

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2007

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ  
ДВИЖУЩЕГОСЯ НА ПЛОСКОСТИ ЦЕЛЕВОГО ОБЪЕКТА

Аветисян В.В.

**Ключевые слова:** гарантированный поиск, оптимальное управление, подвижной объект.

**Key words:** guaranteed search, optimal control, mobile object.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Հարթության մեջ շարժվող նպատակային օբյեկտի փնտրման օպտիմալ երաշխավորող  
ղեկավարումը

Դիտարկվում և լուծվում է հարթության մեջ շարժվող օբյեկտի օպտիմալ երաշխավորված փնտրման խնդիրը, երբ հայտնի է միայն, որ սկզբնական պահին որոնելի օբյեկտը գտնվում է տրված շրջանային տիրույթում: Որպես փնտրող է դիտարկվում եռաչափ տարածության մեջ ղեկավարվող օբյեկտը: Փնտրումն իրականացվում է շարժական կոնի շրջանաձև ինֆորմացիոն հիմքի միջոցով: Առաջարկված է ղեկավարման մի ալգորիթմ և ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում որոնելի օբյեկտը երաշխավորված հայտնաբերվում է հնարավոր նվազագույն ժամանակում:

V.V. Avetisyan

Optimal guaranteeing control of target object search moving on the plane.

The problem of optimal guaranteed search of the object performing controlled moving on the plane is considered. It is supposed that the location of required object at the initial moment is indefinite in the given domain. Searching object is an object which controlled in three-dimensional space. The detection of required object is fulfilled with the help of informative circular base of the moving cone. The control algorithm is suggested, as well as necessary and sufficient conditions under which the required object is found in minimal time are received.

Рассматривается и решается задача оптимального гарантированного поиска объекта, совершающего управляемое движение на плоскости. Предполагается, что положение искомого объекта в начальный момент неопределенно в заданном круге. В качестве ищущего принимается объект, управляемый в трехмерном пространстве. Обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью информационного кругового основания подвижного конуса. Предложен алгоритм управления, а также получены необходимые и достаточные условия, при которых искомый объект гарантированно обнаруживается за возможно минимальное время.

**Введение.** Рассматривается задача оптимального гарантированного поиска подвижного целевого объекта в предположении, что известно его положение в начальный момент с точностью до заданного круга неопределенности на плоскости. В качестве ищущего принимается объект, управляемый в трехмерном пространстве. Обнаружение – определение точных координат искомого объекта осуществляется с помощью информационного кругового основания некоторого подвижного конуса. Необходимо осуществить обнаружение наискорейшим образом. Основное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска подвижного объекта [1-6] состоит в том, что в [1-4] поиск ведется внутри области неопределенности искомого объекта, а область обнаружения – сфера или круг постоянного радиуса; в работе [5] поиск начинается вне круга неопределенности, однако ищущий объект перемещается с постоянным

радиусом круга обнаружения на плоскости, обладая при этом большей скоростью, чем искомый объект; в [6] отыскивается неподвижный объект, а область обнаружения – полуплоскость.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеются два точечных объекта  $X$  и  $Y$ , из которых  $X$  – ищущий, а  $Y$  – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений (“простые движения”, по терминологии [7]):  $X$  – в пространстве, а  $Y$  – на плоскости согласно следующим соотношениям:

$$X: \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x^0; \quad |u(t)| \leq U; \quad x, u \in R^3 \quad (1.1)$$

$$Y: \dot{y} = v, \quad y(t_0) = y^0; \quad |v(t)| \leq V; \quad y, v \in R^2 \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2)  $x, y$  – радиус-векторы координат объектов;  $u, v$  – их управляющие скорости,  $U, V$  – максимально возможные скорости объектов  $X, Y$ .

Пусть в каждый момент времени  $t \geq t_0$  объекту  $X$  точно известно свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта  $Y$ . О координатах  $Y$  объекту  $X$  известно лишь то, что в начальный момент времени  $t = t_0$   $Y$  находится в круге

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2: |y - \tilde{y}^0| \leq r_0\} \quad (1.3)$$

координаты центра  $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0)$  и радиус  $r_0$  которого также известны  $X$ .

Возможность установления точных координат искомого объекта  $Y$  осуществляется с помощью подвижной информационной области

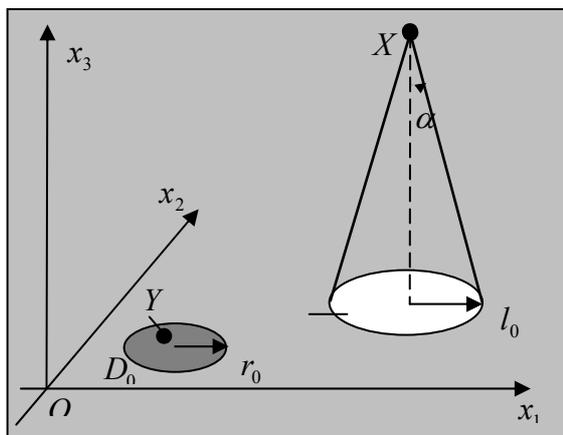
$$G(x(t), C) = \left\{ \tilde{\xi} \in R^2: |\tilde{\xi}(t) - \tilde{x}(t)| \leq l(t) = Cx_3(t), \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \right\} \quad (1.4)$$

$$G(x(t_0), C) = G(\tilde{x}(t_0), x_3(t_0), C) = G_0, \quad C = tg\alpha > 0, \quad t \geq t_0$$

представляющая собой круговое основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения  $X$  (фиг. 1).

Искомый объект  $Y$  считается обнаруженным в момент времени  $t^* \geq t_0$ , если впервые выполняется условие его попадания в круг обнаружения

$$y \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } |\tilde{x}(t^*) - y(t^*)| \leq l, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2), \quad t^* \geq t_0 \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Так как в силу эволюционного свойства [8] множество достижимости  $D(t)$  искомого объекта (1.2), (1.3) непрерывно меняется во времени при  $t \geq t_0$ , то оно также представляет собой круг, причем  $D(t) \supset D_0$ . Таким образом, если  $D(t^*)$  – область достижимости искомого объекта  $Y$ , а  $G(x(t^*))$  – круг обнаружения ищущего объекта  $X$  в момент времени  $t^* \geq t_0$  при некотором допустимом управлении  $u(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t^*$ , то из геометрических соображений очевидно, что условие обнаружения (1.5) в момент  $t^*$  равносильно условию поглощения области достижимости искомого объекта  $Y$  кругом обнаружения ищущего объекта  $X$ :

$$D(t^*) \subset G(x(t^*)) \quad (1.6)$$

Пусть требуется построить такое управляемое движение объекта  $X$ , при котором условие поглощения (1.6) происходит за минимально возможное время  $T$ .

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу гарантированного поиска.

**Задача 1.** Для заданного начального положения  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$  и заданных кругов обнаружения  $G_0$  и неопределенности  $D_0$  найти число  $T > 0$  и допустимое управление  $u(t)$  объекта  $X$  на интервале  $[t_0, T]$ , для которых при любом начальном положении  $y^0 \in D_0$  объекта  $Y$  и любом допустимом управлении  $v(t)$  на интервале  $[t_0, T]$  гарантируется условие поглощения (1.6) в некоторый момент времени  $t^*$ , не позднее времени  $T$ :  $t^* \leq T$ .

Для заданной начальной позиции  $\{x^0, G_0, D_0\}$  управление  $u(t)$  – решение задачи 1 назовем гарантирующим, а время  $T$  – гарантированным временем поиска.

Если скорость расширения круга обнаружения больше, чем скорость расширения области неопределенности –  $CU > V$ , то задача 1 имеет решение для

любой начальной позиции  $\{x^0, G_0, D_0\}$ . Действительно, в этом случае условие (1.6) можно осуществить за конечное время движением  $X$  с максимальной скоростью  $U$  лишь по вертикали вверх, так как при таком способе движения скорость  $\dot{l} = C\dot{x}_3 = CU$  расширения круга обнаружения будет больше, чем скорость расширения круга неопределенности искомого объекта.

В данной работе положим, что выполняется обратное к  $CU > V$  неравенство:

$$CU \leq V \quad (1.7)$$

Таким образом, содержательный смысл рассматриваемой постановки задачи 1 при условии (1.8) состоит в следующем. Возможно ли обнаружить искомым объект, если скорость расширения области обнаружения не больше скорости расширения области неопределенности, и если да, то при каких соотношениях параметров задачи это возможно?

Оказывается, что при условии (1.7) задача 1, в зависимости от параметров  $\{x^0, G_0, D_0\}$ , 1) либо не имеет решения, 2) либо имеет единственное решение, 3) либо имеет бесчисленное множество решений. В последнем случае для выделения единственного решения естественно наложить еще требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 2:

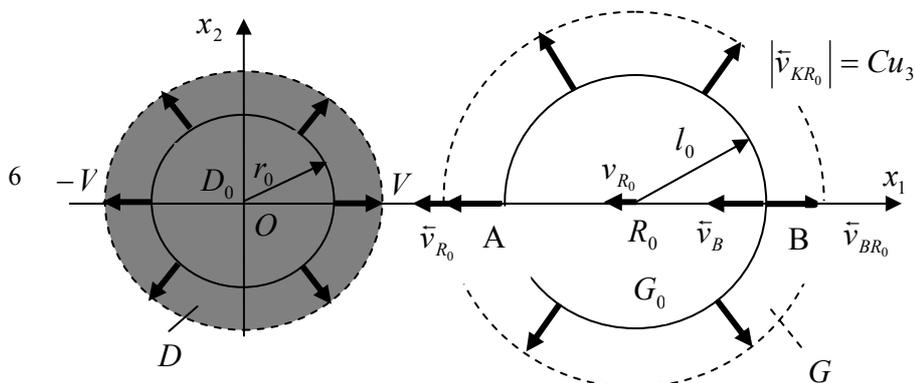
**Задача 2.** Для заданной начальной позиции  $\{x^0, G_0, D_0\}$  найти гарантирующее управление  $u(t)$ , при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта  $T$  минимально.

**2. Алгоритм гарантирующего управления.** Не нарушая общности, положим, что центр  $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$  круга неопределенности  $D_0 \subset R^2$  искомого объекта  $Y$  совпадает с началом декартовой системы координат  $Ox_1x_2$ , а ищущий объект  $X$  в момент времени  $t = 0$  находится в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ,  $x_1^0 = R_0$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = C^{-1}l_0$ , проекция которой на плоскость  $Ox_1x_2$ , т.е. центр круга обнаружения находится в точке  $(R_0, 0)$ ,  $R_0 > 0$  оси  $Ox_1$  (фиг. 2).

Рассмотрим такое движение  $X$  в вертикальной плоскости  $Ox_1x_3$ , при котором  $X$ , т.е. центр круга обнаружения вдоль горизонтальной оси  $Ox_1$  перемещается по направлению к центру круга неопределенности  $D_0$  с некоторой постоянной составляющей скорости  $(-u_1)$ , а вдоль вертикальной оси  $Ox_3$   $X$  перемещается вверх с постоянной составляющей скорости  $u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2}$ :

$$u = (-u_1, u_2, u_3), \quad 0 < u_1 \leq U, \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2} \quad (2.1)$$

При таком управлении точки  $A$  и  $B$ , т.е. точки пересечения круга



Фиг. 2

обнаружения с осью  $Ox_1$ , перемещаются вдоль оси  $Ox_1$  со скоростями  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$ , проекции которых на оси  $Ox_1$  определяются, соответственно, как  $(-u_1 - Cu_3)$  и  $(-u_1 + Cu_3)$ . При этом очевидно, что модули скоростей всех граничных точек  $K$  круга обнаружения относительно подвижного центра  $\tilde{x} = (R_0, 0)$  равны  $Cu_3$ , а направление вектора  $\bar{v}_B$  вдоль оси  $Ox_1$  зависит от знака величины  $(-u_1 + Cu_3)$  (фиг. 2). Таким образом, происходит одновременное расширение и перемещение круга обнаружения, как целое, к центру области неопределенности  $D_0$ .

Из геометрических соображений следует, что для заданных параметров  $R_0, r_0, l_0; U, V, C$  (1.8) и выбранного способа управления (2.1), необходимым и достаточным условием поглощения (1.6) является выполнение неравенств

$$0 < T^- \leq T^+ \quad (2.2)$$

$$T^- = (R_0 + r_0 - l_0)/(u_1 + Cu_3 - V), \quad T^+ = (R_0 - r_0 + l_0)/(u_1 - Cu_3 + V) \quad (2.3)$$

где  $T^-$  – момент времени, начиная с которого точка  $A$  оказывается левее от левой точки пересечения круга неопределенности с осью  $Ox_1$ , а  $T^+$  – время, в течение которого точка  $B$  пока еще находится вне круга неопределенности. Если момент времени  $T^-$  наступает не позднее момента  $T^+$ , то происходит поглощение и  $T^-$  будет гарантированным временем обнаружения. Неравенство  $T^- > 0$ , очевидно, означает, что в начальный момент поглощение еще не наступило.

В соответствии с (2.1), (2.3), неравенства (2.2) выполняются в том и только в том случае, когда разрешима относительно параметров  $R_0$  и  $u_1$  следующая система:

$$\begin{cases} R_0^{(1)} < R_0 \leq R_0^{(2)}(u_1) \\ u_1^- < u_1 < u_1^+ \end{cases} \quad (2.4)$$

при следующих условиях:

$$l_0 - r_0 > 0, \quad CU \leq V < U\sqrt{1+C^2} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} R_0^{(1)} &= l_0 - r_0, & R_0^{(2)} &= u_1(V - C\sqrt{U^2 - u_1^2})^{-1}(l_0 - r_0) \\ u_1^\pm &= (V \pm C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2})/(1+C^2), & 0 &\leq u_1^-, u_1^+ \leq U \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система (2.4) определяет область существования решения задачи 1 на плоскости параметров  $u_1, R_0$ :

$$H(u_1, R_0) = \left\{ u_1, R_0 : R_0^{(1)} < R_0 \leq R_0^{(2)}(u_1), \quad u_1^- < u_1 < u_1^+ \right\} \quad (2.7)$$

Для функции  $R_0^{(2)}(u_1)$ ,  $u_1^- < u_1 < u_1^+$  (2.4), описывающая границу области (2.6), минимум и минимальное значение определяются следующим образом:

$$\text{при } CU < V \quad u_1^{\max} = UV^{-1}\sqrt{V^2 - C^2U^2}, \quad u_1^{\max} \in (u_1^-, u_1^+) \quad (2.8)$$

$$R_0^{\max} = \max_{u_1^- < u_1 < u_1^+} R_0^{(2)}(u_1) = R_0^{(2)}(u_1^{\max}) = U(V^2 - C^2U^2)^{-1/2}(l_0 - r_0) < \infty \quad (2.9)$$

$$\text{при } CU = V \quad u_1^{\max} = u_1^- = 0, \quad u_1^{\max} \notin (u_1^-, u_1^+), \quad R_0^{\max} = \infty \quad (2.10)$$

Следовательно, в случае

$$CU < V, \quad \forall R_0 \in (R_0^{(1)}, R_0^{\max}], \quad R_0^{\max} < \infty \quad (2.11)$$

существует одно  $u_1 = u_1^{\max}$  или множество гарантирующих управлений и соответствующие им значение гарантированного времени поиска  $T^-(R_0, u_1)$  (2.3).

В случае

$$CU = V, \quad \forall R_0 \in (R_0^{(1)}, R_0^{\max}), \quad R_0^{\max} = \infty \quad (2.12)$$

согласно (2.6)-(2.10), ни при каком значении гарантирующее управление не определяется единственным образом.

С учетом (2.8)-(2.12) множество гарантирующих управлений имеет вид

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(R_0) \leq u_1 \leq u_1^{(2)}(R_0), & \quad \text{если } CU < V \\ u_1^- < u_1 \leq u_1^{(2)}(R_0), & \quad \text{если } CU = V \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$u_1^{(1),(2)}(R_0) = \{(l_0 - r_0)R_0V \pm d\} \times \{R_0^2C^2 + (l_0 - r_0)^2\}^{-1} \quad (2.14)$$

$$d = \sqrt{(l_0 - r_0)^2 R_0^2 V^2 - (V^2 - C^2U^2)R_0^2 [R_0^2 C^2 + (l_0 - r_0)^2]}$$

– корни уравнения

$$R_0 = u_1(l_0 - r_0)(V - C\sqrt{U^2 - u_1^2})^{-1} \quad (2.15)$$

причем  $u_1^- < u_1^{(1)}(R_0) < u_1^{(2)}(R_0) < u_1^+$ .

**3. Оптимальное гарантирующее управление.** Далее, в области (2.7) решается задача 2 – найти управление  $u_1^{opt} \in [u_1^{(1)}, u_1^{(2)}]$ , при котором

$$T^{opt} = \min_{u_1^{(1)} < u_1 < u_1^{(2)}} T^-(u_1, R_0) \quad (3.1)$$

Для любого  $R_0$  из (2.11), (2.12) функция  $T^-(R_0, u_1)$ ,  $u_1^- < u_1 < u_1^+$ , достигает единственного минимума в точке:

$$u_1 = u_1^{\min} = U / \sqrt{1 + C^2}, \quad u_1^- < u_1^{\min} < u_1^+ \quad (3.3)$$

В зависимости от значения  $R_0$ , удовлетворяющего одному из случаев (2.11), (2.12), точка минимума (3.3) либо принадлежит множеству гарантирующих управлений (2.13), либо находится вне этого множества –  $u_1^{\min} \in (u_1^{(2)}(R_0), u_1^+]$ . В первом случае точка минимума является оптимальной в рассматриваемой задаче 2, а во втором – оптимальной является правая крайняя точка  $u_1^{(2)}(R_0)$  отрезков (2.10). Совпадение  $u_1^{(2)}(R_0) = u_1^{\min}$  имеет место при некотором значении  $R_0 = R_0^*$ :

$$R_0^* = R_0^{(2)}(u_1) \Big|_{u_1=u_1^{\min}} = U(V\sqrt{1+C^2} - C^2U)^{-1/2}(l_0 - r_0) \quad (3.4)$$

Таким образом, для заданных параметров  $r_0, l_0, U, V$ , удовлетворяющих условиям (1.7) и (2.5), компоненты оптимального гарантирующего управления и оптимальное гарантированное время  $T^{\text{opt}}$  определяются следующим образом:

$$u_1^{\text{opt}} = \begin{cases} u_1^{\max}; & T^-(u_1^{\max}, R_0), & \text{если } CU < V \text{ и } R_0 = R_0^{\max} \\ u_1^{(2)}(R_0); & T^-(u_1^{(2)}(R_0), R_0), & \text{если } CU \leq V \text{ и } R_0 \in (R_0^*, R_0^{\max}) \\ & & u_1^{\max} < u_1^{(2)}(R_0) < u_1^{\min} \\ u_1^{\min}; & T^-(u_1^{\min}, R_0), & \text{если } CU \leq V \text{ и } R_0 \in (R_0^{(1)}, R_0^*] \\ & & u_1^{\max} < u_1^{\min} \leq u_1^{(2)}(R_0) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$u_2^{\text{opt}} = 0, \quad u_3^{\text{opt}} = \sqrt{U^2 - (u_1^{\text{opt}})^2}$$

где  $u_1^{\max}, u_1^{(2)}(R_0), u_1^{\min}, R_0^{(1)}, R_0^*, R_0^{\max}$  определяются уже известными соотношениями (2.8), (2.14), (3.2), (2.6), (3.3), (2.9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып. 1. С. 3-12.
2. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. № 1. Вып. С. 827-862.
3. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С. 58-66.
4. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 31-39.
5. Петросян Л.А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. С.-ПУ: 1992. 217 с.

6. Меликян А.А. Задача оптимального быстрогодействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 3-11.
7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.:Мир.1967. 479 с.
8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука. 1988. 319 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
24.11. 2006

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УМЕНЬШЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО  
НАПРЯЖЕНИЯ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Гнуни В. Ц., Казарян К. Б.

**Ключевые слова:** космический лифт, оптимизация, прочность.

**Key words:** space elevator, optimization, strength.

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան, Վ.Ց. Գնունի, Կ.Բ. Ղազարյան

Տիեզերական վերելակի ճոպանի մաքսիմալ լարվածության փոքրացման մի եղանակի մասին

Տիեզերական վերելակի նախագծի իրականացման հնարավորությունը կապված է մի շարք բարդ խնդիրների հետ: Դրանցից մեկը՝ ճոպանի որոշակի հատվածում շատ մեծ լարումների առաջացումն է, որոնք գերազանցում են ժամանակակից նյութերի ամրության սահմանը: Տվյալ հրապարակման նպատակն է լուծել ճոպանի գերլարված հատվածներում մաքսիմալ լարվածության փոքրացման խնդիրը՝ փոփոխելով ճոպանի ընդլայնական հատույթի մակերեսը:

S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, V. Ts. Gnuni, K. B. Ghazaryan

On some method of the space elevator maximum stress reduction

The possibility of the realization and exploitation of the space elevator project is connected with a number of complicated problems. One of them are large elastic stresses arising in the space elevator ribbon body, which are considerably bigger than the limit of strength of modern materials. This note is devoted to the solution of problem of maximum stress reduction in the ribbon by the modification of the ribbon cross-section area.

Возможность осуществления проекта космического лифта связана с рядом сложных проблем. Одна из проблем (появление очень больших напряжений в определенном участке троса [1], которые намного больше предела прочности современных материалов. Цель настоящей заметки – решить задачу уменьшения максимального напряжения в перенапряженных участках троса путем изменения площади поперечного сечения.

1. Известно, что на трос, спущенный из космоса на Землю, закрепленный одним из концов на Земле и со свободным концом в космосе, действует распределенная по длине троса нагрузка [1,2]

$$F(x) = \rho g_0 h_0 g(x), \quad g(x) = \alpha(1+x) - (1+x)^{-2} \quad (1.1)$$

которая является суммой сил – центробежной и притяжения. В (1.1) приняты обозначения [2]

$$x = \frac{z}{R_0}, \quad \alpha = \frac{\omega^2 R_0}{g_0} \approx \frac{1}{288}, \quad 0 \leq z \leq l \quad (1.2)$$

где  $R_0$  – радиус Земли,  $\omega$  – частота вращения Земли,  $g_0$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $l$  – длина троса,  $\rho$  – плотность материала троса.

Функция  $g(x)$  обладает следующими свойствами:

$$g(x) > 0 \text{ при } x < x_0, \quad g(x) < 0 \text{ при } x > x_0, \quad x_0 \approx 5,6 \quad (1.3)$$

Для троса с переменным поперечным сечением  $S(x)$  напряжение  $\sigma(x)$  определяется из уравнения

$$\frac{dS(x)\sigma(x)}{dx} + S(x)F(x) = 0 \quad (1.4)$$

При  $S(x) = \text{const}$  имеем общеизвестную задачу определения напряжения в тросе и длину растянутого троса при условиях

$$\sigma(x) \geq 0, \quad \sigma(0) = \sigma(L_0) = 0, \quad L_0 = l/R_0 \quad (1.5)$$

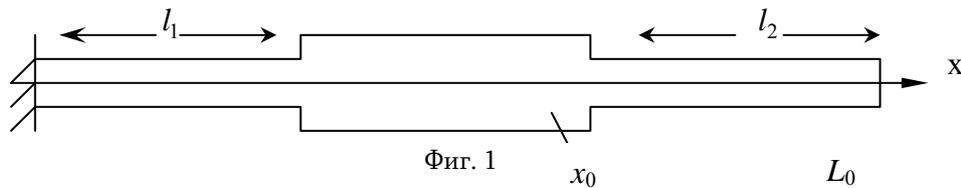
Приведенная общая задача имеет следующее общее решение :

$$\sigma(x) = \rho g_0 R_0 \frac{x}{1+x} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{x}{2} \right) (1+x) \right], \quad L_0 \approx 22,5 \quad (1.6)$$

В частном случае при  $S(x) = \text{const}$  следует, что максимальное напряжение будет при  $x = x_0$

$$\max_x \sigma(x) = \sigma(x_0) \approx 0,78 \rho g_0 R_0 \quad (1.7)$$

Теперь рассматриваем следующую задачу : при длине троса  $L_0$ , определяемого из условия (1.6) утолщением троса в окрестности  $L_0 > x_0 > l_1$ , уменьшить максимальное напряжение в тросе по сравнению с (1.7) при ограничении  $\sigma(x) \geq 0$ . С этой целью принимается модель троса с кусочно-однородным поперечным сечением (фиг. 1).



Фиг. 1

где

$$S(x) = \begin{cases} S_1 & \text{при } 0 \leq x < l_1 \\ S_2 & \text{при } l_1 \leq x \leq L_0 - l_2 \\ S_1 & \text{при } L_0 - l_2 < x < L_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} l_1 < x_0 \\ l_2 < L_0 - x_0 \end{matrix} \quad (1.8)$$

Интегрированием уравнения (1.4) для каждого из трех участков троса получается

$$\sigma(x) = \begin{cases} -\int_0^x F(\xi) d\xi & 0 \leq x < l_1 \\ -\int_{-l_1}^x F(\xi) d\xi & l_1 \leq x \leq L_0 - l_2 \\ \int_{-L_0 - l_2}^x F(\xi) d\xi & L_0 - l_2 < x < L_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

2. Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий равенств усилий при  $x = l_1$  и  $x = L_0 - l_2$

$$S_1 \sigma_1(l_1) = S_2 \sigma_2(l_1), \quad S_2 \sigma_2(L_0 - l_2) = S_1 \sigma_3(L_0 - l_2) \quad (2.1)$$

или

$$-S_1 \int_0^{l_1} F(x) dx = S_2 C_1, \quad S_2 \left[ -\int_{l_1}^{L_0 - l_2} F(x) dx - C_1 \right] = S_1 C_2 \quad (2.2)$$

В промежутке  $l_1 \leq x \leq L_0 - l_2$  максимальное значение напряжения достигается в точке  $x = x_0$  ( $F(x_0) = 0$ )

$$\max_x \sigma_2(x) = \sigma_2(x_0) \quad (2.3)$$

В промежутке  $0 \leq x \leq l_1$ ,  $L_0 - l_2 \leq x \leq L_0$  напряжения достигают максимальных значений на концах

$$\max_x \sigma_1(x) = \sigma_1(l_1), \quad \max_x \sigma_3(x) = \sigma_3(L_0 - l_2) \quad (2.4)$$

Задача оптимизации будет заключаться в том, чтобы выбором параметров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\gamma$  минимизировать наибольшее значение напряжения из максимальных значений (2.3), (2.4)

Покажем, что условие такой оптимальности будет удовлетворено, если

$$\sigma_1(l_1) = \sigma_2(x_0) = \sigma_3(L_0 - l_2) \quad (2.5)$$

Условие равенства  $\sigma_1(l_1) = \sigma_3(L_0 - l_2)$  приводит к равенству

$$\int_{l_1}^{L_0 - l_2} g(x) dx = 0 \quad (2.6)$$

или

$$L_0 - l_2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1+l_1)^2 + \frac{8}{\alpha(1+l_1)}} - 3 - l_1 \right] \quad (2.7)$$

Так как условие  $\sigma_1(l_1) = \sigma_2(x_0)$  не содержит параметра  $l_2$ , то равенство (2.7) принимается, как формула для определения  $l_2$  при заданном значении для  $l_1$ .

Из (1.9) с учетом (1.1) и (2.2) имеем следующие выражения для  $\sigma_1(l_1)$  и  $\sigma_2(x_0)$

$$\begin{aligned}\sigma_1(l_1) &= \rho g_0 R_0 \frac{l_1}{1+l_1} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right] \\ \sigma_2(x_0) &= \rho g_0 R_0 \frac{x_0 - l_1}{(1+x_0)(1+l_1)} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{x_0 + l_1}{2} \right) (1+x_0)(1+l_1) \right] + \\ &+ \gamma \frac{l_1}{1+l_1} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right]\end{aligned}\quad (2.8)$$

где 
$$\gamma = \frac{S_1}{S_2} < 1$$

Из условий (2.5) получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}f(l, \gamma) &\equiv \frac{x_0 - l_1}{1+x_0} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{x_0 + l_1}{2} \right) (1+x_0)(1+l_1) \right] - \\ &- \gamma / l_1 \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right] = 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

Производная  $\sigma_1(l_1)$  по  $l_1$  имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_1(l_1)}{\partial l_1} = \frac{1 - \alpha(1+l_1)^3}{(1+l_1)^2} > 0 \quad (l_1 < x_0)\quad (2.10)$$

т.е.  $\sigma_1(l_1)$  – возрастающая функция.

Производная же функции  $\sigma_2$  по  $l_1$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial l_1} = \frac{(1-\gamma) [\alpha(1+l_1)^3 - 1]}{(1+l_1)^2} < 0 \quad (\gamma < 1, l_1 > x_0)\quad (2.11)$$

отрицательна, т.е.  $\sigma_2(x_0)$  есть убывающая функция. Здесь учитывается равенство

$$\alpha(1+x_0)^3 - 1 = 0\quad (2.12)$$

Следовательно, задача оптимизации будет решена, если из уравнения (2.9), которое получается из равенства  $\sigma_1(l_1) = \sigma_2(x_0)$ , определить параметр  $l_1$  для различных значений  $\gamma$ . Уравнение (2.9) фактически является кубическим уравнением относительно  $l_1$  и имеет один действительный корень в промежутке  $0 < l_1 < x_0$ . Действительно, нетрудно показать, что при значениях  $\alpha^{-1} = 288$ ,  $x_0 = 5,6$ ;  $0 < \gamma < 1$  имеют место неравенства

$$f(0, \gamma) > 0, f(x_0, \gamma) < 0 \quad (2.13)$$

Таблица 1

$\gamma$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$l_1$	5,6	2,643	1,930	1,533	1,276	1,093	0,957	0,851	0,767	0,698	0,640
$l_2$	16,9	12,616	10,867	9,634	8,818	7,924	7,295	6,761	6,273	5,911	3,741
$\tilde{\sigma}$	0,78	0,704	0,646	0,595	0,553	0,516	0,484	0,456	0,430	0,408	0,387

В табл. 1 приводятся вычисленные значения  $l_1$ , согласно решению уравнения (2.9) при различных значениях  $\gamma$ , а также  $l_2$ , найденные по формуле (2.7), и безразмерный параметр максимального значения напряжения

$$\tilde{\sigma} = \frac{\max \sigma(x)}{\rho g_0 R_0} \quad (2.14)$$

Из табл.1, в частности, видно, что если площадь поперечного сечения в промежутке, содержащем точку  $x_0$ , увеличить в десять раз, то максимальное напряжение можно уменьшить в два раза.

Литература

1. Edwards B. C., Westling E. A. – The Space Elevator. Houston: USA. 2002. - 280 p.
2. Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B., Gnuni V.Ts. On Design Problem of Space Elevator Cable. // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 3. P. 189-196.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
19.01.2007

УДК 539.43

THE FREQUENCY DEPENDANCE OF THE FATIGUE FRACTURE  
CRITERION

Alexander R. Arutyunyan, Robert A. Arutyunyan

**Ключевые слова:** усталость, разрушение, частота,  
**Key words:** fatigue, fracture, frequency.

**Ա.Ռ.Հարությունյան, Ռ.Ա.Հարությունյան**  
**Հոգնածության ամրության սկզբունքի կախվածությունը հաճախությունից**

Որոշ Նորագույն (վերջին) հոգնածության փորձարկումներ ցույց են տալիս, որ հոգնածության կորերը ունեն` երկու հոգնածության սահման: Փորձարկումները ցույց են տալիս նաև հոգնածության քայքայման պրոցեսի ուժեղ կախումը հաճախությունից: Այս երկու արդյունքները աշխատանքի հիմնական նյութերն են:

**А.Р.Арутюнян, Р.А.Арутюнян**  
**Зависимость критерия усталостной прочности от частоты**

Некоторые новейшие испытания на усталость показывают, что кривые усталости имеют два предела усталости. Эксперименты также показывают сильную зависимость процесса усталостного разрушения от частоты. Эти два эффекта являются основными темами работы.

Some recent fatigue tests [1, 2] indicate that the fatigue curves have two fatigue limits. Experiments [3] also indicate the strong frequency dependence of the fatigue fracture process. These two effects are the main topics of the paper.

During cycling loading, for example, under the pulsating stress the plastic deformation is accumulated [4]. The accumulation curves are similar with those received in creep experiments. So they can be described by the following (Norton) power equation  $\dot{\epsilon} = B \sigma^m$  expressed through the effective time  $z = t f^{-\alpha}$  ( $f$  is the frequency of loading),

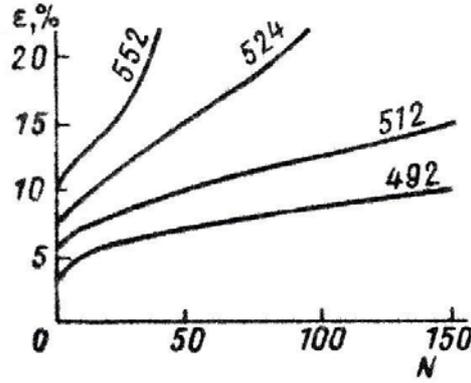


Fig. 1.

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dz} = B \sigma_0^m (F/F_0)^m \quad (1)$$

where  $t = N/f$  ( $N$  is the number of loading cycles,  $t$  is the real time),  $B$ ,  $m$ ,  $\alpha$  are constants,  $\dot{\epsilon} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dz}$ ,  $\epsilon = \ln(l/l_0)$ ,  $F_0$ ,  $l_0$  are initial,  $F$ ,  $l$  – are current values of cross section area and length of the specimen.

As it is shown in fig. 1, the plastic strain accumulation depends on the stress level [4]. The two limiting cases can be considered.

In the low cycle regime the value of strain is high and material may be assumed as incompressible. In the high cycle regime due to metal embrittlement the deformation is small and equal to the value of damage parameter, which is defined as the relative change of material density.

To solve the equation (1) we will use the mass conservation law:  $\rho_0 F_0 l_0 = \rho F l$  ( $\rho_0$ ,  $\rho$  are the initial and current values of specimen density).

For the incompressible material  $\rho = \rho_0$  and from the mass conservation law follows  $F_0 l_0 = F l$ . Introducing this relation into equation (1) and solving it for the initial conditions  $z=0$ , ( $t = 0$ ),  $l = l_0$  we will have

$$\frac{1}{m} \left[ 1 - (l/l_0)^{-m} \right] = B \sigma_0^m z \quad (2)$$

According to Hoff [5] the ductile fracture condition follows from (2) when  $l \rightarrow \infty$

$$\sigma_0^m t_p f^{-\alpha} = \frac{1}{mB} \quad (3)$$

where  $t_p$  is time to fracture.

Introducing relation  $t = N / f$  into equation (3) we will receive Coffin's empirical frequency fatigue criterion for low cycle fatigue [6]

$$\sigma_0^m N_p f^{-(1+\alpha)} = \frac{1}{m B} \quad (4)$$

where  $N_p$  is the number of cycles to fracture.

Let's consider the case of brittle fracture, when  $F \cong F_0$ , so the mass conservation law is expressed in the form  $l / l_0 = \rho / \rho_0$ .

In this case the solution of equation (1) is

$$\ln (l / l_0) = B \sigma_0^m t f^{-\alpha} \quad (5)$$

The brittle fracture criterion follows from (5) when  $t = t_p$ ,  $l = l_*$ ,  $\rho = \rho_*$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_*$

$$\sigma_0^m t_p f^{-\alpha} = \frac{\varepsilon_*}{B} \quad (6)$$

Criterion (6) can be expressed through the number of cycles

$$\sigma_0^m N_p f^{-(1+\alpha)} = \frac{\varepsilon_*}{B} \quad (7)$$

For the common case of ductile-brittle fracture we will use the current value of the coefficient of lateral deformation  $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$ .

Introducing the following geometrical relation  $F_0 / F = (l / l_0)^{2\nu m}$  into equation (1) we will have

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dz} = B \sigma_0^m (l / l_0)^{2\nu m} \quad (8)$$

Assuming  $\nu \cong \nu_*$  ( $\sigma_0$ ) the solution of the equation (8) can be received in the form

$$\frac{1}{2 m \nu_*} \left[ 1 - (l / l_0)^{-2 \nu_* m} \right] = B \sigma_0^m t f^{-\alpha} \quad (9)$$

From (9) follows the ductile-brittle fracture criterion

$$\sigma_0^m t_p f^{-\alpha} = \frac{1 - e^{-2 m \nu_* \varepsilon_*}}{2 m B \nu_*} \quad (10)$$

Criterion (10) can be expressed through the number of cycles

$$\sigma_0^m N_p f^{-(1+\alpha)} = \frac{1 - e^{-2m\nu_* \varepsilon_*}}{2mB\nu_*} \quad (11)$$

Relations for ductile (3)-(4) and brittle (6)-(7) fracture follow from (10) and (11) as a limiting cases, when  $\nu_* = 1/2$ ,  $\varepsilon_* \rightarrow \infty$ , and  $\nu_* \rightarrow 0$ .

The theoretical fatigue curves according to the criterion (11) for the frequencies  $f_1 = 35 \text{ Hz}$  and  $f_2 = 500 \text{ Hz}$  are shown in fig. 2. As follow from fig. 2, the fatigue curves shift into the domain of great longevities with the increase of loading frequency. This effect is in agreement with the experimental results [3].

### Conclusions

A mechanical model describing the frequency dependent damage evolution in metallic materials is developed and the fatigue fracture criterion is formulated.

Two limiting processes are considered.

In the ductile region it coincides with the Coffin empirical frequency criterion

For compressible materials it corresponds to the brittle failure criterion.

Theoretical fatigue curves are plotted. According to the experiments, the fatigue curves shift into the domain of great longevities with the increase of loading frequency.

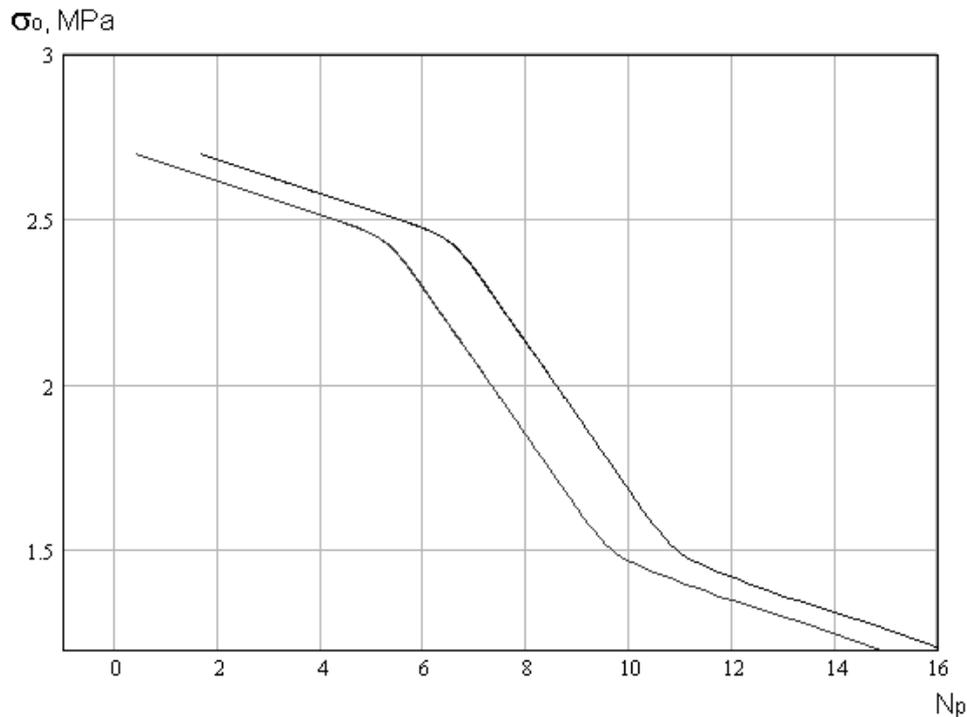


Fig. 2.

Financial support of the Russian Foundation for Basic Research (Grant № 06-08-01003) is gratefully acknowledged.

## References

1. Sakai T., Takeda M., Shiozawa K., Ohi Y., Nakajima M., Nakamura T., Oguma N. Experimental evidence of duplex  $S - N$  characteristics in wide life region for high strength steels // Proc. 7<sup>th</sup> Intern. Fatigue Congress "Fatigue 99", 8-12 June 1999, Beijing, P.R. China. Beijing: Higher Education Press. 1999. V.1. P. 573-578.
2. Bathias C., Baudry G. Application de la résistance à la fatigue gigacyclique au calcul de structure // Bulletin S.F.M. Revue Française de Mécanique. 2000. N 1. P. 13-18.
3. The fatigue tests in high frequency loading / V.A. Kuzmenko, L.E. Machnotyuk, G.S. Pisarenko et al. Kiev: Naukova dumka. 1981. 241p. (in Russian).
4. Arutyunyan R.A. The problem of deformation aging and prolonged fracture in material sciences. Sankt-Petersburg: S.-Petersburg University Press. 2004. 252 p.
5. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads // Jour. appl. mech. 1953. Vol.20. №1. P. 105-108.
6. Coffin L.F. The effect of frequency on the cyclic strain and fatigue behavior of Cast Rene at 1600<sup>o</sup> F // Met. Trans. 1974. Vol. 5. № 5. P. 1053-1060.

S.-Petersburg University

Received 14.11.2006

УДК 539.3

## МЕХАНИКА ДЛИТЕЛЬНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕГРАДАЦИИ КЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян Р.А., Морозов Н.Ф.

**Ключевые слова:** керамические материалы, вязкий, стекловидная фаза.

**Key words:** ceramic materials, viscous, glassy phase.

Լ. Ա. Հարությունյան, Ն.Ֆ. Մորոզով

Պատրաստման տեխնոլոգիայի համաձայն կերամիկական նյութերը կազմված են կոշտ առաձգական կմախքից և հատիկի սահմանին մածուցիկ ապակենման ֆազայից: Որպես ստրուկտուրայի դեգրադացիայի պարամետրեր դիտարկվում են միջֆազային սահմանների մածուցիկության փոքրացումը ինչպես նաև խտության փոփոխությունը: Կոնկրետացված են ստացված հայտանիշի գործակիցները: Կառուցված են երկարաժամկետային կորերը ջերմաստիճանի և ծակոտկենության տարբեր մակարդակների համար:

R.A.Arutyunyan, N.F.Morozov

Mechanics of prolonged thermal degradation of ceranic materials

According to technology of making ceramic materials consisting from rigid elastic skeleton and viscous glassy phase on the boundary of granules. As a parameters of degradation of structure the decrease of viscous of interphase boundary is considered, as well as irreversible changing of density. Coefficients of obtained criteria is concretized, and the curves of durational strenght is made for different levels of temperature and porosity.

Согласно технологии изготовления, керамические материалы состоят из жесткого упругого скелета и вязкой стекловидной фазы на границе зерен. Соответственно, при моделировании механического поведения таких материалов вводится в рассмотрение упруговязкая среда, для которой формулируется критерий длительной прочности. При этом в качестве параметров деградации структуры рассматриваются снижение вязкости межфазных границ, а также необратимое изменение плотности (пористости). Конкретизированы коэффициенты полученного критерия и построены кривые длительной прочности для разных уровней температур и значений начальной пористости. В случае фиксированного по времени нагружения, полученные теоретические кривые температурной зависимости прочности описывают хорошо соответствующие опытные кривые для различных керамических материалов, в том числе и на основе нитрида кремния.

При получении высококачественных керамических композитов, в частности, используется метод горячего прессования под высоким давлением или обычным спеканием порошков тугоплавких соединений [1-7]. Для уменьшения пористости спекание проводят с порошками, пропитанными жидкими металлами и сплавами (активирующие добавки). При этом, как правило, происходит образование жидкой фазы (стеклофазы). Далее применяется процедура сушки, в результате которой в жидкой фазе происходят определенные химические процессы и поликонденсация и окончательно формируется керамический композит, состоящий из жесткого упругого скелета и вязкой стекловидной фазы на границе зерен.

В условиях высоких температур керамические материалы претерпевают пластические деформации, вызванные скольжением границ зерен вследствие потери вязкости стекловидной фазы, разрыхлением и общей деградацией структуры, способствующей снижению прочности и разрушению керамической

системы. Такой эффект наблюдается в опытах над различными керамическими системами, когда, начиная с некоторых температур, процессы деградации структуры и макроразрушения становятся неконтролируемыми.

Механическое поведение керамического композита моделируется в виде двухфазной структуры, состоящей из вязких и жестких компонентов. С этой целью вводится в рассмотрение интерполяционная формула [8-10], связывающая продольные  $\varepsilon_x^y, \varepsilon_x^b$  и поперечные  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$  деформации круглого образца, растягиваемого постоянной силой  $P$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu_e \varepsilon_x^y - \nu_b \varepsilon_x^b \quad (1)$$

где  $\nu_e$  – упругий,  $\nu_b$  – вязкий коэффициент поперечной деформации. В формуле (1) принято предположение об аддитивности упругой и вязкой сред.

Считая  $\nu_e$  и  $\nu_b$  постоянными, соотношение (1) можно записать в дифференциальной форме

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_z = -\nu_e \dot{\varepsilon}_x^y - \nu_b \dot{\varepsilon}_x^b = \frac{\nu_e P}{E} \frac{\dot{F}}{F^2} - \frac{\nu_b}{\eta} \frac{P^n}{F^n} \quad (2)$$

где  $F$  – текущая площадь поперечного сечения образца,  $\eta$  – коэффициент вязкости стекловидной фазы,  $E$  – модуль Юнга упругой фазы,  $n$  – постоянная.

В уравнении (2) использованы законы линейной упругости и нелинейной вязкости.

По определению  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \ln \frac{R}{R_0}$  ( $R_0$  – начальный,  $R$  – текущий радиус поперечного сечения образца),  $\ln \frac{R}{R_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{F}{F_0}$ , ( $F_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца), поэтому

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{F}}{2F} \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) следует дифференциальное уравнение для функции  $F(t)$

$$\frac{\dot{F}}{2F} = \frac{\nu_e P}{E} \frac{\dot{F}}{F^2} - \frac{\nu_b}{\eta} \frac{P^n}{F^n} \quad (4)$$

Как было отмечено, под воздействием напряжений и высоких температур происходит уменьшение вязкой характеристики стекловидной фазы и скольжение границ зерен. На наш взгляд эти процессы, наряду с разрыхлением, являются основными факторами, способствующими общей деградации структуры и макроразрушения керамического композита. Соответственно, при решении уравнения (4) исходим из следующих положений. Считаем, что коэффициенты  $E$ ,  $\nu_y$ ,  $\nu_b$  являются постоянными, а коэффициент вязкости является некоторой

функцией времени и температуры [11]  $\eta = \eta(t, T)$ . Далее эта функция задается в виде экспоненциальной зависимости  $\eta = \eta_0(T) \cdot e^{-kt}$ , где  $k$  – постоянная,  $T$  – температура.

Рассматривая изотермический процесс и решая уравнения (4) при начальном условии  $t = 0$ ,  $F = F_0$ ,  $\eta = \eta_0(T)$ , получим

$$\left(\frac{F}{F_0}\right)^n - 1 = \frac{2 n v_e \sigma_0}{E(n-1)} \left[ \left(\frac{F}{F_0}\right)^{(n-1)} - 1 \right] + \frac{2 n v_b \sigma_0^n}{\eta_0(T) k} (1 - e^{kt}) \quad (5)$$

где  $\sigma_0 = P/F_0$  – условное напряжение.

При формулировке критерия длительной прочности будем считать, что в момент разрушения  $t = t_p$ ,  $F = F_*$ , тогда  $F_*/F_0 = 1 - \psi_*$ , где  $\psi_* = \frac{F_0 - F_*}{F_0}$

– предельное относительное сужение.

Учитывая принятые обозначения в (5), критерий длительной прочности может быть записан в следующем виде:

$$(1 - \psi_*)^n - 1 = \frac{2 n v_e \sigma_0}{E(n-1)} \left[ (1 - \psi_*)^{n-1} - 1 \right] + \frac{2 n v_b \sigma_0^n}{\eta_0(T) k} (1 - e^{k t_p}) \quad (6)$$

Для упрощения критерия (6) воспользуемся приближенными соотношениями

$$(1 - \psi_*)^n \approx 1 - n\psi_*, \quad (1 - \psi_*)^{n-1} \approx 1 - (n-1)\psi_* \quad (7)$$

тогда (6) запишется в следующем виде:

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{k \psi_* \eta_0(T)}{2 v_b \sigma_0^n} \left( 1 - \frac{2 v_e \sigma_0}{E} \right) \right] \quad (8)$$

Разлагая логарифмическую функцию в ряд и учитывая только линейное слагаемое, получим

$$t_p = \frac{\psi_* \eta_0(T)}{2 v_b \sigma_0^n} \left( 1 - \frac{2 v_e \sigma_0}{E} \right) \quad (9)$$

Исследование структуры некоторых керамических композитов, например, горячепрессованного нитрида кремния с добавкой оксида магния показало, что ползучесть определяется деформацией вязкой фазы, а матрица представляет собой совокупность упругих недеформируемых зерен [4, 6]. Можно считать, что вязкая составляющая композита вносит основной вклад в разрушение образца и, пренебрегая упругой компонентой деформации, т.е. считая  $v_e = 0$ , из (8) и (9) получим, соответственно,

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{k \psi_* \eta_0(T)}{2\nu_b \sigma_0^n} \right] \quad (10)$$

$$t_p = \frac{\psi_* \eta_0(T)}{2\nu_b \sigma_0^n} \quad (11)$$

В отличие от традиционных критериев длительной прочности [12-14], полученные здесь критерии зависят от величины предельного относительного сужения  $\psi_*$ , которая согласно закону сохранения массы  $\rho_0 l_0 F_0 = \rho_* l_* F_*$  может быть выражена следующим соотношением:

$$\psi_* = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \exp(-\varepsilon_*) \quad (12)$$

Температурную зависимость коэффициента вязкости  $\eta_0(T)$  обычно задают в виде соотношения Аррениуса

$$\eta_0(T) = \eta_1 \exp\left(-\frac{u}{T_* - T}\right) \quad (13)$$

В то же время расчеты показывают, что экспериментальные результаты описываются более точно при использовании следующей зависимости:

$$\eta_0(T) = \eta_1 (1 - T/T_*)^m \quad (14)$$

где  $\eta_1, m$  – постоянные,  $T_*$  – характерная для данного материала температура. В литературе в качестве характеристической температуры обычно рассматривают температуру перехода из хрупкого состояния в пластическое, при которой наблюдается активное снижение прочности. Некоторые авторы конкретизируют эту температуру по состоянию подвижности дислокаций в стеклофазе. Например, подвижность дислокаций для нитрида кремния  $Si_3N_4$  наблюдается при  $T_* > 1800^0$  и для карбида кремния  $SiC$  при  $T_* > 1900^0 K$ . Отмечается также, что интервал изменения критической температуры может колебаться в широких пределах в зависимости от различных факторов. В числе основных факторов обычно указывается структура, вязкость, температура плавления кристаллизующихся на границах зерен при спекании стекловидных силикатных фаз и др.

С учетом формулы (11) и (13) критерии длительной прочности (8), (9), (10), (11) запишутся, соответственно,

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{(1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*)) k \eta_1 (1 - T / T_*)^m \left(1 - \frac{2\nu_e \sigma_0}{E}\right)}{2\nu_b \sigma_0^n} \right] \quad (15)$$

$$t_p = \frac{(1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*)) \eta_1 (1 - T / T_*)^m}{2\nu_b \sigma_0^n} \left( 1 - \frac{2\nu_e \sigma_0}{E} \right) \quad (16)$$

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{(1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*)) k \eta_1 (1 - T / T_*)^m}{2\nu_b \sigma_0^n} \right] \quad (17)$$

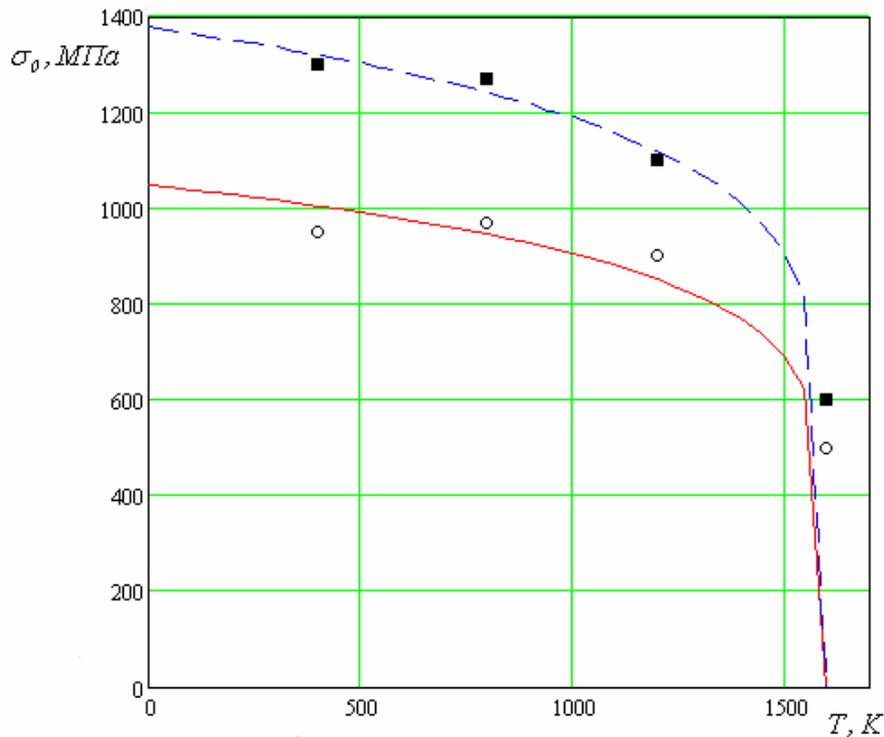
$$t_p = \frac{(1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*)) \eta_1 (1 - T / T_*)^m}{2\nu_b \sigma_0^n} \quad (18)$$

Температурная зависимость напряжения разрушения определена для различных керамических материалов [2, 4]. Для описания этих зависимостей воспользуемся формулами (17) и (18). При фиксированной величине времени до разрушения  $t_p = t_p^*$ , из (17) и (18) имеем

$$\sigma_0 = \left( \frac{k \eta_1 (1 - T / T_*)^m (1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*))}{2\nu_b (\exp(kt_p^*) - 1)} \right)^{1/n} \quad (19)$$

$$\sigma_0 = \left( \frac{\eta_1 (1 - T / T_*)^m (1 - (\rho_0 / \rho_*) \exp(-\varepsilon_*))}{2\nu_b t_p^*} \right)^{1/n} \quad (20)$$

Не располагая необходимыми экспериментальными данными для точного описания кривых разрушения согласно формуле (20), дадим некоторые оценочные расчеты, комбинируя наши предположения с доступными опытными результатами. Исходя из рассмотренного механизма ползучести стеклофазы для композита на основе нитрида кремния, можно принять  $\nu_b = 1/2$ . Далее, принимаем  $\varepsilon_* = 0.01$ ,  $t_p^* = 1$  ч.,  $\rho_0 / \rho_* = 0.5$ . Согласно кривым ползучести, в работе [4] получено  $n = 4$ . Из опытных кривых разрушения керамического образца были конкретизированы остальные параметры критерия (20):  $m = 2, 8$ ,  $\eta_1 = 2 \cdot 10^{18} [\text{МПа}]^{-6} [\text{ч}]^{-1}$ .



Фиг. 1.

На фиг. 1 показаны кривые изменения напряжения разрушения от температуры. Наблюдается хорошее согласие между теоретическими расчетами и экспериментальными точками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект 05-01-39006-ГФЕН\_а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Масленникова Г.Н., Мамаладзе Р.А., Мидзута С., Коумото К. Керамические материалы. // Под ред. Г.Н. Масленниковой. М.: Стройиздат. 1991. 320 с.
2. Бакунов В.С., Балкевич В.П., Власов А.С. и др. /Керамика из высокоогнеупорных окислов. М.: Metallurgy. 1977. 304 с.
3. Гаршин А.П., Гронянов В.М., Зайцев Г.П., Семенов С.С.. Керамика для машиностроения М.: ООО. Изд-во Научтехлитиздат. 2003. 384 с.
4. Андриевский Р.А., Спивак И.И. Нитрид кремния и материалы на его основе. М.: Metallurgy. 1984. 136с.
5. Скороход В.В. Реологическая основа теории спекания. Киев: Наукова думка. 1972. 152 с.
6. Андриевский Р.А. Порошковое материаловедение. 1991. 207 с.
7. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. М.: Metallurgy 1988. 153 с.
8. Belloni G., Bernasconi G., Piatti G. Creep damage models // Creep Eng. Mater. and Struct. Proc. Semin. Ispra(Verese). 1978. London. 1978. P.195-227.

9. Ровинский Б.М., Лютцау В.Г. Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений // Изв. АН СССР. ОТН. 1953. №10. С.1471-1474.
10. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 252 с.
11. Robert A. Arutyunyan. Creep fracture of nonlinear viscoelastic media undergoing UV radiation. // International journal of fracture. 2005. Vol. 132. № 1. P. L3-L8.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 400 с.
13. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311 с.
14. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций М.: Наука. 1966. 752с.

Санкт-Петербургский государственный  
университет, Россия

Поступила в редакцию  
14.11.2006

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЧАСТИЧНО  
ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ВНЕШНЕМ  
ДИНАМИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц.

**Ключевые слова:** динамическое нагружение, жидкость, динамическая устойчивость.

**Key words:** dynamic loading, fluid, dynamic stability

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Վ.Ց. Գնունի

Հեղուկով մասնակիորեն լցված գլանային թաղանթի կայունությունը արտաքին դինամիկ ճնշման տակ

Դիտարկված է հեղուկով մասնակիորեն լցված փակ գլանային թաղանթի վարքի հետազոտության խնդիրն այն դեպքում, երբ թաղանթը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին դինամիկական ճնշման տակ: Հետազոտված է հեղուկի ազդեցությունը ինչպես “կրիտիկական դինամիկական բեռի” արժեքի վրա, որի դեպքում տեղի է ունենում թաղանթի ձկման մեծ աճ, այնպես էլ գլխավոր պարամետրիկական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախությունների մեծությունների վրա:

G.E. Bagdasaryan, V.T. Gnuni

Stability of Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid  
At the External Dynamic Pressure

A problem of the behavior of closed cylindrical circular shell partially filled with liquid at the dynamic application of uniformly distributed external pressure is considered. The influence of liquid, both on the value of "critical dynamic loading" at which occurs a rough deflection of the shell, and the values of critical frequencies of the main parametrical resonance is investigated.

Рассмотрена задача о поведении частично заполненной жидкостью замкнутой цилиндрической круговой оболочки при динамическом приложении равномерно распределенного внешнего давления. Исследовано влияние жидкости как на величину “критической динамической нагрузки”, при которой происходит бурное выпучивание оболочки, так и на величины критических частот главного параметрического резонанса.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим упруго-изотропную круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины  $h$ , частично заполненную несжимаемой жидкостью глубины  $b$ . Пусть оболочка с жестким дном находится под действием внешнего динамического давления интенсивности  $q(t)$ . Будем пользоваться цилиндрическими координатами  $(\alpha, r, \theta)$ , совместим полярную ось  $\alpha$  с осью оболочки. В выбранной системе координат оболочка занимает область  $0 \leq \alpha \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi, R - \frac{h}{2} \leq r \leq R + \frac{h}{2}$ , а жидкость –

область  $0 \leq \alpha \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R - \frac{h}{2}$ , где  $l$  – длина,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

За основу принимаются следующие предложения:

- а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях [1];
- б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости [1];
- в) жидкость в оболочке совершает потенциальное движение;
- г) волновое движение на свободной поверхности жидкости и тангенциальные составляющие сил инерции слабо влияют на колебание оболочки [2,3,6].

Система уравнений динамической устойчивости оболочки, в силу принятых предположений, имеет вид [2-5]:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + q(t)R \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad (1.2)$$

Здесь  $w(\alpha, \beta, t)$  – прогиб,  $\Phi(\alpha, \beta, t)$  – функция напряжения,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала оболочки;

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad \beta = R\theta$$

$$Z = \begin{cases} -Z_0 + \rho_0 g R (b - \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} & \text{при } 0 < \alpha < b \\ 0, & \text{при } b < \alpha < l \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $Z_0$  – возмущенное давление жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho_0$  – плотность жидкости.

Из интеграла Коши-Лагранжа имеем:

$$Z_0 = -\rho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{r=R} \quad (1.4)$$

где  $\varphi$  – потенциальная функция возмущенного движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.5)$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$v_\alpha \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\alpha=b} = 0 \quad (1.8)$$

Как видно из условия (1.6), для определения функции  $\varphi$  необходимо определить радиальные скорости стенки оболочки. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о форме потери устойчивости оболочки.

Предположим, что оболочка шарнирно оперта по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$\begin{aligned} w &= \cos n\theta \sum_{s=0}^N W_s(t) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} \\ \Phi &= \cos n\theta \sum_{s=0}^N \Phi_s(t) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\lambda_s = (m+s)\pi R/l$ ;  $m$  – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей;  $n$  – число волн в окружающем направлении;  $W_s(t)$ ,  $\Phi_s(t)$  – искомые функции.

Исходя из (1.9), гармоническую функцию  $\varphi$  представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos n\theta \left\{ \sum_{s=0}^N B_s(t) I_n \left( \frac{\lambda_s r}{R} \right) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_j(t) \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} \alpha}{R} + D_j(t) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} \alpha}{R} \right] J_n \left( \frac{\alpha_{nj} r}{R} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $I_n$ ,  $J_n$  – модифицированные и немодифицированные функции Бесселя первого рода;  $B_s(t)$ ,  $C_j(t)$ ,  $D_j(t)$ ,  $\alpha_{nj}$  – некоторые величины, определяемые из условий (1.6) – (1.8);  $\alpha_{nj}$  – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$nJ_n(\alpha_{nj}) - \alpha_{nj} J_{n-1}(\alpha_{nj}) = 0 \quad (1.11)$$

Подставляя (1.9) и (1.10) в соотношения (1.6) – (1.8) и учитывая (1.11), путем ортогонализации получаем:

$$\begin{aligned} B_s(t) &= \frac{2R}{\lambda_s [I_{n-1}(\lambda_s) + I_{n+1}(\lambda_s)]} \frac{dW_s(t)}{dt} \\ C_j(t) &= \frac{2R}{\alpha_{nj} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2} \right) J_n(\alpha_{nj})} \sum_{s=0}^N \frac{\lambda_s}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2} \frac{dW_s(t)}{dt} \\ \frac{dD_j(t)}{dt} &= \frac{2R}{\alpha_{nj} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2} \right) J_n(\alpha_{nj})} \sum_{s=0}^N \frac{\alpha_{nj} \sin \frac{\lambda_s b}{R} - \lambda_s \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} b}{R}}{(\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} b}{R}} \frac{d^2 W_s(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Учитывая уравнения (1.10) – (1.12), для давления жидкости на колеблющейся стенке оболочки из (1.4) находим следующее выражение:

$$Z_0 = -\rho_0 \cos n\theta \sum_{s=0}^N \left\{ A_1(s) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} + 2R \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_2(s, j) \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} \alpha}{R} + A_3(s, j) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} \alpha}{R} \right] J_n(\alpha_{nj}) \right\} \frac{d^2 W_s(t)}{dt^2} \quad (1.13)$$

Здесь

$$A_1(s) = \frac{RI_n(\lambda_s)}{\lambda_s I_{n-1}(\lambda_s) - nI_n(\lambda_s)}$$

$$A_2(s, j) = \frac{\lambda_s}{\alpha_{nj} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2} \right) J_n(\alpha_{nj}) (\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2)}$$

$$A_3(s, j) = \frac{\alpha_{nj} \sin \frac{\lambda_s b}{R} - \lambda_s \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} b}{R}}{\alpha_{nj} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2} \right) J_n(\alpha_{nj}) (\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} b}{R}}$$

Подставляя (1.9) в уравнение (1.1), для искомой функции  $\Phi_s(t)$  будем иметь:

$$\Phi_s(t) = EhR \frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2 + n^2)^2} W_s(t) \quad (1.14)$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции  $W_s(t)$ .

На основе вариационного метода Бубнова-Галеркина из уравнения (1.2) для определения  $W_s(t)$  получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 W_s}{dt^2} + \Omega_s^2 \left( 1 - \frac{q(t)}{q_s^*} \right) W_s + \sum_{i=0}^N m_{is} \frac{d^2 W_i}{dt^2} + \sum_{i=0}^N b_{is} W_i = 0 \quad (1.15)$$

Здесь

$$\Omega_s^2 = \frac{K_s}{\rho h}; \quad q_s^* = \frac{K_s R}{n^2}$$

$$K_s = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^4} \left[ (\lambda_s^2 + n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \frac{\lambda_s^4}{(\lambda_s^2 + n^2)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
b_{is} &= \frac{2Rg\rho_0 n^2}{\rho hl} \left[ \frac{\sin^2 \frac{\lambda_i - \lambda_s}{R} b}{(\lambda_i - \lambda_s)^2} - \frac{\sin^2 \frac{\lambda_i + \lambda_s}{R} b}{(\lambda_i + \lambda_s)^2} \right] \\
m_{is} &= \frac{R\rho_0 A_1(t)}{\rho hl} \left[ \frac{\sin^2 \frac{\lambda_i - \lambda_s}{R} b}{\lambda_i - \lambda_s} - \frac{\sin^2 \frac{\lambda_i + \lambda_s}{R} b}{\lambda_i + \lambda_s} \right] + \\
&+ \frac{R^2 \rho_0}{\rho hl} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_2(i, j) \frac{\alpha_{ni} \operatorname{ch} \frac{\alpha_{ni} b}{R} \sin \frac{\lambda_s b}{R} - \lambda_s \operatorname{sh} \frac{\alpha_{ni} b}{R} \cos \frac{\lambda_s b}{R}}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2} + \right. \\
&\left. + A_3(i, j) \frac{\lambda_s + \alpha_{nj} \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} b}{R} \sin \frac{\lambda_s b}{R} - \lambda_s \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} b}{R} \cos \frac{\lambda_s b}{R}}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2} \right] \quad (1.16)
\end{aligned}$$

$\Omega_s$  – частоты собственных поперечных колебаний оболочки;  $m_{is}$  – коэффициенты присоединенных масс;  $b_{is}$  – коэффициенты гидростатического давления жидкости.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая  $N = 0$ . Тогда из уравнений (1.15) имеем:

$$(1 + M_{mn}) \frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \left[ \Omega_{mn}^2 \left( 1 - \frac{q(t)}{q_{mn}^*} \right) + B_{mn} \right] w_{mn} = 0 \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_{mn}^2 &= \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho R^4} \left[ (\mu_m^2 + n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} \frac{\mu_m^2}{(\mu_m^2 + n^2)^2} \right] \\
w_{mn} &= W_0, \quad \Omega_{mn} = \Omega_0, \quad M_{mn} = m_{00}, \quad B_{mn} = b_{00} \\
q_{mn}^* &= \frac{\rho h R}{n^2} \Omega_{mn}^2, \quad \mu_m = \frac{m \pi R}{l} \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$\Omega_{mn}$  – частоты собственных поперечных колебаний оболочки при отсутствии жидкости,  $q_{mn}^*$  – критические значения внешнего постоянного давления, при которых пустая оболочка теряет статическую устойчивость.

На основе (1.17) рассмотрим задачу динамической устойчивости при  $q(t) = q_0 + q_1 \cos \omega t$  и задачу устойчивости оболочки при динамическом нагружении ( $q(t) = ct$ ).

**2. Динамическая устойчивость.** Рассмотрим задачу параметрических колебаний, принимая  $q(t) = q_0 + q_1 \cos \omega t$ . Тогда из (1.17) получим следующие дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \omega t) w_{mn} = 0 \quad (2.1)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{1 + M_{mn}} \left[ \Omega_{mn}^2 \left( 1 - \frac{q_0}{q_{mn}^*} \right) + B_{mn} \right] \quad (2.2)$$

$$2\mu_{mn} = \frac{q_1 \Omega_{mn}^2}{\Omega_{mn}^2 (q_{mn}^* - q_0) + B_{mn} q_{mn}^*}$$

–соответственно, частота собственных колебаний и коэффициент возбуждения оболочки, частично заполненной жидкостью и нагруженной равномерно распределенным внешним давлением  $q_0$ . Из (2.1), (2.2) при  $q_1 = 0$  легко найти критические значения внешнего давления  $q_0$

$$q_0^* = q_{mn}^* \left( 1 + \frac{B_{mn}}{\Omega_{mn}^2} \right) \quad (2.3)$$

Формула (2.3) показывает, что присутствие жидкости увеличивает величину статического критического давления.

Уравнение (2.1) представляет собой известное уравнение Матье и критические частоты главного параметрического резонанса определяются следующими известными формулами [4]:

$$\omega_*^\pm = 2\omega_{mn} \sqrt{1 \pm \mu_{mn}} \quad (2.4)$$

Рассматривая формулы (1.18), (2.2) и (2.4), замечаем, что присоединенная масса жидкости приводит к значительному уменьшению, а гидростатическое давление – к некоторому увеличению критических частот главного параметрического резонанса [2,3]. В результате, область главного резонанса чувствительно смещается влево и происходит существенное сужение этой области, обусловленное присутствием жидкости.

**3. Устойчивость при динамическом нагружении.** Рассматривается случай, когда интенсивность давления возрастает по закону  $q(t) = ct$ . Тогда уравнения (1.17) принимают вид:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d\tau^2} + \tau_{mn} w_{mn} = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\tau_{mn} = (r_{mn}^2 - t)(s_{mn} r_{mn}^2)^{\frac{1}{3}}, \quad r_{mn}^2 = \frac{\rho h R}{c n^2} (\Omega_{mn}^2 + B_{mn})$$

$$S_{mn} = \frac{1}{(1 + M_{mn})(\Omega_{mn}^2 + B_{mn})} \left( \frac{c n^2}{\rho h R} \right)^2 \quad (3.2)$$

Если  $r_{mn}^2 > t$  (первый этап движения рассматриваемой гидроупругой системы), то общее решение уравнения (3.1) имеет вид ( $\tau_{mn} > 0$ ):

$$w_{mn} = \tau_{mn}^{\frac{1}{2}} \left[ c_1 J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \tau_{mn}^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \tau_{mn}^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (3.3)$$

где  $J_{\frac{1}{3}}$  и  $J_{-\frac{1}{3}}$  – бесселевы функции первого рода.

Указанные бесселевы функции изменяются периодически, так что движение системы на протяжении первого этапа имеет колебательный характер и, как видно из (3.2), присутствие жидкости увеличивает длительность колебательного процесса.

При возрастании времени  $t$  величина  $\tau_{mn}$  падает, стремясь к нулю.

Определив  $w_{mn}$  и  $\frac{dw_{mn}}{d\tau_{mn}}$  при  $\tau_{mn} = 0$ , получим начальные данные для следующего, второго этапа движения. Уравнения (1.17) для второго этапа представим в виде:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d\bar{\tau}^2} - \bar{\tau}_{mn} w_{mn} = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\bar{\tau}_{mn} = (t - r_{mn}^2)(s_{mn} r_{mn}^2)^{\frac{1}{3}} > 0 \quad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.4) представляется в виде

$$w_{mn} = \bar{\tau}_{mn}^{\frac{1}{2}} \left[ c_1 I_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \bar{\tau}_{mn}^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 I_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \bar{\tau}_{mn}^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (3.6)$$

где  $I_{\frac{1}{3}}$  и  $I_{-\frac{1}{3}}$  – модифицированные бесселевы функции первого рода. Эти функции меняются монотонно и, поэтому, амплитуда прогиба оболочки с течением времени ( $t > r_{mn}^2$ ) будет неограниченно возрастать, причем, при определенном значении  $t = t_{kp}$  происходит бурное возрастание прогибов (момент потери устойчивости при динамическом нагружении [5]).

В книге [5] показано, что  $t_{kp}$  является монотонно убывающей функцией величины  $S_{mt}$ . Следовательно, рассматривая (3.2), легко заметить, что присутствие жидкости в оболочке может существенно задерживать процесс бурного возрастания прогибов оболочки (существенное увеличение  $t_{kp}$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.// ПМ. 1966. Т.2. Вып.3.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Докл. АН Арм.ССР. 1965. Т. ХLI. N4. С.199-204.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879с.
6. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. //Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962 (1963).

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
16.01.2007

УДК 539.3

**ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНО  
СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ**

**Белубекян В.М.**

**Ключевые слова:** упругость, пластинка, неустойчивость, следящая сила, локализация.

**Key words:** elasticity, plate, instability, follow force, localization.

**Վ.Մ. Բելուբեկյան**

**Հավասարաչափ սեղմված սալի տեղայնացված անկայունությունը**

Դիտարկված է ուղղանկյուն սալ, որի ըստ լայնության հակադիր կողմերը ազատ հենված են, երրորդ կողմը ազատ է, իսկ չորրորդ կողմը ամրակցված: Ենթադրվում է, որ սալի երկարությունը էապես մեծ է լայնությունից: Գտնված են կրիտիկական ուժերը, որոնց դեպքում առաջանում է ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունություն:

**V.M. Belubekyan**

**The Localized Instability of the Uniform Compressed Plate**

The localized instability of the rectangular plate uniformly compressed by all edges are considered. The problem is solved also in the particular case when “follow” force is acting on the free edge. Non existence of localized instability in this case is shown.

Исследуется задача устойчивости полубесконечной пластинки-полосы, шарнирно опертой по полубесконечным сторонам. Приложенная на короткой свободной кромке нагрузка может быть как консервативной, так и “следящей”. Для консервативного случая определяются критические нагрузки, приводящие к неустойчивости локализованной в окрестности свободной кромки. Показывается, что в случае “следящей” нагрузки локализованная неустойчивость невозможна.

Ю.К. Коненковым [3] впервые была поставлена и исследована задача локализованных изгибных колебаний пластинки. В [2], по аналогии с задачей Ю.К. Коненкова, была решена задача локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, равномерно сжатой по полубесконечным сторонам.

В настоящей работе рассматривается локализованная неустойчивость полубесконечной пластинки, равномерно сжатой по всем сторонам. Точнее, предполагается что одна из сторон, равномерно сжатой по всем четырем сторонам пластинки, намного больше другой. Предполагается также, что одна из двух коротких сторон свободна, а другая закреплена. Определяется минимальная критическая нагрузка, при которой возможна локализованная неустойчивость пластинки. Показывается, что при действии на свободной кромке “следящей” нагрузки, локализованная неустойчивость невозможна как в статической постановке (Эйлера), так и при динамическом подходе.

1. Рассматривается локализованная неустойчивость всесторонне равномерно сжатой полубесконечной пластинки-полосы. Пластинка занимает область  $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$ .

Уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w + P\Delta w = 0 \quad (1.1)$$

Края пластинки  $y = 0, b$  шарнирно закреплены

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

Необходимо найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и условию затухания

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (1.3)$$

при различных граничных условиях на кромке  $x = 0$ .

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и условию затухания (1.3), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n p_n x}) \sin \lambda_n y \quad (1.4)$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные,

$$\lambda_n = n\pi/b, \quad p_n = \sqrt{1 - \eta_n^2}, \quad \eta_n^2 = PD^{-1}\lambda_n^{-2} \quad (1.5)$$

При этом необходимо выполнение условия

$$0 < \eta_n^2 < 1 \quad (1.6)$$

Пусть на краю  $x = 0$  заданы условия свободного края в случае действия консервативной нагрузки [1].

$$M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 = P \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.7)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + P \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.8) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_n$  и  $B_n$

$$\begin{aligned} (1 - \nu)A_n + (p_n^2 - \nu)B_n &= 0 \\ (p_n^2 - \nu)A_n + (1 - \nu)p_n B_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.9) определяет безразмерный параметр  $p_n$  (или  $\eta_n^2$ ), характеризующий критическую нагрузку

$$K(p_n) \equiv (p_n^2 - \nu)^2 - (1 - \nu)^2 p_n = 0 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) преобразуется к более простому виду

$$K(p_n) \equiv (p_n^2 - 1)K_1(p_n) = 0 \quad (1.11)$$

где

$$K_1(p_n) = p_n^3 + p_n^2 + (1 - 2\nu)p_n - \nu^2 \quad (1.12)$$

Очевидно, корень  $p_n^2 = 1$  ( $\eta_n^2 = 0$ ) соответствует тривиальному решению задачи. Следовательно, критическая нагрузка должна быть определена из уравнения

$$K_1(p_n) = 0 \quad (1.13)$$

Согласно условию затухания корни уравнения (1.13) должны удовлетворять неравенствам (1.6) или неравенствам  $0 < p_n < 1$ . Из значений функции  $K_1(p_n)$  на концах интервала

$$K_1(0) = -v^2 < 0, \quad K_1(1) = (3+v)(1-v) > 0 \quad (1.14)$$

следует, что уравнение (1.13) имеет положительный корень при  $v \neq 0$  ( $v < 0.5$ ), удовлетворяющий условиям (1.6). Этот корень единственный, т.к. в промежутке  $0 < p_n < 1$  функция  $K_1(p_n)$  монотонно возрастающая.

Необходимо также отметить, что минимальная критическая нагрузка получается при  $n = 1$ .

2. Как видно из (1.5), (1.12) и (1.13), значения безразмерных параметров, характеризующих затухание ( $p_n$ ) и критическую нагрузку ( $\eta_n^2$ ), зависят только от коэффициента Пуассона  $v$ . В табл. 1 приводятся некоторые точные численные результаты для корней уравнения (1.13)

Таблица 1

$v$	$p_n$	$\eta_n^2$	$\gamma$
0.091	0.01	0.9999	11
0.168	0.04	0.9984	6
0.237	0.09	0.9919	4.(3)
0.304	0.16	0.9744	3.5
0.375	0.25	0.9375	3
0.456	0.36	0.8704	2.(6)

При  $v = 0.5$  приближенные значения указанных параметров следующие:

$$p_n \approx 0.4086, \quad \eta_n^2 \approx 0.8331 \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что характер локализации неустойчивости существенно зависит от коэффициента Пуассона.

Форма потери устойчивости определяется согласно (1.4) после определения постоянных  $B_n$  через  $A_n$  из какого-либо уравнения системы (1.9). В частности, для минимальной критической нагрузки форма потери устойчивости на кромке  $x = 0$  имеет вид

$$w_1 = A_1 \gamma \sin \lambda_1 y, \quad \gamma = (1 - p_1^2)(v - p_1^2)^{-1} \quad (2.2)$$

Здесь  $\gamma$  характеризует максимальный прогиб пластинки. Значения  $\gamma$  в зависимости от коэффициента  $\nu$  приведены в табл. 1 (для  $\nu = 0.5 - \gamma \approx 2.5$ ).

Задача локализованной неустойчивости в случае, когда пластинка равномерно сжата только по направлению  $y$ , была рассмотрена ранее в [2].

3. В случае, когда на кромке пластинки  $x = 0$  действует “следящая” нагрузка, граничные условия (1.8) заменяются следующими условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

После подстановки решения (1.4) в граничные условия (3.1) получается система однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_n, B_n$ :

$$\begin{aligned} (1 - \nu) A_n + (p_n^2 - \nu) B_n &= 0 \\ (1 - \nu) A_n + p_n (p_n^2 - 2 + \nu) B_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Равенство детерминанта системы (3.2) нулю приводит к следующему уравнению для определения критической нагрузки:

$$K(p_n) \equiv (1 - p_n)(p_n^2 + 2p_n + \nu) = 0 \quad (3.3)$$

Из (3.3) очевидно, что нет корней, удовлетворяющих условию затухания (1.6) при  $0 \leq \nu \leq 0.5$ . Таким образом, при действии “следящей” нагрузки, локализованная неустойчивость в статической постановке не существует. Поэтому, в этом случае необходимо привлечение динамического подхода.

Вместо уравнения (1.1) рассматривается уравнение колебаний равномерно сжатой пластинки

$$D\Delta^2 w + P\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления на полубесконечных кромках пластинки (1.2) и условию затухания (1.3), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-p_{1n}\lambda_n x} + B_n e^{-p_{2n}\lambda_n x}) e^{i\omega t} \sin \lambda_n y \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} p_{1n} &= \left( 1 - \frac{\eta_n^2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_n^4}{4} + \xi_n^2} \right)^{1/2}, \quad p_{2n} = \left( 1 - \frac{\eta_n^2}{2} - \sqrt{\frac{\eta_n^4}{4} + \xi_n^2} \right)^{1/2} \\ \eta_n^2 &= P(D\lambda_n^2)^{-1}, \quad \xi_n^2 = 2\rho h \omega^2 (D\lambda_n^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

При этом,  $p_{1n}, p_{2n}$  должны быть положительными, откуда следует условие затухания в виде

$$0 < \eta_n^2 < 1 - \xi_n^2 \quad (3.7)$$

Подстановка решения (3.5) в граничные условия для свободного края со “следающей” нагрузкой (3.1) приводит к системе уравнений относительно произвольных постоянных  $A_n, B_n$

$$\begin{aligned} (p_{1n}^2 - \nu)^2 A_n + (p_{2n}^2 - \nu)^2 A_n &= 0 \\ p_{1n} (p_{1n}^2 - 2 + \nu) A_n + p_{2n} (p_{2n}^2 - 2 + \nu) B_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Дисперсионное уравнение задачи получается из равенства нулю детерминанта системы (3.8) в виде

$$K(\eta_n, \xi_n) \equiv (p_{2n} - p_{1n}) K_1(\eta_n, \xi_n) = 0 \quad (3.9)$$

где

$$K_1(\eta_n, \xi_n) = p_{1n}^2 p_{2n}^2 + 2(1 - \nu) p_{1n} p_{2n} + \nu \eta_n^2 - \nu^2 \quad (3.10)$$

Следует отметить, что при отсутствии нагрузки ( $\eta_n = 0$ ) уравнение (3.9) совпадает с дисперсионным уравнением задачи локализованных колебаний в окрестности свободной кромки пластинки-задачи Коненкова [3] – в форме, приведенной в статье [4].

Т.к.  $p_{1n} \neq p_{2n}$ , из уравнения

$$K_1(\eta_n, \xi_n) = 0 \quad (3.11)$$

определяются частоты колебаний в виде

$$\xi_n^2 = (1 - \nu) \left[ 2\sqrt{(1 - \nu)^2 + \nu^2 - \nu \eta_n^2} - 1 - \eta_n^2 + 3\nu \right] \quad (3.12)$$

Нетрудно проверить, что при условии  $\eta_n^2 < 1$ , согласно (3.7), и при  $0 \leq \nu \leq 0.5$  правая часть равенства (3.12) положительна. Следовательно, и при динамическом подходе локализованная потеря устойчивости невозможна. В этом случае формула (3.12) определяет частоты локализованных колебаний равномерно сжатой пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 336с.
2. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб. “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем”. Ереван, Изд. ЕГУ. 1997. С.95-99.
3. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. // Акуст. журн. 1960. Т.6. № 1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. // Прикл. механика НАН Украины. 1994. Т.30. № 2. С.61-68.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
13.11.2006

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ  
РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО  
МАТЕРИАЛА ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Белубекян Э. В., Погосян А. Г.

**Ключевые слова:** устойчивость, оптимизация, ребро, пластинка, критическая нагрузка, композиционный материал.

**Key words:** stability, optimization, rib, plate, critical force, composite-material.

Է.Վ. Բելուբեկյան, Ա.Գ. Պոգոսյան

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի  
օպտիմալ նախագծումը ըստ կայունության չափանիշի

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված, եզրերով և թռիչքի մեջտեղում կոշտության կողերով ուժեղացված սալի համար, որն բեռնավորված է սեղմող ճիգերով, որոշվում են երկրաչափական և ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են կառուցվածքի կրիտիկական բեռի մեծագույն արժեքը:

E.V. Belubekyan, A.G. Poghosyan

**Optimal design of the rectangular plate of composite material, reinforced with rigid ribs by the stability criterion**

The optimal geometrical and physical parameters of the plate of composite material, which secure the maximal magnitude of the critical force in case of the constant weight and given gabarit sizes of the construction are determinate. The rectangular plate is reinforced by rigid ribs at free sides and in the middle of the plate and is compressed by planar forces.

Для пластинки, изготовленной из композиционного материала, усиленной ребрами жесткости по свободным кромкам и в середине пролета и шарнирно опертой по краям, нагруженным сжимающими усилиями, определяются оптимальные геометрические и физические параметры конструкции, обеспечивающие наибольшее значение критической нагрузки.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами  $2a, b, h_2$ , нагруженная по двум противоположным свободно опертым краям  $y = 0, y = b$  равномерно распределенной сжимающей нагрузкой  $\sigma$  и усиленная по свободным краям  $x = \pm a$  и в середине пролета  $x = 0$  прямоугольными ребрами одинакового сечения  $(\alpha h_1 \times h_1)$ .

Предполагается, что пластинка составлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами  $\pm\varphi$  к оси  $x$ , а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси  $y$ .

Ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции  $h_1, h_2, \alpha, \varphi$ , обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки при неизменном весе и заданных габаритных размерах конструкции  $\xi = (2a + 3\alpha h_1) / b$ .

Задача оптимального проектирования по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости, рассмотрена в работе [1].

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$2a(h_0 - h_2) = 3\alpha h_1(h_1 - h_0) \quad (1)$$

где  $h_0$  –соответствующая толщина сплошной пластинки заданного веса.

Решается задача устойчивости пластинки, удовлетворяющей условиям сопряжения с ребрами жесткости, работающими на изгиб и кручение. При этом, ввиду симметрии рассматривается половина пластинки ( $x \geq 0$ ) с исследованием случаев симметричной и антисимметричной форм потери устойчивости.

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение устойчивости записывается в виде

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

где  $D_{ik}$  – жесткости пластинки, определяемые по формуле

$$D_{ik} = \frac{B_{ik} h_2^3}{12} \quad (i, k = 1, 2, 6)$$

$B_{ik}$  –упругие характеристики ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях по известным формулам поворота [2].

Граничные условия запишутся в виде:

шарнирного опирания–

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b \quad (3)$$

упругого опирания на среднее ребро жесткости:

в случае симметричной формы потери устойчивости–

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2 \left( D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{при } x = 0 \quad (4)$$

в случае антисимметричной формы потери устойчивости–

$$w = 0, \quad C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -2 \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{при } x = 0 \quad (5)$$

упругого опирания на крайнее ребро жесткости–

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{при } x = a \quad (6)$$

где  $B = E\alpha h_1^4 / 12$  –жесткость ребра на изгиб,  $A = \alpha h_1^2$  –площадь поперечного сечения ребра,  $C$  –жесткость ребра на кручение, определяемая по формуле [3]

$$C = G_{23} \alpha h_1^4 \beta, \quad \beta = d^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} d \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{\pi n}{2d} \right], \quad d = \alpha \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{13}}} \quad (7)$$

$G_{13}$ ,  $G_{23}$  – модули сдвига материала ребра в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ .

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), принимается в виде

$$w = (C_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{2m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{3m} \cos \mu_{2m} \lambda_m x + C_{4m} \sin \mu_{2m} \lambda_m x) \sin \lambda_m y \quad (8)$$

где:

$$\mu_{1m} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} + D_3}{D_{11}}}, \quad \mu_{2m} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} - D_3}{D_{11}}}$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad D_3 = D_{12} + 2D_{66}, \quad k_m^2 = \frac{\sigma h_2}{D_{22} \lambda_m^2} \quad (9)$$

Удовлетворение условий (4), (6) приводит к однородной линейной системе уравнений относительно коэффициентов  $C_{im}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Из условия существования нетривиального решения этой системы получается следующее трансцендентное уравнение относительно коэффициента  $k_m$  для случая симметричной формы потери устойчивости

$$H_1(k_m) = [\mu_{1m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_5] \times$$

$$\times [f_0 \cos \mu_{2m} \lambda_m a - f_4 \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_6] -$$

$$- [f_2 \cos \mu_{2m} \lambda_m a - \mu_{2m} \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_5] \times$$

$$\times [f_0 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_6] = 0 \quad (10)$$

где:

$$f_0 = \frac{m\pi \alpha h_1^2}{h_2} \left( \frac{E_1}{B_{22}} \frac{h_1^2}{h_2^2} - k_m^2 \right), \quad f_1 = \frac{h_2^3 (B_{11} \mu_{1m}^2 - B_{12})}{12m\pi G_{23} \alpha h_1^4 \beta}, \quad f_2 = \frac{h_2^3 (B_{11} \mu_{2m}^2 + B_{12})}{12m\pi G_{23} \alpha h_1^4 \beta}$$

$$f_3 = \mu_{1m} \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_{1m}^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right), \quad f_4 = \mu_{2m} \left( \frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_{2m}^2 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right)$$

$$f_5 = \frac{B_{22} f_0}{2B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times$$

$$\times \left( \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - \frac{f_1}{\mu_{1m}} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - \cos \mu_{2m} \lambda_m a - \frac{f_2}{\mu_{2m}} (\mu_{2m}^2 + \nu) \sin \mu_{2m} \lambda_m a \right)$$

$$f_6 = \frac{B_{22} f_0}{2B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{\mu_{1m}} (f_0 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a) - \frac{1}{\mu_{2m}} (f_0 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \cos \mu_{2m} \lambda_m a) \right)$$

В случае антисимметричной формы потери устойчивости удовлетворение условий (5), (6) приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно коэффициента  $k_m$ :

$$H_2(k_m) = [\mu_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{1m} f_7] \times \\ \times [f_0 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \cos \mu_{2m} \lambda_m a + \mu_{2m} f_8] - [\mu_{2m} \cos \mu_{2m} \lambda_m a + \\ + f_2 \sin \mu_{2m} \lambda_m a + \mu_{2m} f_7] \times [f_0 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{1m} f_8] = 0 \quad (11)$$

где:

$$f_7 = \frac{6m\pi\alpha h_1^4 \beta G_{23}}{h_2^3 B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} \times \\ \times (\mu_{1m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_1 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a + \mu_{2m} \sin \mu_{2m} \lambda_m a - f_2 \cos \mu_{2m} \lambda_m a) \\ f_8 = \frac{6m\pi\alpha h_1^4 \beta G_{23}}{h_2^3 B_{11} (\mu_{1m}^2 + \mu_{2m}^2)} (f_0 \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m a - f_3 \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m a - f_0 \cos \mu_{2m} \lambda_m a + f_4 \sin \mu_{2m} \lambda_m a)$$

После определения коэффициента  $k_m$  соответственно из уравнений (10) или (11) значение критического напряжения, согласно (9), определится по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = k_m^2 \frac{D\lambda_m^2}{h_2} \quad (12)$$

Следует отметить, что в решении (8) и соответственно в уравнениях (10) и (11) принято  $k_m > 1$ , так как в случае наличия ребер критическое напряжение будет больше, чем для сплошной пластинки со свободными краями, где обычно принимается  $k_m = 1$ . Однако, при более точном удовлетворении граничных условий на свободных кромках сплошной пластинки значение  $k_m$  получается несколько меньшим единицы. С учетом того, что при поиске оптимального проекта ребристой пластинки могут рассматриваться также случаи отсутствия ребер или их малой толщины, здесь исследуется также случай  $k_m < 1$ . В этом случае решение уравнения (2) принимается в виде

$$w = (C_{1m} \operatorname{ch} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{2m} \operatorname{sh} \mu_{1m} \lambda_m x + C_{3m} \operatorname{ch} \mu_{2m} \lambda_m x + C_{4m} \operatorname{sh} \mu_{2m} \lambda_m x) \sin \lambda_m y$$

где

$$\mu_{1m} = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22} (1 - k_m^2)}}{D_{11}}}, \quad \mu_{2m} = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22} (1 - k_m^2)}}{D_{11}}}$$

а в уравнениях (10) и (11) делаются замены  $\cos \mu_{2m} \lambda_m x$  на  $\operatorname{ch} \mu_{2m} \lambda_m x$  и  $\sin \mu_{2m} \lambda_m x$  на  $-\operatorname{sh} \mu_{2m} \lambda_m x$ .

Поставленная задача оптимизации заключается в перераспределении материала ребристой конструкции между ребрами и пластинкой таким образом, чтобы обеспечить наибольшее значение критической нагрузки при заданных габаритных размерах  $\xi$  и условии постоянства веса конструкции (1).

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_x \min_m \sigma_{кр}, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\} \quad (13)$$

при ограничениях

$$H_i(k_m) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad h_2 = h_0 - \frac{3\alpha h_1}{2a}(h_1 - h_0) \quad (14)$$

$$h_0 \leq h_1 \leq 0.2b, \quad 0.2 \leq \alpha \leq 5, \quad \delta \leq h_2 \leq h_0 \quad (15)$$

Первое из ограничений в виде равенств (13) соответствует уравнению (10) или (11) относительно  $k_m$ , второе следует из условия постоянства веса конструкции (1). Ограничения в виде неравенств (15) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для  $\delta$  принимается:  $\delta = 0.01b$  при  $a \geq b$ ,  $\delta = 0.01a$  при  $a \leq b$ .

Задача решается методом деформируемого многогранника в сочетании с методом прямого поиска [4].

Числовые расчеты произведены для конструкции с габаритными размерами  $\xi = 1, 2$  при  $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.015, 0.02, 0.03$ . В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

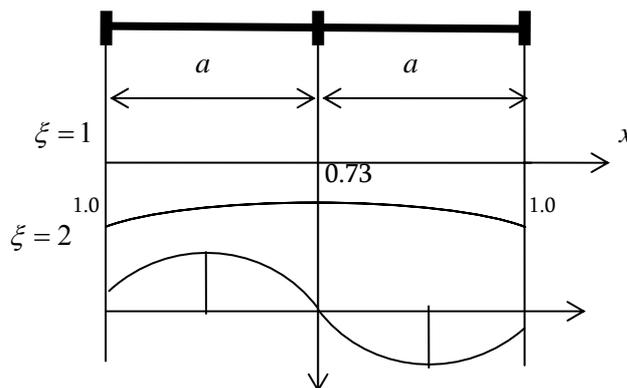
$$\bar{B}_{11}^0 = 1; \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0/B_{11}^0 = 0.0818; \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0/B_{11}^0 = 0.0196; \bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0/B_{11}^0 = 0.04297; \\ G_{23}/G_{13} = 1; \bar{E}_1 = E_1/B_{11}^0 = 0.995; \bar{G}_{23} = G_{23}/B_{11}^0 = 0.0497.$$

Вычислены оптимальные значения параметров  $\alpha$ ,  $\bar{h}_1 = h_1/b$ ,  $\bar{h}_2 = h_2/b$ ,  $\varphi$  и соответствующие значения приведенной критической нагрузки  $\bar{\sigma}_{кр} = \sigma_{кр}/B_{11}^0$ . Результаты расчетов приведены в табл. 1. Там же для сравнения приведены наибольшие значения параметров критической нагрузки для равновесных пластин с двумя ребрами жесткости, расположенными по ее краям  $\bar{\sigma}_{кр}^*$  и при отсутствии ребер  $\bar{\sigma}_{кр}^0$ .

Оптимальные параметры конструкции.

Таблица 1.

$\xi$	$\bar{h}_0$	$\alpha$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\varphi$	$\bar{\sigma}_{кр} \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}_{кр}^* \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}_{кр}^0 \cdot 10^3$
1	0.015	0.2	0.0822	0.01151	45°	0.9533	0.4492	0.1792
	0.020	0.2	0.1003	0.01486	45°	1.6182	0.7760	0.3186
	0.030	0.2	0.1325	0.02115	45°	3.3940	1.6775	0.7170
2	0.015	0.2	0.0810	0.01336	45°	0.3072	0.2122	0.1792
	0.02	0.2	0.0998	0.01754	45°	0.5358	0.3713	0.3186
	0.03	0.2	0.1336	0.02567	45°	1.1719	0.8173	0.7170



0.15

1.0

1.0

0.15  $x$  $\bar{w}$ 

Фиг.1 Графики относительных прогибов пластинки на линии  $y = b/2$

Для полученных значений оптимальных параметров при  $\xi = 1, 2$ ,  $\bar{h}_0 = 0.015$  на фиг.1 показаны графики относительных прогибов конструкции  $\bar{w} = w/w_{\max}$  при ее выпучивании на линии  $y = b/2$ .

Сравнение результатов, приведенных в табл. 1, показывает, что значение критического напряжения для оптимального проекта  $\bar{\sigma}_{\text{кр}}$  при  $\xi = 1$  около 2 раз больше соответствующего значения для пластинки с двумя ребрами  $\bar{\sigma}_{\text{кр}}^*$  и почти в 5 раз для сплошной пластинки  $\bar{\sigma}_{\text{кр}}^0$ . При  $\xi = 2$  увеличения значения критического напряжения соответственно составляют 1.4 раза и 1.7 раз. Очевидно, что с увеличением параметра  $\xi$  эффект оребривания будет снижаться.

Как видно из верхнего графика на фиг.1, при  $\xi = 1$  имеет место симметричная форма потери устойчивости, причем наименьший прогиб (на среднем ребре) не существенно отличается от максимального прогиба (на крайнем ребре). Очевидно, что уменьшению значения параметра  $\xi$  будет соответствовать выравнивание прогибов по длине пластинки, что характерно для часторебристых конструкций.

При  $\xi = 2$ , как следует из нижнего графика на фиг.1, форма потери устойчивости пластинки становится антисимметричной, откуда следует, что увеличение длины пластинки может привести к изменению формы ее выпучивания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э. В., Погосян А. Г. Оптимальное проектирование по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1988.Т.41.№ 6.С.14-18.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М: Наука, 1987, 360 с.
3. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М: Наука, 1971. 40с.
4. Погосян А.Г. Применение метода деформируемого многогранника к решению задачи оптимального проектирования прямоугольной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний // Изв. НАН Армении. Механика. 1998.Т.51.№ 3.С.28-33.

Институт механики НАН Армении  
ЕГИУ Армении

Поступила в редакцию  
6.12.2006

УДК 537.2: 539.3

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ  
ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО  
КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И УПРУГОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ  
СРЕДЫ

Берберян А.Х.

**Ключевые слова:** Отражение и преломление, электроупругой сдвиговой волны, упругой диэлектрической изотропной среда.

**Keywords:** Reflection and refraction, electroelastic shear wave, piezoelectric rhombic crystal of 222 class.

Ա.Խ.Բերբերյան

Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի անդրադարձումը և բեկումը շեղանկյուն 222 դասի  
այլեզոնէլեկտրիկ բյուրեղի և առաձգական իզոտրոպ դիէլեկտրիկ միջավայրի բաժանման սահմանից

Դիտարկված է սահքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի անդրադարձումը և բեկումը 222 դասի  
շեղանկյուն այլեզոնէլեկտրիկ բյուրեղի և առաձգական իզոտրոպ դիէլեկտրիկ միջավայրի բաժանման  
սահմանից: Որոշված են ալիքների լայնույթային գործակիցները: Ցույց է տրված, որ բյուրեղներում  
առաջանում են ուղեկցող մակերևութային ալիքներ:

A.Kh.Berberyanyan

**Reflection and refraction of an electroelastic shear wave at the interface between a piezoelectric rhombic  
crystal of 222 class and elastic dielectric izotropic medium**

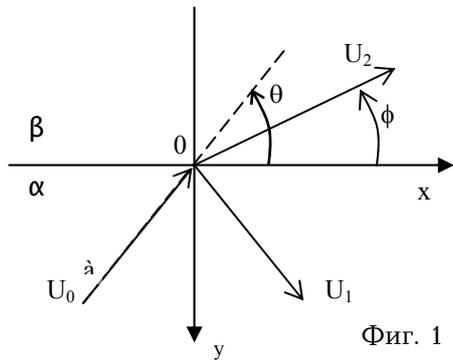
The reflection and refraction of a flat electroelastic shear wave from border of a rhombic piezoelectric crystal  
of a class 222 and elastic dielectric izotropic medium is considered. The peak ratio of arising waves are  
determined. Is shown, that in the crystal there are accompanying surface waves.

Рассмотрено отражение и преломление плоской электроупругой сдвиговой волны от границы  
раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и упругой диэлектрической  
изотропной среды. Определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что в  
кристалле возникают сопутствующие поверхностные волны.

1. Как известно [1-4,6], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении и преломлении электроупругих волн на границе пьезоэлектрика. В работе [8] для пьезокристаллов ромбической симметрии класса 222 показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) [1,5,8]. В настоящей работе рассматривается задача преломления сдвиговой электроупругой волны на границе раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 с изотропным диэлектриком, и при этом наблюдается возникновение СПК.

Будем считать, что ромбический пьезоэлектрический кристалл класса 222 в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  находится в акустическом контакте вдоль плоскости  $y=0$  с изотропным упругим диэлектриком. Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящийся при  $y>0$ , обозначим индексом  $\alpha$ , а при  $y<0$  – индексом  $\beta$ . Одна из осей симметрии второго порядка ромбического кристалла параллельна оси  $Oz$  (фиг. 1). Пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в средах имеют вид:

$$\begin{aligned} y > 0: \bar{u}_\alpha &= \{0, 0, u_\alpha(x, y, t)\}; \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, y, t) \\ y < 0: \bar{u}_\beta &= \{0, 0, u_\beta(x, y, t)\}; \varphi_\beta = \varphi_\beta(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$



где  $\bar{u}$  – вектор упругого перемещения точек среды,  $\varphi$  – потенциалы электрических полей в средах.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [1,6]:

1. в области  $y > 0$ :

$$\begin{aligned} c_{44} \left( \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \right) + e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \\ e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} - \varepsilon_{22} \left( \gamma \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. в области  $y < 0$

$$\begin{aligned} c_{44}^\beta \left( \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} \right) &= \rho^\beta \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия при  $y = 0$ :

$$u^\alpha = u^\beta; \varphi^\alpha = \varphi^\beta; D_y^\alpha = D_y^\beta; \sigma_{zy}^\alpha = \sigma_{zy}^\beta \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} D_y^\alpha &= \beta e_{14}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \varepsilon_{22}^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}; \sigma_{zy}^\alpha = c_{44}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + e_{14}^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \\ D_y^\beta &= -\varepsilon_{22}^\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y}; \sigma_{zy}^\beta = c_{44}^\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:  $c_{44}^\alpha, c_{44}^\beta$  – упругие постоянные,  $e_{14}^\alpha$  – пьезоэлектрический модуль,  $\varepsilon_{11}^\alpha, \varepsilon_{11}^\beta$  – диэлектрические проницаемости,  $\rho^\alpha, \rho^\beta$  – плотности ромбического пьезокристалла и упругой среды соответственно. В работе используется международная система измерения СИ.

2. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) и (1.3) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны

$$\mathbf{u} = U e^{i(px+qy-\omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(px+qy-\omega t)} \quad (2.1)$$

где  $U$  и  $\Phi$  – амплитуды перемещения и потенциала в волне,  $p$  и  $q$  – продольное и поперечное волновые числа относительно оси  $Ox$ ,  $\omega$  – частота колебаний.

Для ромбического пьезокристалла, подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.2), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа  $q$  и соотношение между амплитудами смещения  $U_\alpha$  и потенциала  $\Phi_\alpha$ .

$$(p^2 + q_\alpha^2)(p^2 + q_\alpha^2 - S_0^{-2}\omega^2) + 4\chi_\alpha^2 p^2 q_\alpha^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$[(p^2 + q_\alpha^2) - \rho_\alpha \omega^2]U_\alpha + 2e_{14} p q_\alpha \Phi_\alpha = 0 \quad (2.3)$$

или 
$$2e_{14} p q_\alpha U_\alpha - \varepsilon_{11}^\alpha (p^2 + q_\alpha^2) \Phi_\alpha = 0 \quad (2.4)$$

где 
$$S_\alpha^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}^\alpha}{\rho_\alpha}, \quad \chi_\alpha^2 = \frac{e_{14}^2}{c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha} \quad (2.5)$$

Здесь  $S_\alpha$  – скорость объемной упругой волны в ромбическом пьезокристалле в направлении оси  $Oy$ ,  $\chi_\alpha$  – коэффициент электромеханической связи.

$$k_\alpha^2 = \omega^2 / S_\alpha^2 (1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta) \quad (2.6)$$

Отметим, что  $k_\alpha$  принимает действительные значения для любого  $\theta$ . Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1,2,7]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором  $\bar{k}_\alpha$ .

Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении  $p = k_\alpha \cos \theta$ , где  $k_\alpha$  определяется по (2.6), имеет пару вещественных корней для  $q^\alpha$ , которые определяются формулами:

$$q_1^\alpha = \pm q_0^\alpha, \quad q_0^\alpha = k_\alpha \sin \theta = p \operatorname{tg} \theta \quad (2.7)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам. Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета [8]. Получим  $q_2^\alpha = \pm ir$ , где

$$r = \frac{\omega |\cos \theta| \sqrt{1 + 4\chi_\alpha^2 \cos^2 \theta}}{S_\alpha \sqrt{1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta}} \quad (2.8)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$\begin{aligned} u &= U e^{\pm ry + i(px - \omega t)} \\ \varphi &= \Phi e^{\pm ry + i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые распространяются в направлении оси  $Ox$  и убывают в направлении оси  $Oy$  (при знаке "+") или  $-Oy$  (при знаке "-"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в упругой диэлектрической изотропной среде. Решение будем искать в виде:

$$u_\beta = U_\beta e^{i(px + qy - \omega t)}, \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{i(px + qy - \omega t)} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (1.3), получим следующее дисперсионное уравнение

$$(q^2 + p^2)(q^2 + p^2 - \omega^2 / S_\beta^2) = 0 \quad (2.11)$$

откуда  $q_{1,2} = \pm(k_\beta^2 - p^2)^{1/2}$ ,  $q_{1,2} = \pm i|p|$ , а волновое число среды равно  $k_\beta = \omega / S_\beta$ ,  $S_\beta = (c_{44}^\beta / \rho^\beta)^{1/2}$ . Имеющие физический смысл решения будут:

$$u_\beta = U_\beta e^{-iq_\beta y + i(px - \omega t)} \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{|i|y + i(px - \omega t)} \quad (2.12)$$

3. Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела, в ромбическом пьезоэлектрике возникают: отраженные электроупругие плоские волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, имеем при  $y > 0$  полное решение:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_0^\alpha + u_1^\alpha = \left[ U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB\Phi_\alpha e^{-ry} \right] e^{i(px - \omega t)} \\ \varphi_\alpha &= \left[ -U_0 A e^{-iq_0 y} + AU_1 e^{iq_0 y} + \Phi_\alpha e^{-ry} \right] e^{i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где 
$$A = \frac{e_{14}^\alpha \sin 2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}, \quad B = \frac{2e_{14}^\alpha p \cos^2 \theta}{c_{44}^\alpha r}$$

В упругой диэлектрической изотропной среде возникают преломленные волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Преломленные волны распространяются, очевидно, в плоскости падения, поскольку проекция волновых векторов преломленных волн на границу раздела должны совпадать с той же проекцией волнового вектора падающей волны. В рассматриваемой плоскости падения, как отмечено в [1], квазипродольные и квазиперечные волны поляризованы в этой же плоскости ( $u_z = 0$ ) и непьезоактивны. Сдвиговые волны поляризованы перпендикулярно к плоскости падения ( $u_x = u_y = 0$ ,  $u_z \neq 0$ ), поэтому условие непрерывности вектора смещения на границе раздела требует, чтоб преломленная волна была также сдвиговой. Таким образом, отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, при  $y < 0$  имеем полное решение:

$$u_\beta = U_2 e^{-iq_\beta y} e^{i(px - \omega t)}, \quad \varphi_\beta = \Phi_\beta e^{|p|y} e^{i(px - \omega t)} \quad (3.2)$$

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту (и продольное волновое число  $p$  (т. е. волны вдоль

границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающие с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, преломленная и сопутствующие поверхностные волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k_\alpha \sin \theta, \quad q = q_\beta = (k_\beta^2 - p^2), \quad q = ir, \quad q = -|p| \quad (3.3)$$

где  $r$  определяется по (2.12) или (2.13).

Подставляя решения (3.1) и (3.2) в граничные условия (1.4), получим:

$$U_\alpha = R U_0, \quad U_\beta = \frac{(1 + d_1(1 - d_2) - im)U_0 + (1 + d_1(1 + d_2) + im)U_\alpha}{k_1 k_2} \quad (3.4)$$

$$\Phi_\alpha = -\frac{d_1 - d_2}{id_1 - d_2} U_0 - \frac{d_1 + d_2}{id_1 - d_2} U_\alpha + \frac{k_2}{id_1 - d_2} U_\beta, \quad \Phi_\beta = -A U_0 + A U_\alpha + \Phi_\alpha$$

где 
$$R = \frac{i(n_1 - n_2 - An_3) + N/B}{i(n_1 - n_2 - iAn_3) + N/B}$$

$$n_1 = d_1 \beta, \quad n_2 = A q_0 \varepsilon_{22}^\alpha, \quad n_3 = \varepsilon_{22}^\beta |p|, \quad N = (i - id_1^2 + d_1(i + d_3))(Bn_1 - r\varepsilon_{22}^\alpha - n_3)$$

$$m = c_{44}^\alpha d_2 r, \quad k_1 = (d_1 + ic_{44}^\alpha), \quad k_2 = c_{44}^\beta q_\beta, \quad d_1 = e_{14}^\alpha p, \quad d_2 = c_{44}^\alpha q_0, \quad d_3 = c_{44}^\alpha r$$

Полученные выражения описывают отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела ромбического пьезоэлектрика и упругой диэлектрической среды.

Обсудим полученные результаты. Рассмотрим вначале отражение волн от свободной границы, полагая  $c_{44}^\beta = e_{15}^\beta = 0$ ,  $\varepsilon_{11}^\beta = \varepsilon_*$  [8].

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если  $\theta \ll \chi_\alpha^2$ , то  $\Phi_2 \rightarrow 0$  и  $U_1 \rightarrow -U_0$ , т.е. сдвиговые электроупругие волны параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при  $\chi^2=0$   $R_1=1$ ) [5]. Далее, при  $\chi^2$  амплитуда потенциала СПК существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны.

Преломленная волна скользит во второй среде под углом  $\varphi$ , находимым из соотношения:  $\cos \varphi = S_\beta S_\alpha^{-1} \cos \theta$ , т.е. величина  $S_\beta S_\alpha^{-1}$  играет роль показателя преломления. Если показатель преломления больше единицы, то при углах скольжения  $\theta > \phi_n$  величина  $q_\beta$  становится мнимой и по модулю, равной единице, т. е. возникает полное внутреннее отражение. Как видно, пьезоэффект меняет величину  $\phi_n$  лишь постольку, поскольку перенормирует скорость акустических волн. В отличие от оптики и акустики непьезоэлектрических сред, отражение и преломление в пьезокристаллах отличается тем, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньше угла полного внутреннего отражения  $\phi_n$ . Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R/\text{Re } R)$  и  $\arctg(\text{Im } T/\text{Re } T)$  соответственно. Если показатель преломления меньше единицы и  $\rho^\alpha < \rho^\beta$ , то в непьезоэлектрических кристаллах граница может стать прозрачной ( $R = 0$ ) для волн, скользящих под

углом

$\theta_t = \arcsin\{ (S_\beta S_\alpha^{-1}) [(1 - S_\alpha^2 S_\beta^{-2})(\rho^\beta / \rho^\alpha - 1)]^{1/2} \}$ . В пьезоэлектриках условие прозрачности существенно ужесточается, т.к.  $R$  – комплексная величина и необходимо обращение в нуль ее действительной и мнимой частей.

**Закключение.** Рассмотрено отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела ромбического пьезоэлектрика и упругой (изотропной) диэлектрической среды.

Определены волновые поля в пьезоэлектрике и упругой диэлектрической среде. Показано, что падающие волны, отражаясь на границе упругой диэлектрической среды, преломляются, порождая в нем упругое поле, а также сопутствующие поверхностные колебания. Далее, сдвиговые волны не могут распространяться параллельно поверхности кристаллов при малых углах скольжения ( $< \chi^2$ ). При углах скольжения ( $> \phi_n$ ) ( $\cos \phi_n = S_\beta S_\alpha^{-1}$ ), и если показатель преломления больше единицы, величина  $q_\beta$  становится мнимой и по модулю равной единице, т.е. возникает полное внутреннее отражение. А также на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R / \text{Re } R)$  и  $\arctg(\text{Im } T / \text{Re } T)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240с.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюзного научного семинара, Ереван, 1991. 23–26 июня. С.49–54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. N3–4. С.78–82.
5. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум // ФТТ. 1969. Т.11. Вып.4. С.1027–1029
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезо-электрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. N1. С.12–19.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х., Даноян З.Н. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. N3. С.42–48.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
7.11.2006

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОРТОТРОПНОЙ  
ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Геворкян Г.З., Киракосян Р.М.

**Ключевые слова:** пластина, ортотропный, поперечный сдвиг, переменная толщина.

**Key words:** plate, ortotrope, lateral shear, variable thickness.

Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-շերտի ոչ դասական մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է մի եզրում անշարժ, մյուս եզրում հողակապորեն ամրացված, գծայնորեն փոփոխվող հաստության, մակերևութային բեռներ կրող օրթոտրոպ սալ-շերտի ոչ դասական խնդիր՝ մակերևութային բեռների ազդեցության տակ: Լայնական սահքը,  $\sigma_z$  նորմալ լարումը, լայնական սեղմումը հաշվի են առնվում [1] տեսության հիման վրա: Որպես օրինակ լուծվում են վերին մակերևութային շոշափող և ուղղահայաց բեռների ազդեցության տակ գտնվող սալ-շերտի խնդիրները:

G.Z. Gevorgyan, R.M. Kirakosyan

On the Non Classic Problem of Orthotrope Strips of Linear Variable Thickness

Non Classical problem for orthotrope linear variable thickness strip is considered. Lateral shears, normal stress  $\sigma_z$ , lateral displacement are considered by theory [1]. As examples are solved the problems for strip under loading parallel and perpendicular of upper surface of strip.

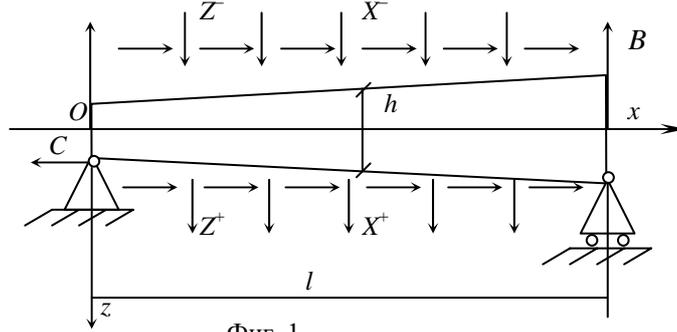
Рассматривается неклассическая задача шарнирно-опертой ортотропной пластины-полосы линейно-переменной толщины, несущей распределенные поверхностные нагрузки. Влияния поперечного сдвига, нормального напряжения  $\sigma_z$  и обжатия учитываются в рамках теории [1]. В качестве примера приводятся окончательные решения в безразмерном виде для двух случаев нагружения верхней лицевой поверхности пластины-полосы. В первом случае нагрузка перпендикулярна, а во втором – параллельна этой поверхности. На основе анализа решений делаются качественные и количественные заключения. В частности, констатируется, что вклад плоской задачи в значения перемещения  $u_z$ , нормального к срединной плоскости пластины-полосы, незначителен и без заметного ущерба точности им можно пренебречь. Рассматривается также случай постоянной толщины. Приводится сравнение решения при параллельной нагрузке с решениями, полученными на основе новой итерационной [2] и классической теорий. Показываются, что выражения перемещения  $u_z$ , полученные в рамках теории [1] и новой итерационной теории [2], совпадают. Для перемещения  $u_x$ , параллельного срединной плоскости, отмеченные теории дают качественно разные распределения по толщине, которые количественно незначительно отличаются друг от друга. При этом значения перемещений  $u_x$  и  $u_z$  во всех точках нижней поверхности  $\bar{z} = 1/2$  по обеим теориям равны и совпадают с соответствующими классическими значениями.

1. Рассмотрим ортотропную пластину-полосу линейно-переменной толщины. Координатную плоскость  $xOy$  совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $Oz$  направим вертикально вниз (фиг. 1).

Толщина полосы изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1)$$

где  $l$  – ширина полосы,  $h_0 > 0$  и  $h_1 > -h_0/l$  – заданные постоянные. Материал линейно-упругий и ортотропный, главные направления анизотропии которого параллельны координатным осям. Полоса несет распределенные поверхностные нагрузки с интенсивностями проекций  $X^\pm, Z^\pm$ . Знаки «+» и «-» относятся к поверхностям  $z = h/2$  и  $z = -h/2$  соответственно. Вдоль линии



Фиг. 1

$x = 0, z = h_0/2$  полоса шарнирно закреплена. Линия же шарнирного опирания  $x = l, z = (h_0 + h_1l)/2$  может свободно перемещаться только горизонтально. Из уравнений статики для опорных реакций находим:

$$\begin{aligned} A &= Z_2 l / 2 + X_1 (2h_0 + h_1 l) / 2 - X_2 h_0 / 2 \\ B &= Z_2 l / 2 - X_1 (2h_0 + h_1 l) / 2 + X_2 h_0 / 2, \quad C = X_2 l \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь, как обычно [1]

$$X_1 = (X^+ - X^-) / 2, \quad X_2 = X^+ + X^-, \quad Z_1 = (Z^+ - Z^-) / 2, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (1.3)$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$x = l\bar{x}, \quad z = h_0\bar{z}, \quad h_0/l = s, \quad h_1/s = \gamma, \quad h = h_0 H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x} \quad (1.4)$$

$$u = h_0\bar{u}, \quad w = h_0\bar{w}, \quad u_x = h_0\bar{u}_x, \quad u_z = h_0\bar{u}_z, \quad X_i = B_{11}\bar{X}_i, \quad Z_i = B_{11}\bar{Z}_i$$

$$T_x = B_{11}h_0\bar{T}_x, \quad N_x = B_{11}h_0\bar{N}_x, \quad M_x = B_{11}h_0^2\bar{M}_x, \quad B_{ij} = B_{11}\bar{B}_{ij}$$

$$1 + \gamma = \beta, \quad \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = B_{11}\bar{\varphi}_2/h_0, \quad \chi = a_{55}B_{11}, \quad \Delta_1 = \bar{\Delta}_1/B_{11}, \quad \Delta_2 = \bar{\Delta}_2/B_{11}$$

Здесь [2]

$$\Delta_1 = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 - a_{33}, \quad \Delta_2 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_3 - a_{33}, \quad A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12} \quad (1.5)$$

$$A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12}, \quad \alpha_1 = \chi + A_1, \quad \alpha_3 = a_{55}B_{12} + A_2$$

(использованы также общеизвестные обозначения [1]).

С учетом (1.2)–(1.4) для безразмерных усилий  $\bar{T}_x, \bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$  находим:

$$\bar{T}_x = \bar{X}_2(1 - \bar{x})/s, \quad \bar{N}_x = \frac{1}{2s} \left\{ s \left[ (2 + \gamma)\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \right] + (1 - 2\bar{x})\bar{Z}_2 \right\}$$

$$\bar{M}_x = \frac{1}{2s^2} [s\bar{X}_2 + \bar{x}(\bar{Z}_2 + \gamma s\bar{X}_1)](1 - \bar{x}) \quad (1.6)$$

В рамках теории [2] для этих величин имеем выражения

$$\bar{T}_x = \alpha H \left[ 4s \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} - A_1(\gamma s\bar{X}_2 + 4\bar{Z}_1) \right], \quad \bar{N}_x = \frac{H}{3} (\bar{X}_1 + 2\bar{\Phi}_1) + \frac{\gamma s \bar{M}_x}{H} \quad (1.7)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{sH^3}{12} \left[ s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \alpha_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{d\bar{x}} \right], \quad \alpha = 1/(4 + A_1\gamma^2 s^2) \quad (1.8)$$

$\bar{u}$  и  $\bar{w}$  – безразмерные перемещения точек срединной плоскости пластины-полосы по осям  $x$  и  $z$ ,  $\bar{\Phi}_1$  – функция, характеризующая распределение касательного напряжения  $\tau_{xz}$ .

Приравняв соответствующие выражения (1.6) и (1.7), находим

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = \frac{A_1}{4s} (\gamma s\bar{X}_2 + 4\bar{Z}_1) + \frac{\bar{X}_2}{4\alpha s^2} \frac{1 - \bar{x}}{H} \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = -\frac{3\beta\alpha_1}{2s^2 H^3} [\bar{Z}_2 + \gamma s(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)] - \frac{6\bar{X}_2(1 - \bar{x})}{s^3 H^3} - \frac{6(\bar{Z}_2 + \gamma s\bar{X}_1)\bar{x}(1 - \bar{x})}{s^4 H^3}$$

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{3\bar{Z}_2}{4s} \frac{1 - 2\bar{x} - \gamma\bar{x}^2}{H^2} + \frac{4 + 3\gamma + 2\gamma\bar{x} + \gamma^2\bar{x}^2}{4H^2} \bar{X}_1 - \frac{3\beta\bar{X}_2}{4H^2}$$

Проинтегрировав первые два уравнения (1.9), получим:

$$\bar{u} = C_1 - \frac{\bar{X}_2(H - \beta \ln H)}{4\gamma^2 s^2 \alpha} + \frac{A_1(\gamma s\bar{X}_2 + 4\bar{Z}_1)\bar{x}}{4s} \quad (1.10)$$

$$\bar{w} = C_3 + C_2\bar{x} + \frac{6}{\gamma^4 s^4} \left\{ [(2 + \gamma)(\bar{Z}_2 + \gamma s\bar{X}_1) - \gamma s\bar{X}_2] \ln H - \right.$$

$$\left. - (\bar{Z}_2 + \gamma s\bar{X}_1)H(1 - \ln H) \right\} + \frac{3\beta}{4\gamma^4 s^4 H} (4 - \gamma^2 s^2 \alpha_1) [\bar{Z}_2 + \gamma s(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования, которые определяются из краевых условий.

$$\bar{u}_x \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{z}=1/2}} = 0, \quad \bar{u}_z \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{z}=1/2}} = 0, \quad \bar{u}_z \Big|_{\substack{\bar{x}=1 \\ \bar{z}=\beta/2}} = 0 \quad (1.11)$$

где

$$\bar{u}_x = \bar{u} - \bar{z} \left( s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\Phi}_1 \right), \quad \bar{u}_z = \bar{w} + k\bar{z} \bar{w}_1 + \bar{z}^2 \bar{w}_2 \quad (1.12)$$

$$\bar{w}_1 = (A_1 - \alpha \bar{\Delta}_1 \gamma^2 s^2) s \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} - \alpha \bar{\Delta}_1 (\gamma s\bar{X}_2 + 4\bar{Z}_1), \quad \bar{w}_2 = -\frac{s}{2} \left( A_1 s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \bar{\Delta}_2 \frac{d\bar{\Phi}_1}{d\bar{x}} \right) \quad (1.13)$$

Коэффициент  $k$  принимает значение 1 или 0. При  $k = 1$  учитывается вклад плоской задачи в значение нормального перемещения  $u_z$ , а при  $k = 0$  не учитывается.

Значения  $C_1, C_2, C_3$ , а также окончательные выражения  $\bar{u}_x$  и  $\bar{u}_z$  не

приводим, поскольку они очень громоздки, а численные результаты можно получить и без них путем применения соответствующей программы вычислений.

2. В качестве примера рассмотрим два случая, при которых нагружена только верхняя поверхность пластинки-полосы  $z = -h/2$ , а ее нижняя поверхность  $z = h/2$  свободна от нагрузок:

$$a) X^+ = 0, X^- = \gamma q s / 2, Z^+ = 0, Z^- = q$$

$$(\bar{X}_1 = -\gamma \bar{q} s / 4, \bar{X}_2 = \gamma \bar{q} s / 2, \bar{Z}_1 = -\bar{q} / 2, \bar{Z}_2 = \bar{q}) \quad (2.1)$$

$$b) X^+ = 0, X^- = p, Z^+ = 0, Z^- = -\gamma p s / 2$$

$$(\bar{X}_1 = -\bar{p} / 2, \bar{X}_2 = \bar{p}, \bar{Z}_1 = \gamma \bar{p} s / 4, \bar{Z}_2 = -\gamma \bar{p} s / 2) \quad (2.2)$$

В случае а) распределенная нагрузка перпендикулярна, а в случае б) параллельна поверхности  $z = -h/2$ .

Вычисления будем проводить для ортотропной пластинки-полосы. Пусть

$$a_{12} / a_{11} = -0,3, a_{13} / a_{11} = -0,2, a_{23} / a_{11} = -0,4, a_{22} / a_{11} = 4$$

$$a_{33} / a_{11} = 20, a_{44} / a_{11} = 8, a_{66} / a_{11} = 6, a_{55} / a_{11} = 7 \quad (2.3)$$

Таблица 1 (случай а)

			k=0			k=1		
			$\bar{x} = 0$	$\bar{x}_m =$ 0,4618 0,4635	$\bar{x} = 1$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x}_m =$ 0,4631 0,4635	$\bar{x} = 1$
$\frac{u_x B_{11}}{h_0 q}$	-H/2	Ут.	91,058	47,073	-5,024	91,437	47,310	-4,551
		Кл.	91,615	46,347	-6,575	91,615	46,347	6,575
	0	Ут.	45,529	46,429	47,03	45,718	46,620	47,22
		Кл.	45,807	46,347	46,53	45,807	46,347	46,53
	H/2	Ут.	0	45,784	99,09	0	45,930	98,00
		Кл.	0	46,347	99,63	0	46,347	99,63
$\frac{u_z B_{11}}{h_0 q}$	-H/2	Ут.	0	210,64	0	10,247	223,22	15,29
		Кл.	0	165,99	0	0	165,99	0
	0	Ут.	-5,675	207,59	0	-0,551	213,88	3,834
		Кл.	0	165,99	0	0	165,99	0
	H/2	Ут.	0	210,64	0	0	210,63	0
		Кл.	0	165,99	0	0	165,99	0

Таблица 2 (случай б)

			k=0			k=1		
			$\bar{x} = 0$	$\bar{x}_m =$ 0,3510 0,3639	$\bar{x} = 1$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x}_m =$ 0,3494 0,3639	$\bar{x} = 1$
$\frac{u_x B_{11}}{h_0 p}$	-H/2	Ут.	67,203	51,297	45,247	67,071	51,195	45,082
		Кл.	58,294	41,379	34,398	58,294	41,379	34,398
	0	Ут.	33,601	45,496	52,771	33,535	45,389	52,705
		Кл.	29,147	41,379	48,382	29,147	41,379	48,382
	H/2	Ут.	0	39,695	60,295	0	39,582	60,328
		Кл.						

		Кл.	0	41,379	62,367	0	41,379	62,367
$\frac{u_z B_{11}}{h_0 p}$	-H/2	Ут.	0	51,005	0	0,612	50,998	-1,149
		Кл.	0	57,507	0	0	57,507	0
	0	Ут.	2,038	52,273	0,574	2,344	52,271	-1,921
		Кл.	0	57,507	0	0	57,507	0
	H/2	Ут.	0	51,005	0	0	51,001	0
		Кл.	0	57,507	0	0	57,507	0

Нетрудно проверить, что при (2.3) удовлетворяются условия положительности энергии деформации [1].

В этом случае

$$\chi = 7,161, A_1 = -0,2353, \bar{\Delta}_1 = -20,36, \bar{\Delta}_2 = -22,05 \quad (2.4)$$

С целью сравнения рассмотрим также классический случай, когда

$$\chi = A_1 = \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2 = 0 \quad (2.5)$$

Для выяснения роли члена плоской задачи  $zW_1$ , фигурирующего в выражении нормального перемещения  $u_z$ , вычисления будем проводить еще и при его отсутствии ( $k=0$ ).

В табл. 1 и 2 представлены безразмерные значения перемещений  $\bar{u}_x$  и  $\bar{u}_z$  в точках  $\bar{z} = -H/2, \bar{z} = 0, \bar{z} = H/2$  опорных сечений  $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$  и сечения максимального прогиба срединной полосы  $\bar{x} = \bar{x}_m$ .

Данные этих таблиц показывают, что влияние члена плоской задачи  $zW_1$  незначительно и без заметного ущерба точности можно им пренебречь.

3. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины. Положив

$$\gamma = 0, H = \beta = 1, \alpha = 1/4 \quad (3.1)$$

для этого случая из (1.9) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} &= \frac{A_1}{s} \bar{Z}_1 + \frac{\bar{X}_2}{s^2} (1 - \bar{x}) \\ \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} &= -\frac{3\alpha_1}{2s^2} \bar{Z}_2 - \frac{6\bar{X}_2}{s^3} (1 - \bar{x}) - \frac{6\bar{Z}_2}{s^4} \bar{x}(1 - \bar{x}) \\ \bar{\Phi}_1 &= \bar{X}_1 - \frac{3\bar{X}_2}{4} + \frac{3\bar{Z}_2}{4s} (1 - 2\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проинтегрировав первые два уравнения (3.2) и определив постоянные интегрирования из условий (1.11) при  $\beta = 1$ , получим:

$$\begin{aligned} \bar{U}_x &= -\frac{\chi \bar{X}_1}{2} (1 - 2\bar{z}) + \frac{\bar{X}_2}{8s^2} \{ (1 - 2\bar{z}) [8 + s^2 (3\chi + 5A_1)] + 4\bar{x}(2 - \bar{x})(1 + 6\bar{z}) \} + \\ &+ \frac{A_1 \bar{Z}_1}{s} \bar{x} + \frac{\bar{Z}_2}{8s^3} \{ (1 - 2\bar{z})(2 + 3A_1 s^2) + 4\bar{x} \bar{z} [2\bar{x}(3 - 2\bar{x}) + 3A_1 s^2] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_z &= \frac{1-\bar{x}}{4s^3} [4\bar{x}(2-\bar{x}) - A_1 s^2 (1-2\bar{z})(5+6\bar{z})] \bar{X}_2 + \\
&+ \frac{1-2\bar{z}}{2} (\bar{\Delta}_1 - A_1^2) \bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2}{16s^4} [3s^4(1-4\bar{z}^2)(\bar{\Delta}_2 - A_1 \alpha_1) + \\
&+ 8\bar{x}(1-2\bar{x}^2 + \bar{x}^3) + 12s^2 \bar{x}(1-\bar{x})(\alpha_1 + 4A_1 \bar{z}^2)]
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай, когда нижняя поверхность пластинки-полосы  $\bar{z} = 1/2$  свободна от нагрузок, а на ее верхней поверхности  $\bar{z} = -1/2$  действует только равномерно распределенная касательная нагрузка, параллельная оси  $x$ :

$$\begin{aligned}
X^+ = Z^+ = 0, \quad X = p, \quad Z = 0 \\
(\bar{X}_1 = -\bar{p}/2, \quad \bar{X}_2 = \bar{p}, \quad \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = 0)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) из (3.3) находим

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= \frac{\bar{p}}{8s^2} [12 - 4(1-\bar{x})^2 + 5\alpha_1 s^2] + \bar{z} \frac{\bar{p}}{4s^2} [4 - 12(1-\bar{x})^2 - 5\alpha_1 s^2] \\
\bar{u}_z &= \frac{\bar{p}(1-\bar{x})}{4s^3} \{4\bar{x}(2-\bar{x}) - A_1 s^2 [5 - 4\bar{z}(1+3\bar{z})]\}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

При постановке  $k = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= \frac{\bar{p}}{8s^2} [12 - 4(1-\bar{x})^2 + (5\chi + 3A_1)s^2] + \bar{z} \frac{\bar{p}}{4s^2} [4 - 12(1-\bar{x})^2 - (5\chi + 3A_1)s^2] \\
\bar{u}_z &= \frac{\bar{p}(1-\bar{x})}{4s^3} [4\bar{x}(2-\bar{x}) - 3A_1 s^2 (1-4\bar{z}^2)]
\end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Для сравнения задачу пластинки-полосы постоянной толщины при действии только касательной поверхностной нагрузки решим еще и в рамках новой итерационной теории [1]. Отметим, что такое сравнение для случая действия только нормальной поверхностной нагрузки сделано в [3].

В рамках классической теории при (3.4) имеем:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x^0 &= \frac{\bar{p}}{s} (1-\bar{x})(1+6\bar{z}), \quad \bar{\sigma}_y^0 = \bar{B}_{12} \bar{\sigma}_x^0, \quad \bar{\sigma}_z^0 \equiv 0 \\
\bar{\tau}_{xy}^0 &= \bar{\tau}_{yz}^0 \equiv 0, \quad \bar{\tau}_{xz}^0 = -\frac{\bar{p}}{4} [5 - 4\bar{z}(1+3\bar{z})]
\end{aligned} \quad (4.1)$$

Из обобщенного закона Гука для классического значения деформации  $e_z^0$  с учетом (4.1) и в силу основной гипотезы новой итерационной теории [1] имеем:

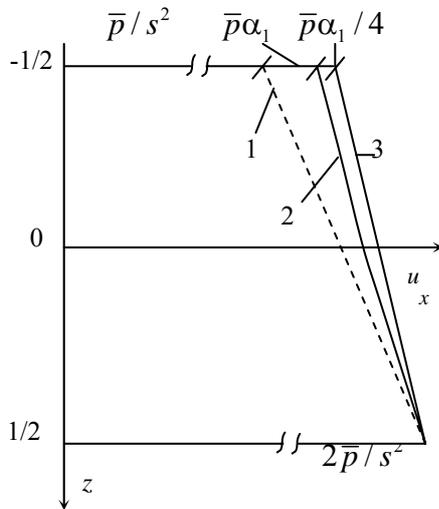
$$e_z = e_z^0 = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{A_1 \bar{p}}{s} (1-\bar{x})(1+6\bar{z}) \quad (4.2)$$

Выполнив необходимые выкладки, для перемещений  $\bar{u}_x$  и  $\bar{u}_z$  после первой итерации получим:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= \frac{\bar{p}}{8s^2} [12 - 4(1-\bar{x})^2 + 3\alpha_1 s^2] + \frac{\bar{z} \bar{p}}{4s^2} [4 - 12(1-\bar{x})^2 - 5\alpha_1 s^2] + \\
&+ \frac{\bar{z}^2 \bar{p}}{2} \alpha_1 (1+2\bar{z})
\end{aligned} \quad (4.3)$$

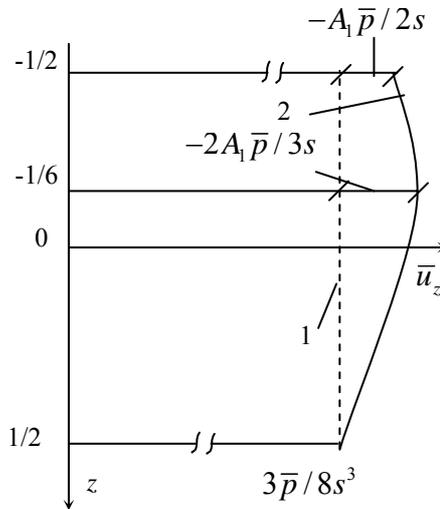
$$\bar{u}_z = \frac{\bar{p}(1-\bar{x})}{4s^3} \{4\bar{x}(2-\bar{x}) - A_1 s^2 [5 - 4\bar{z}(1+3\bar{z})]\}$$

Следует отметить, что из-за статической определенности задачи, последующие итерации приведут к тем же результатам (4.3). Сравнивая (3.5) и (4.3), замечаем, что выражения  $\bar{u}_z$ , полученные в рамках теории [2] и новой итерационной теории [1], совпадают. Выражения же перемещения  $\bar{u}_x$ , соответствующие отмеченным двум теориям, отличаются друг от друга. Теория [2] приводит к линейному, а новая итерационная теория [1] – к кубическому законам изменения этого перемещения по толщине пластинки-полосы. Нетрудно заметить, что значения  $\bar{u}_x$  и  $\bar{u}_z$  в точках нижней поверхности  $\bar{z} = 1/2$  по обеим теориям совпадают с соответствующими классическими значениями. На фиг. 2 и 3 представлены графики изменения  $\bar{u}_x$  и  $\bar{u}_z$  по толщине сечений  $\bar{x} = 1$  и  $\bar{x} = 1/2$  соответственно. Из графиков фиг. 2 замечаем, что, несмотря на разность характеров изменения по толщине, значения  $\bar{u}_x$  по обеим теориям практически мало отличаются друг от друга. Интересно отметить, что значения  $\bar{u}_x$  в верхних точках  $\bar{z} = -1/2$  сечения  $\bar{x} = 1$  существенно (по классической теории в два раза) меньше, чем в нижних точках этого сечения. Этот факт объясняется тем, что при нагрузке (3.6) пластинка-полоса кроме продольного сдвига испытывает еще и деформирование поперечного изгиба.



Фиг. 2. Графики  $\bar{u}_x$  в сечении  $\bar{x} = 1$ .

1 – по классической теории, 2 – по итерационной теории [1], 3 – по теории [2].



Фиг. 2. Графики  $\bar{u}_z$  в сечении  $\bar{x} = 1/2$ .

1 – по классической теории, 2 – по итерационной теории [1] и по теории [2].

Сравнение решений (3.5) и (3.6) показывает, что в выражении  $\bar{u}_z$  без ущерба точности можно пренебречь членом плоской задачи  $\bar{z}\bar{w}_1$ . Такое заключение для пластинки-полосы постоянной толщины при действии только нормальной

поверхностной нагрузки сделано в [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука.1987.360с.
2. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия.// Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С.12-23.
3. Киракосян Р.М., Саркисян М.А. Напряженно-деформированное состояние ортотропной пластинки-полосы при учете поперечного сдвига и обжатия. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. №3. С.20-29.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
29.11.2006

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Геворкян С.Х., Арустамян А.М.

**Ключевые слова:** динамическая устойчивость, колебания оболочки, ортотропная оболочка, пологая оболочка, области неустойчивости.

**Key words:** dynamic stability, vibration of shell, orthotropic shell, declivous shell.

Ս.Խ. Գևորգյան, Ա.Մ. Արուստամյան

Օրթոտրոպ սակավաթեք թաղանթի դինամիկ կայունության խնդրի վերաբերյալ

Առաջարկվող աշխատանքում դիտարկվում է օրթոտրոպ շերտերից բաղկացած սակավաթեք թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը, որի մոտավոր լուծման համար կիրառվել է Բուբնով-Գալերկինի մեթոդը: Խնդիրը բերվում է Մատյե-Հիլլի հավասարմանը: Բերված են միաշերտ սակավաթեք թաղանթի հաշվարկների արդյունքները հողակապային ամրակցման դեպքում:

S.Kh. Gevorkyan, A.M. Arustamyan

To the Problem of Dynamic Stability of Orthotropic Declivous Shell

In proposed work a problem of declivous shells dynamic stability, formed from orthotropic layers is considered. Bubnov-Galerkin's method is applied for the solution of this problem. The problem is reduced to Mathieu-Hill's equation. The results of calculations of jointly supported monolayer declivous shell are brought.

В предлагаемой работе рассматривается задача динамической устойчивости пологой оболочки, составленной из ортотропных слоев, для приближенного решения которой применен метод Бубнова-Галеркина. Задача сводится к уравнению Матье-Хилла. Приведены результаты вычислений для однослойной пологой оболочки при шарнирном опирании.

Теории слоистой анизотропной пластинки и оболочек посвящено множество работ. Основные результаты обобщены в монографиях, обзорных статьях и фундаментальных работах Амбарцумяна С.А., Алфутова Н.А., Багдасаряна Г.Е., Болотина В.В., Васильева В.В., Гнуни В.Ц., Образцова И.Ф. и др. [1-7].

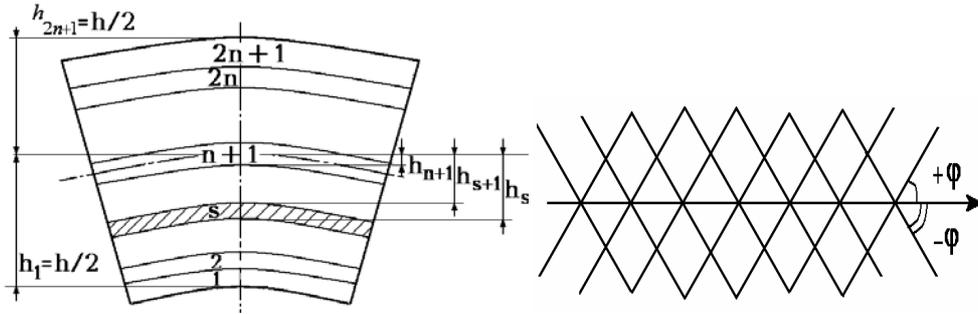
Рассматривается задача динамической устойчивости пологой цилиндрической оболочки с радиусом  $R$ , толщиной  $h$ , размерами в плане  $a$  и  $b$ , составленными из  $(2n + 1)$  симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоев, изготовленных путем поочередной укладки элементарных слоев композиционного материала под углами  $\pm \varphi_s$  ( $s = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ) к оси цилиндра. Такая оболочка считается слоистой, составленной из нечетного числа однородных ортотропных слоев (фиг.1)

Обозначим соответствующие упругие константы через  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $G_{12}$ . Упругие характеристики элементарного слоя определяются по формулам [2]:

$$B_{11}^0 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, B_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, B_{12}^0 = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, B_{11}^0 = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, B_{66}^0 = G_{12}$$

Уравнения устойчивости пологой слоистой ортотропной цилиндрической оболочки, сжимаемой силой  $P_1(t) = P_{10} + P_{1r} \cdot \cos \theta t$ , записываются в виде:

$$\begin{aligned}
D_{11} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot (D_{12} + 2D_{66}) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + P_1(t) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\
a_{11} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned} \quad (1)$$



Фиг.1 Расположение ортотропных слоев оболочки.

где  $\rho$  – плотность композиционного материала (КМ),  $w(x, y, t)$  – функция прогиба,  $\Phi(x, y, t)$  – функция усилий,  $B_{ij}$  – упругие характеристики, выражаемые через упругие характеристики элементарного слоя  $B_{ij}^0$  по формулам [2]:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= B_{11}^0 \cdot \cos^4 \varphi + 2 \cdot B_3^0 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + B_{22}^0 \cdot \sin^4 \varphi \\
B_{22} &= B_{11}^0 \cdot \sin^4 \varphi + 2 \cdot B_3^0 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + B_{22}^0 \cdot \cos^4 \varphi \\
B_{12} &= B_{12}^0 + (B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2 \cdot B_3^0) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\
B_{66} &= B_{66}^0 + (B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2 \cdot B_3^0) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\
B_3^0 &= B_{12}^0 + 2 \cdot B_{66}^0
\end{aligned} \quad (2)$$

$a_{ik}$  определяются по формулам:

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad \text{где } \Omega = C_{11} \cdot C_{22} - C_{12}^2 \quad (3)$$

Жесткости  $D_{ik}$  и  $C_{ik}$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
D_{ik} &= \frac{2}{3} \left( B_{ik}^{n+1} \cdot h_{n+1}^3 + \sum_{s=1}^n B_{ik}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right) \\
C_{ik} &= 2 \cdot \left( B_{ik}^{n+1} \cdot h_{n+1} + \sum_{s=1}^n B_{ik}^s (h_s - h_{s+1}) \right)
\end{aligned} \quad (4)$$

Функции прогиба и напряжений, удовлетворяющие условиям опирания, принимаются в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_m(x) \cdot V_n(y) \cdot w_{mn}(t) \quad (5)$$

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) \cdot Y_n(y) \cdot \Phi_{mn}(t)$$

где  $m, n$  – числа полуволн по осям  $Ox$  и  $Oy$ ,  $U_m(x)$  и  $V_n(y)$  – фундаментальные балочные функции собственных колебаний, удовлетворяющие условиям опирания.

После подстановки выражений (5) в уравнения (1), на основании метода Бубнова-Галеркина, получим уравнение Матье-Хилла:

$$w_{mn}'' + \Omega_{mn}^2(1 - 2\mu \cos \theta t)w_{mn} = 0 \quad (6)$$

где 
$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[ 1 - \frac{P_{10}}{P_{1mn}^*} \right], \quad \mu = \frac{P_{1t}}{2(P_{1mn}^* - P_{10})}$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{I_1'}{I_0 \rho h} + \frac{I_2' I_2}{I_0 I_1 \rho h}$$

$$I_1 = \int_0^a \int_0^b (a_{22} X_m^{IV} Y_n + (a_{66} - 2a_{12}) X_m'' Y_n'' + a_{11} X_m Y_n^{IV}) X_m Y_n dx dy$$

$$I_1' = \int_0^a \int_0^b (D_{11} U_m^{IV} V_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) U_m'' V_n'' + D_{22} U_m V_n^{IV}) U_m V_n dx dy$$

$$I_2 = - \int_0^a \int_0^b \frac{1}{R} U_m'' V_n X_m Y_n dx dy, \quad I_2' = - \int_0^a \int_0^b \frac{1}{R} X_m'' Y_n U_m V_n dx dy$$

$$I_0 = \int_0^a \int_0^b U_m^2 V_n^2 dx dy, \quad I_4 = \int_0^a \int_0^b U_m'' V_n U_m V_n dx dy$$

Границы первых трех областей неустойчивости определяются следующими приближенными формулами:

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu}, \quad \theta_* = \Omega \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2}, \quad \theta_* = \Omega \sqrt{1 - 2\mu^2}, \quad \theta_* = \frac{2}{3} \Omega \sqrt{1 - \frac{9\mu^2}{8 \pm 9\mu}} \quad (7)$$

Из (7) видно, что ширина областей динамической неустойчивости убывает с увеличением номера области  $\Delta\theta/2\Omega \approx \mu, \mu^2, \mu^3, \dots$

2. В качестве примера рассмотрим сжимаемую осевой силой  $P_1(t) = P_{10} + P_{1t} \cdot \cos \theta t$  однослойную ( $n = 0$ ) пологую оболочку из композиционного материала с характеристиками:

$$B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.616, \quad B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.12, \quad B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.157$$

и со следующими параметрами:

$$c = b/R = 0.25\pi, \quad e = h/b = 0.020, \quad P_t/P_0 = 0.3, \quad P_0/P_{1mn}^* = 0.4, \quad \varphi = 0^0, 5^0, \dots, 90^0$$

Жесткости  $D_{ik}$  и  $C_{ik}$  для однослойной пологой оболочки определяются по формулам:

$$D_{ik} = B_{ik} \cdot \frac{h^3}{12}, \quad C_{ik} = B_{ik} \cdot h \quad (8)$$

Для шарнирно опертой по контуру полой оболочки балочные функции и собственные значения имеют вид:

$$U_m(y) = \sin \lambda_m x, V_n(y) = \sin \mu_n y, \mu_n = n\pi/b, \lambda_m = m\pi/a \quad (m=1\dots 3, n=1\dots 3) \quad (9)$$

На основании метода Бубнова-Галеркина получим уравнение Матве-Хилла:

$$w_{mn}'' + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) w_{mn} = 0 \quad (10)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[ 1 - \frac{P_{10}}{P_{1mn}^*} \right], \quad \mu = \frac{P_{1t}}{2(P_{1mn}^* - P_{10})}$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left( D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4 + \frac{\lambda_m^4}{R^2 A_{mn}} \right)$$

$$P_{mn}^* = \frac{1}{\mu_n^2} \left( D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4 + \frac{\lambda_m^4}{R^2 A_{mn}} \right)$$

$$A_{mn} = a_{22} \lambda_m^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + a_{11} \mu_n^4$$

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \frac{12\rho h b^4}{\pi^4 h^2 B_{11}^0}, \quad \tilde{P}_{1mn}^* = \frac{12b^2}{\pi^2 h^3 B_{11}^0} P_{1mn}^*$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений максимальных значений безразмерных величин критической силы  $P_{mn}$ , низшей частоты  $\omega_{mn}$  незагруженной оболочки и низшей частоты  $\Omega_{mn}$  загруженной оболочки.

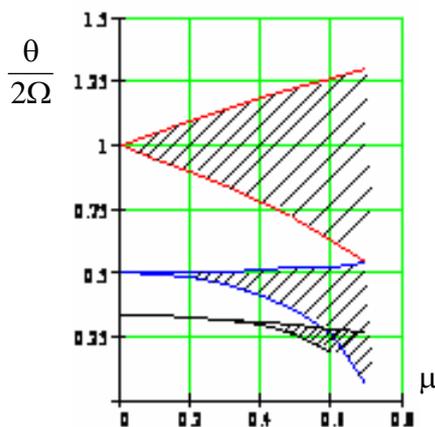
Таблица 1

$d = a/b$	$\max_{\varphi} \min_{m,n} \tilde{\omega}_{mn}$	$\max_{\varphi} \min_{m,n} \tilde{\Omega}_{mn}$	$\max_{\varphi} \min_{m,n} \tilde{P}_{1mn}^*$	$\varphi$
1/4	$\omega_{13} = 79.232$	$\Omega_{13} = 61.373$	$P_{13} = 636.059$	$40^\circ$
1/3	$\omega_{13} = 62.590$	$\Omega_{13} = 48.482$	$P_{13} = 396.921$	$45^\circ$
1/2	$\omega_{13} = 37.966$	$\Omega_{13} = 29.408$	$P_{13} = 146.047$	$55^\circ$
1	$\omega_{13} = 15.036$	$\Omega_{13} = 11.646$	$P_{13} = 22.905$	$75^\circ$
2	$\omega_{12} = 8.273$	$\Omega_{12} = 6.408$	$P_{12} = 6.935$	$85^\circ$
3	$\omega_{12} = 5.327$	$\Omega_{12} = 4.127$	$P_{12} = 2.876$	$90^\circ$
4	$\omega_{12} = 4.501$	$\Omega_{12} = 3.487$	$P_{12} = 2.053$	$90^\circ$

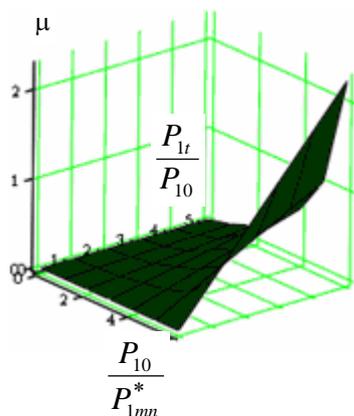
На фиг.2 показано распределение первых трех областей неустойчивости для уравнения Матье-Хилла (10) на плоскости  $(\theta/2\Omega, \mu)$ .

На фиг.3 показано изменение коэффициента возбуждения ( в зависимости от соотношений  $P_{1r}/P_{10} = 0 \dots 0.5$ ,  $P_{10}/P_{1mn}^* = 0 \dots 0.9$ ).

На фиг.4 показано изменение критической силы в зависимости от угла укладки слоя композиционного материала.



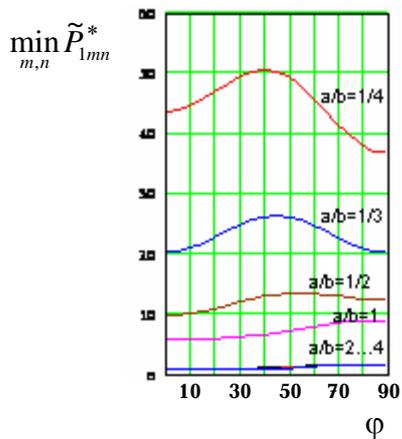
Фиг.2 Распределение областей неустойчивости



Фиг.3

Зависимость коэффициента возбуждения от соотношений

$$P_{1r}/P_{10} \text{ и } P_{10}/P_{1mn}^*.$$



Фиг.4

Изменение критической силы в зависимости от угла укладки слоя КМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448с.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки. //Докл. АН АрмССР. 1965. Т. 41. № 5. С. 278–281.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272с.
6. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1960. Т.13. № 1. С. 47–58.
7. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 536с.

Государственный Инженерный  
Университет Армении  
21.11.2006

Поступила в редакцию

УДК 539. 3: 537.2

## ЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Берберян А.Х.

**Ключевые слова:** сдвиговые электроупругие щелевые волны, слоистая система – пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик.

**Key words:** Shear electroelastic gap waves, piezoelectric-vacuum-dielectric layered system.

Զ.Ն. Դանոյան, Լ.Ա. Աթոյան, Ա.Խ. Բերբերյան  
Ճեղքային ալիքները պլեզոէլեկտրիկ շերտավոր միջավայրերում

Աշխատանքում գտնված են սահրի էլեկտրաառաձգական Ճեղքային ալիքների գոյության պայմանները պլեզոէլեկտրիկ-վակուում-դիէլեկտրիկ շերտավոր համակարգում: Ցույց է տրված, որ այդպիսի չհպվող համակարգում կարող են տարածվել սահրի էլեկտրաառաձգական Ճեղքային ալիքներ: Դիտարկված է այն սահմանային դեպքը, երբ վակուումային շերտի հաստությունը ձգտում է գերոյի: Հիմնավորված է խնդրի դրվածքն այն դեպքում, երբ պլեզոէլեկտրիկ միջավայրը եզերվում է դիէլեկտրիկ միջավայրի հետ առանց հպումի:

Z.N. Danoyan, L.A. Atoyan, A.Kh. Berberyan  
Gap Waves in Piezoelectric Layered Medium

In the present paper the conditions of existence of shear electroelastic gap waves in piezoelectric-vacuum-dielectric layered system are found. It is shown that in the discontact layered system the gap electroelastic waves can be propagated. It is considered the limiting case when the thickness of vacuuming layer tends to zero. It is proved that the statement of the problem is true when there is no acoustic contact between piezoelectric and dielectric grounded media.

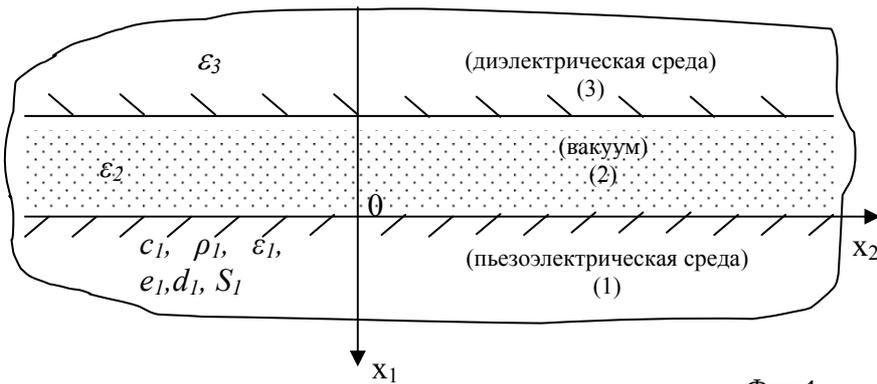
В работе найдены условия существования сдвиговых электроупругих щелевых волн в слоистой системе пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик. Показанно, что в такой бесконтактной системе могут распространяться щелевые электроупругие волны. Рассмотрен предельный случай, когда толщина вакуумного слоя стремится к нулю. Обоснована постановка задачи, когда пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектрической средой.

**1. Введение.** Известно, что [1-3] в полубесконечной изотропной упругой среде со свободной границей сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации не распространяются. Однако, если среда является пьезоэлектриком класса  $6mm$ ,  $4mm$ , то в такой среде со свободной границей распространяются сдвиговые поверхностные электроупругие волны горизонтальной поляризации – поверхностные волны Гуляева-Блюстейна [3-5]. В работе [3] задача Гуляева-Блюстейна рассматривается в несколько иной постановке: предполагается, что пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектриком, имеющим определенную диэлектрическую проницаемость и не обладающей пьезоэффектом. Наличие дополнительной среды позволяет регулировать волновые процессы в пьезоэлектрической среде. В работах [7,8] аналогичная постановка задачи используется при исследовании электроупругих волн Лява в слоистой системе с

пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. Возникает вопрос о справедливости такой постановки задачи. В данной работе задача решается в более общей постановке, предполагая наличие вакуумной щели конечной толщины между рассматриваемыми средами. Решая эту задачу, а затем находя предельное решение, когда толщина вакуумной щели стремится к нулю, обнаруживаем, что предельное решение совпадает с решением первой упрощенной постановки задачи. Этим доказывается справедливость упрощенной постановки. В работе [9] показано, что наличие зазора между упругим пьезоэлектрическим полупространством и экраном приводит к ослаблению локализации поверхностной волны.

## 2. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия.

Пусть между двумя полубесконечными диэлектрическими средами, одна из которых является пьезоэлектриком с гексагональными или тетрагональными классами симметрии  $6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422$ , образована вакуумная щель толщиной  $h$ . Рассматриваемая система относится к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Ось  $Ox_3$  совпадает с главной осью симметрии пьезоэлектрической среды и



Фиг.1

лежит в граничной плоскости  $x_1 = 0$  этой среды, ось  $Ox_1$  направлена вглубь пьезоэлектрической среды. Величины, отнесенные к области  $x_1 > 0$ , будем отмечать индексом "1", отнесенные к области  $x_1 < -h$  – индексом "3", и отнесенные к области  $-h < x_1 < 0$  – индексом "2". Допустим, что поверхности сред свободны от нагрузки, а внешнее электромагнитное поле отсутствует (фиг. 1.).

Далее примем, что возмущения в системе задаются в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} = \{0, 0, u_1(x_1, x_2, t)\}, \quad \varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, t) \\ \varphi_2 = \varphi_2(x_1, x_2, t), \quad \varphi_3 = \varphi_3(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_1$  – упругое смещение,  $\varphi_{1,2,3}$  – электрические потенциалы в средах и в вакууме соответственно.

В условиях антиплоской деформации (1), согласно теориям электроупругости и электродинамики [3-5], для вышеуказанных сред будем иметь следующие соотношения:

1. Уравнения:

1) в области  $x_1 > 0$  (в пьезоэлектрической среде):

$$\Delta u_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \Delta \varphi_1' = 0 \quad (2)$$

2) в области  $-h < x_1 < 0$  (в вакуумном слое):

$$\Delta \varphi_2 = 0 \quad (3)$$

3) в области  $x_1 < -h$  (в диэлектрической среде):

$$\Delta \varphi_3 = 0 \quad (4)$$

2. Граничные условия:

1) на границе  $x_1 = 0$  :

$$\begin{cases} \bar{e}_1 u_1 + \varphi_1' = \varphi_2, & -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_1} + d_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \\ \bar{c}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_1} - d_1 \bar{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - d_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

2) на границе  $x_1 = -h$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \quad (6)$$

Для получения поверхностных волн решения должны удовлетворять условиям затухания на бесконечности:

$$\begin{cases} u_1 \rightarrow 0, \quad \varphi_1' \rightarrow 0 & \text{при } x_1 \rightarrow +\infty \\ \varphi_3 \rightarrow 0 & \text{при } x_1 \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (7)$$

Выше приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\bar{c}_1 / \rho_1}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1 + \chi_1^2) \\ \chi_1^2 &= e_1^2 / \varepsilon_1 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad d_1 = e_{14}^{(1)}, e_1 = e_{15}^{(1)} \\ \bar{e}_1 &= e_1 / \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{11}^{(3)} \\ \varphi_1' &= \varphi_1 - \bar{e}_1 u_1, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$S_1$  – скорость сдвиговых объемных волн в пьезоэлектрической среде,  $\chi_1$  – коэффициент электромеханической связи для объемной волны,  $c_1$  и  $c_2$  – упругие постоянные,  $e_1$  и  $d_1$  – пьезомодули,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – диэлектрические проницаемости,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – массовые плотности,  $\varphi_1'$  – новая неизвестная, выражающаяся через  $\varphi_1$  и  $u_1$ .

**3. Решение задачи.** Решения задачи (2) – (7) будем искать в виде сдвиговых плоских гармонических электроупругих волн с частотой  $\omega > 0$ :

$$u_1 = U_{01} e^{i(px_2 + qx_1 - \omega t)}, \quad \varphi = \Phi_0 e^{i(px_2 + qx_1 - \omega t)} \quad (9)$$

распространяющихся в плоскости  $Ox_1x_2$ . Здесь  $q > 0$  и  $p$  – продольное и поперечное волновые числа соответственно; фазовая скорость волны определяется выражением:

$$V = \omega / p \quad (10)$$

Подставляя (9) в уравнения (2)-(4) и удовлетворяя условиям затухания (7), получаем решение вида:

В области  $x_1 > 0$  :

$$\begin{cases} u_1 = U_{01} \exp(-p\beta_1(V)x_1) \exp i(px_2 - \omega t) \\ \varphi_1 = [U_{01} \bar{e}_1 \exp(-p\beta_1(V)x_1) + \Phi_{01} \exp(-px_1)] \exp i(px_2 - \omega t) \end{cases} \quad (11)$$

В области  $-h < x_1 < 0$  :

$$\varphi_2 = [\Phi_{02}^+ \exp(px_1) + \Phi_{02}^- \exp(-px_1)] \exp i(px_2 - \omega t) \quad (12)$$

В области  $-\infty < x_1 < -h$  :

$$\varphi_3 = \Phi_{03} \exp(px_1) \exp i(px_2 - \omega t) \quad (13)$$

Здесь  $U_{01}, \Phi_{01}, \Phi_{02}^+, \Phi_{02}^-, \Phi_{03}$  – произвольные постоянные, являющиеся амплитудами волны,  $\beta_1(V)$  – коэффициент затухания, причем

$$\beta_1(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)} \quad (14)$$

Из условия затухания (7) при  $x_1 \rightarrow +\infty$  следует, что  $\beta_1(V)$  – положительная величина. Отсюда получается необходимое условие существования поверхностной волны:

$$0 < V_s < S_1 \quad (15)$$

и следует, что парциальная волна в первой среде всегда должна быть неоднородной.

Таким образом, решения (11)-(13) типа (9) уравнений (2)-(4), удовлетворяющих условию (15), состоят из одной неоднородной электроупругой волны в пьезоэлектрике, четырех неоднородных электростатических волн: одной в диэлектрике, двух в вакууме, одной в пьезоэлектрике. Совокупность указанных волн, которые удовлетворяют граничным условиям (5)-(6), образует сложную пятипарциальную поверхностную волну, которую мы и называем электроупругой щелевой волной.

Подставляя решение (12)-(13) в граничные условия (5)-(6), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых амплитуд:

$$\begin{aligned}
\bar{e}_1 U_{01} + \Phi'_{01} &= \Phi_{02}^+ + \Phi_{02}^- \\
(\bar{c}_1 \beta_1 + i \bar{e}_1 d_1) U_{01} + (e_1 + i d_1) \Phi'_{01} &= 0 \\
\varepsilon_1 \Phi'_{01} + i d_1 U_{01} &= -\varepsilon_2 (\Phi_{02}^+ - \Phi_{02}^-) \\
\Phi_{02}^+ e^{-k} + \Phi_{02}^- e^k &= \Phi_{03} e^{-k} \\
\varepsilon_2 (\Phi_{02}^+ e^{-k} - \Phi_{02}^- e^k) &= \varepsilon_3 \Phi_{03} e^{-k}
\end{aligned} \tag{16}$$

В (16) обозначено:

$$k = ph = 2\pi h / \lambda \tag{17}$$

где  $k$  – относительная толщина слоя,  $\lambda$  – длина волны,  $p$  – волновое число волны.

Условие существования нетривиального решения системы (16) дает характеристическое уравнение поверхностной волны:

$$\beta_1(V) = R(k) \tag{18}$$

где приняты следующие обозначения:

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \text{th} k + 1) - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \text{th} k)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 \text{th} k + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \text{th} k)} \tag{19}$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3 \tag{20}$$

$$R_1^2 = e_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1, \quad K_1^2 = d_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1. \tag{21}$$

Здесь  $R_1^2$  и  $K_1^2$  – коэффициенты электромеханической связи объемных волн,  $R(k)$  – коэффициент электромеханической связи поверхностной волны (КЭМС).

Характеристическое уравнение (16) неявно определяет зависимость фазовой скорости электроупругой щелевой волны от относительной толщины слоя  $k$  и физико-механических параметров слоистой системы.

Таким образом, мы приходим к заключению: для того чтобы выражения (11)-(13) представляли собой щелевую волну, необходимо, чтобы характеристическое уравнение поверхностной волны (18) при фиксированном значении параметров задачи имело решение  $V = V_S(k)$ , которое удовлетворяет условию затухания (15).

#### 4. Исследование коэффициента электромеханической связи.

Из соотношений (18)-(21) следует, что при отсутствии пьезоэффекта ( $e_1 = d_1 = 0$ ) КЭМС  $R(k)$  обращается в нуль, а характеристическое уравнение (18) совпадает с характеристическим уравнением обычной сдвиговой волны [1].

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристическом уравнении (18) проявляется двумя факторами: наличием коэффициента  $R(k)$  и зависимостью скорости объемной волны  $S_1 = (c_1 / \rho_1) \sqrt{1 + \chi_1^2}$  от пьезоэффекта. Отметим также, что характеристическое уравнение (18) получено для классов  $6$  и  $4$ . Для классов  $6mm$  и  $4mm$  следует в этих

уравнениях и в других соответствующих выражениях положить  $d_1 = 0$ , а для классов 622, 422  $e_1 = 0$ .

Далее примем следующее ограничение:

$$|R(k)| \ll 0 \quad (22)$$

что имеет место для большинства известных пьезоэлектриков [3].

Для исследования характеристического уравнения (18), необходимо сначала исследовать поведение КЭМС  $R(k)$  в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и от относительной толщины вакуумного слоя  $k$ .

Поведение функции  $R(k)$  исследовано в работе [3].

Например, если имеет место условие  $R(k) < 0$ , то щелевые волны не могут существовать.

**5. Случай сред из классов  $6mm, 4mm$ .** Далее рассмотрим частный случай, когда пьезоэлектрик принадлежит классам симметрии  $6mm, 4mm$ . В этом случае  $e_{14} = d_1 = 0$ ;  $e_{15} = e_1 \neq 0$ .

Тогда КЭМС  $R(k)$  принимает вид:

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\epsilon}_2 (\bar{\epsilon}_2 thk + 1)}{\bar{\epsilon}_2 (\bar{\epsilon}_2 thk + 1) + \bar{\epsilon}_1 (\bar{\epsilon}_2 + thk)} \quad (23)$$

В (23) перейдем к пределу при  $h \rightarrow 0$ , или  $k \rightarrow 0$ . В этом случае  $thk \rightarrow 0$  и КЭМС  $R(k)$  принимает вид:

$$R(0) = \frac{R_1^2 \bar{\epsilon}_2}{\bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2}. \quad (24)$$

После некоторых преобразований (24) можно представить в виде:

$$R(0) = \frac{\chi_1^2}{1 + \frac{\chi_1^2}{\epsilon_3}}, \quad \chi_1^2 = \frac{e_{15}^2}{\epsilon_1 c_{44}} \quad (25)$$

что совпадает с результатом работы [1].

Отсюда можно также получить выражение фазовой скорости щелевой поверхностной волны [1]:

$$V_s = S_1 \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^4}{(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3})^2}}, \quad \alpha_1^2 = \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2} \quad (26)$$

Таким образом, мы решили задачу о щелевых волнах в слоистой системе пьезоэлектрик-вакуум-диэлектрик. Получили дисперсионное уравнение поверхностной волны и условия ее существования. В частности,

показали справедливость постановки задачи, когда пьезоэлектрическая среда граничит без акустического контакта с диэлектрической средой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М.:Наука, 1981. 281с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872с.
3. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
5. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.:Наука, 1982. 424с.
6. Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М.: Мир, 1965.
7. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения. Часть I).//Изв. НАН Армении.Механика. 2006. Т.59. № 2. С. 43-56.
8. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения. Часть II).//Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №.3. С. 34-44.
9. Аветисян А.С., Карапетян М.Э. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна. // В кн.: «Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем» (Сборник научных трудов по материалам республиканской конференции), Ереван, 2002. С. 97-101.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
12.01.2007

УДК 539.3

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ  
НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД СЖИМАЮЩЕЙ  
НАГРУЗКОЙ

Егиазарян Т. А., Макарян В. С.

**Ключевые слова:** трещина, интегральное преобразование, интегральное уравнение, бесконечная система

**Keywords:** crack, integral transformation, integral equation, infinite system.

Տ.Հ.Եղիազարյան, Վ.Ս.Մակարյան

Մեղմնող բեռի տակ գտնվող ճաքի առկայությամբ առաձգական կիսահարթության համար եզրային խնդիր

Դիտարկվում է վերջավոր ճաքով թուլացված առաձգական կիսահարթության համար եզրային խնդիրը, երբ կիսահարթության եզրին ազդում են երկու համաչափ կենտրոնացված սեղմող ուժեր: Ենթադրվում է, որ սեղմող ուժերի ազդեցության տակ ճաքի ափերը հպվում են միմյանց ուղղահայաց ուղղությամբ, իսկ հորիզոնական ուղղությամբ կարող են սահել մեկը մյուսի վրայով:

T.H.Yeghiazaryan, V.S.Makaryan

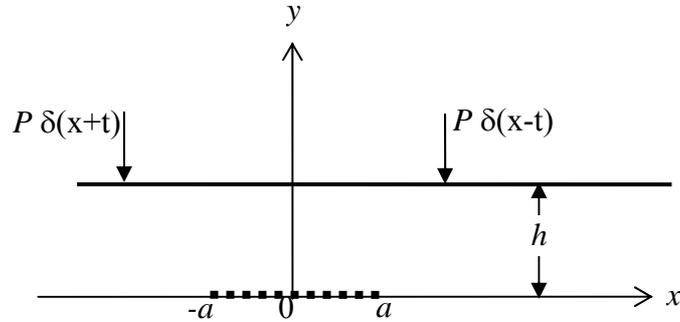
**Boundary Problem for Elastic Half Plane at Presence of a Crack Being Under Compressible loading**

The problem for elastic half plane weakened by the terminal crack is considered. The crack is located on a line parallel to border of half plane on which two compressing forces are operating. It is supposed, that in the result of plate deformation under the action of compressing forces the crack faces are contacted with each other and the slippage of points of the crack various faces one above the other are taking place.

Рассматривается задача для упругой полуплоскости, расслабленной конечной трещиной. Трещина расположена на линии, параллельной границе полуплоскости, на которой действуют две симметричные сжимающие силы. Допускается, что в результате плоской деформации под действием сжимающих сил берега трещины входят в контакт между собой и происходит проскальзывание точек различных берегов трещины друг над другом.

Рассматривается задача для упругой полуплоскости, расслабленной конечной трещиной. Трещина расположена на линии, параллельной границе полуплоскости, а на границе полуплоскости действуют две симметричные сжимающие силы. Как и в работе [1], допускается, что в результате плоской деформации под действием сжимающих сил берега трещины входят в контакт между собой и происходит проскальзывание точек различных берегов трещины друг над другом. В указанной работе [1] рассмотрен случай контакта двух упругих полуплоскостей из различных материалов, когда полубесконечная трещина расположена на поверхности раздела материалов. Было установлено, что при отсутствии касательных напряжений на берегах трещины, нормальные и касательные напряжения у граничной точки трещины имеют корневую особенность. Это обстоятельство позволяет придти к выводу, что трещина,

находясь на линии раздела материалов под воздействием сжимающих сил, то есть в условиях, когда берега трещины полностью прижаты друг к другу и одновременно происходит проскальзывание точек одного берега трещины над



точками другого, может являться источником разрушения упругой среды. Очевидно, что главную роль в возможном разрушении в описанном случае деформации будут играть касательные напряжения, действующие на поверхности раздела материалов, то есть, на поверхности расположения трещины. В настоящей работе, в рамках вышеизложенной постановки, проводится изучение напряженно-деформированного состояния однородной упругой среды, содержащей в себе трещину, когда последняя оказалась под воздействием сжимающих сил (фиг.1).

Фиг.1

Граничные условия задачи запишем в следующем виде:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = P[\delta(x-t) + \delta(x+t)], \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) - u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0))}{\partial x} = 0, & |x| > a \\ \tau_{xy}^{(i)}(x, 0) = \rho(x), & |x| < a \end{cases}$$

где индексы «1» отнесены к области  $0 < y < h$ ,  $-\infty < x < \infty$ , а индексы «2» – к области  $y < 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Функция  $\rho(x)$ , фигурирующая в парном условии (3), – известная функция, которая, в частности, может быть равной и нулю.  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции Эйри, которую представим в виде следующих двух интегралов Фурье [2 – 4]:

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) \text{sh} \lambda y + B_1(\lambda) \text{ch} \lambda y + C_1(\lambda) \lambda y \text{sh} \lambda y + D_1(\lambda) \lambda y \text{ch} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda \quad (4)$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} [A_2(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)] e^{\lambda y} \cos \lambda x d\lambda \quad (5)$$

Пользуясь соотношениями Эйри [2-4], выражающими компоненты напряжений и перемещений через бигармонические функции (4) и (5), будем иметь следующие представления:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, y) = & - \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [B_1(\lambda) + y\lambda D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [A_1(\lambda) + y\lambda C_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \cos \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = - \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 [A_2(\lambda) + y\lambda B_2(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)} = & \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [A_1(\lambda) + y\lambda C_1(\lambda) + D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [B_1(\lambda) + C_1(\lambda) + y\lambda D_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda y} [A_2(\lambda) + y\lambda B_2(\lambda) + B_2(\lambda)] \sin \lambda x d\lambda \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y^{(1)}(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [(1+\nu)A_1(\lambda) + \lambda y C_1(\lambda) + (\nu-1)D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [(1+\nu)B_1(\lambda) + (\nu-1)C_1(\lambda) + \lambda y(\nu+1)D_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_y^{(2)}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 \{ (1+\nu)A_2(\lambda) + [\nu-1 + \lambda y(\nu+1)]B_2(\lambda) \} \sin \lambda x d\lambda \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1)}(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \lambda^2 \{ [(1+\nu)B_1(\lambda) + 2C_1(\lambda) + \lambda y(\nu+1)D_1(\lambda)] \operatorname{ch}\lambda y + \\ & + [(1+\nu)A_1(\lambda) + 2D_1(\lambda) + \lambda y C_1(\lambda)] \operatorname{sh}\lambda y \} \cos \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_x^{(2)}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \lambda^2 \{ (1+\nu)A_2(\lambda) + [2 + \lambda y(\nu+1)]B_2(\lambda) \} \cos \lambda x d\lambda \quad (13)$$

Доопределив первое условие в (3)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\partial(u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0))}{\partial x}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (14)$$

удовлетворяя граничным условиям (1, 2) и условию (14), на основе интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h} [-2P(1 + \lambda h) \cos \lambda t + E \lambda^2 h^2 e^{-\lambda h} U(\lambda)]}{\pi \lambda^2} \quad (15)$$

$$B_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[-2P(1+\lambda h)\cos\lambda t + E\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (16)$$

$$C_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t + E((1-\lambda h)\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h\operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (17)$$

$$D_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t - E(e^{\lambda h}\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (18)$$

$$A_2(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[-2P(1+\lambda h)\cos\lambda t + E\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (19)$$

$$B_2(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}[2P\cos\lambda t - E(e^{-\lambda h}\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h)U(\lambda)]}{\pi\lambda^2} \quad (20)$$

(15 – 20) функция  $U(\lambda)$  есть косинус-трансформанта Фурье функции (14):

$$U(\lambda) \equiv \int_0^a u(x)\cos\lambda x dx \quad (21)$$

Удовлетворение второму условию в (3) приводит к следующему интегральному уравнению относительно трансформанты (21):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}(x,0)}{E} &\equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty U_0(\lambda)\sin\lambda x d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-2\lambda h} [1 + 2h\lambda(h\lambda - 1)]U_0(\lambda)\sin\lambda x d\lambda = \\ &= \frac{2P_0}{\pi} \left( \frac{(x-t)h^2}{(h^2 + (x-t)^2)^2} + \frac{(x+t)h^2}{(h^2 + (x-t)^2)^2} \right) + \rho_1(x), \quad -1 < x < 1 \\ P_0 &= \frac{P}{E}, \quad U_0(\lambda) = \frac{U(\lambda)}{a}, \quad \rho_1(x) = \frac{\rho(x)}{E} \end{aligned} \quad (22)$$

Метод сведения интегрального уравнения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений основан на следующем известном разрывном интеграле Вебера–Шафхейтлина [5]:

$$\int_0^\infty J_{2n}(\lambda t)J_{2m}(\lambda t)\frac{d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases} \quad (23)$$

Имея в виду (23), решение уравнения (22) представим в виде следующего ряда бесселевых функций:

$$U_0(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty X_m J_{2m}(\lambda) \quad (24)$$

Подставляя представление (24) в уравнение (22) и пользуясь известными значениями разрывного интеграла [5, 6]:

$$\int_0^{\infty} J_{2m}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = \begin{cases} -(-1)^m U_{2m-1}(x) & |x| < 1 \\ \frac{(-1)^m \operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-1} (|x| + \sqrt{x^2-1})^{2m}} & |x| > 1 \end{cases} \quad (25)$$

а также свойством ортогональности многочленов Чебышева [6], для определения коэффициентов разложения (24) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} X_m = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

$$A_{mn} = 4n \int_0^{\infty} e^{-2h\lambda} [1 + 2h\lambda(\lambda h - 1)] \frac{J_{2n}(\lambda) J_{2m}(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (27)$$

$$a_n = \frac{8P(-1)^n}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) \left( \frac{(x-t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} + \frac{(x+t)h^2}{[h^2 + (x+t)^2]^2} \right) dx + \\ + 4(-1)^n \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) \rho_1(x) dx \quad (28)$$

Покажем, что коэффициент  $X_0$  в разложении (24) равен нулю. Действительно:

$$X_0 = U_0(0) = \int_0^1 u(x) dx = u_x^{(1)}(1, 0) - u_x^{(2)}(1, 0) - [u_x^{(1)}(0, 0) - u_x^{(2)}(0, 0)] = 0 \quad (29)$$

Если известны коэффициенты разложения (24), то напряжения, действующие на линии трещины  $y = 0$ , будут определяться следующими формулами:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{E} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{2\pi\sqrt{x^2-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m X_m}{(|x| + \sqrt{x^2-1})^{2m}} - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \int_0^{\infty} (-e^{-2\lambda h} - 2h\lambda(h\lambda - 1)e^{-2\lambda h}) J_{2m}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda - \\ - \frac{2P}{\pi} \left( \frac{(x-t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} + \frac{(x+t)h^2}{[h^2 + (x-t)^2]^2} \right), \quad |x| > 1 \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_y^{(1)}(x, 0)}{E} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} X_m h^2 \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda h} J_{2m}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda + \frac{2P}{\pi} \left( \frac{h}{h^2 + (x-t)^2} + \right. \\ \left. + \frac{h}{h^2 + (x+t)^2} - \frac{(x-t)^2 h}{[h^2 + (x-t)^2]^2} - \frac{(x+t)^2 h}{[h^2 + (x-t)^2]^2} \right), \quad |x| > 1 \quad (31)$$

При получении формулы (30) было учтено представление (25). Коэффициент интенсивности касательных напряжений дается следующим равенством:

$$KI = \mp \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X_m \quad (32)$$

где знак « $-$ » относится к точке  $x = 1$ , а знак « $+$ » – к точке  $x = -1$ . Несобственные интегралы, входящие как в бесконечную систему (26), так и в формулы (30, 31), можно представить в виде бесконечных рядов [5, 6]. Легко установить также, что бесконечная система (26) квазивполне регулярна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} |A_{mn}| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (33)$$

представляет собой произведение бесконечно дифференцируемой функции

$$\varphi(\lambda h) = e^{-2h\lambda} [1 + 2h\lambda(\lambda h - 1)] \quad (34)$$

на функцию

$$\psi(\lambda) = \frac{J_{2n}(\lambda) J_{2m}(\lambda)}{\lambda} \quad (35)$$

для которого известно разложение [5, 6]

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2^{2n} 2^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{-1+2m+2n+2k} \Gamma(2m+2n+2k+1)}{2^{2k} k! \Gamma(2m+2n+k+1) \Gamma(2n+k+1) \Gamma(2m+k+1)} \quad (36)$$

Следовательно, функция  $\psi(\lambda)$  зависит от  $\lambda^{-1+2m+2n+2k}$  и интегрированием по частям можно убедиться в выполнении условий (33).

Прежде, чем перейти к анализу численных примеров, заметим, что при предельном переходе  $h \rightarrow 0$ , из формул (30) и (31) следуют равенства:

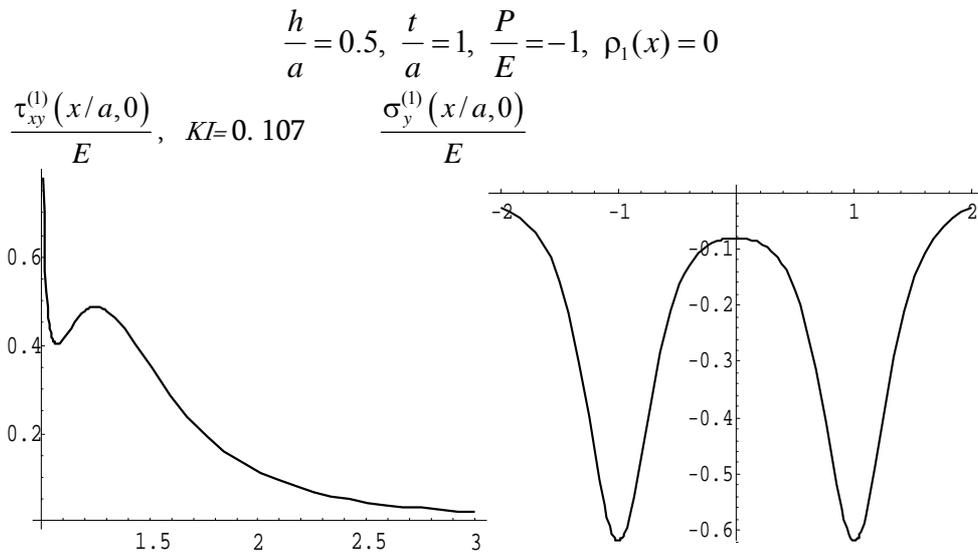
$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = P[\delta(x-t) + \delta(x+t)] \quad -\infty < x < \infty \quad (37)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{xy}(x, 0) = \begin{cases} \rho(x), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (38)$$

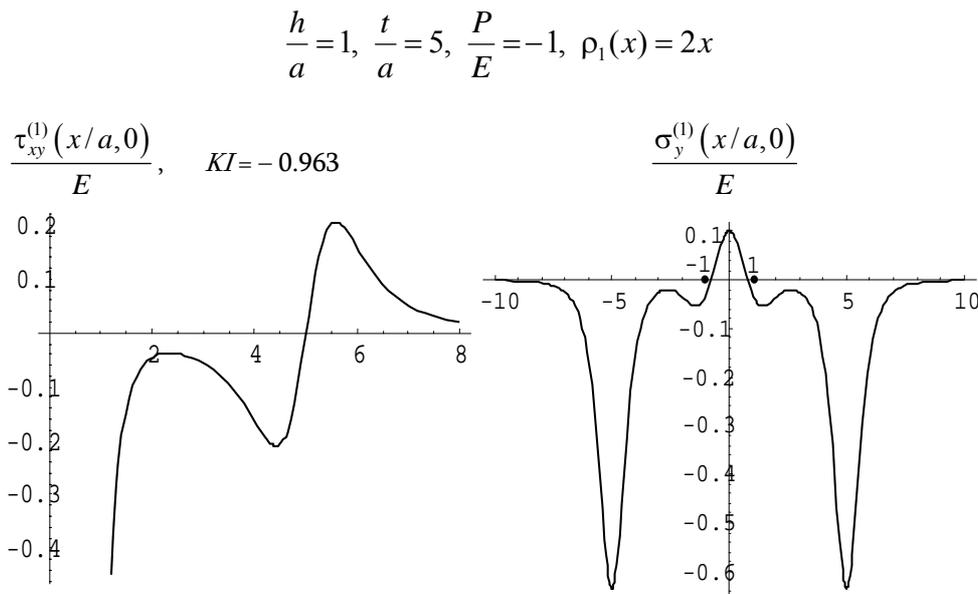
Для получения равенств (37) и (38) использованы следующие известные соотношения [7]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h^2 + y^2} = \pi \delta[y], \quad y \delta'[y] = -\delta[y] \quad (39)$$

Графики, приведенные на (фиг.2), показывают, что нормальные напряжения, действующие на линии расположения трещины, всюду ограничены и имеют постоянный отрицательный знак. То есть берега трещины при данных значениях параметров не стремятся отойти друг от друга. Касательные же напряжения сохраняют свою корневую особенность с приближением к границе трещины, так как коэффициент при особенности отличен от нуля. Аналогичная картина наблюдается как при дальнейшем уменьшении расстояния между точками приложения внешних сжимающих сил, так и при увеличении указанного расстояния. Она не терпит качественных изменений и в случаях изменения расстояния линии расположения трещины от границы полуплоскости. Расчетные варианты для этих случаев здесь не приводятся. Анализ численных примеров показывает, что в случае, когда трещина расположена внутри полуплоскости, при любых значениях геометрических параметров эффект отхода берегов трещины друг от друга не наблюдается.



Фиг.2



Фиг.3.

На графиках, изображенных на (фиг.3), показаны законы распределения касательных и нормальных напряжений, действующих на линии расположения трещины для тех случаев, когда учтены наличия касательных усилий на поверхности трещины в виде линейной функции. Как видно из этих графиков, учет касательных усилий приводит к качественному изменению ситуации на поверхности трещины. Нормальные напряжения, действующие на поверхности трещины, меняют свои знаки с отрицательного на положительный. Это означает,

что берега трещины в этих случаях стремятся отойти друг от друга и для этих параметров постановка задачи становится некорректной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В. С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой. //Докл. НАН РА. 2006. Т.106. №2. С. 144-150.
2. Новожилов В.В.. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 369с.
3. Новацкий. В.К. Теория упругости.М.: Мир. 1975, 872 с.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд.иностр.лит. 1955. 667с.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: Изд.иностр.лит. 1949. 798с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 663с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец.курс. М.: Наука, 1965. 327с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
19.12.2006

УДК 539.3

**ПРЕДЕЛЬНОЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЕ СОСТОЯНИЕ  
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ**

Максимова Л.А.

**Ключевые слова:** пластичность, предельные соотношения

**Key words:** plasticity, limiting state conditions

Լ. Ա. Մակսիմովա

**Առանցքահամաչափ խնդրի սահմանային ստատիկորեն որոշելի վիճակը**

Աշխատանքում առանցքահամաչափ խնդրի համար ուսումնասիրվում են սահմանային ստատիկորեն որոշելի առնչությունները: Դիտարկված է այն դեպքը, երբ որպես սահմանային վիճակի առնչություններ հանդիսանում են Միզեսի պլաստիկության և լարումների դիստորի կոմպոնենտներից մեկի զրո լինելու պայմանները: Առաջարկված են փոփոխականների փոխարինման տարբեր եղանակներ, որոնք հանդիսանում են Մորիս Լևիի փոփոխականների փոխարինման մեթոդի անալոգը: Հետազոտված են տարբեր ստատիկորեն որոշելի խնդիրներ նկարագրող հավասարումները: Ցույց է տրված, որ ստացված հավասարումները հիպերբոլական տիպի են, որոշված են բնութագրիչների հավասարումները, ստացված են նրանց երկայնքով ուղղված առնչությունները: Ստացված արդյունքներից, որպես մասնավոր դեպք ստացվում են լրիվ պլաստիկության պայմանից ստացվող առնչությունները:

L.A. Maksimova

**Limiting state of static definable axial symmetrically problems**

The limiting state relationships of static definable axial symmetrically problems are investigated in this paper. Investigated the case, when as limiting state conditions are the Mises's plasticity condition and one which deviator stresses is equal zero. Considered the various variables changes, analogically Moris-Levi's variables changes. Investigated the various equations of statically definable problems. Shown that obtained equations are hyperbolically, defined the characteristic equations and relationships along characteristics. From research results as particular case we can obtain relationships corresponding to full plasticity condition.

В работе исследуются предельные статически определяемые соотношения в случае осесимметричной задачи. Рассматривается случай, когда одним из предельных условий является условие пластичности Мизеса и равенство нулю одной из нормальных компонент девиатора напряжений. Предложены различные варианты замены переменных, аналогичных замене переменных Мориса Леви. Исследованы варианты уравнений статически определяемых задач. Показано, что система полученных уравнений принадлежит гиперболическому типу, определены уравнения характеристик, получены соотношения вдоль них. Из полученных результатов, как частный случай, следуют уравнения при условии полной пластичности.

1. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат  $\rho\theta z$  в случае осесимметричного состояния имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}, \sigma_z$  – нормальные,  $\tau_{\rho z}$  – касательные компоненты напряжения.

Статически определяемое осесимметричное состояние будет в случае, когда имеют место два независимых соотношения

$$f_1(\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\rho z}) = 0, \quad f_2(\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\rho z}) = 0 \quad (1.2)$$

Аналогично М.Леви [1], введем замену переменных

$$\sigma_\rho = \sigma + \Sigma \cos 2\theta, \quad \sigma_z = \sigma - \Sigma \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho z} = \Sigma \sin 2\theta \quad (1.3)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\rho - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2}, \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\rho - \sigma_z} \quad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.3) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma, \theta), \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(\sigma, \theta) \quad (1.5)$$

Из (1.1), (1.3) и (1.5) следует система уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \cos 2\theta - 2\Sigma \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \\ & + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \sin 2\theta + 2\Sigma \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \sin 2\theta + 2\Sigma \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \\ & - \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \cos 2\theta + 2\Sigma \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6), согласно (1.3) – (1.5), является замкнутой относительно двух неизвестных  $\sigma, \theta$ .

Рассмотрим замену переменных

$$\sigma_\rho = \sigma + \Sigma \cos 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma - \Sigma \cos 2\varphi, \quad \tau_{\rho z} = \Sigma \sin 2\varphi \quad (1.7)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} \quad (1.8)$$

Из (1.2) и (1.7) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma, \varphi), \quad \sigma_z = \sigma_z(\sigma, \varphi) \quad (1.9)$$

Из (1.1), (1.7) и (1.4) можно получить систему уравнений, аналогичную (1.6).

Рассмотрим замену переменных

$$\sigma_\theta = \sigma + \Sigma \cos 2\psi, \quad \sigma_z = \sigma - \Sigma \cos 2\psi, \quad \tau_{\rho z} = \Sigma \sin 2\psi \quad (1.10)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{\rho z}^2}, \quad \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\theta - \sigma_z} \quad (1.11)$$

Из (1.2) и (1.10) следует

$$\Sigma = \Sigma(\sigma, \psi), \quad \sigma_\rho = \sigma_\rho(\sigma, \psi) \quad (1.12)$$

Из (1.1), (1.10) и (1.12) можно получить систему уравнений, аналогичную (1.6).

2. Рассмотрим условие пластичности Мизеса в случае осесимметричной задачи

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 6\kappa^2, \quad \kappa - \text{const} \quad (2.1)$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho} + \sigma_z) \quad (2.2)$$

Согласно (2.2), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \quad (2.3)$$

Условию пластичности (2.3) удовлетворим при помощи замены переменных (1.3), соотношения (1.5) примут вид

$$\Sigma = \kappa, \quad \sigma_{\theta} = \sigma \quad (2.4)$$

Уравнения (1.6), согласно (1.3), (2.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - 2\kappa \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + 2\kappa \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\kappa \cos 2\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\kappa \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + 2\kappa \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\kappa \sin 2\theta}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) принадлежат гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\theta \pm \pi/4), \quad \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_1 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_2 = -1 \quad (2.6)$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta}) \quad (2.7)$$

Согласно (2.7), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \quad (2.8)$$

Условию пластичности (2.8) удовлетворим при помощи замены переменных (1.7), соотношения (1.9) примут вид

$$\Sigma = \kappa, \quad \sigma_z = \sigma \quad (2.9)$$

Из (1.1), (1.7), (2.9) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - 2\kappa \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + 2\kappa \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\kappa \cos 2\varphi}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\kappa \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\kappa \sin 2\varphi}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) принадлежат к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{1,2} = \frac{\sin 2\varphi \pm \sqrt{\sin^2 2\varphi + 4 \cos^2 2\varphi}}{2 \cos 2\varphi}, \quad \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_1 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_2 = -1 \quad (2.11)$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.12)$$

Согласно (2.12), уравнения характеристик (2.11) примут вид

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi/4) \quad (2.13)$$

Предположим, что имеет место условие

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (2.14)$$

Согласно (2.14), соотношение (2.1) примет вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2 \quad (2.15)$$

Условию пластичности (2.15) удовлетворим при помощи замены переменных (1.10), соотношения (1.12) примут вид

$$\Sigma = \kappa, \sigma_\rho = \sigma \quad (2.16)$$

Из (1.1), (1.10), (2.16) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + 2\kappa \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\kappa \cos 2\psi}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\kappa \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - 2\kappa \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\kappa \sin 2\psi}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) принадлежат к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{1,2} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{\sin^2 2\psi + 4\cos^2 2\psi}}{2\cos 2\psi}, \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_1 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_2 = -1 \quad (2.18)$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \psi \quad (2.19)$$

Согласно (2.19), уравнения характеристик (2.18) примут вид

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\beta \pm \pi/4) \quad (2.20)$$

3. Статически определяемая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), примет вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (3.1)$$

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \quad (3.2)$$

Аналогично [2,3], положим

$$\tau_{\rho z} = m_1 \rho + \frac{m_2}{\rho} \quad m_1, m_2 - \text{const} \quad (3.3)$$

Из (3.1) - (3.3) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -2m_1 z \mp \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C, \quad C - \text{const} \\ \sigma_z &= -2m_1 z \mp 2\kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \mp \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \\ \sigma_\theta &= -2m_1 z \mp \kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \mp \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \end{aligned} \quad (3.4)$$

Статически определяемая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.7), (2.8), (2.9), примет вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (3.5)$$

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) \quad (3.6)$$

Величину  $\tau_{\rho z}$  определим согласно (3.3). Из (3.5), (3.6) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -2m_1 z \mp 2\kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C, \quad C - \text{const} \\ \sigma_\theta &= -2m_1 z \mp 2\kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \mp 2\kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \\ \sigma_z &= -2m_1 z \mp \kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \mp 2\kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \end{aligned} \quad (3.7)$$

Статически определяемая система уравнений (1.1), (1.2), согласно (2.1), (2.14), (2.15), (2.16), примет вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (3.8)$$

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4\kappa^2, \quad \sigma_\rho = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (3.9)$$

Величину  $\tau_{\rho z}$  определим согласно (3.3). Из (3.8), (3.9) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -2m_1 z \pm \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C, \quad C - \text{const} \\ \sigma_z &= -2m_1 z \mp \kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \pm \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \\ \sigma_\theta &= -2m_1 z \pm \kappa \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} \pm \kappa \int \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \tau_{\rho z}^2} d\rho + C \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что во всех трех случаях (3.4), (3.7), (3.10), величины напряжений  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$  меняются линейно вдоль оси  $z$  пропорционально величине  $2m_1$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 06-01-00663а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теория пластичности. Сборник переводов. М.: ИЛ., 1948.
2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. Максимова Л.А. О статически определяемых соотношениях в осесимметричной задаче теории идеальной пластичности // В сб.: посвященном 75-летию Е.И. Шемякина «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород», М.: Физматлит, 2006.

4. Максимова Л.А. О статически неопределимом состоянии идеальнопластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями // МТТ. 2005. №2.
5. Максимова Л.А. О соотношениях изотропного идеальнопластического тела // МТТ. 2005. №5.

Московский государственный  
горный университет

Поступила в редакцию  
19.10.2006

УДК 539.3

ГИБРИДНОЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю.В.

**Ключевые слова:** гибридное и оптимальное проектирование, армированные конструкции, равнодеформируемость, равная трещиностойкость покрытий, конструкции минимального веса

**Keywords:** the hybrid and optimum designing, the reinforced designs, equal-deformability, equal crack resistance of coverings, designs of the minimal weight.

**Յու. Վ. Նեմիրովսկի**

**Կոմպոզիտ սալերի հիբրիդային և օպտիմալ նախագծումը**

Ձևակերպված շերտա-թելիկավոր կառուցվածքի կոմպոզիտ կոնստրուկցիաների նախագծման խնդիրը կայանում է ֆազային նյութերի դիրքերի որոշման և շերտերի երկրաչափական պրոֆիլավորման մեջ, ապահովելու համար անհրաժեշտ շահագործման և զանգվածաձավային հատկությունները: Դիտարկված են օղակաձև սալերի հիբրիդային նախագծման օրինակներ հարթության մեջ բեռնավորման և լայնական ծման դեպքերում: Ցույց է տրված, որ մինիմալ քաշի նախագծերը կազմում են հիբրիդային նախագծերի ենթադաս:

**Yu.V. Nemirovskii**

**Hybrid and Optimum Designing Composit Plates**

The problem of hybrid designing of composit designs of layer-fibrous structure is formulated consists in determination of a site of phase materials and a geometrical roll forming of layers for maintenance of necessary operational and mass-dimensional qualities of a product. Illustrative instances of hybrid designing of ring plates are observed at a loading in a plane and at a cross-bending. It is shown, that designs of the minimal weight make a subclass of hybrid designs.

Сформулированная задача гибридного проектирования композитных конструкций слоисто-волоконистой структуры заключается в установлении местоположения фазовых материалов и геометрического профилирования слоев для обеспечения необходимых эксплуатационных и массово-габаритных качеств изделия. Рассмотрены иллюстративные примеры гибридного проектирования кольцевых пластин при нагружении в плоскости и при поперечном изгибе. Показано, что проекты минимального веса составляют подкласс гибридных проектов.

Проблема создания эффективных в эксплуатации тонкостенных конструкций минимального веса имеет исключительно важное значение для объектов аэрокосмической, судостроительной и машиностроительной техники. Для конструкций из однородных материалов эта проблема нашла широкое освещение в рамках теорий оптимального проектирования и сводится к поиску законов профилирования толщины конструкции вдоль некоторой отсчетной поверхности. В последние десятилетия разработаны многочисленные технологические приемы (сварка взрывом, склейка, плазменное и газодинамическое напыление, армирование, профильное фрезерование и др.), позволяющие создавать композитные конструкции без каких-либо серьезных ограничений на характер перераспределения объединяемых материалов и их физико-механические характеристики. Вопрос создания эффективных композитных конструкций при этом сводится не только к геометрическому профилированию конструкции, но также к отбору и установлению необходимого местоположения составляющих изделие конструкционных материалов, позволяющих наиболее эффективно использовать положительные качества всех или большинства из них. Такую проблему будем именовать проблемой гибридного или мозаичного проектирования [1, 2] и в данной статье рассмотрим ее

решение применительно к конструкциям типа дисков газовых турбин и изгибаемых круглых и кольцевых пластин.

В условиях плоского напряженного состояния эффективные конструкции могут быть получены путем армирования по определенным криволинейным траекториям [3]. Полотно диска может быть создано путем соединения нескольких материалов в трансверсальном направлении, часть из которых может быть армирована, а остальные могут оставаться изотропными материалами. Такие комбинированные конструкции открывают большие возможности для управления напряженно-деформированным состоянием и создания высокоэффективных конструкций. Для простоты изложения мы ограничимся трехслойными структурами, обеспечивающими осесимметричное состояние и симметрию относительно срединной поверхности. Тогда основные уравнения для силовых и кинематических величин в комбинированном диске будут иметь вид:

$$\frac{d(rN_1)}{dr} - N_2 + \omega^2 \varphi(r) = 0, \quad \varphi(r) = \frac{r^2}{g} [\delta \rho(r) + 2\bar{\rho}h(r)] \quad (1)$$

$$N_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2, \quad N_2 = a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r}, \quad \frac{d(r\varepsilon_2)}{dr} = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 l_{13}^2 + \varepsilon_2 l_{23}^2 \quad (3)$$

$$a_{11} = \left[ \frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{1k}^4 \right] \delta + \frac{2\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} h$$

$$a_{12} = \left[ \frac{E_c \nu_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{1k}^2 l_{2k}^2 \right] \delta + \frac{2\bar{E}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}^2} h$$

$$a_{22} = \left[ \frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{2k}^4 \right] \delta + \frac{2\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} h \quad (4)$$

$$\rho = \rho_c(1-\Omega) + \sum_{k=1}^3 \omega_k \rho_k, \quad \Omega = \sum_{k=1}^3 \omega_k, \quad \omega_k = \frac{d_k}{r l_{1k}}, \quad d_k = r_1 \omega_{0k} l_{1k}^0$$

$$l_{1k} = \sin \psi_k, \quad l_{2k} = \cos \psi_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь  $E_c, \nu_c, \rho_c, \bar{E}, \bar{\nu}, \bar{\rho}$  — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и плотности материалов связующего и изотропного покрывающего слоя,  $E_k, \omega_k, \psi_k$  — модуль упругости, плотность армирования и угол армирования  $k$ -го семейства арматуры ( $k = 1$  — радиальные волокна,  $k = 2$  — окружные,  $k = 3$  — спиральные),  $\delta$  — толщина армированного слоя,  $h(r)$  — толщины покрывающих слоев,  $u(r)$  — радиальное перемещение,  $\omega$  — угловая скорость вращения диска. Равенства (5) соответствуют условию постоянства сечений армирующих волокон. При этом для волокон окружного армирования в общем случае  $\omega_2(r)$  — произвольная заданная или искомая функция,  $\varepsilon_3(r)$  — деформация спиральных волокон.

В рамках гибридного проектирования вопрос об эффективном использовании качеств материалов тесно увязан с целями введения и

функционирования этих материалов в композитной конструкции. В связи с этим рассмотрим некоторые из естественных предъявляемых к ним требованиям.

а) Равнодеформируемость окружных волокон в конструкции:

$$\varepsilon_2(r) = \varepsilon_{02} = \text{const} \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{02}$  — предельная упругая деформация волокон окружного направления. В этом случае в соответствии с (3) будем иметь

$\varepsilon_1(r) = \varepsilon_3(r) = \varepsilon_{02}$  (7) Это означает, что для радиальных и спиральных волокон

$$r \frac{d(a_{11} + a_{12})}{dr} + a_{11} - a_{22} + \frac{\omega^2}{\varepsilon_{02}} \varphi(r) = 0 \quad (8)$$

и вес рассматриваемого гибридного диска будет определяться равенством

$$B = \delta \left[ \rho_0 (r_2^2 - r_1^2) + d_1 (\rho_1 - \rho_0) (r_2 - r_1) + (\rho_2 - \rho_1) \int_{r_1}^{r_2} \omega_2(r) r dr + \right. \\ \left. + d_3 (\rho_3 - \rho_0) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{l_{13}(r)} \right] + 2\bar{\rho} \int_{r_1}^{r_2} h(r) r dr \quad (9)$$

Напряжения в связующем материале и материале покрывающего слоя определяются равенствами

$$\sigma_{1c} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} (\varepsilon_1 + \nu_c \varepsilon_2), \quad \sigma_{2c} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} (\varepsilon_2 + \nu_c \varepsilon_1) \\ \bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} (\varepsilon_1 + \bar{\nu} \varepsilon_2), \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} (\varepsilon_2 + \bar{\nu} \varepsilon_1) \quad (10)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае материалы связующего и покрытия должны быть подобраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$E_c \varepsilon_{02} \leq \sigma_{0c} (1 - \nu_c), \quad \bar{E} \varepsilon_{02} \leq \bar{\sigma}_0 (1 - \bar{\nu}) \quad (11)$$

Перемещение на границе  $r = r_1$  вала в этом случае будет равно

$$u(r_1) = \varepsilon_{02} r_1 \quad (12)$$

Это означает, что диаметр вала и его упругие характеристики должны быть подобраны так, чтобы на внешнем его радиусе перемещение определялось равенством (12). Равенство (8) при учете зависимостей (4), (5) содержит три управляющие функции  $h(r)$ ,  $\omega_2(r)$ ,  $l_{13}(r)$  и поэтому допускает множество проектов, обладающих рассматриваемыми качествами. Дальнейшее сужение класса проектов может осуществляться либо за счет конкретного выбора каких-либо двух функций вследствие определенных ограничений возможности технологической реализации, либо за счет формулировки дополнительных требований к проекту, например, требования минимума функционала веса (9).

б) Равнодеформируемость радиальных волокон:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01} = \text{const} \quad (13)$$

Тогда из (3) в случае абсолютно жесткого вала имеем

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{01} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{01} \left( 1 - \frac{r_1}{r} l_{23}^2 \right) \quad (14)$$

Таким образом, окружные волокна необходимо подобрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_{01} \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \leq \varepsilon_{02} \quad (15)$$

Можно дополнительно выставить требование равнодеформируемости спиральных волокон  $\varepsilon_3(r) = \varepsilon_{03} = \text{const}$ . Тогда для траекторий спиральных волокон получим уравнение

$$l_{23}^2 = \frac{\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03}}{\varepsilon_{01}} \frac{r}{r_1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (16)$$

Следовательно, для материалов спиральных волокон и размеров диска должны выполняться неравенства

$$\varepsilon_{01} > \varepsilon_{03}, \quad \frac{r_2}{r_1} \leq \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03}} \quad (17)$$

При этом, для усилий  $N_1, N_2$  получим равенств

$$\begin{aligned} N_1 &= f_1(r) - \delta a_1 \left[ 1 + \nu_c \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right) \right] \omega_2(r) + a_2 \left[ 1 + \bar{\nu} \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right) \right] h(r) \\ N_2 &= f_2(r) - \delta a_1 \left( 1 + \nu_c - \frac{r_1}{r} \right) \omega_2(r) + a_2 \left( 1 + \bar{\nu} - \frac{r_1}{r} \right) h(r) \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \delta a_1 (1 - \omega_1 - 2\omega_3) \left[ 1 + \nu_c \left( 1 - \frac{r_1}{r} \right) \right] + \delta E_1 \varepsilon_{01} \omega_1 + \\ &\quad + \delta E_3 \varepsilon_{01} \omega_3 (1 - l_{23}^2) \left( 1 - l_{23}^2 \frac{r_1}{r} \right) \\ f_2(r) &= \delta a_1 (1 - \omega_1 - 2\omega_3) \left( 1 + \nu_c - \frac{r_1}{r} \right) + \delta E_3 \varepsilon_{01} \omega_3 l_{23}^2 \left( 1 - l_{23}^2 \frac{r_1}{r} \right) \\ a_1 &= \frac{E_c \varepsilon_{01}}{1 - \nu_c^2}, \quad a_2 = \frac{2\bar{E} \varepsilon_{01}}{1 - \bar{\nu}^2} \end{aligned}$$

Напряжения в связующем материале и покрывающем слое определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} &= a_1 \left( 1 + \nu_c - \nu_c \frac{r_1}{r} \right), \quad \sigma_{2c} = a_1 \left( 1 + \nu_c - \frac{r_1}{r} \right) \\ \bar{\sigma}_1 &= a_2 \left( 1 + \bar{\nu} - \bar{\nu} \frac{r_1}{r} \right), \quad \bar{\sigma}_2 = a_2 \left( 1 + \bar{\nu} - \frac{r_1}{r} \right) \end{aligned}$$

которые с помощью условия пластичности Мизеса позволяют установить допустимые требования на механические характеристики материалов

покрывающего слоя и связывающего. Подставляя далее выражения (18) в (1), получим уравнение, связывающее две управляющие функции  $\omega_2(r)$  и  $h(r)$ . Дополнительное уравнение получим минимизируя функционал (9).

в) Равная трещиностойкость покрывающего слоя. Материалы покрывающих слоев во многих случаях обладают склонностью к хрупкому разрушению. Поэтому для конструкций с такими покрытиями целесообразно требовать равной трещиностойкости по всему полотну диска, что эквивалентно выполнению равенства

$$\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2^2 = \bar{\sigma}_0^2$$

или

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_0 \cos \theta, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_0 \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) \quad (19)$$

Тогда для деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  получим выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (1 + \bar{\nu}) \left[ \cos \theta - \bar{\nu} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (1 + \bar{\nu}) \left[ \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) - \bar{\nu} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя эти выражения в условие совместности деформаций (3), получим уравнение для определения функций  $\theta(r)$ :

$$d \ln r^{1+\bar{\nu}} = \frac{\sqrt{3} - (1 - 2\bar{\nu}) \operatorname{tg} \theta}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta} d\theta \quad (21)$$

При наличии абсолютно жесткого вала начальное условие для интегрирования этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{tg} \theta(r_1) = -\frac{\sqrt{3}}{1 - 2\bar{\nu}} \quad (22)$$

После определения из (20) деформаций  $\varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)$  для деформаций в спиральной арматуре будем иметь выражения

$$\varepsilon_3(r) = \varepsilon_1(r) l_{13}^2 + \varepsilon_2(r) (1 - l_{13}^2)$$

и если потребовать дополнительно выполнения условия равнодеформируемости спиральной арматуры, то получим уравнение

$$l_{13}^2 = \frac{\varepsilon_{03} - \varepsilon_2(r)}{\varepsilon_1(r) - \varepsilon_2(r)}, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (23)$$

После этого из уравнения (1) получим соотношение, связывающее управляющие функции  $\omega_2(r)$  и  $h(r)$ . Дополнительное уравнение получим, минимизируя функционал веса (9).

г) Критерий минимального веса для слоистого диска. В работе [4] получен критерий оптимального проектирования неоднородных тонкостенных слоистых конструкций, который для рассматриваемого слоистого и армированного диска сводится к равенствам

$$(1-\Omega)\frac{E_c}{1-\nu_c^2}(\varepsilon_1^2 + 2\nu_c\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) + \sum_{k=1}^3 \omega_k E_k (\varepsilon_1 l_{1k}^2 + \varepsilon_2 l_{2k}^2)^2 - \frac{\rho\omega^2 r^3 \varepsilon_2}{g} = A\rho(r) \quad (24)$$

$$\frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}(\varepsilon_1^2 + 2\bar{\nu}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) - \frac{\bar{\rho}\omega^2 r^3 \varepsilon_2}{g} = A\bar{\rho}, \quad A = \text{const} \quad (25)$$

Эти соотношения вместе с условиями совместности деформаций (3), постоянства сечений волокон (5) и уравнением равновесия (1) определяют замкнутую систему уравнений для определения деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , траекторий спиральных волокон  $l_{13}$  и толщины покрывающего слоя  $h(r)$ .

В случае изгиба рассматриваемых пластин, нагруженных распределенной поперечной нагрузкой  $q(r)$ , уравнения равновесия имеют вид

$$rQ = r_1 Q_1 - \int_{r_1}^r q r dr = p(r) \quad (26)$$

$$r \frac{dM_1}{dr} + M_1 - M_2 = p(r) \quad (27)$$

Изгибающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$  в предположении  $h/\delta < 0.1$  равны

$$M_1 = b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2, \quad M_2 = b_{12}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2 \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\delta \alpha_1, \quad \varepsilon_2 = -\delta \alpha_2, \quad \alpha_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \\ b_{11} &= \frac{2\delta^2}{3} \left[ \frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{1k}^4 + \frac{3h}{\delta} \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \right] \\ b_{12} &= \frac{2\delta^2}{3} \left[ \frac{E_c \nu_c (1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{1k}^2 l_{2k}^2 + \frac{3h}{\delta} \frac{\bar{E}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}^2} \right] \\ b_{22} &= \frac{2\delta^2}{3} \left[ \frac{E_c(1-\Omega)}{1-\nu_c^2} + \sum_{k=1}^3 E_k \omega_k l_{2k}^4 + \frac{3h}{\delta} \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

При поперечном изгибе в силу линейного изменения деформаций по толщине пластины их предельные значения могут быть достигнуты на крайних по толщине фибрах пластины. Для тонких покрытий будем считать, что крайние по высоте значения соответствуют границе раздела  $z = \delta$  слоев. В этом случае все рассмотренные выше решения с точностью до обозначений могут быть получены и для изгиба пластины. Так, потребовав, например, выполнения условий равнодеформируемости окружных волокон на контактной границе  $z = \delta$ , получим  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{02}$ . Тогда прогиб будет определяться выражением

$$w = -\frac{\varepsilon_{02}}{2\delta} r^2 + C_1$$

( $C_1$  — константа интегрирования). В этом случае

$$M_1 = (b_{11} + b_{12})\varepsilon_{02}, \quad M_2 = (b_{12} + b_{22})\varepsilon_{02}$$

и уравнение (27) принимает вид

$$r \frac{d(b_{11} + b_{12})}{dr} + b_{11} - b_{22} = \frac{r_1 Q_1}{\varepsilon_{02}} - \frac{1}{\varepsilon_{02}} \int_{r_1}^r q r dr$$

где  $Q_1$  — перерезывающая сила при  $r = r_1$ . Это уравнение содержит три управляющие функции  $h(r)$ ,  $\omega_2(r)$ ,  $l_{13}(r)$ . Для получения замкнутого решения две из них могут быть заданы по требованиям технологической осуществимости или для их нахождения может быть использовано требование минимума функционала веса (9).

Если потребовать выполнения на контактной поверхности слоев выполнения условия равнодеформируемости радиальных и спиральных волокон, то получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{01} + \frac{C_1}{r}, \quad l_{13}^2 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03})r}{C_1} + 1$$

$$w = -\frac{\varepsilon_{01}r^2}{2\delta} - \frac{C_1 r}{\delta} + C_2$$

$C_1, C_2$  — константы, определяемые из условия закрепления на опорах. При этом для изгибающих моментов получим выражения

$$M_1 = (b_{11} + b_{12})\varepsilon_{01} + C_1 \frac{b_{12}}{r}, \quad M_2 = (b_{12} + b_{22})\varepsilon_{01} + C_1 \frac{b_{22}}{r}$$

и тогда из (26) получим условие разрешимости рассматриваемой задачи

$$\frac{d}{dr} \left( b_{11} + b_{12} + \frac{C_1}{\varepsilon_{01}} \frac{b_{12}}{r} \right) + \frac{b_{11} - b_{22}}{r} + \frac{C_1}{\varepsilon_{01}} \frac{b_{12} - b_{22}}{r^2} = \frac{p(r)}{\varepsilon_{01} r}$$

содержащее две управляющие функции  $h(r)$ ,  $\omega_2(r)$ .

Гибридное проектирование допускает возможность создания несимметричных по толщине конструкций. В этом случае конструкция будет работать в условиях продольно-поперечного изгиба, который требует дополнительного анализа и выходит за рамки данной статьи. Некоторые результаты в этом направлении получены в работе [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В. Гибридное проектирование оболочек вращения. /Тр. XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. С. 255–264.
2. Немировский Ю.В. Мозаичное проектирование слоистых балок и пластин. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во Ин-та механики НАН Армении, 2002. С. 241–249.
3. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Мозаичное армирование плоских термоупругих композитных конструкций с использованием различных

- критериев рационального проектирования. // Механика композитных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 3.
4. Nemirovsky Yu. V. Optimum design of three-layered inhomogeneous shell and plates. Proc. 6<sup>th</sup> Russian-Korean Intern. Sympos. on Science and Technology "KORUS-2002". Novosibirsk, 2002. Vol. 2. P. 15-19.
  5. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования. Краевые задачи и математическое моделирование. // Сб. трудов 8-й Всерос. науч. конф. Новокузнецк: Изд-во НФИ КемГУ, 2006. С. 23-29.

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН

Поступила в редакцию  
20.12.2006

УДК 539.3

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА  
Немировский Ю.В., Янковский А.П.

**Ключевые слова:** динамическое деформирование, вязкопластическая модель, оболочки, нагрузки взрывного типа, численное интегрирование, рациональное профилирование

**Keywords:** dynamic straining, visco-plastic model, shells, loadings of explosive type, a numerical integration, a rational roll forming

Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա.Պ. Եանկովսկի

Մաճուցիկապլաստիկ թաղանթների ռացիոնալ պրոֆիլավորումը պայթյունային տիպի բեռների ազդեցության դեպքում

Ձևակերպված է իզոտրոպ թաղանթների մաճուցիկապլաստիկ դինամիկ դեֆորմացիան խնդիրը: Մշակված է սկզբնական եզրային խնդրի թվային ինտեգրման մեթոդ: Հաստատուն և փոփոխական հաստության գլանաձև թաղանթների ոչ առաձգական դինամիկայի հաշվարկների վրա ցույց է տրված այդ մեթոդի արդյունավետությունը: Ցույց է տրված, որ կարճ թաղանթների ռացիոնալ պրոֆիլավորմամբ մնացորդային ձկվածքների մաքսիմալ արժեքները կարելի է փոքրացնել մի քանի անգամ, իսկ հաստատուն հաստության երկար թաղանթները մոտ են ռացիոնալ նախագծերին:

Yu.V. Nemirovskii, A.P. Yankovskii

Rational Roll Forming Visco-Plastic of Shells at Act of Loadings of Explosive Type

The problem a visco-plastic dynamic straining of isotropic shells is formulated. The method of a numerical integration of the put initial-bending problem is developed. Efficiency of this method is shown on calculations of non-elastic dynamics of cylindrical shells of a constant and variable thickness. It is shown, that due to a rational roll forming of short shells the maximum magnitude of their residual bending flexures can be reduced in some times, and long shells of constant thickness are close to rational designs.

Сформулирована задача вязкопластического динамического деформирования изотропных оболочек. Разработан метод численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Эффективность этого метода продемонстрирована на расчетах неупругой динамики цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. Показано, что за счет рационального профилирования коротких оболочек максимальную величину их остаточных прогибов можно уменьшить в несколько раз, а длинные оболочки постоянной толщины близки к рациональным проектам.

Оболочки составляют основу многих ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов, поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на сегодня решений основано на модели идеального жесткопластического тела [1 и др.]. Как правило, решения являются приближенными, получены на основе

экстремальных принципов динамики жесткопластического тела и относятся к однородным изотропным пластинам постоянной толщины. Исследование же неупругого деформирования оболочечных конструкций находится пока в зачаточном состоянии [2]. Целью настоящей работы является разработка численного метода решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных оболочек постоянной и переменной толщины и анализ влияния законов изменения толщин оболочек на величину их остаточных прогибов при действии нагрузок взрывного типа.

Рассмотрим вязкопластическое деформирование тонкой оболочки переменной толщины  $2H$ , подчиняющейся гипотезам Кирхгофа–Лява. Для формулировки задачи неупругой динамики используем: общеизвестные уравнения движения [3]

$$\begin{aligned} & \left( A_j F_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} F_{jj} + \left( A_i F_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} F_{ij} + R_i^{-1} \left[ \left( A_j M_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} M_{jj} + \right. \\ & \left. + \left( A_i M_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} M_{ij} + A_1 A_2 m_i \right] + A_1 A_2 q_i = 2HA_1 A_2 \rho u_{i,t} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2) \\ & \sum_{i=1}^2 \left\{ A_i^{-1} \left[ \left( A_j M_{ii} \right)_{,i} - A_{j,i} M_{jj} + \left( A_i M_{ji} \right)_{,j} + A_{i,j} M_{ij} + A_1 A_2 m_i \right] \right\}_{,i} - \\ & - A_1 A_2 \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} F_{ii} + A_1 A_2 q_z = 2HA_1 A_2 \rho w_{,tt} \quad (j = 3 - i) \end{aligned} \quad (1)$$

связь между скоростями мембранных деформаций  $\dot{e}_{ij}$ , скоростями искривления  $\dot{\kappa}_{ij}$  срединной поверхности оболочки и скоростями смещений точек этой поверхности

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ii} &= A_i^{-1} v_{i,i} + (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} v_j + R_i^{-1} v, \quad 2\dot{e}_{12} = 2\dot{e}_{21} = A_1 A_2^{-1} (v_1 / A_1)_{,2} + \\ & + A_2 A_1^{-1} (v_2 / A_2)_{,1}, \quad \dot{\kappa}_{ii} = A_i^{-1} (v_{,i} / A_i - v_i / R_i) - (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} \times \\ & \times (v_{,j} / A_j - v_j / R_j) \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \quad 2\dot{\kappa}_{12} = 2\dot{\kappa}_{21} = -(A_1 A_2)^{-1} \times \\ & \times (v_{,12} - A_{1,2} v_{,1} / A_1 - A_{2,1} v_{,2} / A_2) + R_1^{-1} (v_{1,2} / A_2 - A_{1,2} v_1 / (A_1 A_2)) + \\ & + R_2^{-1} (v_{2,1} / A_1 - A_{2,1} v_2 / (A_1 A_2)), \quad v_i = u_{i,t} \quad (i = 1, 2), \quad v = w_{,t} \end{aligned} \quad (2)$$

определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия  $F_{ij}$  и моменты  $M_{ij}$  в оболочке с  $\dot{e}_{ml}$  и  $\dot{\kappa}_{ml}$ ,

$$F_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (A_{ijml} \dot{e}_{ml} + B_{ijml} \dot{\kappa}_{ml}), \quad M_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (B_{ijml} \dot{e}_{ml} + C_{ijml} \dot{\kappa}_{ml}), \quad i, j = 1, 2 \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_{ijml}$ ,  $B_{ijml}$ ,  $C_{ijml}$  нелинейно зависят от  $\dot{e}_{ml}$  и  $\dot{\kappa}_{ml}$ ;  $A_i$ ,  $R_i$  – параметры Ламе и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки соответственно;  $q_i$ ,  $q_z$ ,  $m_i$  – приведенные внешние распределенные нагрузки и моменты в направлениях  $\alpha_i$ ,  $z$  соответственно;  $w$ ,  $u_i$  – прогиб и перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях  $\alpha_i$

( $i = 1, 2$ ) ортогональной сопряженной системы криволинейных координат;  $\rho$  – объемная плотность материала оболочки; индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $\alpha_i$  или времени  $t$ .

Согласно вязкопластической модели [4] напряжение  $\sigma$  при одноосном напряженном состоянии зависит от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$  материала. Аппроксимируем зависимость  $\sigma \square \dot{\epsilon}$  двухзвенной ломаной, тогда в силу известного формального сходства определяющих уравнений теории упругопластических деформаций и теории вязкопластического течения [5] выражения для  $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$  формально совпадают с аналогичными коэффициентами, полученными авторами в [6]. Эти выражения чрезвычайно громоздки, поэтому не будем их здесь приводить.

Подставим соотношения (2) в (3), а последнее в (1), тогда получим систему разрешающих уравнений движения, записанную в операторной форме,

$$2HA_1A_2\rho v_{i,t} = A_1A_2(q_i + m_i/R_i) + L_i(v_1, v_2, v), \quad i = 1, 2$$

$$2HA_1A_2\rho v_{,t} = A_1A_2q_z + \sum_{i=1}^2(A_i^{-1}A_1A_2m_i)_{,i} + L(v_1, v_2, v) \quad (4)$$

$$u_{i,t} = v_i \quad (i = 1, 2), \quad w_{,t} = v \quad (5)$$

где  $L_i, L$  – некоторые квазилинейные дифференциальные операторы (в общем случае весьма громоздкие, поэтому не будем их выписывать).

Для однозначного интегрирования системы (4), (5) необходимо использовать начальные

$$v_i(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = v_{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad v(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = v_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = u_{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad w(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = w_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

и общеизвестные граничные условия [3], которые не будем здесь приводить. (Если заданы кинематические граничные условия для перемещений  $w, u_i$ , то за счет (5) можно получить соответствующие условия для скоростей смещений  $v, v_i$ . А при задании на кромках силовых факторов следует использовать соотношение (3) с учетом (2)).

Если скорости смещений  $v, v_i$  известны, то определение перемещений  $w, u_i$  ( $i = 1, 2$ ) из начальной задачи (5), (7) не вызывает затруднений. Для определения же скоростей  $v, v_i$  необходимо использовать систему (4), начальные (6) и соответствующие граничные условия. Система (4) является замкнутой относительно  $v, v_i$  системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Для численного интегрирования по времени начально-краевой задачи, соответствующей системе (4), используем метод трапеций, имеющий второй порядок точности по  $\tau$ , где  $\tau$  – шаг по времени  $t$ . Реализация этого метода подробно изложена в

[7], следует лишь почти дословно применить ход рассуждений из [7] к системе (4).

Важная особенность предложенного метода состоит в том, что для нахождения значений функций  $v, v_i$  на  $n$ -м по времени слое  $t_n = n\tau$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) необходимо решить задачу о вязкопластическом деформировании (об установившейся ползучести) оболочки на линейно-вязком основании, которая, как уже отмечалось, формально схожа с задачей об упругопластическом деформировании оболочек на линейно-упругом основании. Методы линеаризации и интегрирования таких задач достаточно хорошо разработаны [6, 8], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно.

В качестве примера рассмотрим задачу о вязкопластической динамике круговой цилиндрической замкнутой оболочки переменной толщины, осесимметрично деформируемой нагрузками взрывного типа. Оболочка имеет длину  $L$ , радиус  $R = 0,5$  м, а толщина ее может быть постоянной ( $2H(x_1) = 2H_* = \text{const}$ ) или переменной и определяется формулой

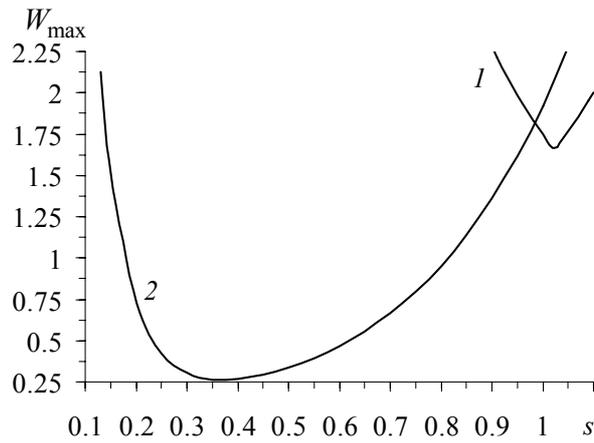
$$H(x_1) = sH_* + \pi \sin(\pi x_1 / L)(1-s)H_* / 2 \quad (0 \leq x_1 \leq L) \quad (8)$$

При задании полутолщины тонкой цилиндрической оболочки в виде (8) расход материала с точностью используемой теории будет такой же, как и в оболочках постоянной полутолщины  $H_*$ . При  $0 < s < 1$  из (8) следует, что толщина оболочки на кромках  $x_1 = 0, L$  меньше, чем в центральном сечении  $x_1 = L/2$ ; при  $s = 1$  получаем оболочку постоянной полутолщины  $H_*$ ; при  $s > 1$  толщина оболочки на кромках больше, чем в центральном сечении. В расчетах принималось  $H_* = 1,5$  см.

На кромках  $x_1 = 0, L$  оболочка может быть шарнирно оперта или жестко закреплена. Конструкция динамически нагружается внутренним давлением взрывного типа

$$q_z(x_1, t) = q_z(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \quad q_1 = q_2 = 0 \quad (\alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0) \quad (9)$$

где  $p_0$  – значение нагрузки в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , в который оболочка находится в покое. Оболочка изготовлена из алюминиевого сплава Д16:  $\sigma_s = 380$  МПа,  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>. Вязкое упрочнение материала не учитывается, так как предел текучести алюминиевых сплавов практически не чувствителен к скорости деформации [9]. Коэффициент линейной вязкости, характеризующий начальный участок двухзвенной ломаной, аппроксимирующей зависимость  $\sigma \square \dot{\epsilon}$  материала оболочки, в расчетах принимался  $E = 10^{16}$  Па·с, что соответствует вязкопластической модели, приближенной к модели жесткопластического тела.



Фиг. 1

На фиг. 1 изображены кривые, характеризующие зависимость максимального остаточного прогиба  $W = H_* w / L^2$  шарнирно опертых оболочек разной длины от значения параметра  $s$  в (8) при разных уровнях  $p_0$

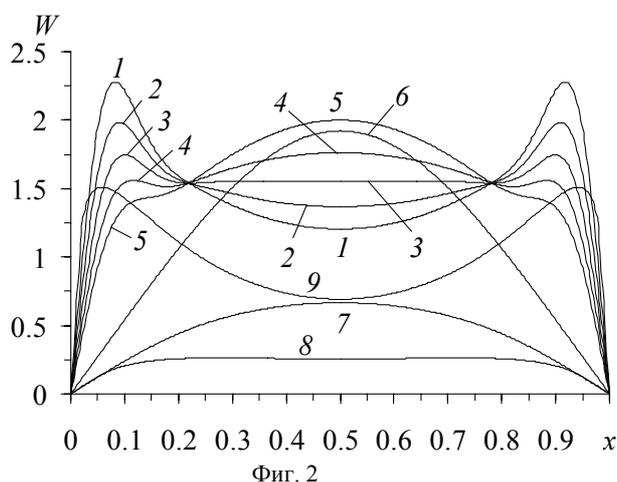
нагрузки. Кривая 1 рассчитана для длинной оболочки  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа, а линия 2 – для короткой оболочки  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа. Обе кривые имеют локальные минимумы, которым соответствуют рациональные профили оболочки (8), обеспечивающие наименьшие остаточные прогибы. Так как в рамках вязкопластической модели величина остаточных прогибов является мерой повреждаемости конструкции, из поведения кривых на фиг. 1 следует, что за счет рационального профилирования остаточные прогибы оболочки можно уменьшить в разы, повышая, тем самым, существенно сопротивляемость конструкции нагрузкам взрывного типа.

Кривая 1 имеет локальный минимум в точке  $s = 1,024 \approx 1$ , поэтому длинные оболочки постоянной толщины при нагрузках вида (9) могут рассматриваться как рациональные или близкие к рациональным. Это объясняется тем, что в длинных оболочках большая часть диссипации энергии осуществляется основным напряженным состоянием, которое близко к безмоментному и однородному; краевые же эффекты вносят незначительный вклад в диссипацию (этот вклад для кривой 1 сказался в том, что минимум ее реализуется при  $s = 1,024$ , а не строго при  $s = 1$ ). Для коротких же оболочек постоянной толщины, наоборот, большая часть диссипации осуществляется за счет изгибных напряжений, поэтому профилирование для таких оболочек является более эффективным (см. кривую 2) и в рациональном проекте, как будет показано ниже, вновь приводит к напряженному состоянию, близкому к безмоментному и однородному.

Кривые, качественно схожие с теми, что изображены на фиг. 1, получаются и для зависимостей времени остановки движения оболочки от параметра  $s$  в (8). Эти кривые также имеют локальные минимумы, причем при тех же значениях  $s$ , что и линии на фиг. 1.

На фиг. 2 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов оболочек при разных значениях  $s$  (по оси абсцисс отложена безразмерная продольная координата  $x = x_1 / L$ ). Кривые 1–5 получены для длинной оболочки  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа, а линия 6–9 – для короткой оболочки  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа. Кривые 1–5 рассчитаны при значениях  $s = 0,9 + 0,05(k - 1)$ ,

где  $k$  – номер кривой; линии 6, 7, 8, 9 определены при значениях  $s = 1, 0,7, 0,35, 0,15$  соответственно. Значения максимумов кривых 1–5 и 6–9 на фиг. 2 соответствуют точкам на кривых 1 и 2 фиг. 1 при указанных выше значениях  $s$ .



Сравнение кривых на фиг. 2 позволяет проследить за изменением формы остаточных прогибов цилиндрической оболочки в зависимости от формы ее профиля. Центральные участки кривых 3, 8 почти горизонтальны. Это позволяет утверждать, что в оболочках с рациональными

профилями (как длинных, так и коротких) реализуется основное напряженное состояние, близкое к безмоментному и однородному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.
2. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 200 с.
3. Огибалов П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1963. 414 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
6. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Термоупругопластический изгиб слоисто-волоконистых пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 4. С. 467–493.
7. Янковский А.П. Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волоконистых прямоугольных удлиненных пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г. / Под ред. В.М. Фомина. Новосибирск: «Параллель», 2005. С. 290–297.
8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 492 с.

9. Мейден (C.J. Maiden), Грин (S.J. Green). Испытание на скоростное деформирование при сжатии для шести материалов при скоростях деформации от  $10^{-3}$  до  $10^4$  мм/мм/сек // Прикладная механика / Тр. амер. общества. Ser. E. 1966. № 3. –С. 20–30.

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию  
20.12.2006

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЕ УСЛОВИЙ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАСТИНКИ  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Саркисян С.В.

**Ключевые слова:** пластинка, лицевая поверхность, уточнение условий.

**Key words:** plate, front areas, specification of conditions.

Ս.Վ. Սարգսյան

Փոփոխական հաստությամբ սալի դիմային մակերևույթների վրա դրված  
պայմանների ճշգրտումը

Ճշգրտելով փոփոխական հաստությամբ սալի դիմային մակերևույթների վրա  
դրված պայմանները ստացված են սալի շարժման հավասարումները  
տեղափոխություններով

S.V.Sarkisyan

Specification of Conditions on the Front Areas of Plate With Variable Thickness

By means of specification of conditions on the front areas of plate with variable thickness the motion equations of plate in displacements are obtained.

Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки переменной толщины получены уравнения движения пластинки в перемещениях.

1. Пусть срединная плоскость прямоугольной изотропной пластинки совпадает с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ .

Толщина пластинки переменна, для конкретности, относительно координаты  $x$  и симметрична относительно плоскости  $xOy$ . Область пространства, занимаемая пластинкой, определяется следующим образом:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h(x) \leq z \leq h(x)$ . В общем случае предполагается, что пластинка нагружена поперечной нагрузкой  $q(x)$  и учитывается вес пластинки.

Если поверхности  $z = \pm h(x)$  свободны от нагрузок, то граничные условия определяются согласно условиям

$$\vec{\sigma}_i \vec{n} = 0 \text{ при } z = \pm h(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к соответствующей поверхности,  $\vec{\sigma}_i = \sigma_{i1} \hat{i} + \sigma_{i2} \hat{j} + \sigma_{i3} \hat{k}$ ,  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  – единичные нормали по осям  $x, y, z$ ,  $\sigma_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – компоненты тензора напряжений.

Из (1.1) имеем следующие граничные условия для свободной поверхности:

$$z = h(x): \begin{cases} \sigma_{13} - h'(x)\sigma_{11} = 0, & \sigma_{23} - h'(x)\sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{33} - h'^2(x)\sigma_{11} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$z = -h(x) : \begin{cases} \sigma_{13} + h'(x)\sigma_{11} = 0, & \sigma_{23} + h'(x)\sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{33} - h'^2(x)\sigma_{11} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

где штрих означает производную по  $x$ .

Аналогичные граничные условия получены в работах [1-3].

Пусть на поверхности  $z = -h(x)$  действует поперечная нагрузка  $q(x)$ . Рассмотрим два случая, а именно, нагрузка перпендикулярна к поверхности  $z = -h(x)$  и нагрузка имеет направление оси  $oz$ . Тогда с учетом (1.3) при  $z = -h(x)$  имеем:

Вариант I. Нагрузка направлена по оси  $oz$ .

$$\begin{cases} \sigma_{13} + h'(x)\sigma_{11} = h'(x)q(x), & \sigma_{23} + h'(x)\sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{33} - h'^2(x)\sigma_{11} = q(x) \end{cases} \quad (1.4)$$

Вариант II. Нагрузка перпендикулярна к поверхности  $z = -h(x)$ .

$$\begin{cases} \sigma_{13} + h'(x)\sigma_{11} = 0, & \sigma_{23} + h'(x)\sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{33} - h'^2(x)\sigma_{11} = q(x)\sqrt{1+h'^2(x)} \end{cases} \quad (1.5)$$

Граничные условия (1.4) и (1.5) показывают различие способа приложения поперечной нагрузки.

2. Уравнения движения пластинки в усилиях и моментах выводятся следующим образом. Определяются усилия и моменты [4, 5]

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{11} dz, & T_2 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{22} dz, & S &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{12} dz \\ M_1 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} z\sigma_{11} dz, & M_2 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} z\sigma_{22} dz, & H &= \int_{-h(x)}^{h(x)} z\sigma_{12} dz \\ N_1 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{13} dz, & N_2 &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{23} dz \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения движения упругого элемента с учетом собственного веса

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta_{3i} \rho g = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\rho$  – плотность материала пластинки,  $g$  – ускорение свободного падения,  $u_i$  – компоненты вектора перемещения точек пластинки) осредняются обычным образом.

При этом переменность толщины приводит к необходимости использования следующего равенства:

$$\int_{-h(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{h(x)} f(x, y, z) dz - h'(x) (f(x, y, h(x)) + f(x, y, -h(x))) \quad (2.3)$$

Например,

$$\int_{-h(x)}^{h(x)} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz = \frac{\partial T_1}{\partial x} - h'(x)(\sigma_{11}(h) + \sigma_{11}(-h))$$

$$\int_{-h(x)}^{h(x)} z \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_1}{\partial x} - h(x)h'(x)(\sigma_{11}(h) - \sigma_{11}(-h))$$

Осреднение уравнений (2.2) по толщине пластинки, с использованием (2.3) и граничных условий (1.2), (1.4) и (1.5) приводит к следующим уравнениям движения пластинки переменной толщины в усилиях и моментах:

нагрузка направлена по оси  $oz$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = h'(x)q(x) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_1 dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_2 dz$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2\rho gh = q(1 + h'^2(x)) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_3 dz \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 = -hh'q + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} zu_1 dz$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} zu_2 dz$$

нагрузка перпендикулярна к поверхности  $z = -h(x)$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_1 dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_2 dz$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2\rho gh = q\sqrt{1 + h'^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} u_3 dz \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} zu_1 dz$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h(x)}^{h(x)} zu_2 dz$$

В рамках гипотезы Кирхгофа напряжения и усилия выражаются посредством перемещений срединной поверхности пластинки  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $w(x, y, t)$  обычным образом [4]. Приведем выражения для усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{2Eh(x)}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad T_2 = \frac{2Eh(x)}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
S &= \frac{Eh(x)}{1+\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad H = -\frac{2Eh^3(x)}{3(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
M_1 &= -\frac{2Eh^3(x)}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -\frac{2Eh^3(x)}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя значения усилий и моментов из (2.6) в уравнения (2.4) или (2.5), получим следующие уравнения движения пластинки переменной толщины в перемещениях:

$$\begin{aligned}
\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{2Eh'(x)}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= Q_1(x) + 2\rho h(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{2Eh(x)}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{Eh'(x)}{1+\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 2\rho h(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\Delta^2 w + Q_2(x) - 2\rho gh(x) + Q_3(x) + \\
+ \frac{2E}{1-\nu^2} \left[ 2h^2 h' \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + (2hh'^2 + h^2 h'') \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ ,

$$Q_1(x) = \begin{cases} h'(x)q(x); & \text{нагрузка направлена по оси } oz \\ 0; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z = -h(x) \end{cases}$$

$$Q_2(x) = \begin{cases} q(x)(1+h'^2); & \text{нагрузка направлена по оси } oz \\ q(x)\sqrt{1+h'^2}; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z = -h(x) \end{cases}$$

$$Q_3(x) = \begin{cases} -(hh'q)'; & \text{нагрузка направлена по оси } oz \\ 0; & \text{нагрузка перпендикулярна к поверхности } z = -h(x) \end{cases}$$

На основе уравнений (2.7) можно исследовать колебания, определить напряженно-деформированное состояние пластинки переменной толщины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: НАН РА. 2000. 122с.
2. Киракосян Р.М. К определению напряжений поперечного направления ортотропной идеально-пластической пластинки переменной толщины //Иzv.АН Арм.ССР.Механика.1990.Т.43.№ 2.С.29-37.

3. Белубекян М.В., Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. // Уч. записки ЕГУ. 1992. N1. С.41-46.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
27.11.2006

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР  
В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ

Элоян А. В.

Ключевые слова: опора, оптимальное расположение, балка, изгиб

Keywords: support, optimal disposition, beam, bending

Ա. Վ. Էլոյան

Հեծանի ծովան խնդրում հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրություն

Դիտարկվում է առավելագույն հեծանի հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է հեծանի ամենամեծ ճկվածքի ամենափոքր արժեքը:

A. V. Eloyan

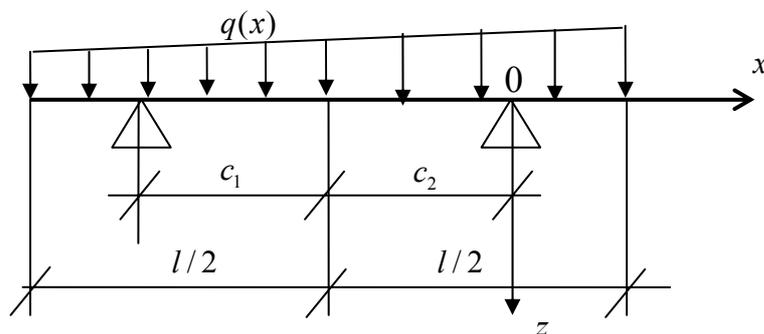
The Optimal Choice of Support Disposition in Case Of Beam Bending

A task of flexible beam's support's optimal disposition solving is being observed. This beam is providing the least importance of the largest bending under the influence of variable diametrical loading. The optimal project corresponds the equality of the most important bending in all parts of the beam. Moreover, the magnitude of the largest bending which corresponds the optimal project in 47 times less than the largest bending of free beam which is leant at the ends.

Рассматривается задача нахождения оптимального расположения опор по длине упругой балки, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

Рассматривается задача определения оптимального расположения опор по длине упругой балки при изгибе под действием переменной нагрузки, обеспечивающей наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

Пусть упругая балка длиной  $l$  отнесена к прямоугольной системе декартовых координат  $Oxyz$  так, что координатная плоскость  $z = 0$  совпадает со срединной плоскостью балки, начало координат совпадает с правой опорой. От середины балки опоры удалены на расстояние  $c_1$  и  $c_2$  (фиг. 1).



Фиг.1. Расчетная схема балки

Если балка изгибается под действием внешней неравномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q(x)$ , то можно предположить, что имеет место изгиб балки по цилиндрической поверхности и прогиб  $w = w(x)$ . Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной толщины  $h$ , загруженной нормально распределенной переменной по длине балки нагрузкой  $q(x) = q_0(1 + \alpha x/a)$  представится в виде

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0 \left( 1 + \alpha \frac{x}{a} \right) \quad (1)$$

где  $\alpha = q/q_0$ ,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  – жесткость на изгиб,  $E$  – модуль упругости,  $w = w(x)$  – прогиб длинной балки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала балки. Если нагрузка по длине балки распределена несимметрично, то уравнение (1) можно отдельно рассматривать на соответствующих отрезках, при этом

$$w_i(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{при } -(c_1 + c_2) < x < 0 \\ w_2(x) & \text{при } 0 < x < (0.5a - c_2) \\ w_3(x) & \text{при } -(0.5a + c_1) < x < -(c_1 + c_2) \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что при произвольном распределении нагрузки по ширине, задачу оптимизации необходимо рассматривать с двумя параметрами оптимизации  $c_1$  и  $c_2$ .

При этом должны удовлетворяться следующие условия на опорах:

$$\begin{aligned} w_1(x) = w_2(x) = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \quad M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(2)} \quad \text{при } x=0 \\ w_1(x) = w_3(x) = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_3}{dx}, \quad M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(3)} \quad \text{при } x=-(c_1 + c_2) \end{aligned} \quad (3)$$

На длинных краях балки  $x = 0.5a - c_1$ ,  $x = -(0.5a - c_1)$  соответственно должны быть удовлетворены условия свободного края, где

$$\begin{aligned} M_{xx}^{(2)} = 0, \quad T_{xz}^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = -0.5a - c_2 \\ M_{xx}^{(3)} = 0, \quad T_{xz}^{(3)} = 0 \quad \text{при } x = 0.5a - c_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$M_{xx} = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad T_{xz} = \frac{dM_{xx}}{dx} - D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (5)$$

–соответственно, изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях  $x = \text{const}$ .

Решение (1) получается в виде

$$w_i = \frac{q_0 a^4}{24D} \left(1 + \frac{\alpha \bar{x}}{5}\right) \bar{x}^{-4} + \frac{1}{6} a_{3i} \bar{x}^{-3} + \frac{1}{2} a_{2i} \bar{x}^{-2} + a_{1i} \bar{x} + a_{0i} \quad (6)$$

где  $i=1$  при  $x \in (-\alpha_1 - \alpha_2; 0)$ ;  $i=2$  при  $x \in (0; 0.5 - \alpha_1)$ ,

$i=3$  при  $x \in (-0.5 - \alpha_1; -\alpha_1 - \alpha_2)$ .

Здесь введены обозначения для безразмерных координат  $\bar{x}$  и параметров оптимизации ( $i$ )

$$\bar{x} = x/a, \quad \alpha_i = c_i/a \quad (i=1,2) \quad (7)$$

Удовлетворяя восьми условиям на опорах (3) и четырем условиям на свободных концах балки (4), получаем систему двенадцати уравнений для определения двенадцати постоянных;  $a_{ik}$  ( $k=0,1,2,3$ ;  $i=1,2,3$ )

Подстановкой значений постоянных  $a_{ik}$  в (6) получаются формулы для искомых  $w_i(x)$ , удовлетворяющих условиям (3), (4).

Окончательно для прогиба балки получается

$$w_1 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left\{ \bar{x}^{-3} \left(1 + \alpha \bar{x}/5\right) + 4\bar{x}^{-2} \left[ \cdot (0.5 - \alpha_1)^2 (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) \right] : \right. \\ : (a_1 + a_2) - (0.5 + \alpha_1)^2 (0.5 - \alpha(0.5 + \alpha_1)/3) : (a_1 + a_2) + (0.5 + \alpha_1) \times \\ \times (1 - 0.5\alpha(0.5 + \alpha_1)) \cdot \left. \right] + 12\bar{x} (0.5a - \alpha_1)^2 (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) + \\ + \left[ \cdot (a_1 + a_2)^3 (1 + 0.2(a_1 + a_2)) - 4(a_1 + a_2)^2 (0.5 + \alpha_1) (1 - 0.5\alpha(0.5 + \alpha_1)) \right] + \\ + 4(a_1 + a_2) (0.5 + \alpha_1)^2 (0.5 - \alpha(0.5 + \alpha_1)/3) + 8(a_1 + a_2) (0.5 - \alpha_1)^2 \times \\ \times (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) \cdot \left. \right] \cdot \left. \right\} \text{ при } \bar{x} \in (-\alpha_1 - \alpha_2; 0) \quad (8)$$

$$w_2 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left\{ \bar{x}^{-3} \left(1 + \alpha \bar{x}/5\right) - 4\bar{x}^{-2} (0.5 - \alpha_1) (1 + 0.5\alpha(0.5 - \alpha_1)) + \right. \\ + 2\bar{x} (0.5 - \alpha_1)^2 (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) + \left[ \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)^3 (1 + 0.2(\alpha_1 + \alpha_2)) - \right. \\ - 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (0.5 + \alpha_1) (1 - 0.5\alpha(0.5 + \alpha_1)) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) (0.5 + \alpha_1)^2 \times \\ \times (0.5 - \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) + 8(\alpha_1 + \alpha_2) (0.5 - \alpha_1)^2 (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) \cdot \left. \right] \cdot \left. \right\} \\ \text{при } \bar{x} \in (0; 0.5 - \alpha_1) \quad (9)$$

$$w_3 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left\{ \bar{x}^3 (1 + \alpha \bar{x}/5) + 4\bar{x}^2 (0.5 + \alpha_1)(1 - 0.5\alpha(0.5 + \alpha_1)) + \right. \\ \left. + 12\bar{x}(0.5 + \alpha_1)^2 (0.5 - \alpha(0.5 + \alpha_1)/3) + [(\alpha_1 + \alpha_2)^3 (1 + 0.2(\alpha_1 + \alpha_2)) - \right. \\ \left. - 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (0.5 + \alpha_1)(1 - 0.5\alpha(0.5 + \alpha_1)) + 16(\alpha_1 + \alpha_2)(0.5 + \alpha_1)^2 \times \right. \\ \left. \times (0.5 - \alpha(0.5 + \alpha_1)/3) - 4(\alpha_1 + \alpha_2)(0.5 - \alpha_1)^2 (0.5 + \alpha(0.5 - \alpha_1)/3) \right\} \\ \text{при } \bar{x} \in (-0.5 - \alpha_1; -\alpha_1 - \alpha_2) \quad (10)$$

Отметим, что как видно из (8), (9), (10), при переменной по длине балки нагрузки прогиб балки зависит от параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Имея значение  $w_i(\bar{x})$ , можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: для заданного ( найти: (1, (2 так, что

$$\max_{i, \bar{x}} w_i(\bar{x}, \alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \min, \quad \text{где } \alpha_i \in [0; 0.5] \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Очевидно, прогибы балки  $\bar{w}_2(x)$  и  $\bar{w}_3(x)$  принимают наибольшее значение на краях балки.

В случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 = 2$

$$\bar{w}_1(\bar{x}) \equiv 0, \quad \max_{\bar{x}} \bar{w}_2(\bar{x}) = \bar{w}_2(0.5) = 0.837$$

$$\max_{\bar{x}} \bar{w}_3(\bar{x}) = \bar{w}_3(-0.5) = 0.63$$

В случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$  и  $\alpha_1 = 2$

$$\max_{\bar{x}} \bar{w}_1(\bar{x}) = 1.0, \quad \bar{w}_2(\bar{x}) = \bar{w}_3(\bar{x}) \equiv 0$$

Отметим, что при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$  получается балка, два края которой ( $x = -l$ ;  $x = 0$ ) шарнирно оперты; а при  $c_1 = c_2 = 0$  получаются две консольные балки, заделанные в точке  $x = 0$ .

Здесь введено безразмерное значение для прогиба балки  $w$

$$\bar{w}_i(\bar{x}) = \frac{384D}{5q_0 a^4} w_i(\bar{x})$$

где  $5q_0 a^4 / 384D$  – наибольший прогиб шарнирно опертой по краям балки при  $\alpha_1 = 2$ .

На основе численного решения задачи получается, что наилучшие варианты расположения опор при  $\alpha_1 = 2$  получаются при  $\alpha_1^* = 0.255$ ,  $\alpha_2^* = 0.296$ .

Таким образом, при  $\alpha_1 = 2$

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2} \max_i \max_{\bar{x}} \bar{w}_i(\bar{x}, \alpha_1, \alpha_2) = 0.0208$$

В рассмотренных случаях  $\alpha_1 = 2$  при оптимальном расположении опор ( $\alpha_1 = \alpha_1^*; \alpha_2 = \alpha_2^*$ ) наибольший прогиб по длине упругой балки 47 раз меньше наибольшего прогиба шарнирно опертой по длинным краям балки.

Отметим, что наибольшее значение  $\bar{w}_1(x)$  ( прогиб части балки между опорами) для случая  $\alpha_1 = 2$  достигается при  $\bar{x} = -0.425$ .

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гнуни В. Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки.// В сб.: Ереван: Изд. ЕГУ. 1997. С.114-117.
2. Гнуни В. Ц., Элоян А. В. Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки. // Изв.НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. N3. С.14-17.

Гюмрийский филиал Государственного  
Инженерного Университета Армении

Поступила в редакцию  
17.11.2006

Բովանդակություն	Содержание
<p>Վ.Վ. Ավետիսյան Հարթության մեջ շարժվող նպատակային օբյեկտի փնտրման օպտիմալ երաշխավորող դեկլարումը</p> <p>Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան, <b>Վ.Յ. Գևունի</b>, Կ.Բ. Ղազարյան Տիեզերական վերելակի ճոպանի մաքսիմալ լարվածության փոքրացման մի եղանակի մասին</p> <p>Ա.Ռ. Հարությունյան, Ռ.Ա. Հարությունյան Հոգնածության ամրության սկզբունքի կախվածությունը հաճախությունից</p> <p>Լ. Ա. Հարությունյան, Ն.Ֆ. Մորոզով Վերամիկական նյութերի երկարատև ջերմային դեգրադացիայի մեխանիկական</p> <p>Գ.Ե. Բաղդասարյան, Վ.Յ. Գևունի Հեղուկով մասնակիորեն լցված գլանային թաղանթի կայունությունը արտաքին դինամիկ ճնշման տակ</p> <p>Վ.Մ. Բելուբեկյան Հավասարաչափ սեղմված սալի տեղայնացված անկայունությունը</p> <p>Է.Վ. Բելուբեկյան, Ա.Գ. Պողոսյան Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի օպտիմալ նախագծումը ըստ կայունության չափանիշի</p> <p>Ա.Խ. Բերբերյան Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի անբարձրումը և բեկումը շեղանկյուն 222 դասի պլեգոլեկտրիկ բյուրեղի և առաձգական իզոտրոպ դիէլեկտրիկ միջավայրի բաժանման սահմանից</p> <p>Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Վիրակոսյան Գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-շերտի ոչ դասական մի խնդրի մասին</p> <p>Ս.Խ. Գելվորգյան, Ա.Ս. Առուստամյան Օրթոտրոպ սակավաթեթ թաղանթի դինամիկ կայունության խնդրի վերաբերյալ</p> <p>Զ.Ն. Դանոյան, Լ.Ա. Աթոյան, Ա.Խ. Բերբերյան</p>	<p>3</p> <p>Аветисян В.В. ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ДВИЖУЩЕГОСЯ НА ПЛОСКОСТИ ЦЕЛЕВОГО ОБЪЕКТА</p> <p>10 Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Гнуни В. Ц., Казарян К. Б. ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УМЕНЬШЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА</p> <p>15 А. R. Arutyunyan, R. A. Arutyunyan THE FREQUANCY DEPENDANCE OF THE FATIGUE FRACTURE CRITERION</p> <p>19 Арутюнян Р.А., Морозов Н.Ф. МЕХАНИКА ДЛИТЕЛЬНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕГРАДАЦИИ КЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ</p> <p>25 Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ВНЕШНЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ</p> <p>33 Белубекян В.М. ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНО СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ</p> <p>38 Белубекян Э. В., Погосян А. Г. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПО КРИТЕРИУ УСТОЙЧИВОСТИ</p> <p>44 Берберян А.Х. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И УПРУГОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ</p> <p>50 Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ</p> <p>57 Геворкян С.Х., Арустамян А.М. К ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ</p> <p>63 Даноян З.Н., Атоян Л.А., Берберян А.Х.</p>

Ճեղքային ալիքները պլեգոէլեկտրիկ շերտավոր  
միջավայրերում

ЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНЫ В  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ  
СРЕДАХ

Բովանդակություն (շարունակություն)

Содержание (продолжение)

Տ.Հ.Եղիազարյան, Վ.Ս.Մակարյան Մեղմուղ բեռի տակ գտնվող ճաքի առկայությամբ առաձգական կիսահարթության համար եզրային խնդիր	70	Егиазарян Т. А., Макарян В. С. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКОЙ
Լ. Ա. Մակսիմովա Առանցքահամաչափ խնդրի սահմանային ստատիկորեն որոշելի վիճակը	77	Макимова Л.А. ПРЕДЕЛЬНОЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЕ СОСТОЯНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ
Յու. Վ. Նեմիրովսկի Կոմպոզիտ սալերի հիբրիդային և օպտիմալ նախագծումը	82	Немировский Ю.В. ГИБРИДНОЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН
Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա.Պ. Յանկովսկի Մաճուցիկապլաստիկ թաղանթների ռացիոնալ պրոֆիլավորումը պայթյունային տիպի բեռների ազդեցության դեպքում	89	Немировский Ю.В., Янковский А.П. РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА
Ս.Վ. Սարգսյան Փոփոխական հաստությամբ սալի դիմային մակերևույթների վրա դրված պայմանների ճշգրտումը	95	Саркисян С.В. УТОЧНЕНИЕ УСЛОВИЙ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ
Ա. Վ. Էլոյան Հեծանի ծոման խնդրում հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրություն	99	Элоян А. В. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ