

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2007

УДК 539.3

**ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ  
ВКЛЮЧЕНИЕМ**

Восканян А.Р., Григорян Э.Х.

**Ключевые слова:** метод интегрирования Фурье, асимптотические формулы, слой, поверхностные волны, включение, функциональные уравнения, дифракция, уравнение Винера-Хопфа

**Keywords:** method integrated Fourier, asymptotic formulas, layer, surface waves, inclusion, functional equations, diffraction, Winer-Hopff equation

**Ա.Ռ.Ոսկանյան, Է.Խ.Գրիգորյան**

**Սահիքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական  
ներդիրով  
առաձգական տարածությունում**

Աշխատարում հետազոտված է անվերջ առաձգական ներդիրին անվերջությունից որոշակի անկյան տակ ընկնող հարթ ալիքի դիֆրակցիան: Անվերջ ներդիրը բաղկացած է երկու կիսաանվերջ տարբեր նյութերից պատրաստված ներդիրներից: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է զույգ և կենտ խնդիրների գումարի տեսքով:

Դիտարկելով երկար ալիքների դեպքը, այդ խնդիրները (զույգ և կենտ) մոդելավորվում են համապատասխան ձևով, որից հետո նրանցից յուրաքանչյուրը բերվում է Վիներ-Հոպֆի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը: Ստացվում է ասիմպտոտական բանաձևեր տեղափոխության համար հեռու կետերում:

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на бесконечное включение. Бесконечное включение состоит из двух полубесконечных частей с различными материалами. Решение задачи представляется в виде суммы своей четной и нечетной задачи. Рассматривая случай длинных волн, эти задачи (четная и нечетная) моделируются соответствующим образом, после чего каждая из них сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены асимптотические формулы для амплитуды перемещения и контактных напряжений в дальней зоне. Получены также поведения контактных напряжений в окрестности линии соединения полубесконечных частей включения.

**A. R. Voskanyan, E. Kh. Grigoryan**

**Diffraction of a Shear Plane Wave in Elastic Medium with Piecewise Homogeneous  
Infinite Inclusion**

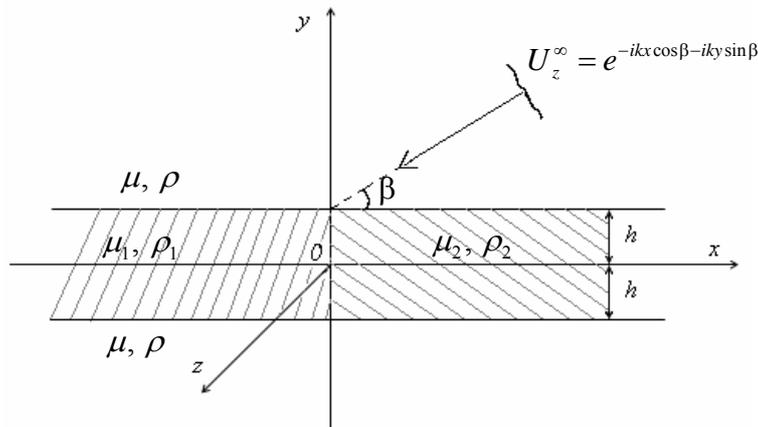
Diffraction of shear plane wave incident from infinity at arbitrary angle on infinite in-

clusion is considered. The infinite inclusion consists of two semi-infinite parts made of different materials. The problem's solution is presented in the form of sum of its even and odd problems. The case of long waves is considered and these problems (the even and odd ones) are modeled in a corresponding way after which each of them is reduced to the solution of Wiener-Hopf functional equation. Asymptotic formulas are obtained for displacement's amplitude and contacts stresses in the far field. The behaviors of contact stresses in the neighborhood of the bonding line of the semi-infinite parts of the inclusion are also obtained.

Рассмотрим упругое пространство, отнесенное к декартовой системе координат  $oxyz$ , содержащее кусочно-однородное упругое бесконечное включение в виде занимающих области  $\Omega_1(-\infty < x \leq 0, |y| < h, |z| < \infty)$  и  $\Omega_2(0 \leq x < \infty, |y| < h, |z| < \infty)$  полубесконечных слоев с малой толщиной  $2h$  (фиг.1).

Пусть из бесконечности под углом  $\beta$  падает плоская сдвиговая волна (гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах,  $t$  – параметр времени,  $\omega$  – частота колебаний) с амплитудой

$$U_z^\infty(x, y) = e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta} \quad (1)$$



Фиг. 1

где  $k = \omega / C$  – волновое число,  $C = \sqrt{\mu / \rho}$  – скорость распространения сдвиговой волны,  $\mu, \rho$  – модуль сдвига и плотность упругого пространства соответственно,  $0 < \beta < \pi / 2$ .

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Ставится задача определить дифрагированное волновое поле, как на участке контакта, так и во всем пространстве.

Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве, содержащем полубесконечное упругое включение, рассмотрена в работе [1].

В работе [2] рассматривается дифракция магнитоупругой волны Лява на границе двух различных идеально проводящих полубесконечных тонких слоев,

прикрепленных к граничной поверхности идеально проводящего упругого полупространства.

Для решения поставленной задачи представим  $U_z^\infty(x, y)$  в виде суммы своей четной

$$U_{z_1}^\infty = \frac{1}{2} \left( e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta} + e^{-ikx \cos \beta + iky \sin \beta} \right) \quad (2)$$

и нечетной

$$U_{z_2}^\infty = \frac{1}{2} \left( e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta} - e^{-ikx \cos \beta + iky \sin \beta} \right) \quad (3)$$

частей.

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

$W_1(x, y)$ ,  $W_2(x, y)$  – амплитуды перемещения пространства в четной и нечетной задачах, соответственно.  $U_1^{(1)}(x, y)$ ,  $U_2^{(1)}(x, y)$  – амплитуды перемещения левого слоя в четной и нечетной задачах, соответственно.  $U_1^{(2)}(x, y)$ ,  $U_2^{(2)}(x, y)$  – амплитуды перемещения правого слоя в четной и нечетной задачах, соответственно.

Исходя из вышесказанного, следует

$$\begin{aligned} U_z^\infty(x, y) &= U_{z_1}^\infty(x, y) + U_{z_2}^\infty(x, y) \\ U_z(x, y) &= W_1(x, y) + W_2(x, y) \\ U^{(1)}(x, y) &= U_1^{(1)}(x, y) + U_2^{(1)}(x, y) \\ U^{(2)}(x, y) &= U_1^{(2)}(x, y) + U_2^{(2)}(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U^{(1)}(x, y)$ ,  $U^{(2)}(x, y)$  – амплитуды перемещения точек в левом и правом слоях соответственно,  $U_z(x, y)$  – амплитуда перемещения в пространстве.

Теперь рассмотрим четную и нечетную задачи отдельно.

### 1. Четная задача

В четной задаче для пространства и слоев имеем следующие волновые уравнения соответственно:

$$\Delta W_1(x, y) + k^2 W_1(x, y) = 0 \quad \Omega(|y| > h, -\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty) \quad (1.1)$$

$$\Delta U_1^{(1)}(x, y) + k_1^2 U_1^{(1)}(x, y) = 0 \quad \Omega_1(|y| < h, -\infty < x < 0, -\infty < z < \infty) \quad (1.2)$$

$$\Delta U_1^{(2)}(x, y) + k_2^2 U_1^{(2)}(x, y) = 0 \quad \Omega_2(|y| < h, 0 < x < \infty, -\infty < z < \infty) \quad (1.3)$$

со следующими контактными условиями:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} &= \mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} & -\infty < x \leq 0 \\ \mu \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} &= \mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} & 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} W_1(x, \pm h) &= U_1^{(1)}(x, \pm h) \quad -\infty < x \leq 0 \\ W_1(x, \pm h) &= U_1^{(2)}(x, \pm h) \quad 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(-0, y) &= U_1^{(2)}(+0, y) \\ \mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= \mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $k_1^2 = \omega^2 / C_1^2$ ,  $k_2^2 = \omega^2 / C_2^2$  – волновые числа слоев,

$C_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}$ ,  $C_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}}$  – соответственно скорости распространения сдвиговых

волн в левом и правом слоях,  $\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2$  – модули сдвига и плотности материала в левом и правом слоях, соответственно.

Считая толщину включения достаточно малой, т.е.  $hk_1 \ll 1$ ,  $hk_2 \ll 1$ , усредним перемещение  $U_1^{(1)}(x, y)$ ,  $U_1^{(2)}(x, y)$  по толщине. Тогда из (1.2) и (1.3) получим

$$\frac{d^2 V_1^{(1)}(x)}{dx^2} + k_1^2 V_1^{(1)}(x) + \frac{1}{h\mu_1} q_1^{(1)}(x) = 0 \quad -\infty < x \leq 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 V_1^{(2)}(x)}{dx^2} + k_2^2 V_1^{(2)}(x) + \frac{1}{h\mu_2} q_1^{(2)}(x) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.8)$$

где

$$V_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h U_1^{(1)}(x, y) dy \quad (1.9)$$

$$q_1^{(1)}(x) = \mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = -\tau_{yz}^{(1)}(x, -h) = -\mu_1 \frac{\partial U_1^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h}$$

$$V_1^{(2)}(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h U_1^{(2)}(x, y) dy \quad (1.10)$$

$$q_1^{(2)}(x) = \mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \tau_{yz}^{(2)}(x, h) = -\tau_{yz}^{(2)}(x, -h) = -\mu_2 \frac{\partial U_1^{(2)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h}$$

где  $q_1^{(1)}(x)$ ,  $q_1^{(2)}(x)$  – амплитуды интенсивностей контактных напряжений, действующих на контактных участках слоев и пространства соответственно левой и правой частей.

Усредним также (1.6) контактные условия

$$V_1^{(1)}(-0) = V_1^{(2)}(+0) = V(0)$$

$$\mu_1 \frac{dV_1^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=-0} = \mu_2 \frac{dV_1^{(2)}(x)}{dx} \Big|_{x=+0} = X \quad (1.11)$$

где  $V(0)$ ,  $X$  – постоянные, подлежащие определению.

Введем функции

$$f^+(x) = \theta(x)f(x), \quad f^-(x) = \theta(-x)f(x) \quad (1.12)$$

где  $\theta(x)$  – известная функцию Хевисайда.

Учитывая (1.11) и (1.12), (1.7) и (1.8), после преобразования Фурье запишутся следующим образом:

$$\bar{V}_1^{(1)-}(\sigma) = \frac{i\sigma V(0)}{k_1^2 - \sigma^2} - \frac{X}{\mu_1(k_1^2 - \sigma^2)} - \frac{\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)}{h\mu_1(k_1^2 - \sigma^2)} \quad (1.13)$$

$-\infty < \sigma < \infty$

$$\bar{V}_1^{(2)+}(\sigma) = -\frac{i\sigma V(0)}{k_1^2 - \sigma^2} + \frac{X}{\mu_2(k_2^2 - \sigma^2)} - \frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{h\mu_2(k_2^2 - \sigma^2)} \quad (1.14)$$

$-\infty < \sigma < \infty$

где  $\bar{V}_1^{(1)-}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1^{(1)-}(x) e^{i\sigma x} dx$ ;  $\bar{V}_1^{(2)+}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1^{(2)+}(x) e^{i\sigma x} dx$

$$\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} q_1^{(1)-}(x) e^{i\sigma x} dx; \quad \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} q_1^{(2)+}(x) e^{i\sigma x} dx$$

Выше имелось в виду, что действительная ось обходит точки  $-k_1, -k_2$  сверху, а точки  $k_1, k_2$  – снизу.

Теперь под условиями контакта подразумеваются условия

$$\frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=+h} - \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h} = \frac{2}{\mu} (q_1^{(1)-}(x) + q_1^{(2)+}(x)) \quad (1.15)$$

$-\infty < x < \infty$

$$W_1(x, \pm h) = V_1^{(1)-}(x) + V_1^{(2)+}(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (1.16)$$

Приступив к решению задачи, введем функцию  $W_1'(x, y)$

$$W_1'(x, y) = W_1(x, y) - U_{z_1}^{\infty}(x, y) \quad (1.17)$$

Очевидно, что  $W_1'(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1.1). После преобразования Фурье из (1.1) получим

$$\frac{d^2 \bar{W}_1'(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \bar{W}_1'(\sigma, y) = 0 \quad \gamma^2 = \sigma^2 - k^2 \quad (1.18)$$

Выберем то решение уравнения (1.18), которое представляет уходящую волну

$$\bar{W}_1'(\sigma, y) = C_1 e^{-\gamma|y|} \quad (1.19)$$

Предполагается, что  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,

$\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ , т.е. решение уравнения в виде формулы (1.19) представляет уходящую волну. Для выбора такой ветви двузначной функции  $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$  следует провести в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  разрезы до бесконечности от точек  $\sigma = k$  в верхней плоскости, и  $\sigma = -k$  – в нижней плоскости, т.е. действительная ось обходит точку ветвления  $-k$  сверху, а  $k$  – снизу [3].

Применив преобразование Фурье к контактным условиям, из (1.15) имея в виду (1.19), получим

$$C_1(\sigma) = -\frac{\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) + \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2 - k^2}} e^{\gamma h} + \frac{2\pi k \sin \beta \sin(kh \sin \beta) \delta(\sigma - k \cos \beta)}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}} e^{\gamma h} \quad (1.20)$$

а из (1.16), (1.13), (1.14) – следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно  $\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)$  и  $\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} \frac{L_1(\sigma)}{L_2(\sigma)} \bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) &= \frac{h\mu\mu_2(k_2^2 - \sigma^2)\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{L_2(\sigma)} \times \\ &\times \left( i\sigma \left( \frac{1}{k_1^2 - \sigma^2} - \frac{1}{k_2^2 - \sigma^2} \right) V(0) + \left( \frac{1}{\mu_2(k_2^2 - \sigma^2)} - \frac{1}{\mu_1(k_1^2 - \sigma^2)} \right) X \right) - \\ &- 2\pi \frac{ih\mu\mu_2 k \sin \beta (k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)}{i\mu k \sin \beta + h\mu_2(k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)} e^{ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta) \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\sigma) &= \mu\sqrt{\sigma^2 - k^2} - h\mu_1(k_1^2 - \sigma^2) \\ L_2(\sigma) &= \mu\sqrt{\sigma^2 - k^2} - h\mu_2(k_2^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (1.22)$$

В дальнейшем, в основном, будет рассматриваться случай, когда  $k_1 > k$ ,  $k_2 > k$ . Тогда  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  будут иметь простые корни  $\pm\sigma_1$ ,  $\pm\sigma_2$ , где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2k_1^2 + \lambda_1^2 - \lambda_1 \sqrt{\lambda_1^2 + 4(k_1^2 - k^2)}}; k < \sigma_1 < k_1; \lambda_1 = \frac{\mu}{\mu_1 h} \\ \sigma_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2k_2^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2 \sqrt{\lambda_2^2 + 4(k_2^2 - k^2)}}; k < \sigma_2 < k_2; \lambda_2 = \frac{\mu}{\mu_2 h} \end{aligned}$$

Чтобы в дальнейшем удовлетворялись условия уходящей волны, надо полагать, что действительная ось обходит точки  $-\sigma_1, -\sigma_2$  сверху, а точки  $\sigma_1, \sigma_2$  снизу. Для определенности допустим, что  $k < k_2 < k_1$ . В этом случае легко видеть, что  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Обозначим 
$$\bar{K}(\sigma) = \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} \bar{K}_1(\sigma) \quad (1.23)$$

где 
$$\bar{K}_1(\sigma) = \frac{\mu_2 L_1(\sigma)}{\mu_1 L_2(\sigma)} \quad (1.24)$$

Для дальнейшего решения функционального уравнения надо факторизировать  $\bar{K}(\sigma)$ .

Сначала факторизируем  $\bar{K}_1(\sigma)$ , представив ее в виде

$$\bar{K}_1(\sigma) = \frac{\mu_2 L_1(\sigma)}{\mu_1 L_2(\sigma)} = \bar{K}_1^+(\sigma) \bar{K}_1^-(\sigma)$$

где  $\bar{K}_1^+(\sigma) = e^{\bar{R}^+(\sigma)}$ ;  $\bar{K}_1^-(\sigma) = e^{\bar{R}^-(\sigma)}$

$$\bar{R}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} R(x) e^{ix(\sigma+i0)} dx; \quad \bar{R}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 R(x) e^{ix(\sigma-i0)} dx \quad (1.25)$$

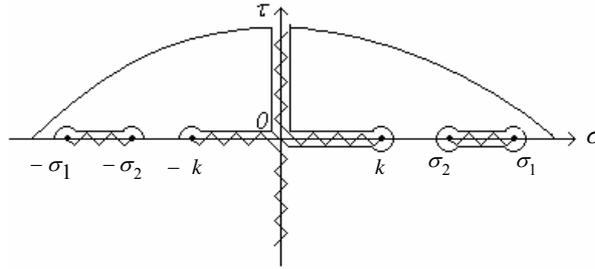
$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\mu_2 L_1(\sigma)}{\mu_1 L_2(\sigma)} \right) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Надо отметить, что  $\bar{K}_1^+(\alpha)$  регулярна и не имеет нулей при  $\text{Im}(\alpha) > 0$ , а  $\bar{K}_1^-(\alpha)$  регулярна и не имеет нулей при  $\text{Im}(\alpha) < 0$ ,  $\alpha = \sigma + i\tau$  [3].

Поскольку  $\bar{R}(\sigma) = O(|\sigma|^{-1})$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , то

$$\bar{R}^-(\sigma) = O((\sigma - i0)^{-1} \ln(\sigma - i0)); \quad \bar{R}^+(\sigma) = O((\sigma + i0)^{-1} \ln(\sigma + i0)),$$

откуда следует, что  $\bar{K}^{\pm}(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .



Фиг.2

Вычислив  $\bar{R}^-(\sigma)$  с помощью метода контурного интегрирования в комплексной плоскости с разрезами, указанными на фиг.2, получим

$$\bar{R}^-(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau + i(\sigma - i0)} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^K \frac{\psi(S)}{S - (\sigma - i0)} dS + \ln \frac{\sigma - i0 - \sigma_1}{\sigma - i0 - \sigma_2} \quad (1.26)$$

$$\bar{R}^+(\sigma) = \bar{R}^-(\sigma) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau) &= \operatorname{arctg} \frac{h\mu\sqrt{k^2 + \tau^2} [\mu_2(k_2^2 + \tau^2) - \mu_2(k_1^2 + \tau^2)]}{\mu^2(k^2 + \tau^2) + h^2\mu_1\mu_2(k_1^2 + \tau^2)(k_2^2 + \tau^2)} = \\
&= \operatorname{arctg} \frac{\mu\sqrt{k^2 + \tau^2}}{h\mu_1(k_1^2 + \tau^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\mu\sqrt{k^2 + \tau^2}}{h\mu_2(k_2^2 + \tau^2)} \\
\psi(S) &= \operatorname{arctg} \frac{h\mu\sqrt{k^2 - S^2} [\mu_2(k_2^2 - S^2) - \mu_1(k_1^2 - S^2)]}{\mu^2(k^2 - S^2) + h^2\mu_1\mu_2(k_1^2 - S^2)(k_2^2 - S^2)} = \\
&= \operatorname{arctg} \frac{\mu\sqrt{k^2 - S^2}}{h\mu_1(k_1^2 - S^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\mu\sqrt{k^2 - S^2}}{h\mu_2(k_2^2 - S^2)}
\end{aligned}$$

Отметим, что имеет место формула

$$\frac{1}{S - (\sigma - i0)} = \frac{1}{S - \sigma} - i\pi\delta(S - \sigma)$$

Имея (1.26), можно записать

$$\bar{K}^+(\sigma) = \frac{k_2 + \sigma}{k_1 + \sigma} \bar{K}_1^+(\sigma); \quad \bar{K}^-(\sigma) = \frac{k_2 - \sigma}{k_1 - \sigma} \bar{K}_1^-(\sigma) \quad (1.28)$$

С учетом (1.31), (1.23) можно записать

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)} + \bar{K}^-(\sigma)\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) = \bar{F}(\sigma) - \\
&- \frac{2\pi}{\bar{K}^+(k \cos \beta)} \frac{h\mu\mu_2 ik \sin \beta (k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)}{i\mu k \sin \beta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)} \delta(\sigma - k \cos \beta) e^{ikh \sin \beta} \quad (1.29)
\end{aligned}$$

где

$$\bar{F}(\sigma) = \bar{F}_1(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_1} \right) + \bar{F}_2(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_2} \right) \quad (1.30)$$

$$\bar{F}_1(\sigma) = \frac{h\mu\mu_2 \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\bar{K}^+(\sigma) L_2(\sigma)} \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} \quad (1.31)$$

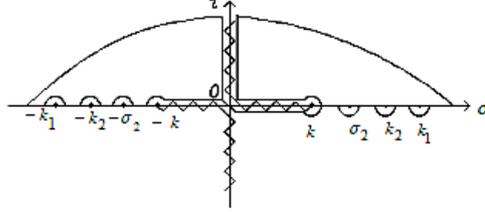
$$\bar{F}_2(\sigma) = -\frac{h\mu\mu_2 \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\bar{K}^+(\sigma) L_2(\sigma)} \quad (1.32)$$

Очевидно, что

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\mu\mu_2 \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\bar{K}^+(\sigma) L_2(\sigma)} \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (1.33)$$

$$\bar{F}_1^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F_1(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx \quad (1.34)$$

$$\bar{F}_1^+(\sigma) = \int_0^{\infty} F_1(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx \quad (1.35)$$



Фиг.3

$F_1(x)$  тоже определяется с помощью контурного интегрирования, после которого из (1.34) можно определить  $\bar{F}_1^-(\sigma)$

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^-(\sigma) = & \\ = & \frac{h^2 \mu \mu_2^2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{\bar{K}^+(i\tau)} \frac{(k_2^2 + \tau^2)^2 d\tau}{(k_1^2 + \tau^2) (\mu^2 (k^2 + \tau^2) + h^2 \mu_2^2 (k_2^2 + \tau^2)^2) (\tau + i(\sigma - i0))} - \right. \\ & \left. - \int_0^k \frac{\sqrt{k^2 - S^2}}{\bar{K}^+(S)} \frac{(k_2^2 - S^2)^2}{(k_1^2 - S^2) (\mu^2 (k^2 - S^2) + h^2 \mu_2^2 (k_2^2 - S^2)^2)} \frac{dS}{S - (\sigma - i0)} \right) + \\ & + \frac{A_{-1}}{\sigma - (k_1 + i0)} + \frac{B_{-1}}{\sigma - (\sigma_2 + i0)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\bar{F}_1^+(\sigma) = \bar{F}_1^-(\sigma) - \bar{F}_1^-(\sigma) \quad (1.37)$$

Подобным образом определяется  $\bar{F}_2^+(\sigma)$  и  $\bar{F}_2^-(\sigma)$ .

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^-(\sigma) = & \\ = & -\frac{h^2 \mu \mu_2^2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{\bar{K}^+(i\tau)} \frac{k_2^2 + \tau^2}{(\mu^2 (k^2 + \tau^2) + h^2 \mu_2^2 (k_2^2 + \tau^2)^2)} \frac{d\tau}{\tau + i(\sigma - i0)} - \right. \\ & \left. - \int_0^k \frac{\sqrt{k^2 - S^2}}{\bar{K}^+(S)} \frac{k_2^2 - S^2}{(\mu^2 (k^2 - S^2) + h^2 \mu_2^2 (k_2^2 - S^2)^2)} \frac{dS}{S - (\sigma - i0)} \right) - \frac{D_{-1}}{\sigma - (\sigma_2 + i0)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\text{где} \quad D_{-1} = -\frac{h \mu \mu_2 (\sigma_2^2 - k^2)}{\bar{K}^+(\sigma_2) \sigma_2 (\mu + 2h \mu_2 \sqrt{\sigma_2^2 - k^2})} \quad (1.39)$$

$$\bar{F}_2^+(\sigma) = \bar{F}_2^-(\sigma) - \bar{F}_2^-(\sigma) \quad (1.40)$$

Имея (1.36), (1.37) и (1.38), (1.39) с (1.30), можем (1.29) записать в следующем виде, учитывая, что

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \beta) = \frac{1}{\sigma - k \cos \beta - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \beta + i0} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^-(\sigma) &= \bar{K}^-(\sigma) \bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) - \bar{F}^-(\sigma) + \frac{A_0}{\sigma - k \cos \beta - i0} = \\ &= \frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)} + \bar{F}^+(\sigma) + \frac{A_0}{\sigma - k \cos \beta + i0} = \bar{M}^+(\sigma) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{h\mu\mu_2 k \sin \beta (k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)}{i\mu k \sin \beta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \beta)} \frac{e^{ikh \sin \beta}}{\bar{K}^+(k \cos \beta)} \quad (1.43)$$

$$\bar{F}^+(\sigma) = \bar{F}_1^+(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_1} \right) + \bar{F}_2^+(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_2} \right) \quad (1.44)$$

$$\bar{F}^-(\sigma) = \bar{F}_1^-(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_1} \right) + \bar{F}_2^-(\sigma) \left( i\sigma V(0) - \frac{X}{\mu_2} \right) \quad (1.45)$$

Дальнейший ход рассуждений проводится, как в работе [4].

Для решения уравнения (1.42) применим к нему обратное преобразование Фурье. В итоге получим

$$M^+(x) = M^-(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (1.46)$$

которое может иметь место только если [5, 6]

$$M^+(x) = M^-(x) = \sum_{k=0}^n a_k \delta^k(x) \quad (1.47)$$

где  $\delta^{(k)}(\sigma) - k$ -ая производная функции  $\delta(x)$ ,  $\delta^{(0)}(x) = \delta(x)$ . Применив к (1.47) преобразование Фурье, получим

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{M}^-(\sigma) = \sum_{k=0}^n (-i)^k a_k \sigma^k \quad (1.48)$$

Как мы видели выше,  $\bar{K}^\pm(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Как показано в [4],  $q_1^{(1)-}(x) + q_1^{(2)+}(x) = O(\ln|x|)$  при  $|x| \rightarrow 0$ , откуда следует, что

$$\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) = O\left((\sigma - i0)^{-1} \ln(\sigma - i0)\right); \quad \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma) = O\left((\sigma + i0)^{-1} \ln(\sigma + i0)\right)$$

Поскольку  $\bar{F}(\sigma) = O(|\sigma|^{-1})$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , то

$$\bar{F}^+(\sigma) = O\left((\sigma + i0)^{-1} \ln(\sigma + i0)\right); \quad \bar{F}^-(\sigma) = O\left((\sigma - i0)^{-1} \ln(\sigma - i0)\right)$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , тогда из вышесказанного следует, что  $\bar{M}^+(\sigma) \rightarrow 0$ ,  $\bar{M}^-(\sigma) \rightarrow 0$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , следовательно, из (1.48) следует, что  $a_k = 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ , которое означает, что

$$\bar{M}^+(\sigma) \equiv 0; \bar{M}^-(\sigma) \equiv 0 \quad -\infty < \sigma < \infty \quad (1.49)$$

Из (1.51)  $\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma)$ ,  $\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)$  определяются в виде

$$\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) = \frac{\bar{F}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} - \frac{A_0}{\bar{K}^-(\sigma)(\sigma - k \cos \beta - i\sigma)} \quad (1.50)$$

$$\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\bar{F}^+(\sigma) - \frac{A_0}{(\sigma - k \cos \beta + i\sigma)} \bar{K}^+(\sigma) \quad (1.51)$$

Постоянные  $X, V(o)$  определяются из условий

$$X + i\mu_1 k_1 V(o) = -\frac{\bar{q}_1^{(1)-}(-k_1)}{h} X - i\mu_2 k_2 V(o) = \frac{\bar{q}_1^{(2)+}(k_2)}{h}$$

Имея (1.50), (1.51) для  $\bar{W}_1(\sigma, y)$  с помощью (1.24) с (1.17), получим

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = -\frac{\bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) + \bar{q}_1^{(2)+}(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2 - k^2}} e^{-\gamma(y-h)} + \quad (1.52)$$

$$+ 2\pi i \sin(kh \sin \beta) e^{ik \sin \beta (y-h)} \delta(\sigma - k \cos \beta) + 2\pi \cos(ky \sin \beta) \delta(\sigma - k \cos \beta)$$

Применим к (1.52) обратное преобразование Фурье, с помощью контурного интегрирования определим  $W_1(x, y)$  при  $x < 0$ ,  $x > 0$ . Имея в виду четность функции  $W_1(x, y)$  по  $y$  рассмотрим случай  $y > 0$

$$\begin{aligned} W_1(x, y) = & -\frac{1}{\mu\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{q}_1^{(2)+}(i\tau) \cos \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1 e^{\tau x} d\tau + i \int_0^k \frac{\bar{q}_1^{(2)+}(\sigma) \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 e^{-i\sigma x} d\sigma \right] + \\ & + \frac{1}{\mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{h(\mu_1 \mu_2 (k_2^2 - k_1^2) V(o) i\tau - X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 - (\mu_1 - \mu_2) \tau^2))}{(k_2^2 + \tau^2)(\mu^2(k^2 + \tau^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 + \tau^2)^2)} \times \right. \\ & \times \left( \mu \sqrt{k^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 - \mu_1 h (k_1^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 \right) e^{-\tau x} d\tau - \\ & - \int_0^k \frac{h(\mu_1 \mu_2 (k_2^2 - k_1^2) V(o) i\sigma - X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) \sigma^2))}{(k_2^2 - \sigma^2)(\mu^2(k^2 - \sigma^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 - \sigma^2)^2)} \times \\ & \times \left( \mu \sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 - \mu_1 h (k_1^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 \right) e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ & + \frac{\mu_1}{\mu \mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{F}^+(i\tau) \bar{K}^+(i\tau) (\mu_1 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 + (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \tau^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \tau^4)}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 + \tau^2)^2} \times \right. \\ & \times \frac{k_1^2 + \tau^2}{k_2^2 + \tau^2} \frac{\cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} e^{\tau x} d\tau - \\ & - \int_0^k \frac{\bar{F}^+(\sigma) \bar{K}^+(\sigma) (\mu_2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \sigma^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \sigma^4)}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 - \sigma^2)^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{k_1^2 - \sigma^2}{k_2^2 - \sigma^2} \frac{\cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} e^{-i\alpha x} d\sigma \Bigg] + \\
& + \frac{\mu_1 h}{\mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{F}^+(i\tau) \bar{K}^+(i\tau) (\mu_2 k_2^2 + \mu_1 k_1^2 - (\mu_1 - \mu_2) \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 + \tau^2)^2} \frac{k_1^2 + \tau^2}{k_2^2 + \tau^2} e^{\tau x} d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^k \frac{\bar{F}^+(\sigma) \bar{K}^+(\sigma) (\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 - \sigma^2)^2} \frac{k_1^2 - \sigma^2}{k_2^2 - \sigma^2} e^{-i\alpha x} d\sigma \right] + \\
& + \frac{\mu_1 A_0}{\mu \mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{h \sqrt{k^2 + \tau^2} (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 + (\mu_1 - \mu_2) \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 + \tau^2)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{[\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \tau^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \tau^4] \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 + \tau^2)^2} \right] \times \\
& \times \frac{\bar{K}^+(i\tau)}{i\tau - k \cos \beta + i0} \frac{k_1^2 + \tau^2}{k_2^2 + \tau^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} e^{\tau x} d\tau - \\
& - i \int_0^k \frac{h \sqrt{k^2 - \sigma^2} (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 - (\mu_1 - \mu_2) \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 - \sigma^2)^2} - \\
& \left. - \frac{[\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \sigma^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \sigma^4] \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_1^2 h^2 (k_1^2 - \sigma^2)^2} \right] \times \\
& \times \frac{\bar{K}^+(\sigma)}{\sigma - k \cos \beta + i0} \frac{k_1^2 - \sigma^2}{k_2^2 - \sigma^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} e^{-i\alpha x} d\sigma - \\
& - \left( \sin(kh \sin \beta) - \frac{A_0}{\mu \bar{K}^-(k \cos \beta) k \sin \beta} \right) e^{ikR_1 (\sin \beta \sin \theta + \cos \beta |\cos \theta|)} +
\end{aligned}$$

при  $x < 0$

$$+ \cos(kR \sin \beta \sin \theta) e^{ikR \cos \beta \cos \theta} + i(B_2 + B_3) e^{-i\sigma_1 x} e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k^2} y_1}$$

где  $R_1 \sin \theta = y$ ;  $R_1 \cos \theta = x$ ;  $R_1^2 = x^2 + y^2$ ;  $y_1 = y - h$

$$\begin{aligned}
B_2 = h\mu \sqrt{\sigma_1^2 - k^2} & \left( \frac{(i\sigma_1 \mu_1 \mu_2 (k_2^2 - k_1^2) V(\sigma) - X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) \sigma_1^2))}{\mu_2 \sigma_1 (k_2^2 - \sigma_1^2) (\mu + 2h\mu_1 \sqrt{\sigma_1^2 - k^2})} - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{F}^+(\sigma_1) \bar{K}^+(\sigma_1) \mu_1 (k_1^2 - \sigma_1^2) (i\mu \sqrt{\sigma_1^2 - k_1^2} - h\mu_2 (k_2^2 - \sigma_1^2))}{\mu_2 \sigma_1 (k_2^2 - \sigma_1^2) (\mu + 2h\mu_1 \sqrt{\sigma_1^2 - k^2})} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_1^2 - \sigma_1^2}{k_2^2 - \sigma_1^2} \frac{\mu \sqrt{\sigma_1^2 - k_1^2} - h \mu_2 (k_2^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1 (\mu + 2h \mu_1 \sqrt{\sigma_1^2 - k_2^2})} \frac{A_0 \bar{K}^+ (\sigma_1)}{\sigma_1 - k \cos \beta + i0} \\
W_1(x, y) &= -\frac{1}{\mu \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{q}_1^{(1)+} (-i\tau) \cos \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} e^{-\tau x} d\tau + i \int_0^k \frac{\bar{q}_1^{(1)+} (-\sigma) \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} e^{i\sigma x} d\sigma \right] + \\
&+ \frac{1}{\mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{h (\mu_1 \mu_2 (k_1^2 - k_2^2) V(o) \tau + X (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 - (\mu_2 - \mu_1) \tau^2))}{(k_1^2 + \tau^2) (\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 + \tau^2)^2)} \times \right. \\
&\times \left( i \mu \sqrt{k^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 - i \mu_2 h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 \right) e^{-\tau x} d\tau - \\
&- i \int_0^k \frac{h (-\mu_1 \mu_2 (k_1^2 - k_2^2) V(o) i \sigma - X (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 + (\mu_1 - \mu_2) \sigma^2))}{(k_1^2 - \sigma^2) (\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2)} \times \\
&\times \left( i \mu \sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 - i \mu_2 h (k_1^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 \right) e^{i\sigma x} d\sigma \left. \right] \\
&+ \frac{\mu_1}{\mu \mu_2 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{P}^- (-i\tau) (\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 + (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \tau^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \tau^4)}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 + \tau^2)^2} \times \right. \\
&\times \frac{k_2^2 + \tau^2}{k_1^2 + \tau^2} \frac{\cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} e^{-\tau x} d\tau - \\
&- \int_0^k \frac{\bar{P}^- (-\sigma) (\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \sigma^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \sigma^4)}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \times \\
&\times \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} \frac{\cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} e^{i\sigma x} d\sigma \left. \right] + \\
&+ \frac{\mu_2}{\mu_1 \pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\bar{P}^- (-i\tau) (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 - (\mu_2 - \mu_1) \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 + \tau^2)^2} \frac{k_2^2 + \tau^2}{k_1^2 + \tau^2} e^{-\tau x} d\tau - \right. \\
&- i \int_0^k \frac{\bar{P}^- (-\sigma) (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2 + (\mu_2 - \mu_1) \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} e^{i\sigma x} d\sigma \left. \right] + \\
&+ \frac{A_0 \mu_2}{\mu \mu_1 \pi} \left[ \int_0^\infty \left( \frac{h \sqrt{k^2 + \tau^2} (\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 - (\mu_2 - \mu_1) \tau^2) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{(\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 + \tau^2)^2)} \bar{K}^- (-i\tau) (-i\tau - k \cos \beta + i0) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \tau^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \tau^4}{(\mu^2 (k^2 + \tau^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 + \tau^2)^2) \bar{K}^- (-i\tau) (-i\tau - k \cos \beta + i0)} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 \Big) \times \\
& \times \frac{k_2^2 + \tau^2}{k_1^2 + \tau^2} e^{-\tau x} d\tau + \\
& + i \int_0^k \left( \frac{h \sqrt{k^2 - \sigma^2} (\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 + (\mu_2 - \mu_1) \sigma^2) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(\mu^2 k^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 k_1^2 k_2^2 - (\mu^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 (k_1^2 + k_2^2)) \sigma^2 + h^2 \mu_1 \mu_2 \sigma^4) \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu^2 (k^2 - \sigma^2) + \mu_2^2 h^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\bar{K}^- (-\sigma) (-\sigma - k \cos \beta - i0)} \frac{k_2^2 - \sigma^2}{k_1^2 - \sigma^2} e^{i\sigma x} d\sigma - \\
& - (\sin(kh \sin \beta) - A_0 \bar{K}^+ (k \cos \beta)) e^{ikR_1 (\sin \beta \sin \theta + \cos \beta \cos \theta)} + \\
& + \cos(kR \sin \beta \sin \theta) e^{ikR \cos \beta \cos \theta} - i(B'_2 + B'_3) e^{i\sigma_2 x} e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k^2} y_1} \tag{1.53}
\end{aligned}$$

при  $x > 0$

где

$$\bar{P}^-(\sigma) = \frac{\bar{F}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)}$$

$$B'_3 = \frac{\mu_2}{\mu \mu_1} \frac{k_2^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 - \sigma_2^2} \frac{i\mu \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} - h\mu_1 (k_1^2 - \sigma_2^2)}{\bar{K}^-(-\sigma_2) (-\sigma_2 - k \cos \beta - i0)} A_0$$

$$\begin{aligned}
B'_2 = h\mu \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} & \left[ \frac{(-i\sigma_2 \mu_1 \mu_2 (k_2^2 - k_1^2) V(0) - X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) \sigma_2^2))}{-\mu_2 \sigma_2 (k_2^2 - \sigma_2^2) (\mu + 2h\mu_2 \sqrt{\sigma_2^2 - k^2})} - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{P}^-(-\sigma_2) \mu_2 (k_2^2 - \sigma_2^2) (i\mu \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} - h\mu_1 (k_1^2 - \sigma_2^2))}{-\mu_2 \sigma_2 (k_2^2 - \sigma_2^2) (\mu + 2h\mu_2 \sqrt{\sigma_2^2 - k^2})} \right]
\end{aligned}$$

Слагаемое, характеризующееся волновыми числами  $\sigma_1, \sigma_2$ , проявляет поверхностный характер (поверхностная волна Лява). Из значений множителей  $B_2, B_3, B'_2, B'_3$  видно, что их значение экспоненциально убывает по  $y$  при  $y > h$ ;  $R_1 \rightarrow \infty$ .

Переходя к переменным  $\lambda_1 = -\sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta + \sigma |\cos \theta|$ ;  
 $\lambda_2 = \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta + \sigma |\cos \theta|$ , определяются асимптотические формулы для

$W_1(x, y)$  при  $x > 0$ ;  $x < 0$ ;  $R_1 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) &= \frac{1}{2} \left( e^{-ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta - \beta)} + e^{ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta + \beta)} \right) - \\
&- \left( \sin(kh \sin \beta) + \frac{A_0 \bar{K}^+(k \cos \beta)}{\mu k \sin \theta} \right) e^{ikR_1 \cos(\theta - \beta)} - \\
&- i \sqrt{\frac{k}{\pi}} (A_1'' + A_2'' + A_3'') e^{i \left( kR_1 - \frac{\pi}{4} \right)} (kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O \left( (kR_1)^{-\frac{3}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{1.54}$$

при  $x > 0$ ;  $R_1 \rightarrow \infty$

где  $A_1'' = \frac{\bar{q}_1^{(1)}(-k \cos \theta)}{\sqrt{2k}}$

$$\begin{aligned}
A_2'' &= \frac{ih\mu k \sin \theta (ik \cos \theta \mu_1 \mu_2 (k_1^2 - k_2^2) V(0) + X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1^2 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) k^2 \cos^2 \theta))}{\sqrt{2k} \mu_1 (i\mu k \sin \theta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)) (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta)} - \\
&- \frac{\bar{P}^-(k \cos \theta) \mu_2 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta) (i\mu k \sin \theta + h\mu_1 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta))}{\sqrt{2k} \mu_1 (i\mu k \sin \theta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)) (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3'' &= \frac{\mu_2}{\sqrt{2k} \mu_1} \frac{A_0}{\bar{K}^-(k \cos \theta) (k(\cos \theta + \cos \beta) - i0)} \times \\
&\times \frac{k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta}{k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\mu k \sin \theta + h\mu_1 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta)}{\mu k \sin \theta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) &= \frac{1}{2} \left( e^{-ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta - \beta)} + e^{ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta + \beta)} \right) - \\
&- \left( \sin(kh \sin \beta) + \frac{A_0}{\bar{K}^-(k \cos \beta) \mu k \sin \beta} \right) e^{ikR_1 (\sin \beta \sin \theta + \cos \beta |\cos \theta|)} - \\
&- i \sqrt{\frac{k}{\pi}} (A_1' + A_2' + A_3') e^{i \left( kR_1 - \frac{\pi}{4} \right)} (kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O \left( (kR_1)^{-\frac{3}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{1.55}$$

при  $x < 0$ ;  $R_1 \rightarrow \infty$

где  $A_1' = \frac{\bar{q}_1^{(2)}(k |\cos \theta|)}{\sqrt{2k}}$

$$\begin{aligned}
A_2' &= \frac{ih\mu k \sin \theta (ik |\cos \theta| \mu_1 \mu_2 (k_2^2 - k_1^2) V(0) - X(\mu_2 k_2^2 - \mu_1^2 k_1^2 + (\mu_1 - \mu_2) k^2 \cos^2 \theta))}{\sqrt{2k} \mu_2 (i\mu k \sin \theta + h\mu_1 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta)) (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)} - \\
&- \frac{\bar{K}^+(k |\cos \theta|) \bar{F}^+(k |\cos \theta|) \mu_1 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta) (i\mu k \sin \theta + h\mu_2 (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta))}{\sqrt{2k} \mu_2 (i\mu k \sin \theta + h\mu_1 (k_1^2 - k^2 \cos^2 \theta)) (k_2^2 - k^2 \cos^2 \theta)}
\end{aligned}$$

$$A_3' = \frac{\mu_1}{\sqrt{2k\mu_2}} \frac{\bar{K}^+(k|\cos\theta|) A_0}{k(|\cos\theta| - \cos\beta) + i0} \frac{k_1^2 - k^2 \cos^2\theta}{k_2^2 - k^2 \cos^2\theta} \frac{\mu k \sin\theta + h\mu_2}{\mu k \sin\theta + h\mu_1} \frac{(k_2^2 - k^2 \cos^2\theta)}{(k_1^2 - k^2 \cos^2\theta)}$$

## 2. Нечетная задача

В нечетной задаче очевидно, что  $W_2(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1.1) и

$$U^{(2)}(x, -y) = -U^{(2)}(x, y) \quad (2.1)$$

$$\tau_{yz}(x, h) = \tau_{yz}(x, -h) = q(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2)$$

$\tau_{yz}(x, y)$  – касательное напряжение, действующее во включении

$$U^{(2)}(x, y) = U_2^{(1)-}(x, y) + U_2^{(2)+}(x, y)$$

$$U_2^{(1)-}(x, y) = \theta(-x)U_2^{(1)}(x, y), \quad U_2^{(2)+}(x, y) = \theta(x)U_2^{(2)}(x, y)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда,  $U_2^{(1)}(x, y), U_2^{(2)}(x, y)$  – амплитуды перемещений слоев, соответственно, в левой и правой частях.

В силу достаточно малости толщины включения можно полагать что  $\tau_{yz}(x, y) = q(x)$ , следовательно,

$$U_2^{(1)-}(x, h) = \frac{h}{\mu_1} q_2^{(1)-}(x); \quad U_2^{(2)+}(x, h) = \frac{h}{\mu_2} q_2^{(2)+}(x) \quad (2.3)$$

где  $q_2^{(1)-}(x) = \theta(-x)q(x); q_2^{(2)+}(x) = \theta(x)q(x)$

Введем функцию перемещения

$$W_2'(x, y) = W_2(x, y) - U_{z2}^\infty(x, y) \quad (2.4)$$

которое удовлетворяет уравнению движения и представляет уходящую волну.

После преобразования Фурье, аналогично четной задаче, получим

$$\begin{aligned} \bar{W}_2'(\sigma, y) &= \bar{W}_2(\sigma, y) + 2\pi i \sin(ky \sin\beta) \delta(\sigma - k \cos\beta) = \\ &= C_2(\sigma) \operatorname{sgn} y e^{-\gamma|y|} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Имеем следующие контактные условия:

$$W_2(x, \pm h) = U_2^{(1)-}(x, \pm h) + U_2^{(2)+}(x, \pm h) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = \frac{1}{\mu} \left( q_2^{(1)-}(x) + q_2^{(2)+}(x) \right) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.7)$$

Имея вышеуказанные контактные условия и (2.5), получаем

$$C_2(\sigma) = h \left( \frac{\bar{q}_2^{(1)-}(\sigma)}{\mu_1} + \frac{\bar{q}_2^{(2)+}(\sigma)}{\mu_2} \right) e^{\gamma h} + 2\pi i \sin(kh \sin\beta) \delta(\sigma - k \cos\beta) e^{\gamma h} \quad (2.8)$$

и следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно  $q_2^{(1)-}(\sigma)$  и  $q_2^{(2)+}(\sigma)$

$$\bar{q}_2^{(2)+}(\sigma) + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1 + h\mu\gamma}{\mu_2 + h\mu\gamma} \bar{q}_2^{(1)-}(\sigma) = -2\pi \frac{i\mu\mu_2 k \sin\beta}{\mu_2 - ih\mu k \sin\beta} e^{-ikh \sin\beta} \delta(\sigma - k \cos\beta) \quad (2.9)$$

Поступая аналогичным образом, как в четной задаче, получим решение функционального уравнения (2.10) в виде

$$\bar{q}_2^{(2)+}(\sigma) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} A_0 \frac{\bar{K}^+(\sigma)}{\sigma - k \cos \beta + i0} \quad (2.10)$$

$$\bar{q}_2^{(1)-}(x) = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} A_0 \frac{1}{\bar{K}^-(\sigma)(\sigma - k \cos \beta - i0)} \quad (2.11)$$

где 
$$A_0 = \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{2\pi \bar{K}^+(k \cos \beta)} \frac{\mu k \sin \beta}{\mu_2 - i h \mu k \sin \beta} e^{-ikh \sin \beta}$$

$$\bar{K}^-(\sigma) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{arctg} \left( \frac{h\mu(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{k^2 + \tau^2}}{\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 + \tau^2)} \right) \frac{d\tau}{\tau + i(\sigma - i0)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^k \operatorname{arctg} \left( \frac{h\mu(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{k^2 - S}}{\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 - S)} \right) \frac{dS}{S - (\sigma - i0)} \right\} \\ \bar{K}^+(\sigma) = \bar{K}^-(-\sigma)$$

В силу нечетности задачи будем рассматривать случай  $y > 0$ . Учитывая, что имеет место

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = h \left( \frac{1}{\mu_1} \bar{q}_1^{(1)-}(\sigma) + \frac{1}{\mu_2} \bar{q}_2^{(1)+}(\sigma) \right) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y_1} +$$

$$+ 2\pi i \sin(kh \sin \beta) e^{ik \sin \beta y_1} \delta(\sigma - k \cos \beta) - 2\pi i \sin(ky \sin \beta) \delta(\sigma - k \cos \beta)$$

после преобразования Фурье будем иметь  $W_2(x, y)$  при  $x < 0$ ,  $x > 0$  (здесь тоже используется метод контурного интегрирования).

$$W_2(x, y) = \frac{h}{\mu\pi} \left[ \int_0^\infty \bar{q}_2^{(2)+}(i\tau) \sin \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1 e^{\tau x} d\tau + \int_0^k \bar{q}_2^{(2)+}(\sigma) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 e^{-i\sigma x} d\sigma \right] + \\ + \frac{A_0 h}{\pi \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \left[ \int_0^\infty \frac{-(\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 + \tau^2)) \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1 + h\mu(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{k^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} y_1}{\mu_1^2 + \mu^2 h^2 (k^2 + \tau^2)} \times \right. \\ \times \frac{\bar{K}^+(i\tau)}{i\tau - k \cos \beta + i0} e^{\tau x} d\tau + \\ \left. + i \int_0^k \frac{-(\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 - \sigma^2)) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 + h\mu(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\mu_1^2 + \mu^2 h^2 (k^2 - \sigma^2)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\bar{K}^+(i\tau)}{\sigma - k \cos \beta + i0} e^{-i\sigma x} d\sigma \right] - i \frac{h A_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\bar{K}^+(k \cos \beta)}{\bar{K}^-(k \cos \beta)} e^{ik(y_1 \sin \beta - x \cos \beta)} + \\ + i \sin(kh \sin \beta) e^{ik(\sin \beta y_1 - \cos \beta x)} - i \sin(kh \sin \beta) e^{-ikx \cos \beta} \quad x < 0$$

$$\begin{aligned}
W_2(x, y) = & \frac{h}{\mu_1 \pi} \left[ \int_0^\infty \bar{q}_2^{(1)-}(-i\tau) \sin \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1 e^{-\tau x} d\tau + \int_0^k \bar{q}_2^{(1)-}(-\sigma) \sin \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1 e^{i\sigma x} d\sigma \right] + \\
& + \frac{A_0 h}{\pi \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \left[ \int_0^\infty \frac{-(\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 + \tau^2)) \sin \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1}{\bar{K}^-(-i\tau) (\mu_2^2 + \mu^2 h^2 (k^2 + \tau^2)) (-i\tau - k \cos \beta - i\sigma)} d\tau + \right. \\
& + \frac{h\mu (\mu_1 - \mu_2) \sqrt{\tau^2 + k^2} \cos \sqrt{\tau^2 + k^2} y_1}{\bar{K}^-(-i\tau) (\mu_1^2 + \mu^2 h^2 (k^2 + \tau^2)) (-i\tau - k \cos \beta - i\sigma)} e^{-\tau x} d\tau + \\
& + i \int_0^k \frac{-(\mu_1 \mu_2 + h^2 \mu^2 (k^2 - \sigma^2)) \sin \sqrt{\tau^2 - \sigma^2} y_1}{\bar{K}^-(-i\sigma) (\mu_1^2 + \mu^2 h^2 (k^2 + \sigma^2)) (-\sigma - k \cos \beta - i\sigma)} d\sigma + \\
& + \frac{h\mu (\mu_2 - \mu_1) \sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k^2 - \sigma^2} y_1}{\bar{K}^-(-\sigma) (\mu_2^2 + \mu^2 h^2 (k^2 - \sigma^2)) (-\sigma - k \cos \beta - i\sigma)} e^{i\sigma x} d\sigma - \\
& - i \frac{hA_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\bar{K}^-(k \cos \beta)}{\bar{K}^-(k \cos \beta)} e^{ik(\sin \beta y_1 - x \cos \beta)} + i \sin(kh \sin \beta) e^{ik(\sin \beta y_1 - x \cos \beta)} - \\
& \left. - i \sin(ky \sin \beta) e^{-ikx \cos \beta} \right] \quad x > 0
\end{aligned}$$

Асимптотические формулы для  $W_2(x, y)$  при  $x < 0$  и  $x > 0$ ,  $R_1 \rightarrow \infty$  приводятся точно так, как в четной задаче. Асимптотические формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
W_2(x, y) = & \frac{1}{2} \left( e^{-ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta - \beta)} - e^{ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta + \beta)} \right) + \\
& + i \left( \sin(kh \sin \beta) - \frac{hA_0 \bar{K}^+(k \cos \beta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2} \bar{K}^-(k \cos \beta)} \right) e^{-ikR_1 \cos(\theta + \beta)} + \\
& + (A'_1 + A'_2) e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} (kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O\left((kR_1)^{-\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$R_1 \rightarrow \infty; x < 0; \theta \neq \pi - \beta$$

где

$$\begin{aligned}
A'_1 = & \frac{h}{\mu_2} \frac{\bar{q}_2^{(2)+}(k|\cos \theta|) k \sin \theta}{\sqrt{2\pi}} \\
A'_2 = & - \frac{hA_0}{\sqrt{2\pi \mu_1 \mu_2}} \frac{\bar{K}^+(k|\cos \theta|) k \sin \theta}{k(|\cos \theta| - \cos \beta)} \frac{\mu_2 - ih\mu k \sin \theta}{\mu_1 - ih\mu k \sin \theta}
\end{aligned}$$

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2} \left( e^{-ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta - \beta)} - e^{ikh \sin \beta - ikR_1 \cos(\theta + \beta)} \right) +$$

$$+ \left( \sin(kh \sin \beta) - \frac{hA_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2} \bar{K}^-(k \cos \beta)} \right) e^{-ikR_1 \cos(\theta + \beta)} +$$

$$+ (A_1'' + A_2'') e^{i \left( kR_1 - \frac{\pi}{4} \right)} (kR_1)^{-\frac{1}{2}} + O \left( (kR_1)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$R_1 \rightarrow \infty; x > 0$$

где

$$A_1'' = \frac{h \bar{q}_2^{(1)-} (-k \cos \theta) k \sin \theta}{\mu_1 \sqrt{2}}$$

$$A_2'' = - \frac{h A_0}{\sqrt{2\mu_1 \mu_2}} \frac{k \sin \theta}{\bar{K}^-(-k \cos \theta) k (\cos \theta + \cos \beta)} \frac{\mu_1 - ih\mu k \sin \theta}{\mu_2 - ih\mu k \sin \theta}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №4. С.3-17.
2. Геворкян А.В. Об одной задаче дифракции волн Лява. / В кн.: Материалы второй всесоюзной-технической конференции «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов», Ереван. 1984. Т.1. С.162-167.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. 1979. Т.3. С.29-34.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с.
6. Справочник по спец. функциям под ред. Абрамовица. М.: Физматгиз, 1979. 832с.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
28.11.2006

УДК 539.3

УЧЕТ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА  
ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Азарян Н. А., Геворкян Г. А.

**Ключевые слова:** конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.

**Keywords:** finite elements, junction transferences, quadratic programming, plate, bending.

Ն. Ա Ազարյան, Գ. Ա. Գևորգյան

Անընդհատության պայմանների հաշվառումը վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծուխ  
խնդիրների լուծման ժամանակ

Առաջարկվում է քառանյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում տեղափոխությունների, ինչպես նաև նորմալ լարումների անընդհատության հաշվառումով խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդրի:

N. A. Azaryan, G. A. Gevorgyan

Consideration of Uninterrupted Conditions in Solving the Tasks of Plate  
Bending by the Finite - Element Method

It is suggested a modification of tetragonal finite - element method, where the tasks of plate bending with taking into accountancy uninterrupted normal efforts or displacements are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов четырехугольной формы, при которой решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности перемещений, а также и нормальных напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

При использовании метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин возникают некоторые “трудности” [2,5].

Первая “трудность” связана с аппроксимацией функции прогиба, которая задается в виде полинома. При изгибе пластин вид этих полиномов не является единственным.

Вторая “трудность” связана с удовлетворением условий непрерывности между элементами. При изгибе пластин непрерывность между элементами кроме функции прогиба, должна быть удовлетворена и для первых ее производных, так чтобы были исключены изломы между элементами. Требование непрерывности углов поворота по всей линии контакта между смежными элементами приводит к значительным математическим трудностям, когда решение задачи реализуется сведением ее к решению линейных систем уравнений. Обзор работ метода конечных элементов, при котором решения задач изгиба пластин сводятся к решению линейных систем уравнений, с достаточной полнотой приведен в работах [2,4].

В работах [1,3] предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин сводятся к задачам квадратичного программирования. Данный подход дал возможность

авторам этих работ включить в ограничение квадратичного программирования условия непрерывности углов поворота по всей линии контакта между смежными элементами, а также и условия совместности с разными длинами границ разделов прямоугольных конечных элементов и при использовании метода конечных элементов устранять вторую “трудность”, связанную с удовлетворением условий непрерывности между элементами.

По аналогии работ [1,3] здесь предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности перемещений, а также и нормальных напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности  $s \in N = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  конечных элементов прямоугольной формы с узлами в угловых точках. Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем многочленом четвертого порядка

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \Phi_i(x, y) \quad (1)$$

где  $\Phi_i(x, y)$  – функции Эрмита,  $w_s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{12}^s)^T$  – вектор узловых перемещений.

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [6], для определения искомых векторов  $w_s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  получим следующую задачу квадратичного программирования [1,3]:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left( \frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \right) \mid \text{условие совместности деформации,} \right. \\ \left. \text{кинематические краевые условия} \right\} \quad (2)$$

где  $k_s = \| \| k_{ij}^s \| \|$  – матрица жесткости,  $P_s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{12}^s)^T$  – вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке.

Обозначим через  $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_2^1, w_2^2, w_2^3, \dots, w_n^1, w_n^2, w_n^3)^T$  вектор узловых перемещений,  $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_2^1, P_2^2, P_2^3, \dots, P_n^1, P_n^2, P_n^3)^T$  – вектор узловых нагрузок,  $K = \frac{D}{ab} \| \| K_{ij} \| \|$  – матрица жесткости для всей пластины,  $n$  – общее число

узлов пластины,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  – модуль упругости,  $h$  – толщина пластины

(плиты),  $\nu$  – коэффициент Пуассона.



непрерывности величин (5) в смежном сечении вдоль границы разделов  $S$ -го и  $(S+1)$ -го конечных элементов в этих точках, имеем

$$\theta^s(a, b/2) = \theta^{s+1}(0, b/2); \quad \omega^s(a/2, b) = \omega^{s+1}(a/2, 0) \quad (6)$$

$$\omega^s(a, b/2) = \omega^{s+1}(0, b/2); \quad \theta^s(a/2, b) = \theta^{s+1}(a/2, 0) \quad (7)$$

С учетом формул (5) для смежных сечений  $ij$  (фиг. 1 и 2), легко увидеть, что условия (6) тождественно удовлетворяются, а условия (7) примут вид

$$-w_3^{i-1} + 2w_3^i - w_3^{i+1} + w_3^{j-1} - 2w_3^j + w_3^{j+1} = 0 \quad (8)$$

$$-w_2^{i-1} + 2w_2^i - w_2^{i+1} + w_2^{j-1} - 2w_2^j + w_2^{j+1} = 0 \quad (9)$$

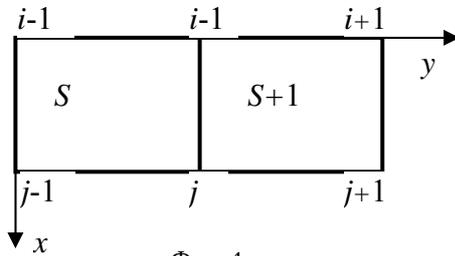
Обозначим через  $\bar{m}$  и  $\tilde{m}$ , соответственно, количество смежных сечений, параллельных осям  $x$  и  $y$ . Перепишем условия (8) и (9) в виде системы уравнений

$$Hw = 0 \quad (10)$$

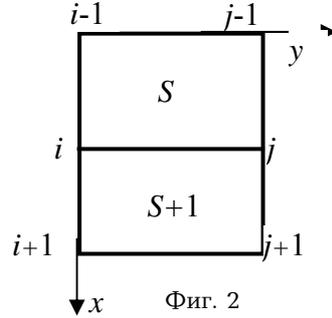
где  $H$  – матрица порядка  $m \times 3n$ ,  $m = \bar{m} + \tilde{m}$ .

С учетом равенств (10) задача (4) примет вид

$$\min\{1/2 w^T Qw + C^T w \mid Aw < 0, Hw = 0, \text{ краевые условия}\} \quad (11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В смежных сечениях, параллельных осям  $x$  и  $y$ , соответствующие значения  $\theta^s$  и  $\omega^s$  изменяются кубической параболой. Следовательно, для каждого из них, кроме условий (7), необходимо иметь еще и одно условие непрерывности. Запишем эти условия в виде

$$\frac{\partial \theta^s}{\partial x}(\xi, b) = \frac{\partial \theta^{s+1}}{\partial x}(\xi, 0), \quad \frac{\partial \omega^s}{\partial y}(a, \eta) = \frac{\partial \omega^{s+1}}{\partial y}(0, \eta) \quad (12)$$

С учетом формул (5) условия (12) примут вид

$$(6\xi^2 - 6\xi + 1)[w_1^{i-1} - 2w_1^i + w_1^{i+1} - w_1^{j-1} + 2w_1^j - w_1^{j+1} + \\ + a(w_3^{i-1} - 2w_3^i + w_3^{i+1}) + \\ + a(3\xi^2 - 2\xi)(w_3^{i-1} - 2w_3^i + w_3^{i+1} - w_3^{j-1} + 2w_3^j - w_3^{j+1}) = 0$$

$$\begin{aligned}
& (6\eta^2 - 6\eta + 1)[w_1^{i-1} - 2w_1^i + w_1^{i+1} - w_1^{j-1} + 2w_1^j - w_1^{j+1} + \\
& + b(w_2^{i-1} - 2w_2^i + w_2^{i+1}) + \\
& + b(3\eta^2 - 2\eta)(w_2^{i-1} - 2w_2^i + w_2^{i+1} - w_2^{j-1} + 2w_2^j - w_2^{j+1}) = 0
\end{aligned}$$

откуда следует, что тождественно выполняются условия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta^s}{\partial x} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{6}, b \right) &= \frac{\partial \theta^{s+1}}{\partial x} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{6}, 0 \right) \\
\frac{\partial \omega^s}{\partial y} \left( a, \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \right) &= \frac{\partial \omega^{s+1}}{\partial y} \left( 0, \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \right)
\end{aligned}$$

и соотношения (10) являются необходимыми и достаточными условиями непрерывности углов поворота на границах разделов элементов.

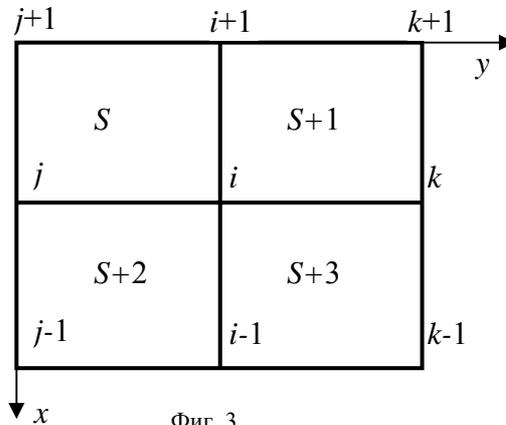
Рассмотрим случай учета непрерывности нормальных напряжений. Как известно, нормальные напряжения от изгиба в элементе пластины определяются формулами [5]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

где  $z$  – расстояние до срединной поверхности по толщине.

В общем случае в каждом узле  $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$  сходятся четыре конечных элемента (фиг. 3). По формулам (13) определим нормальные напряжения в  $i$ -ом узле для всех четырех конечных элементов и, приравняв их, находим узловые условия непрерывности нормальных напряжений. Принимая во внимание формулы (13), легко увидеть, что взамен  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  можно приравнять значения

$$\frac{\partial^2 w^s(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{12} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w^s(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{12} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x, y)}{\partial y^2} \quad (14)$$



Фиг. 3

Условия непрерывности величин  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  в  $i$ -ом узле, соответствующей

фиг. 3, задаются соотношениями

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+1}}{\partial x^2}(a, 0), \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+2}}{\partial y^2}(0, b) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 w^{s+2}}{\partial x^2}(0, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial x^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 w^{s+1}}{\partial y^2}(a, 0) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial y^2}(0, 0) \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial x^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial y^2}(0, 0) \quad (17)$$

Используя формулы (14), находим узловые значения величин  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ .

Подставляя их в условия (15) - (17), получим, что условия (15) и (16) тождественно удовлетворяются, а условия (17) переписутся в виде

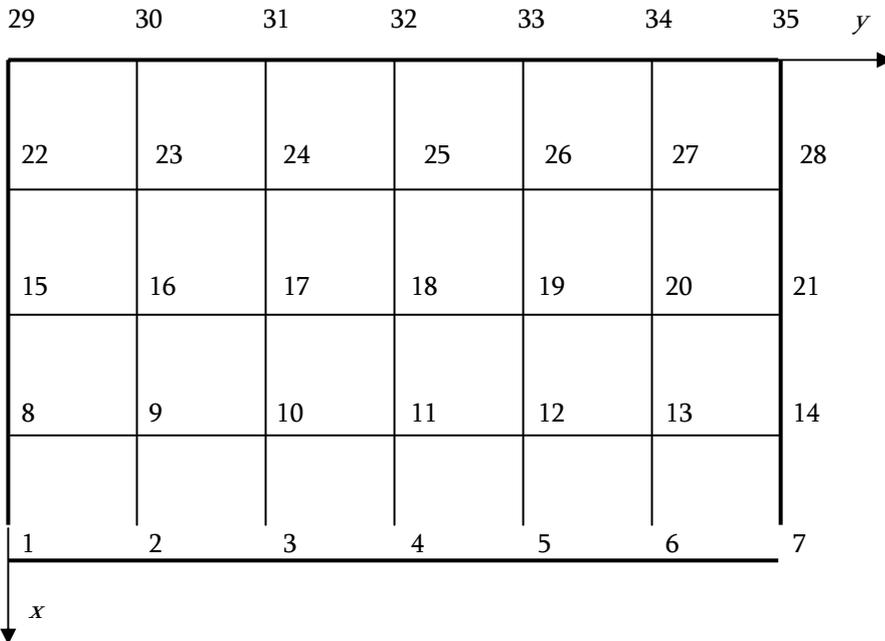
$$3w_1^{i+1} - aw_3^{i+1} - 4aw_3^i - 3w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \quad i \in N \quad (18)$$

$$3w_1^j + bw_2^j + 4bw_2^i - 3w_1^k + bw_2^k = 0, \quad i \in N \quad (19)$$

Переписем условия (18) и (19) в виде системы уравнений. Имеем

$$\tilde{H}w = 0 \quad (20)$$

где  $\tilde{H}$  – матрица порядка  $2n \times 3n$ .



Фиг. 4

Принимая во внимание соотношения (20), задачу (4) перепишем в виде

$$\min\{1/2 w^T Q w + C^T w \mid A w < 0, \tilde{H} w = 0, \text{ кинематические краевые условия} \} \quad (21)$$

**Пример.** Прямоугольная пластина, жестко заделанная по всем сторонам (фиг. 4), загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Для решения задачи используем сетку  $4 \times 6$ , как это показано на фиг. 4. Некоторые результаты расчета при разных подходах для  $m = a/b = 1$  приведены в табл. 1 и 2. Учитывая, что значения обобщенных перемещений в узлах 11-15 совпадают соответственно со значениями в узлах 1-5, они здесь не приводятся. Приведенные данные получены в результате расчетов, проведенных по программе, написанной на языке C++.

Сопоставляя данные, приведенные в табл. 1, получим разницу между обобщенными перемещениями  $w$ ,  $\partial w / \partial y$  и  $\partial w / \partial x$  при расчете изгиба пластин с несогласующимися элементами и с учетом непрерывности углов поворота вдоль границы разделов элементов. Они соответственно составляют не больше, чем 6,5%, 12,8% и 11,85%.

Таблица 1

Узел	с несогласующимися элементами			с учетом непрерывности углов поворота		
	$w$	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$	$w$	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$
9	0.181071	0.267764	0.286237	0.169116	0.292291	0.267803
10	0.401756	0.160936	0.619792	0.394069	0.202853	0.536464
11	0.481348	0	0.747625	0.47637	0	0.80724
12	0.401756	-0.160936	0.619792	0.394069	-0.202853	0.536464
13	0.181071	-0.267764	0.286237	0.169116	-0.292291	0.267803
16	0.478413	0.673028	0.287788	0.451446	0.583821	0.298686
17	1.06975	0.436375	0.724764	1.00112	0.40496	0.598119
18	1.29237	0	0.874941	1.26081	0	0.899734
19	1.06975	-0.436375	0.724764	1.00112	-0.40496	0.598119
20	0.478413	-0.673028	0.287788	0.451446	-0.583821	0.298686
Множитель	$qb^4 / D$	$qb^3 / D$	$qb^3 / D$	$qb^4 / D$	$qb^3 / D$	$qb^3 / D$

Таблица 2

Узел	с несогласующимися элементами			с учетом непрерывности нормальных напряжений		
	$w$	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$	$w$	$\partial w / \partial y$	$-\partial w / \partial x$
9	0.181071	0.267764	0.286237	0.181101	0.259643	0.285738
10	0.401756	0.160936	0.619792	0.401671	0.159989	0.619819
11	0.481348	0	0.747625	0.48096	0	0.749272

12	0.401756	-0.160936	0.619792	0.401671	-0.159989	0.619819
13	0.181071	-0.267764	0.286237	0.181101	-0.259643	0.285738
16	0.478413	0.673028	0.287788	0.477711	0.691224	0.2868
17	1.06975	0.436375	0.724764	1.0687	0.43783	0.723453
18	1.29237	0	0.874941	1.291189	0	0.875209
19	1.06975	-0.436375	0.724764	1.0687	-0.43783	0.723453
20	0.478413	-0.673028	0.287788	0.477711	-0.691224	0.2868
Множитель	$qb^4/D$	$qb^3/D$	$qb^3/D$	$qb^4/D$	$qb^3/D$	$qb^3/D$

Как следует из табл. 2, разница между обобщенными перемещениями при расчете изгиба пластин с несогласующимися элементами и с учетом непрерывности нормальных напряжений соответственно составляют не больше, чем 0,1%, 5,7% и 2,8%.

Для квадратной пластины перемещение в точке 18 (максимальный прогиб), вычисленной с несогласующимися элементами для множителя  $q(6b)^4/D$ , получается 0,00096. В работе [6] приведены соответствующие значения, вычисленные с использованием треугольных элементов. При этом, для размера сетки  $2 \times 2$  оно равно 0,00094, для размера сетки  $4 \times 4$  равно 0,00119.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян А. В., Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба плит. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 26-34.
2. Галлагер Р. Г. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир. 1984. 428с.
3. Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин. // Тезисы докладов XXI международной конференции. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург.: 4-7 октября 2005 г. С. 67-68.
4. Голованов А. И., Бережной Д. В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС. 2001. 300 с.
5. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение. 1974. 384 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.

Ереванский Государственный  
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию  
27.12.2005

УДК 539.3.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Азатян Г.Л.

**Ключевые слова:** вязкое сопротивление, вынужденные колебания, упругость, анизотропия, резонанс, амплитуда, асимптотический метод.

**Keywords:** viscous resistance, forced vibrations, elasticity, anisotropic, resonance, asymptotic method, amplitude.

Գ. Լ. Ազատյան

**Օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումները մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում**

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Դիմալին նիստերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս նիստի վրա ազդում է ժամանակի ընթացքում հարմոնիկ ձևով փոփոխվող բեռ: Հաստատված է լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկական, կառուցված է իտերացիոն պրոցես անհայտ մեծությունները որոշելու համար: Որոշված են տատանման ամպլիտուդները, մասնավոր դասի խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

G.L. Azatyan

**The Forced Vibrations of Orthotropic Plate in the Presence of Viscous Resistance**

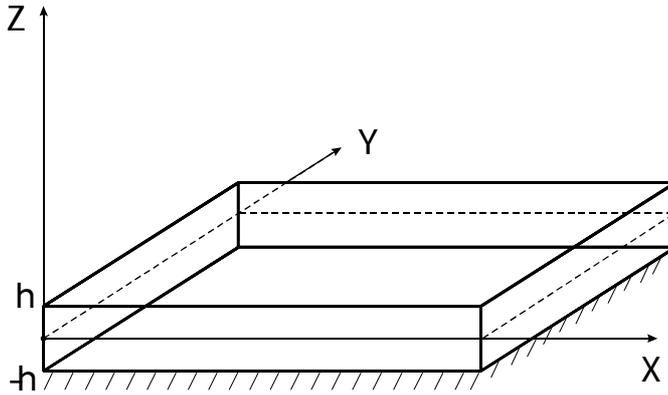
The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibrations of orthotropic plate in the presence of viscous resistance was solved. The asymptotic form of the stress tensor components and displacement vector are found. An iterative process for determination of sought quantities is developed. The resonance arising conditions are determined. The closed solution for particular type of problems is found.

Решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления. Нижняя грань пластинки жестко закреплена, а на верхней приложены гармонически изменяющиеся напряжения. Найдены асимптотики для компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Построен итерационный процесс для определения искоемых величин. Установлены условия возникновения резонанса. Для частного типа задач получено замкнутое решение.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел в последние десятилетия широко используется асимптотический метод. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Для решения неклассических краевых задач этот метод оказался особенно эффективным [2]. Асимптотический метод также эффективен для решения динамических задач, в частности, для определения решений о собственных и вынужденных колебаниях балок и пластин

[3-9]. Собственные колебания однослойной, двухслойной и трёхслойной ортотропных пластинок рассмотрены в [6-8].

В работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях ортотропной пластинки  $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, -h \leq z \leq h, h \ll l\}$  при наличии вязкого сопротивления (фиг.1).



Фиг. 1

$D_0$  – срединная поверхность пластинки,  $l$  – ее характерный тангенциальный размер.

Имеем следующие граничные условия:

$$u = v = w = 0 \text{ при } z = -h \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xz}(z = h) = \tau_{xz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t$$

$$\sigma_{yz}(z = h) = \tau_{yz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t \quad (1.2)$$

$$\sigma_{zz}(z = h) = \tau_{zz}^+(\xi, \eta) \sin \Omega t$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l$$

Требуется найти ненулевое решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - k_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x, y, z; u, v, w) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66} \sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.3)$$

при граничных условиях (1.1),(1.2), где  $\vec{R} = -k_1 \vec{V}$  – вязкое сопротивление.

Для этого класса задач граничными условиями на боковой поверхности обусловлено появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи [3,5], поэтому их конкретизировать не будем.

2. Решение системы уравнений (1.3) при граничных условиях (1.1) и (1.2) будем искать в виде:

$$Q(x, y, z, t) = Q_I(x, y, z) \sin \Omega t + Q_{II}(x, y, z) \cos \Omega t \quad (2.1)$$

где  $Q$  – любое из напряжений и перемещений,  $\Omega$  – частота вынуждающего воздействия.

Затем перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \xi &= x/l, & \eta &= y/l, & \zeta &= z/h \\ U_I &= u_I/l, & V_I &= v_I/l, & W_I &= w_I/l \end{aligned} \quad (\text{I, II}) \quad (2.2)$$

Подставив (2.1) в преобразованные уравнения (1.3), получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xxI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 U_I + 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* U_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xxII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 U_{II} - 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* U_I &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xyI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yyI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 V_I + 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* V_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xyII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yyII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 V_{II} - 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* V_I &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xzI}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzI}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zzI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 W_I + 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* W_{II} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xzII}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzII}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zzII}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} (\Omega_*)^2 W_{II} - 2K\varepsilon^{-2} \Omega_* W_I &= 0 \\ \frac{\partial U_I}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{xxI} + a_{12} \sigma_{yyI} + a_{13} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial U_I}{\partial \eta} + \frac{\partial V_I}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{xyI} \\ \frac{\partial V_I}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{xxI} + a_{22} \sigma_{yyI} + a_{23} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial W_I}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_I}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{xzI}, \quad (\text{I, II}) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_I}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xxI} + a_{23} \sigma_{yyI} + a_{33} \sigma_{zzI}, \quad \frac{\partial W_I}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_I}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yzI} \\ \Omega_*^2 &= \rho h^2 \Omega^2, \quad 2K = \frac{k_1 h}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение этой сингулярно-возмущенной системы будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta j} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta j}^{(s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N} \\ (U_j, V_j, W_j) &= \varepsilon^s (U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}), \quad j = I, II\end{aligned}\quad (2.4)$$

Обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по немому (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование от 0 до числа приближений  $N$ .

Подставив (2.4) в (2.3), получим рекуррентную систему для определения  $\sigma_{\alpha\beta j}$ ,  $U_j, V_j, W_j$ . В этой системе все  $\sigma_{\alpha\beta j}^{(s)}$  можно выразить через  $U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}$  по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{xj}^{(s)} &= -A_{23} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{yj}^{(s)} &= -A_{13} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{zj}^{(s)} &= A_{11} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{xyj}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left[ \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{xzj}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[ \frac{\partial U_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] \\ \sigma_{yzj}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left[ \frac{\partial V_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II\end{aligned}\quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \quad A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta} \\ A_{12} &= \frac{a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23}}{\Delta}, \quad A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \quad A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta} \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{23}^2 - a_{33}a_{12}^2\end{aligned}$$

Для определения функций  $U_I^{(s)}, V_I^{(s)}, W_I^{(s)}$ ,  $(I, II)$  получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \left( (\Omega_*)^2 U_I^{(s)} + 2K\Omega_* U_{II}^{(s)} \right) &= R_{U_I}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \left( (\Omega_*)^2 U_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* U_I^{(s)} \right) &= R_{U_{II}}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \left( (\Omega_*)^2 V_I^{(s)} + 2K\Omega_* V_{II}^{(s)} \right) &= R_{V_I}^{(s)} \\ \frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \left( (\Omega_*)^2 V_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* V_I^{(s)} \right) &= R_{V_{II}}^{(s)}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_I^{(s)} + 2K\Omega_* W_{II}^{(s)} = R_{W_I}^{(s)}$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* W_I^{(s)} = R_{W_{II}}^{(s)}$$

где

$$R_{U_j}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left[ \frac{\partial \sigma_{xj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right]$$

$$R_{V_j}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44} \left[ \frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right] \quad (2.7)$$

$$R_{W_j}^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{xzj}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad j = I, II$$

Очевидно, что  $R_{U_I}^{(0)} = R_{V_I}^{(0)} = R_{W_I}^{(0)} = 0$ ;  $(I, II)$ .

Из (2.6) следуют

$$U_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{55}} \left( \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*)^2 U_I^{(s)} - R_{U_I}^{(s)} \right)$$

$$V_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{44}} \left( \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} (\Omega_*)^2 V_I^{(s)} - R_{V_I}^{(s)} \right) \quad (2.8)$$

$$W_{II}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_*} \left( A_{11} \frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\Omega_*)^2 W_I^{(s)} - R_{W_I}^{(s)} \right)$$

а также уравнения

$$\frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55} (\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^2 ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 U_I^{(s)} =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{U_I}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*)^2 R_{U_I}^{(s)} - 2Ka_{55} \Omega_* R_{U_{II}}^{(s)}$$

$$\frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{44} (\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^2 ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 V_I^{(s)} =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{V_I}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} (\Omega_*)^2 R_{V_I}^{(s)} - 2Ka_{44} \Omega_* R_{V_{II}}^{(s)} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^4 W_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2 \frac{(\Omega_*)^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{A_{11}^2} ((\Omega_*)^2 + 4K^2) (\Omega_*)^2 W_I^{(s)} =$$

$$= \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial^2 R_{W_I}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{(\Omega_*)^2}{A_{11}^2} R_{W_I}^{(s)} - \frac{2K\Omega_*}{A_{11}^2} R_{W_{II}}^{(s)}$$

Решениями уравнений (2.9) являются:

$$U_I^{(s)} = U_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{I_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (2.10)$$

где величины с индексом "o" – решения однородных, а с индексом "y" – частные решения неоднородных уравнений (2.9).

Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned} U_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{U_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1U} + C_{U_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2U} + C_{U_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3U} + C_{U_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U} \\ V_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{V_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1V} + C_{V_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2V} + C_{V_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3V} + C_{V_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4V} \\ W_{I_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_{W_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1W} + C_{W_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2W} + C_{W_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3W} + C_{W_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4W} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1U} &= \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta, \quad \varphi_{2U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta \\ \varphi_{3U} &= \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta, \quad \varphi_{4U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\gamma_U = \sqrt{\frac{a_{55}\Omega_*}{2} \left( \sqrt{(\Omega_*)^2 + 4K^2} - \Omega_* \right)}, \quad \delta_U = \sqrt{\frac{a_{55}\Omega_*}{2} \left( \sqrt{(\Omega_*)^2 + 4K^2} + \Omega_* \right)}$$

$$(U, V, W, a_{55}, a_{44}, 1/A_{11})$$

Одновременно имеем

$$U_{II}^{(s)} = U_{II_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{II_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (2.13)$$

$$U_{II_o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = -C_{U_1}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{2U} + C_{U_2}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{1U} + C_{U_3}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U} - C_{U_4}^{(s)}(\xi, \eta)\varphi_{3U} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzI}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left[ C_{U_1}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U_2}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\ &\quad \left. + C_{U_3}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + C_{U_4}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] + \sigma_{xzIy}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzII}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left[ -C_{U_1}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U_2}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + \right. \\ &\quad \left. + C_{U_3}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) - C_{U_4}^{(s)}(\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] + \sigma_{xzIIy}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ &\quad (x, y, z, U, V, W, a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \end{aligned}$$

где

$$U_{II_y}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2K\Omega_*a_{55}} \left( \frac{\partial^2 U_{Iy}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}(\Omega_*)^2 U_{Iy}^{(s)} - R_{U1}^{(s)} \right) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{xzIy}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[ \frac{\partial U_{Iy}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_1^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad (I, II)$$

3. Удовлетворив граничным условиям (1.1) и (1.2), получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций

$C_{U_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{V_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{W_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} C_{U_1}^{(s)}\varphi_{1U}(\zeta=-1) + C_{U_2}^{(s)}\varphi_{2U}(\zeta=-1) + C_{U_3}^{(s)}\varphi_{3U}(\zeta=-1) + C_{U_4}^{(s)}\varphi_{4U}(\zeta=-1) &= -U_{Iy}^{(s)}(\zeta=-1) \\ -C_{U_1}^{(s)}\varphi_{2U}(\zeta=-1) + C_{U_2}^{(s)}\varphi_{1U}(\zeta=-1) + C_{U_3}^{(s)}\varphi_{4U}(\zeta=-1) - C_{U_4}^{(s)}\varphi_{3U}(\zeta=-1) &= -U_{IIy}^{(s)}(\zeta=-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + \right. \\
& \quad \left. + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] (\zeta = 1) = a_{55} \left[ \sigma_{xz1}^{+(s)} - \sigma_{xz4l}^{(s)} (\zeta = 1) \right] \\
& \left[ -C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) - \right. \\
& \quad \left. - C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] (\zeta = 1) = -a_{55} \sigma_{xz4l}^{(s)} (\zeta = 1) \\
& \quad (U, V, W; x, y, z)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz1}^{+(0)} &= \varepsilon \tau_{xz}^+, \quad \sigma_{yz1}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{yz}^+, \quad \sigma_{zz1}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{zz}^+ \\
\sigma_{xz1}^{+(s)} &= 0, \quad \sigma_{yz1}^{+(s)} = 0, \quad \sigma_{zz1}^{+(s)} = 0, \quad s > 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решив систему (3.1) и подставив значения  $C_{U_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{V_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{W_i}^{(s)}(\xi, \eta)$  в (2.13), получим:

$$\begin{aligned}
U_I^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[ f_{U1}^{(s)} \varphi_{1U} + f_{U2}^{(s)} \varphi_{2U} + f_{U3}^{(s)} \varphi_{3U} + f_{U4}^{(s)} \varphi_{4U} \right] + U_{I4}^{(k,s)} \\
U_{II}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[ f_{U2}^{(s)} \varphi_{1U} - f_{U1}^{(s)} \varphi_{2U} - f_{U4}^{(s)} \varphi_{3U} + f_{U3}^{(s)} \varphi_{4U} \right] + U_{II4}^{(k,s)} \\
& (U, V, W)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $f_{U_i}^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  получаются из определителя  $\Delta_U$  системы (3.1) заменой соответственных столбцов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_U = -\frac{1}{2} (\gamma_U^2 + \delta_U^2) (\text{ch}[4\gamma_U] + \cos[4\delta_U]), \quad (U, V, W) \tag{3.4}$$

Решения (3.3) будут конечными, если

$$\Delta_U \neq 0, \quad \Delta_V \neq 0, \quad \Delta_W \neq 0 \tag{3.5}$$

Условия (3.5) будут выполнены, если  $\Omega$  не является частотой собственных колебаний [4], в противном случае будет возникать резонанс. Можно определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

4. Рассмотрим частный случай, пусть:

$$\tau_{xz}^+(\xi, \eta) = \text{const}, \quad \tau_{yz}^+(\xi, \eta) = \text{const}, \quad \tau_{zz}^+(\xi, \eta) = \text{const} \tag{4.1}$$

При  $s=0$  будем иметь:

$$\begin{aligned}
U_I^{(0)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[ f_{U1}^{(0)} \varphi_{1U} + f_{U2}^{(0)} \varphi_{2U} + f_{U3}^{(0)} \varphi_{3U} + f_{U4}^{(0)} \varphi_{4U} \right] \\
U_{II}^{(0)} &= \frac{1}{\Delta_U} \left[ f_{U2}^{(0)} \varphi_{1U} - f_{U1}^{(0)} \varphi_{2U} - f_{U4}^{(0)} \varphi_{3U} + f_{U3}^{(0)} \varphi_{4U} \right] \\
\sigma_{xz1}^{(0)} &= \frac{1}{a_{55} \Delta_U} \left[ f_{U1}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + f_{U2}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\
& \quad \left. + f_{U3}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + f_{U4}^{(0)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzII}^{(0)} = & \frac{1}{a_{55}\Delta_U} \left[ -f_{U1}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{3U} + \delta_U \Phi_{4U}) + f_{U2}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{4U} - \delta_U \Phi_{3U}) + \right. \\ & \left. + f_{U3}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{1U} - \delta_U \Phi_{2U}) - f_{U4}^{(0)} (\gamma_U \Phi_{2U} + \delta_U \Phi_{1U}) \right] \\ & (U, V, W; \sigma_{xz}^{(0)}, \sigma_{yz}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xxI}^{(0)} = & -\frac{A_{23}}{\Delta_W} \left[ f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) + f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xxII}^{(0)} = & -\frac{A_{23}}{\Delta_W} \left[ f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} - \delta_W \Phi_{4W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} + \delta_W \Phi_{2W}) - f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} - \delta_W \Phi_{1W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yyI}^{(0)} = & -\frac{A_{13}}{\Delta_W} \left[ f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) + f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yyII}^{(0)} = & -\frac{A_{13}}{\Delta_W} \left[ -f_{W1}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{3W} + \delta_W \Phi_{4W}) + f_{W2}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{4W} - \delta_W \Phi_{3W}) + \right. \\ & \left. + f_{W3}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{1W} - \delta_W \Phi_{2W}) - f_{W4}^{(0)} (\gamma_W \Phi_{2W} + \delta_W \Phi_{1W}) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{xyI}^{(0)} = \sigma_{xyII}^{(0)} = 0$$

где

$$f_{U1}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (\delta_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \sin \delta_U - \delta_U \operatorname{ch} \gamma_U \sin 3\delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} \gamma_U \cos 3\delta_U - \gamma_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \cos \delta_U)$$

$$f_{U2}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (-\gamma_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \sin \delta_U + \gamma_U \operatorname{ch} \gamma_U \sin 3\delta_U + \delta_U \operatorname{sh} \gamma_U \cos 3\delta_U - \delta_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \cos \delta_U)$$

$$f_{U3}^{(0)} = -\frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (\delta_U \operatorname{ch} \gamma_U \cos 3\delta_U + \delta_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \cos \delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} \gamma_U \sin 3\delta_U + \gamma_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \sin \delta_U)$$

$$f_{U4}^{(0)} = \frac{a_{55}\sigma_{xzI}^{+(0)}}{2} (-\gamma_U \operatorname{ch} \gamma_U \cos 3\delta_U - \gamma_U \operatorname{ch} 3\gamma_U \cos \delta_U + \delta_U \operatorname{sh} \gamma_U \sin 3\delta_U + \delta_U \operatorname{sh} 3\gamma_U \sin \delta_U)$$

$$(U, V, W; \sigma_{xzI}^{+(0)}, \sigma_{yzI}^{+(0)}, \sigma_{zzI}^{+(0)}; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{xzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{xz}^+, \quad \sigma_{yzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{yz}^+, \quad \sigma_{zzI}^{+(0)} = \varepsilon \tau_{zz}^+$$

Несложно убедиться, что при  $s > 0$

$$U_I^{(s)} = V_I^{(s)} = W_I^{(s)} = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta I}^{(s)} = 0, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad (I, II)$$

поэтому приближению  $s = 0$  соответствует точное решение

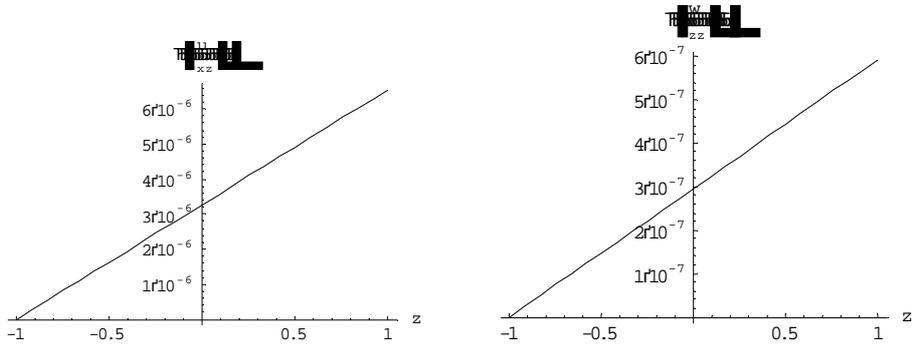
$$u = l(U_I^{(0)} \sin \Omega t + U_{II}^{(0)} \cos \Omega t)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1} \left( \sigma_{\alpha\beta I}^{(0)} \sin \Omega t + \sigma_{\alpha\beta II}^{(0)} \cos \Omega t \right) \quad (4.5)$$

$$(u, v, w; U, V, W), \alpha, \beta = x, y, z;$$

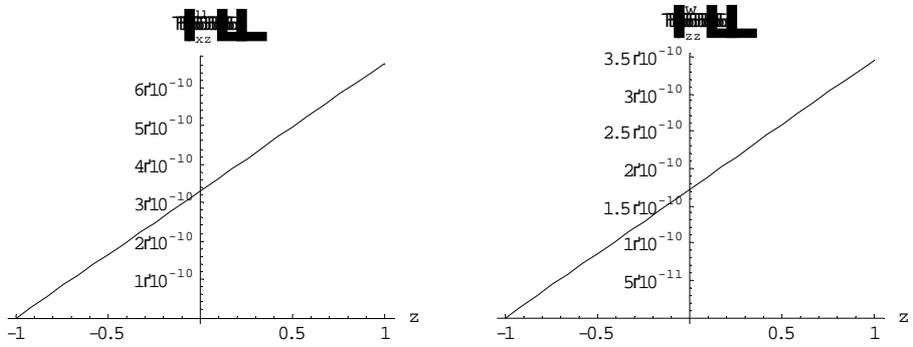
В качестве иллюстрации приведем некоторые численные и графические результаты. Рассмотрим пластинку, состоящую из резины ( $E=6.96410^5$  Па,  $G=2.4410^5$  Па,  $\rho=1100$  кг/м<sup>3</sup>), стеклопластика АСТТ и СВМ, характеристики упругости которых приведены в [2] или бетона ( $E=3.0262410^{10}$  Па,  $G=1.0435410^{10}$  Па,  $\rho=2300$  кг/м<sup>3</sup>) с толщиной  $h=1$  м. Графики амплитуд колебаний по толщине пластинки соответственно приведены на фиг. 2-5.

Резина



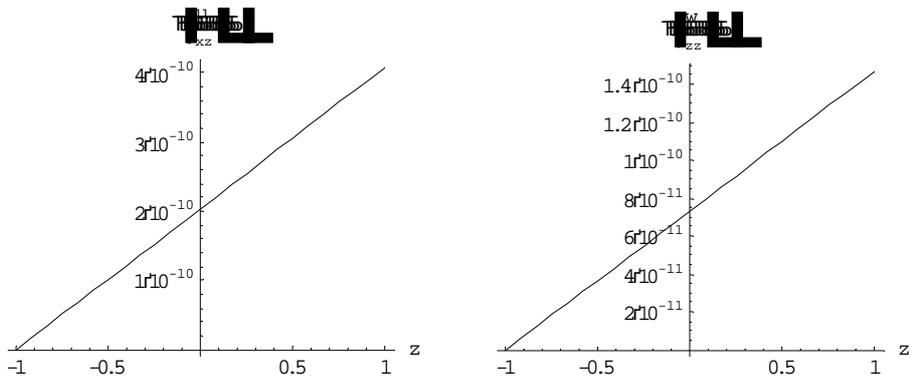
Фиг.2.

АСТТ



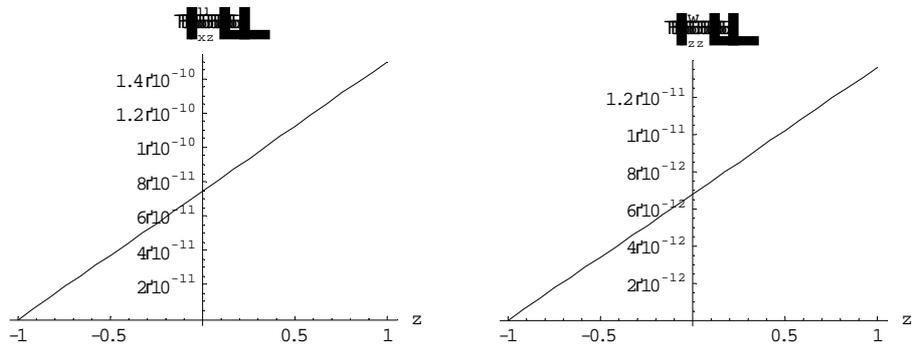
Фиг.3.

СВАМ



Фиг.4.

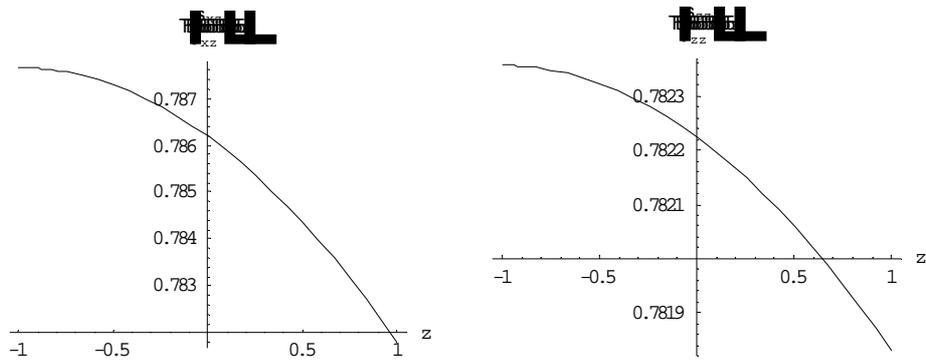
Бетон



Фиг.5.

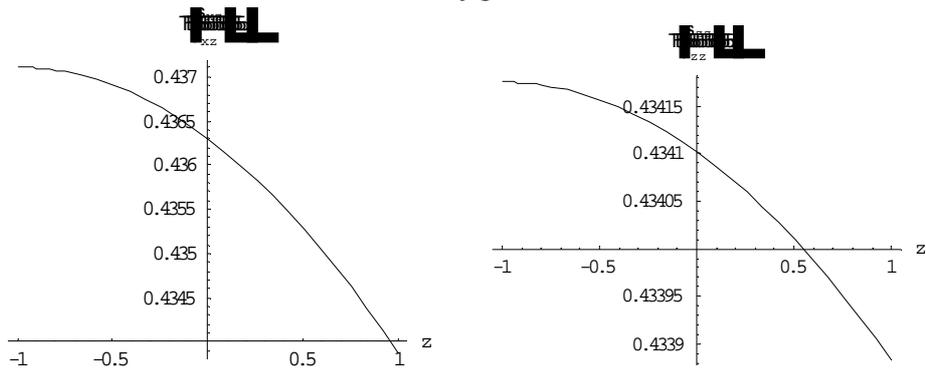
Приведем графики напряжений при разных значениях времени ( $t=1,3,5,7$ сек.), когда пластинка состоит из резины. Этому будут соответствовать фиг.6-9.

$t=1$

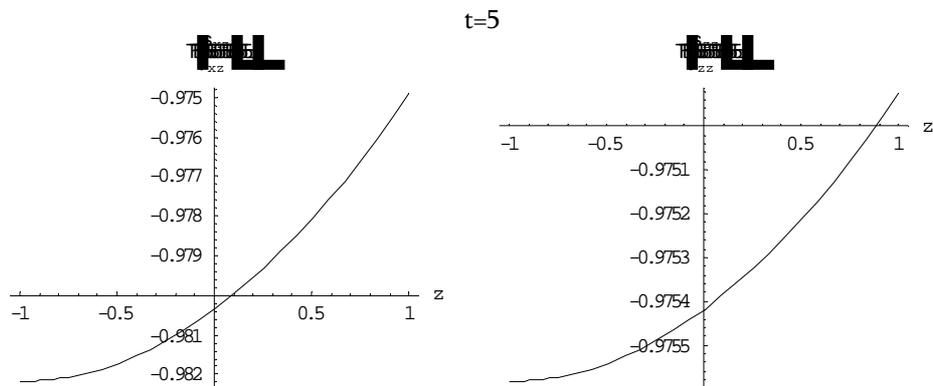


Фиг.6.

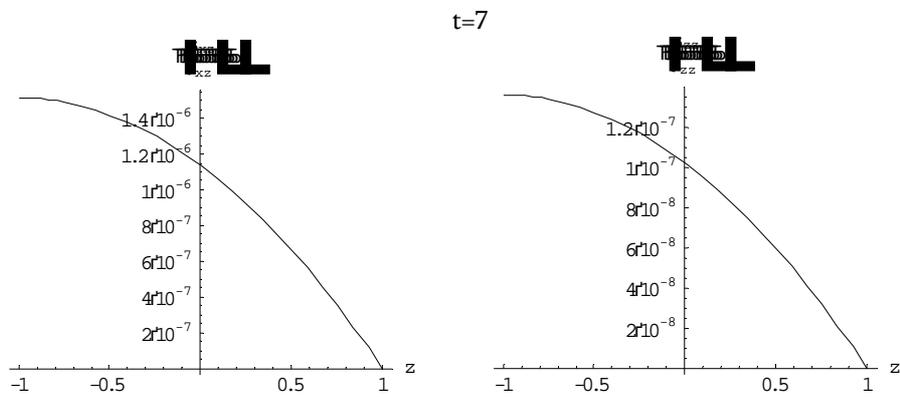
$t=3$



Фиг.7.



Фиг.8.



Фиг.9.

Из приведённых графиков видно, что амплитуды колебаний уменьшаются при удалении от верхней грани и в итоге затухают, достигая нижней грани пластинки. Когда пластинка состоит из более мягкого материала (например, резины), амплитуды колебаний по сравнению с колебаниями пластины из более жесткого материала увеличиваются. Из графиков видно также, что напряжения затухают с течением времени. Наличие вязкого сопротивления приводит к уменьшению амплитуд колебаний по сравнению с амплитудами без учета сопротивления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международн. научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
4. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2002. С. 9-19.
5. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С.132-135.
6. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т 56. №4. С. 18-28.
7. Оганесян Р. Ж. Собственные колебания двухслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т 58. №4. С.33-44.
8. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Асимптотика собственных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // V Международная конференция "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред." Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2005. С. 14-22.
9. Агаловян Л. А., Погосян А. М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т 58. №3. С. 36-47.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
16.02.2006

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ПО ФОРМЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА ЛИЦЕВЫХ  
ПОВЕРХНОСТЯХ

Белубекян М.В., Мартиросян К.Л.

**Ключевые слова:** изгиб, плоскость, упругость, пластина, перемещение  
**Key words:** bending, plane, elasticity, plate, displacement

**Մ.Վ. Բելուբեկյան, Զ.Լ. Մարտիրոսյան**

**Դիմային հարթությունների վրա շոշափող բեռի առկայության դեպքում սալի զանազան ծոման մասին**

Աշխատանքում դիտարկված է դիմային հարթությունների վրա շոշափող բեռի դեպքում սալի ծոման խնդիրը: Խնդիրը լուծված է ինչպես առաձգականության տեսության ճշգրիտ հավասարումների հիման վրա, այնպես էլ մոտավոր հավասարումների հիման վրա, հաշվի առնելով ընդլայնական սահքերը: Կատարված է համեմատություն տեղափոխությունների միջև:

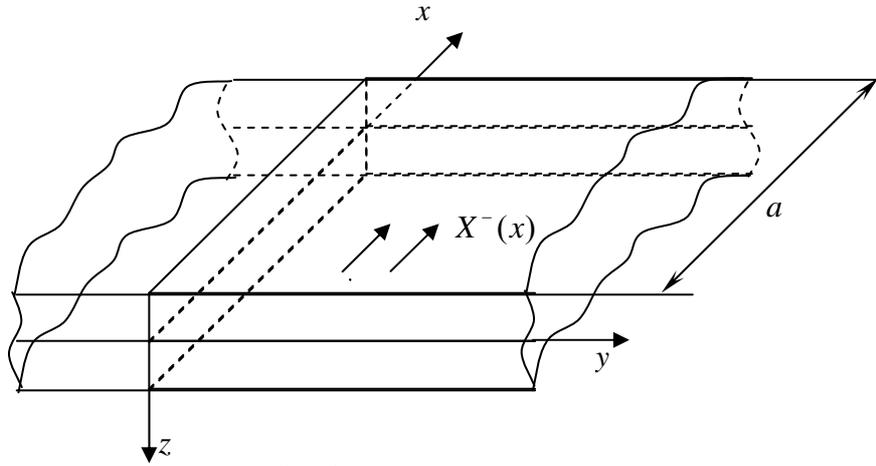
**M.V. Belubekyan, Ch.L. Martirosyan**

**On the problem of plate bending in the shape of cylindrical surface under the  
action of tangential loads on the face planes**

In this work the problem of shell bending under the action of face planes tangential loads is considered. The problem is solved by using exact equations of theory of elasticity and approximate methods, taking into account the transversal shears. The comparison between displacements has done.

Цель статьи – на основе точного решения задачи плоской деформации для прямоугольной области при определённых граничных условиях частного вида на кромках и лицевых плоскостях пластинки получить характеристики области применимости гипотезы Киргофа и уточнённой теории.

1. В 1957 году Б.Ф. Власовым было получено точное решение пространственной задачи изгиба прямоугольной плиты, на четырёх кромках которого даны граничные условия типа Навье, при действии постоянной поперечной нагрузки [1]. Были приведены сравнения с результатами решения этой же задачи на основе теории Кирхгофа. В дальнейшем были получены и другие точные решения для пластин и оболочек. Обзор этих работ приводится в [2].



Фиг. 1

Пусть пластинка-полоса занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$ .

Уравнения равновесия в перемещениях в случае плоской деформации имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $U, W$  – перемещения, соответственно по направлениям  $x, z$ ;  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе (фиг.1).

Предполагается, что на краях пластины заданы условия скользящего контакта

$$U = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad x = 0, a \quad (1.2)$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{zx}|_h = X^+(x) \quad \tau_{zx}|_{-h} = -X^-(x) \quad (1.3)$$

Решение системы уравнений вида

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z) \sin \mu_m x, \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(z) \cos \mu_m x, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a} \quad (1.4)$$

удовлетворяет граничным условиям (1.2). Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mu f_m'' - (\lambda + 2\mu) \mu_m^2 f_m - (\lambda + \mu) \mu_m g_m' &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) g_m'' - \mu \mu_m^2 g_m + (\lambda + \mu) \mu_m f_m' &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Характеристическое уравнение системы (1.5) имеет кратные корни. Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
f_m &= A_{1m} e^{\mu_m z} + A_{2m} z e^{\mu_m z} + A_{3m} e^{-\mu_m z} + A_{4m} z e^{-\mu_m z} \\
g_m &= B_{1m} e^{\mu_m z} + B_{2m} z e^{\mu_m z} + B_{3m} e^{-\mu_m z} + B_{4m} z e^{-\mu_m z}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где произвольные постоянные  $B_{im}$  определяются через  $A_{im}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_{1m} &= -A_{1m} + k \mu_m^{-1} A_{2m}, \quad B_{2m} = -A_{2m} \\
B_{3m} &= A_{3m} + k \mu_m^{-1} A_{4m}, \quad B_{4m} = A_{4m}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В (1.7) использовано обозначение

$$k = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu) \quad (k = 3 - 4\nu) \tag{1.8}$$

С помощью закона Гука и представлений граничные условия на лицевых плоскостях приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)g_m' + \lambda\mu_m f_m &= 0 \\
f_m' - \mu_m g_m &= \pm \mu^{-1} \tau_m^\pm
\end{aligned} \right\} \text{при } z = \pm h \tag{1.9}$$

где  $\tau_m^\pm$  – коэффициенты ряда Фурье касательных нагрузок

$$X^\pm = \pm \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m^\pm \sin \mu_m x \tag{1.10}$$

Требование, чтобы общее решение (1.6) удовлетворяло граничным условиям (1.9), приводит после некоторых преобразований к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_i$ :

$$\begin{aligned}
&[-A_{1m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_2)A_{2m}]e^{\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_1)A_{4m}]e^{-\mu_m h} = 0 \\
&[A_{1m} - \mu_m^{-1}\beta_2 A_{2m}]e^{\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}\beta_1 A_{4m}]e^{-\mu_m h} = \frac{\tau_m^+}{2\mu\mu_m} \\
&[-A_{1m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_1)A_{2m}]e^{-\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}(1 + \beta_2)A_{4m}]e^{\mu_m h} = 0 \\
&[A_{1m} - \mu_m^{-1}\beta_1 A_{2m}]e^{-\mu_m h} - [A_{3m} + \mu_m^{-1}\beta_2 A_{4m}]e^{\mu_m h} = -\frac{\tau_m^-}{2\mu\mu_m}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\beta_1 = \alpha + \mu_m h, \quad \beta_2 = \alpha - \mu_m h, \quad \alpha = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - 2\nu \tag{1.12}$$

Произвольные постоянные  $A_{im}$  из системы (1.1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{1m} &= \frac{L_1(\zeta_m)\tau_m^+ + L_2(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} \quad \zeta_m = \mu_m h \\
A_{2m} &= \frac{L_3(\zeta_m)\tau_m^+ + L_4(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu L(\zeta_m)} \\
A_{3m} &= \frac{L_2(\zeta_m)\tau_m^+ + L_1(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} \\
A_{4m} &= \frac{-L_4(\zeta_m)\tau_m^+ + L_3(\zeta_m)\tau_m^-}{4\mu L(\zeta_m)}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

В (1.13) операторы  $L_i(\zeta_m)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
L(\zeta_m) &= e^{\zeta_m} (\text{sh}^2 2\zeta_m - 4\zeta_m^2) \\
L_1(\zeta_m) &= e^{2\zeta_m} (\text{sh} 2\zeta_m + \beta_2 \text{ch} 2\zeta_m) - \beta_1 (1 + 2\zeta_m) \\
L_2(\zeta_m) &= \text{sh} 2\zeta_m - \beta_1 \text{ch} 2\zeta_m + \beta_2 e^{2\zeta_m} (1 - 2\zeta_m) \\
L_3(\zeta_m) &= e^{2\zeta_m} \text{sh} 2\zeta_m - 2\zeta_m \\
L_4(\zeta_m) &= \text{sh} 2\zeta_m - 2\zeta_m e^{2\zeta_m}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

2. С учётом (1.4), (1.6), (1.13), (1.14), кроме перемещений  $U, W$  можно также определить осредненные по толщине напряжения  $\sigma_{xx}$  и усилие и момент в каждой точке  $x$  пластинки. Для сравнения с результатами приближённых теорий – теории Кирхгофа для тонких пластин и теорий, учитывающих поперечные сдвиги [3], – необходимо представить полученное решение в виде разложения по параметру относительной толщины  $\zeta_m = \mu_m h$ .

Оказывается, что для получения решения с точностью  $o(\zeta_m^3)$  ( $1 + \mu_m^3 h^3 \approx 1$ ), разложения функций  $L_i(\zeta_m)$  необходимо брать с точностью  $o(\zeta_m^7)$ . Указанные разложения имеют вид

$$\begin{aligned}
L(\zeta_m) &= \frac{16}{3}\zeta_m^4 \left[ 1 + \zeta_m + \frac{31}{30}\zeta_m^2 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_1(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[ \alpha + \frac{1+4\alpha}{3}\zeta_m + \frac{4\alpha}{3}\zeta_m^2 - \frac{4}{15}(1-4\alpha)\zeta_m^3 - \frac{16}{45}(1-2\alpha)\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_2(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[ -\alpha + \frac{1-2\alpha}{3}\zeta_m + \frac{2}{3}(1-\alpha)\zeta_m^2 + \frac{2}{5}(1-\frac{2\alpha}{3})\zeta_m^3 + \frac{4}{15}(1-\frac{\alpha}{2})\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_3(\zeta_m) &= 4\zeta_m^2 \left[ 1 + \frac{4}{3}\zeta_m + \frac{4}{3}\zeta_m^2 + \frac{16}{15}\zeta_m^3 + \frac{32}{45}\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7) \\
L_4(\zeta_m) &= -4\zeta_m^2 \left[ 1 + \frac{2}{3}\zeta_m + \frac{2}{3}\zeta_m^2 + \frac{4}{15}\zeta_m^3 + \frac{2}{15}\zeta_m^4 \right] + o(\zeta_m^7)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть на лицевой поверхности пластинки  $z = h$  задана касательная нагрузка  $X^+(x)$  вида (1.10), а при  $z = -h$   $X^-(x) \equiv 0$  ( $\tau_m^- = 0$ ).

Тогда, согласно (1.4), перемещения  $U, W$  определяются величинами  $f_m(0)$  и  $g_m(0)$ , которые из (1.6), (1.7) и (1.13) представляются в виде

$$\begin{aligned} f_m(0) &= A_{1m} + A_{3m} = \frac{L_1(\xi_m) + L_2(\xi_m)}{4\mu\mu_m L(\xi_m)} \tau_m^+ \\ g_m(0) &= B_{1m} + B_{3m} = -A_{1m} + A_{3m} + k\mu_m^{-1}(A_{2m} + A_{4m}) = \\ &= \frac{-L_1(\xi_m) + L_2(\xi_m) + k(L_3(\xi_m) - L_4(\xi_m))}{4\mu\mu_m L(\xi_m)} \tau_m^+ \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (2.2) приводит к приближенным формулам (с точностью  $o(\zeta_m^3)$ )

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h \mu_m^2} \left[1 - \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \\ g_m(0) &= \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{26-31\nu}{30(1-\nu)} \zeta_m^2\right], \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приведенная задача рассматривается также на основе модели, учитывающей поперечные сдвиги в статье [4]. Уравнения, определяющие перемещения  $U_0, W_0$  пластинки, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_0}{dx^2} + \frac{X^+}{C} + \frac{h}{12\mu} \frac{d^2 X^+}{dx^2} &= 0, \quad C = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \\ D \frac{d^4 W_0}{dx^4} &= h \frac{dX^+}{dx} + \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \frac{d^3 X^+}{dx^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Граничные условия скользящего контакта (1.2) по модели работы [4] приводятся к виду

$$U_0 = -\frac{hX^+}{6\mu}, \quad \frac{dW_0}{dx} = \frac{X^+}{2\mu}, \quad \frac{d^3 W_0}{dx^3} - \frac{1}{2\mu} \frac{d^2 X^+}{dx^2} = \frac{hX^+}{D} \quad (2.5)$$

Решение уравнений (2.4), удовлетворяющих граничным условиям (2.5), с учётом (1.10) представляются следующим образом:

$$U_0 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^0 \sin \mu_m x, \quad W_0 = \sum_{m=1}^{\infty} g_m^0 \cos \mu_m x \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в (2.4) величины, характеризующие перемещения точек пластины  $U_0, W_0$ , определяются по формулам

$$f_m^0 = \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h\mu_m^2} \left(1 - \frac{\zeta_m^2}{3}\right), \quad g_m^0 = \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{2\zeta_m^2}{3(1-\nu)}\right] \quad (2.7)$$

Выражения (2.3) и (2.7), полученные на основе точного решения и приближенной модели с точностью  $\zeta_m^2 \ll 1$ , совпадают. Одновременно из (2.7) следует, что как в (2.3), учет поперечного сдвига приводит к уменьшению как продольного перемещения  $U(U_0)$ , так и прогиба  $W(W_0)$ .

3. В общем случае величины  $f_m(0)$ ,  $g_m(0)$ , характеризующие перемещения точек пластины, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \frac{L_1(\zeta_m) + L_2(\zeta_m)}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} (\tau_m^+ + \tau_m^-) \\ g_m(0) &= \frac{L_2(\zeta_m) - L_1(\zeta_m) + k[L_3(\zeta_m) - L_4(\zeta_m)]}{4\mu\mu_m L(\zeta_m)} (\tau_m^+ - \tau_m^-) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что если нагрузки на лицевых поверхностях удовлетворяют условию

$$X^+ = X^- \quad (\tau_m^+ = -\tau_m^-) \quad (3.2)$$

то  $f_m(0) = 0$ . То есть продольные перемещения срединной поверхности пластинки отсутствуют ( $U = 0$ ). Изгиб пластинки будет определяться величинами  $g_m(0)$ , которые с точностью  $o(\zeta_m^3)$ ,

$$g_m(0) = \frac{\tau_m^+ h}{\mu_m^3 D} \left[1 - \frac{26 - 31\nu}{30(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \quad (3.3)$$

Аналогично, в случае

$$X^- = -X^+ \quad (\tau_m^- = \tau_m^+) \quad (3.4)$$

срединная поверхность пластинки не будет изгибаться, а продольное перемещение с точностью  $o(\zeta_m^3)$  будет определяться по формуле

$$f_m(0) = \frac{(1-\nu)\tau_m^+}{4\mu h\mu_m^2} \left[1 - \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \zeta_m^2\right] \quad (3.5)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. 1957. N2. С. 25-34.
2. Soldatos K.P. Review of three dimensional dynamic analyses of circular cylinders and cylindrical shells. // Appl. Mech. Rev. 1994. Vol. 47. N10. P. 501.

3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. : Наука, 1987. 360 с.
4. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Тонкая пластинка при действии поверхностной касательной нагрузки. // Изв. НАН Армении и Гос. инж. универс., серия технических наук. 1999. Т. 52. N3. С. 273-278.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
2.08.2006

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ  
ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ С ТРЕМЯ ШАРНИРНО  
ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д.

**Ключевые слова:** колебания, безмоментная, классическая, цилиндрическая, спектр, характеристики.

**Keywords:** vibrations, unmoment, classical, cylindrical, spectrum, characteristics.

Գ. Ռ. Դուլգազարյան, Ռ. Դ. Սահակյան

Երեք ծայրերով հողակապրեն ամրակցված, փոփոխական կորության բաց օրթոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումները

Հետազոտվում է երեք ծայրերով հողակապրեն ամրակցված, անմոմենտ կամայական ողորկ ուղղորդ կորով բաց օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Սեփական հաճախությունների և մարման գործակիցների անչափողական բնութագրիչների որոշման համար արտածված են դիսպերսիոն և բնութագրիչ հավասարումներ: Պարաբոլական տեսքի տարբեր ուղղորդ կորերով և տարբեր երկարություններով գլանային թաղանթների համար կատարված են թվային հաշվարկներ:

G.R. Ghulghazaryan, R.D. Sahakyan

Vibrations of unmoment non-closed orthotropic cylindrical shell with simple support boundary conditions at three edges

Vibrations of unmoment non-closed orthotropic cylindrical shell with arbitrary plane directing curve and with simple support boundary conditions at three edges are studied. The dispersion and characteristic equations for finding the values of dimensionless characteristics of eigenfrequency and the coefficient of dumping of the corresponding vibration form are obtained. Calculations were carried out for shells with directing curve in the form of parabola with different values of curvature and different length of generator.

Исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей и тремя шарнирно закрепленными краями. Найденны дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Конкретные вычисления выполнены для ортотропных оболочек с направляющими в виде параболы с различной величиной кривизны и длины образующей.

**Введение.** Исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен. Найденны дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Доказывается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для круговой цилиндрической оболочки открытого профиля и ортотропной прямоугольной пластинки соответственно.

Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным краем. Для цилиндрических оболочек с длинами  $l = 5$ ,  $l = 15$ , направляющими

$$y = ba^{-2}(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a, \quad a = 2, \quad b = 1; \quad a = 2, \quad b = 0.5 \quad (1)$$

изготовленных из ортотропного материала с параметрами [1].

Стеклопластик:  $\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_1 = 6.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9 \text{ Н/М}^2$ ,

$$E_2 = 1.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \quad G = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \quad \nu_1 = 0.26, \quad \nu_2 = 0.06 \quad (2)$$

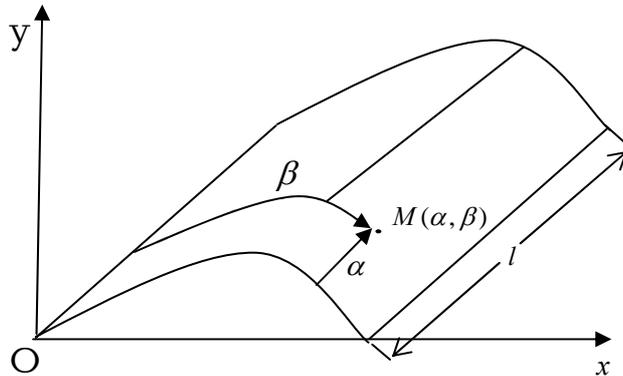
приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Численный анализ показывает, что с увеличением кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки, также увеличиваются первые частоты собственных колебаний. С увеличением длины образующей все характеристики собственных колебаний стремятся к характеристикам собственных колебаний полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки со свободным краем. При уменьшении кривизны направляющей кривой все характеристики собственных колебаний рассматриваемой задачи стремятся к характеристикам планарных колебаний аналогичной задачи для прямоугольной пластинки.

### 1. Постановка задачи и некоторые математические особенности.

Рассматриваются собственные колебания ортотропной безмоментной незамкнутой конечной цилиндрической оболочки  $0 \leq \alpha \leq \ell$  переменной кривизны, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен. Выбор систем координат и возможные формы оболочки показаны на фиг. 1.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории безмоментной ортотропной цилиндрической оболочки и записаны в криволинейных координатах  $\alpha(0 \leq \alpha \leq \ell)$ ,  $\beta(0 \leq \beta \leq s)$  [2]

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \lambda u_1 \\ & - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \lambda u_2 \\ & - \frac{B_{12}}{R^2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} w = \lambda w, \quad w = \frac{u_3}{R} \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к поверхности оболочки,  $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$  – кривизна направляющей кривой.

$$\lambda = \omega^2 \rho \quad (1.2)$$

где  $\omega$  – частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.  $B_{ik}$  – коэффициенты упругости. Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right) \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right) \right|_{\alpha=\ell} = 0, \quad u_2|_{\alpha=\ell} = 0 \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right|_{\beta=0, s} = 0, \quad u_1|_{\beta=0, s} = 0 \quad (1.5)$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при  $\alpha = 0$ , условия (1.4), (1.5) являются условиями шарнирного закрепления на крае  $\alpha = \ell$  и на образующих  $\beta = 0, \beta = s$  соответственно [2].

Задача (1.1), (1.3)–(1.5) самосопряженная и имеет участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком  $[0, \lambda_0]$  – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta + B_{22}\cos^4\theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad (1.6)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.1) по Дуглису-Ниренбергу. Вне отрезка  $[0, \lambda_0]$  для задачи (1.1), (1.3)–(1.5) выполняются условия дополненности (условия Шапиро-Лопатинского) [3-4], [5]. Поэтому, в силу теоремы о нормальной разрешимости эллиптической краевой задачи приходим к следующему утверждению [5]: *вне множества  $[0, \lambda_0]$  спектр задачи (1.1), (1.3)–(1.5) состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*

**2. Вывод дисперсионного уравнения задачи (1.1), (1.3)–(1.5).** Предположим, что квадрат кривизны направляющей кривой можно представить в виде следующего ряда:

$$R^{-2} = k^2 \left( r_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad (2.1)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad k = \pi / s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty$$

Здесь  $s$  – полная длина направляющей кривой между шарнирно закрепленными образующими. Решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.5), ищем в виде

$$u_1 = \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} u_{sm} \sin km\beta \right), u_2 = \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} V_{cm} \cos km\beta \right) \quad (2.2)$$

$$w = k \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} w_{sm} \sin km\beta \right)$$

Подставим выражения (2.2) в систему (1.1). Из первых двух уравнений (1.1), приравнявая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$c_m u_{sm} = \chi a_m w_{sm}, \quad c_m V_{cm} = m b_m w_{sm}$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}$$

$$b_m = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta$$

$$c_m = \chi^4 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} m^2 \chi^2 + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 m^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^4, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Из третьего уравнения системы (1.1), учитывая соотношения (2.3) и правило умножения тригонометрических рядов [6, стр. 592], придем к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-m} - r_{n+m}) A_n w_{sn} - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 w_{sm} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.4)$$

$$A_m = \frac{P_n}{c_n}, \quad P_n = c_n + n^2 b_n - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_n, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (2.5)$$

Исходя из правила умножения тригонометрических рядов, условимся, что если  $h \in N$ , то  $r_{-h} = r_h$ . Так как в области определения  $A_n$  имеет  $A_n = O(1/n^2)$ , учитывая представление (2.1) и тот факт, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ , получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{n+m}| + |r_{n-m}|) \leq 3 \left( \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty \quad (2.6)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.4) при любых комплексных  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$  и  $\chi$  в области определения коэффициентов (2.5) относится к известному классу сходящихся определителей, т. е. к нормальным определителям [7]. Чтобы система (2.4) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0 \quad (2.7)$$

Предположим, что  $\chi_1, \chi_2$  – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями, тогда  $\chi_3 = -\chi_1$  и  $\chi_4 = -\chi_2$  также являются различными корнями уравнения (2.7). Пусть  $(w_{s0}^j, w_{s1}^j, \dots, w_{sm}^j, \dots)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  являются нетривиальными решениями системы

(2.4) при  $\chi_j$ ,  $j = \overline{1,4}$  соответственно.

Представим решение задачи (1.1),(1.3)-(1.5) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \quad w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)} \quad (2.8)$$

где  $u_i^{(j)}$ ,  $w^{(j)}$ ,  $i=1,2, j=\overline{1,4}$  – решения системы (1.1), имеющие вид (2.2) при  $\chi = \chi_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ . Учитывая граничные условия (1.3), (1.4), приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{ij}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{sm}^{(j)} = 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.9)$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^j - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = \chi_j (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}) \quad (2.10)$$

$$R_{3j} = R_{1j} \exp(k\chi_j \ell), \quad R_{4j} = b_m^{(j)} \exp(k\chi_j \ell), \quad j = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,+\infty}$$

а  $a_m^{(j)}$ ,  $b_m^{(j)}$ ,  $c_m^{(j)}$  – значения  $a_m, b_m, c_m$  из (2.3) при  $\chi = \chi_j$ ,  $j = \overline{1,4}$  соответственно.

Чтобы система (2.9) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\text{Det} \left\| R_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.11)$$

вне множества  $[0, \lambda_0]$  имела  $\lambda$ -решение.

Уравнения (2.11) эквивалентны уравнениям

$$H(\eta_m) = (x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2, x_1 x_2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2, x_1 x_2) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (2.12)$$

$$K_2(\eta_m^2, x_1 x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad \eta_m = \eta / m$$

$$\tilde{K}_2(\eta_m^2, x_1 x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 - \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad x_j = \chi_j / m$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = kmx_j \ell \quad (2.13)$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left( \frac{B_{22}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66} - B_{22} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right)$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12} B_{66} (B_{12} + B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: если  $R^{-2}(\beta)$  можно представить в виде (2.1) и  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ , то уравнения (2.12) являются дисперсионными уравнениями задачи (1.1),(1.3)-(1.5), где  $\chi_1 = mx_1$  и  $\chi_2 = mx_2$  – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями.

**Замечание 1.** Численный анализ уравнения (2.11) или (2.12) показывает, что значения правых частей этих уравнений становятся малыми числами, когда любые

два  $\chi$  корня уравнения (2.7) становятся близкими друг к другу. Это усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Сделав элементарные действия над столбцами определителя в (2.11), уравнения (2.12) приводятся к эквивалентному виду

$$K_2(\eta_m^2, x_1, x_2)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (m_{11}m_{22} + m_{21}m_{12})(\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) + 2m_{11}m_{21}[z_1, z_2](\exp(z_1) + \exp(z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.14)$$

где  $K_2(\eta_m^2, x_1, x_2)$  определяется по формуле (2.13), а

$$\begin{aligned} m_{11} &= \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) x_1^2 + \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2) \\ m_{12} &= \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) (x_1 + x_2) \\ m_{21} &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} x_1^3 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 x_1 \\ m_{22} &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 \\ [z_1, z_2] &= (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1) \cdot km\ell \end{aligned} \quad (2.15)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионных уравнений (2.14) более эффективно. Заметим, что если  $\chi_1 = mx_1$  и  $\chi_2 = mx_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $m\ell \rightarrow \infty$  уравнения (2.12) и (2.14) преобразуются к уравнениям

$$K_2(\eta_m^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.16)$$

которые являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей со свободным краем, когда граничные образующие шарнирно закреплены.

**3. Частные случаи.** В общем случае решение уравнения (2.7) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

**Случай а)**  $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$  ( $r_m = 0$ ,  $m = \overline{1, +\infty}$ ), т. е. имеем круговую ортотропную безмоментную цилиндрическую оболочку открытого профиля. В этом случае система (2.4) принимает вид

$$\left\{ \left( r_0 A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) w_{sm} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \right. \quad (3.1)$$

Следовательно, уравнение (2.7) распадается на совокупность уравнений

$$r_0 P_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 c_m = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.2)$$

или уравнений

$$\begin{aligned}
& \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) x^4 - \eta_m^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 + \right. \\
& \left. + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{66}B_{22}}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) x^2 + \eta_m^2 (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0 \\
& x = \chi / m, \quad m = \overline{1, +\infty}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ ,  $\chi_1 = m x_1$  и  $\chi_2 = m x_2$  являются корнями уравнения (3.3) с неположительными действительными частями.

Так как уравнения (3.3) биквадраты, то однозначно определяются выражения  $\chi_1^2 \chi_2^2$ ,  $\chi_1^2 + \chi_2^2$ . Подставляя эти выражения в (2.12), приходим к дисперсионным уравнениям для безмоментных ортотропных круговых цилиндрических оболочек открытого профиля, у которых две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, а другой край свободен

$$(x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2, r_0) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2, r_0) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
K_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[ \left( 1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - \\
&- x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) \\
\tilde{K}_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[ \left( 1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] + \\
&+ x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что если  $\chi_1 = m x_1$  и  $\chi_2 = m x_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $m \ell \rightarrow \infty$  уравнения (3.4) преобразуются к уравнениям

$$\begin{aligned}
K_2(\eta_m^2, r_0) &= (1 - \eta_m^2) \left[ \left( 1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - \\
&- x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

которые при условии

$$\begin{aligned}
\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} &< \frac{\eta^2}{m^2} < \min \left\{ 1, \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} + \right. \\
&\left. + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{22}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} \frac{r_0}{2m^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

эквивалентны уравнениям

$$\left(1 - \frac{\eta^2}{m^2}\right) \left[ \frac{\eta^2}{m^2} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \left(1 + \frac{r_0}{2m^2}\right) \right]^2 - \frac{\eta^2}{m^2} \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} + \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{r_0}{2m^2} \right) \left( \frac{\eta^2}{m^2} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Уравнения (3.6) или (3.8) являются дисперсионными уравнениями для безмоментной круговой ортотропной полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным краем, когда граничные образующие шарнирно закреплены [8].

При  $r_0 / m \rightarrow 0$  уравнения (3.3) преобразуются к уравнениям

$$x^4 - \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) x^2 + \quad (3.9)$$

$$+ (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

которые являются характеристическими уравнениями системы планарного колебания пластинки. Уравнения (3.4) в этом случае преобразуются к уравнениям

$$(x_2 - x_1) K_2(\eta_m^2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) \tilde{K}_2(\eta_m^2) (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)), \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.10)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения (3.9) с неположительными действительными частями и

$$K_2(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 \quad (3.11)$$

$$\tilde{K}_2(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + \eta_m^2 x_1 x_2$$

Уравнения (3.10) являются дисперсионными уравнениями пластинки, три стороны которой шарнирно закреплены, а четвертая сторона является свободной. Заметим, что в этом случае уравнения (2.14) преобразуются к виду

$$K_2(\eta_m^2) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \frac{B_{11}(n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21})}{B_{12} + B_{66}} (\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{2B_{11}n_{11}n_{21}}{B_{12} + B_{66}} [z_1 z_2] (\exp(z_1) + \exp(z_2)) = 0 \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$n_{11} = x_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad n_{21} = x_1^3 + \left( \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) x_1 \quad (3.13)$$

$$n_{12} = x_1 + x_2, \quad n_{22} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad z_j = kmx_j \ell, \quad j = 1, 2$$

Заметим, что если  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения (3.9) с отрицательными действительными частями, то при  $m \ell \rightarrow \infty$  уравнения (3.10) или (3.12) преобразуются к уравнениям Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы

$$K(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) при условии

$$0 < \frac{\eta^2}{m^2} < \min \left\{ 1, \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{66}(B_{11} + B_{66})} \right\}, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

эквивалентны уравнениям

$$\left( 1 - \frac{\eta^2}{m^2} \right) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{\eta^2}{m^2} \right)^2 - \frac{\eta^4}{m^4} \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.15)$$

которые являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным краем.

**Случай б).**  $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$  ( $r_m = 0$ ,  $m = \overline{2, +\infty}$ ).

В этом случае система уравнений (2.4) принимает вид

$$\{r_1 P_{m-1} \omega_{sm-1} + r_{mm} \omega_{sm} + r_1 P_{m+1} \omega_{sm+1} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.16)$$

$$\omega_{sn} = w_{sn}/c_n, \quad r_{mn} = r_0 P_n - 2B_{66}/B_{22} \eta^2 c_n, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (3.17)$$

Так как определитель системы (3.16) относится к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем к нулю ее определитель:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0 \quad (3.18)$$

Справедливо следующее утверждение [9]: при фиксированном  $m \geq 2$  и при  $\lambda \notin [0, \lambda_0]$  уравнение (3.18) имеет  $\chi^2$ -формальные решения вида

$$\chi_j^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (3.19)$$

где  $\chi_j^{(m)}$ ,  $j = 1, 2$ , – корни уравнения (3.3) или  $r_{mm} = 0$  и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{P_m (P_{m-1} r_{m+1m+1} + P_{m+1} r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1} r_{m+1m+1} r'_{mm}} \Big|_{\chi = \chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2 \quad (3.20)$$

Здесь  $r'_{mm}$  – производная по  $\chi^2$ . Таким образом, в этом случае, для нахождения коэффициентов затухания  $k\chi_j$ ,  $j = 1, 2$  можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j \approx - \left( (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 \right)^{1/2}, \quad j = 1, 2 \quad (3.21)$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот  $\eta/m$  – уравнения (2.12) или (2.14). Заметим, что в случае изотропной цилиндрической оболочки имеем

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad B_{12} = \frac{\sigma E}{1 - \sigma^2}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (3.22)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона [2].

В табл. 1-4, используя дисперсионные уравнения (2.14), (3.12), характеристические уравнения (3.3),(3.9) и приближенные формулы

$$\chi_j / m = -\left(\left(\chi_j^{(m)} / m\right)^2 + \alpha_j^m r_1^2 / m^2\right)^{1/2}, \quad j=1, 2 \quad (3.23)$$

приведены безразмерные характеристики собственных значений  $\eta/m$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм в зависимости от  $m, a, b$  для оболочек с направляющими (1). В качестве коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0 / m = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\} \quad (3.24)$$

В табл. 1,2,3,4 представлены результаты для ортотропных цилиндрических оболочек, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (2) и с геометрическими параметрами:  $a=2, b=1, l=15, s=4.59117, r_0=0.13706, r_1=-0.05507$ ;  $a=2, b=1, l=5, s=4.59117, r_0=0.13706, r_1=-0.05507$ ;  $a=2, b=0.5, l=15, s=4.16092, r_0=0.04399, r_1=-0.0059$ ;  $a=2, b=0.5, l=5, s=4.16092, r_0=0.04399, r_1=-0.0059$  соответственно.

**Заключение.** В статье показано, что у свободного края ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены, и квадрат кривизны которой можно представить в виде (2.1), могут существовать локализованные колебания, затухающие от свободного края вдоль ее образующих. Частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной кривизны определяются совокупностью уравнений (2.14). Следовательно, частоты собственных колебаний для круговой цилиндрической оболочки открытого профиля определяются уравнениями (2.14) или (3.4), а для прямоугольной пластинки – уравнениями (3.12). Численный анализ показывает, что у свободного края безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки, у которой две граничные образующие и один край шарнирно закреплены – могут существовать бесконечное число затухающих и незатухающих собственных колебаний. При больших  $m$  или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний прямоугольной пластинки. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки или длины цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

Таблица 1

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.0585 0.9563	-0.4990 0.9678	-0.0497 0.9680
2	-0.0447 0.9748	-0.0424 0.9772	-0.0424 0.9773
3	-0.0403 0.9796	-0.0393 0.9805	-0.0393 0.9806
4	-0.0386 0.9813	-0.0381 0.9817	-0.0381 0.9817
5	-0.0380 0.9818	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821
10	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9822
100	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821

Таблица 2

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.1012 0.8615	-0.0805 0.9135	-0.0799 0.9147
2	-0.0708 0.9351	-0.0637 0.9476	-0.0658 0.9478
3	-0.0585 0.9563	-0.0546 0.9619	-0.0546 0.9620
4	-0.0517 0.9660	-0.0493 0.9691	-0.0492 0.9690
5	-0.0475 0.9714	-0.0458 0.9735	-0.0458 0.9740
10	-0.0395 0.9803	-0.0392 0.9810	-0.0391 0.9807
11	-0.0390 0.9809	-0.0387 0.9811	-0.0387 0.9811
12	-0.0386 0.9813	-0.0384 0.9814	-0.0384 0.9814
15	-0.0380 0.9818	-0.0379 0.9819	-0.0379 0.9819
100	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821	-0.0377 0.9821

Таблица 3

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.0618 0.9600	-0.0568 0.9661	-0.0568 0.9662
2	-0.0478 0.9763	-0.0464 0.9776	-0.0464 0.9777
3	-0.0437 0.9800	-0.0431 0.9808	-0.0431 0.9808
4	-0.0423 0.9815	-0.0420 0.9817	-0.0420 0.9818
5	-0.0418 0.9820	-0.0417 0.9821	-0.0417 0.9821
10	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821
100	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821

Таблица 4

M	$R^{-2} = 0$	$R^{-2} = k^2 r_0 / 2$	$R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$
	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$	$k\chi_0 / m \quad \eta / m$
1	-0.1060 0.8763	-0.9090 0.9103	-0.0905 0.9112
2	-0.0745 0.9412	-0.0685 0.9500	-0.0684 0.9507
3	-0.0618 0.9600	-0.0584 0.9640	-0.0584 0.9644
4	-0.0549 0.9686	-0.0528 0.9710	-0.0527 0.9711
5	-0.0507 0.9734	-0.0492 0.9749	-0.0491 0.9750
10	-0.0430 0.9809	-0.0423 0.9810	-0.0428 0.9811
11	-0.0426 0.9813	-0.0424 0.9815	-0.0424 0.9815
12	-0.0423 0.9816	-0.0421 0.9817	-0.0421 0.9817
15	-0.0418 0.9820	-0.0418 0.9820	-0.0418 0.9820
100	-0.0430 0.9821	-0.0416 0.9821	-0.0416 0.9821

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот цилиндрической оболочки с произвольной направляющей. // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. 12. С.161-163.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
3. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглисса-Л. Ниренберга // Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т.28. 13. С. 665-706.
4. Солонников В.А. О матрицах Грина для эллиптических краевых задач // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1970. Т.110. 16. С. 107-145.
5. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сибирский математич. ж., 1973. Т.4. 15. С. 978-986.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.3. М.: Физматгиз, 1963. 656с.
7. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695с.
8. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными краями // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, "Титутюн", 2005. С. 173-179.
9. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания в консольной ортотропной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочке// Математика в Высшей Школе, научно-методический сборник. Ереван. 2004. Вып. 3(9). С. 46-66.

Институт механики НАН Армении  
Армпедуниверситет им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию  
7.06.2006

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВНЫХ УПРУГО-ПОЛЗУЧИХ ТЕЛ,  
АРМИРОВАННЫХ ТОНКИМИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Саркисян В.С., Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е.

**Ключевые слова:** Ползучесть, включение, напряжение.

**Keywords:** Creep, inclusion, stress.

Վ.Ս.Սարգսյան, Ե.Ս.Միրզոյան, Ս.Ե.Միրզոյան  
Բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակներով առաձգամածուցիկ հարթության  
լարվածային վիճակի մասին

Աշխատանքում ժառանգականորեն ծերացող սողքի տեսությամբ հետազոտվում է առաձգամածուցիկ հարթության և բարակ բացարձակ կոշտ շրջանային ներդրակների միջև կոնտակտային խնդիրների դաս:

V.S.Sarkisyan, Y.S.Mirzoyan, S.Y.Mirzoyan  
On the Stressed State of Viscoelastic Plane with System Thin Solid Inclusions

**In the theory of creep of hereditarily aging bodies a class of contact interaction problems between massive bodies in the form of elastically-creeping plane with circular perfectly rigid thin inclusions is investigated.**

В постановке теории ползучести наследственно стареющих тел исследуется один класс задач контактного взаимодействия между массивными телами в виде упруго-ползучей плоскости с круговыми абсолютно жесткими тонкими включениями. Армированные тонкими включениями деформируемые тела представляют собой композиты (железобетонные массивы), в которых около включений образуются локальные поля напряжений, характеризующиеся большими и интенсивно изменяющимися градиентами. Изучение таких концентраций напряжений представляется важным в расчетах на прочность железобетонных конструкций, вообще в композитах. Поэтому по изучению различных аспектов напряженно-деформированного состояния деформируемых тел с включениями проведены многочисленные и обширные исследования. В этом направлении укажем на работы [1-4].

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.**

Пусть наследственно-стареющая вязкоупругая плоскость, отнесенная к полярной системе координат  $(r, \vartheta)$ , по совокупности интервалов

$$L_k \{r = R; \alpha_k < \vartheta < \beta_k, -\pi < \alpha_k < \beta_k < \pi\} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

на окружности радиуса  $R$  армирована круговыми абсолютно жесткими тонкими включениями. Будем считать, что материал плоскости обладает мерой ползучести  $C(t, \tau)$ , модулем упруго-мгновенной деформации  $E(t)$  и находится в условиях плоской деформации. Пусть далее в момент времени  $\tau_0$  вязкоупругая плоскость на бесконечности нагружается изменяющимися по времени и равномерно распределенными нормальными напряжениями

$$\sigma_y^\infty = p(t), \sigma_x^\infty = q(t)$$

где  $\sigma_y^\infty, \sigma_x^\infty$  – соответствующие компоненты напряжений на бесконечности. Пусть одновременно в тот же момент времени  $\tau_0$  на  $k$ -ом ( $k = \overline{1, n}$ ) включении действуют силы с главным вектором  $\{T_k(t), P_k(t)\}$  и главным моментом  $M_k(t)$ , а в точке  $O(0,0)$  действуют сила  $\{T(t), P(t)\}$  и момент  $M(t)$ , изменяющиеся во времени  $t$ .

Требуется определить напряженно-деформированное состояние плоскости.

Предположим, как обычно, что для материала плоскости коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации  $v(t)$  и деформация ползучести  $v^*(t, \tau)$  постоянны [5-7]:

$$v(t) = v^*(t, \tau) = v = \text{const} \quad (1)$$

Тогда при плоской деформации основные реологические соотношения-зависимости между напряжениями и деформациями для материала плоскости имеют вид [5-7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1-v^2}{E^*(t)} \left[ \sigma_x(t) - \frac{v}{1-v} \sigma_y(t) \right] - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{1-v^2}{E^*(\tau)} \left[ \sigma_x(\tau) - \frac{v}{1-v} \sigma_y(\tau) \right] E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \\ \varepsilon_y^*(t) &= \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{1-v^2}{E^*(t)} \left[ \sigma_y(t) - \frac{v}{1-v} \sigma_x(t) \right] - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{1-v^2}{E^*(\tau)} \left[ \sigma_y(\tau) - \frac{v}{1-v} \sigma_x(\tau) \right] E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^*(t) &= \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = 2(1+v) \left[ \frac{\tau_{xy}(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\tau_{xy}(\tau)}{E^*(\tau)} E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \right] \\ E^*(t) &= E(t+\rho), \rho = t - \tau_0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$K^*(t, \tau) = K(t+\rho, \tau+\rho), K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_x(t) = \sigma_x(x, y, t)$ ,  $\sigma_y(t) = \sigma_y(x, y, t)$ ,  $\tau_{xy}(t) = \tau_{xy}(x, y, t)$  – компоненты напряжений, а  $u^* = u^*(x, y, t)$ ,  $v^* = v^*(x, y, t)$  – соответственно, компоненты горизонтальных и вертикальных смещений. Кроме того, здесь звездочки над компонентами деформаций и смещений означают, что они берутся с учетом ползучести. Входящие в (4) меры ползучести представляются в виде [5-7]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) \quad (t \geq \tau)$$

где функция  $\varphi(t)$  характеризует старение материала, а функция  $f(t - \tau)$  – его наследственные свойства, причем на основании экспериментальных данных можно положить [7]

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^n B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad B_0 = 1, \sum_{k=0}^n B_k = 0, \gamma_0 = 0, \gamma_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$$

При этом функция  $\varphi(\tau)$  аппроксимируется одним из выражений

$$\varphi(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{-\beta_k \tau}, \varphi(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tau^k} \quad (\beta_k > 0, k = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь  $A_k, B_k, \gamma_k$  и  $\beta_k$  – константы материала плоскости, определяемые экспериментальным путем. В дальнейшем примем также, что  $E(t) = E = \text{const}$ .

Применив к (2) известную процедуру получения перемещений, придем к соотношениям ( $I$  – единичный оператор)

$$u^*(x, y, t) = (I - K)u(x, y, t), \quad v^*(x, y, t) = (I - K)v(x, y, t) \quad (5)$$

$$K\varphi = \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau) E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau$$

Таким образом, при условиях (1) компоненты смещений  $u^*$  и  $v^*$  точек упруго-ползучего тела с учетом ползучести выражаются через те же компоненты упруго-мгновенных смещений  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$ . В случае обобщенного плоского напряженного состояния тела в уравнениях (2) следует произвести замены:

$$v \rightarrow v/(1 + \nu), \quad E \rightarrow E(1 + 2\nu)/(1 + \nu)^2.$$

Далее, вязкоупругую плоскость по окружности с радиусом  $R$  разрежем на круговой диск и на плоскость с круговым отверстием и вычислим компоненты смещений граничных точек диска (-) и плоскости с круговым отверстием (+). Известно, что [8]

$$W_-(R, \vartheta, t) = u_r^-(R, \vartheta, t) + i u_\vartheta^-(R, \vartheta, t) = -\frac{\kappa [T(t) + iP(t)]}{2\pi\mu(\kappa + 1)} \ln R e^{-i\vartheta} -$$

$$-\frac{T(t) + iP(t)}{2\pi\mu(\kappa + 1)} e^{-i\vartheta} + \frac{iM(t)(\kappa + 1)}{8\pi\mu R} + \frac{R}{4\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{X}_-(\varphi, t) e^{-i(\vartheta - \varphi)} d\varphi + \frac{T(t) - iP(t)}{4\pi\mu} e^{i\vartheta} +$$

$$+ \frac{R(\kappa + 1)}{4\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} X_-(\varphi, t) e^{-i(\vartheta - \varphi)} \ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \right| d\varphi + \frac{R(\kappa + 1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} X_-(\varphi, t) d\varphi -$$

$$-\frac{iR(\kappa - 1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} X_-(\varphi, t) e^{-i(\vartheta - \varphi)} (\pi - |\vartheta - \varphi|) \text{sgn}(\vartheta - \varphi) d\varphi; \quad (6)$$

$$W_+(R, \vartheta, t) = u_r^+(R, \vartheta, t) + i u_\vartheta^+(R, \vartheta, t) = \frac{p(t) + q(t)}{8\mu} R(\kappa + 1) -$$

$$(-\pi < \vartheta < \pi)$$

$$-\frac{R(\kappa+1)}{4\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} X_+(\varphi, t) e^{-i(\vartheta-\varphi)} \ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2} \right| d\varphi - \frac{p(t)-q(t)}{4\mu} R(\kappa+1) e^{-2i\vartheta} -$$

$$-\frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} X_+(\varphi, t) e^{-i(\vartheta-\varphi)} (\pi - |\vartheta-\varphi|) \operatorname{sgn}(\vartheta-\varphi) d\varphi;$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad \mu = E/2(1+\nu), \quad X_{\pm}(\varphi, t) = T_{\pm}(\varphi, t) + i\Sigma_{\pm}(\varphi, t) \quad (-\pi < \varphi < \pi)$$

$$-\sigma_r|_{r=\pm R} = T_{\pm}(\varphi) = \begin{cases} \sigma_{\pm}(\varphi, t), & \varphi \in L; \\ \sigma(\varphi, t), & \varphi \in L'; \end{cases} \quad -\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = \Sigma_{\pm}(\varphi) = \begin{cases} \tau_{\pm}(\varphi, t), & \varphi \in L; \\ \tau(\varphi, t), & \varphi \in L'; \end{cases}$$

$$L = \bigcup_{k=1}^n L_k, \quad L' = (-\pi, \pi) / L.$$

Здесь  $u_r^{\pm}, u_{\vartheta}^{\pm}$  – смещения граничных точек в радиальном и круговом направлениях, соответственно, а  $\sigma_r, \sigma_{r\varphi}$  – компоненты напряжений.

Теперь обозначая

$$W(\vartheta, t) = W_+(R, \vartheta, t) + W_-(R, \vartheta, t), \quad \Phi(\vartheta, t) = W_+(R, \vartheta, t) - W_-(R, \vartheta, t)$$

$$\Sigma(\vartheta, t) = X_+(\vartheta, t) + X_-(\vartheta, t), \quad \Omega(\vartheta, t) = X_+(\vartheta, t) - X_-(\vartheta, t)$$

с учетом (5) и (6) находим

$$(W^*(\vartheta, t) e^{i\vartheta})'_{\vartheta} = (I-K) i \frac{p(t)+q(t)}{8\mu} R(\kappa+1) e^{i\vartheta} + (I-K) i \frac{p(t)-q(t)}{4\mu} R(\kappa+1) e^{-i\vartheta} +$$

$$+(I-K) i \frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu} e^{i\vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Sigma(\varphi, t) - \Omega(\varphi, t)}{2} d\varphi - (I-K) \frac{M(t)(\kappa+1)}{8\pi\mu R} e^{i\vartheta} +$$

$$+(I-K) i \frac{T(t) - iP(t)}{2\pi\mu} e^{2i\vartheta} - (I-K) \frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-\varphi}{2} d\varphi -$$

$$-(I-K) \frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma(\varphi, t) e^{i\varphi} [2\pi\delta(\vartheta-\varphi) - 1] d\varphi$$

$$(\Phi^*(\vartheta, t) e^{i\vartheta})'_{\vartheta} = (I-K) i \frac{p(t)+q(t)}{8\mu} R(\kappa+1) e^{i\vartheta} + (I-K) \frac{M(t)(\kappa+1)}{8\pi\mu R} e^{i\vartheta} -$$

$$-(I-K) i \frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu} e^{i\vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Sigma(\varphi, t) - \Omega(\varphi, t)}{2} d\varphi + (I-K) i \frac{p(t)-q(t)}{4\mu} R(\kappa+1) e^{-i\vartheta} -$$

$$-(I-K) i \frac{T(t) - iP(t)}{2\pi\mu} e^{2i\vartheta} - (I-K) \frac{R(\kappa+1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-\varphi}{2} d\varphi -$$

$$-(I-K) \frac{iR(\kappa-1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} [2\pi\delta(\vartheta-\varphi) - 1] d\varphi$$

Здесь  $\delta(\vartheta)$  – известная дельта-функция Дирака.

Так как смещения непрерывны на  $r = R$ , то  $\Phi^*(\vartheta, t) \equiv 0$ . Из последнего выражения определим функцию  $\Omega(\vartheta, t)$ . С этой целью  $\Omega(\vartheta, t)e^{i\vartheta}$  и  $\Sigma(\vartheta, t)e^{i\vartheta}$  представим рядами Фурье

$$\Sigma(\varphi, t)e^{i\varphi} = \frac{\Sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Sigma_k \cos k\varphi + \bar{\Sigma}_k \sin k\varphi)$$

$$\Omega(\varphi, t)e^{i\varphi} = \frac{\Omega_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_k \cos k\varphi + \bar{\Omega}_k \sin k\varphi)$$

После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} (W^*(\vartheta, t)e^{i\vartheta})'_{\vartheta} &= (I-K)i \frac{p(t)+q(t)}{4\mu} R(\kappa-1)e^{i\vartheta} + (I-K)i \frac{p(t)-q(t)}{2\mu} R e^{-i\vartheta} - \\ &- (I-K) \frac{iR e^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(\varphi, t) d\varphi - (I-K) \frac{M(t)}{2\pi\mu R} e^{i\vartheta} + \quad (-\pi < \vartheta < \pi) \\ &+ (I-K)i \frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} - (I-K) \frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-\varphi}{2} d\varphi \\ (I-K)\Sigma e^{i\vartheta} &= (I-K) \frac{\Sigma_0}{2} + (I-K) \frac{i(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(\vartheta, t) e^{i\vartheta} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} d\vartheta - \\ &- (I-K) \frac{e^{i\vartheta}}{\pi(\kappa+1)} + 2(I-K) \frac{T(t)-iP(t)}{\pi R(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} + (I-K) \frac{iM(t)}{\pi R^2} e^{i\vartheta} - \quad (7) \\ &- (I-K)[p(t)+q(t)]e^{i\vartheta} + (I-K)[p(t)-q(t)]e^{-i\vartheta} \end{aligned}$$

Так как напряжения вне  $L$  на окружности непрерывны, то  $\Omega(\vartheta, t) \equiv 0, \vartheta \in L'$  и из (7) после несложных выкладок придем к ключевому уравнению поставленной задачи:

$$\begin{aligned} (W(\vartheta, t)e^{i\vartheta})'_{\vartheta} &= i \frac{p(t)+q(t)}{4\mu} R(\kappa-1)e^{i\vartheta} + i \frac{p(t)-q(t)}{2\mu} R e^{-i\vartheta} - \frac{M(t)}{2\pi\mu R} e^{i\vartheta} + \\ &+ i \frac{T(t)-iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} - \frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_L \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-\varphi}{2} d\varphi - \quad (8) \\ &- \frac{iR e^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_L \Omega(\varphi, t) d\varphi \quad (-\pi < \vartheta < \pi) \\ \Sigma e^{i\vartheta} &= \frac{\Sigma_0}{2} + \frac{i(\kappa-1)}{2\pi(\kappa+1)} \int_L \Omega(\vartheta, t) e^{i\vartheta} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} d\vartheta - \frac{e^{i\vartheta}}{\pi(\kappa+1)} + 2 \frac{T(t)-iP(t)}{\pi R(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} + \\ &+ \frac{iM(t)}{\pi R^2} e^{i\vartheta} - [p(t)+q(t)]e^{i\vartheta} + [p(t)-q(t)]e^{-i\vartheta} \end{aligned}$$

## 2. Решение определяющего интегрального уравнения.

Рассматривая ключевое уравнение (8) на системе включений  $L$ , относительно  $\Omega(\varphi, t)$  получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_L \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \varphi}{2} d\varphi = i \frac{p(t) + q(t)}{4\mu} R(\kappa - 1) e^{i\vartheta} + \\ & + i \frac{p(t) - q(t)}{2\mu} R e^{-i\vartheta} - \frac{M(t)}{2\pi\mu R} e^{i\vartheta} + i \frac{T(t) - iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} - (W(\vartheta, t) e^{i\vartheta})'_{\vartheta} - \quad (9) \\ & - \frac{iR e^{i\vartheta}}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_L \Omega(\varphi, t) d\varphi \quad (\vartheta \in L) \end{aligned}$$

а условия равновесия включений примут вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} d\varphi = - \frac{P_m(t) + iT_m(t)}{R} \quad (m = \overline{1, n}) \\ & \operatorname{Im} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \Omega(\varphi, t) d\varphi = \frac{M_m(t)}{R^2} \quad (m = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (10)$$

Условия равновесия диска имеют вид

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\Sigma(\varphi, t) - \Omega(\varphi, t)] e^{i\varphi} d\varphi = \frac{T(t) + iP(t)}{R}$$

и, следовательно,

$$\Sigma_0 = \frac{1}{\pi R} \left\{ 2[T(t) + iP(t)] - \sum_{m=1}^n [P_m(t) + iT_m(t)] \right\}$$

Для напряжений будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_+(\varphi, t) &= \frac{\operatorname{Re} \Sigma(\varphi, t) + \operatorname{Re} \Omega(\varphi, t)}{2}, \quad \sigma_-(\varphi, t) = \frac{\operatorname{Re} \Sigma(\varphi, t) - \operatorname{Re} \Omega(\varphi, t)}{2} \\ \tau_+(\varphi, t) &= \frac{\operatorname{Im} \Sigma(\varphi, t) + \operatorname{Im} \Omega(\varphi, t)}{2}, \quad \tau_-(\varphi, t) = \frac{\operatorname{Im} \Sigma(\varphi, t) - \operatorname{Im} \Omega(\varphi, t)}{2} \\ \sigma(\varphi, t) &= \frac{\operatorname{Re} \Sigma(\varphi, t)}{2}, \quad \tau(\varphi, t) = \frac{\operatorname{Im} \Sigma(\varphi, t)}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Построим решение определяющего интегрального уравнения (9):

$$\int_L \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \varphi}{2} d\varphi = f(\vartheta, t) \quad (\vartheta \in L)$$

С этой целью перейдем к новым переменным и функциям

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad a_m = \operatorname{tg} \frac{\alpha_m}{2}, \quad b_m = \operatorname{tg} \frac{\beta_m}{2} \\ \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} &\rightarrow \overline{\Omega}(u, t), \quad f(\vartheta, t) \rightarrow \overline{f}(x, t) \end{aligned}$$

тогда

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \varphi}{2} d\varphi = 2 \left( \frac{1}{x - u} + \frac{u}{1 + u^2} \right) du$$

$$\int_L \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \varphi}{2} d\varphi = 2 \int_{L'} \frac{\bar{\Omega}(u, t)}{x - u} du + 2 \int_{L'} \frac{u \bar{\Omega}(u, t)}{1 + u^2} du; \quad L' = \bigcup_{m=1}^n (a_m, b_m)$$

и, следовательно, приходим к уравнению с ядром Коши

$$\int_{L'} \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du = -\frac{\bar{f}(x, t)}{2} + c(t); \quad c(t) = \int_{L'} \frac{u \bar{\Omega}(u, t)}{1 + u^2} du$$

решение которого имеет вид

$$\bar{\Omega}(x, t) = \frac{(-1)^{n-l+1}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (x - a_m)(x - b_m)}} \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (u - a_m)(u - b_m)} \times \right. \\ \left. \times \frac{c(t) - \frac{\bar{f}(u, t)}{2}}{u - x} du + P_{n-1}(x, t) \right] \quad (l = \overline{1, n})$$

$$P_{n-1}(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

где  $c_k = c_k(t)$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) – неизвестные постоянные по переменной  $x$ .

Возвращаясь к прежним переменным, будем иметь

$$x - a_m = \frac{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\alpha_m}{2}}, \quad x - b_m = \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\beta_m}{2}}, \quad \frac{du}{u - x} = \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} d\varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}}$$

$$\prod_{m=1}^n (x - a_m)(x - b_m) = \frac{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\cos^{2n} \frac{\vartheta}{2} \prod_{m=1}^n \cos \frac{\alpha_m}{2} \cos \frac{\beta_m}{2}}$$

$$\Omega(\vartheta, t) e^{i\vartheta} = \frac{(-1)^{n-l+1} \cos^n \frac{\vartheta}{2}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}} \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\left[ c(t) - \frac{f(\varphi, t)}{2} \right]}{\cos^n \frac{\varphi}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} d\varphi + P_{n-1} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \quad (l = \overline{1, n})$$

$$c(t) = \int_L \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

$$\begin{aligned} \Omega(\vartheta, t) e^{i\vartheta} = & - \frac{(-1)^{n-l+1} \cos^{n+1} \frac{\vartheta}{2}}{4\pi^2 \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{f(\varphi, t)}{\cos^{n+1} \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} \times \\ & \times \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} d\varphi + \frac{(-1)^{n-l+1} \cos^n \frac{\vartheta}{2}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}} P_{n-1} \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) + \\ & + \frac{c(t) (-1)^{n-l+1} \cos^{n+1} \frac{\vartheta}{2}}{2\pi^2 \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}}}{\cos^{n+1} \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} d\varphi \quad (l = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

### 3. Частные случаи.

Пусть на окружности  $r = R$  имеем только одно включение  $L = \{r = R, -\alpha < \vartheta < \alpha\}$ . Тогда

$$(We^{i\vartheta})'_\vartheta = -2\gamma R e^{i\vartheta}$$

где  $\gamma$  – угол поворота включения. В этом случае определяющее интегральное уравнение (9) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{R\kappa}{2\pi\mu(\kappa+1)} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \varphi}{2} d\varphi = f(\vartheta, t) - \frac{iR e^{i\vartheta} \tilde{c}(t)}{2\pi\mu(\kappa+1)} \quad (|\vartheta < \alpha|) \quad (12) \\ f(\vartheta, t) = i \frac{p(t) + q(t)}{4\mu} R(\kappa - 1) e^{i\vartheta} + i \frac{p(t) - q(t)}{2\mu} R e^{-i\vartheta} - \frac{M(t)}{2\pi\mu R} e^{i\vartheta} + \\ + i \frac{T(t) - iP(t)}{\pi\mu(\kappa+1)} e^{2i\vartheta} + 2\gamma R e^{i\vartheta}, \quad \tilde{c}(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Omega(\varphi, t) d\varphi \end{aligned}$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$\Omega(\varphi, t) e^{i\varphi} = \frac{1}{2} \tilde{c}(t) M(\varphi, t) + \frac{1}{2} N(\varphi, t) + \frac{(cF - G) \sin \frac{\varphi}{2} + B \cos \frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{2}(\cos \varphi - \cos \alpha)} \quad (13)$$

где

$$F = \frac{i}{2\pi^2 \kappa} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\varphi} d\varphi$$

$$G = \frac{\mu(\kappa+1)}{\pi R \kappa} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}{\cos \frac{\varphi}{2}} f(\varphi, t) d\varphi$$

$$M(\varphi, t) = -\frac{i}{2\pi^2 \kappa} \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} e^{i\vartheta} d\vartheta$$

$$N(\varphi, t) = \frac{\mu(\kappa+1)}{\pi R \kappa} \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} f(\vartheta) d\vartheta$$

или после простых преобразований

$$F = \frac{2i \cos \frac{\alpha}{2}}{\pi \kappa} \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$G = \frac{\kappa+1}{\kappa} \left[ 2i [p(t) - q(t)] - \frac{2M(t)}{\pi R^2} + i [p(t) + q(t)] (\kappa - 1) + 8\mu\gamma \right] \cos \frac{\alpha}{2} \times$$

$$\times \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) + 4i \frac{T(t) - iP(t)}{\pi R \kappa} \left( 1 - \sin^4 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$M(\varphi, t) = -i \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) + 4i \cos \frac{\varphi}{2} \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\pi \kappa \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}$$

$$N(\varphi, t) = \frac{\mu(\kappa+1)}{\pi R \kappa} \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} \left\langle \left[ i \frac{p(t) - q(t)}{2\mu} R - \frac{M(t)}{2\pi\mu R} + i \frac{p(t) + q(t)}{4\mu} \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times R(\kappa - 1) + 2\gamma R \left] 4\pi \sin \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - 2 \right) + \left[ -i \frac{P(t) - q(t)}{\mu} R - \frac{M(t)}{\pi \mu R} + 4\gamma R + \right. \\
& \left. + i \frac{P(t) + q(t)}{2\mu} R(\kappa - 1) \right] 4\pi i \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} + i \frac{T(t) - iP(t)}{\pi \mu (\kappa + 1)} \left\{ -\frac{4\pi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} + \right. \\
& \left. + 16\pi \sin \frac{\varphi}{2} \left[ 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right\} - \frac{T(t) - iP(t)}{\mu (\kappa + 1)} \frac{16}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \times \right. \\
& \left. \times \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

При помощи (10) найдены постоянные  $c, B$  и угол поворота включения  $\gamma$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} c &= \frac{M_1(t)}{R^2} \quad \operatorname{Re} c = \frac{\kappa \left( U \cos^2 \frac{\alpha}{2} - V \right)}{2 \left( \kappa - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \\
\operatorname{Re} B &= \frac{\left( 1 - \kappa - 2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right) U - V \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\pi \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \kappa \right)} \\
\operatorname{Im} B &= \frac{\left( 1 - 2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right) Q - K \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\
\gamma &= \frac{1}{8R} \left[ \frac{R\kappa \left( K - Q \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\mu \pi (\kappa + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2M(t)}{\pi \mu R} \right] \\
K &= \frac{2M_1(t)}{R^2} - \frac{2M_1(t)}{\kappa R^2} \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left( 2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
& - 4 \frac{P(t)}{R\kappa} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \sin^4 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) - 4 \frac{P(t)}{R\kappa} \left[ -16 - 15 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 16 \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\
& \left. - 20 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + 36 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 24 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 14 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{2T_1(t)}{R} - \frac{2M_1(t)}{R^2\kappa} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{16P(t)}{R\kappa} \left(-1 + \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{8} - \frac{3}{4} \sin^4 \frac{\alpha}{2}\right) \\
U &= -\frac{2P_1(t)}{R} - \frac{\kappa+1}{R\kappa} \left\{ \pi R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 [2[p(t)-q(t)] - [p(t)+q(t)](\kappa-1)] - \right. \\
&\quad \left. - 16 \frac{T(t)}{\kappa+1} \left(-1 + \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{8} - \frac{3}{4} \sin^4 \frac{\alpha}{2}\right) \right\} \\
V &= \frac{4T(t)}{R\kappa} \left[ \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 21 \sin^6 \frac{\alpha}{2} - 16 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 16 + 36 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 24 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \right. \\
&\quad \left. - 14 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] + \frac{\pi(\kappa+1)}{2\kappa} \left\{ 2[p(t)-q(t)] + [p(t)+q(t)](\kappa-1) \right\} \left[ 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \right. \\
&\quad \left. - 3 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] - \left\{ 2[p(t)-q(t)] - [p(t)+q(t)](\kappa-1) \right\} \left[ 4 - 6 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \right]
\end{aligned}$$

а напряжения можно получить при помощи формул (13), (8) и (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 496 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка. 1976. 443с.
3. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. /Спр. Пособие под общей ред. В.В.Панасюка.Т.2. Киев:Наукова думка. 1988. 619с.
4. Грилицкий В.Д., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными упругими включениями. // ПМ. 1975. Т. II. N I . С. 74-81.
5. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука. 1983. 336 стр.
6. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязко-упруго-пластических тел. М.: Наука. 1987. 741 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат. 1952. 324 с.
8. Торосян Ф.С. Исследование некоторых задач о контактном взаимодействии двух цилиндрических и сферических тел близких радиусов между собой и с тонкостенными элементами. /Кандидатская диссертация. Ереван. 1982. 152 с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
8.11.2006

УДК 539.3

О ХАРАКТЕРЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСЛОЙНОЙ  
ПЛАСТИНКИ ВО ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Погосян А. М.

**Ключевые слова:** теория упругости, асимптотический метод, вынужденные колебания, кулоново трение, вектор перемещения, тензор напряжений, резонанс.

**Keywords:** elasticity theory, asymptotic method, forced vibrations, coulomb friction, rigidly fixed, resonance, displacement vector, stress tensor.

Հ. Մ. Պողոսյան

Երկշերտ սալի ստիպողական տատանումների բնույթը երկրորդ եզրային խնդրում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական երկրորդ եզրային խնդիրը, երբ շերտերի միջև կա կուլոնյան շփում: Սալի ներքևի մակերևույթին հաղորդված են արտաքին դինամիկ գրգռումներ, իսկ վերին մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Ստացված է խնդրի ընդհանուր ասիմպտոտիկական լուծումը, մասնավոր դասի խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Հայտնի է, որ երկրորդ շերտին հաղորդված հաստատուն շոշափող տեղափոխումները չեն ազդում առաջին շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի վրա: Ցույց է տրված, որ նշված փաստը մեծ ճշտությամբ տեղի ունի նաև կորորդինատների գծայնորեն կախված ազդեցությունների դեպքում:

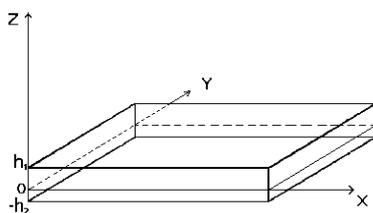
H. M. Poghosyan

On a character of the forced vibrations of two-layer plate in the second boundary value problem

The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of orthotropic plate at coulomb friction between layers is solved by the asymptotic method. The bottom obverse surface is subject to external dynamic influences, and top - is rigidly fixed. The common asymptotic solution of the problem is found. The closed solution for particular type of problems is found. The resonance arising conditions are established. It is known, that constant tangential displacements acting to the second layer do not influence in stress-strain state of the first layer. It is shown, that the same phenomenon with the big accuracy remains in force at linearly varying on coordinates influences.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. Нижняя лицевая поверхность подвержена внешним динамическим воздействиям, а верхняя жестко закреплена. Найдено общее асимптотическое решение задачи. Для частного типа задач получено замкнутое решение. Установлены условия возникновения резонанса. Известно, что сообщаемые второму слою постоянные тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого слоя. Показано, что это же явление с большой точностью остается в силе и при линейно меняющихся по координатам воздействиях. Для этого класса задач граничным условиям на боковой поверхности соответствует появление динамического пограничного слоя. Эти условия не влияют на решение внутренней задачи.

1. Рассмотрим двухслойную ортотропную пластину



$$D = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D_0, -h_2 \leq z \leq h_1 \right\}$$
$$h = \max(h_1, h_2) \ll l$$

когда верхняя лицевая поверхность жестко закреплена, а на нижней применен гармонич-

чески изменяющийся во времени вектор перемещения (фиг. 1).

Фиг. 1

$D_0$  – область контакта в плоскости между слоями,  $l$  – характерный тангенциальный размер пластинки.

Требуется найти решение уравнений динамики теории упругости для ортотропного тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, \quad (x, y, z; u^k, v^k, w^k), \quad k = I, II \\ \frac{\partial u^k}{\partial x} &= a_{11}^k \sigma_{xx}^k + a_{12}^k \sigma_{yy}^k + a_{13}^k \sigma_{zz}^k, \quad (u^k, v^k, w^k; x, y, z; 1, 2, 3) \\ \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial x} + \frac{\partial u^k}{\partial z} = a_{55}^k \sigma_{xz}^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial z} = a_{44}^k \sigma_{yz}^k \end{aligned} \quad (1.1)$$

при следующих граничных и контактных условиях:

граничные условия:

при  $z = -h_2$

$$u''(-h_2) = u^-(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \quad (1.2)$$

при  $z = h_1$

$$u^I(h_1) = v^I(h_1) = w^I(h_1) = 0 \quad (1.3)$$

условия неполного контакта между слоями:

при  $z = 0$

$$\begin{aligned} W^I(\zeta = 0) &= W^{II}(\zeta = 0) \\ \sigma_{zz}^I(\zeta = 0) &= \sigma_{zz}^{II}(\zeta = 0) \\ \sigma_{xz}^I(\zeta = 0) &= \sigma_{xz}^{II}(\zeta = 0) = f_1 \sigma_{zz}^I(\zeta = 0) \\ \sigma_{yz}^I(\zeta = 0) &= \sigma_{yz}^{II}(\zeta = 0) = f_2 \sigma_{zz}^I(\zeta = 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

**2. Решение системы уравнений (1.1) при граничных и контактных условиях (1.2)-(1.4) будем искать в виде:**

$$\begin{aligned} (u^k, v^k, w^k) &= (u_x^k, v_y^k, w_z^k) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{\alpha\beta}^k(x, y, z, t) = \sigma_{jk}^k(x, y, z, t) \exp(i\Omega t) \\ \alpha, \beta &= x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3 \quad k = I, II \end{aligned} \quad (2.1)$$

Затем введем безразмерные координаты и безразмерные компоненты вектора перемещения:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}, \quad U^k = \frac{u_x^k}{l}, \quad V^k = \frac{v_y^k}{l}, \quad W^k = \frac{u_z^k}{l} \quad (2.2)$$

Подставим (2.1) в преобразованные уравнения (1.1), получим сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему, решение которой будем искать в виде [2]:

$$\sigma_{ij}^k = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad U^k = \varepsilon^s U^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \quad (U, V, W); \quad s = \overline{0, N}; \quad k = I, II \quad (2.3)$$

Обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по немому (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование по целочисленным значениям от числа 0 до  $N$ .

Подставив (2.3) в преобразованные уравнения (1.1), получим рекуррентную систему для определения  $\sigma_{ij}^{(k,s)}$ ,  $U^{(k,s)}$ ,  $V^{(k,s)}$ ,  $W^{(k,s)}$ ;  $k = I, II$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ .

Из этой системы следуют:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^k} \left[ \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} - \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad \sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^k} \left[ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \\ \sigma_{23}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{44}^k} \left[ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \\ \sigma_{11}^{(k,s)} &= -A_{23}^k \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^k \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{22}^{(k,s)} &= -A_{13}^k \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^k \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{33}^{(k,s)} &= A_{11}^k \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Функции  $U^{(k,s)}$ ,  $V^{(k,s)}$ ,  $W^{(k,s)}$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,s)} &= R_U^{(k,s)} \\ R_U^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^k \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial^2 V^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho_k \Omega_*^2 V^{(k,s)} &= R_V^{(k,s)} \\ R_V^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^k \left[ \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\ A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k \Omega_*^2 W^{(k,s)} &= R_W^{(k,s)} \\ R_W^{(k,s)} &= A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Решениями уравнений (2.5) будут:

$$U^{(k,s)} = U_0^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_\tau^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \quad (U, V, W); \quad k = I, II\tag{2.6}$$

где величины с индексом "0" – решения однородных, а с индексом "τ" – частные решения неоднородных уравнений (2.5).

$$U^{(k,s)} = C_1^{(k,s)}(\xi, \eta) \sin a_1^k \Omega_* \zeta + C_2^{(k,s)}(\xi, \eta) \cos a_1^k \Omega_* \zeta + U_\tau^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)\tag{2.7}$$

$$a_1^k = \sqrt{a_{55}^k \rho_k}, \quad a_2^k = \sqrt{a_{44}^k \rho_k}, \quad a_3^k = \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^k}}$$

$$(a_2, a_3, C_3, C_4, C_5, C_6; V, W); \quad k = I, II$$

3. Удовлетворив граничным и контактными условиями (1.2)-(1.4) и подставив значения  $C_i^{(k,s)}$  в (2.7), получим окончательное решение:

$$U^{(I,s)} = \left[ \frac{1}{\Omega_*} \left( f_1 b_{33}^{(I,s)}(\zeta=0) - b_{13}^{(I,s)}(\zeta=0) + f_1 A_{11}^I a_3^I \Omega_* \frac{F^{(s)}}{\nabla} \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho_1}} \sin a_1^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1) - U_\tau^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1) \cos a_1^I \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_1^I \Omega_* \zeta_1} + U_\tau^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ V^{(I,s)} = \left[ C_3^{(I,s)}(\xi, \eta) \sin a_2^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1) - V_\tau^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1) \cos a_2^I \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_2^I \Omega_* \zeta_1} + V_\tau^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ W^{(I,s)} = \left[ \frac{F^{(s)}}{\nabla} \sin a_3^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1) - W_\tau^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1) \cos a_3^I \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_3^I \Omega_* \zeta_1} + W_\tau^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ U^{(II,s)} = \left[ C_1^{(II,s)}(\xi, \eta) \sin a_1^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + (U^{-(s)} - U_\tau^{(II,s)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a_1^{II} \Omega_* \zeta \right] \times \\ \times \frac{1}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + U_\tau^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ V^{(II,s)} = \left[ C_3^{(II,s)}(\xi, \eta) \sin a_2^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + (V^{-(s)} - V_\tau^{(II,s)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a_2^{II} \Omega_* \zeta \right] \times \\ \times \frac{1}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} + V_\tau^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ W^{(II,s)} = \left[ C_5^{(II,s)}(\xi, \eta) \sin a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + (W^{-(s)} - W_\tau^{(II,s)}(\zeta = -\zeta_2)) \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \times \\ \times \frac{1}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2} + W_\tau^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.1)$$

где

$$F^{(s)} = \left[ -W_\tau^{(II,s)}(\zeta=0) + W_\tau^{(I,s)}(\zeta=0) \right] \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 + \\ + \left( b_{33}^{(II,s)}(\zeta=0) - b_{33}^{(I,s)}(\zeta=0) \right) \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 - \\ - \left( W^{-(s)} - W_\tau^{(II,s)}(\zeta = -\zeta_2) \right) \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 - \\ - W_\tau^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1) \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 \\ \nabla = \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \Omega_* \sin a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 + \sqrt{A_{11}^I \rho_I} \Omega_* \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \\ b_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^k} \left[ \frac{\partial U_\tau^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad b_{23}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \left[ \frac{\partial V_\tau^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\ b_{33}^{(k,s)} = A_{11}^k \frac{\partial W_\tau^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}$$

$$C_1^{(I,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega_*} \left( f_1 b_{33}^{(I,s)}(\zeta = 0) - b_{13}^{(I,s)}(\zeta = 0) + f_1 A_{11}' a_3' \Omega_* \frac{F^{(s)}}{\nabla} \right) \sqrt{\frac{a_{55}'}{\rho_I}} \quad (3.2)$$

$$C_1^{(II,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega_*} \left( \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}'}} C_1^{(I,s)} + b_{13}^{(I,s)}(\zeta = 0) - b_{13}^{(II,s)}(\zeta = 0) \right) \sqrt{\frac{a_{55}''}{\rho_{II}}}$$

$$C_3^{(II,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}''}{\rho_{II}}} (b_{23}^{(I,s)}(\zeta = 0) - b_{23}^{(II,s)}(\zeta = 0)) + \sqrt{\frac{a_{44}'' \rho_I}{\rho_{II} a_{44}'}} C_3^{(I,s)}$$

$$C_5^{(I,s)}(\xi, \eta) = \frac{F^{(s)}}{\nabla}$$

$$C_5^{(II,s)}(\xi, \eta) = \frac{F^{(s)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}' \rho_I}{A_{11}'' \rho_{II}}} \frac{b_{33}^{(II,s)}(\zeta = 0) + b_{33}^{(I,s)}(\zeta = 0)}{\Omega_* \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}}}$$

Компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам (2.4).

Решение (3.2) будет конечным, если

$$\cos a_i^k \Omega_* \zeta_j \neq 0, \quad \nabla \neq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = I, II; \quad j = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$\nabla = \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_* \sin a_3'' \Omega_* \zeta_1 \cos a_3'' \Omega_* \zeta_2 + \sqrt{A_{11}' \rho_I} \sin a_3' \Omega_* \zeta_2 \cos a_3' \Omega_* \zeta_1$$

Условия (3.3) будут выполнены, если  $\Omega$  не является частотой собственных колебаний [4], в противном случае будет возникать резонанс.

4. Рассмотрим частный случай, пусть

$$U^- = d_1 \xi + d_2 \eta + d_3, \quad V^- = d_4 \xi + d_5 \eta + d_6, \quad W^- = \text{const} \quad (4.1)$$

При  $s = 0$  из (2.5), учитывая, что  $Q^m \equiv 0$  при  $m < 0$ , для функций  $R_U^{(k,0)}$  ( $U, V, W$ ) получим:

$$\begin{aligned} R_U^{(k,0)} &= 0, \quad R_V^{(k,0)} = 0, \quad R_W^{(k,0)} = 0 \\ \frac{\partial^2 U^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,0)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho_k \Omega_*^2 V^{(k,0)} = 0 \\ A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k \Omega_*^2 W^{(k,0)} &= 0 \\ U_\tau^{(k,0)} = V_\tau^{(k,0)} = W_\tau^{(k,0)} &= 0; \quad k = I, II \end{aligned} \quad (4.2)$$

При  $s = 0$  из (3.2) следуют:

$$\begin{aligned} b_{13}^{(k,0)} &= 0, \quad b_{23}^{(k,0)} = 0, \quad b_{33}^{(k,0)} = 0 \\ F^{(0)} &= -W^- \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3'' \Omega_* \zeta_1 \\ C_1^{(I,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{55}' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \\ C_1^{(II,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- f_1 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' a_{55}'' \rho_I} \Omega_* \cos a_3'' \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3^{(I,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}'' A_{11}' a_{44}' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \\
C_3^{(II,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}'' A_{11}' a_{44}'' \rho_I} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \\
C_5^{(I,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \\
C_5^{(II,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{W^- \sqrt{A_{11}' \rho_I} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1}{\nabla}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставив значения (4.2) и (4.3) в (3.1), получим:  
величины первого слоя:

$$\begin{aligned}
U^{(I,0)} &= -\frac{f_1 W^- \Omega_* \sqrt{A_{11}'' A_{11}' a_{55}' \rho_{II}}}{\nabla \cos a_1' \Omega_* \zeta_1} \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \sin a_1' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
V^{(I,0)} &= -\frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}'' A_{11}' a_{44}' \rho_{II}} \Omega_*}{\nabla \cos a_2' \Omega_* \zeta_1} \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \sin a_2' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
W^{(I,0)} &= -\frac{W^- \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_*}{\nabla} \sin a_3' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_{13}^{(I,0)} &= -\frac{f_1 W^- \Omega_*^2 \sqrt{A_{11}'' A_{11}' \rho_I \rho_{II}}}{\nabla \cos a_1' \Omega_* \zeta_1} \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \cos a_1' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_{23}^{(I,0)} &= -\frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}' A_{11}'' \rho_I \rho_{II}} \Omega_*^2}{\nabla \cos a_2' \Omega_* \zeta_1} \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \cos a_2' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_{11}^{(I,0)} &= \frac{A_{23}' \Omega_*^2 W^- \sqrt{A_{11}'' \rho_I \rho_{II}} \Omega_*}{\sqrt{A_{11}'} \nabla} \cos a_3' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_{22}^{(I,0)} &= A_{13}' \frac{\Omega_*^2 W^- \sqrt{A_{11}'' \rho_I \rho_{II}} \Omega_*}{\sqrt{A_{11}'} \nabla} \cos a_3' \Omega_* (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_{33}^{(I,0)} &= -\frac{\Omega_*^2 W^- \sqrt{A_{11}' A_{11}'' \rho_I \rho_{II}} \Omega_*}{\nabla} \cos a_3' \Omega_* (\zeta - \zeta_1)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Величины второго слоя:

$$\begin{aligned}
U^{(II,0)} &= \left[ -\frac{W^- f_1 \sqrt{A_{11}^I A_{11}^{II} a_{55}^{II} \rho_I \Omega_*} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \sin a_1^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + U^- \cos a_1^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
V^{(II,0)} &= \left[ -\frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}^{II} A_{11}^I a_{44}^{II} \rho_I \Omega_*} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \sin a_2^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + V^- \cos a_2^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
W^{(II,0)} &= \left[ -\frac{\sqrt{A_{11}^I \rho_I \Omega_*} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1}{\nabla} \sin a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{W^-}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
\sigma_{13}^{(II,0)} &= -\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \Omega_* \left[ \frac{W^- f_1 \sqrt{A_{11}^{II} A_{11}^I a_{55}^{II} \rho_I \Omega_*}}{\nabla} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_1^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + U^- \sin a_1^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
\sigma_{23}^{(II,0)} &= -\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}} \Omega_* \left[ \frac{W^- f_2 \sqrt{A_{11}^{II} A_{11}^I a_{44}^{II} \rho_I \Omega_*}}{\nabla} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_2^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + V^- \sin a_2^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{1}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
\sigma_{11}^{(II,0)} &= A_{23}^{II} \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \Omega_* \left[ \frac{\sqrt{A_{11}^I \rho_I \Omega_*}}{\nabla} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{W^-}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
\sigma_{22}^{(II,0)} &= A_{13}^{II} \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \Omega_* \left[ \frac{\sqrt{A_{11}^I \rho_I \Omega_*}}{\nabla} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{W^-}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
\sigma_{33}^{(II,0)} &= -A_{11}^I \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \Omega_* \left[ \frac{\sqrt{A_{11}^I \rho_I \Omega_*}}{\nabla} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) + \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{W^-}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Из полученного точного решения (4.4), как и при частном случае  $u^-, v^-, w^- = \text{const}$ , в условиях жесткой заделки [5] и свободного края [6] следует любопытный факт: все величины первого слоя (при  $s=0$ ) не зависят от  $u^-, v^-$ . Наличие кулонова трения между слоями приводит к тому, что сообщаемые второму слою тангенциальные перемещения не влияют на напряженно-деформированное состояние первого слоя (при  $s=0$ ). В отличие от этого, при полном контакте между слоями напряженно-деформированные состояния обоих слоев зависят от  $u^-, v^-, w^-$  [7]. Установленный выше факт можно использовать в расчетах фундаментов-оснований сооружений сейсмостойкого строительства при учете сейсмического воздействия.

При  $s=1$ , учитывая (2.5), (4.4) и (4.5), будем иметь:

$$\begin{aligned}
R_U^{(k,1)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 U^{(k,1)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,1)} = 0 \\
U_\tau^{(k,1)} &= 0 \\
R_V^{(k,1)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V^{(k,1)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho_k \Omega_*^2 V^{(k,1)} = 0 \\
V_\tau^{(k,1)} &= 0 \\
R_W^{(k,1)} &= A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{(k,0)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{(k,0)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,0)}}{\partial \eta} \\
R_W^{(I,1)} &= 0, \quad A_{11}^I \frac{\partial^2 W^{(I,0)}}{\partial \zeta^2} + \rho_I \Omega_*^2 W^{(I,0)} = 0, \quad W_\tau^{(I,1)} = 0 \\
R_W^{(II,1)} &= (1 - A_{23}^{II}) d_1 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + (1 - A_{13}^{II}) d_5 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
A_{11}^{II} \frac{\partial^2 W^{(II,0)}}{\partial \zeta^2} + \rho_{II} \Omega_*^2 W^{(II,0)} &= (1 - A_{23}^{II}) d_1 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + \\
&\quad + (1 - A_{13}^{II}) d_5 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
W_\tau^{(II,1)} &= (1 - A_{23}^{II}) d_1 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + (1 - A_{13}^{II}) d_5 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
b_{13}^{(k,1)} &= 0, \quad b_{23}^{(k,1)} = 0, \quad b_{33}^{(I,1)} = 0 \\
b_{33}^{(II,1)} &= A_{11}^{II} \frac{\partial W_\tau^{(II,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{II} \frac{\partial U^{(II,0)}}{\partial \xi} - A_{13}^{II} \frac{\partial V^{(II,0)}}{\partial \eta} = \\
&= A_{11}^{II} \rho_{II} \Omega_*^2 \left[ (1 - A_{23}^{II}) d_1 \frac{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta}{a_{55}^{II} \cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + (1 - A_{13}^{II}) d_5 \frac{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta}{a_{44}^{II} \cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \right] - \\
&\quad - A_{23}^{II} d_1 \frac{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_1} - A_{13}^{II} d_5 \frac{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2}
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
W_\tau^{(II,1)} &= (1 - A_{23}^{II}) d_1 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} + (1 - A_{13}^{II}) d_5 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}} \Omega_*} \frac{\sin a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \\
W_\tau^{(II,1)}(\zeta = 0) &= 0 \\
W_\tau^{(II,1)}(\zeta = -\zeta_2) &= (A_{23}^{II} - 1) d_1 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}} \Omega_*} \operatorname{tg} a_1^{II} \Omega_* \zeta_2 + (A_{13}^{II} - 1) d_5 \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}} \Omega_*} \operatorname{tg} a_2^{II} \Omega_* \zeta_2
\end{aligned}$$

$$b_{33}^{(II,1)}(\zeta = 0) = A_{11}'' \rho_{II} \Omega_*^2 \left[ \frac{(1 - A_{23}'') d_1}{a_{55}'' \cos a_1'' \Omega_* \zeta_2} + \frac{(1 - A_{13}'') d_5}{a_{44}'' \cos a_2'' \Omega_* \zeta_2} \right] - \frac{A_{23}'' d_1}{\cos a_1'' \Omega_* \zeta_1} - \frac{A_{13}'' d_5}{\cos a_2'' \Omega_* \zeta_2} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= -W_\tau^{(II,1)}(\zeta = 0) \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \cos a_3'' \Omega_* \zeta_2 + \\ &+ b_{33}^{(II,1)}(\zeta = 0) \sin a_3'' \Omega_* \zeta_2 \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 + W_\tau^{(II,1)}(\zeta = -\zeta_2) \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}} \Omega_* \cos a_3' \Omega_* \zeta_1 \\ C_1^{(I,1)}(\xi, \eta) &= \sqrt{A_{11}' a_{55}'^2} f_1 \frac{F^{(1)}}{\nabla}, \quad C_1^{(II,1)}(\xi, \eta) = f_1 \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}' a_{55}'' \rho_I}{\rho_{II}}} \\ C_3^{(I,1)}(\xi, \eta) &= f_2 \sqrt{A_{11}' a_{44}'^2} \frac{F^{(1)}}{\nabla}, \quad C_3^{(II,1)}(\xi, \eta) = f_2 \sqrt{\frac{A_{11}' a_{44}'' \rho_I}{\rho_{II}}} \frac{F^{(1)}}{\nabla} \\ C_5^{(I,1)}(\xi, \eta) &= \frac{F^{(1)}}{\nabla}, \quad C_5^{(II,1)}(\xi, \eta) = \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}' \rho_I}{A_{11}'' \rho_{II}}} - \frac{b_{33}^{(II,1)}(\zeta = 0)}{\Omega_* \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}}} \end{aligned}$$

Для вектора перемещения и компонентов тензора напряжений получим:

$$\begin{aligned} U^{(I,1)} &= f_1 \sqrt{A_{11}' a_{55}'^2} \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\sin a_1' \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_1' \Omega_* \zeta_1} \\ V^{(I,1)} &= f_2 \sqrt{A_{11}' a_{44}'^2} \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\sin a_2' \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_2' \Omega_* \zeta_1} \\ W^{(I,1)} &= \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\sin a_3' \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_3' \Omega_* \zeta_1}, \quad U^{(II,1)} = f_1 \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}' a_{55}'' \rho_I}{\rho_{II}}} \frac{\sin a_1'' \Omega_* (\zeta + \zeta_2)}{\cos a_1'' \Omega_* \zeta_2} \\ V^{(II,1)} &= f_2 \sqrt{\frac{A_{11}' a_{44}'' \rho_I}{\rho_{II}}} \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\sin a_2'' \Omega_* (\zeta + \zeta_2)}{\cos a_2'' \Omega_* \zeta_2} \\ W^{(II,1)} &= \left[ \left( \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}' \rho_I}{A_{11}'' \rho_{II}}} - \frac{b_{33}^{(II,1)}(\zeta = 0)}{\Omega_* \sqrt{A_{11}'' \rho_{II}}} \right) \sin a_3'' \Omega_* (\zeta + \zeta_2) - \right. \\ &\quad \left. - W_\tau^{(II,1)}(\zeta = -\zeta_2) \cos a_3'' \Omega_* \zeta_2 \right] \frac{1}{\cos a_3'' \Omega_* \zeta_2} + W_\tau^{(II,1)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{12}^{(k,1)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(k,1)} = \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial U^{(k,1)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{23}^{(k,1)} = \frac{1}{a_{44}^k} \frac{\partial V^{(k,1)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{11}^{(I,1)} = -A_{23}' \frac{\partial W^{(I,1)}}{\partial \zeta} \\ \sigma_{11}^{(II,1)} &= -A_{23}'' \frac{\partial W^{(II,1)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{(I,1)} = -A_{13}' \frac{\partial W^{(I,1)}}{\partial \zeta} \\ \sigma_{22}^{(II,1)} &= -A_{13}'' \frac{\partial W^{(II,1)}}{\partial \zeta} - A_{12}'' \frac{\partial U^{(II,0)}}{\partial \xi} + A_{33}'' \frac{\partial V^{(II,0)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_{33}^{(I,1)} = A_{11}' \frac{\partial W^{(I,1)}}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{33}^{(II,1)} = A_{11}^{II} \frac{\partial W^{(II,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{II} \frac{\partial U^{(II,0)}}{\partial \xi} - A_{13}^{II} \frac{\partial V^{(II,0)}}{\partial \eta}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(I,1)}}{\partial \zeta} &= f_1 \sqrt{A_{11}^I a_{55}^I} a_1^I \Omega_* \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\cos a_1^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_1^I \Omega_* \zeta_1} \\ \frac{\partial V^{(I,1)}}{\partial \zeta} &= f_2 \sqrt{A_{11}^I a_{44}^I} a_2^I \Omega_* \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\cos a_2^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_2^I \Omega_* \zeta_1} \\ \frac{\partial W^{(I,1)}}{\partial \zeta} &= a_3^I \Omega_* \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\cos a_3^I \Omega_* (\zeta - \zeta_1)}{\cos a_3^I \Omega_* \zeta_1}, \quad \frac{\partial U^{(II,0)}}{\partial \xi} = d_1 \frac{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} \\ \frac{\partial V^{(II,0)}}{\partial \eta} &= d_4 \frac{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2}, \quad \frac{\partial U^{(II,1)}}{\partial \zeta} = f_1 a_1^{II} \Omega_* \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}^I a_{55}^I \rho_I}{\rho_{II}}} \frac{\cos a_1^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2)}{\cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2} \\ \frac{\partial V^{(II,1)}}{\partial \zeta} &= f_2 a_2^{II} \Omega_* \sqrt{\frac{A_{11}^I a_{44}^I \rho_I}{\rho_{II}}} \frac{F^{(1)}}{\nabla} \frac{\cos a_2^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2)}{\cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2} \quad (4.9) \\ \frac{\partial W^{(II,1)}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W^{(II,1)}}{\partial \zeta} \left[ \left( \left( \frac{F^{(1)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}^I \rho_I}{A_{11}^{II} \rho_{II}}} - \frac{b_{33}^{(II,1)}(\zeta=0)}{\Omega_* \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}}} \right) \sin a_3^{II} \Omega_* (\zeta + \zeta_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W_\tau^{(II,1)}(\zeta = -\zeta_2) \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta \right) \frac{1}{\cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2} + W_\tau^{(II,1)}(\xi, \eta, \zeta) \right] \end{aligned}$$

При  $s = 2$  получим:

$$\begin{aligned} R_U^{(k,2)} &= 0, \quad R_V^{(k,2)} = 0, \quad R_W^{(k,2)} = 0 \\ \frac{\partial^2 U^{(k,2)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,2)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V^{(k,2)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho_k \Omega_*^2 V^{(k,2)} = 0 \\ A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{(k,2)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k \Omega_*^2 W^{(k,2)} &= 0, \quad U_\tau^{(k,2)} = V_\tau^{(k,2)} = W_\tau^{(k,2)} = 0 \\ b_{13}^{(k,2)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left[ \frac{\partial U_\tau^{(k,2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,1)}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad b_{23}^{(k,2)} = \frac{1}{a_{44}^k} \left[ \frac{\partial V_\tau^{(k,2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,1)}}{\partial \eta} \right] = 0 \\ b_{33}^{(k,2)} &= A_{11}^k \frac{\partial W_\tau^{(k,2)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{(k,1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{(k,1)}}{\partial \eta} = 0, \quad k = I, II \\ F^{(2)} &= \left( b_{33}^{(II,2)}(\zeta=0) - b_{33}^{(I,2)}(\zeta=0) \right) \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 = 0 \quad (4.10) \\ C_1^{(I,2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\Omega_*} \left( f_1 b_{33}^{(I,2)}(\zeta=0) - b_{13}^{(I,2)}(\zeta=0) + f_1 A_{11}^I a_3^I \Omega_* \frac{F^{(2)}}{\nabla} \right) \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho_I}} = 0 \\ C_1^{(II,2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\Omega_*} \left( \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} C_1^{(I,2)} + b_{13}^{(I,2)}(\zeta=0) - b_{13}^{(II,2)}(\zeta=0) \right) \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho_{II}}} = 0 \end{aligned}$$

$$C_3^{(I,2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho_I}} \left( f_2 b_{33}^{(I,2)}(\zeta = 0) - b_{23}^{(I,2)}(\zeta = 0) \right) + f_2 \sqrt{A_{11}^I a_{44}^I} \frac{F^{(2)}}{\nabla} = 0$$

$$C_3^{(II,2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^{II}}{\rho_{II}}} \left( b_{23}^{(I,2)}(\zeta = 0) - b_{23}^{(II,2)}(\zeta = 0) \right) + \sqrt{\frac{a_{44}^{II} \rho_I}{\rho_{II} a_{44}^I}} C_3^{(I,2)} = 0$$

$$C_5^{(I,2)}(\xi, \eta) = \frac{F^{(2)}}{\nabla} = 0$$

$$C_5^{(II,2)}(\xi, \eta) = \frac{F^{(2)}}{\nabla} \sqrt{\frac{A_{11}^I \rho_I}{A_{11}^{II} \rho_{II}}} - \frac{b_{33}^{(II,2)}(\zeta = 0) + b_{33}^{(I,2)}(\zeta = 0)}{\Omega_* \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}}} = 0$$

$$U^{(I,2)} = 0, V^{(I,2)} = 0, W^{(I,2)} = 0, U^{(II,2)} = 0, V^{(II,2)} = 0, W^{(II,2)} = 0 \quad (4.11)$$

при  $s > 1$   $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)} = 0$ ;  $\sigma_{ij}^{(k,s)} = 0$ ;  $k = I, II$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ , поэтому

приближению  $s = 1$  соответствует точное решение:

$$u_x^k = lU^{(k,0)} + hU^{(k,1)}; (u_x^k, u_y^k, u_z^k; V, W); k = I, II \quad (4.12)$$

Как следует из формул (4.7) - (4.10), начиная с приближения  $s = 1$ , ощущается влияние переменности сообщаемых тангенциальных перемещений на первый слой. Однако это в практических приложениях, как правило, мало.

The author expresses his gratitude to NFSAT, grant Ref. GRSP 05/06, which made this investigation possible.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414 с.
2. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых, балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468 с.
3. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления, прочности и устойчивости систем. Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
4. Агаловян Л. А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
5. Агаловян Л. А., Погосян А. М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т.58 №3. С. 36-47.
6. Погосян А. М. Асимптотика вынужденных колебаний двухслойной ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче при кулоновом трении между слоями. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. V Международная конференция 1-7 октября, Горис, 2005г. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. С. 287-296.

7. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2002. С. 9-19.

Институт механики  
НАН РА

Поступила в редакцию  
12.01.2007

УДК 539.3

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ**

**Эшматов Б. Х.**

**Ключевые слова:** динамическая устойчивость, ортотропный, вязкоупругий

**Key words:** dynamic stability, orthotropic, viscoelastic

**B. Kh. Eshmatov**

**Dynamical Stability of Viscoelastic Orthotropic Cylindrical Panels**

The problem of dynamic stability of viscoelastic orthotropic cylindrical panel is considered by different theories. A behavior of cylindrical panel by different geometrical and physical parameters in the case of influence of fast-increasing compressive dynamic loads is investigated.

**Բ. Խ. Էշմատով**

**Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ գլանային պանելների դինամիկ կայունությունը**

Դիտարկված է առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ գլանային պանելների դինամիկ կայունության խնդիրը տարբեր տեսություններով: Ուսումնասիրված է գլանային պանելի վարքը աճող դինամիկ սեղմող բեռնավորման դեպքում, տարբեր երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի համար:

Рассматривается задача о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели по различным теориям. Изучено поведение цилиндрической панели при различных геометрических и физических параметрах в случае воздействия на неё быстро возрастающих сжимающих динамических нагрузок.

Одной из особенностей развития современной инженерной деятельности человека является все более возрастающая сложность создающейся техники и технологии её изготовления, а также использование при создании инженерных конструкций новых материалов – как правило ортотропных – с заданным комплексом физико-механических свойств. Одной из важных разновидностей ортотропных материалов, находящихся за последние годы все большее применение, являются композиционные материалы. Применение таких материалов в инженерных конструкциях не только существенно улучшает их эксплуатационные характеристики, но и в ряде случаев позволяет создавать конструкции, нереализуемые в рамках традиционных материалов.

Известно, что конструкции из композиционных материалов в поперечном направлении обладают существенно более слабыми прочностными свойствами, чем в продольных. Поэтому при оптимальном проектировании неизбежно возникает вопрос учета ортотропных свойств материала конструкции [1-4].

Кроме этого, как показывают многочисленные экспериментальные и фундаментальные исследования, большинство композиционных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [5-7].

Прочность конструкций из современных композиционных материалов в значительной степени определяется деформациями поперечного сдвига. Классическая теория оболочек этими эффектами пренебрегает, что делает актуальным развитие общей теории оболочек. Основная идея заключается в

представлении перемещений или напряжений в оболочке рядами; различные подходы отличаются друг от друга видом этих разложений. Однако наибольшее распространение в практике получили методы, основанные на принятии некоторых гипотез относительно распределения перемещений или напряжения по толщине. Наряду с классической гипотезой Кирхгофа-Лява [8-10] получила распространение модель Тимошенко [1,2,11], согласно которой при исследовании процессов, происходящих в оболочках, необходимо учитывать и поперечные сдвиги. Отметим также, что использование модели Кирхгофа-Лява хотя и позволяет получить достаточно точные решения ряда практических задач, однако в большинстве случаев, они являются недостаточно полными [8]. Это в первую очередь относится к вязкоупругим оболочкам из композиционных материалов, имеющих анизотропную структуру [12-17].

Для начала построим математическую модель задачи о динамической устойчивости цилиндрической панели, изготовленной из материала, обладающего вязкоупругими ортотропными свойствами в геометрически нелинейной постановке по классической теории Кирхгофа-Лява. В этом случае физическую зависимость между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  примем в виде [12,17]:

$$\sigma_x = B_{11}(1 - R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1 - R_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \quad \tau_{xy} = 2B(1 - R^*)\gamma_{xy} \quad (1.1)$$

где  $R^*, R_{ij}^*$  – интегральные операторы с ядрами релаксации соответственно  $R(t)$  и  $R_{ij}(t)$ :

$$R^* \varphi = \int_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad R_{ij}^* \varphi = \int_0^t R_{ij}(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad i, j = 1, 2$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}, \quad B = \frac{G}{2}$$

$E_1, E_2$  – модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона; здесь и в дальнейшем символ  $(x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$  указывает, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов. Связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  и перемещениями  $u, v, w$  по направлениям  $x, y, z$  с учетом начальных неуровненностей примем в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}(w - w_0) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1.2)$$

где  $w_0 = w_0(x, y)$  – начальный прогиб,  $R$  – радиус кривизны срединной поверхности панели.

Изгибающие  $M_x, M_y$  и крутящие моменты  $H$ , приходящиеся на единицу длины граней элемента, с учетом (1.1) имеют вид [14-16]:

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left[ B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right], \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$$

$$H = -\frac{Bh^3}{3} (1-R^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) и (1.3) в уравнения движения элемента панели:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{q}{h} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma_y}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

получим систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-R_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{h^2}{12} \left\{ B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} + [8B(1-R^*) + B_{12}(1-R_{12}^*) + B_{21}(1-R_{21}^*)] \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right.$$

$$+ B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4} \left. \right\} - \frac{1}{R} [B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} [B_{11}(1-R_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} [B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x] + 2B \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \quad (1.5)$$

$$- \frac{q}{h} - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  определяются из соотношений (1.2).

Математические модели, полученные с помощью системы (1.5) с соответствующими граничными и начальными условиями, одновременно учитывают вязкоупругие свойства, а также ортотропность материала панели.

Для материалов с низкой сдвиговой жесткостью и прочностью, какими являются композиционные материалы, имеющие анизотропную структуру, необходимо применение уточненных теорий оболочек (без привлечения гипотезы Кирхгофа-Лява). В связи с этим возникает необходимость определения предела применимости гипотезы Кирхгофа-Лява при решении задач о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели в геометрически нелинейной постановке. Для этого представим математическую модель данной задачи по обобщенной теории Тимошенко, учитывающая деформацию сдвига и инерцию вращения [1,2]. В этом случае физические соотношения между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  выражаются соотношениями:

$$\sigma_x = B_{11}(1-R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = 2B(1-R^*)\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2B_{13}(1-R_{13}^*)\gamma_{xz}, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$$

где  $B_{ij}, B$  – упругие постоянные,  $R_{ij}^*, R^*$  – интегральные операторы с ядрами релаксации  $R_{ij}(t), R(t), i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ .

Связь между деформациями  $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  и угловыми перемещениями  $\psi_x, \psi_y$  примем в виде:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad (x \leftrightarrow y), \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  определяются из соотношений (1.2).

С учетом (1.6) и (1.7) изгибающие, крутящие моменты  $M_x, M_y, H$  и поперечные силы  $Q_x, Q_y$  имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{B_{11} h^3}{12} (1-R_{11}^*) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{B_{12} h^3}{12} (1-R_{12}^*) \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \\ H &= \frac{B h^3}{6} (1-R^*) \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= 2K^2 h B_{13} (1-R_{13}^*) \left( \frac{\partial(w-w_0)}{\partial x} + \psi_x \right), \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где коэффициент  $K$  определяется из [1,2].

Подставляя (1.6) и (1.8) в систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_y}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{q}{h} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, \quad (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

относительно перемещений  $u, v$ , прогиба  $w$  и угловых перемещений  $\psi_x, \psi_y$ , получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11}(1-R_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-R_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ B_{22}(1-R_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-R_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-R^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ -2K^2 \left[ B_{13}(1-R_{13}^*) \left( \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + B_{23}(1-R_{23}^*) \left( \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right] - \\ - \frac{1}{R} \left[ B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left[ B_{11}(1-R_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*) \varepsilon_y \right] + 2B \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \left[ B_{22}(1-R_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-R_{21}^*) \varepsilon_x \right] + 2B \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \gamma_{xy} \right\} - \frac{q}{h} - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{11}h^2}{12}(1-R_{11}^*)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2} + \frac{B_{12}h^2}{12}(1-R_{12}^*)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y} + \frac{Bh^2}{6}(1-R^*)\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right) - \\ & - 2K^2B_{13}(1-R_{13}^*)\left(\frac{\partial(w-w_0)}{\partial x} + \psi_x\right) - \frac{\rho h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (x \leftrightarrow y), \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Математические модели, полученные с помощью системы уравнений (1.10) с соответствующими граничными и начальными условиями, одновременно учитывают вязкоупругие свойства, ортотропность материала панели, а также деформацию сдвига и инерцию вращения.

Здесь надо отметить, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке, в системе интегро-дифференциальных уравнений, участвует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами вязкости, то в ортотропной постановке по гипотезе Кирхгофа-Лява принимает участие уже 5 различных ядер с 15 реологическими параметрами. В системе же уравнений, описывающих процесс по теории Тимошенко, в ортотропной постановке участвуют 7 разных ядер с 21 различными реологическими параметрами, что приводит к громоздким вычислениям.

Практическое использование нелинейной теории вязкоупругих систем возможно только при конкретном задании весовых функций, что соответствует выбору ядра релаксации. Выбор должен соответствовать наилучшему согласию с экспериментом, накладывающим существенные ограничения на аналитические выражения ядер. Вместе с этим эти выражения должны иметь удобную для анализа математическую форму.

Поэтому приходится делать необходимые обобщения, вводя более сложные зависимости. Часто такое обобщение рассматривается на основе слабо сингулярных функций, введение которых связано со следующими обстоятельствами.

Статические исследования вязкоупругих материалов на ползучесть и релаксацию свидетельствуют о чрезвычайно большой интенсивности релаксационных процессов в начальной стадии испытаний. При этом скорости процессов оказываются настолько большими, что их непосредственное измерение в начальный момент оказывается невозможным. Поэтому сами процессы приходится рассматривать как динамические и условно считать их скорости равными бесконечности [5,17].

Этот факт можно описать при помощи функций, обладающих интегрируемой особенностью абелевского типа. Эти функции, называемые слабо сингулярными, обеспечивают конечные деформации и напряжения в отличие от сильно сингулярных функций, которые и для них приводят к бесконечно большим значениям. Такие – слабосингулярные функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное число параметров. К этим ядрам относятся ядра, предложенные Работновым [5], Ржаницыным [18], Колтуновым [17] и другими.

В дальнейшем при расчете динамических задач воспользуемся простейшим и в то же время, достаточно общим слабосингулярным ядром Колтунова-Ржаницына с тремя реологическими параметрами  $(A, \beta \text{ и } \alpha)$ , вида [17]:

$$R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.11)$$

Рассмотрим задачу о динамической устойчивости вязкоупругой полой круговой цилиндрической панели со сторонами опорного пункта  $a$  и  $b$ , постоянной толщины  $h$  и радиусом срединной поверхности  $R$ , изготовленной из ортотропного материала, подвергающейся динамическому сжатию вдоль стороны  $a$  силой  $P(t)=vt$  ( $v$  – скорость нагружения). В этом случае математическая модель задачи описывается системой уравнений (1.5).

Принимая, что края панели шарнирно оперты и что они смещаются свободно вдоль дуги и вдоль образующей и при этом кромки панели в срединной поверхности остаются прямолинейными, выражения для прогибов  $w, w_0$  и перемещений  $u, v$  на основе многочленной аппроксимации выберем в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в систему уравнений (1.5) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина, с учетом безразмерных величин:

$$\begin{aligned} \frac{w_{kl}}{h}, \frac{w_{0kl}}{h}, \frac{u_{kl}}{h}, \frac{v_{kl}}{h}, P^* &= \frac{P}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^2, \quad q^* = \frac{q}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^4, \quad t^* = \frac{P}{P_{sp}} = \frac{vt}{P_{sp}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{sp}^*} \\ S &= P_{sp}^* \left( \frac{\pi c \sqrt{E_1 E_2} h^3}{vb^4} \right)^2, \quad P_{sp}^* = \frac{P_{sp}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{b}{h} \right)^2 = \frac{\gamma}{12\pi^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad \frac{\sqrt{S}}{\omega} R(t), \quad \frac{\sqrt{S}}{\omega} R_j(t), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{\sqrt{E_1 E_2} / \rho}$ ;  $\omega = \sqrt{\pi^2 \sqrt{E_1 E_2} h^2 P_{sp}^* / (\rho b^4)}$  и сохранением при этом прежних обозначений, относительно безразмерных  $u_{kl}, v_{kl}$  и  $w_{kl}$ , получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \ddot{u}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \right] u_{kl} = \\ = - \frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} \left[ \Delta \mu_2 (1 - R_{12}^*) + g (1 - \mu_1 \mu_2) (1 - R^*) \right] v_{kl} - \frac{12\pi \Delta \mu_2 \beta \delta}{\lambda \gamma} k (1 - R_{12}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\ + \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M n i^2 \mu_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{11}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ + \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{12}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} + n j^2 \mu_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{v}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \right] v_{kl} = \\
& = - \frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} \left[ \mu_1 (1 - R_{21}^*) + \Delta g (1 - \mu_1 \mu_2) (1 - R^*) \right] u_{kl} - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m_j^2 \beta_{nik} \mu_{mjl} (1 - R_{22}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta \mu_1}{\Delta \lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} (1 - R_{21}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} + n^2 j \beta_{nik} \gamma_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \\
& \frac{1}{S} \ddot{w}_{kl} - \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 t w_{kl} + \left[ \frac{\Delta \pi^4 k^4}{\lambda^4 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{4\pi^4 g k^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) + \frac{\Delta \pi^4 \mu_2 k^2 l^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{12}^*) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi^4 \mu_1 k^2 l^2}{\Delta \lambda^2 \gamma} (1 - R_{21}^*) + \frac{\pi^4 l^4}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\beta^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) \right] (w_{kl} - w_{0kl}) = \\
& = \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} a_{nmijkl} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} c_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \mu_1 \delta}{\lambda \Delta \gamma} f_{nmijkl} (1 - R_{21}^*) \right] u_{ij} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda^2 \gamma} b_{nmijkl} (1 - R_{12}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} d_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} e_{nmijkl} (1 - R_{22}^*) \right] v_{ij} - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left[ \frac{3\Delta \pi^4}{8\lambda^4 \gamma} h_{nmijklrs} (1 - R_{11}^*) - \frac{3\Delta \pi^4 \mu_2}{8\lambda^2 \gamma} p_{nmijklrs} (1 - R_{12}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\pi^4 g (1 - \mu_1 \mu_2)}{4\lambda^2 \gamma} g_{nmijklrs} (1 - R^*) + \frac{3\pi^4}{8\Delta \gamma} q_{nmijklrs} (1 - R_{22}^*) - \frac{3\pi^4 \mu_1}{8\Delta \lambda^2 \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\Delta \mu_2 \beta}{\lambda^2 \gamma} (n i \alpha_{nik} \beta_{mjl} + n^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{12}^*) + \frac{12\beta}{\Delta \gamma} (m j \beta_{nik} \alpha_{mjl} + m^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{22}^*) \right] \times \\
& \quad \times (w_{ij} - w_{0ij}) - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) v_{kl} - \frac{12\pi \mu_1 \beta \delta}{\Delta \lambda \gamma} k (1 - R_{21}^*) u_{kl} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ \frac{6\beta}{\Delta \gamma} m j \beta_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{22}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{6\mu_1 \beta}{\Delta \lambda^2 \gamma} n i \alpha_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \frac{192\alpha_{kl} (1 - \mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \gamma kl} q, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (1.13)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \delta = \frac{b}{h}; g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}; \lambda = \frac{a}{b}; \gamma = 2\pi^4 \eta + 3\theta^2 (1 - \mu_1 \mu_2); \eta = 1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g$$

$\theta = b^2 / (Rh)$ ; остальные коэффициенты этой системы приведены в [14-16].

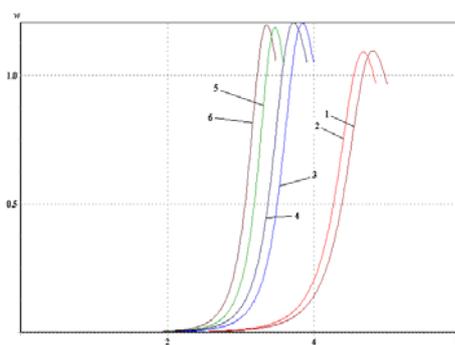
Систему (1.13) будем решать численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [19]. Этот метод позволяет решать системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами типа Колтунова-Ржаницына, Абеля и Работнова. Она обеспечивает достаточно высокую точность полученных результатов, универсален, дает возможность решать широкий класс динамических задач теории вязкоупругости и экономичен с точки зрения компьютерного времени [19]. Далее в расчетах, в качестве ядер релаксации будем использовать слабосингулярные ядра Колтунова-Ржаницына вида (1.11).

Здесь, аналогично [8], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине панели. В качестве

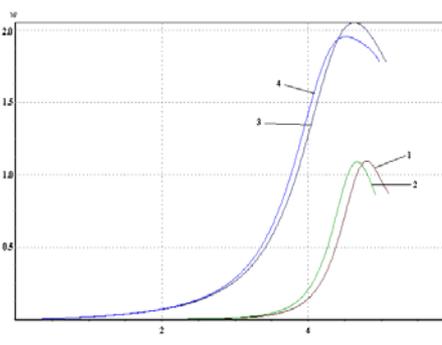
параметра, определяющего устойчивость панели, принят  $K_d$  – коэффициент динамичности, равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

Фиг.1 относится к случаю квадратной по форме цилиндрической панели ( $\nu=1$ ) с начальной стрелой  $w_0 = 10^{-4}$ . Считаем, что поперечная нагрузка отсутствует, т.е.  $q=0$ . Кривые 1,2 ( $S=1$ ), 3,4 ( $S=3$ ) и 5,6 ( $S=5$ ), изображенные на фиг.1, соответствуют упругому и вязкоупругому случаям, соответственно. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр  $t$ , равный отношению переменной величины сжимающей силы к статической нагрузке, а по оси ординат – безразмерная стрела прогиба  $w$ . Коэффициент динамичности  $K_d$  оказывается в упругом и вязкоупругом случаях при  $S=1$ , соответственно равным  $K_d=4.7$ ;  $K_d=4.5$ ; при  $S=3$  –  $K_d=3.75$ ;  $K_d=3.55$ , а при  $S=5$   $K_d=3.35$ ;  $K_d=3.2$ . Полученный результат показывает, что учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению критической нагрузки. Напомним, что параметр  $S$  обратно пропорционален  $\nu$ . Из графика видно, что с возрастанием скорости нагружения  $\nu$  значения коэффициента  $K_d$  увеличиваются.

На фиг.2 приведено исследование влияния дополнительной статической поперечной нагрузки на поведение квадратной по форме панели. Соответствующее значение  $K_d$  при  $q=1$  составляет 3.8 в упругом случае (кривая 3) и 3.7 в вязкоупругом (кривая 4), между тем, как при  $q=0$ , оно равно 4.7 (кривая 1) и 4.5 (кривая 2) соответственно.



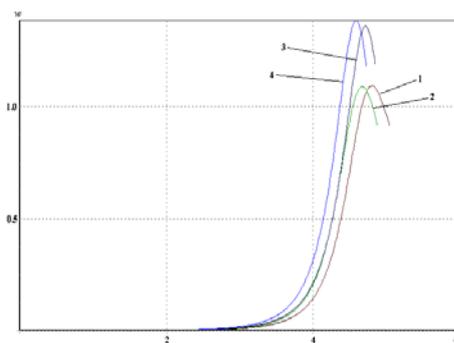
Фиг.1



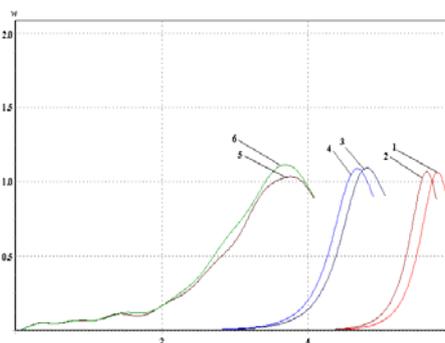
Фиг.2

На фиг.3 приведены графики кривых  $w$  для случаев вязкоупругой квадратной и удлиненной по форме панели. Результаты вычислений показывают, что при  $\nu=2$  соответствующие значения  $K_d$  равны в упругом случае 4.45 (кривая 3) и 4.3 в вязкоупругом (кривая 4). Сравнивая эти числа при  $\nu=1$  и  $\nu=2$ , приходим к выводу, что найденные для квадратной по форме панели значения  $K_d$  в вязкоупругом случае можно с небольшой погрешностью распространить на прямоугольные по форме панели иной конфигурации.

Исследовалось влияние начального прогиба  $w_0$  на поведение цилиндрической панели. На фиг.4 приведены графики кривых  $w$  для различных  $w_0=10^{-6}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-2}$ . При  $w_0=10^{-6}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-2}$  значения  $K_d$  в вязкоупругом случае равны 5.58; 4.5; 3.35 (кривые 2,4,6). Эти значения в упругом случае соответственно равны 5.74; 4.7; 3.58 (кривые 1,3,5).

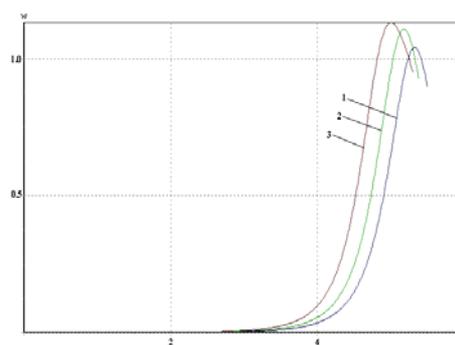


Фиг.3



Фиг.4

Изучено влияние ортотропности на процесс устойчивости панели. Как видно из фиг. 5, увеличение параметра  $\Delta$ , определяющего степень анизотропии (кривая 1 –  $\Delta=2.5$ ; кривая 2 –  $\Delta=2$  и кривая 3 –  $\Delta=1.5$ ), приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов, соответственно увеличению критического значения  $K_d$ . Аналогичные результаты наблюдаются в экспериментах, проведенных с участием конструкций из композитных материалов [8]. Что еще раз подтверждает обоснованность выбранного метода и соответственно полученных результатов.



Фиг.5

Изучено также влияние параметра  $\nu$  на поведение цилиндрической панели. Полученные результаты показывают, что как и в случае колебания, параметр  $\nu$  (в интервале изменения  $0 < \nu < 1$ ) не оказывает существенного влияния на изменение критического времени и критической нагрузки.

Рассмотрим теперь предыдущую задачу с учетом деформации сдвига и инерции вращения по обобщенной теории Тимошенко. При принятых предположениях математическая модель этой задачи описывается системой уравнений (1.10).

В случае шарнирного опирания панели по краям, прогибы  $w, w_0$  и перемещения  $u$  и  $v$  представим в виде (1.12), а угловые перемещения  $\psi_x, \psi_y$  – в виде:

$$\begin{aligned} \psi_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{xnm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{ynm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.12) и (1.14) в систему уравнений (1.10) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина с введением соответствующих безразмерных величин, приведенных выше, получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

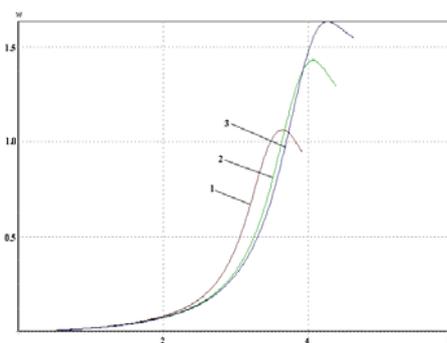
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{u}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \right] u_{kl} = \\
& = -\frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} \left[ \Delta \mu_2 (1 - R_{12}^*) + g(1 - \mu_1 \mu_2)(1 - R^*) \right] v_{kl} - \frac{12\pi \Delta \mu_2 \beta \delta}{\lambda \gamma} k (1 - R_{12}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M ni^2 \mu_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{11}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M mij \gamma_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{12}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (mij \gamma_{nik} \alpha_{mjl} + nj^2 \mu_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \\
& \quad \frac{1}{S} \ddot{v}_{kl} + \left[ \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \right] v_{kl} = \\
& = -\frac{12\pi^2 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} \left[ \mu_1 (1 - R_{21}^*) + \Delta g(1 - \mu_1 \mu_2)(1 - R^*) \right] u_{kl} - \frac{12\pi \beta \delta l (1 - R_{22}^*)}{\Delta \gamma} (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M mj^2 \beta_{nik} \mu_{mjl} (1 - R_{22}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi \delta \mu_1}{\Delta \lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} (1 - R_{21}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\
& \quad + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (nij \alpha_{nik} \gamma_{mjl} + n^2 j \beta_{nik} \gamma_{mjl}) (1 - R^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \\
& \quad \frac{1}{S} \ddot{w}_{kl} - \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 t w_{kl} + \frac{12\pi K^2 \delta^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} \left[ g_{13} \pi k^2 (1 - R_{13}^*) w_{kl} + g_{13} \lambda \delta k (1 - R_{13}^*) \psi_{xkl} + \right. \\
& \quad \left. + g_{23} \pi \lambda^2 l^2 (1 - R_{23}^*) w_{kl} + g_{23} \lambda^2 \delta l (1 - R_{23}^*) \psi_{ykl} + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\Delta \pi K^2 (1 - \mu_1 \mu_2) \delta^2} (1 - R_{22}^*) (w_{kl} - w_{0kl}) \right] = \\
& = \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta}{\lambda^3 \gamma} a_{nmijkl} (1 - R_{11}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} c_{nmijkl} (1 - R^*) + \frac{12\pi \mu_1 \delta}{\lambda \Delta \gamma} f_{nmijkl} (1 - R_{21}^*) \right] u_{ij} + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\pi \Delta \delta \mu_2}{\lambda^2 \gamma} b_{nmijkl} (1 - R_{12}^*) + \frac{12\pi g \delta (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} d_{nmijkl} (1 - R^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{12\pi \delta}{\Delta \gamma} e_{nmijkl} (1 - R_{22}^*) \right] v_{ij} - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left[ \frac{3\Delta \pi^4}{8\lambda^4 \gamma} h_{nmijklrs} (1 - R_{11}^*) - \frac{3\Delta \pi^4 \mu_2}{8\lambda^2 \gamma} p_{nmijklrs} (1 - R_{12}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\pi^4 g (1 - \mu_1 \mu_2)}{4\lambda^2 \gamma} q_{nmijklrs} (1 - R^*) + \frac{3\pi^4}{8\Delta \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{22}^*) - \frac{3\pi^4 \mu_1}{8\Delta \lambda^2 \gamma} r_{nmijklrs} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) + \\
& \quad + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ \frac{12\Delta \mu_2 \beta}{\lambda^2 \gamma} (ni \alpha_{nik} \beta_{mjl} + n^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{12}^*) + \frac{12\beta}{\Delta \gamma} (mj \beta_{nik} \alpha_{mjl} + m^2 \beta_{nik} \beta_{mjl}) (1 - R_{22}^*) \right] \times \\
& \quad \times (w_{ij} - w_{0ij}) - \frac{12\pi \beta \delta}{\Delta \gamma} l (1 - R_{22}^*) v_{kl} - \frac{12\pi \mu_1 \beta \delta}{\Delta \lambda \gamma} k (1 - R_{21}^*) u_{kl} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ \frac{6\beta}{\Delta \gamma} mj \beta_{nik} \alpha_{mjl} (1 - R_{22}^*) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{6\mu_1 \beta}{\Delta \lambda^2 \gamma} ni \alpha_{nik} \beta_{mjl} (1 - R_{21}^*) \right] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \frac{192\alpha_{kl} (1 - \mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \gamma kl} q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \ddot{\psi}_{xkl} + \frac{12\pi^2 \Delta \delta^2 k^2}{\lambda^2 \gamma} (1 - R_{11}^*) \psi_{xkl} + \frac{12\pi^2 \Delta \mu_2 \delta^2 kl}{\lambda \gamma} (1 - R_{12}^*) \psi_{ykl} + \frac{12\pi^2 g \delta^2 l^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R^*) \psi_{xkl} + \\
& + \frac{12\pi^2 g \delta^2 kl (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R^*) \psi_{ykl} + \frac{144\pi K^2 g_{13} \delta^3 k (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R_{13}^*) w_{kl} + \\
& + \frac{144K^2 g_{13} \delta^4 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{13}^*) \psi_{xkl} = 0 \\
& \frac{1}{S} \ddot{\psi}_{ykl} + \frac{12\pi^2 \delta^2 l^2}{\Delta \gamma} (1 - R_{22}^*) \psi_{ykl} + \frac{12\pi^2 \mu_1 \delta^2 kl}{\Delta \lambda \gamma} (1 - R_{21}^*) \psi_{xkl} + \frac{12\pi^2 g \delta^2 kl (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda \gamma} (1 - R^*) \psi_{xkl} + \\
& + \frac{12\pi^2 g \delta^2 k^2 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\lambda^2 \gamma} (1 - R^*) \psi_{ykl} + \frac{144\pi K^2 g_{23} \delta^3 l (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{23}^*) w_{kl} + \\
& + \frac{144K^2 g_{23} \delta^4 (1 - \mu_1 \mu_2)}{\gamma} (1 - R_{23}^*) \psi_{ykl} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{1.15}$$

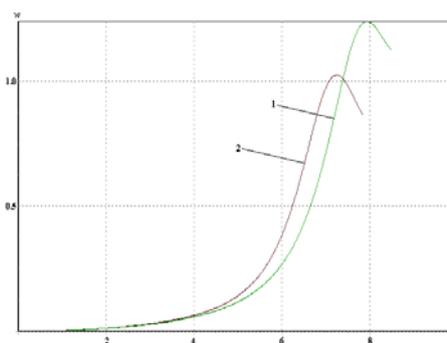
На фиг.6-8 приведены результаты расчетов деформирования вязкоупругой ортотропной цилиндрической панели с учетом деформации сдвига и инерции вращения.

На фиг.6 приведен график функции  $w$  вязкоупругой панели для различных значений геометрического параметра  $\delta$  (соотношение между шириной и толщиной). При  $\delta=10, 15$  и  $20$  (кривые 1,2,3 соответственно) "критическое" значение  $K_d$  составляет соответственно 3.48; 3.68; 3.75. Заметим, что увеличение параметра  $\delta$  приводит к перемещению всех кривых на право в сторону больших значений  $t$ , следовательно к увеличению коэффициента динамичности.

На фиг.7 приведены графики сравнения результатов, полученных по гипотезе Кирхгофа-Лява (кривая 1) и теории Тимошенко (кривая 2). Как видно из фиг.7, в случае, когда задача рассматривается по гипотезе Кирхгофа-Лява, критическое значение коэффициента динамичности составляет 7.38, в то время как при решении той же задачи по теории Тимошенко критическое значение  $K_d$  составляет 7.1. Это ещё раз подтверждает о необходимости при решении таких типов задач применения теорий наиболее полно учитывающих реальные процессы, происходящие в конструкциях типа цилиндрических панелей. В данном случае таковым является обобщенная теория Тимошенко, которая наряду с обычными деформациями учитывает деформацию сдвига и инерцию вращения.



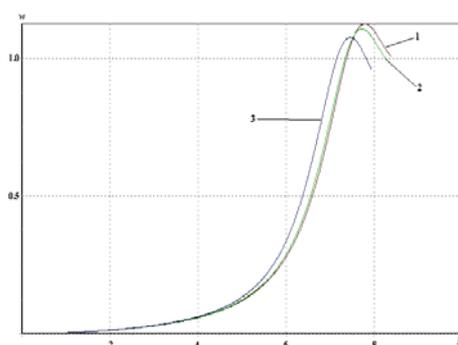
Фиг.6



Фиг.7

Также изучены влияния вязкоупругих свойств материала конструкции на поведение панели (фиг.8). Кривая 1 соответствует случаю, когда вязкоупругие

свойства материала не учитываются ( $A = A_{ij} = 0, i = 1,2; j = 1,2,3$  – упругий случай), кривая 2 – случаю (часто применяемому в работах многих авторов [12,13] при исследовании вязкоупругих ортотропных конструкций  $A = A_{13} = A_{23} = 0$ ), когда вязкоупругие свойства материала учитываются только по сдвиговым направлениям и кривая 3 – случаю, когда вязкоупругие свойства материала учитываются одинаково по всем направлениям ( $A = A_{ij} = 0.1, i = 1,2; j = 1,2,3$ ).



Фиг.8

Как видно из фиг. 8, результаты, полученные в упругом случае, почти совпадают с результатами, полученными в случае учета вязкоупругих свойств материала только по сдвиговым направлениям. Кроме этого, учет вязкоупругих свойств материала приводит к более раннему, интенсивному возрастанию прогибов соответственно уменьшению критических значений  $K_d$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1961. 384 с.
3. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек // Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат. наук. 1960. Т.13. №1. С.47-58.
4. Мовсисян Л.А. Об устойчивости анизотропной слоистой пластинки при ударе. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №2. С.47-55.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
7. КФигтенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
8. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.:

Физматгиз, 1963. 635 с.

10. Донелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
11. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1976. 214 с.
12. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивления жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1967. 398 с.
13. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 296 с.
14. Eshmatov.V.Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials // Third M.I.T. conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. June 14-17. 2005. Boston (USA).
15. Eshmatov.V.Kh. Mathematical modeling of a task about dynamical stability of viscoelastic orthotropic plates taking account deformation shift and inertia of rotation // The 2-nd International Conference on Cybernetics and Information Technologies, Systems and Applications: CITSA 2005. July 14-17. 2005. Orlando (Florida, USA).
16. Эшматов Б.Х. Динамическая устойчивость вязкоупругих пластин при быстровозрастающих сжимающих нагрузках // ПМТФ. 2006.Т.47. №2. С.165-175.
17. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.
18. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Изд-во литературы по строительству, 1968. 416 с.
19. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ.1987.Т.51. №5.С.867-871.

Ташкентский институт  
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию  
19.09.2005

УДК 539.3.

**ЩЕЛЕВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В  
ЭКРАНИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

**Мартirosян Э. В.**

**Ключевые слова:** сдвиговые, щелевые волны, магнитное поле, идеальный проводник.  
**Key words:** shifting, splitting waves, magnetic field, perfectly conductor.

**Է. Վ. Մարտիրոսյան**

**Ճեղքավոր մագնիսաառաձգական սահքի ալիքներ էկրանացված մագնիսական դաշտում**

Դիտարկվում են երկու կիսատարածություններ առաձգական իդեալ հաղորդիչ նյութերից որոնք անջատվում են իրարից վակուումի ճեղքով: Արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առաքայությունը, որը գործում է կիսատարածության եզրերին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցություն գրգռած էլեկտրամագնիսական դաշտի ու կիսատարածության և շերտի առաձգական տեղափոխությունների դաշտերի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բերում է ճեղքավոր մակերևույթային սահքի ալիքի առաջացմանը:

**E. V. Martirosyan**

**Splitting Magnetoelastic Shifting Waves in  
Screening Magnetic Field**

We consider a system of elastic perfectly conducting semi – space and straightforward layer which separated by vacuum split. There is external constant magnetic field acting in a plane that perpendicular to the boundary of semi – space. It shown that the interaction between indignant electromagnetic field and fields of elastic displacements of semi – space and split becomes to existence of splitting surface shifting wave.

Рассматриваются полупространство и прямолинейный слой из упругих идеально проводящих материалов, разделенных щелью вакуума. Наличие внешнего постоянного магнитного поля, действующего в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, обуславливает взаимодействие возмущенных электромагнитного поля и полей упругих перемещений полупространства и слоя. Показывается, что указанное взаимодействие приводит к появлению щелевой поверхностной сдвиговой волны.

1. Пусть имеются идеально проводящие полупространство и прямолинейный слой с различными упругими свойствами, разделенных щелью вакуума шириной  $2h$ . Прямоугольная декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость  $(x_1 0 x_3)$  находилась на расстоянии  $h$  между плоскостями, ограничивающими полупространство и слой, а ось  $0x_2$  была направлена по нормали к поверхности полупространства. В начальном невозмущенном состоянии на всю систему (полу-пространство-щель-слой) действует постоянное магнитное поле, вектор напряженности  $\vec{H}_0$  которого параллелен плоскости  $(x_1 0 x_2)$ :

$$\vec{H}_0 = H_{01} \vec{i} + H_{02} \vec{j}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}$  – орты осей  $x_1, x_2$ , соответственно; при этом на границе слоя, не смежной со щелью, предполагается наличие экрана поля. Задача состоит в изучении вопроса существования поверхностной сдвиговой волны для описанной слоистой системы.

Отметим, что в случае полупространств, разделенных щелью, щелевые магнитоупругие сдвиговые волны для поперечного (когда  $H_{01} = 0$ ) и косоуго (когда  $H_{01} \neq 0$ ) магнитных полей исследовались, соответственно, в [1],[2]. Другие задачи магнитоупругих поверхностных волн для косоуго магнитного поля изучались в недавних работах [3],[4].

В случае антиплоской упругой деформации  $u_j = v_j = 0, w_j = w_j(x_1, x_2, t)$ ,  $j = 1, 2$ , а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты  $x_3$ , линеаризованные уравнения магнитоупругости [5] имеют вид:

$$(C_{ij}^2 + V_{1j}^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1^2} + (C_{ij}^2 + V_{2j}^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} + 2V_{1j}V_{2j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

где

$$V_{kj}^2 = \frac{\mu_j}{4\pi\rho_j} H_{0k}^2, \quad k = 1, 2,$$

$C_{ij}^2 = G_j/\rho_j$ ,  $G_j$  – модуль упругости,  $\rho_j$  – плотность среды,  $\mu_j$  – ее магнитная проницаемость. Здесь значения индекса  $j = 1, 2$  соответствуют полупространству  $x_2 > h$  и слою  $-s < x_2 < -h$  ( $s > h$ ).

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в щели  $|x_2| < h$  приводятся к виду

$$c^2 \Delta h_3 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \quad (2)$$

где  $e_1$  – компонента вектора напряженности возмущенного электрического поля ( $e_2 = e_3 = 0$ ),  $h_3$  – компонента вектора напряженности возмущенного магнитного поля ( $h_1 = h_2 = 0$ ),  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $c$  – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

Решения уравнений (1), (2) должны удовлетворять следующим граничным условиям: на плоскостях  $x_2 = \pm h$

$$\left( G_j + \frac{\mu_j}{4\pi} H_{02}^2 \right) \frac{\partial w_j}{\partial x_2} + \frac{\mu_j}{4\pi} H_{01} H_{02} \frac{\partial w_j}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3$$

$$\frac{\mu_j}{c} H_{02} \frac{\partial w_j}{\partial t} = e_1, \quad j = 1, 2$$

на плоскости  $x_2 = -s \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0 \quad (3)$

Первое из условий (3) означает, что на плоскостях  $x_2 = \pm h$  выполняются граничные условия типа свободной границы [5]–[7]. Второе из них обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности  $e_1$  возмущенного электрического поля при переходе через границы  $x_2 = \pm h$ . Третье условие означает наличие экрана поля на плоскости  $x_2 = -s$ . Отметим, что для идеального проводника условие экрана совпадает с граничным условием закрепленной границы.

Решения типа поверхностной волны должны удовлетворять также условию затухания:

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} w_1 = 0 \quad (4)$$

Таким образом, исследуемая задача сводится к решению уравнений (1), (2), удовлетворяющих условиям (3), (4).

2. Решения уравнений (1), (2) будем искать в виде гармонических волн вида  $g(x_2) \exp(i(\omega t - kx_1))$  с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , где  $g$  – достаточно гладкая неизвестная функция на оси. Нетрудно видеть, что решение первого уравнения из (1), удовлетворяющее условию затухания (4), имеет следующий вид:

$$w_1 = A \exp(-kp_1 x_2) \exp(i(\omega t - kx_1 + k\alpha_1 x_2)) \quad (5)$$

где  $A$  – произвольная постоянная и

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad p_1^2 = \frac{C_{11}^2 + V_{11}^2 - \eta}{C_{11}^2 + V_{21}^2} - \alpha_1^2, \quad p_1 > 0, \quad \alpha_1 = \frac{V_{11} V_{21}}{C_{11}^2 + V_{21}^2}$$

Согласно условию затухания (4) характеристика  $\eta$  квадрата фазовой скорости искомой волны должна удовлетворять условию:

$$0 < \eta < \eta_1 \quad (6)$$

где

$$\eta_1 = C_{11}^2 + V_{11}^2 - \alpha_1^2 (C_{11}^2 + V_{21}^2)$$

Аналогично, решения уравнений (2) имеют следующий вид:

$$h_3 = \exp(i(\omega t - kx_1)) \left( B \exp(-kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right)$$

$$e_1 = -\frac{ck}{i\omega} \sqrt{1 - \eta/c^2} \exp(i(\omega t - kx_1)) \left( B \exp(-kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right) \quad (7)$$

где  $B, C$  – произвольные постоянные.

Перейдем к решению второго из уравнений (1). Подставляя в него значение  $w_2 = g(x_2) \exp(i(\omega t - kx_1))$ , для неизвестной функции  $g$  получим уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$(C_{12}^2 + V_{22}^2) g''(x_2) - 2ikV_{12}V_{22} g'(x_2) - k^2 (C_{12}^2 + V_{12}^2 - \eta) g(x_2) = 0$$

Представляя функцию  $g$  в виде  $g(x_2) = \exp(k\lambda x_2)$ , для постоянной  $\lambda$  получим характеристическое уравнение

$$(C_{i2}^2 + V_{22}^2)\lambda^2 - 2iV_{12}V_{22}\lambda - (C_{i2}^2 + V_{12}^2 - \eta) = 0$$

Положим  $4D$  – дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D = (C_{i2}^2 + V_{22}^2)(C_{i2}^2 + V_{12}^2 - \eta) - V_{12}^2V_{22}^2 = (C_{i2}^2 + V_{22}^2)^2 p \quad (8)$$

где обозначено

$$p = \frac{C_{i2}^2 + V_{12}^2 - \eta}{C_{i2}^2 + V_{22}^2} - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \frac{V_{12}V_{22}}{C_{i2}^2 + V_{22}^2}$$

Если  $D \neq 0$ , то будем иметь два разных корня  $\lambda_1 = i\alpha_2 + \sqrt{p}$ ,  $\lambda_2 = i\alpha_2 - \sqrt{p}$  ( $\sqrt{p}$  – главная ветвь корня) и решение  $w_2$  будет следующего вида:

$$w_2 = \exp(i(\omega t - kx_1)) (E \exp(k\lambda_1 x_2) + F \exp(k\lambda_2 x_2)) \quad (9_1)$$

где  $E, F$  – произвольные постоянные. Если же  $D = 0$ , то характеристическое уравнение будет иметь один корень  $\lambda = i\alpha_2$  и решение  $w_2$  будет вида

$$w_2 = (E + Fx_2) \exp(i(\omega t - kx_1)) \exp(ki\alpha_2 x_2) \quad (9_2)$$

где  $E, F$  – произвольные постоянные.

Перейдем к нахождению дисперсионного уравнения исследуемой задачи. Отметим, что линейная функция  $p = p(\eta)$  убывает на оси и пересекает ее в точке  $\eta_2 = C_{i2}^2 + V_{12}^2 - \alpha_2^2 (C_{i2}^2 + V_{22}^2)$ , причем  $\eta_2 > 0$ . Поэтому возможны следующие два случая:  $\eta_1 \leq \eta_2$  или  $0 < \eta_2 < \eta_1$ .

Рассмотрим сперва первый случай, когда  $\eta_1 \leq \eta_2$ . В этом случае из (8) и убывания функции  $p$  имеем  $p > 0$  ( $D > 0$ ) при  $\eta \in (0, \eta_1)$ , так что решение  $w_2$  задается формулой (9<sub>1</sub>). Для нахождения произвольных постоянных  $A, B, C, E, F$  используем граничные условия (3). Подставляя из (5), (7), (9<sub>2</sub>) значения  $w_1, w_2, h_3, e_1$  в граничные условия (3), получим следующую линейную однородную систему из пяти уравнений относительно неизвестных  $A, B, C, E, F$ :

$$\begin{aligned} & \left( G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{02}^2 \right) k A (i\alpha_1 - p_1) \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) - \\ & - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{01} H_{02} A k i \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) = \\ & = \frac{1}{4\pi} H_{02} \left[ B \exp(-kh\sqrt{1-\eta/c^2}) + C \exp(kh\sqrt{1-\eta/c^2}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_1 \omega^2}{c^2 k} H_{02} A \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) = \\
& = \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[ B \exp(-kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \\
& \left( G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2 \right) k \left[ E(i\alpha_2 + \sqrt{p}) \exp(-kh(i\alpha_2 + \sqrt{p})) + \right. \\
& \left. + F(i\alpha_2 - \sqrt{p}) \exp(-kh(i\alpha_2 - \sqrt{p})) \right] - \\
& - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{01} H_{02} k i \left[ E \exp(-kh(i\alpha_2 + \sqrt{p})) + F \exp(-kh(i\alpha_2 - \sqrt{p})) \right] = \\
& = \frac{1}{4\pi} H_{02} \left[ B \exp(kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(-kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \\
& \frac{\mu_2 \omega^2}{c^2 k} H_{02} \left[ E \exp(-kh(i\alpha_2 + \sqrt{p})) + F \exp(-kh(i\alpha_2 - \sqrt{p})) \right] = \\
& = \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[ B \exp(kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(-kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \\
& E \exp(-ks(i\alpha_2 + \sqrt{p})) + F \exp(-ks(i\alpha_2 - \sqrt{p})) = 0 \quad . \\
& E \exp(-ks(i\alpha_2 + \sqrt{p})) + F \exp(-ks(i\alpha_2 - \sqrt{p})) = 0
\end{aligned}$$

Приравнявая к нулю детерминант полученной системы, находим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
0 = & - \frac{\mu_2 \omega^2 H_{02}^2}{4\pi d_2 c^2 k} \left[ \exp(k(s-h)\sqrt{p}) - \exp(-k(s-h)\sqrt{p}) \right] \times \\
& \times \left[ \left( \sqrt{1 - \eta/c^2} - d_1 \right) \exp(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) + \left( \sqrt{1 - \eta/c^2} + d_1 \right) \exp(-2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] + \\
& + \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[ \exp(k(s-h)\sqrt{p}) + \exp(-k(s-h)\sqrt{p}) \right] \times \\
& \times \left[ \left( \sqrt{1 - \eta/c^2} - d_1 \right) \exp(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \left( \sqrt{1 - \eta/c^2} + d_1 \right) \exp(-2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right]
\end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
d_1 = & \frac{\mu_1 \omega^2 H_{02}^2}{4\pi c^2 k^2 \left[ \left( G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{02}^2 \right) (p_1 - i\alpha_1) + \frac{\mu_1}{4\pi} i H_{01} H_{02} \right]} \quad (10) \\
d_2 = & k \left[ \left( G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2 \right) (\sqrt{p} + i\alpha_2) - \frac{\mu_2}{4\pi} i H_{01} H_{02} \right]
\end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
d_1 = & \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 \left[ (C_{i1}^2 + V_{21}^2) (p_1 - i\alpha_1) + i V_{11} V_{21} \right]} = \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 p_1 (C_{i1}^2 + V_{21}^2)} \quad (11) \\
d_2 = & k p_2 (C_{i2}^2 + V_{22}^2) \sqrt{p}
\end{aligned}$$

с учетом (10), (11) найдем окончательный вид дисперсионного уравнения ( $\eta_1 \leq \eta_2$ ):

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\eta V_{22}^2}{c^2 (C_{t2}^2 + V_{22}^2) \sqrt{p}} \left[ \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \times \\
& \times \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \left[ \operatorname{sh}(k(s-h)\sqrt{p}) + \left[ (1 - \eta/c^2) \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \operatorname{ch}(k(s-h)\sqrt{p}) \right] \quad (12)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда  $0 < \eta_2 < \eta_1$ . Здесь, если  $\eta \in [0, \eta_1]$ ,  $\eta \neq \eta_2$ , то из (8) и убывания функции  $p$  имеем  $D \neq 0$ . Следовательно, из приведенных выше рассуждений для первого случая получим, что дисперсионное уравнение имеет вид (12). Если же  $\eta = \eta_2$ , то согласно (8) имеем  $D = 0$ , поэтому решение  $w_2$  задается формулой (9<sub>2</sub>). Здесь применяя рассуждения, аналогичные приведенным в первом случае, получим, что дисперсионное уравнение получается из (12) в результате предельного перехода при  $\eta \rightarrow \eta_2$  ( $p \rightarrow 0$ ). Таким образом, в обоих рассмотренных выше возможных случаях  $\eta_1 \leq \eta_2$  или  $0 < \eta_2 < \eta_1$  дисперсионное уравнение исследуемой задачи задается уравнением (12), если при  $0 < \eta_2 < \eta_1$ ,  $\eta = \eta_2$  понимать дисперсионное уравнение в указанном предельном смысле.

Отметим, что предел дисперсионного уравнения (12) при  $s \rightarrow h$  ( $s > h$ ) совпадает с дисперсионным уравнением для поверхностной сдвиговой волны вдоль границы полупространства и прямолинейной щели из вакуума ([4], (2.2)).

Отметим также, что в уравнении (12) от продольной компоненты  $H_{01}$  вектора напряженности магнитного поля зависят только величины  $p, p_1$ . Поэтому рассмотрение частного поперечного поля, когда  $H_{01} = 0$ , не приводит к существенному упрощению этого уравнения.

В чисто упругом случае, когда отсутствует начальное ( $\vec{H}_0 = 0$ ) магнитное поле, имеем  $V_{21} = V_{22} = 0$ . Поэтому, (12) сводится к уравнению:

$$\operatorname{ch}(k(s-h)\sqrt{p}) = 0, \quad 0 < \eta < \eta_1 \quad (13)$$

где  $\eta_1, \eta_2 \leq c^2$ . Отметим, что это формальное уравнение (без учета неравенства  $0 < \eta < \eta_1$ ) есть дисперсионное уравнение системы из прямолинейного волновода ширины  $s-h$  из идеального проводника и примыкающей к ней прямолинейной щели ширины  $2h$  из вакуума ([8], стр. 218). Его корнями являются положительные числа  $\eta_n$ , где

$$p(\eta_n) = -\left[ \frac{\pi(2n+1)}{2k(s-h)} \right]^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

3. Полученное дисперсионное уравнение (12) позволяет сделать определенные выводы относительно сформулированного в начале работы вопроса о существо-

вании поверхностной сдвиговой магнитоупругой волны в системе полупространство-щель-слой.

Пусть сперва  $H_{02} = 0$ , т.е. вектор напряженности  $\vec{H}_0$  начального магнитного поля направлен вдоль оси  $x_1$ . Тогда  $V_{21} = V_{22} = 0$  и дисперсионное уравнение (12) сводится к уравнению (13). Корнями этого уравнения могут быть только те из чисел  $\eta_n$ , определяемые по (14), которые содержатся в интервале  $(0, \eta_1)$ . Так как они – фазовые скорости возможных сдвиговых волн требуемого типа – зависят от волнового числа  $k$ , то возможные в изучаемом случае сдвиговые волны будут дисперсионными волнами.

Пусть теперь  $H_{02} \neq 0 (V_{21} \neq 0, V_{22} \neq 0)$ . Предположим сперва, что  $\eta_1 \leq \eta_2 \leq c^2$ . Введем функцию

$$F(\eta) = -\frac{\eta V_{22}^2}{c^2 (C_{12}^2 + V_{22}^2) \sqrt{p}} \left[ \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \times \\ \times \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{11}^2 + V_{21}^2) p_1} \left[ \operatorname{sh}(k(s-h)\sqrt{p}) + \left[ (1 - \eta/c^2) \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{11}^2 + V_{21}^2) p_1} \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \operatorname{ch}(k(s-h)\sqrt{p}) \right]$$

Покажем, что при условии

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_1} F(\eta) < 0 \quad (15)$$

дисперсионное уравнение (12) имеет корень в интервале  $(0, \eta_1)$ . В самом деле, функция  $F$  вещественна и непрерывна на промежутке  $[0, \eta_1]$ ; кроме того, имеем  $F(0) = \operatorname{sh}(2kh) \operatorname{ch}(k(s-h)\sqrt{p(0)}) > 0$ . Следовательно, учитывая (15), согласно теореме Больцано-Коши, получим, что равносильное (12) уравнение  $F(\eta) = 0$  имеет корень в интервале  $(0, \eta_1)$ .

Предположим теперь, что  $0 < \eta_2 < \eta_1 \leq c^2$ . В этом случае, аналогично приведенным выше рассуждениям получим, что равносильное (12) уравнение  $F(\eta) = 0$  имеет корень в интервале  $(0, \eta_2)$ , если вместо (15) выполнено условие  $F(\eta_2) < 0$ . С другой стороны, корнями уравнения (12) будут все числа  $\eta = \eta_n$  из (14), принадлежащие интервалу  $(\eta_2, \eta_1)$  и удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{1 - \eta/c^2} = \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 p_1 (C_{11}^2 + V_{21}^2)} \operatorname{th}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2})$$

или же принадлежащие интервалу  $(\eta_2, \eta_1)$  корни уравнения

$$\alpha \operatorname{tg}(k(s-h)\sqrt{-p}) = \beta$$

где

$$\alpha = \frac{\eta V_{22}^2}{c^2 (C_{t2}^2 + V_{22}^2) \sqrt{-p}} \left[ \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \right] \times$$

$$\times \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1}$$

$$\beta = (1 - \eta/c^2) \operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) - \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2})$$

Рассмотрим предельный случай уравнения (12), когда одновременно  $k(s-h) \rightarrow 0$  и  $kh \rightarrow 0$  (длинноволновое приближение или узкая щель и тонкий слой). Тогда имеем  $\operatorname{sh}(k(s-h)\sqrt{p}) \sim k(s-h)\sqrt{p}$ ,  $\operatorname{ch}(k(s-h)\sqrt{p}) \sim 1$ ,

$$\operatorname{sh}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \sim 2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}, \operatorname{ch}(2kh\sqrt{1 - \eta/c^2}) \sim 1$$

и из (12) получим следующее предельное уравнение: при  $0 < \eta < \eta_1$

$$0 = -\frac{\eta V_{22}^2 k(s-h)}{c^2 (C_{t2}^2 + V_{22}^2)} \left[ 1 - \frac{2kh\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \right] + 2kh(1 - \eta/c^2) - \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \quad (16)$$

По сравнению с общим дисперсионным уравнением (12) предельное уравнение (16) поддается более детальному анализу. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\Phi(\eta) = -\frac{\eta V_{22}^2 k(s-h)}{c^2 (C_{t2}^2 + V_{22}^2)} \left[ 1 - \frac{2kh\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1} \right] + 2kh(1 - \eta/c^2) - \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 (C_{t1}^2 + V_{21}^2) p_1}$$

Она вещественна и непрерывна на промежутке  $[0, \eta_1)$ , дифференцируема на интервале  $(0, \eta_1)$ , причем  $\Phi(0) = 2kh$ . Легко проверить, что если  $kh$  и  $k(s-h)$  выбраны достаточно малыми, то имеем  $\Phi'(\eta) < 0$  на интервале  $(0, \eta_1)$  и  $\lim_{\eta \rightarrow \eta_1} \Phi(\eta) = -\infty$ . Поэтому по теореме Больцано-Коши равносильное (16) уравнение  $\Phi(\eta) = 0$  имеет корень на интервале  $(0, \eta_1)$ . Из монотонности функции  $\Phi$  на  $(0, \eta_1)$  следует единственность этого корня. Таким образом, в рассмотренном предельном случае существует единственная сдвиговая волна требуемого типа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: Изд-во АН Арм.ССР. 1984. С. 70 – 74.
2. Белубекян М. В., Мартиросян Э. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны в косом магнитном поле. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. № 2. С.129-135.
3. Chakraborty S., Chattopadhyay M. On Love – type magnetoelastic surface waves. // Journal of Applied Mechanics (Trans. of ASME). 1998. V.65. № 2. P. 535 – 539.
4. Мартиросян Э. В. Поверхностные сдвиговые магнитоупругие волны вдоль границы идеально проводящего полупространства. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. № 1. С. 63 – 69.

5. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of perfect conductor. // Proc. of Vibr. Probl. 1960. № 5. P.63-80.
6. Геворкян А. В., Казарян К. Б. Отражение и преломление магнитоупругой сдвиговой волны от упругого слоя. // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1984. С. 111 – 115.
7. Геворкян А. В. Магнитоупругие волны Лява в случае диэлектрического слоя идеально проводящего полупространства. // В сб.: «Исследования по механике твердого деформируемого тела». Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1981. С. 81 – 86.
8. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam-New-York-Oxford, North-Holland Publ. Company, 1984. 425 p.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
2.08.2006

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОИСК  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ  
МИНИМАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ

Аветисян В.В., Мартиросян С.Р.

**Ключевые слова:** гарантированный поиск, оптимальное управление

**Keywords:** guaranteed search, optimal control

Վ.Վ. Ավետիսյան, Ս.Ր. Մարտիրոսյան

Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով օպտիմալ ըստ նվազագույն լուսային էներգածախսերի ղեկավարումով փնտրում

Դիտարկվում է էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի կողմից որոնելի անշարժ օբյեկտը փնտրելու ղեկավարման խնդիրը: Աշխատանքում, ի տարբերություն [1-5]-ի, որպես օպտիմալության ցուցանիշ դիտարկվել է մանիպուլյատորի բռնիչում տեղադրված լույսի աղբյուրի էներգածախսերն արտահայտող ֆունկցիոնալը: Որոնելի օբյեկտը համարվում է հայտնաբերված, եթե այն ընկնում է տրված լուսավորությամբ շրջանային տիրույթի մեջ: Մշակվել են բռնիչի շարժման ղեկավարման մի ալգորիթմ և լուսային աղբյուրի շղթայով անցնող էլեկտրական հոսանքի փոփոխման այնպիսի օրենք, որոնց դեպքում համապատասխան հետազոծով շարժվելիս ապահովվում է անշարժ օբյեկտի փնտրումն իրականացնել երաշխավորված ժամանակում՝ նվազագույն լուսային էներգածախսերով:

V.V. Avetisyan, S.R. Martirosyan

The optimal controlling search of electromechanical manipulator under the minimum energy of light

The problem of optimal warranted control is considered by the manipulator with the purpose of searching the fixed plant. In the capacity of an optimization, as against [1-5], the functional which is taking into account power inputs of a light source, located on схvare the manipulator is considered. The required plant is considered detected at hit in a light circle with the given illumination intensity. The algorithm of build-up of a traffic control схvара, and also the law of a modification of an electric current in a chain of a light source at which driving on the relevant search trajectory ensures detection of required plant for warranted time at minimum light power inputs during searching designed.

Рассматривается задача оптимального гарантированного управления манипулятором с целью поиска неподвижного объекта. В качестве критерия оптимальности, в отличие от [1-5], рассматривается функционал, учитывающий энергозатраты источника света, расположенного на схвате манипулятора. Искомый объект считается обнаруженным при попадании в световой круг с заданной освещенностью. Разработан алгоритм построения управления движением схвата, а также закон изменения электрического тока в цепи источника света, при которых движение по соответствующей поисковой траектории обеспечивает обнаружение искомого объекта за гарантированное время при минимальных световых энергозатратах в процессе поиска.

**1. Расчетная модель поисковой системы и постановка задачи.** Пусть имеется трехзвенный электромеханический манипулятор, звенья которого перемещаются друг относительно друга в трех взаимно перпендикулярных направлениях  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  [4]. Управление движением манипулятора осуществляется с помощью электроприводов, состоящих из электродвигателей постоянного тока с

независимым возбуждением и редукторов. При определенных допущениях [6] уравнения движения имеют следующий простой вид [4]:

$$n_i k_i \dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \leq U_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

В (1.1)  $u_i$  – управляющее напряжение  $i$ -го электродвигателя,  $U_i$ ,  $k_i$  – заданные электрические постоянные,  $n_i$  – размерное передаточное отношение ( $\omega_i = n_i \dot{x}_i$ ).

В соответствии с конструкцией рассматриваемого манипулятора рабочее пространство манипулирования схвата представляет собой параллелепипед

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_i \leq c, \quad i = 1, 2, 3\} \quad (1.2)$$

Пусть на основании  $\bar{D}(a_1, a_2) = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq a_i, \quad a_i \leq c, \quad i = 1, 2\}$  рабочего пространства (1.2) манипулятора имеется некоторый точечный неподвижный объект  $Y$ , координаты  $y(t_0) = y^0$  которого управляемой стороне неизвестны. Будем полагать, что на схвате  $X$  манипулятора расположено сенсорное устройство – изотропный точечный источник света, при помощи которого на основании  $\bar{D}$  образуется подвижная и изменяющаяся круговая информационная область чувствительности – световой круг

$$G(x(t)) = \left\{ \bar{\xi} \in R^2 : |\bar{\xi} - \bar{x}| \leq r = C_1 x_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{D}, \quad 0 < x_3 \leq c, \quad C_1 > 0 \right\} \quad (1.3)$$

который можно перемещать в “темной” области  $\bar{D} \subset R^2$  с целью обнаружения (освещения) искомого объекта  $Y$  при попадании последнего в эту область –  $y \in G(x(t))$ .

Область (1.3) – круг с центром в точке  $\bar{x}(t) = (x_1, x_2) \in \bar{D}$  и с радиусом  $r = C_1 x_3$ ,  $C_1 = \operatorname{tg}(\alpha/2)$  [4], где  $x_3$  – расстояние схвата манипулятора до основания  $\bar{D}$ , а  $C_1, a_1, a_2$  – такие числа, для которых имеет место неравенство

$$r_{\max} = C_1 \max_{0 < x_3 \leq c} x_3 = C_1 x_3^0 < \sqrt{2} \max(a_1, a_2) / 2 \leq \sqrt{2} c / 2 \quad (1.4)$$

Такой выбор параметров  $a_1, a_2, c$  и  $C_1$  (угла  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ) (1.4) позволяет обходить тривиальный случай  $G \supset \bar{D}$ .

Искомый объект может быть обнаружен или распознан при попадании его в световой круг (1.3) только при достаточной освещенности  $E$ , которая определяется по формуле [7]

$$E = kQ / (\Omega x_3^2), \quad E \geq E_0 \quad (1.5)$$

Здесь  $E_0$  – освещенность, характеризующая пороговое значение видимости искомого объекта,  $\Omega$  – телесный угол конуса направлений световых лучей;  $x_3$  – расстояние от источника света до плоскости освещения;  $k$  – коэффициент пропорциональности;  $Q$  – мощность световой энергии.

Функционал, характеризующий энергозатраты в процессе поиска световым устройством при постоянных  $E, \Omega = \operatorname{const}$ , определится выражением

$$J = \int_{t_0}^T Q dt = \frac{E\Omega}{k} \int_{t_0}^T x_3^2 dt \quad (1.6)$$

Согласно (1.1) функционал (1.6) является также функцией от  $u_3$ . В соответствии с законом Джоуля–Ленца (1.6) перепишем в виде

$$J = \int_{t_0}^T Q dt = \int_{t_0}^T i^2 R dt, \quad Q = i^2 R, \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.7)$$

где  $i$  – действующее значение тока, проходящего через источник света,  $i_0$  – максимально допустимое действующее значение тока, а  $R$  – активное сопротивление в цепи источника света.

Приравнявая значения функционалов (1.7) и (1.8), имеем

$$i(t) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t), \quad x_3(t) > 0, \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.8)$$

которое с учетом третьего уравнения (1.1) определяет связь между функциями  $u_3 = u_3(t)$  и  $i = i(t)$ .

В соответствии с вышеизложенным будем считать, что поисковая система (1.1) обнаруживает точечный объект  $Y$  в том и только в том случае, когда в некоторый момент времени  $t \geq t_0$  выполняется условие обнаружения

$$\begin{aligned} |y - \bar{x}(t)| &\leq r(t) \text{sign}(i(t)), \quad 0 \leq i(t) \leq i_0, \quad t \geq t_0 \\ r(t) &= C_1 x_3(t), \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \bar{D}, \quad 0 < x_3 \leq c, \quad C_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае, когда в течение некоторого интервала времени источник света отключен, т.е.  $i(t) \equiv 0$ , то согласно (1.9)  $E = 0$ .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

**Задача 1.** Для манипулятора (1.1) с заданным начальным положением схвата  $x^0 \in D$  и заданным телесным углом  $\Omega$  найти управляющую функцию  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  и закон изменения электрического тока в цепи источника света  $i = i(t)$ , которые обеспечивают заданную освещенность  $E = \text{const}$  и при этом в гарантированный момент времени поиска  $t = T$  минимизируют функционал

$$J = \frac{E\Omega}{k} \int_0^T x_3^2 dt \quad (1.10)$$

**2. Допустимые управления и траектории.** В следующих безразмерных переменных и обозначениях (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$\begin{aligned} t' &= t/\gamma, \quad x'_i = x_i/c, \quad \xi'_i = \xi_i/c, \quad a'_i = a_i/c, \quad i = 1, 2, 3; \quad r' = r/c, \quad c' = 1 \\ u'_1 &= u_1\gamma/cn_1k_1, \quad u'_2 = u_2\gamma/cn_2k_2, \quad u'_3 = u_3/U_3, \quad U'_1 = U_1\gamma/cn_1k_1 \\ U'_2 &= U_2\gamma/cn_2k_2, \quad U'_3 = 1, \quad \bar{U}' = \min(U'_1, U'_2), \quad E' = E/E_0, \quad E'_0 = 1 \\ i' &= i/i_0, \quad i'_0 = 1, \quad Q' = Q/\xi, \quad \xi = E\Omega c^2/k, \quad R' = R/\mu \\ \mu &= E\Omega c^2/i_0^2k, \quad J' = J/\lambda, \quad \lambda = E\Omega c^2\gamma/k, \quad \gamma = n_3k_3/cU_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

плоское и вертикальное движения схвата манипулятора описываются, соответственно, первым, вторым и третьим уравнениями следующей системы:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq \bar{U}, \quad |u_3| \leq 1 \quad (2.2)$$

При этом функционал (1.10) запишется в виде

$$J = \int_0^T x_3^2 dt \quad (2.3)$$

а область  $D(a_1, a_2, a_3)$  – в виде

$$D(a_1, a_2, 1) = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq a_i; \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq x_3 \leq 1\} \quad (2.4)$$

Так как уравнения (2.2) независимы, то задача определения управления  $u_3$ , переводящего систему, описываемую уравнением

$$\dot{x}_3 = u_3, \quad 0 \leq x_3 \leq x_3^0, \quad |u_3| \leq 1 \quad (2.5)$$

за время  $T$  из точки  $x_3(0) = x_3^0$  в точку  $x_3(T) = 0$  и доставляющего минимум функционалу (2.3), решается отдельно.

Решение этой задачи известно [7]. Оптимальное управление и координата определяются следующим образом:

$$u_3(t, \bar{t}_*, T) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \bar{t}_* \\ 0, & \bar{t}_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad x_3(t, \bar{t}_*, T) = \begin{cases} x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq \bar{t}_* \\ 0, & \bar{t}_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad \bar{t}_* = x_3^0 / U_3 \quad (2.6)$$

Любые другие, в частности, управление и соответствующая координата вида

$$u_3(t, t_*, T) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_* \\ 0, & t_* \leq t \leq T \end{cases}, \quad x_3(t, t_*, T) = \begin{cases} x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq t_* \\ x_3^0 - U_3 t_* = x_3^*, & t_* \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.7)$$

с параметром  $t_*$ ,  $0 \leq t_* < \bar{t}_* \leq T$  неоптимальны. Более того, управление (2.7) при  $t_* = 0$ :  $u_3(t, t_*, T)|_{t_*=0} \equiv 0$ ,  $0 \leq t \leq T$  доставляет максимальное значение функционалу (2.3) –  $J(u_3(t, 0, T)) = \max_{0 \leq t_* \leq \bar{t}_*} J(u_3(t, t_*, T))$ .

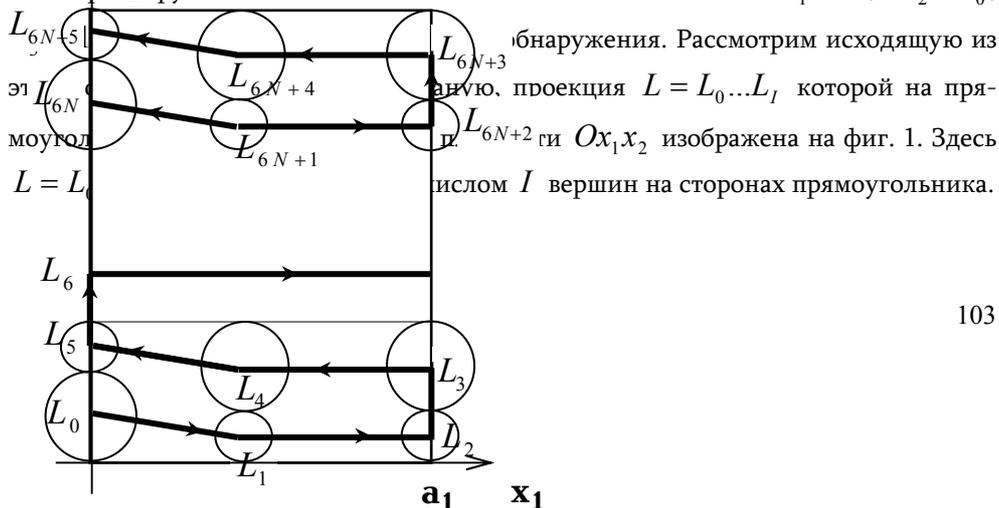
Согласно (1.8) законы изменения электрических токов  $i = i(t)$ , соответствующих (2.6), (2.7), запишутся, соответственно, в виде

$$i(t, \bar{t}_*, T) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t, \bar{t}_*, T), \quad i(t, t_*, T) = \sqrt{\frac{E\Omega}{kR}} x_3(t, t_*, T), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что на интервале времени  $\bar{t}_* \leq t \leq T$   $i = i(t, \bar{t}_*, T) \equiv 0$ , т.е. источник света отключен.

Опишем сначала предлагаемый способ управления, а затем определим условия на входящие в него параметры, при которых решается задача 1.

Зафиксируем начальное положение схвата  $X - t = 0$ :  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = r_0$ , обнаружения. Рассмотрим исходящую из точку, проекция  $L = L_0 \dots L_I$  которой на прямую  $Ox_1 x_2$  изображена на фиг. 1. Здесь числом  $I$  вершин на сторонах прямоугольника.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, начальный участок траектории  $L_0 \dots L_5$  повторяется с каждой шестой вершины со сдвигом на величину  $|L_5 L_6|$ . Вершины  $L_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ ,  $j = 0, 1, \dots, 6$  ломаной  $L_0 \dots L_5$  определяются таким образом:

$$\begin{aligned} L_0 &= (0, r_0), \quad L_1 = (\xi_*, r_*) \\ L_2 &= (a_1, r_*), \\ L_3 &= (a_1, 2r_* + r_0) \quad (2.9) \\ L_4 &= (\xi_*, 2r_* + r_0) \quad L_5 = (0, 2r_0 + r_*) \quad L_6 = (0, 3r_0 + r_*) \\ x_2^{(1)} &= r_*, \quad x_1^{(1)} = \xi_* \end{aligned}$$

При заданных исходных параметрах задачи  $a_1, a_2, r_0$  структура как начального участка  $L_{0,5} = L_0 \dots L_5$ , так и всей ломаной  $L_{0,l} = L_0 \dots L_l$  зависит от значений координат промежуточной вершины  $L_1(\xi_*, r_*)$ ;  $x_1^{(1)} = \xi_*$ ,  $0 \leq \xi_* \leq a_1$  и  $x_2^{(1)} = r_*$ ,  $0 \leq r_* \leq r_0$ . Пусть стороны прямоугольного основания  $\bar{D}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} a_2 / (2r_0) &= [a_2 / (2r_0)] = p_1, \quad a_2 / (4r_0) = [a_2 / (4r_0)] = p_0 \\ a_2 &= \max(a_1, a_2), \quad 0 \leq p_0 < p_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $[\cdot]$  означает целую часть действительного числа.

Для заданных исходных параметров задачи  $a_1, a_2, r_0$  (2.10) рассмотрим следующую функцию от переменной  $r_*$ ,  $0 \leq r_* \leq r_0$ :

$$N(r_*) = [a_2 / 2(r_0 + r_*)] = \begin{cases} r_{k+1} < r_* \leq r_k, & k = 0, 1, 2, \dots, p_1 - p_0 \\ p_0 + k, & r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p_1 - p_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$[a_2 / (2r_0)] = p_1, \quad [a_2 / (4r_0)] = p_0$$

представляющую монотонно убывающую ступенчатую функцию от переменной  $r_*$ , претерпевающей разрыв первого рода справа в точках  $r_k$ ,  $0 \leq r_k \leq r_0$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ .

Пусть  $r_* = r_k$  при некотором  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ , т.е.

$$\begin{aligned} N(r_*) \Big|_{r_* = r_k} &= N(r_k) = \frac{a_2}{2(r_0 + r_k)} = \left[ \frac{a_2}{2(r_0 + r_k)} \right] = N_k \\ p_0 &\leq N_k \leq p_1, \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

тогда ломаная  $L^{(k)} = L(\xi_*, r_k)$  состоит из  $N_k$  целое число раз повторяющихся начальных ломаных  $L_{0,5}^{(k)} = L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$  со сдвигом на величину  $|L_0^{(k)} L_5^{(k)}|$  по стороне  $x_1 = 0$ . Семейство ломаных  $L^{(k)} = L(\xi_*, r_k)$  обозначим через

$$\{L\}_k = \{L^{(k)} : L^{(k)} = L(\xi_*, r_k); \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0\} \quad (2.13)$$

В соответствии с (2.6) и (2.7), управление  $u = u(t)$ , при котором проекция  $\bar{X}$  схвата манипулятора движется по ломаной  $L_{0,5}^{(k)}$ , а также закон изменения электрического тока в цепи источника света  $i = i(t)$  зададим, соответственно, следующим образом:

$$u^{(k)}(t) = \begin{cases} \{u_1^{(k)}(t) = \sqrt{\bar{U}^2 - C_1^2 U_3^2}, u_2^{(k)}(t) = -C_1 U_3, u_3^{(k)}(t) \equiv -U_3\}, & 0 \leq t \leq t_1^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = \bar{U}, u_2^{(k)}(t) = 0, u_3^{(k)}(t) = 0\}, & t_1^{(k)} \leq t \leq t_2^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = 0, u_2^{(k)}(t) = \bar{U}, u_3^{(k)}(t) = C_1^{-1} U_3 (r_0 - r_k)(r_0 + r_k)^{-1}\}, & t_2^{(k)} \leq t \leq t_3^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = -\bar{U}, u_2^{(k)}(t) = 0, u_3^{(k)}(t) = 0\}, & t_3^{(k)} \leq t \leq t_4^{(k)} \\ \{u_1^{(k)}(t) = -\sqrt{\bar{U}^2 - C_1^2 U_3^2}, u_2^{(k)}(t) = C_1 U_3, u_3^{(k)}(t) = U_3\}, & t_4^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$t_1^{(k)} \leq \bar{t}_* = x_3^0 / U_3$$

$$i^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3(t); \quad x_3(t) = x_3^0 - U_3 t, & 0 \leq t \leq t_1^{(k)} \\ x_3(t_1^{(k)}) = x_3^0 - U_3 t_1^{(k)} = \text{const}, & t_1^{(k)} \leq t \leq t_2^{(k)} \\ 0, & t_2^{(k)} \leq t \leq t_3^{(k)} \\ \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3^0, & t_3^{(k)} \leq t \leq t_4^{(k)} \\ \sqrt{\frac{E \Omega}{kR}} x_3(t); \quad x_3(t) = x_3^0 - U_3 t, & t_4^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$t_1^{(k)} \leq \bar{t}_* = x_3^0 / U_3$$

В (2.14), (2.15) моменты времени  $t_1^{(k)}, \dots, t_5^{(k)}$  определяются из уравнения движения (2.2) подстановкой управления (2.14) в эти уравнения и интегрированием последних при краевых условиях, представляющих координаты вершин ломаной  $L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$ .

Используя (2.14), (2.15), вычислим функционал (2.3), характеризующий световые энергозатраты на промежутках времени  $0 \leq t \leq t_2^{(k)}$  и  $t_3^{(k)} \leq t \leq t_5^{(k)}$ :

$$J_1^{(1)}(r_k) = C^{-1} \left\{ \int_0^{t_1^{(k)}} r^2(t) dt + \int_{t_1^{(k)}}^{t_2^{(k)}} r^2(t) dt \right\} = A_1 r_k^3 + B_1 r_k^2 + D_1 \quad (2.16)$$

$$J_1^{(2)}(r_k) = C_1^{-1} \left\{ \int_{t_3^{(k)}}^{t_4^{(k)}} r^2(t) dt + \int_{t_4^{(k)}}^{t_5^{(k)}} r^2(t) dt \right\} = A_2 r_k^3 + C_2 r_k + D_2 \quad (2.17)$$

$$r(t) = C_1 x_3(t), \quad A_1 = -1/3 C_1 U_3 + (\sqrt{(\bar{U} / C_1 U_3)^2 - 1}) / \bar{U}$$

$$B_1 = (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U} / C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}, \quad D_1 = r_0^3 / 3 C_1 U_3, \quad A_2 = -1/3 C_1 U_3$$

$$C_2 = r_0^2 \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U},$$

$$D_2 = r_0^3 / (3C_1 U_3) + r_0^3 (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

Сумма интегралов (2.16) и (2.17) определяет величину энергозатрат на промежутке времени  $0 \leq t \leq t_5^{(k)}$  при прохождении проекции схвата по начальной ломаной  $L_{0,5}^{(k)} = L_0^{(k)} \dots L_5^{(k)}$ :

$$J_1(r_k) = J_1^{(1)}(r_k) + J_1^{(2)}(r_k) = A r_k^3 + B r_k^3 + C r_k + D \quad (2.18)$$

$$A = A_1 + A_2 = -2/3 C_1 U_3 + (\sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1}) / \bar{U} \quad (2.19)$$

$$B = B_1 = (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}, \quad C = C_2 = r_0^2 \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

$$D = D_1 + D_2 = 2r_0^3 / 3C_1 U_3 + r_0^2 (a_1 - r_0) \sqrt{(\bar{U}/C_1 U_3)^2 - 1} / \bar{U}$$

Отметим, что при вычислении (2.18) учитывалось, что на интервале времени  $[t_2^{(k)}, t_3^{(k)}]$  проекция схвата перемещается из точки  $L_2^{(k)} = (a_1, r_k)$  в точку  $L_3^{(k)} = (a_1, 2r_k + r_0)$  по отрезку  $L_2^{(k)} L_3^{(k)}$ ,  $|L_2^{(k)} L_3^{(k)}| = r_0 + r_k$  при выключенном свете ( $i(t) = 0$  в (1.8)).

Полное значение функционала энергозатрат в процессе управления при прохождении проекции схвата  $X$  по траектории  $L^{(k)}(r_k) \in \{L\}_k$  (2.13) имеет вид

$$J(r_k) = N_k(r_k) \cdot J_1(r_k) \quad (2.20)$$

где  $J_1$  определяется по формуле (2.18), а  $N_k$  – по формуле (2.12).

Как следует из (2.20), функционал  $J(r_k)$  определен на конечном множестве дискретных точек  $r_k$ ,  $0 \leq r_k \leq r_0$ ;  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ :

$$R_k = \{r_k : 0 \leq r_k \leq r_0, \quad r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0; \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0\} \quad (2.21)$$

Таким образом, функционал (2.20) зависит от параметра  $r_k \in R_k$ , от которого зависит структура траектории  $L^{(k)} = L^{(k)}(r_k) \in \{L\}_k$  (2.14) и, следовательно, вид управлений  $u^{(k)} = u^{(k)}(t)$  и  $i^{(k)} = i^{(k)}(t)$ .

Решение задачи 1 равносильно решению следующих задач:

$$J_{\min} = \min_{L^{(k)} \in \{L\}_k} J \quad \text{или} \quad J_{\min} = \min_{r_k \in R_k} J(r_k) \quad (2.22)$$

вторая из которых формулируется следующим образом.

**Задача 2.** Найти целые числа  $k$  и  $N_k$ , при которых имеет место

$$J_{\min} = \min_{r_k \in R_k} J(r_k) = \min_{k \in \{0, 1, \dots, p_1 - p_0\}} N_k \cdot J_1(r_k) \quad (2.23)$$

где  $N_k$  и  $J_1(r_k)$  определяются выражениями (2.12), (2.18) соответственно.

**3. Алгоритм решения.** Будем решать задачу 2 при следующих основных допущениях.

$$1) \quad \bar{U} > 3C_1 U_3 / \sqrt{5}, \quad U_3 = 1 \Leftrightarrow A > 0, \quad C > 0 \quad (3.1)$$

$$2) \quad r_0 / (C_1 U_3) < a / \bar{U} \Leftrightarrow B > 0, \quad D > 0 \quad (3.2)$$

Условие (3.2) гарантирует существование управлений (траекторий) (2.6) и (2.7) и, следовательно, рассмотрение семейства траекторий фиг. 1 становится возможным и обоснованным.

В соответствии с (2.12), (2.18) соотношение (2.20) перепишем в виде

$$J(r_k) = N_k J_1(r_k) = [a_2 / (r_0 + r_k)] (Ar_k^3 + Br_k^3 + Cr_k + D) \quad (3.3)$$

где, согласно (2.12),

$$[a_2 / (r_0 + r_k)] = a_2 / (r_0 + r_k)$$

Для решения (2.23) рассмотрим функцию (3.3), определенную на отрезке  $0 \leq r_* \leq r_0$  без операции взятия целой части, т.е.

$$F(r_*) = (a_2 / (r_0 + r_*)) (Ar_*^3 + Br_*^2 + Cr_* + D), \quad 0 \leq r_* \leq r_0 \quad (3.4)$$

где  $A, B, C, D$  определяются выражениями (2.19).

Значения функции  $F$  (3.4), согласно (2.11), (2.12), (2.18), совпадают со значениями функций (3.3) в точках  $r_k$ ,  $0 \leq r_k \leq r_0$ ;  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ , т.е.

$$J(r_k) = F(r_*) \Big|_{r_*=r_k}, \quad k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0 \quad (3.5)$$

Найдем

$$\min_{0 \leq r_* \leq r_0} F(r_*) = F(r_*^{opt}) \quad (3.6)$$

Исследование показало, что функция  $F(r_*)$  (3.4) имеет единственный минимум  $r_*^{opt}$  на отрезке  $[0, r_0]$

$$\min_{0 \leq r_* \leq r_0} F(r_*) = F(r_*^{opt}) = F_*$$

Значение  $r_*^{opt}$  можно легко найти по формуле Кардано. Если

$$r_*^{opt} = r_k \quad (3.7)$$

при некотором  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$ , то  $r_*^{opt}$  является также решением задачи (2.23)

$$J_{\min} = \min_{k \in \{0, 1, \dots, p_1 - p_0\}} N(r_k) J_1(r_k) = N(r_*^{opt}) J_1(r_*^{opt}) \quad (3.8)$$

$$N(r_*^{opt}) = a_2 / (2(r_0 + r_*)) \Big|_{r_*=r_*^{opt}}$$

Пусть  $r_*^{opt}$  при некотором  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_1 - p_0$  удовлетворяет неравенству

$$r_{k+1} < r_*^{opt} < r_k \quad (3.9)$$

$$r_k = a_2 / (2(p_0 + k)) - r_0, \quad r_{k+1} = a_2 / (2(p_0 + k + 1)) - r_0 \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.9), (3.10) имеем

$$W < k < W + 1, \quad W = a_2 / (2(r_*^{opt} + r_0)) - p_0 - 1 \quad (3.11)$$

Поскольку  $r_*^{opt} \in (r_k, r_{k+1})$ , то из (2.12) следует, что  $W$  не является целочисленным. А так как  $k$  – целое число, то значение  $k$  найдем по формуле

$$k = [W + 1] \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.10), получим

$$r_k = a_2 / (2(p_0 + [W + 1])) - r_0, \quad r_{k+1} = a_2 / (2(p_0 + [W + 1])) - r_0 \quad (3.13)$$

Далее, последовательно подставляя (3.13) в (2.12), (2.16)-(2.18), определяем значения  $N_k, N_{k+1}$  и функционалов  $J_1(r_k), J_1(r_{k+1})$ .

Оптимальное значение  $\bar{r}_*^{opt}$  и минимальное значение  $J_{\min}$  в задаче (2.23) определяются следующим образом:

$$\bar{r}_*^{opt} = \begin{cases} r_{k+1} & \text{при } J(r_{k+1}) = N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}) = \\ & = \min \{ N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}), N_k \cdot J_1(r_k) \} \\ r_k & \text{при } J(r_k) = N_k \cdot J_1(r_k) = \\ & = \min \{ N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}), N_k \cdot J_1(r_k) \} \\ r_{k+1}, r_k & \text{при } J(r_{k+1}) = J(r_k) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$J_{\min} = \begin{cases} J(r_{k+1}) = N_{k+1} \cdot J_1(r_{k+1}) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_{k+1} \\ J(r_k) = N_k \cdot J_1(r_k) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_k \\ J(r_{k+1}) = J(r_k) & \text{при } \bar{r}_*^{opt} = r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (3.15)$$

Таким образом, для заданных параметров  $a_1, a_2, r_0, C_1, \bar{U}, U_3$ , удовлетворяющих (3.1), (3.2), определяются числа  $p_0, p_1$  (2.10) и подсчитывается значение  $r_*^{opt}$  по формуле Кардано. Затем, в случае (3.9), с помощью (3.11)-(3.13);(2.13);(2.16)-(2.18);(2.20) находятся  $k, r_k, N_k, J_1(r_k), J(r_k)$  соответственно, определяются  $\bar{r}_*^{opt}$  (3.14),  $J_{\min}$  (3.15), а в конце – оптимальные управления (2.14), (2.15). В случае (3.7) построение управлений (2.14) и (2.15) осуществляется аналогичным образом.

Численные расчеты, приведенные для манипулятора с конкретными параметрами [4,5], показали, что оптимальный выбор параметров управлений (2.16) и (2.17) приводит к значительному выигрышу световых энергозатрат – 23% по сравнению с управлением при  $k = 0$  и 16% по сравнению с управлением при  $k = 4$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск недвижимого объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. <sup>1</sup> 1. С. 62-69.
2. Avetisyan V.V. The problem of optimal guaranteed search and capture of immobile object in rectangular domain // 10-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. St. Petersburg, Russia. AZ. Proceedings. 2002, vol. 1, pp. 65-68.
3. Avetisyan V.V. Controlled search with subsequent catch of immobile object by the robot-manipulator // 11-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Tucson, USA. AZ. Proceedings. 2004, vol. 1, p.24-29.
4. Аветисян В.В., Барсегян А.Р. Оптимизация управления захватом целевого объекта роботом-манипулятором при неполной информации // Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т. 57. <sup>1</sup> 2. С. 58-68.
5. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. <sup>1</sup> 6. С. 160-168.

6. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. <sup>1</sup>1. С. 189-238.
7. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука. 1970. С. 512.
8. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ч. II // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1959. Т. <sup>1</sup> 11. С. 1441-1458.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.10.2005

УДК 531.3.

**ПОТЕРЯ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
МАШИНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СТАТОРА**

**Шекян Г.Г., Захарянц В.В.**

**Ключевые слова:** устойчивость, ротор, магнитное поле

**Key words:** stability, rotor, magnetic field

**Հ.Գ. Շեկյան, Վ.Վ. Զախարյանց**

**Ռոտորի կայունության կորուստը մագնիսական դաշտում**

Մտնելով, որ ստատորի մագնիսական դաշտում ռոտորի վրա ազդող մագնիսական ուժերը փոխվում են ռոտորի տեղափոխությունների համեմատ, ստացված են նրա ստատիկ կայունության կրիտերիաները, կախված հենարանային պայմաններից և ռոտորի կոշտությունից:

**H.G. Shekyan, V.V. Zakharyants**

**Loss of the Statical Stability of Electrical Machine Rotor  
Under Influence of Stator Magnetic Field**

It is assumed, that magnetic forces, acting on to the rotor by the stator field, are varied proportionally with displacements. The criteria of rotor statical stability, depending on rigid characteristics and boundary conditions are obtained.

Приняв, что магнитные силы, действующие на ротор со стороны поля статора изменяются пропорционально перемещениям, получены критерии статической устойчивости ротора, зависящие от жесткостных характеристик и граничных условий.

В связи с неуклонным ростом скоростей электрических машин, зачастую их выполняют так, чтобы роторы вращались в закритической зоне скоростей. Для этого либо “жесткий” ротор устанавливают на податливых опорах, либо роторы являются “упругими”. Однако, в обоих случаях возникают дополнительные проблемы обеспечения их статической устойчивости [2,5].

В электрических машинах силы магнитного притяжения между статором и ротором меняют свое значение в зависимости от наименьшего расстояния между ними. Поэтому, если упругий или “жесткий” ротор установлен на упругих опорах, то силы одностороннего магнитного притяжения, как и в [1,2,3,4], представляют собой нагрузку, следящую за перемещениями ротора.

Если при определенных условиях суммарная сила одностороннего магнитного притяжения становится больше, чем сила упругости, то ротор теряет устойчивость и перемещение ротора увеличивается до полного прилипания его к статору.

Условие прилипания точечного якоря, подвешенного на консольном стержне и находящегося в стационарном магнитном поле, приведено в [1], где сила магнитного притяжения принята равной  $R = 4KY/a^3$ , где  $K$  – постоянная магнитного поля,  $Y$  – перемещение якоря от положения исходного равновесия,  $a$  – исходный равномерный зазор между магнитом и якорем.

В электрических машинах согласно [2,3,4] величина одностороннего магнитного притяжения между ротором и статором

$$R_{db} = 7dlB^2Y/a^2 \quad (1)$$

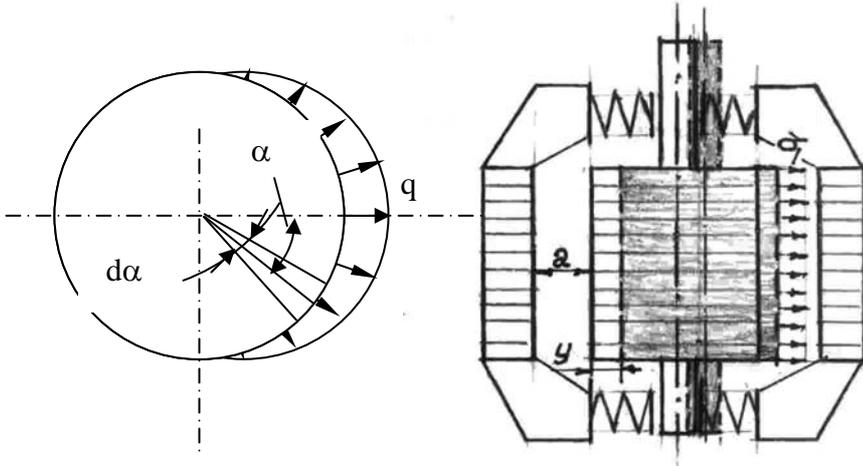
где  $d$  – диаметр ротора,  $l$  – длина активной части ротора,  $B$  – индукция магнитного поля в воздушном зазоре.

В [2,3,4] принято, что силы магнитного притяжения при перемещении ротора от положения исходного равновесия перераспределяются по закону косинуса (фиг.1). Тогда, поскольку сумма всех магнитных сил должна равняться  $R_{db}$ , то из фиг. 1. будем иметь:

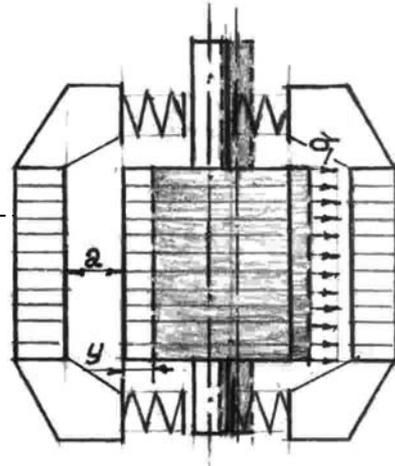
$$R_{db} = 2 \int_0^{\pi/2} (q_\alpha \cdot ld/2) d\alpha = q \cdot d \cdot l$$

где  $q_\alpha = q \cos \alpha$ ; тогда  $q = \frac{R_{db}}{dl}$ , т.е. магнитные силы, распределенные по закону косинуса, эквивалентны равномерному распределению по диаметральному сечению с интенсивностью.

С учетом (1)  $q = K_1 Y/a^2$ , где  $K_1 = 7B^2$ , т.е. сила одностороннего магнитного притяжения в электрических машинах также пропорциональна смещению ротора, как и в [1,2,3,4,5,6].



Фиг.1. Перераспределение магнитных сил по окружности поперечного сечения ротора.



Фиг.2. Динамическая модель эл.машины с ротором на упругих опорах.

Для определения критерия устойчивости короткозамкнутого ротора электрической машины в магнитном поле возможны два случая:

- жесткий ротор покоится на упругих опорах фиг.2,
- упругий ротор покоится на жестких опорах.

Устойчивость жесткого ротора на упругих опорах рассмотрена в [3].

Здесь же рассмотрим устойчивость симметричного вертикального упругого ротора на жестких опорах (фиг.3).

При отклонении упругого ротора от положения равновесия на величину  $Y$  на ротор действует распределенная нагрузка (силы одностороннего магнитного

притяжения) с интенсивностью  $q = \frac{K_1 Y}{a^2}$ , где  $Y = Y(z)$  – прогиб ротора в произвольном сечении.

Дифференциальное уравнение изгиба ротора  $EJ \frac{d^4 Y}{dz^4} = K_1 \frac{Y}{a^2}$  можно представить в известном виде:

$$\frac{d^4 Y}{dz^4} - \alpha^4 Y = 0 \quad (2)$$

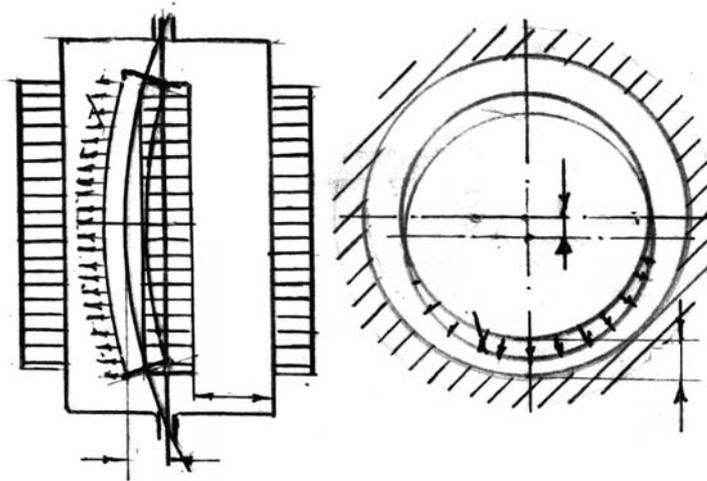
где 
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K_1}{EIa^2}} \quad (3)$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$Y = A_1 \operatorname{sh} \alpha z + A_2 \operatorname{ch} \alpha z + A_3 \sin \alpha z + A_4 \cos \alpha z \quad (4)$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям. В отличие от [1], здесь граничные условия зависят от вида опор:

а) при шарнирном исполнении опор (фиг.3)



Фиг.3. Упругий ротор на шарнирных опорах в симметричном магнитном поле.

$$\begin{aligned} Y &= 0 && \text{при } z = 0 \text{ и } z = l \\ \frac{d^2 Y}{dz^2} &= 0 && \text{при } z = 0 \text{ и } z = l \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда с учетом граничных условий (5) и решения краевой задачи [1] будем иметь:

$$-2 \operatorname{sh} \alpha l \cdot \sin \alpha l = 0, \text{ откуда } \alpha l = \pi, \quad \alpha = \frac{\pi}{l}$$

С учетом (3) получим критическое соотношение параметров, при котором наступает потеря устойчивости.

$$\frac{EJ}{l^4} = 0,049 \frac{K_1}{a^2}$$

Тогда условие устойчивости будет

$$\frac{EJ}{l^4} > \frac{K_1}{a^2} 0,049 \quad (6)$$

б) при роторе на подшипниках скольжения конечной длины опоры не могут поворачиваться, при изгибе ротора граничные условия будут:

$$\begin{aligned} Y = 0 \text{ при } z = 0; & \quad Y = 0 \text{ при } z = l \\ \frac{dY}{dz} = 0 \text{ при } z = 0; & \quad \frac{dY}{dz} = 0 \text{ при } z = l \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом граничных условий (7) и решения идентичной краевой задачи изгиба балок [1] будем иметь:

$$\cos \alpha l \cdot \operatorname{ch} \alpha l = 1 \quad (8)$$

наименьший корень которого равен

$$\alpha l = 4.7300$$

Тогда критическое соотношение между параметрами системы, при котором наступает потеря устойчивости, с учетом (3) будет

$$\frac{EJ}{l^4} > 0.0018 \frac{K_1}{a^2} \quad (9)$$

Во избежание излишних хлопот при проектировании электрических машин с гибкими роторами или с роторами на упругих опорах, необходимо обеспечить условия статической устойчивости по приведенным критериям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
2. Шемян Г.Г. Исследование конструкций упругих опор. / Тр. ВНИИКЭ. Т.4. Ереван: 1971. С.194-212.
3. Шемян Г.Г., Захарянц В.В. // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. 7-ая конференция. Горис. 2005г.
4. Розенберг Е. Одностороннее магнитное притяжение в электрических машинах. М.: Наука, 1967. 357с.
5. Фрейзи У. Односторонние магнитные притяжения в машинах трехфазного тока. TNZ-A 83. 1962. 4. 299-303.
6. Позняк Э.Л. и др. Демпфирование вынужденных колебаний гибких роторов. /Тр. ВНИИЭМ. Т.20. Л.: "Энергия". 1965.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
16.02.2006

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ МАЛОЦИКЛОВОЙ  
ПОЛЗУЧЕСТИ

Петросян Т. Л., Симонян А. М.

**Ключевые слова:** ползучесть, гистерезис

**Key words:** creep, hysteresis

**S. L. Պետրոսյան, Ա. Մ. Միմոնյան**

**Հիստերեզիսի ուսումնասիրությունը ցիկլիկ սողքի դեպքում**

Օերացման և ժառանգականության տեսությունների հիման վրա ուսումնասիրվում է էներգիայի դիսիպացիան և մարման գործակիցը ցիկլիկ բեռնավորումների ժամանակ: Տեսական տվյալները համեմատվում են երեք տարբեր տիպի գետնահողերի համար ստացված էքսպերիմենտալ տվյալների հետ: Ցույց է տրվում, որ գետնահողերի ցիկլիկ սողքը նկարագրելու համար պիտանի է ժառանգականության տեսությունը:

**T. L. Petrosyan, A. M. Simonyan**

**Investigation of Histeresys at Scarcely Cycle Creep**

On the base the theory of aging and the theory of heredity the dissipation energy and the coefficient of absorption at repeated loading are investigated. The theoretical results are compared with experimental ones, which are obtained for three kind of clay soils. It is obtained that the theory of heredity is acceptable for the description of creep at cicle loading of soils.

На основании теории старения и теории наследственности исследуется энергия диссипации и коэффициент поглощения при многократном нагружении. Теоретические данные сравниваются с экспериментальными данными, полученными для трех видов глинистых грунтов. Показано, что для описания малоцикловой ползучести грунтов теория наследственности является приемлемой.

Как известно, при многократных нагружениях материала имеет место явление гистерезиса, определяемое рассеянием энергии. Изучению явления гистерезиса посвящено необозримое количество работ ([1-6] и др.). Механизмы, порождающие гистерезис, чрезвычайно разнообразны для различных материалов и условий испытания, хотя во всяком случае они определяются реологическими процессами. В большинстве работ ([7-12] и др.) аналитическое описание деформаций осуществляется эмпирическим путем, ограничивающим общность результатов. При описании ползучести при многоступенчатом изменении напряжений многие классические теории требуют коррекции. Например, в работе [13] указана непригодность принципа наложения для описания ползучести бетона. В работе [14] разработана теория ползучести, описывающая ускоренную ползучесть при циклических воздействиях в условиях двухстадийной ползучести. В работе [15] для описания циклической ползучести рассмотрены соотношения, построенные на основе теории наследственности в весьма усложненном варианте. В работах ([16-18] и др.) рассматриваются аналитические эмпирические зависимости для описания формы гистерезисной петли и расчета логарифмического декремента

затухания колебаний. В работе [19] приведены соотношения для расчета изменения напряжения при задании гармонических колебаний (жесткое нагружение) для различных моделей ползучести.

В настоящей работе на основе данных о ползучести материала при использовании теории старения и теории наследственности построены петли гистерезиса в сравнении с экспериментальными данными для того же материала при малоцикловой ползучести и на примере грунтов показано, что теория наследственности может быть рекомендована для непосредственного описания деформационных процессов при циклических воздействиях.

1. Пусть деформации материала при постоянных напряжениях  $\sigma$  описываются формулой Мак-Ветти-Гарофало

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{E} + C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t \right] \sigma \quad (1.1)$$

где  $E$  – модуль упругости, а  $C, \alpha$  и  $\nu$  – параметры ползучести.

Для описания деформаций при переменных напряжениях  $\sigma(t)$ , согласно теории старения и теории наследственности [20, 21], будем иметь, соответственно,

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{E} + C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t \right] \sigma(t) \quad (1.2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sigma(\tau) [C\alpha e^{-\alpha(t-\tau)} + \nu] d\tau \quad (1.3)$$

Рассмотрим действие циклического нагружения

$$\sigma(t) = \sigma_0 [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda] \quad (1.4)$$

где  $\omega$  и  $\lambda$  – некоторые постоянные.

Для определения площади гистерезиса  $\Delta W(t)$  используется формула [6]

$$\Delta W(n) = \int_{t_n}^{t_n+T} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt \quad (1.5)$$

где  $T$  – период цикла, определяемый формулой

$$T = 2\pi / \omega \quad (1.6)$$

а  $t_n = nT$  ( $n$  – номер цикла).

Формула (1.5), естественно, не предусматривает замкнутости кривой гистерезиса и при  $\varphi = -\pi/2$  фактически описывает площадь между кривыми нагружения, разгрузки и осью  $t$ .

При использовании (1.2), (1.4)-(1.6) для площади гистерезиса, согласно теории старения, будем иметь

$$\Delta W(n) = \frac{C(1 - e^{-\alpha T})\sigma_0^2}{e^{\alpha nT}} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left[ \frac{\alpha\omega}{2} \sin 2\varphi_0 - \left( \frac{\alpha^2}{2} + \omega^2 \right) \cos 2\varphi_0 \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ \alpha \omega \cos \varphi_0 + (2\alpha^2 + \omega^2) \sin \varphi_0 \right] + \frac{1}{2} + \lambda^2 \left. \right\} + \\
& + \frac{\nu \pi \sigma_0^2}{\omega} \left( 1 + 2\lambda^2 + 2\lambda \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} \cos 2\varphi_0 \right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Используя (1.3)-(1.6), получим следующее выражение для площади гистерезиса, согласно теории наследственности:

$$\begin{aligned}
\Delta W(n) = \sigma_0^2 \left\{ \frac{C(1 - e^{-\alpha T})}{e^{\alpha n T}} \left[ \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} (\alpha^2 \sin^2 \varphi_0 - \omega^2 \cos^2 \varphi_0) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{2\lambda \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \sin \varphi_0 + \lambda^2 \right] + \frac{C\pi\omega\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\pi\nu(1 + 2\lambda^2)}{\omega} \right\}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Из рассмотрения (1.7) и (1.8) можно заключить, что в случае отсутствия второй стадии ползучести ( $\nu = 0$ ), согласно теории старения, площадь гистерезиса с увеличением количества циклов  $n$  устремляется к нулю, в то время, как, согласно теории наследственности, она устремляется к значению  $\frac{\sigma_0^2 \pi \omega \alpha C}{\alpha^2 + \omega^2}$ . Отметим

также и тот факт, что в случае установившейся ползучести ( $C = 0, \nu \neq 0$ ) теория старения и теория наследственности определяют, вообще говоря, различные результаты в обоих случаях, не зависящие от номера цикла  $n$ , однако программа нагружения может быть выбрана такой  $\left( \lambda = \frac{\cos 2\varphi_0}{4 \sin \varphi_0} \right)$ , что предсказания о площади гистерезиса по обеим теориям совпадут независимо от частоты  $\omega$ . Например, в случае нагружения, чередующегося с полной разгрузкой ( $\lambda = 1$ ), обе теории дают совпадающие предсказания по этим теориям в случае, если начальная фаза  $\varphi_0 = \arcsin(\sqrt{3/2} - 1)$ .

Ниже рассмотрим определение коэффициента поглощения  $\Psi(n)$  в форме [22]:

$$\Psi(n) = \frac{\Delta W(n)}{W(n)} \tag{1.9}$$

где  $\Delta W(n)$  – площадь петли гистерезиса, а  $W(n)$  – работа в процессе

нагружения, определяемая так:  $W(n) = \int_{t_n}^{t_n + \frac{T}{2}} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt$  (1.10)

Для расчета  $W(n)$ , согласно теории старения, при использовании (1.2) и (1.4) получим формулу

$$\begin{aligned}
W(n) = \sigma_0^2 & \left\{ \frac{C \left( 1 - e^{-\frac{\alpha T}{2}} \right)}{e^{\alpha n T} (\alpha^2 + 4\omega^2)} \left[ - \left( \frac{\alpha^2}{2} + \omega^2 \right) \cos 2\varphi_0 + \frac{\alpha\omega}{2} \sin 2\varphi_0 \right] + \right. \\
& + \frac{\left( 1 + e^{-\frac{\alpha T}{2}} \right) \lambda C}{e^{\alpha n T} (\alpha^2 + \omega^2)} \left[ (2\alpha^2 + \omega^2) \sin \varphi_0 + \alpha\omega \cos \varphi_0 \right] + \frac{\left( 1 - e^{-\frac{\alpha T}{2}} \right) C}{e^{\alpha n T}} \left( \frac{1}{2} + \lambda^2 \right) - \\
& - 2\lambda \sin \varphi_0 \left( \frac{1}{E} + C \right) + v \left[ \frac{2\lambda}{\omega} \cos \varphi_0 - \lambda \left( 2nT + \frac{\pi}{\omega} \right) \sin \varphi_0 - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\pi}{4\omega} \cos 2\varphi_0 + \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{1}{2} + \lambda^2 \right) \right] \right\} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Аналогично, для расчета  $W(n)$ , согласно теории наследственности, при использовании (1.3) и (1.4) получим формулу

$$\begin{aligned}
W(n) = \sigma_0^2 & \left\{ \frac{C(1 + e^{-\alpha T/2})}{e^{\alpha n T} (\alpha^2 + \omega^2)} \left[ \lambda\alpha + \frac{\alpha^2 (\alpha \sin \varphi_0 - \omega \cos \varphi_0)}{\alpha^2 + \omega^2} \right] (\alpha \sin \varphi_0 + \omega \cos \varphi_0) + \right. \\
& + \frac{2\lambda\alpha C}{\alpha^2 + \omega^2} (\omega \cos \varphi_0 - \alpha \sin \varphi_0) + \frac{C\omega\alpha\pi}{2(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{C\lambda(1 - e^{-\alpha T/2})}{e^{\alpha n T}} \left[ \lambda + \sin \varphi_0 - \right. \\
& \left. - \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos \varphi_0 + \omega \sin \varphi_0) \right] + \frac{v}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} + \lambda^2 \pi + 4\lambda \cos \varphi_0 \right) - \frac{2\lambda}{E} \sin \varphi_0 \left. \right\} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

В случае циклического нагружения от нуля до  $2\sigma_0$  (фиг. 1) в формуле (1.4) будем иметь  $\lambda = 1$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$ . При этом, используя формулы (1.7), (1.8), (1.11) и (1.12), получим для теории старения

$$\Delta W(n) = \sigma_0^2 \left\{ C(1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha n T} \left[ \frac{\alpha^2 + 2\omega^2}{2(\alpha^2 + 4\omega^2)} - \frac{2\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{3}{2} \right] + \frac{3vT}{4} \right\} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
W(n) = \sigma_0^2 & \left\{ C \left[ \left( 1 - e^{-\alpha T/2} \right) e^{-\alpha n T} \frac{2\alpha^2 + 7\omega^2}{\alpha^2 + 4\omega^2} - \left( 1 + e^{-\alpha T/2} \right) e^{-\alpha n T} \frac{2\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} + 2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2}{E} + vT \left( 2n + \frac{11}{8} \right) \right\} \quad (1.14)
\end{aligned}$$

а для теории наследственности –

$$\Delta W(n) = \sigma_0^2 \left\{ \frac{C}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ \frac{(1 - e^{-\alpha T}) \omega^4}{e^{\alpha n T} (\alpha^2 + \omega^2)} + \pi\omega\alpha \right] + \frac{3\pi v}{\omega} \right\} \quad (1.15)$$

$$W(n) = \sigma_0^2 \left\{ C \left[ \frac{\alpha(4\alpha + \omega\pi)}{2(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{\omega^2 \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2}}\right)}{(\alpha^2 + \omega^2)e^{\alpha n T}} - \frac{\alpha^2 \omega^2 \left(1 + e^{-\frac{\alpha T}{2}}\right)}{(\alpha^2 + \omega^2)^2 e^{\alpha n T}} \right] + \frac{3\nu\pi}{2\omega} + \frac{2}{E} \right\} \quad (1.16)$$

2. Пусть деформации материала при постоянных напряжениях  $\sigma$  описываются формулой

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + [C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t] \sigma^m \quad (2.1)$$

где  $m$  – параметр, определяющий нелинейные свойства материала при ползучести. При  $m=1$  формулы (2.1) и (1.1) совпадают.

Для описания деформаций при переменных напряжениях  $\sigma(t)$ , согласно теории старения и теории наследственности, будем иметь, соответственно,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + [C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t] \sigma^m(t) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sigma^m(\tau) [C\alpha e^{-\alpha(t-\tau)} + \nu] d\tau \quad (2.3)$$

В случае действия циклического нагружения (1.4) для определения площади гистерезиса  $\Delta W(n)$  на  $n$ -м витке, согласно формуле (1.5), для теории старения (2.2) получим

$$\Delta W(n) = \sigma_0^{m+1} \int_{T_n}^{T(n+1)} \left\{ (C\alpha e^{-\alpha t} + \nu) [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^{m+1} + \omega m [C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t] [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^m \cos(\omega t + \varphi_0) \right\} dt \quad (2.4)$$

а согласно теории наследственности (2.3) –

$$\Delta W(n) = \sigma_0^{m+1} \int_{T_n}^{T(n+1)} (C\alpha + \nu) [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^{m+1} dt - C\alpha^2 \sigma_0^{m+1} \int_{T_n}^{T(n+1)} \left\{ [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda] \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} [\sin(\omega \tau + \varphi_0) + \lambda]^m d\tau \right\} dt \quad (2.5)$$

Отметим, что интегралы в выражениях (2.4) и (2.5) могут быть определены численными методами.

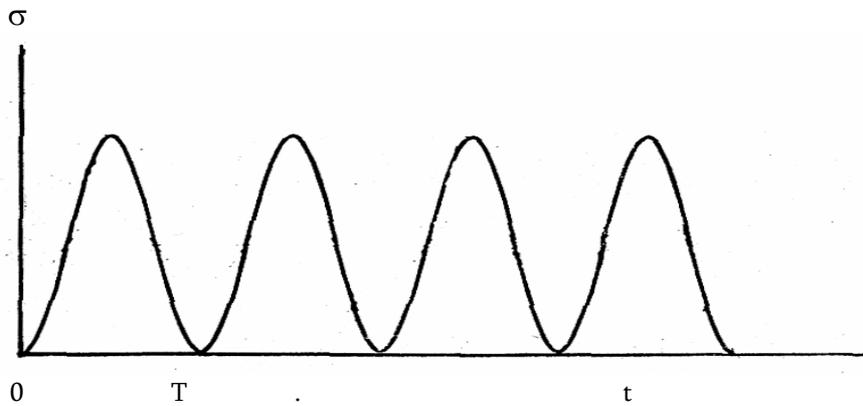
Для определения  $W(n)$  работы в процессе нагружения (1.10), согласно теории старения будем иметь

$$W(n) = \sigma_0^{m+1} \int_{T_n}^{T\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left\{ (C\alpha e^{-\alpha t} + \nu) [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^{m+1} + m\omega [C(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t] [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^m \cos(\omega t + \varphi_0) \right\} dt - \frac{2\lambda\sigma_0^2}{E} \sin \varphi_0 \quad (2.6)$$

а согласно теории наследственности –

$$\begin{aligned}
W(n) = & \sigma_0^{m+1} \int_{Tn}^{T(n+\frac{1}{2})} (C\alpha + \nu) [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda]^{m+1} dt - \\
& - C\alpha^2 \sigma_0^{m+1} \int_{Tn}^{T(n+\frac{1}{2})} \left\{ \sigma_0 [\sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda] \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} [\sin(\omega \tau + \varphi_0) + \lambda]^m d\tau \right\} dt - \\
& - \frac{2\lambda\sigma_0^2}{E} \sin \varphi_0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Как можно заключить из рассмотрения формул (2.4) и (2.5) или (2.6) и (2.7), в отличие от линейной ползучести, при нелинейной зависимости деформаций ползучести от действующего напряжения величина  $\Psi$ , определяемая формулой (1.9), зависит от напряжения  $\sigma_0$ .



Фиг. 1

3. Ниже рассматриваются результаты экспериментального исследования гистерезиса различных грунтов в условиях многократного компрессионного сжатия (фиг. 1), чередующегося с полной разгрузкой ( $\lambda = 1$ ). Опыты, осуществленные в лаборатории Института механики по инициативе и под руководством проф. С.Р. Месчяна, для получения петли гистерезиса проводились на компрессионном приборе М2 [23] с использованием цилиндрических образцов с диаметром  $d = 70$  мм и с высотой  $h = 20$  мм. Для изготовления образцов бралась грунтовая паста с влажностью  $w = 0.35$ , которая консолидировалась под давлением 1.0 МПа. После консолидации пасты образцы имели следующие физические параметры: плотность  $2.07$  г/см<sup>3</sup>, влажность 0.218 и коэффициент пористости 0.55. После полной разгрузки и затухания деформаций декомпрессии образцы подвергались испытаниям на циклическое нагружение и разгрузку, осуществляемые по следующему режиму: изменение напряжений согласно фиг.1 приближенно осуществлялось ступенями по  $0.25\sigma_a$  ( $\sigma_a$  – наибольшее значение напряжения при данном испытании) с выдержкой по 10 сек. на каждой ступени.

Все эксперименты проведены для 10 циклов нагружения и разгрузки. Экспериментальные данные коэффициента поглощения  $\Psi$  при  $\sigma_0 = 0,15$  МПа, определяемого по формуле (1.9) в сравнении с расчетными данными, полученными, согласно линейной теории старения и линейной теории наследственности при использовании соотношений (1.7), (1.11) и (1.8), (1.12), а также, согласно нелинейной теории старения и нелинейной теории наследственности при использовании соотношений (2.4), (2.6) и (2.5), (2.7), соответственно, приведены в нижеследующей табл. 1.

Расчетные данные (табл. 1) были определены на основе аппроксимации кривых ползучести согласно формулам (1.1) и (2.1) при принятии  $\nu = 0$  и при значениях  $E$ ,  $C$ ,  $\alpha$  и  $m$ , приведенных в табл. 2. Отметим, что, как показано в работе [21], соответственно аппроксимации (1.1) и (2.1) при  $\nu = 0$ , предсказания деформаций ползучести, согласно теории упрочнения [20], совпадают с теорией наследственности.

		Экспериментальные данные	Линейная теория старения	Линейная теория наследственности	Нелинейная теория старения	Нелинейная теория наследственности
Глина	n=2	0,523	0,0171	0,441	0.0388	0.520
	n=10	0,396	$3.9(10^{-6})$	0,398	$2.6(10^{-6})$	0.483
Суглинок	n=2	0,436	0,0128	0,386	0.0225	0.433
	n=10	0,326	$0.9(10^{-6})$	0,315	$0.43(10^{-6})$	0.419
Супесь	n=2	0,341	0,0045	0,264	0.00697	0.402
	n=10	0,255	$4.98(10^{-6})$	0,255	$0.29(10^{-6})$	0.399

.402n=100,2554,98(10-60,2550.29(10-60.399

Значения механи

Вид грунтов	Глина	Суглинок	Супесь
$\tilde{N}$	0.00955	0.00826	0.00775
$\alpha$ сутки <sup>-1</sup>	0.8	0.9	1.2
E МПа	21,5	16,5	10,5
$m$	0.362	0.421	0.470

и 0.80.91.2 МПа 21,516,510,50.3620.4210.470. Отметим, что экспериментальные данные получены на основе усреднения десяти испытанных образцов при различных значениях  $\sigma_0$ , так как  $\Psi(n)$  как  $\sigma_0$  не выявлено какой-либо зависимости от  $\sigma_0$ . Как можно заключить из представленных в табл. 1 результатов, несмотря на хорошее описание кривых ползучести при ступенчато-возрастающих напряжениях по теории старения, в случае циклического нагружения, чередующегося с полной разгрузкой, теория старения неприемлема. Однако теория наследственности при  $\nu = 0$  как в нелинейном, так и в линейном варианте, описывает коэффициент поглощения довольно точно, что позволяет рекомендовать ее для описания гистерезиса.

## ЛИТЕРАТУРА

- Матвеев В. В. К описанию контура петли механического гистерезиса.  
1. //Проблемы прочности. 1973. № 8. С. 3-9.

2. Пановко Я. Г. Об учете гистерезисных потерь в задачах прикладной теории упругих колебаний //ЖТФ. 1953. Т. 23. Вып. 3. С. 486-497
3. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 195 с.
4. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 130 с.
5. Шилькрут Д. И. Единая реологическая гипотеза для описания совместного влияния гистерезиса и наследственных (релаксационных) явлений на колебательные процессы в не вполне упругих системах. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 97-111.
6. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Изд-во литературы по строительству. 1968. 418 с.
7. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и переменном нагружении. М.: Машиностроение, 1968. 343 с.
8. Герберт Д. С., Армстронг Д. И. Испытание на ползучесть сплавов нимоник при изменяющемся напряжении и температуре. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М-Л.: Госэнергоиздат, 1960. С. 111-116.
9. Симмонс В. Ф., Кросс Х. К. Испытания различных материалов на ползучесть при постоянном и переменном нагружении. Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. М-Л.: Госэнергоиздат, 1960. С. 148-155.
10. Paslay P. R., Wells C. H. Uniaxial creep behavior of metals under cyclic temperature and stress or strain variations. //Trans. ASME. 1976. E 43, № 3. P. 445-449.
11. Голуб В. П. Влияние температуры на процесс циклической ползучести жаропрочных сплавов при многоцикловом нагружении. //Проблемы прочности. 1981. 144. № 6. С. 17-22.
12. Демидов А. С. О восстановлении деформации ползучести стали X18H10T при циклическом изменении напряжения. //Проблемы прочности. 1978. 106. № 4. С. 30-32.
13. Александровский С. В., Колесников Н. А. Нелинейная ползучесть бетона при ступенчато-изменяющихся напряжениях. //Бетон и железобетон. 1971. № 6. С. 24-27.
14. Lagneborg R. A theoretical approach to creep deformation during intermittent load. //Trans. ASME, 1971. D93. No 2. P. 205-210.
15. Шорр Б. Ф. Расчеты на нестационарную ползучесть. //Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1970. В. 9. С. 165-173.
16. Давиденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях. //ЖТФ. 1938. Т. 8. Вып. 6. С. 483-499.
17. Месчан С. Р., Петросян Т. Л. Применение статического метода определения логарифмического декремента колебаний грунтов в условиях компрессии. //Изв. АН Арм.ССР. Науки о земле. 1989. № 5. С. 69-74.
18. Шилькрут Д. И. Сравнение основного реологического закона эллиптического типа с другими реологическими зависимостями, описывающими явление гистерезиса. //Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1961. № 5. С. 52-57.

19. Шилькрут Д. И. Определение реологического закона не вполне упругого тела для периодических процессов в случае гистерезисной петли эллиптического типа. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 141-146.
20. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
21. Симонян А. М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 255 с.
22. Савченко И. А. Экспериментальные исследования коэффициента поглощения грунтов. //В сб.: Динамика грунтов. М.: 1961. № 44. С. 107-111.
23. Месчан С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. М.: Недра, 1974. 192с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
11.11.2005

**Բովանդակություն**

**Содержание**

<p>Ա.Ռ.Ոսկանյան, Է.Խ.Գրիգորյան                  Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կտոր առ կտոր                  համասեռ առաձգական ներդիրով                  առաձգական տարածությունում</p>	<p>3</p>	<p>Восканян А.Р., Григорян Э.Х.                  ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ                  В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КУСОЧНО-                  ОДНОРОДНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ                  ВКЛЮЧЕНИЕМ</p>
<p>Ն. Ա Ազարյան, Գ. Ա. Գևորգյան                  Անընդհատության պայմանների հաշվառումը                  վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծոման                  խնդիրների լուծման ժամանակ                  Գ. Լ. Ազատյան</p>	<p>21</p>	<p>Азарян Н. А., Геворкян Г. А.                  УЧЕТ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИ                  РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН                  МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ                  Азатян Г.Л.</p>
<p>Օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումները                  մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում</p>	<p>29</p>	<p>ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ                  ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ                  ВЯЗКОСОПРОТИВЛЕНИЯ</p>
<p>Մ.Վ. Բելուբեկյան, Զ.Լ. Մարտիրոսյան                  Դիմային հարթությունների վրա շոշափող բեռի                  առկայության դեպքում սալի գլանաձև ծոման մասին</p>	<p>41</p>	<p>Белубекян М.В., Мартиросян К.Л.                  К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ПО ФОРМ                  ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ                  НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА                  ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ</p>
<p>Գ. Ռ. Ղուլգազարյան, Ռ.Գ. Սահակյան                  Երեք ծայրերով հողակապորեն ամրակցված,                  փոփոխական կորության բաց օրթոտրոպ գլանային                  թաղանթի տատանումները</p>	<p>47</p>	<p>Гулгазарян Г.Р., Саакян Р.Д.                  КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ                  НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ                  ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ                  ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ С ТРЕМЯ                  ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ</p>
<p><b>Վ.Ս.Սարգսյան, Ե.Ս.Միրզոյան, Ս.Ե.Միրզոյան</b>  <b>Բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակներով</b>  <b>առաձգամածուցիկ հարթության</b>  <b>լարվածային վիճակի մասին</b></p>	<p>59</p>	<p>Саркисян В.С., Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е.                  НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВНЫХ                  УПРУГО-ПОЛЗУЧИХ ТЕЛ, АРМИРОВАННЫХ                  ТОНКИМИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ                  ВКЛЮЧЕНИЯМИ</p>
<p>Հ. Մ. Պողոսյան                  Երկշերտ սալի ստիպողական տատանումների                  բնույթը երկրորդ եզրային խնդրում</p>	<p>69</p>	<p>Погосян А. М.                  О ХАРАКТЕРЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ                  ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ВО ВТОРОЙ                  КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ</p>
<p><b>Բ.Խ. Էշմատով</b>  <b>Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ գլանային պանելների</b>  <b>դինամիկ կայունությունը</b></p>	<p>80</p>	<p>Эшматов Б.Х.                  ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ                  ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ                  ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ</p>
<p>Է. Վ. Մարտիրոսյան                  Ճեղքավոր մագնիսաառաձգական սահքի ալիքներ                  էկրանացված մագնիսական դաշտում</p>	<p>92</p>	<p>Мартиросян Э. В.                  ЩЕЛЕВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ                  ВОЛНЫ В ЭКРАНИРОВАННОМ МАГНИТНОМ                  ПОЛЕ</p>

Վ.Վ. Ավետիսյան, Ս.Ռ. Մարտիրոսյան Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով օպտիմալ՝ ըստ նվազագույն լուսային էներգաձախսերի դեկավարումով փնտրում	100	Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. ОПТИМАЛЬНЫЙ УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОИСК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ
Հ.Գ., Շեկյան, Վ.Վ. Ջաքարյանց Ռոտորի կայունության կորուստը մագնիսական դաշտում	110	Шекян Г.Г., Захарянц В.В. ПОТЕРЯ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРАЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СТАТОРА
Տ. Լ. Պետրոսյան, Ա. Մ. Սիմոնյան Հիստերեզիսի ուսումնասիրությունը ցիկլիկ սողքի դեպքում	114	Петросян Т. Л., Симонян А. М. ИССЛЕДОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ МАЛОЦИКЛОВОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ