в $\varepsilon_m(\zeta_m, \delta)$-окрестность сечения множества M_m гиперплоскостью $t_m = \text{const}$.

$$\varepsilon_m(\zeta_m, \delta) = \rho^2(t_m) \le \rho^2(t_{m-1}) e^{2\lambda(t_m - t_{m-1})} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta_m)) \frac{1}{2\lambda}[e^{2\lambda(t_m - t_{m-1})} - 1]$$

где $\rho^2(t) = \|x[t] - w(t)\|^2$ $(t_{m-1} \le t \le t_m)$, $\varepsilon_m(\zeta_m, \delta) \to 0$ при $\zeta_m \to 0$ и $\delta \to 0$

Итак, получаем обобщение теоремы 57.1 из [1] на случай нескольких целевых множеств.

Теорема.

Пусть для $f(t, x, u, \mathrm{v})$ из (1.1) имеют место все вышеуказанные условия. Пусть также для всех позиций (t_*, x_*) и векторов s_* маленькая игра имеет седловую точку, то есть имеет место (1.3). Предположим, что существует семейство u-стабильных мостов $W_k(t, t_0, x_0, t_1, t_2, ..., t_{m-k})$ $k = 0, ..., m-1$, обрывающееся к моментам времени t_i $i = 1, ..., m$ на целевых множествах $M_1, ..., M_m$, соответственно, и пусть начальная позиция (t_0, x_0) принадлежит множеству $W_0(t, t_0, x_0)$. Тогда предложенная выше процедура управления с поводырем доставляет решение задачи сближения, устойчивое по отношению к информационным помехам, т.е. для любых чисел $\delta, \zeta_1, ..., \zeta_m$ существуют числа $\varepsilon_1(\zeta_1, \delta)$, $\varepsilon_2(\zeta_2, \delta), \ldots, \varepsilon_m(\zeta_m, \delta)$ такие, что при $\tau_{i+1} - \tau_i \le \delta$ $(i = 0, 1, ...)$ и

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_1$ при $(t_0 \le t \le t_1)$;

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_2$ при $(t_1 \le t \le t_2)$; и т. д.

$\|x[\tau_i] - x^*[\tau_i]\| \le \zeta_m$ при $(t_{m-1} \le t \le t_m)$ движения $x[t]$ в моменты $t_1, ..., t_m$ будут попадать соответственно в ε_1-окрестность множества M_1, ε_2-окрестность множества M_2 и так далее ε_m-окрестность множества M_m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Габриелян М.С., Субботин А. И. Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами. //ПММ. 1979. Т. 43. №. 2. С. 204-208.
3. Габриелян М.С., Члингарян А.С. Об устойчивости игровой задачи сближения-уклонения с несколькими целевыми множествами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №.3. С. 51-58.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 7.11.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №3, 2007 Механика
УДК 539.3

СПОСОБ ИЗГОТОВЛЕНИЯ БЕСПОРИСТЫХ ДЛИННОМЕРНЫХ ЗАГОТОВОК ГОРЯЧЕЙ ЭКСТРУЗИЕЙ

Туманян Г.А., Петросян А.С.

Ключевые слова: горячая экструзия, коэффициент вытяжки, давление, предел текучести материала, угол матрицы, начальная пористость.

Keywords: Hot extrusion, stretching coefficient, pressure, material yield point, matrix angle, initial porosity.

Գ.Հ. Թումանյան, Հ.Ս. Պետրոսյան

Տաք արտամղումով անծակոտկեն երկարաչափ շինվածքների պատրաստման մեթոդ

Տրված է ծակոտկենության կախումը արտամղման ռեժիմներից՝ արտամղման գործակցից (λ), ճնշումից (p), հոսունության սահմանի լարումից (σ_T), մայրակի անկյունից (α) և սկզբնական ծակոտկենությունից (θ_0): Հեղինակների կողմից նախկինում ստացված բանաձևերի համապատասխան ձևափոխությունները, ինչպես նաև թվային հաշվարկները հնարավորություն են տալիս որոշել անծակոտկեն երկարաչափ շինվածքներ պատրաստելու արտամղման պարամետրերը:

G.H. Tumanyan, H.S. Petrosyan

Way of Producing Porous-Free Long-Measured Blanks of Hot Extrusion

The blank porosity dependence on extrusion conditions is established: coefficient of drawing (λ), pressure (P), yield point (C), angle of the die (α) and initial porosity (θ_0). Appropriate transformations of formulas obtained by the authors, as well as numerical calculations allow to get extrusion parameters for manufacturing porous-free long-measured blanks.

Установлена зависимость пористости заготовки от режимов экструзии: коэффициента вытяжки λ, давления p, предела текучести σ_T, угла матрицы α и начальной пористости θ_0.

Соответственные преобразования формул, полученные ранее авторами, а также численные расчеты позволяют получить параметры экструзии для изготовления беспористых длинномерных заготовок.

В последнее время в промышленности для получения изделий с теоретической плотностью из различных порошковых и керамических материалов все большее распространение получает процесс горячего прессования (выдавливания). Для расширения номенклатуры обрабатываемых материалов важное значение имеет рациональный выбор цикла горячего выдавливания – закономерности изменения давления p и температуры T в зависимости от времени протекания процесса τ. Теоретической основой такого выбора должны служить дифференциальные соотношения, связывающие указанные параметры со скоростью изменения пористости ν порошкового композиционного материала.

Вопросам горячей обработки давлением порошковых материалов посвящены работы [1,2], в которых исследуются различные вопросы горячего деформирования порошковых тел.

Одним из основополагающих направлений в порошковой металлургии является создание материалов и изделий с беспористой структурой. Пористость является концентратором напряжений, резко снижает физико-механические свойства и износостойкость материала, вызывает ускоренную коррозию.

Сложность теоретического исследования процесса деформирования порошковых тел, обусловленная переменным объемом тела, вызвала необходимость изучения и создания расчетной модели. Для этого необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние пористой заготовки в процессе горячей экструзии. До настоящего времени эти вопросы теоретически мало изучены.

На основе анализа литературных источников и большого количества экспериментальных данных в [3,4] представлено обобщенное аналитическое выражение, позволяющее приближенно оценить изменение пористости тел в процессе горячей экструзии. Однако в литературе отсутствуют комплексные исследования этого процесса.

Целью настоящей работы является определение начальной пористости заготовки и величины давления экструзии для изготовления беспористых длинномерных заготовок на основании технологического, экспериментального и теоретического исследований работ [3,4].

В программе исследования применяется порошковый композиционный материал следующего состава: <Fe-Cr+K°>, где K^0– остальные компоненты в шихте: углерод, никель, молибден, медь.

Процентные содержания компонентов приведены в таблице.

Легирование медью (*Cu*), углеродом (*C*), дисульфидом молибдена (MoS_2) произведено путем механического смешивания, т.е. изготовлением шихты ($\tau_{смеш.}$ = 6...8 час).

Таблица

Исходный состав порошковых композиций

N	*Cr*	*Fe*	*C*	*Ni*	*Mo*	*Cu*	*MoS₂*
1	0,8	97,5	0,2	1,5	-	-	-
2	-	97,3	0,2	1,5	1	-	-
3	1	96,7	0,25	1,5	0,5	-	-
4	1	94,5	0,5	1,5	0,5	2	-
5	1	92	0,5	1,5	-	3	2

Для расчетного исследования выбран композиционный материал состава 2 (см. табл.).

Из литературы [3] известна формула

$$\ln\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right)=\frac{\left|1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right|(\lambda\sqrt{\lambda}-1)e^A}{\lambda\sqrt{\lambda}(e^A-\sin^3\alpha)} \qquad (1)$$

где $A=3\left\{\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_T}{p}\left[\ln(\sin\alpha)+\frac{C_1}{2n}\right]^{-\frac{C_1-C_2}{n}}\right]^{\frac{n}{C_1-C_2-n}}-\frac{C_1}{2n}\right\}$; C_1, C_2– расчетные величины; Θ_0, Θ –начальная и текущая пористость в %; α – угол наклона матрицы, град; λ– коэффициент вытяжки; p – давление при экструзии, Мпа; σ_T – предел текучести композиции, МПа.

Оптимальные режимы горячей экструзии образцов размерами (∅24×40) следующие: $T_{экс.}$ =1000°±15°C, $\tau_{выд.}$=2...2,5 ч, λ=2, $\alpha_и$=55°, σ_T=27 МПа [5].

После преобразования формулы (1) определяем величину (e^A):

$$e^{A}=\frac{\lambda\sqrt{\lambda}\cdot\sin^{3}\alpha\cdot\ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\ \ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)-\left|\left(1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|\ (\lambda\sqrt{\lambda}-1)} \qquad (2)$$

где $$A=\ln\frac{\lambda\sqrt{\lambda}\cdot\sin^{3}\alpha\cdot\ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\ \ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)-\left|\left(1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|\ (\lambda\sqrt{\lambda}-1)}$$

Таким образом,

$$3\left\{\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_{T}}{p}\left[\ln(\sin\alpha)+\frac{C_{1}}{2n}\right]^{\frac{C_{1}-C_{2}}{n}}\right]^{\frac{n}{C_{1}-C_{2}-n}}-\frac{C_{1}}{2n}\right\}=$$

$$=\ln\frac{\lambda\sqrt{\lambda}\sin^{3}\alpha\cdot\ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\ln\left(\dfrac{1-\theta}{1-\theta_{0}}\right)-\left|\left(1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|(\lambda\sqrt{\lambda}-1)}.$$

Необходимое условие для получения беспористого материала при горячей экструзии представлено формулой

$$\left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_{T}}{p}\left[\ln(\sin\alpha)+\frac{C_{1}}{2n}\right]^{\frac{C_{1}-C_{2}}{n}}\right]^{\frac{n}{C_{1}-C_{2}-n}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{\lambda\sqrt{\lambda}\sin^{3}\alpha\cdot\ln\left(\dfrac{1}{1-\theta_{0}}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\ln\left(\dfrac{1}{1-\theta_{0}}\right)-\left|\left(1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|\left(\lambda\sqrt{\lambda}-1\right)}+\frac{C_{1}}{2n}>0 \qquad (3)$$

Сначала до холодной прессовки заготовки из металлического порошка и горячей экструзии, заранее расчетным путем определяем величину начальной пористости (θ_{0}). Причем θ_{0} необходимо рассчитать таким образом, чтобы она удовлетворяла необходимым требованиям формулы (3). Для получения беспористого материала при горячей экструзии величину окончательной пористости принимаем равной $\theta=0$.

Величина начальной пористости образца до прессовки, определенная расчетным путем по (3), равна $\theta_{0}=16,6\%$.

Из формулы (1) имеем

$$\ln\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_0}\right)=\ln\left(\frac{1}{1-\theta_0}\right)=\ln\left(\frac{1}{1-0,166}\right)=\ln\left(\frac{1}{0,834}\right)=$$
$$=\ln(1,1990)=0,1815$$

Для определения давления при горячей экструзии p заранее определяем расчетные коэффициенты n, c_1, c_2:

n = 0,941; C_1 = -1,404; C_2 = -3,171

$$C_1=-\frac{6}{\sqrt{11}}\ln\left|\sqrt{13-11\cos\alpha}+11\sqrt{1-\cos\alpha}\right|+2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{13-11\cos\alpha}}+$$
$$+0,612+\frac{1}{\sqrt{3}}+4\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{13-11\cos\alpha}},$$

где

$$C_2=-\frac{6}{\sqrt{11}}\ln\left|\sqrt{13-11\cos\alpha}+11\sqrt{1-\cos\alpha}\right|+2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{13-11\cos\alpha}}+$$
$$+0,612+\frac{1}{\sqrt{3}}-3\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{13-11\cos\alpha}}$$

$$n=\frac{\sqrt{3}\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{12}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{12\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)+1}-1}{\sqrt{12\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)+1}+1}+\sqrt{\frac{11}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{12\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}{11}}}.$$

Подставляя в (3) результаты значений, полученных в вышестоящих выражениях, определяем давление p при горячей экструзии, которое обеспечивает получение беспористой заготовки:

$$\left[\frac{2n\sigma_T}{\sqrt{3}p}\left(\ln\sin\alpha+\frac{C_1}{2n}\right)^{\frac{C_1-C_2}{n}}\right]^{\frac{n}{C_1-C_2-n}}=\left[26,414/p\right]^{1,138}=$$

$$=\ln\frac{\lambda\sqrt{\lambda}\sin^3\alpha\cdot\ln\left(\frac{1}{1-\theta_0}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\theta_0}\right)-\left|\left(1-\frac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|\left(\lambda\sqrt{\lambda}-1\right)}=\ln(15,753)=2,757$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-\theta_0}\right)=0,1815;\ \sin^3\alpha=\sin^3(55^\circ)=(0,8192)^3=0,55$$

$$(26,414/p)^{1,138}=\frac{2,757}{3}-0,746=0,173$$

Из последнего уравнения определяем давление экструзии: $p=e^{4,8}=123,5$ МПа. Для сравнения приведем экспериментальное значение давления экструзии, которое изменяется в пределах P =120...140 МПа. Расхождение составляет от 2,8...11,8%, так как учет температурного фактора осуществляется только снижением предела текучести материала. Для расчетного исследования выбран композиционный материал состава 2 (см. таблицу), для чего экспериментальное значение давления составляет P =120 МПа. Расчетное значение давления для конкретного состава 2 равняется P =123,5 МПа. Расхождение при этом составляет 2,8%.

Пористость при горячей экструзии определяем по формуле (1). После преобразования формулы (1) определяем величину текучей пористости:

$$\theta = 1-(1-\theta_0)\,e^{\dfrac{\left|\left(1-\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\right|(\lambda\sqrt{\lambda}-1)e^{A}}{\lambda\sqrt{\lambda}(e^{A}-\sin^{3}\alpha)}} \qquad (4)$$

Подставляя в (2) окончательную пористость $\theta = 0$, получим

$$e^{A} = \frac{\lambda\sqrt{\lambda}\sin^{3}\alpha\cdot\ln\left(\dfrac{1}{1-\theta_0}\right)}{\lambda\sqrt{\lambda}\cdot\ln\left(\dfrac{1}{1-\theta_0}\right)-1\left(1-\dfrac{2}{1+\cos a}\right)\,|\,(\lambda\sqrt{\lambda}-1)}\,. \qquad (5)$$

Подставляя в (4) результаты значений, полученных в указанных выражениях, определяем окончательную пористость θ заготовки, полученной при горячей экструзии ($\theta = 0,0064$).

Таким образом, установлено что представленные формулы позволяют выбором значений исходной пористости материала θ_0 и других технологических параметров получить после экструзии беспористое изделие ($\theta = 0$). При этом теоретическое и экспериментальное расхождение значений давления экструзии составляет 2,8%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Г.Л. Теория кратковременной ползучести пористых материалов// Межвуз. сб. научн. тр. ЕГУ. Механика. Вып.8. Вопросы механики деформируемого твердого тела. Ереван. 1991. С. 150-153.
2. Лаптев А.М., Самаров В.Н., Подлесный С.В. Параметры горячего изостатического прессования пористых материалов //Изв. АН СССР. Металлы. М.: 1988. С. 92-99.
3. Туманян Г.А. Закономерности напряженно-деформированного состояния пористых тел при экструзии // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2003. Т.56. '2. С. 263-271.
4. Թումանյան Գ., Պետրոսյան Հ. Մետաղափոշուց երկարաչափ մետաղյա առարկաների պատրաստման եղանակ. - Գյուտի արտոնագիր N 1571A2. – Երևան: 2005. – 9 էջ:
5. Манукян Н.В. Технология порошковой металлургии. Ереван: Айастан, 1986. 232 с.

Ереванский государственный инженерный
Университет Армении

Поступила в редакцию
7.07.2006

Ինդեքս 77708 Индекс

ՄԵԽԱՆԻԿԱ Հատոր
МЕХАНИКА Томя 60я№3я2007я
MECHANICS Volume

Բովանդակություն		Содержание
Միշա Սարգսի Գաբրիելյան (Ծննդյան 70-ամյակի առթիվ)	3	ГАБРИЕЛЯН МИША САРКИСОВИЧ (к 70-летию со дня рождения)
Ռազմիկ Մակարի Կիրակոսյան (Ծննդյան 70-ամյակի առթիվ)	5	РАЗМИК МАКАРОВИЧ КИРАКОСЯН (к 70-летию со дня рождения)
Հ. Բ. Աղալարյան Ծերջավոր ճաքով թուլացված բաղադրյալ սեպի հարթ խնդրի մասին	7	Агаларян О.Б. К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ СОСТАВНОГО КЛИНА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ Բաղդասարյան. Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ճաքով թուլացված կիսահարթության համար	15	Баблоян А.А., Багдасарян А.В. СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ
Է. Խ. Գրիգորյան, Կ.Լ. Աղայան Սահքի հարթ ալիքի ցրումը առաձգական ալիքատարից առաձգական տարածությունում	23	Григорян Э.Х., Агаян К.Л. ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ИЗ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА В СОСТАВНОЕ УПРУГОЕ ПРОСТРАНСТВО
Հ.Ֆ. ինասյան, Վ. Ս. Տոնոյան ՈՒղղաձիգ կիսաանվերջ ճաքով բաղադրյալ կիսահարթության համար մի կոնտակտային խնդրի մասին	38	Минасян А.Ф., $\boxed{\text{Тоноян В.С.}}$ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ
Լ. Ա. Աղալովյան, Հ. Մ. Պողոսյան Եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումերը ստորին շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի առկայության դեպքում	46	Агаловян Л. А., Погосян А. М. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ НИЖНИМИ СЛОЯМИ
Ս.Ա. Հակոբյան, Լ.Ա. Մովսիսյան Առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթում ալիքների տարածման մասին և նման խնդիրներ	57	Акопян С.А., Мовсисян Л.А. К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ
Ս. Ա. Վարդանյան, Ս. Հ. Սարգսյան Միկրոպոլյար բարակ սալի ջերմաառաձգականության հավասարումների և եզրային պայմանների ասիմպտոտիկ անալիզը	64	Варданян С.А., Саркисян С.О. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН
Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի Մակերևույթային էլեկտրոդների համակարգի միջոցով թունելային անցքով պյեզոկերամիկ կիսատարածության մեջ ներդաշնակ տատանումների գրգռումը	77	Bardzokas D.I., $\boxed{\text{Filshtinsky M.L.}}$ HARMONIC OSCILLATIONS OF A PIEZOCERAMIC HALF-SPACE WITH A TUNNEL OPENING EXCITED BY A SYSTEM OF SURFACE ELECTRODES
Վ.Մ. Խաչատրյան Մակերևութային էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքները պիեզոակտիվ շերտ(6mm դասի)-կիսատարածություն(43m դասի) համակարգում	87	Хачатрян В.М. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОАКТИВНОЙ СИСТЕМЕ СЛОЙ (класса 6mm)-ПОЛУПРОСТРАНСТВО(класса 43m)
Ա. Լ. Շեկյան, Լ. Ա. Շեկյան Օղակաձև դրոշմի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցությունը սահմանային շփման ռեժիմում	93	Шекян А. Л., Шекян Л. А. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦЕВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА И УПРУГОГО СЛОЯ В РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ
Շ.Հ. Գրիգորյան, Գ.Գ. Օհանյան	101	Гр, горяняШ.А.,яОганяняГ.Г.я

Ինդեքս 77708 Индекся

ՄԵԽԱՆԻԿԱ	Հատոր	
МЕХАНИКА	Томя	60я№3я2007я
MECHANICS	Volume	