

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԿԱԿԱՆ ԻՋՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2006

УДК 539.3, 624.04

ԱՄԻՄՊՏՈՏԻԿ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐ ՎԵԲԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ասատրյան Վ.Մ., Բաբոյան Ա.Հ.

В.М. Асатрян, А.А. Баблоян
Асимптотические формулы для корней функций Вебера

В работе получены общие асимптотические формулы для вычисления корней функций Вебера. В частных случаях, которые часто встречаются в задачах теории упругости, эти формулы приведены с высокой точностью. Для полноты, в конце приведена асимптотическая формула для корней бесселевых функций.

V.M. Asatryan, A.H. Babloyan
Asymptotic formulas for roots of Weber's function

The work results in general asymptotic formulas for roots calculation of Weber's function. In some cases, which are of frequent occurrences in problems of elasticity theory, this formulas are brought with high accuracy. To ensure completeness the final part of the work includes the asymptotic formula for roots of Bessel's function

Աշխատանքում ստացված են ընդհանուր ասիմպտոտիկ բանաձևեր Վեբերի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար: Առաձգականության տեսության մեջ հանդիպող մի շարք դեպքերի համար ասիմպտոտիկ բանաձևերը բերված են ավելի բարձր ճշտությամբ: Վերջում բերված է բանաձև Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար: Բոլոր բանաձևերի բացարձակ սխալը, սկսած 10-րդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-12} -ից:

Առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրների լուծումները վերջավոր չափերով սնամեջ գլանի համար արտահայտվում են Ֆուրյե-Դինիի շարքերով ըստ Վեբերի ֆունկցիաների: Այդ շարքերի թվային արժեքները ստանալու համար անհրաժեշտ է ունենալ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների արժեքները [1-4]:

Առաջին մի քանի արմատները կարելի է հաշվել ԷՀՄ-ների օգնությամբ, իսկ մնացած արմատների համար անհրաժեշտ է ստանալ այնպիսի ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք տալիս են արմատի արժեքը այնքան ավելի ճիշտ, որքան մեծ է արմատի համարը (կամ արժեքը):

Վեբերի ֆունկցիաները ունեն հետևյալ տեսքը

$$W_{n,m}(z, a) = J_n(z)Y_m(az) - Y_n(z)J_m(az) \quad (1)$$

որտեղ $J_n(z)$ -ը և $Y_n(z)$ -ը Բեսսելի առաջին և երկրորդ սեռի իրական արգումենտով ֆունկցիաներն են [1-4], a -ն սնամեջ գլանի շտապիղների հարաբերությունն է՝ $a = R_1 / R_2$ ($a = R_2 / R_1$), իսկ $z = \beta_k R_2$: Վեբերի մի քանի ֆունկցիաների արմատների արժեքները բերված են [1] և [2]-ում:

Արմատների ասիմպտոտիկ բանաձևերը ստանալու համար օգտվենք Բեսսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերից [1-4], երբ $z \gg n$

$$\begin{aligned}
J_n(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_n(z) \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q_n(z) \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
Y_n(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_n(z) \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + Q_n(z) \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]
\end{aligned} \quad (2)$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
P_n(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C(n, 2p) (2z)^{-2p} \\
Q_n(z) &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} C_n(n, 2p-1) (2z)^{-2p+1} \\
C(n, 0) &= 1, \quad C(n, m) = \prod_{p=1}^m (4n^2 - (2p-1)^2) (2^{2m} \Gamma(m+1))^{-1}
\end{aligned} \quad (3)$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1) -ի մեջ $W_{n,m}(z, a)$ -ի համար կստանանք հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը

$$\begin{aligned}
W_{n,m}(z, a) &\approx \frac{2}{\pi z \sqrt{a}} \left[a(n, m, z) \cos(0.5(m-n)\pi + (a-1)z) + \right. \\
&\quad \left. + b(n, m, z) \sin(0.5(m-n)\pi + (a-1)z) \right]
\end{aligned} \quad (4)$$

$$a(n, m, z) = -P_n(az)Q_m(z) + P_m(z)Q_n(az)$$

$$b(n, m, z) = P_m(z)P_n(az) + Q_m(z)Q_n(az)$$

Տեղադրելով $P_n(z)$ և $Q_m(z)$ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ արժեքները (3)-ից (4)-ի մեջ $a(n, m, z)$ և $b(n, m, z)$ ֆունկցիաների համար կստանանք հետևյալ տեսքերը

$$\begin{aligned}
a(n, m, z) &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} A_{2p-1} z^{2p-1}, \quad b(n, m, z) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p} z^{2p} \\
A_p(n, m, a) &= \sum_{q=0}^p (-1)^q a^{p-q} c(m, p-q) c(n, q)
\end{aligned} \quad (5)$$

Հտաքքիթի է նշել, որ այս երկու բանաձևերում գործակիցները որոշվում են մեկ ընդհանուր բանաձևով:

Հավասարացնելով $W_{n,m}(z, a)$ -ֆունկցիան զրոյի, (4) բանաձևից կստանանք հավասարում Վեբերի ֆունկցիայի արմատների որոշման համար

$$\operatorname{tg}(0.5(m-n)\pi + (a-1)z) = -\frac{a(z)}{b(z)} \quad (6)$$

Այստեղից կստանանք

$$0.5(m-n)\pi + k\pi = s_{n,m}(z, a)$$

$$s_{n,m}(z, a) = (1-a)z - \operatorname{arctg} \frac{a(n, m, z)}{b(n, m, z)} = (1-a)z - \operatorname{arctg} \frac{b(n, m, z)}{a(n, m, z)},$$

$$U_k = 0.5(n-m)\pi + k\pi, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Վերլուծենք $s_{n,m}(z, a)$ ֆունկցիան աստիճանային շարքի անվերջ հեռու կետի շուրջը

$$s_{n,m}(z, a) \approx (1-a)z + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t_k(n) - a^{2k-1}t_k(m)}{c_k(4az)^{2k-1}} \quad (8)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} c_1 &= 2, \quad c_2 = 6, \quad c_3 = 5, \quad c_4 = 14, \quad c_5 = 9, \quad c_6 = 11, \dots \\ t_1(n) &= 1 - 4n^2, \quad t_2(n) = 25 - 104n^2 + 16n^4, \\ t_3(n) &= 1073 - 4748n^2 + 1840n^4 - 64n^6, \\ t_4(n) &= 375733 - 1721744n^2 + 899808n^4 - 98560n^6 + 1280n^8 \\ t_5(n) &= 55384775 - 258836364n^2 + 155471968n^4 - 25420160n^6 + \\ &+ 1155840n^8 - 7168n^{10} \\ t_6(n) &= 24713030909 - 116862506264n^2 + 7574002603n^4 - \\ &- 15063682304n^6 + 1085063936n^8 - 25073664n^{10} + 86016n^{12}, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Շրջելով (8) շարքը Վեբերի ֆունկցիայի արմատների որոշման համար կատանանք հետևյալ մոտավոր բանաձևը

$$\begin{aligned} w_{n,m}(k, a) &\approx \frac{U_k}{1-a} + \frac{4n^2 - 1 - a(4m^2 - 1)}{8aU_k} + \frac{a-1}{6}(31a - 12a^2 + 31a^3 - 25a^4 + \\ &+ 48a^2m^2 - 152a^3m^2 + 104a^4m^2 + 112a^3m^4 - 16a^4m^4 + 104n^2 - 152an^2 + \\ &+ 48a^2n^2 - 192a^2m^2n^2 - 16n^4 + 112an^4 - 25) \left(\frac{1}{4aU_k} \right)^3 - \frac{(a-1)^2}{15}(3219 - \\ &- 6938a + 4279a^2 - 680a^3 + 680a^4 - 4279a^5 + 6938a^6 - 3219a^7 - \\ &- 2000a^2m^2 + 2720a^3m^2 - 3520a^4m^2 + 21124a^5m^2 - 32568a^6m^2 + \\ &+ 14244a^7m^2 + 3200a^4m^4 - 17360a^5m^4 + 19680a^6n^4 - 5520a^7m^4 + \\ &+ 5312a^5m^6 - 1664a^6m^6 + 192a^7m^6 - 14244n^2 + 32568an^2 - 21124a^2n^2 + \\ &+ 3520a^3n^2 - 2720a^4n^2 + 2000a^5n^2 + 8320a^2m^2n^2 - 14080a^3m^2n^2 + \\ &+ 14080a^4m^2n^2 - 8320a^5m^2n^2 - 12800a^4m^4n^2 + 1280a^5m^4n^2 + 5520n^4 - \\ &- 19680an^4 + 17360a^2n^4 - 3200a^3n^4 - 1280a^2m^2n^4 + 12800a^3m^2n^4 - 192n^6 + \\ &+ 1664an^6 + 5312a^2n^6) \left(\frac{1}{4aU_k} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

որտեղ $U_k = 0.5(n-m)\pi + k\pi$

Այստեղ բերված են ասիմպտոտիկ բանաձևի առաջին չորս գումարելիները: Մնացած գումարելիները այստեղ չեն բերվում մեծածավալ լինելու պատճառով:

Առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրներում վերջավոր չափերով սնամեջ գլանի համար հանդիպում են Վեբերի հետևյալ ֆունկցիաները՝

1. $m = n = 0$, առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են տեղափոխումները:
2. $m = 1, n = 0$, առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են տեղափոխումները, իսկ մյուսի վրա՝ լարումները:
3. $m = 2, n = 1$, սնամեջ գլանի ոլորման խնդիր, երբ գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված է տանգենցիալ տեղափոխումը, իսկ մյուսի վրա՝ լարումը:
4. $n = m$, ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիր սնամեջ գլանի համար, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են տեղափոխումները կամ լարումները:
5. $m = n = 1$, առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլանային մակերևույթների վրա տրված են լարումները:
6. Լրիվության համար վերջում բերվում է նաև բանաձև Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման համար:
Նշված դեպքերի համար ստացված են համապատասխան Վեբերի ֆունկցիաների արմատների որոշման ասիմպտոտիկ բանաձևեր:

Ստորև բերվում են այդ բանաձևերը:

$$\begin{aligned}
 1. \underline{m = n = 0}, \quad U_k = k\pi, \quad W_{00}(z, a) = J_0(z)Y_0(az) - Y_0(z)J_0(az), \\
 s_{00}(z, a) \approx z(1-a) + \frac{1-a}{8az} + \frac{25(a^3-1)}{6(4az)^3} - \frac{1073(a^5-1)}{5(4az)^5} + \frac{375733(a^7-1)}{14(4az)^7} - \\
 - \frac{55384775(a^9-1)}{9(4az)^9} + \frac{24713030909(a^{11}-1)}{11(4az)^{11}} - \frac{15561514498082(a^{13}-1)}{13(4az)^{13}} + \\
 + \frac{5261793482424425(a^{15}-1)}{6(4az)^{15}} - \frac{14378802319925055947(a^{17}-1)}{17(4az)^{17}} + \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

Արմատների որոշման համար ստացվում է

$$\begin{aligned}
 w_{00}(k, a) \approx \frac{U_k}{1-a} + \frac{a-1}{8aU_k} - \frac{25+a(19+25a)}{6} \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^3 + \\
 + (0.209570313(1+a^4) + 0.1770182229(a+a^3) + 0.180924479a^2) \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^5 - \\
 (1.638065883(1+a^6) + 1.468172491(a+a^5) + 1.470715622(a^2+a^4) + \\
 + 1.456779262) \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^7 + (23.475127749972874(1+a^8) + \\
 + 21.72791066245427(a+a^7) + 21.725281403556703(a^2+a^6) + \\
 + 21.623844364711218(a^3+a^5) + 21.639106544615732a^4) \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^9 - \\
 -(535.640519510616(1+a^{10}) + 505.0105621011054(a+a^9) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +505.03391254577804(a^2 + a^8) + 503.84859815689737(a^3 + a^7) + \\
& +503.78632802419673(a^4 + a^6) + 503.5587875099925a^5 \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^{11} + \\
& +(17837.279688947478(1 + a^{12}) + 17011.359486378704(a + a^{11}) + \\
& +17015.289393444582(a^2 + a^{10}) + 16994.217053440578(a^3 + a^9) + \\
& +16992.273073135322(a^4 + a^8) + 16988.476337002183(a^5 + a^7) + \\
& +16998.897970820246a^6 \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^{13} - (816737.8421910766(1 + a^{14}) + \\
& +784946.7302433586(a + a^{13}) + 785175.9429553373(a^2 + a^{12}) + \\
& +784625.4272687394(a^3 + a^{11}) + 784581.098093667(a^4 + a^{10}) + \\
& +784500.8318031547(a^5 + a^9) + 784490.7724151777(a^6 + a^8) + \\
& +784471.7523808624a^7) \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^{15} + (49232732.339998595(1 + a^{16}) + \\
& +47578264.82542957(a + a^{15}) + 47591969.57928655(a^2 + a^{14}) + \\
& +47571610.02817833(a^3 + a^{13}) + 47570444.79752855(a^4 + a^{12}) + \\
& +47568209.096377365(a^5 + a^{11}) + 47567799.821064845(a^6 + a^{10}) + \\
& +47567224.72263906(a^7 + a^9) + 47567270.50971424a^8) \left(\frac{a-1}{aU_k} \right)^{17} + \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

7. $\underline{m=1, n=0, U_k = \pi(k+0.5)},$

$$\begin{aligned}
& W_{01}(z, a) = J_0(z)Y_1(az) - Y_0(z)J_1(az), \\
& s_{01}(z, a) \approx z(1-a) - \frac{3+a}{8az} + \frac{25a^3+63}{6(4az)^3} - \frac{1073a^5+1899}{5(4az)^5} + (375733a^7 + \\
& +543483) \frac{1}{14(4az)^7} - \frac{55384775a^9+72251109}{9(4az)^9} + (24713030909a^{11} + \\
& +30413055339) \frac{1}{11(4az)^{11}} - \frac{15561514498082a^{13}+18457090626294}{13(4az)^{13}} + \dots
\end{aligned} \tag{13}$$

Այս դեպքում արմատները կլինեն

$$\begin{aligned}
w_{01}(k, a) \approx & \frac{U_k}{1-a} + \frac{3+a}{8aU_k} - \frac{(a-1)(25a^4 - 63 + 9a - 36a^2 - 31a^3)}{6(4aU_k)^3} + \\
& + (a-1)^2(5697 - 7614a + 4797a^2 + 360a^3 + 2040a^4 + 2279a^5 - 6938a^6 + \\
& + 3219a^7) \frac{1}{15(4aU_k)^5} - (a-1)^3 \left(\frac{375733a^{10} - 1353753a^2 - 543483}{229376} + \right. \\
& + \frac{2324673a^3 + 7102539a}{1146880} - \frac{2583a^6 + 1443a^4}{5120} - \frac{1617.55a^7 + 75a^5}{2048} + \\
& + \left. \frac{16507193a^8 - 17492527a^9}{3440640} \right) \left(\frac{1}{aU_k} \right)^7 + (a-1)^4 \left(\frac{8027901}{262144} - \frac{263555433a}{2293760} + \right. \\
& + \frac{151453773a^2}{917504} - \frac{249453297a^3}{2293760} + \frac{7917765a^4}{262144} - \frac{38193a^5}{17920} + \frac{16529a^6}{20480} - \\
& - \frac{401a^7}{4096} + \frac{124633a^8}{26880} + \frac{163344025a^9}{16515072} - \frac{578200289a^{10}}{6881280} + \frac{833331317a^{11}}{5898240} - \\
& - \left. \frac{394907279a^{12}}{4128768} + \frac{55384775a^{13}}{2359296} \right) \left(\frac{1}{aU_k} \right)^9 + \dots \tag{14}
\end{aligned}$$

3. $m = 2, n = 1$, $U_k = \pi(k - 0.5)$, $W_{12}(z, a) = J_2(z)Y_1(az) - Y_2(z)J_1(az)$,

$$\begin{aligned}
s_{12}(z, a) \approx & z(1-a) + \frac{3(5a-1)}{8az} + \frac{3(7-15a^3)}{2(4az)^3} - \frac{9(211+825a^5)}{5(4az)^5} + 27(20129 + \\
& + 70575a^7) \frac{1}{14(4az)^7} - 9(891989 + 2089575a^9) \left(\frac{1}{4az} \right)^9 + 81(375469819 + \\
& + 709642125a^{11}) \frac{1}{11(4az)^{11}} - \frac{4374(4219728081 + 7094895875a^{13})}{13(4az)^{13}} + \dots \tag{15}
\end{aligned}$$

Արմատների համար կատանանք

$$\begin{aligned}
w_{12}(k, a) \approx & \frac{U_k}{1-a} + \frac{3(1-5a)}{8aU_k} + \frac{3(a-1)(7-a-60a^2+135a^3+15a^4)}{2(4aU_k)^3} + \\
& + \frac{9(a-1)^2(211-282a-569a^2-200a^3+4200a^4-4875a^5-3150a^6+825a^7)}{5(4aU_k)^5} - \\
& - 27(a-1)^3 \left(-\frac{20129}{229376} + \frac{263057a}{1146880} - \frac{61639a^2}{1146880} - \frac{135213a^3}{1146880} - \frac{213a^4}{1024} - \right. \\
& - \frac{465a^5}{2048} + \frac{1455a^6}{1024} - \frac{184185a^7}{229376} - \frac{244395a^8}{229376} - \frac{76275a^9}{229376} + \frac{70575a^{10}}{229376} \left. \right) \left(\frac{1}{aU_k} \right)^7 + \\
& + 9(a-1)^4 \left(\frac{891989}{262144} - \frac{29283937a}{2293760} + \frac{12963429a^2}{917504} - \frac{3085609a^3}{2293760} - \frac{22425161a^4}{9175040} - \right. \\
& - \frac{4209a^5}{3584} - \frac{12843a^6}{4096} - \frac{29529a^7}{4096} + \frac{39915a^8}{1792} + \frac{644985a^9}{1835008} - \frac{14487975a^{10}}{458752} + \\
& + \frac{15873975a^{11}}{917504} - \frac{8067375a^{12}}{458752} + \frac{2089575a^{13}}{262144} \left. \right) \left(\frac{1}{aU_k} \right)^9 + \dots \tag{16}
\end{aligned}$$

4. $\underline{m=n}$, $U_k = \pi k$, $W_m(z, a) = J_n(z)Y_n(az) - Y_n(z)J_n(az)$,

$$\begin{aligned}
s_m(z, a) \approx & z(1-a) + \frac{(a-1)(4n^2-1)}{8az} + \frac{(a^3-1)(25-104n^2+16n^4)}{6} \left(\frac{1}{4az} \right)^3 + \\
& + \frac{(a^5-1)(-1073+4748n^2-1840n^4+64n^6)}{5} \left(\frac{1}{4az} \right)^5 + \\
& + \frac{(a^7-1)(375733-1721744n^2+899808n^4-98560n^6+1280n^8)}{14} \left(\frac{1}{4az} \right)^7 + \\
& + (a^9-1)(-55384775+258836364n^2-155471968n^4+25420160n^6 - \\
& - 1155840n^8+7168n^{10}) \frac{1}{9(4az)} + \dots \tag{17}
\end{aligned}$$

Արմատները կլինեն

$$\begin{aligned}
w_m(k, a) \approx & \frac{U_k}{1-a} - \frac{(4n^2-1)(a-1)}{8aU_k} + (4n^2-1)(25+19a+25a^2 - \\
& - 4n^2(1-5a+a^2)) \frac{1}{6} \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^3 - \frac{4n^2-1}{15} (3219+2719a+2779a^2+2719a^3 + \\
& + 3219a^4 + (-1368+712a+232a^2+712a^3-1368a^4)n^2 + (48-272a+ \\
& + 688a^2-272a^3+48a^4)n^4) \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^5 + \frac{4n^2-1}{210} (5635955+5051453a+ \\
& + 5060203a^2+5012253a^3+5060203a^4+5051453a^5+5635995a^6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (3282180 + 700188a + 939588a^2 + 700188a^3 + 939588a^4 + 700188a^5 + \\
& + 3282180a^6)n^2 - (-368400 + 616080a - 234000a^2 + 24720a^3 - 234000a^4 + \\
& + 616080a^5 - 368400a^6)n^4 - (4800 - 31936a + 97984a^2 - 175296a^3 + \\
& + 97984a^4 - 31936a^5 + 4800a^6)n^6 \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^7 + \dots \tag{18}
\end{aligned}$$

5. $m = n = 1$, $U_k = \pi k$, $W_{11}(z, a) = J_1(z)Y_1(az) - Y_1(z)J_1(az)$,

$$\begin{aligned}
s_{11}(z, a) \approx & z(1-a) + \frac{3(a-1)}{8az} - \frac{21(a^3-1)}{2(4az)^3} + \frac{1899(a^5-1)}{5(4az)^5} - \\
& - \frac{543483(a^7-1)}{14(4az)^7} + 8027901(a^9-1) \left(\frac{1}{4az} \right)^9 - \frac{30413055339(a^{11}-1)}{11(4az)^{11}} + \\
& + \frac{18457090626294(a^{13}-1)}{13(4az)^{13}} - \frac{10139844510243441(a^{15}-1)}{10(4az)^{15}} + \\
& + \frac{16317191917079376129(a^{17}-1)}{13(4az)^{17}} + \dots \tag{19}
\end{aligned}$$

Արմատների որոշման համար ստացվում է

$$\begin{aligned}
w_{11}(k, a) \approx & \frac{U_k}{1-a} - \frac{3(a-1)}{8aU_k} + \frac{3(7+13a+7a^2)}{2} \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^3 - \frac{9}{5}(211+351a + \\
& + 411a^2 + 351a^3 + 211a^4) \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^5 + \frac{27}{70}(100645 + 139523a + 157653a^2 + \\
& + 165283a^3 + 157653a^4 + 139523a^5 + 100645a^6) \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^7 - \frac{9}{35}(31219615 + \\
& + 38962327 + 41235535a^2 + 42513847a^3 + 42907807a^4 + 42513847a^5 + \\
& + 41235535a^6 + 38962327a^7 + 31219615a^8) \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^9 + \frac{27}{385}(39424330995 + \\
& + 46566273649a + 47863436923a^2 + 48448937377a^3 + 48706283851a^4 + \\
& + 48799116745a^5 + 48706283851a^6 + 48448937377a^7 + 47863436923a^8 + \\
& + 46566273649a^9 + 39424330995a^{10}) \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^{11} - \frac{162}{25025}(219320367009975 + \\
& + 250805685295435a + 254728135501967a^2 + 256058199723739a^3 + \\
& + 256541093690151a^4 + 256793808867723a^5 + 256855706675695a^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 256793808867723a^7 + 256541093690151a^8 + 256058199723739a^9 + \\
& + 254728135501967a^{10} + 250805685295435a^{11} + \\
& + 219320367009975a^{12} \left(\frac{a-1}{4aU_k} \right)^{13} + \dots \tag{20}
\end{aligned}$$

6. Բեասեղի ֆունկցիաներ, $U_k(\alpha, n) = \alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + k\pi$,

$$\begin{aligned}
& W_n(z, \alpha) = J_n(z) \cos \alpha + Y_n(z) \sin \alpha, \\
& s(z, \alpha) \approx z + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 25)}{6(4z)^3} + (4n^2 - 1)(1073 - 456n^2 + \\
& + 16n^4) \frac{1}{5(4z)^5} + \frac{(4n^2 - 1)(-375733 + 218812n^2 - 24560n^4 + 320n^6)}{14(4z)^7} + \\
& + \frac{(4n^2 - 1)(55384775 - 37297264n^2 + 6282912n^4 - 288512n^6 + 1792n^8)}{9(4z)^9} + \\
& + (4n^2 - 1)(-24713030909 + 18010382628n^2 - 3698495520n^4 + \\
& + 269700224n^6 - 6263040n^8 + 21504n^{10}) \frac{1}{11(4z)^{11}} + (7780757249041 - \\
& - 5951385479128n^2 + 1368164250864n^4 - 126122179840n^6 + \\
& + 4832337664n^8 - 64542720n^{10} + 135168n^{12}) \frac{2(4n^2 - 1)}{13(4z)^{13}} + \\
& + (-26308967412122125 + 20786014331368940n^2 - 5133691244537104n^4 + \\
& + 543207384631744n^6 - 27014397118208n^8 + \\
& + 611949724672n^{10} - 5129220096n^{12} + 7028736n^{14}) \frac{(4n^2 - 1)}{30(4z)^{15}} + \dots \tag{21}
\end{aligned}$$

Արմատների համար կստանանք

$$\begin{aligned}
& w(k, n, \alpha) \approx U_k - \frac{4n^2 - 1}{8U_k} - \frac{(4n^2 - 1)(28n^2 - 31)}{6(4U_k)^3} - (4n^2 - 1)(3779 - 3928n^2 + \\
& + 1328n^4) \frac{1}{15(4U_k)^5} - (-6277237 + 6342972n^2 - 2461680n^4 + \\
& + 444736n^6) \frac{(4n^2 - 1)}{210(4U_k)^7} - (2092163573 - 2048250192n^2 + 768167904n^4 - \\
& - 158676224n^6 + 17970432n^8) \frac{(4n^2 - 1)}{315(4U_k)^9} - (-8249725736393 + \\
& + 7930445824724n^2 - 2868634057632n^4 + 569853522560n^6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -73510178048n^8 + 5726880768n^{10}) \frac{(4n^2 - 1)}{3465(4U_k)^{11}} - (423748443625564327 - \\
& -403389888372354024n^2 + 142871829329734032n^4 - \\
& -27286652600675072n^6 + 3372032930441472n^8 - 298235245946880n^{10} + \\
& +16994075373568n^{12}) \frac{(4n^2 - 1)}{337838(4U_k)^{13}} - (-849353.5802991488 + \\
& +804138.2004246122n^2 - 281532.8756230916n^4 + 52549.18417467465n^6 - \\
& -6228.41904852873n^8 + 526.0783299187756n^{10} - 33.93509282754174n^{12} + \\
& +1.4775696999526142n^{14}) \frac{4n^2 - 1}{U_k^{15}} - (50922546.24022268 - \\
& -48052788.61369455n^2 + 16711425.109904956n^4 - 3079836.960165454n^6 + \\
& +356272.4439722876n^8 - 28807.46247720099n^{10} + 1770.1043194591132n^{12} - \\
& -87.03574048565234n^{14} + 2.992367187823731n^{16}) \frac{4n^2 - 1}{U_k^{17}} + \dots \quad (22)
\end{aligned}$$

Վերջին բանաձևը քիչ անդամներով բերված է նաև [2,6]-ում, իսկ մի քանի արմատների մոտավոր արժեքները բերված են [1,4,6] գրքերում: Մեր ստացած (22) բանաձևը պարունակում է անհամեմատ ավելի շատ գումարելիներ, որի պատճառով այս բանաձևի կիրառումը ավելի նպատակահարմար է:

Բեսսելի ֆունկցիաների արմատների որոշման (22) բանաձևի սխալը, սկսած երկրորդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-10} -ը: Իսկ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների համար ստացված բոլոր բանաձևերի սխալը, սկսած 10-րդ արմատից, չի գերազանցում 10^{-12} -ը:

Այդ բանաձևերը տալիս են բավարար ճշտություն, երբ $a^{\pm 1}U_k \gg 1$: Նշենք, որ Վեբերի ֆունկցիաների արմատների բանաձևը, երբ $k < 10$, տալիս է վատ արդյունք, եթե $a < 0.15$ և $a > 7$ դեպքերում: Ստացված արդյունքները էապես օգտագործված են [5] աշխատանքում:

Գրականություն

1. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342с.
2. Бейтмен Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. М.: 1966. 437с.
3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функции. Т-1. М.: И.-Л. 1949. 631с.
4. Грей Э., Метюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: И.-Л, 1953. 371с.
5. Բարլոյան Ա. Հ., Ասատրյան Վ. Ս. Փոփոխական կտրվածքով բաղադրյալ լիսենի կայունացած ոլորման տատանումները. // Ոչայաստանի Շինարարների տեղեկագիրք. հատուկ թողարկում. N2[30], 2005 թ. էջ 16-20 :
6. Абрамовиц А., Липман А. И др. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. 1929. 830с.

Երևանի ճարտարապետության և
շինարարության պետական համալսարան

Ընդունվել է խմբագրություն
14.02.2006

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ
ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
ПО ВНУТРЕННЕМУ И ВНЕШНЕМУ КОНТУРАМ НОРМАЛЬНОЙ
НАГРУЗКИ

Аветисян А.С., Алексанян Д.Р.

Ա.Ս. Ավետիսյան, Դ.Ր. Ալեքսանյան

Ներքին և արտաքին եզրերով հավասարաչափ բաշխված նորմալ ուժերի ազդեցության տակ
շրջանային օղակաձև սալի կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկված է օղակային սալի հարթ ձևի կայունության կորուստի սիմետրիկ խնդիրը, երբ սալի ներքին և արտաքին եզրերի վրա, սալի միջին հարթության մեջ, շառավիղի ուղղությամբ ազդում են հավասարաչափ բաշխված ուժեր: Ուժերի մեծություններից և ուղղություններից, ինչպես նաև սալի երկրաչափական պարամետրերից կախված բացահայտված են բոլոր հնարավոր տարբերակները, որոնց դեպքում սալը կայունությունը չի կորցնի կամ կարող է կորցնել հարթ ձևի կայունությունը: Վերջին դեպքերում ստացված են ընդլայնական տեղափոխությունները որոշող բանաձևեր: Մասնավոր դեպքերում ստացված են կրիտիկական ուժը որոշելու համար տրանսցենդենտ հավասարումներ:

A.S. Avetisyan, D.R. Aleksanyan

The stability problem of the circular ring plate under the action of normal forces evently distributed on internal and external contours

The stability problem of the circular ring plate under the action of normal forces evently distributed on internal and external contours is considered. Depending the size and the direction of the forces, geometrical parameters of plate, discovered cases, when the plate can not lose the stability of the plane form or can. In the last cases are received formulas for lateral displacements. In particular are obtained transcendental equations for determination of critical forces.

Рассмотрена симметричная задача потери устойчивости плоской формы кольцевой пластинки, когда на внутренней и внешней границах пластинки в срединной плоскости действуют равномерно распределенные радиальные силы. В зависимости от отношения величин и характера действующих сил, а также геометрических параметров пластинки выявлены как случай устойчивости, так и случай возможной потери плоской формы пластинки с последующим определением поперечного перемещения. В частых случаях приведены в явном виде полученные трансцендентные уравнения для определения критических значений действующих сил.

Рассматривается симметричная задача потери устойчивости плоской формы круговой кольцевой пластинки толщиной h , когда на внутреннем $r = c$ и внешнем $r = a$ контурах срединной плоскости пластинки по направлению внешней нормали или в противоположном направлении действуют равномерно распределенные силы P_1 и P_2 .

В симметричной задаче плоского напряженного состояния теории упругости единственное отличное от нуля перемещение по направлению r определяется формулой [1-3].

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad c \leq r \leq a \quad (1.1)$$

Соответствующее этому перемещению статически эквивалентным напряжениям σ_r и σ_θ внутренние усилия определяются формулами

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right); \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (1.2)$$

где E, ν – модуль упругости материала пластинки, коэффициент Пуассона.

Удовлетворяя граничным условиям:

$$N_r|_{r=c} = P_1, \quad N_r|_{r=a} = P_2 \quad (1.3)$$

для постоянных c_1 и c_2 получим следующие значения:

$$c_1 = \frac{\nu^*}{2G} \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1 \ell^2}{1 - \ell^2}; \quad c_2 = \frac{(\bar{P}_2 - \bar{P}_1)c^2}{2G(1 - \ell^2)} \quad (1.4)$$

где G – модуль сдвига материала пластинки, $\ell = \frac{c}{a} < 1$, $\nu^* = \frac{1-\nu}{1+\nu}$, $\frac{1}{3} < \nu^* < 1$,

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{h}, \quad \bar{P}_2 = \frac{P_2}{h}.$$

На основании (1.1) и (1.2) для внутренних усилий получим :

$$N_r = \frac{h}{1-\ell^2} \left[\bar{P}_2 \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) - \bar{P}_1 \left(\ell^2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \right] \quad c \leq r \leq a \quad (1.5)$$

$$N_\theta = \frac{h}{1-\ell^2} \left[\bar{P}_2 \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \bar{P}_1 \left(\ell^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) \right]$$

Возможность потери устойчивости плоской формы обусловлена наличием областей пластинки, где по крайней мере один из ненулевых усилий является сжимающим. В соответствии с этим исследуются границы областей кольцевой пластинки, где усилия N_r и N_θ , определяемые по (1.5), меняют знаки в зависимости от величин и знаков сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , а также других параметров задачи.

1. Пусть \bar{P}_1 и \bar{P}_2 одного знака.

Если $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$, формулы (1.5) представим в виде

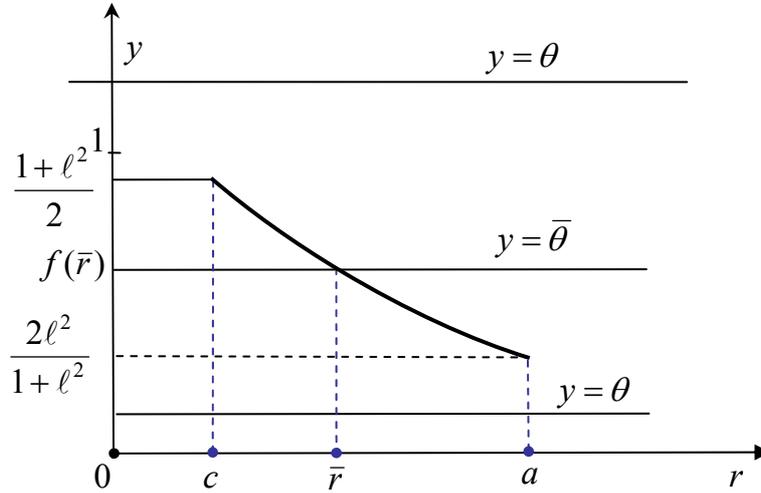
$$N_r(r) = \frac{\bar{P}_1 h}{1-\ell^2} \left[\theta \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) + \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right], \quad N_r > 0 \quad \text{при} \quad c \leq r \leq a$$

$$N_\theta(r) = -\frac{\bar{P}_1 h}{1-\ell^2} [f(r) - \theta] \cdot \frac{r^2 + c^2}{r^2} \quad \text{при} \quad c \leq r \leq a \quad (1.6)$$

$$\theta = \frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1}, \quad 0 < \theta < \infty$$

$f(r) = \frac{c^2 + r^2 \ell^2}{r^2 + c^2}$, $f'(r) = -\frac{2rc^2(1-\ell^2)}{(r^2 + c^2)^2} < 0$, следовательно, $f(r)$ уменьшается при $r \in [c, a]$.

График функции $f(r)$ приведен на фиг.1



Фиг.1

Рассмотрим три различных случая:

а) $\frac{1+l^2}{2} < \theta < \infty$

Из фиг. 1 и (1.6) следует, что $f(r) - \theta < 0$, $N_r > 0$, $N_\theta > 0$ в области кольца при $c \leq r \leq a$. В этом случае потеря устойчивости пластинки невозможна.

б) $0 < \theta < \frac{2l^2}{1+l^2}$. Из фиг. 1 и (1.6) следует, что $f(r) - \theta > 0$ и $N_r > 0$, $N_\theta > 0$,

с) $\frac{2l^2}{1+l^2} < \theta < \frac{1+l^2}{2}$. Из фиг. 1 видно, что существует некоторое значение переменной $r = \bar{r}$, $c < \bar{r} < a$, при котором $f(\bar{r}) - \bar{\theta} = 0$. В этом случае $N_\theta < 0$ при $r < \bar{r}$, следовательно, потеря устойчивости возможна.

В случае, если обе силы являются сжимающими $\bar{P}_1 < 0$, $\bar{P}_2 < 0$ из (1.6) следует, что $N_r < 0 \quad \forall r \in [c, a]$, $N_\theta > 0$ в области $r \in [c, \bar{r}]$, $N_\theta < 0$ в области $r \in [\bar{r}, a]$. Потеря устойчивости пластинки возможна.

Следует отметить, что в случае положительных $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$ сил при фиксированном значении \bar{P}_2 увеличение \bar{P}_1 приводит к расширению области с сжимающим усилием $N_\theta < 0$, а в случае $\bar{P}_1 < 0$, $\bar{P}_2 < 0$ при фиксированном значении \bar{P}_1 увеличение $|\bar{P}_2|$ приводит к расширению области с растягивающим усилием $N_\theta > 0$.

2. Допустим, что $\bar{P}_1 \neq 0$, $\bar{P}_2 \neq 0$ различного знака. В этом случае (1.5) представим в виде

$$N_r = \frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[(1+\theta) \frac{c^2}{r^2} - (\ell^2 + \theta) \right] \quad (2.1)$$

$$N_\theta = -\frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[\theta \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) + \ell^2 + \frac{c^2}{r^2} \right]$$

где $\frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1} = -\theta$, $0 < \theta < \infty$

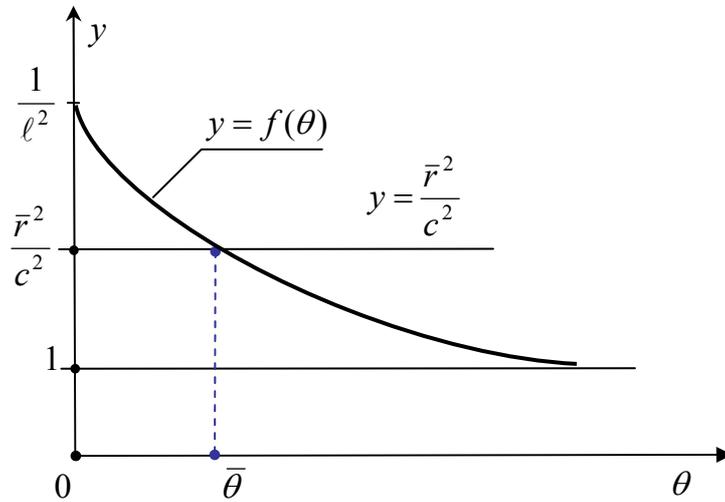
Усилие N_θ имеет противоположный от \bar{P}_1 знак для $\forall r \in [c, a]$: $N_\theta > 0$ при $\bar{P}_1 < 0$ и $N_\theta < 0$ при $\bar{P}_1 > 0$.

В области $[c, a]$ усилие N_r может менять знак. Представим N_r в виде

$$N_r = -\frac{h\bar{P}_1}{1-\ell^2} \left[f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} \right] \frac{c^2(\theta + \ell^2)}{r^2} \quad (2.2)$$

где $f(\theta) = \frac{1+\theta}{\theta + \ell^2}$ при $0 < \theta < \infty$, $f(\theta)$ – убывающая функция.

График функции $f(\theta)$ приведен на фиг. 2.



Фиг. 2

Из фиг. 2 видно, что в области $c < r < a$ всегда найдется такое значение $\theta = \bar{\theta}$, при котором $\frac{\bar{r}^2}{c^2} = f(\bar{\theta})$.

При $0 < \theta < \bar{\theta}$ $f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} > 0$, если $r < \bar{r}$. N_r имеет тот же знак, что и \bar{P}_1 .

При $\bar{\theta} < \theta < \infty$ $f(\theta) - \frac{r^2}{c^2} < 0$, если $r > \bar{r}$, N_θ имеет противоположный \bar{P}_1 знак.

Таким образом, независимо от знака \bar{P}_1 , в кольцевой пластинке имеются области, где усилия отрицательны, следовательно, возможна потеря устойчивости пластинки.

Отметим, что задачи устойчивости круговой кольцевой пластинки в двух предельных случаях: 1. Когда $P_1 = 0$, $P_2 < 0$ и 2. Когда $P_2 = 0$, $P_1 > 0$ рассмотрены в работах [4-5].

3. В случае $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_2 > 0$ для определения поперечного перемещения пластинки получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w = \frac{h \bar{P}_1}{(1 - \ell^2) D} \left\{ \left[(\theta - \ell^2) + \frac{c^2}{r^2} (1 - \theta) \right] \frac{d^2 w}{dr^2} + \right. \\ \left. + \left[(\theta - \ell^2) - \frac{c^2}{r^2} (1 - \theta) \right] \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

при условии $0 < \theta < \frac{1 + \ell^2}{2} < 1$ или $0 < \frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1} < \frac{1 + \ell^2}{2}$

Здесь $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость

пластинки.

Рассмотрим следующие случаи:

а) В случае $\theta - \ell^2 > 0$ или $\ell^2 < \theta < \frac{1 + \ell^2}{2}$ уравнение (3.1) представим в виде

$$\Delta \Delta w = \beta_1^2 \left[\left(1 + \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 - \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (3.2)$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{h \bar{P}_1}{(1 - \ell^2) D} (\theta - \ell^2), \quad d_1^2 = \frac{c^2 (1 - \theta)}{\theta - \ell^2}$$

Замена в (3.2) переменной $\beta_1 r = x_1$ приводит к уравнению

$$\Delta_x \Delta_x w - \left(1 + \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{d^2 w}{dx_1^2} - \left(1 - \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{1}{x_1} \frac{dw_1}{dx_1} = 0 \quad (3.3)$$

где

$$\Delta_x = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{d}{dx_1}$$

Обозначая $w'(x_1) = z$, уравнение (3.3) можно привести к виду

$$x_1 \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z \right]' - \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z \right] = 0 \quad (3.4)$$

где $\eta^2 = 1 + \beta_1^2 d_1^2$

$$\text{Интегрируя (3.4), получим } x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z = cx_1 \quad (3.5)$$

Общее решение (3.5) представляется в форме

$$z = C_1 I_\eta(x_1) + C_2 K_\eta(x_1) + C \left[I_\eta(x_1) \int K_\eta(x_1) dx_1 - K_\eta(x_1) \int I_\eta(x_1) dx_1 \right] \quad (3.6)$$

где $I_\eta(x_1)$, $K_\eta(x_1)$ – цилиндрические функции мнимого аргумента с действительным индексом [6].

Поперечное перемещение w пластинки будет

$$w = \int \left[C_1 I_\eta(x_1) + C_2 K_\eta(x_1) \right] dx_1 + \\ + C \int \left[I_\eta(x_1) \int K_\eta(x_1) dx_1 - K_\eta(x_1) \int I_\eta(x_1) dx_1 \right] dx_1 + E_o \quad (3.7)$$

б) Если $\theta - \ell^2 < 0$ или $0 < \theta < \ell^2$, уравнение (3.1) представим в виде

$$\Delta \Delta w + \beta_2^2 \left[\left(1 - \frac{d_2^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 + \frac{d_2^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (3.8)$$

где

$$\beta_2^2 = \frac{(\ell^2 - \theta) h \bar{P}_1}{(1 - \ell^2) D}, \quad d_2^2 = \frac{c^2 (1 - \theta)}{\ell^2 - \theta}$$

Обозначение $\beta_2 r = x_2$ приводит (3.8) к виду

$$x_2 \left[x_2^2 z'' + x_2 z' - (\xi^2 - x_2^2) z \right]' - \left[x_2^2 z'' + x_2 z' - (\xi^2 - x_2^2) z \right] = 0 \quad (3.9)$$

где

$$\xi^2 = 1 + \beta_2^2 d_2^2, \quad z = w'(x_2)$$

Решение уравнения (3.9) имеет вид

$$z = \bar{C}_1 J_\xi(x_2) + \bar{C}_1 Y_\xi(x_2) + \frac{C_o \pi}{2} \int \left[-J_\xi(x_2) \int Y_\xi(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + Y_\xi(x_2) \int J_\xi(x_2) dx_2 \right] \quad (3.10)$$

Прогиб w пластинки получается в виде

$$w = \int \left[\bar{C}_1 J_\xi(x_2) + \bar{C}_1 Y_\xi(x_2) dx_2 + \frac{C_o \pi}{2} \int \left[-J_\xi(x_2) \int Y_\xi(x_2) dx_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + Y_\xi(x_2) \int J_\xi(x_2) dx_2 \right] dx_2 + F_o \right] \quad (3.11)$$

Здесь $J_\xi(x_2)$, $Y_\xi(x_2)$ – функции Бесселя первого и второго рода.

с) Если $\theta = \ell^2 < \frac{1 + \ell^2}{2}$, для определения поперечного перемещения w пластинки получается уравнение типа Эйлера:

$$\Delta \Delta w - \frac{h\bar{P}_1 c^2 (1-\theta)}{(1-\ell^2)D} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Замена переменной $\frac{r}{a} = x$ ($\ell \leq x \leq 1$) приводит (3.12) к уравнению

$$w^{IV} + \frac{2}{x} w''' - \frac{1}{x^2} (1+\beta^2) w'' + (1+\beta^2) \frac{1}{x^3} w' - 0 \quad (3.13)$$

где $\beta^3 = \frac{c^2 P_1}{D}$.

Общее решение уравнения (3.13) имеет следующий вид:

$$w = A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^{1+k} + A_4 x^{1-k} \quad (3.14)$$

где $k = \sqrt{1+\beta^2}$

Решение (3.14) должно удовлетворять граничным условиям на контурах $r = c$ и $r = a$ ($x = \ell, x = 1$):

В случае защемленных контуров пластинки –

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = \ell \text{ и } x = 1 \quad (3.15)$$

В случае шарнирного закрепления контуров –

$$w = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при } x = \ell \text{ и } x = 1 \quad (3.16)$$

При условиях (3.15) для определения постоянных A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получается система линейных однородных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ 2A_2 + (1+k)A_3 + (1+k)A_4 = 0 \\ A_1 + \ell^2 A_2 + \ell^{1+k} A_3 + \ell^{1-k} A_4 = 0 \\ 2\ell A_2 + (1+k)\ell^k A_3 + (1-k)\ell^{-k} A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

А при условиях (3.16) – система

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ 2(1+\nu)A_2 + (1+k)(\nu+k)A_3 + (1-k)(\nu-k)A_4 = 0 \\ A_1 + \ell^2 A_2 + \ell \cdot \ell^k A_3 + \ell \cdot \ell^{-k} A_4 = 0 \\ 2\ell(1+\nu)A_2 + (1+k)(\nu+k)\ell^k A_3 + (1-k)\ell^{-k} A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Из условия существования нетривиального решения (3.17) и (3.18) получим соответственно

$$-4k\ell + (1+k^2)(1-\ell^2)\text{sh}(k \ln \ell) + 2k(1+\ell^2)\text{ch}(k \ln \ell) = 0 \quad (3.19)$$

$$2k(1+\nu)^2 \left[2\ell - (1+\ell^2)\text{ch}(k \ln \ell) \right] + (1-\ell^2) \left[(1-k^2)(\nu^2 - k^2) - \right. \\ \left. - 2(1+\nu)(\nu+k^2) \right] \text{sh}(k \ln \ell) = 0 \quad (3.20)$$

Решая трансцендентные уравнения (3.19) и (3.20) относительно k и определив минимальное большее единицы значение вещественного корня, можем определить и критическое значение силы $(\bar{P}_1)_{\text{кр}}$, при котором кольцевая пластинка с

защемленными или шарнирно закрепленными контурами теряет устойчивость плоской формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575с.
2. Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, 807с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1971. 334с.
4. Хачатрян А.А. Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1966. Т.19. №6. С. 9-16.
5. Хачатрян А.А. Об устойчивости кольцевой пластинки под действием растягивающих сил, приложенных по внутреннему контуру. Изв. НАН Армении, Механика. 1997. Т. 50. №2. С. 46-53.
6. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: Наука, 1949.

Министерство Науки и Образования РА
Русско-Армянский (Славянский)
Государственный университет (РАУ)

Поступила в редакцию
31.03.2006

УДК 539.3

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ
 КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ
 ПЛАСТИЧНОСТИ

Варданян С.В.

Ս.Վ. Վարդանյան

Արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը
 լրիվ պլաստիկության պայմանի դեպքում

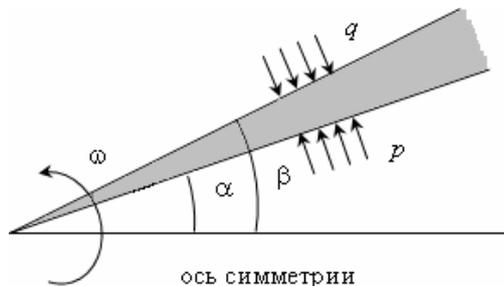
Ուսումնասիրվում է արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը լրիվ պլաստիկության պայմանի դեպքում: Ստացված է գծային արագության սահմանային արժեքը, որտեղից սկսված առաջանում է պլաստիկական հոսք: Որոշված է լարումների դաշտը: Ուսումնասիրված է դեֆորմացիաների արագությունների դաշտը:

S. V. Vardanyan

The plastic yielding of rapidly rotatory conical pipe with full plasticity condition

The plastic yielding of rapidly rotatory conical pipe with full plasticity condition are considered. The correspondent limiting value of linear velocity is defined. We have obtained relationships for stresses tensor. The field of displacements velocities is investigated.

Исследуется пластическое течение быстро вращающейся конической трубы при условии полной пластичности. Определено предельное значение линейной скорости, после чего возникает пластическое течение. Получены выражения тензора напряжений. Исследовано поле скоростей деформаций.



Пластическое течение быстро вращающейся конической трубы при условии пластичности Губера-Мизеса было исследовано М.А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется предельное пластическое состояние той же задачи при условии полной пластичности.

Для исследования пластического состояния конической трубы введем

сферическую систему координат. Во вращающейся трубе центробежная сила, направленная перпендикулярно к оси вращения, будет:

$$R = v\omega^2\rho \quad (1)$$

где ω — угловая скорость вращения, v — масса единицы объема материала трубы, ρ — расстояние от оси вращения. Массовые силы можно представить в форме:

$$R_r = R \sin \vartheta, \quad R_\vartheta = R \cos \vartheta \quad (2)$$

Предположим, что на внутренней и внешней поверхностях трубы имеем условия:

$$\sigma_\vartheta = p \text{ при } \vartheta = \alpha \text{ и } \sigma_\vartheta = q \text{ при } \vartheta = \beta \quad (3)$$

Условие полной пластичности, описываемое в рамках условия пластичности максимального касательного напряжения и определяющееся соответствием напряженного состояния ребра призмы Треска будет [2]:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k, \quad k = \text{const} \quad (4)$$

При условиях (4) можно записать:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2kn_1n_2 \\ \sigma_\vartheta &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, \quad \sigma_{\vartheta\varphi} = 2kn_2n_3 \\ \sigma_\varphi &= \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, \quad \sigma_{\varphi r} = 2kn_1n_3, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_\varphi}{3}\end{aligned}\quad (5)$$

Исходя из осесимметричности деформаций, имеем $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\vartheta\varphi} = 0$. Далее предположим, что рассматриваемая труба имеет малую конусность, тогда по всему объему трубы имеет место $\sigma_{r\vartheta} = 0$.

Следовательно, из (5) имеем три случая:

$$n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1 \quad (a)$$

$$n_1 = n_3 = 0, \quad n_2 = 1 \quad (б)$$

$$n_2 = n_3 = 0, \quad n_1 = 1 \quad (в)$$

В случае (а) имеем $\sigma_r = \sigma_\vartheta$, $\sigma_\varphi = \sigma_r + 2k$ и дифференциальные уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) + v\omega^2 r \sin^2 \vartheta &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + v\omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Введем функцию напряжений следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial r \partial \vartheta} + v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta \quad (7)$$

Уравнения равновесия в этом случае автоматически удовлетворяются, а из условий пластичности $\sigma_r = \sigma_\vartheta$, $\sigma_\varphi = \sigma_r + 2k$ получим:

$$-\frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta} + \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial r \partial \vartheta} + v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 2k \quad (8)$$

Введем вспомогательную функцию следующим образом: $\Phi = r\varphi(\rho)$, $\rho = r \sin \vartheta$ и для (8) получим:

$$\rho^2 \varphi'' + \rho \varphi' - \varphi - 2k\rho + v\omega^2 \rho^3 = 0 \quad (9)$$

$$\text{откуда получаем: } \varphi(\rho) = C_1 \rho + C_2 \rho^{-1} - \frac{k}{2} \rho - \frac{v\omega^2}{8} \rho^3 + k \rho \ln \rho \quad (10)$$

Следовательно, для тензора напряжений будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_\vartheta &= 2k \ln(r \sin \vartheta) - \frac{1}{2} v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_\varphi &= 2k(1 + \ln(r \sin \vartheta)) - \frac{1}{2} v\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C\end{aligned}\quad (11)$$

Предположим, что чисто пластическое состояние появляется, начиная с минимального значения ω_0 с поверхности $r = r_0$. Пластическая область из поверхности $r = r_0$ распространяется по направлению к вершине трубы, т.е. при $\omega > \omega_0$ имеем $r < r_0$. Если для любого значения ω_* область пластичности определяется поверхностью $r = r_*$, то из решения (11) будем иметь:

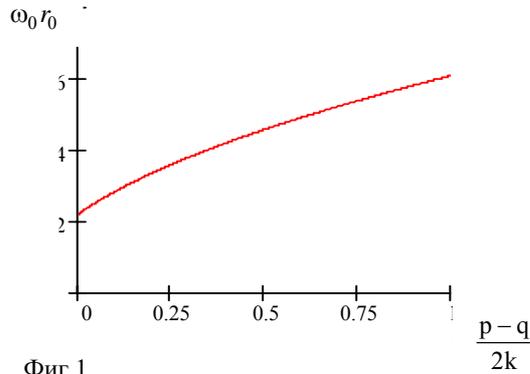
$$\omega_0 r_0 = \omega_* r_* \quad (12)$$

из первого граничного условия (3) получим:

$$\sigma_{\vartheta} = 2k \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} v \omega_0^2 r_0^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p \quad (13)$$

а из второго граничного условия можно определить $\Omega^2 = \omega_0^2 r_0^2$

$$\omega_0 r_0 = \sqrt{\frac{4 \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (14)$$



Фиг.1

при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$ формула (14) определяет кривую, показанную на фиг. 1

а для тензора напряжений окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{\vartheta} &= 2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \right) \\ \sigma_{\varphi} &= 2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) + 1 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Следует отметить, что решение (15) при $p = q = 0$, если принимать $k = \frac{\sqrt{3}}{2} k$, совпадает с решением М.А. Задояна [1], где было принято условие пластичности Губера-Мизеса. Полученное решение можно было получить сразу из уравнения равновесия.

Для определения поля скоростей деформаций рассмотрим условие несжимаемости материала и условия изотропии:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + 2 \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta = 0 \quad (16)$$

$$\varepsilon_{r\vartheta} (\sigma_r - \sigma_{\vartheta}) = 0, \quad \varepsilon_{r\varphi} (\sigma_{\varphi} - \sigma_r) = 0, \quad \varepsilon_{\vartheta\varphi} (\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi}) = 0 \quad (17)$$

при (а) из (17) следует, что $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\vartheta\varphi} = 0$. Функцию перемещений ищем в виде:

$u = r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $v = r \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$. Тогда из условия несжимаемости имеем:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (1 + 2 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad (18)$$

представляя функцию Ψ в форме $\Psi = X(r)Y(\vartheta)$ будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} = C \\ \frac{Y''}{Y} + (1 + 2 \operatorname{ctg} \vartheta) \frac{Y'}{Y} = -C \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим случай (б). В этом случае из (5), (17) получим $\sigma_r = \sigma_\varphi$, $\sigma_\vartheta = \sigma_r + 2k$. Из уравнения равновесия для тензора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\varphi &= 2k \ln \left(\frac{r}{\sin \vartheta} \right) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_\vartheta &= 2k \left(1 + \ln \left(\frac{r}{\sin \vartheta} \right) \right) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \end{aligned} \quad (20)$$

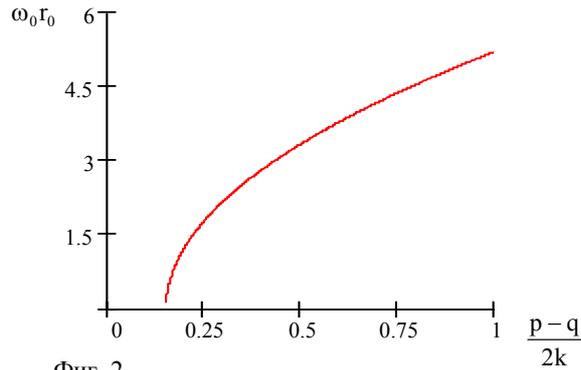
удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\varphi &= -2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \right) \\ \sigma_\vartheta &= -2k \left(\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

причем для $\omega_0 r_0$ имеем:

$$\omega_0 r_0 = \sqrt{\frac{4 \left(\frac{p-q}{2k} - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (22)$$

которое при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$ определяет кривую, показанную на фиг. 2.



Фиг. 2

Из (6) и (17) имеем: $\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta r} = 0$. Вводя функцию Φ следующим образом:

$$u = r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v = -r \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad \Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \quad (23)$$

в условие несжимаемости:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0 \quad (24)$$

подставляя выражение $\Phi = X(r)Y(\vartheta)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} &= C \\ \frac{Y''}{Y} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{Y'}{Y} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} &= C \end{aligned} \quad (25)$$

В случае (в) имеем $\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi$, $\sigma_r = \sigma_\vartheta + 2k$. Для тензора напряжений имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= 2k(1 + 2 \ln r) - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \\ \sigma_r &= 4k \ln r - \frac{1}{2} v \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C \end{aligned} \quad (26)$$

из граничных условий получим:

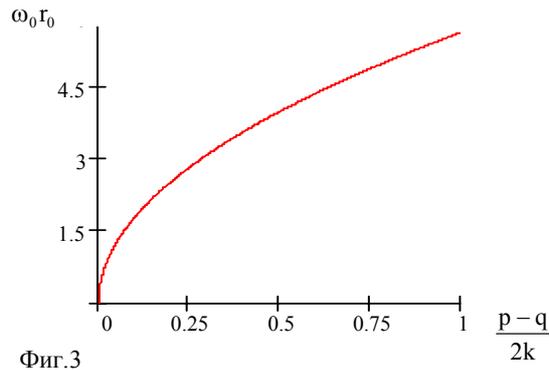
$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= -\frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} (p - q) \\ \sigma_r &= -\frac{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} (p - q) + 2k \end{aligned} \quad (27)$$

где для $\omega_0 r_0$ имеем:

$$\omega_0 r_0 = 2 \sqrt{\frac{\frac{p-q}{2k}}{\frac{v}{k} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)}} \quad (28)$$

которому соответствует кривая, показанная на фиг. 3.

где $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{v}{k} = \frac{1}{2}$.



Для определения поля скоростей деформаций имеем: $\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta r} = 0$. Скорости перемещений представим в форме:

$$u = -r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = r \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \quad (29)$$

условие несжимаемости материала имеет вид:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad (30)$$

Разделяя переменные $\Psi = X(r)Y(\vartheta)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} r^2 + 4r \frac{X'}{X} &= C \\ \frac{Y''}{Y} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{Y'}{Y} &= C \end{aligned} \quad (31)$$

Решение первых уравнений систем (19), (25), (31) имеет вид:

$$X(r) = C_1 r^{-\frac{3+\sqrt{9+4C}}{2}} + C_2 r^{-\frac{3-\sqrt{9+4C}}{2}} \quad (32)$$

вторые уравнения при подстановке $\varphi(\vartheta) = \frac{Y'}{Y}$ приводятся к дифференциальному уравнению типа Риккати:

$$\varphi' + \varphi^2 + f(\vartheta)\varphi + g(\vartheta) = 0 \quad (33)$$

где

при (а) $f(\vartheta) = 1 + 2\operatorname{ctg} \vartheta$, $g(\vartheta) = C$

при (б) $f(\vartheta) = \operatorname{ctg} \vartheta$, $g(\vartheta) = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - C$

при (в) $f(\vartheta) = \operatorname{ctg} \vartheta$, $g(\vartheta) = -C$

при малых ϑ , принимая $\operatorname{ctg} \vartheta \approx \frac{1}{\vartheta}$, $\sin \vartheta \approx \vartheta$, из вторых уравнений (19), (25), (31)

получим: для (18) – вырожденное гипергеометрическое дифференциальное уравнение и для (25), (31) – бесселевые дифференциальные уравнения. Во всех трех случаях удельная осевая сила, приходящаяся на единицу площади, значительно

меньше относительно минимального значения $\frac{\sigma_\varphi}{2k}$, действующего в осевом сечении трубы.

Литература

1. Задоян М.А. Пластическое течение быстровращающейся конической трубы. // Докл. НАН РА. 2001. Т.101. N2. С. 122-127.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.12.2005

УДК 539.3: 537.228.1

О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ
ТОНКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան
Բարակ պիեզաէլեկտրիկ սեպի համար էլեկտրաառաձգականության չորս
եզրային խնդիրների լուծման մասին

Աշխատանքում Մելլինի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ կառուցված է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը բարակ պիեզաէլեկտրիկ սեպի համար, որի մի եզրին տրված են լարումների, իսկ մյուս եզրին տեղափոխումների արժեքները: Սեպի եզրերին տրված են նաև էլեկտրական չորս հնարավոր պայմաններ: Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների (լարումներ, էլեկտրական ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչներ) վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում: Կառուցված են սեպի բացվածքի անկյան մեծությունից էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների եզակիության ցուցչի կախվածության գրաֆիկները:

A.G.Avetisian, G.G.Nersisian, A.M.Sargsian

On solution of four boundary problems of electro-elasticity for thin piezoelectric wedge

In the paper with the help of Melline's generalized integral transformation the solution of a plane combined problem of electroelasticity for a thin piezoelectric wedge is built. On one bound of the wedge the stresses values are given, and on the other one the displacement values are given. On the bounds of the wedge four possible electric conditions are also given.

The behaviour of electroelastic field characteristics (stresses, components of electric induction vector) in the vicinity of the wedge top. Graphics of singularity degrees dependence of electroelastic field characteristics from the angle of the wedge opening are built.

В работе с помощью обобщенного интегрального преобразования Меллина строится решение плоской связанной задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. На одной границе клина заданы значения напряжений, а на другой - значения перемещений. На границах клина заданы также четыре возможных электрических условия. Исследуется поведение характеристик электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) в окрестности вершины клина. Построены графики зависимости степени сингулярности характеристик электроупругого поля от угла раствора пьезоэлектрического клина.

Вопросу об изучении сингулярности напряжений и компонентов вектора электрической индукции в окрестности вершины пьезоэлектрического клина, находящегося в состоянии плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, посвящено несколько работ последних лет.

При помощи местного решения в работах [1-4] изучена сингулярность характеристик электроупругого поля в окрестности тонкого пьезоэлектрического клина, обладающего прямолинейной анизотропией общего вида. Выявлено влияние заданных на границах клина электромеханических условий на поведение этих характеристик.

Представляя решение уравнений равновесия в перемещениях в виде интегралов Меллина, в работах [5-7] получены решения трех плоских задач электроупругости для пьезокерамического клина (трансверсально-изотропное тело).

В работе [8] предложен метод решения плоских краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина, на границах которого заданы разнообразные электромеханические условия. Метод основан на применении

обобщенного интегрального преобразования Меллина, впервые, по-видимому, введенное в работах [9, 10], где исследована сингулярность напряжений в составном произвольно анизотропном теле.

В данной работе с помощью предложенного в работе [8] метода получено решение четырех краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина ($0 \leq r < \infty$, $0 < \theta \leq \theta_1$) и исследовано поведение характеристик электроупругого поля вблизи его вершины. Предполагается, что вырезанный из пьезоэлектрического кристалла клин, в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Начало полярной r , θ , z и декартовой систем координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось z направлена нормально к этой плоскости.

Как известно [11, 12], функции напряжений $\varphi(x, y)$ и электрической индукции $\psi(x, y)$ при отсутствии объемных сил и электрических зарядов удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$4\pi L_4 \varphi(x, y) - L_3 \psi(x, y) = 0, \quad L_3 \varphi(x, y) + L_2 \psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

где

$$L_4 = s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_3 = -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_2 = \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

s_{22}, \dots (коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots (коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \dots (пьезоэлектрические модули.

Общее решение системы (1) записывается в виде [11-13]

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(z_j)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(z_j) \quad (2)$$

где $\varphi_j(z_j)$ (аналитические функции своих аргументов, штрихом обозначена производная по обобщенному комплексному аргументу $z_j = x + \mu_j y$, μ_j (неравные между собою корни алгебраического уравнения шестого порядка

$$4\pi l_4(\mu) l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \quad (3)$$

$$\mu_j = \sigma_j + i\nu_j, \quad f_j = -l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j) \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$\mu_4 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_5 = \bar{\mu}_2, \quad \mu_6 = \bar{\mu}_3; \quad \nu_1 > 0, \quad \nu_2 > 0, \quad \nu_3 > 0$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & (j=1, 2, 4, 5) \\ l_3(\mu_j)/4\pi l_4(\mu_j) & (j=3, 6) \end{cases}$$

Полиномы $l_k(\mu)$ ($k=2, 3, 4$) получаются из L_k заменой $\partial^k/\partial x^k$ на единицу, а $\partial^k/\partial y^k$ (на μ^k).

Принимается, что корни (3) не являются одновременно корнями уравнений $l_k(\mu) = 0$ ($k=2, 3, 4$).

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции выражаются через функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y, \quad D_x = \partial \psi / \partial y, \quad D_y = -\partial \psi / \partial x. \quad (4)$$

На границах клина заданы следующие механические

$$\begin{aligned} u_r(r, 0) = u_0(r), \quad u_\theta(r, 0) = v_0(r) \\ \sigma_\theta(r, \theta_1) = \sigma_1(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta_1) = \tau_1(r) \end{aligned} \quad (5)$$

и электрические условия, записанные в одном из видов

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad V(r, \theta_1) = V_1(r) \quad (5.1)$$

$$D_\theta(r, 0) = D_0(r), \quad D_\theta(r, \theta_1) = D_1(r) \quad (5.2)$$

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad D(r, \theta_1) = D_1(r) \quad (5.3)$$

$$D_\theta(r, 0) = D_0(r), \quad V(r, \theta_1) = V_1(r) \quad (5.4)$$

где $V(r, \theta)$ (потенциал электрического поля.

Учитывая уравнения состояния, условие потенциальности электрического поля и соотношения (4), в полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), & \sigma_\theta &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j) \\ \tau_{r\theta} &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) \varphi_j''(z_j) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & \frac{\partial V}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j \varphi_j''(z_j) \\ D_\theta &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j), & D_r &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j) \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_j(\theta) &= \cos \theta + \mu_j \sin \theta, & b_j(\theta) &= -\sin \theta + \mu_j \cos \theta \\ M_j &= s_{11} \mu_j^2 - s_{16} \mu_j + s_{12} - f_j (g_{11} \mu_j - g_{21}) / 4\pi \\ N_j &= s_{12} \mu_j - s_{26} + s_{22} \mu_j^{-1} - f_j (g_{12} - g_{22} \mu_j^{-1}) / 4\pi \\ m_j &= g_{11} \mu_j^2 - g_{16} \mu_j + g_{12} + f_j (\eta_{11} \mu_j - \eta_{12}) \\ c_j(\theta) &= M_j \cos \theta + N_j \sin \theta, & d_j(\theta) &= N_j \cos \theta - M_j \sin \theta. \end{aligned}$$

Для решения краевых задач (1)-(6) используется обобщенное интегральное преобразование Меллина аналитической функции $f(z) = f(x + \mu y)$ (μ (некоторая ком-плексная константа), впервые, по-видимому, введенное в работах [9, 10], где исследована сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле, находящемся в состоянии обобщенной плоской деформации (в частности, плоское деформированное или обобщенное плоское напряженное состояние)

$$\begin{aligned} \langle f(z) \rangle &= \int_0^\infty f(z) r^{s-1} dr = a^{-s}(\theta) \bar{f}(s) \\ a(\theta) &= \cos \theta + \mu \sin \theta, \quad \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(z) z^{s-1} dz, \\ f(z) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle f(z) \rangle r^{-s} ds \end{aligned} \quad (7)$$

Если $f(z)$ аналитична в некотором секторе $\theta_0 < \theta < \theta_*$, $0 < r \leq \infty$ и $f(z) = O(r^\xi)$ при $r \rightarrow 0$, $f(z) = O(r^\eta)$ при $r \rightarrow \infty$, то $\bar{f}(s)$ существует в полосе $-\xi < c < -\eta$ и не зависит от θ в заданном секторе.

Будем искать решение (1)-(6), удовлетворяющее следующим условиям: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_r, D_\theta, \partial u_r / \partial r$ и $\partial u_\theta / \partial r$ при $r \rightarrow 0$ имеют порядок $O(r^{-1+\alpha})$, а при $r \rightarrow \infty$ исчезают как $O(r^{-1-\beta})$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Тогда в полосе $1-\alpha < \text{Re } s < 1+\beta$ существует преобразование Меллина.

Применяя обобщенное интегральное преобразование Меллина к выражениям (6), получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle \sigma_\theta \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \\ \langle \tau_{r\theta} \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \\ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \quad (8) \\ \langle D_\theta \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle D_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}_j(s) = \int_0^\infty \varphi_j''(z_j) z_j^{s-1} dz_j.$$

Продифференцировав $u(r, 0)$, $v(r, 0)$, $V(r, 0)$ и $V(r, \theta_1)$ по r и применив к граничным условиям (5)-(5.1), (5)-(5.2), (5)-(5.3), (5)-(5.4) преобразование Меллина (предполагается, что функции $V_0(r)$, $V_1(r)$, $D_0(r)$ и $D_1(r)$ удовлетворяют требованиям преобразования Меллина), в каждом конкретном случае получим систему алгебраических уравнений относительно $\bar{\varphi}_j(s)$

$$\sum_{j=1}^6 B_{lj} \bar{\varphi}_j(s) = T_l(s), \quad (l = 1, 2, \dots, 6) \quad (9)$$

где под $T_l(s)$ подразумеваются преобразования соответствующих граничных условий. Коэффициенты B_{lj} зависят от граничных условий.

В случае граничных условий (5)-(5.1) имеем

$$T_{11}^* = \left\| \langle du_0(r)/dr \rangle, \langle dv_0(r)/dr \rangle, \langle \sigma_1(r) \rangle, \langle -\tau_1(r) \rangle, \langle dV_0(r)/dr \rangle, \langle dV_1(r)/dr \rangle \right\| \quad (10)$$

здесь звездочка означает транспонирование.

Матрица коэффициентов B_{lj} в данном случае имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_4 & M_5 & \gamma_3 M_3 & \gamma_6 M_6 \\ N_1 & N_2 & N_4 & N_5 & \gamma_3 N_3 & \gamma_6 N_6 \\ a_1^{2-s} & a_2^{2-s} & a_4^{2-s} & a_5^{2-s} & \gamma_3 a_3^{2-s} & \gamma_6 a_6^{2-s} \\ b_1 a_1^{1-s} & b_2 a_2^{1-s} & b_4 a_4^{1-s} & b_5 a_5^{1-s} & \gamma_3 b_3^{2-s} & \gamma_6 b_6^{2-s} \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 & m_{33} & m_{66} \\ m_1 a_1^{1-s} & m_2 a_2^{1-s} & m_4 a_4^{1-s} & m_5 a_5^{1-s} & m_{33} a_3^{1-s} & m_{66} a_6^{1-s} \end{array} \right\| \quad (11)$$

где

$$a_j = a_j(\theta_1), \quad b_j = b_j(\theta_1), \quad c_j = c_j(\theta_1), \quad d_j = d_j(\theta_1)$$

$$m_{33} = \gamma_3(g_{11}\mu_3^2 - g_{16}\mu_3 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12}$$

$$m_{66} = \gamma_6(g_{11}\mu_6^2 - g_{16}\mu_6 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_6 - \eta_{12}$$

Заменяя в пятой и шестой строках матрицы (11) m_j на f_j , а пятый и шестой элемент матрицы (10) на $\langle -D_0(r) \rangle$ и $\langle -D_1(r) \rangle$, получим коэффициенты и правые части системы (9) для граничных условий (5)-(5.2).

Для получения коэффициентов B_{ij} и правых частей системы (9), в случае граничных условий (5)-(5.3) и (5)-(5.4) соответствующая замена совершенно очевидна.

Определяя $\bar{\varphi}(s)$ из (9) и подставляя в (8), получим выражения для трансформант компонент напряжения и вектора электрической индукции

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle \sigma_\theta \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle \tau_{r\theta} \rangle &= - \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle D_\theta \rangle &= - \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) \\ \langle D_r \rangle &= \sum_{l=1}^6 T_l \left[\sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s). \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Delta_1(s)$ (определитель матрицы (11), A_{ij} (алгебраические дополнения B_{ij}). Аналогичные выражения записываются и при других граничных условиях.

Характеристики электроупругого поля находим из трансформант $\langle \sigma_r \rangle, \dots, \langle D_r \rangle$ (которые определены в той же области, что и преобразования Меллина внешних воздействий) с помощью обратного преобразования Меллина, путь интегрирования которого лежит в полосе

$$\max_{\operatorname{Re} s_k < 1} (\operatorname{Re} s_k) < c < \min_{\operatorname{Re} s_k \geq 1} (\operatorname{Re} s_k) \quad (13)$$

где s_k ($k=1, 2, \dots$) (полюсы $\langle \sigma_r \rangle, \dots, \langle D_r \rangle$).

Явный вид $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_\theta$ и D_r может быть получен численным интегрированием, но для их асимптотического исследования при $r \rightarrow 0$ дополним путь интегрирования (12) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. В результате получим [10, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left(\langle \sigma_r \rangle r^{-s}, s_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} G_{rkn}(\theta) (\ln r)^n \\ &===== \\ D_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left(\langle D_\theta \rangle r^{-s}, s_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} H_{rkn}(\theta) (\ln r)^n \end{aligned} \quad (14)$$

где N_k (кратность полюсов s_k , а $G_{km}(\theta), \dots, H_{km}(\theta)$ - гладкие функции угла θ , причем $\text{Re } s_k < 1$.

Если внешние воздействия равны нулю в некоторой окрестности вершины клина, то в области $\text{Re } s < 1$ нет полюсов $T_l(s)$ и все s_k этой области находятся среди нулей $\Delta(s)$. Следовательно, сингулярные члены в (14) определяются только нулями $\Delta(s)$ в полосе $0 < \text{Re } s < 1$. Если $\Delta(s)$ имеет нули только первого порядка, то в выражениях (13) отсутствуют множители $\ln r$.

Заметим, что при отсутствии пьезоэффекта $g_{ij} = 0$ каждая из рассматриваемых задач распадается на две независимые задачи: упругую задачу для анизотропного клина $L_4\varphi(x, y) = 0$ с граничными условиями (5) и электростатическую задачу $L_2\psi(x, y) = 0$ с одним из граничных условий (5.1)-(5.4).

При этом вместо (2) и (3) будем иметь

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_4(z_4) + \varphi_5(z_5) \quad (2')$$

$$\psi(x, y) = \psi_3(z_3) + \psi_6(z_6)$$

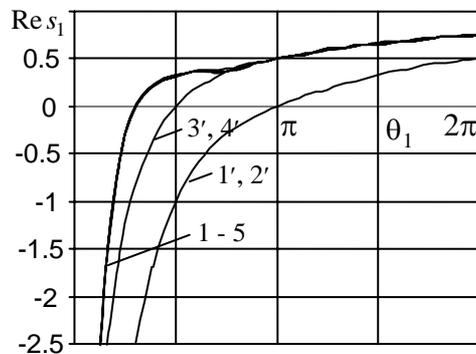
$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0 \quad (3')$$

а матрица (11) становится ступенчатой с диагональными клетками A_4 и A_2

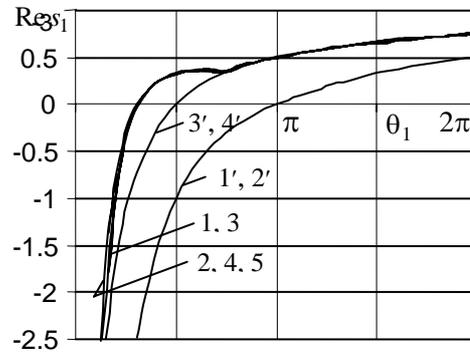
$$\begin{vmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

где A_4 (матрица четвертого порядка, A_2 (второго порядка. Корни $l_4(\mu) = 0$ зависят только от упругих коэффициентов, а корни $l_2(\mu) = 0$ (только от коэффициентов диэлектрической восприимчивости.

С целью выяснения влияния типа граничных условий на поведение



Фиг. 1



Фиг. 2

характеристик электроупругого поля вблизи вершины клина было проведено численное исследование зависимости $\text{Re } s_1$ от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия (фиг. 1) или бифталата рубидия (фиг.2). Электро-механические характеристики заимствованы из [14]. Номера кривых соответствуют номерам электрических граничных условий (кривые 1-4). Там же представлены соответствующие кривые для чисто упругой (кривая 5) и электростатических задач (кривые 1(-4) при отсутствии пьезоэффекта ($g_{ij} = 0$)).

Как следует из фиг. 1 и 2, кривые зависимости $\text{Re } s_1$ от угла θ_1 для четырех краевых задач электроупругости и чисто упругой задачи почти полностью

совпадают, т.е. электрические граничные условия в данном случае почти не влияют на поведение характеристик электроупругого поля в окрестности вершины клина. Между тем, в работах [1-4], где на обеих границах клина были заданы или напряжения, или перемещения и соответствующие электрические граничные условия, показано, что при смешанных электрических граничных условиях такое влияние существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. ¹1. С. 34-39.
2. Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященной 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
3. Саргсян А.М. Об особенностях связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2002. Т.55. ¹2. С. 36-41.
4. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. ¹3. С. 74-81.
5. Мелкумян С.А. Первая основная задача для пьезоэлектрического клина. // В сб.: Вопросы оптимального уравнения, устойчивости и прочности механических систем. Ереван. 1997. С. 226-229.
6. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами. // Докл. НАН Армении. 1999. ¹1. С. 45-51.
7. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина. // Докл. НАН Армении. 1999. ¹2. С. 172-177.
8. Саргсян А.М. О решении краевых задач электроупругости для клиновидных областей. // Докл. НАН Армении.
9. Михайлов С.Е. Об одной плоской задаче для двух соединенных анизотропных клиньев. // МТТ. 1978. ¹4. С. 155-160.
10. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. // МТТ. 1979. ¹6. С. 33-42.
11. Вековищева И.А. Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. ¹2. С. 85-89.
12. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. ¹5. С. 45-53.
13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
14. Акустические кристаллы (под редакцией Шаскольской М.П.). М.: Наука. 1982. 632 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.2005

УДК 539.3:537.2

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И МЯГКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

(Исследование характеристического уравнения – Часть II)

Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А.

Զ. Ն. Դանոյան, Ն. Զ. Դանոյան, Գ.Ա.Մանուկյան

Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները այեզոէլեկտրիկ հիմքով և փափուկ դիէլեկտրիկ շերտով շերտավոր համակարգում (Բնութագրիչ հավասարման հետազոտումը – Մաս II)

Աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6, 4, 622, 422, 6mm, 4mm, դասի այեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ իզոտրոպ դիէլեկտրիկ շերտով համակարգում կախված համակարգի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից: Մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը հետազոտվում է փափուկ շերտի դեպքում, երբ շերտում ծավալային առաձգական ալիքների տարածման արագությունը ավելի փոքր է հիմքում ծավալային էլեկտրաառաձգական ալիքների տարածման արագությունից: Հետազոտությունը հենվում է [13] աշխատանքում բերված մակերևութային ալիքի էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցի վարքի ուսումնասիրության վրա: Մասնավորապես ցույց է տրված ճեղքային տիպի Լյավի ալիքների գոյությունը, որը պայմանավորված է զուտ այեզոէլեկտրական էֆեկտով: Ուսումնասիրված են Լյավի ալիքի կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները: Քննարկված է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների կապը Լյավի սովորական ալիքների և Գուլյևա-Բլյուստեյնի ալիքների հետ: Ներկա աշխատանքը հանդիսանում է [14] աշխատանքի շարունակությունը և վերաբերում է այնտեղ չքնարկված դեպքերին:

Z.N.Danoyan., N. Z Danoyan, G.A.Manukyan

The surface electroelastic Love's waves in a layered system with a piezoelectric substructure and soft dielectric isotropic layer

(The investigation of the characteristic equation–Part II)

In the article is investigated the existence and the behaviour Love's surface electroelastic waves in a layered system with a piezoelectric substructure if the class 6,4, 6mm, 4mm, 622, 422 and a soft dielectric isotropic layer with a finite arbitrary thickness depending on the physicommechanical properties of the system and the relative thickness of the layer. The characteristic equation at the surface wave is investigated in the case of the soft layer when the propagation velocity of volume clastic waves in the layer is less than the propagation velocity of the volume electroelastic waves in the substructure. In particular, it is shown that the existence of split waves of Love's type due to solely piezoelectrical effect. The structure and the behaviour of Love's modes are studied. This work is continuation of the work [14].

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 и изотропного диэлектрического слоя произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. Характеристическое уравнение искомой поверхностной волны исследуется в случае мягкого слоя, когда скорость объемной упругой волны в слое меньше скорости объемной электроупругой волны в подложке. Исследование основано на свойствах коэффициента электроупругой связи поверхностной волны, приведенных в работе [13]. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых. Обсужден вопрос связи электроупругих волн Лява с обычными волнами Лява и волнами Гулльева – Блюстейна. Настоящая работа является продолжением работы [14] и относится к необсуждаемым там случаям.

Введение. Известно, что [1,2] в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться

сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява существуют только в случае мягкого слоя, когда объемная скорость распространения упругой волны в слое S_{02} меньше, чем скорость распространения электроупругой объемной волны в подложке S_{01} . $S_{02} < S_{01}$, причем скорость V_{0L} волны Лява удовлетворяет условию $S_{02} < V_{0L} < S_{01}$. Представляет интерес исследование волн Лява в слоистых системах, когда подложка или слой является пьезоэлектриком [3-10]. В [3,4] исследован вопрос существования волн Лява, когда слой является диэлектриком, а подложка—пьезоэлектриком. В [5-7, 9] рассмотрена электроупругая задача Лява, когда слой является проводником. В [7] рассматривается случай, когда слой является пьезоэлектриком, а подложка—диэлектриком. В работе [13] исследовано поведение коэффициента электро-механической связи $R(k)$ для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 при наличии диэлектрического слоя.

В настоящей работе на основе результатов работ [13,14] исследуются существование и поведение электроупругих волн Лява для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 с изотропным диэлектрическим мягким слоем, когда скорость объемных упругих волн в слое S_2 меньше скорости объемных электроупругих волн в подложке S_1 , дополняя и уточняя результаты работ [3,4]. Она является продолжением работы [14] и относится к необсуждаемым там случаям.

1. Основные соотношения задачи. Пусть слоистая система, состоящая из диэлектрического изотропного слоя толщины h и полубесконечной пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422, находящихся в жестком контакте, отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Ось Ox_3 совпадает с главной осью симметрии (L_4 или L_6) пьезоэлектрической подложки и лежит в плоскости $x_1 = 0$ границы раздела слоя и подложки, ось Ox_1 направлена в глубь подложки. Вне слоистой системы (в области $x_1 \leq -h$) предполагается вакуум или диэлектрическая среда, которая граничит со слоем без акустического контакта. Границы слоя $x_1 = 0$ и $x_1 = -h$ электрически свободны (неметаллизированны), граница $x_1 = -h$ механически свободна.

Согласно [13,14], скорость сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява $V = V_L$ определяется выражением

$$V = V(k) = \omega / p, \quad \omega > 0, \quad p > 0 \quad (1.1)$$

и удовлетворяет характеристическому уравнению поверхностной волны:

$$\beta_1(V) = c\beta_2(V)\text{tg}[k\beta_2(V)] + R(k) \quad \text{при } V \geq S_2 \quad (1.2)$$

$$\beta_2(V) = -c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \quad \text{при } V \leq S_2 \quad (1.3)$$

где

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\epsilon}_2 (\bar{\epsilon}_2 \text{th}k + 1) - K_1^2 \bar{\epsilon}_1 (\bar{\epsilon}_2 + \text{th}k)}{\bar{\epsilon}_2 (\bar{\epsilon}_2 \text{th}k + 1) + \bar{\epsilon}_1 (\bar{\epsilon}_2 + \text{th}k)} \quad (1.4)$$

$$|R(k)| \ll 1, \quad |R_0| \ll 1, \quad |R_\infty| \ll 1 \quad (1.5)$$

$$R_0 \equiv R(0) = \frac{R_1^2 - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1}{1 + \bar{\varepsilon}_1} = \frac{1}{\varepsilon_1 \bar{c}_1} \frac{e_1^2 - d_1^2 \bar{\varepsilon}_1}{1 + \bar{\varepsilon}_1} \quad (1.6)$$

$$R_\infty \equiv R(\infty) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1} = \frac{1}{\varepsilon_1 \bar{c}_1} \frac{e_1^2 \bar{\varepsilon}_2 - d_1^2 \bar{\varepsilon}_1}{\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1} \quad (1.7)$$

$$\beta_1(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)}, \quad \beta_2(V) = \sqrt{(V^2 / S_2^2) - 1}, \quad \gamma_2(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_2^2)} \quad (1.8)$$

$$0 < V_L < S_1 \quad (1.9)$$

$$S_1 = \sqrt{\bar{c}_1 / \rho_1}, \quad S_2 = \sqrt{c_2 / \rho_2}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1 + \chi_1^2) \quad (1.10)$$

$$\chi_1^2 = e_1^2 / \varepsilon_1 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad c_2 = c_{44}^{(2)}, \quad d_1 = e_{14}^{(1)}$$

$$e_1 = e_{15}^{(1)}, \quad \bar{e}_1 = e_1 / \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{11}^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{11}^{(3)}$$

$$c = c_2 / \bar{c}_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3, \quad R_1^2 = e_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1, \quad K_1^2 = d_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1$$

Выше ω и p – частота и волновое число волны, $k = ph$ – относительная толщина слоя, нижние индексы 1-3 относятся к подложке, слою и вакууму соответственно, $\beta_1(V)$, $\beta_2(V)$ и $\gamma_2(V)$ – коэффициенты затухания, S_1 и S_2 – скорости сдвиговых объемных волн, R_1^2 , K_1^2 и χ_1^2 – коэффициенты электромеханической связи для объемной волны, $R(k)$ – коэффициент электромеханической связи для поверхностной волны, c_1 и c_2 – упругие постоянные, e_1 и d_1 – пьезомодули, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – диэлектрические проницаемости, ρ_1 и ρ_2 – массовые плотности, (1.5) – условия между пьезомодулями реальных пьезоэлектрических сред, (1.6) – необходимое условие существования поверхностной волны.

Из соотношений (1.2)-(1.10) следует, что при отсутствии пьезоэффекта ($e_1 = d_1 = 0$) коэффициент электромеханической связи $R(k)$ обращается в нуль, а характеристическое уравнение (1.2) совпадает с характеристическим уравнением обычной волны Лява [1, 2]. При $V \geq S_2$ обе величины $\beta_1(V)$ и $\beta_2(V)$ действительны и фазовая скорость искомой волны определяется из характеристического уравнения (1.2). Если же $V < S_2$, то $\beta_2(V)$ становится мнимой, волны Лява становятся щелевого типа, а их скорость распространения определяется из преобразованного характеристического уравнения (1.3).

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристические уравнения (1.2) и (2.1) проявляется двумя факторами: наличием дополнительного члена – коэффициента электромеханической связи $R(k)$ и зависимости скорости

$S_1 = (c_1 / \rho_1) \sqrt{1 + \chi_1^2}$ от пьезоэффекта. Отметим, что характеристические уравнения получены для классов 6 и 4. Для классов 6mm и 4mm следует в этих уравнениях и других соответствующих выражениях положить $d_1 = 0$, а для классов 622, 422 – $e_1 = 0$.

Далее предполагается, что рассматриваемая слоистая система имеет мягкий слой, т.е. скорости объемных волн в слое S_2 и в подложке S_1 удовлетворяют условию:

$$S_2 < S_1 \quad (1.11)$$

а характеристики слоистых систем определяются условием:

$$R(k) > 0 \quad (1.12)$$

2. Исследование характеристического уравнения поверхностной волны.

В работе [14] исследован волновой процесс в слоистых системах, для которых имеют место условия (1.11) и (1.12). Условию (1.12) удовлетворяют слоистые системы, физико-механические характеристики которых определяются соотношениями (3.10), (3.12) и (3.8) работы [13]. При этом предполагается, что скорость волны Гуляева–Блюстейна в подложке V_{GB} , которая при условии (1.12), согласно (1.5), всегда существует и определяется формулой

$$V = V_{GB} \equiv S_1 \sqrt{1 - R_0^2} < S_1 \quad (2.1)$$

удовлетворяет условию (2.8), а работы [13]:

$$а) V_{GB} > S_2 \text{ или } \beta_1(S_2) > R_0, \beta_1(S_2) = \sqrt{1 - (S_1/S_2)^2} \quad (2.2)$$

В этой работе исследуется характеристическое уравнение поверхностной волны при условиях (1.11), (1.12) и при дополнительных условиях (2.8);b и (2.8);c работы [14]:

$$b) V_{GB} = S_2 \text{ или } \beta_1(S_2) = R_0 \quad (2.3)$$

$$c) V_{GB} < S_2 \text{ или } \beta_1(S_2) < R_0 \quad (2.4)$$

Как и в работе [14], преобразуем дисперсионное уравнение (1.2), производя замену переменных:

$$k\beta_2(V) \equiv \eta \quad (2.5)$$

Получим

$$\operatorname{tg}\eta = f(k, \eta), f(k, \eta) \equiv (k/c)g(k, \eta) \quad (2.6)$$

$$g(\eta, k) \equiv \sqrt{\beta_1^2(S_2) - (S_2\eta/S_1k)^2} - R(k), V = S_2\sqrt{1 + (\eta/k)^2} \quad (2.7)$$

где функция $f(k, \eta)$ при $k > 0$ действительна в промежутке:

$$0 \leq \eta \leq \eta^*(k), \quad \eta^*(k) \equiv k\beta_2(S_1), \quad \beta_2(S_1) = \sqrt{(S_1/S_2)^2 - 1} \\ f(k, \eta^*(k)) \equiv f^*(k) = -R(k)/c\beta_2(S_1) < 0, \quad g^*(k) \equiv \beta_1(S_2) - R(k) \quad (2.8)$$

Сначала рассмотрим случай (2.3), когда скорости волны Гуляева–Блюстейна в подложке V_{GB} и объемной волны в слое S_2 равны.

Случай I(b). $R(k) > 0, V_{GB} = S_2 (\beta_1(S_2) = R_0)$. Случаю $R(k) > 0$ удовлетворяют слоистые системы с условиями (3.8), (3.10) и (3.12) работы [13].

Во -первых, рассмотрим слоистые системы, определяемые условиями (3.8).

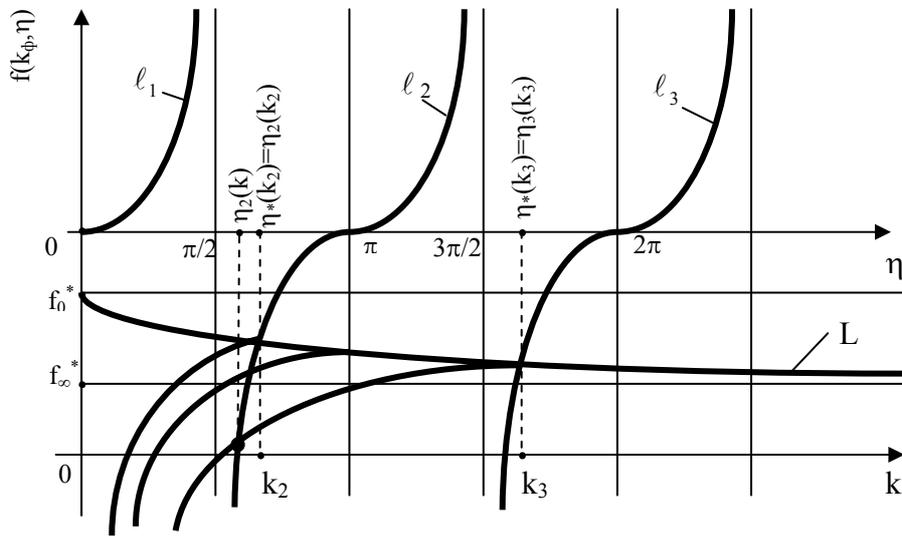
Случай I(b).1. Слоистые системы с условиями (3.8) из работы [13;Фиг.2.а]. В этом случае функция $g^*(k)$ из (2.8) удовлетворяет условиям (2.21),(2.22) работы [14], причем $R(k_{пер}) = \beta_1(S_2) = R_0 < R_\infty$, т.е. $k_{пер} = 0$. Следовательно, $g(0) = 0; g(k) < 0$ при $k \in (0, +\infty)$. В этом случае характеристическое уравнение (2.6) описывает первую моду волны Лява только при $k = k_{пер} = 0$, причем $\eta_1(k_{пер}) = \eta_1(0) = 0$. Соответственно, характеристическое уравнение (1.2) имеет решение $V_1(k_{пер}) = V_1(0) = V_{GB}$. С увеличением k до некоторого значения k_2 уравнение (1.2) не имеет решений. Начиная со значения k_2 , оно опять имеет решения, которые, как в предыдущем случае, описывают высшие моды волны Лява.

Начиная со значения $k = k_{\text{пер}} = 0$, характеристическое уравнение (1.3) для каждого k имеет решение, которое при $k = 0$ начинается со значения $V_1 = S_2 = V_{GB}$, при увеличении k , убываясь, стремится к значению V_∞ при $k \rightarrow \infty$, причем предел V_∞ определяется из уравнения

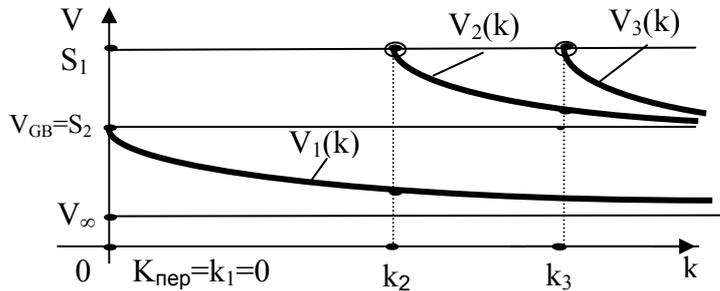
$$\beta_1(V_\infty) = c\gamma_2(V_\infty) + R_\infty \quad (2.9)$$

Предел остальных мод при $k \rightarrow \infty$ не существует согласно (2.8)а работы [14]. Геометрическая схема решения характеристического уравнения (2.6) показана на фиг.1, а дисперсионные кривые – на фиг.2. Скорости мод, как раньше, удовлетворяют условию:

$$V(k) < V(k) < \dots < V(k) \quad (2.10)$$



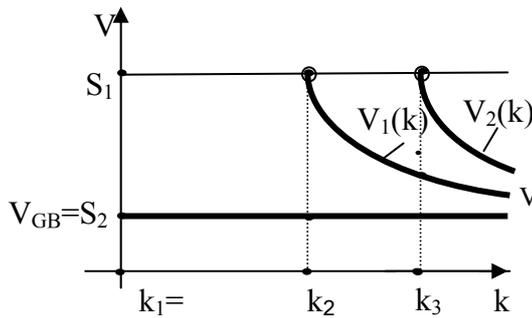
Фиг.1



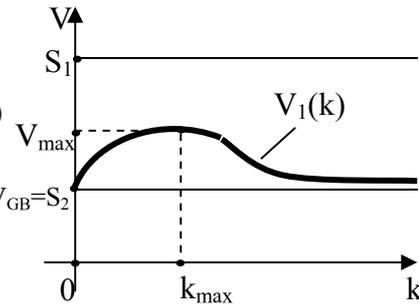
Фиг.2

Случай I(b).2. Слоистые системы с условиями (3.12) из работы [13; Фиг.4.а]. В данном случае $g(k) \equiv 0$, при этом, первая мода волны Лява при $k = 0$ начинается с волны Гуляева–Блюстейна, скорость которой равняется скорости объемных волн в слое и при увеличении k распространяется с постоянной скоростью

$V_1(k) \equiv V_{GB} = S_2 = \text{const}$, являясь решением уравнения (2.6). Начиная со значения $k = k_2$, возникает вторая мода, а потом и другие моды, скорости которых определяются также уравнением (2.6). В пределе, когда $k \rightarrow \infty$, все моды волны Лява, сливаясь между собой, составляют объемно-поверхностную волну Лява, которая в данном случае существует и распространяется со скоростью $V_{GB} = S_2$. Дисперсионные кривые этого случая показаны на фиг.3. Таким образом, в данном случае при любом значении $k > 0$ первая мода волны Лява представляет собой объемно-поверхностную волну, которая распространяется с постоянной скоростью $V_1(k) = S_2 = V_{GB} = \text{const}$.



Фиг.3



Фиг.4.

Случай I(b).3. Слоистые системы с условиями (3.10) из работы [13; Фиг.3.a]. В этом случае $g(0) = 0$, $g(k) > 0$ при $k \in (0, \infty]$. Характеристические уравнения (2.6) и (1.3) при $k = 0$ имеют одно и то же решение $V_1(0) = S_2 = V_{GB}$. При $k > 0$ уравнение (1.3) не имеет решений и все моды волны Лява описываются решениями уравнения (2.6). Первая мода волны Лява начинается с волны Гуляева–Блюстейна, сначала при увеличении k распространяется с возрастающей скоростью до некоторого значения $k = k_{\max}$, приобретая при $k = k_{\max}$ максимальную скорость, после чего распространяется с убывающей скоростью, которая в пределе при $k \rightarrow \infty$ стремится к значению $V_{\infty} = S_2 = V_{GB}$. На фиг.4 показана дисперсионная кривая первой моды. Поведение других мод подобно предыдущим случаям. Отметим, что предельная объемно-поверхностная волна не существует, так как $\beta_1(S_2) \neq R_{\infty}$. Соотношение между k_{\max} и критическими точками k_2, k_3 и т.д. может быть различным.

Перейдем к рассмотрению случая (2.4), когда скорость волны Гуляева–Блюстейна в подложке V_{GB} меньше скорости объемной волны в слое S_2 .

Случай I(c). $R(k) > 0$, $V_{GB} < S_2$ ($\beta_1(S_2) < R_0$). Случаю $R(k) > 0$ удовлетворяют слоистые системы с условиями (3.8), (3.10) и (3.12) работы [13].

Исследование аналогично предыдущим случаям. Для краткости приведем окончательные результаты.

Случай I(c).1. Слоистые системы с условиями (3.8) из работы [13; Фиг.2.a].

Для таких сред возникают следующие случаи:

- 1) $P(V_{GB}) > 0 (V_{GB} < V_\infty)$; 2) $P(V_{GB}) = 0, V_{GB}^2 < S_2^2(1 - R'_0/c) (V_{GB} = V_\infty)$ (2.11)
 3) $P(V_{GB}) = 0, V_{GB}^2 > S_2^2(1 - R'_0/c) (V_{GB} = V_\infty)$; 4) $P(V_{GB}) > 0 (V_\infty < V_{GB} < S_2)$

Здесь приняты следующие обозначения:

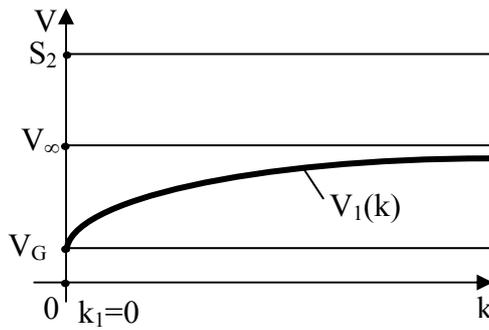
$$P(V_{GB}) = R_0 - R_\infty + cS_1S_2^{-1}\sqrt{R_0^2 - \beta_1^2(S_2)}, R'_0 \equiv R'(0) > 0 \quad (2.12)$$

В этих случаях дисперсионные кривые первой моды показаны соответственно на фиг.5–8, где V_∞ определяется из уравнения (2.9). Во всех случаях это первая мода щелевого типа, скорость которой определяется уравнением (1.3). Скорости остальных мод определяются уравнением (1.2).

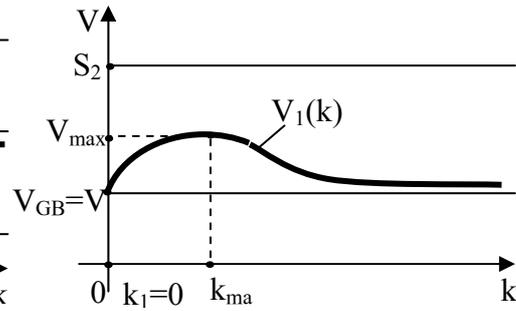
Случай I(c).2. Слоистые системы с условиями (3.12) из работы [13; фиг.4.a]. В данном случае имеет место условие

$$P > 0 (R_0 - R_\infty = 0) \quad (2.13)$$

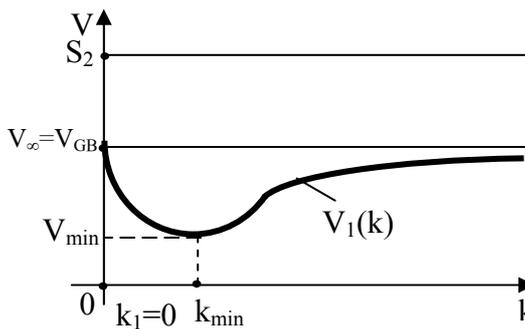
Первая мода щелевого типа определяется уравнением (1.3) и имеет дисперсионную кривую, показанную на фиг.5. Скорости остальных мод определяются уравнением (1.2).



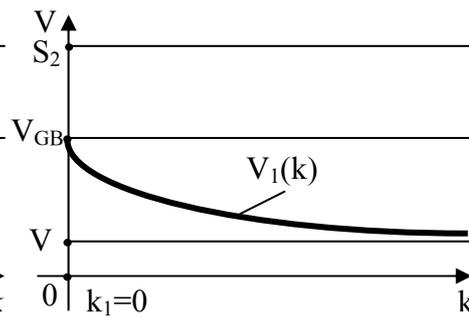
Фиг.5



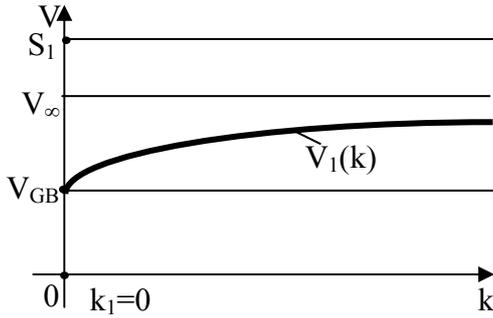
Фиг.6



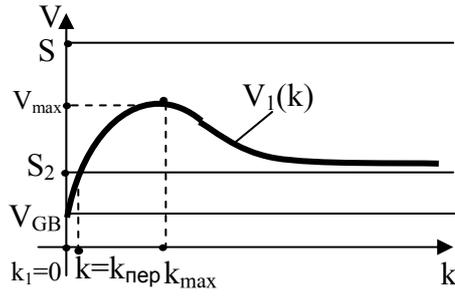
Фиг.7



Фиг.8



Фиг.9



Фиг.10

Случай I(c).3. Слоистые системы с условиями (3.10) из работы [13; фиг.3.a].

Для таких сред возникают следующие случаи:

$$\begin{aligned} &1) \beta_1(S_2) < R_\infty \quad (V_{GB} < V_\infty < S_2); \quad 2) \beta_1(S_2) = R_\infty \quad (V_{GB} < V_\infty = S_2) \\ &3) \beta_1(S_2) > R_\infty \quad (V_{GB} < S_2 < V_\infty) \end{aligned} \quad (2.14)$$

В этих случаях дисперсионные кривые первой моды показаны на фиг.5, фиг.9–10, соответственно. В первых двух случаях из (2.14) первая мода описывается уравнением (1.3) и следовательно, является щелевого типа. В случае 3) из (2.14) первая мода на интервале $0 < k < k_{пер}$ описывается уравнением (1.3), являясь волной щелевого типа, а на интервале $k \geq k_{пер}$ она описывается уравнением (2.6), являясь волной обычного типа, причем критическое значение $k = k_{пер}$ определяется из условия $R(k_{пер}) = \beta_1(S_2)$. В этом случае скорость $V_1(k)$ в точке $k = k_{max}$ достигает максимума. Поведение остальных мод сохраняется как прежде.

В случае мягкого слоя ($S_2 < S_1$) рассмотрим слоистые среды, удовлетворяющие условию $R(k) < 0$.

Случай II. Слоистые системы, определяемые условием $R(k) < 0$.

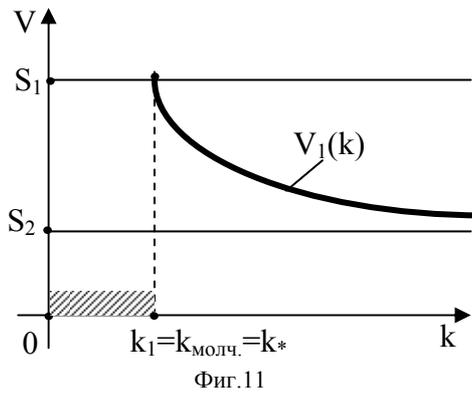
Как известно [13], случаю $R(k) < 0$ удовлетворяют слоистые системы с условиями (3.14), (3.16) и (3.18) работы [13]. В этом случае при $k = 0$, т.е. при отсутствии слоя уравнение (1.2) принимает вид $\beta_1(V) = R_0$, и не имеет решения, так как $R_0 < 0$. В этом случае в подложке волны Гуляева–Блюстейна отсутствуют. Во всех вышеуказанных слоистых системах все моды волны Лява описываются только уравнением (1.2). Легко показать, что уравнение (2.6) в окрестности точки $k = 0$ не имеет решений. Начиная с некоторого критического значения k_1 , определяемое уравнением

$$\operatorname{tg} \eta^*(k_1) = f^*(k_1) \quad (2.15)$$

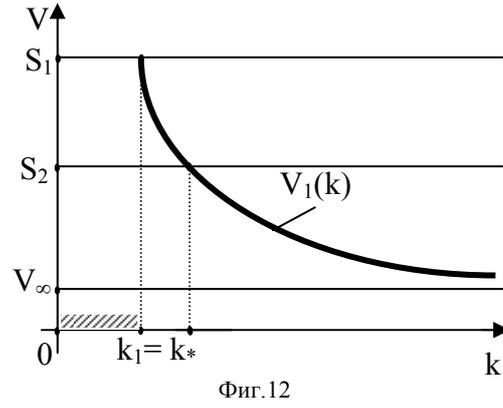
уравнение (2.6) имеет решение, которое соответствует первой моде волны Лява, причем $V_1(k_1) = S_1$. Начиная со значения $k = k_2$, которое определяется уравнением

$$\operatorname{tg} [k_2 \beta_2(S_1)] = -R(k) / c \beta_2(S_1) \quad (2.16)$$

возникает вторая мода волны Лява со скоростью распространения $V_2(k_2) = S_1$, а потом, подобно предыдущим случаям, возникают остальные моды волны Лява. Дисперсионная кривая первой моды показана на фиг.11. В этом случае в окрестности точки $k = 0$ возникает зона молчания: $0 \leq k < k_1 \equiv k_{\text{молч}}$, предельная точка которой $k_{\text{молч}}$ определяется, как уже сказали, уравнением (2.15).



Фиг.11



Фиг.12

Перейдем к случаям, когда коэффициент $R(k)$ меняет знак.

Случай III. Слоистые системы, определяемые условием, когда величина $R(k)$ знакопеременная.

Согласно работе [13], этот случай возможен для слоистых систем, определяемых условиями (3.19) и (3.20) работы [13; Фиг.8.а, 8.б].

Для слоистых систем, определяемые условиями (3.19), имеются две возможности:

$$1) \beta_1(S_2) \geq R_\infty \quad (2.17)$$

$$2) \beta_1(S_2) < R_\infty \quad (2.18)$$

В случае (2.17) поведение дисперсионных кривых такое же, как в случае $R(k) < 0$ (фиг.11), причем $k = k_1 = k_{\text{молч}} = k_*$, где k_* определяется условием $R(k^*) = 0$ и после значения k_* величина $R(k)$ меняет знак.

В случае (2.18) интервал $0 \leq k < k_1$ является зоной молчания. В интервале $k_1 \leq k \leq k_{\text{пер}}$ первая мода волны Лява описывается характеристическим уравнением (1.2), причем скорость $V = V_1(k)$ монотонно убывает от значения $V_1(0) = S_1$ до значения $V_1(k_{\text{пер}}) = S_2$. В интервале $k \geq k_{\text{пер}}$ первая мода волны Лява уже описывается уравнением (1.3), причем скорость $V = V_1(k)$ монотонно убывает от значения $V_1(k_{\text{пер}}) = S_2$ до значения $V_1(\infty) = V_\infty < S_2$. Остальные моды волны Лява, как всегда, описываются уравнением (1.2) и имеют поведение подобно предыдущим случаям. Дисперсионная кривая первой моды показана на фиг.12.

Для слоистых систем, определяемых условиями (3.20) работы [13], имеются три возможности:

$$1) \beta_1(S_2) > R_0 \quad (V_{GB} > S_2) \quad (2.19)$$

$$2) \beta_1(S_2) = R_0 \quad (V_{GB} = S_2) \quad (2.20)$$

$$3) \beta_1(S_2) < R_0 \quad (V_{GB} < S_2) \quad (2.21)$$

В случаях (2.19) и (2.20) первая мода волны Лява определяется только уравнением (1.2). Дисперсионные кривые этих случаев показаны соответственно на фиг. 3 работы [14] и на фиг.4. В случае (2.21) в интервале $0 \leq k \leq k_{\text{пер}}$ первая мода волны Лява определяется уравнением (1.3), являясь волной щелевого типа, а в интервале $k \geq k_{\text{пер}}$ – уравнением (1.2), являясь волной обычного типа. Дисперсионная кривая показана на фиг.10.

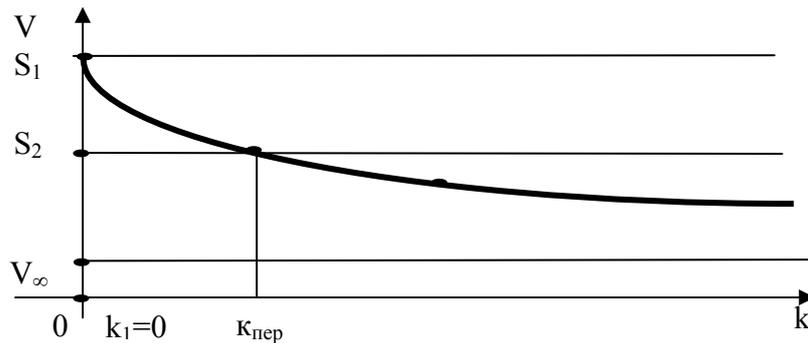
Наконец, рассмотрим остальные случаи рассматриваемых слоистых сред, которые являются промежуточными между вышеприведенными случаями. Эти среды определяются условиями (3.9), (3.11), (3.13), (3.15), (3.17) работы [13].

Случай IV. Слоистые системы, определяемые промежуточными условиями.

Для слоистых систем (3.13) (Фиг.4.б работы [13]) поведение мод такое же, как при обычной волне Лява. Дисперсионные кривые показаны на [14;Фиг 1].

Для слоистых систем (3.9) (Фиг.2.б работы [13]) имеем две возможности, даваемые условиями (2.17) и (2.18). В первом случае поведение мод такое же, как при обычной волне Лява. Дисперсионные кривые показаны на фиг 14. Во втором случае поведение первой моды описывается дисперсионной кривой, показанной на фиг. 13.

Для слоистых систем (3.11) (Фиг.3.б работы [13]) имеем три возможности, даваемые условиями (2.19) – (2.21). Дисперсионные кривые этих случаев приведены на [14;Фиг. 4, 10].



Фиг. 13

Для слоистых систем (3.15) (Фиг.5.б работы [13]) имеется возможность, даваемая условием (2.17). Дисперсионная кривая этого случая приведена на [14; Фиг. 1].

Для слоистых систем (3.17) (Фиг.6.б работы [13]) имеем две возможности:

$$S_1 > S_2 \sqrt{1 + |R'_0|/c} \quad (2.22)$$

$$S_1 < S_2 \sqrt{1 + |R'_0|/c} \quad (2.23)$$

где $|R'_0| = R'(0) < 0$.

В первом случае поведение мод приведено в [14;фиг. 1], во втором случае – на фиг. 11. В последнем случае при $k = 0$ есть решение, описывающее объемную волну со скоростью распространения $V = S_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Love А.Е.Н. Some problems of Geodynamics. London: Cambridge University Press. 1911. 180 p.
2. Дьелесаня Э.И. Руайея Дж. Упругие волны в твердых телах. Мех. Наука. 1987. т. 4. с. 4.
3. Кессених Г.Г. Любимов В.Н. Шувалова Л.А. О поверхностных волнах Лява в пьезоэлектриках // Кристаллография. 1987. т. 7. № 7. С. 74-77.
4. Багдасарян Г.Е. Даноян З.Н. Манукян Г.А. Поведение моды сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. Ереван: Материалы Всесоюзного научного семинара. 1991. с. 9-19.
5. p u Misa R x S j R E D w T T D j M j T y B O v E X j s u M B E j w B v E j P O j B j P i E z T E N I T M j H B E M B M T B U O B j B j H E T B M T y E j T j a f i Q t E j t h i G k C E s s j // J j A P P M j P h y s j 197 y . j V T M j 4 . j N 5 . j P x 0 0 t f t 0 0 7 .
6. Даноян З.Н. Манукян Г.А. Поведение моды сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в гексагональных и тетрагональных пьезоэлектрических подложках с проводящими слоями – тезисы докладов "Механика неоднородных структур" ИК ВОВИ. 1991. с. 10-11.
7. Даноян З.Н., Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1995. Т. 48. №3. С. 43-52.
8. Кессених Г.Г. Любимов В.Н. Филиппов В.В. Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем // Акустический журнал. 1985. т. 1. Вып. 4. С. 49-54.
9. Аветисян А.Х. К задаче распространения сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. т. 8. №1. с. 1-19.
10. Балакирева М.Ж. Гилинский И.А. Волны Лява в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука. 1987. 40 с.
11. Ионас Ф.И. Ширанян Дж. Сегнетоэлектрические кристаллы. Мех. Мир. 1965.
12. Олинера А.И. Поверхностные акустические волны. Мех. Наука. 1981. т. 8. с. 1.
13. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. (Исследование поведения коэффициента электромеханической связи). // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. №4. С. 46-55.
14. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения – Часть I). // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. №2. С. 43-56.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.09.2005

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ
МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ УПРУГИМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ

Саркисян К.Г.

Կ.Հ. Սարգսյան

Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ կտոր առ կտոր հաստատուն առաձգականության գործակցով

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահքային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ կտոր առ կտոր հաստատուն առաձգականության գործակցով: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման գծային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիաների տարածությունում, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորության մեթոդով: Ցույց է տրվում, որ լարումները դիէլեկտրիկ շերտի ու պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության հպման տեղամասում և բաժանման գծերի վրա ունեն լոգարիթմական եզակիություն՝ պայմանավորված առաձգականության գործակիցների տարբերությամբ:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի, էլեկտրական պոտենցիալի և տեղափոխության համար ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում, որոնք բաղկացած են Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքից և տատանման ծավալային ալիքը բնութագրող մասերից, ինչպես նաև ոչ ալիքային մասից (պայմանավորված պիեզոէլեկտրիկ):

K.H. Sargsyan

On the Gliding Vibrations of Piezoelectric Half-Space, when on the boundary surface a dielectric elastic layer with part-by-part constant elastic coefficient is fixed firmly

In work the problem about the shift established fluctuations piezoelectric semi-infinite space (piezoelectric a class 6mm hexagonal symmetry) on which boundary surface it is attached dielectric a layer of small thickness with part by part constant elastic factor is considered. Fluctuations of environment are raised with the help of a linear source vibration the dielectric layer enclosed on a surface. Using a method integrated Fourier, the problem is reduced to decision Fredholm of the integrated equation of the second sort, the admitting decision by a method consecutive approximation. It is shown, that on a contact site of a dielectric layer and piezoelectric semi-infinite space pressure on a line of the unit dielectric has logarithmic feature. Are received asymptotic formulas for an induction of an electric field, electric potentials and movings of far points of a site of contact.

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины с кусочно-постоянным упругим коэффициентом. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений. Показано, что на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства напряжения на линии раздела диэлектриков имеют логарифмическую особенность. Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля, электрических потенциалов и перемещений далеких точек участка контакта.

Пусть упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $x_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем.

Ось x_2 направлена по глубине пьезоэлектрического полупространства. Ось x_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Рассмотрим динамическую контактную задачу для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический бесконечный слой малой толщины ($k_2h \ll 1$) с кусочно-постоянным упругим коэффициентом, причем коэффициент упругости при $|x_1| > a$ есть G_1 , а при $|x_1| < a$ – G_2 . Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $R\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω – частота колебаний, t – параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении контактного напряжения на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Обозначим: амплитуды упругих перемещений для диэлектрического слоя при $|x_1| > a$ есть $u_1^{(2)}(x_1, x_2)$, а при $|x_1| < a$ есть $u_2^{(2)}(x_1, x_2)$, а для пьезоэлектрического полупространства – $u^{(1)}(x_1, x_2)$. Амплитуды электрических потенциалов пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя обозначим соответственно $\phi^{(1)}(x_1, x_2)$, $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$.

Отметим, что временной множитель в перемещениях и потенциалах в соответствующих средах является функцией $e^{-i\omega t}$.

Тогда поставленная задача сводится к следующим контактной и граничной задачам [1]:

$$\Delta u^{(1)} + k^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta \phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 u^{(1)} \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \quad (1)$$

$$\Delta u_1^{(2)} + k_1^2 u_1^{(2)} = 0 \quad \text{при } |x_1| > a \quad (2)$$

$$\Delta u_2^{(2)} + k_2^2 u_2^{(2)} = 0 \quad \text{при } |x_1| < a \quad (3)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид

$$c_{44} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} + e_{15} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = G \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \quad (4)$$

$$e_{15} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = D(x_1, 0) \quad (5)$$

$$u^{(1)} \Big|_{x_2=0} = U(x_1, x_2), \quad \phi^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \phi^{(2)} \Big|_{x_2=0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{1}{G_1} \tau(x_1) \quad \text{при } |x_1| > a \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \frac{1}{G_2} \tau(x_1) \quad \text{при } |x_1| < a \quad (8)$$

Граничные условия на $x_2 = -h$ будут

$$\left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=-h} = 0 \quad \text{при } |x_1| > a \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=-h} = \frac{1}{G_2} P \delta(x_1) \quad \text{при } |x_1| < a \quad (10)$$

$$\left. \phi^{(2)} \right|_{x_2=-h} = 0 \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (11)$$

И еще контактные условия на линии $x_1 = \pm a$

$$\left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pm a} = \frac{1}{G_1} \tau_{xz} = \pm \frac{1}{G_1} z(x_2), \quad \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pm a} = \frac{1}{G_2} \tau_{xz} = \pm \frac{1}{G_2} z(x_2)$$

где $\tau(x_1)$ – контактные напряжения, действующие между диэлектрическим слоем и пьезоэлектрическим полупространством, $D(x_1, x_2)$ – индукция электрического поля, $U(x_1, x_2)$ – упругие перемещения диэлектрического слоя, $k^2 = \omega^2 / c_1^2 (1 + \chi^2)$, $c^2 = c_{44} / \rho_1$, $\chi^2 = e_{15}^2 / c_{44} \varepsilon_{11}$ – коэффициент электро-механической связи, e_{15} – пьезоэлектрическая постоянная, ε_{11} – коэффициент диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика, ρ_1 – плотность пьезоэлектрика, c_{44} – коэффициент упругости пьезоэлектрика, $k_1^2 = \omega^2 / c_1^2$, $c_1^2 = G_1 / \rho_1$, $k_2^2 = \omega^2 / c_2^2$, $c_2^2 = G_2 / \rho_2$, G_1, ρ_1 и G_2, ρ_2 – соответственно коэффициенты упругости и плотность материала диэлектрического слоя при $|x_1| > a$ и $|x_1| < a$, G – модуль сдвига диэлектрического слоя.

Отметим, что из-за малой толщины диэлектрического слоя ($k_2 h \ll 1$) считается, что $D(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D(x_1, x_2) = D(x_1, 0)$, тогда в силу $\left. \phi^{(2)} \right|_{x_2=-h} = 0$ получим

$$\phi^{(2)}(x_1; x_2) = -\frac{1}{\varepsilon_2} D(x_1, 0)(x_2 + h), \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (12)$$

Теперь приступим к определению упругих перемещений диэлектрического слоя малой толщины при $-\infty < x_1 < \infty$ с помощью функции Хевисайда. Для этого введем следующие функции:

$$U_1(x_1, x_2) = (\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)) \cdot u_1^{(2)}(x_1, x_2) \quad (13)$$

$$U_2(x_1, x_2) = (\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)) \cdot u_2^{(2)}(x_1, x_2)$$

Дифференцируя $U_1(x_1, x_2)$ по x_1, x_2 и $U_2(x_1, x_2)$ по x_1, x_2 два раза и суммируя, соответственно, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 + k_1^2 U_1 &= \frac{z(x_2)}{G_1} (\delta(x_1 + a) + \delta(x_1 - a)) + U_1(a, x_2) (\delta'(x_1 - a) - \delta'(x_1 + a)) \\ \Delta U_2 + k_2^2 U_2 &= -\frac{z(x_2)}{G_2} (\delta(x_1 + a) + \delta(x_1 - a)) + U_2(a, x_2) (\delta'(x_1 + a) - \delta'(x_1 - a))\end{aligned}$$

при $-\infty < x_1 < \infty$ (14)

Здесь имелись в виду следующие условия:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=-a} &= \frac{1}{G_1} \tau_{xz} = -\frac{1}{G_1} z(x_2), & \left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} &= \frac{1}{G_1} \tau_{xz} = \frac{1}{G_1} z(x_2) \\ \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=-a} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xz} = -\frac{1}{G_2} z(x_2), & \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xz} = \frac{1}{G_2} z(x_2) \\ U_1(-a, x_2) &= U_1(a, x_2) = U_2(a, x_2), & \delta(-x_1 - a) &= \delta(x_1 + a), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1 - a) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} &= \delta(x_1 - a) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1 - a) \left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \theta(-x_1 - a) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} &= \delta(-x_1 - a) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1 + a) \left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=-a} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1 + a) \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} &= \delta(x_1 + a) \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1 + a) \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=-a} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1 - a) \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} &= \delta(x_1 - a) \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = \delta(x_1 - a) \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=a}\end{aligned}$$

Ввиду малости толщины диэлектрического слоя ($k_2 h \ll 1$) полученные уравнения

(14) интегрируем в интервале $[-h, 0]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1(x_1)}{\partial x_1^2} + k_1^2 w_1(x_1) &= \frac{X}{G_1 h} (\delta(x_1 + a) + \delta(x_1 - a)) + \\ &+ w_1(a) (\delta'(x_1 - a) - \delta'(x_1 + a)) + \frac{1}{h G_1} q_1(x_1) \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty \quad (15) \\ \frac{\partial^2 w_2(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 w_2(x_1) &= -\frac{X}{G_2 h} (\delta(x_1 + a) + \delta(x_1 - a)) + \\ &+ w_2(a) (\delta'(x_1 + a) - \delta'(x_1 - a)) - \frac{q_2(x_1) - P\delta(x_1)}{h G_2}\end{aligned}$$

при $-\infty < x_1 < \infty$ (16)

где $w_1(x_1) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U_1(x_1, x_2) dx_2$, $w_1(a) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U_1(a, x_2) dx_2$,

$$\begin{aligned}
X &= \int_{-h}^0 z(x_2) dx_2, \quad w_2(x_1) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U_2(x_1, x_2) dx_2 \\
\left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pm a} &= \frac{1}{G_1} \tau_{xz} = \pm \frac{1}{G_1} z(x_2), \quad \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pm a} = \frac{1}{G_2} \tau_{xz} = \pm \frac{1}{G_2} z(x_2) \\
\left. \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} &= (\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)) \left. \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \\
&= \frac{1}{G_1} \tau(x_1) (\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)) = \frac{1}{G_1} q_1(x_1) \\
\left. \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} &= (\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)) \left. \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \\
&= \frac{1}{G_2} \tau(x_1) (\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)) = \frac{1}{G_2} q_2(x_1)
\end{aligned}$$

Теперь применим преобразование Фурье к уравнениям (15), (16) и имея в виду, что $w_1(x_1) + w_2(x_1) = w(x_1)$, получим

$$\begin{aligned}
\bar{w}(\sigma) &= \frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} + \frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)} - \frac{2X}{h} \left(\frac{1}{G_1(\sigma^2 - k_1^2)} - \frac{1}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)} \right) \cos \sigma a - \\
2w(a) &\left(\frac{1}{\sigma^2 - k_1^2} - \frac{1}{\sigma^2 - k_2^2} \right) \sigma \sin \sigma a - \frac{P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)} \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty \quad (17)
\end{aligned}$$

Тогда, применив интегральное преобразование к уравнениям пьезоэлектрического полупространства (1) контактных и граничных условий (4)-(11), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \bar{u}^{(1)}}{dx_2^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{u}^{(1)} &= 0 \\
\frac{d^2 \bar{\phi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2 \bar{\phi}^{(1)} &= -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot k_1^2 \cdot \bar{u}^{(1)} \\
\bar{\phi}^{(2)}(\sigma; 0) &= -\frac{h}{\varepsilon_2} \bar{D}(\sigma; 0)
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}(\sigma) &= \frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} + \frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)} - \frac{2X}{h} \left(\frac{1}{G_1(\sigma^2 - k_1^2)} - \frac{1}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)} \right) \cos \sigma a - \\
&- 2w(a) \left(\frac{1}{\sigma^2 - k_1^2} - \frac{1}{\sigma^2 - k_2^2} \right) \sigma \sin \sigma a - \frac{P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)}
\end{aligned}$$

Условия контакта на $x_2 = 0$

$$\begin{aligned}
c_{44} \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \Big|_{x_2=0} + e_{15} \frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2} \Big|_{x_2=0} &= \bar{q}_1(\sigma) + \bar{q}_2(\sigma), \\
e_{15} \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \Big|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \frac{d\bar{\phi}^{(1)}}{dx_2} \Big|_{x_2=0} &= \bar{D}(\sigma, 0), \\
\bar{u}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \bar{w}(\sigma), \quad \bar{\phi}^{(1)} \Big|_{x_2=0} &= \bar{\phi}^{(2)} \Big|_{x_2=0}
\end{aligned} \tag{19}$$

Во второй формуле (18) имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точки $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ сверху, а точки $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ снизу.

Для удовлетворения условия уходящей волны однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2 - k^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$. При этом, контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ снизу [2].

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\begin{aligned}
&\frac{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{h G_1 (\sigma^2 - k_1^2)}{c_{44}} \right]}{h G_1 (\sigma^2 - k_1^2)} \cdot \bar{q}_1(\sigma) + \\
&+ \frac{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{h G_2 (\sigma^2 - k_2^2)}{c_{44}} \right]}{h G_2 (\sigma^2 - k_2^2)} \cdot \bar{q}_2(\sigma) = \\
&= \left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - (1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} \right) \cdot I(\sigma)
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
I(\sigma) &= \frac{2X}{h} \left(\frac{1}{G_1 (\sigma^2 - k_1^2)} - \frac{1}{G_2 (\sigma^2 - k_2^2)} \right) \cos \sigma a + \\
&+ 2w(a) \left(\frac{1}{\sigma^2 - k_1^2} - \frac{1}{\sigma^2 - k_2^2} \right) \sigma \sin \sigma a + \frac{P}{h G_2 (\sigma^2 - k_2^2)}
\end{aligned} \tag{21}$$

X и $w(a)$ определяются из следующих выражений:

$$X \frac{2 \cos k_1 a}{hG_1} + \bar{w}(a) 2k_1 \sin k_1 a = \frac{\bar{q}_1(k_1)}{hG_1},$$

$$\bar{w}(a) = \frac{1}{c_{44}} \frac{hG_2(a^2 - k_2^2) - hG_1(a^2 - k_1^2)}{hG_2(a^2 - k_2^2)} \bar{q}_2(a) - hG_1(a^2 - k_1^2) \cdot I(a)$$

$$\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |a|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |a|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{a^2 - k^2} + \frac{hG_1}{c_{44}} (a^2 - k_1^2) \right]$$

Для упругого перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектриках получим

$$\bar{u}^{(1)}(\sigma, x_2) = \left(\frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} + \frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)} - I(\sigma) \right) \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (22)$$

$$\bar{\phi}^{(1)}(\sigma, x_2) = -\frac{e_{15} \varepsilon_2}{\varepsilon_{11} (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|)} \left(\frac{\bar{q}_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} + \frac{\bar{q}_2(\sigma)}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)} - I(\sigma) \right) \cdot e^{-|\sigma| x_2} +$$

$$+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}^{(1)}(\sigma, x_2)$$

Исследуем функцию $f_1(\sigma)$, где

$$f_1(\sigma) = \chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|)} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{hG_1}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]$$

Функция $f_1(\sigma)$ на действительной оси имеет нули: $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = -\sigma_1$, $k < \sigma_1 < k_1$, $-k_1 < -\sigma_1 < -k$ при $0 \leq \chi < \infty$ [3]. Для удовлетворения условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точку $\sigma = -\sigma_1$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_1$ снизу. Из вышесказанного следует, что существует электроупругая поверхностная волна Лява, которая распространяется со скоростью $C_L = \frac{\omega}{\sigma_1}$.

Тогда функциональное уравнение (20) можно переписать в виде

$$\bar{q}_1(\sigma) + \frac{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{hG_2}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{hG_1}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot \frac{G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)} \cdot \bar{q}_2(\sigma) =$$

$$= \frac{hG_1(\sigma^2 - k_1^2) \left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - (1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} \right)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{hG_1}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot I(\sigma) \quad (23)$$

Подставляя $\bar{q}_1(\sigma, 0)$ в выражения $\bar{u}^{(1)}(\sigma, x_2)$, $\bar{\phi}^{(1)}(\sigma, x_2)$, получим

$$\bar{u}^{(1)}(\sigma, x_2) = \frac{1}{c_{44}} \frac{G_1 h(\sigma^2 - k_1^2) I(\sigma) - \left(1 + \frac{G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)}\right) \bar{q}_2(\sigma)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{G_1 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (24)$$

$$\bar{\phi}^{(1)}(\sigma, x_2) = \frac{-\frac{e_{15} \varepsilon_2}{\varepsilon_{11} (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|)} \left(G_1 h(\sigma^2 - k_1^2) I(\sigma) - \left(1 + \frac{G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)}\right) \bar{q}_2(\sigma) \right)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{G_1 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot e^{-|\sigma| x_2} +$$

$$+ \frac{e_{15}}{c_{44} \varepsilon_{11}} \frac{G_1 h(\sigma^2 - k_1^2) I(\sigma) - \left(1 + \frac{G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)}\right) \bar{q}_2(\sigma)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{G_1 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (25)$$

Таким образом, задача сводится к определению $\bar{q}_2(\sigma, 0)$.

Для решения функционального уравнения (23) представим его в виде

$$\bar{q}_1(\sigma) + \bar{q}_2(\sigma) = \bar{K}(\sigma) \bar{q}_2(\sigma) + \bar{S}(\sigma) \quad (26)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - (1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} \right) \left(\frac{G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{G_2(\sigma^2 - k_2^2)} - 1 \right)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{G_1 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]}$$

$$\bar{S}(\sigma) = \frac{\left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - (1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} \right) h G_1(\sigma^2 - k_1^2)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2 |\sigma|}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h |\sigma|} - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + \frac{G_1 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_1^2) \right]} \cdot I(\sigma) \quad (27)$$

Теперь докажем, что $K(x_1) q_2(x_1)$ – непрерывная функция. Для этого исследуем поведение $\bar{K}(\sigma) \bar{q}_2(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Так как функция $q(x_1)$ в точке $x_1 = 0$ принимает конечное значение, то $\bar{q}_2(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ будет иметь следующий порядок: $\frac{2 \sin \sigma a}{\sigma}$. Поскольку $\bar{K}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеет порядок

$|\sigma|^{-1}$, тогда легко видеть, что $\bar{K}(\sigma) \bar{q}_2(\sigma)$ имеет порядок $\frac{2 \sin \sigma a}{\sigma} \cdot \frac{1}{|\sigma|}$, то есть

$\bar{K}(\sigma) \bar{q}_2(\sigma)$ – абсолютно интегрируемая функция при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Отсюда можно заключить, что $K(x_1) q_2(x_1)$ является непрерывной функцией при $-\infty < x_1 < \infty$.

А что касается функции $S(x_1)$, исследуя поведение $\bar{S}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, легко видеть, что из свойств интеграла Фурье следует $\tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{\cos \sigma a}{|\sigma|}\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(x_1^2 - a^2) + \text{const}$, и $\tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{\sin \sigma a}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2i}(|x_1 + a| - |x_1 - a|) + \text{const}_1$, где $\tilde{\varphi}$ – обобщенное преобразование Фурье, $\tilde{\varphi}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье. Отсюда следует, что $S(x_1)$ в точках $x_1 = \pm a$ имеет логарифмическую особенность.

Так мы доказали, что $K(x_1)q_2(x_1)$ является непрерывной функцией, а $S(x_1)$ имеет логарифмическую особенность. Отсюда следует, что контактное напряжение $q(x_1)$ при $x_1 = \pm a$ имеет логарифмическую особенность.

Для определения $q_2(x_1)$ применим обратное преобразование Фурье к функциональному уравнению (26) и, пользуясь теоремой о свертке, будем иметь

$$q(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q_2(y)dy + S(x_1), \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$$\text{где } K(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K}(\sigma)e^{-i\sigma x_1} d\sigma, \quad S(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{S}(\sigma)e^{-i\sigma x_1} d\sigma$$

Для определения $q(x_1)$ требуя, что $|x_1| < a$, получим фредгольмовское интегральное уравнение второго рода

$$q(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q_1(y)dy + S(x_1) \quad \text{при } |x_1| < a$$

В таком случае этот интеграл допускает решение методом последовательных приближений в пространстве абсолютно интегрируемых функции $L_1[-a; a]$ при

$$\sup_{|y| < a} \int_{-a}^{+a} |K(|x_1 - y|)| dx_1 < 1.$$

Значение $q(x_1)$ при $|x_1| > a$ определится по формуле

$$q(x_1) = \int_{-a}^{+a} K(|x_1 - y|)q(y)dy + S(x_1), \quad \text{когда } |x_1| \geq a$$

Теперь получим асимптотические формулы для $q(x_1), u^{(1)}(x_1, x_2), \phi^{(1)}(x_1, x_2)$, когда $x_2 = 0, |x_1| \rightarrow \infty$, используя метод Лайтхилла [4].

Сначала приступим к определению $q(x_1)$, когда $|x_1| \rightarrow \infty$. Применив обратное преобразование Фурье к (26), получим

$$q(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{K}(\sigma)\bar{q}_2(\sigma) + \bar{S}(\sigma))e^{-i\sigma x_1} d\sigma \quad (28)$$

Для подынтегрального выражения точки $\sigma = 0, \sigma = \pm k, \sigma = \pm \sigma_1$ являются особыми точками.

Тогда приведем разложение функции $\bar{K}(\sigma)\bar{q}_2(\sigma) + \bar{S}(\sigma)$ в окрестностях этих точек

$$\bar{q}(\sigma) = \frac{A_{-1}}{\sigma - \sigma_1} - \frac{A_{-1}}{\sigma + \sigma_1} + B_1\sqrt{\sigma - k} + B_1'\sqrt{\sigma + k} + C_1|\sigma| + F(\sigma) \quad (29)$$

где

$$A_{-1} = \frac{\frac{G_1 h (\sigma_1^2 - k_1^2)}{c_{44}} \left(\left(\frac{G_1 (\sigma_1^2 - k_1^2)}{G_2 (\sigma_1^2 - k_2^2)} - 1 \right) \bar{q}_2(\sigma_1) + G_1 h (\sigma_1^2 - k_1^2) \cdot I(\sigma_1) \right)}{\chi^2 \frac{\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h \sigma_1)^2} - \left[\frac{(1 + \chi^2) \sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 - k^2}} + \frac{2G_1 h}{c_{44}} \sigma_1 \right]}$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2k} (1 + \chi^2) \frac{G_1 h}{c_{44}} (k^2 - k_1^2) \left(\left(\frac{G_1 (k^2 - k_1^2)}{G_2 (k^2 - k_2^2)} - 1 \right) \bar{q}_2(k) + G_1 h (k^2 - k_1^2) \cdot I(k) \right)}{\left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 k}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h k} - \frac{G_1 h}{c_{44}} (k^2 - k_1^2) \right)^2} \quad (30)$$

$$B_1' = -iB_1 = -i \frac{\sqrt{2k} (1 + \chi^2) \frac{G_1 h}{c_{44}} (k^2 - k_1^2) \left(\left(\frac{G_1 (k^2 - k_1^2)}{G_2 (k^2 - k_2^2)} - 1 \right) \bar{q}_2(k) + G_1 h (k^2 - k_1^2) \cdot I(k) \right)}{\left(\chi^2 \frac{\varepsilon_2 k}{\varepsilon_2 + \varepsilon_{11} h k} - \frac{G_1 h}{c_{44}} (k^2 - k_1^2) \right)^2}$$

Коэффициент C_1 только в случае $e_{15} = 0$ (пьезоэффект отсутствует) равняется нулю. Аналогичным образом, $\frac{d^2 F(\sigma)}{d\sigma^2}$ – абсолютно интегрируемая функция $(-\infty < \sigma < \infty)$ [5]. И после интегрирования по частям можно убедиться, что

интегральный член $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma) e^{-i\alpha x_1} d\sigma$ при $|x_1| \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(x_1^{-2})$.

Имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\sigma \pm k} e^{-i\alpha x_1} d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i \left(k|x_1| + \frac{\pi}{4} \cdot \text{sgn } x_1 \right)}}{|x_1|^{3/2}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma| e^{-i\alpha x_1} d\sigma = -\frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} \quad (31)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma - \sigma_1} - \frac{1}{\sigma + \sigma_1} \right) e^{-i\alpha x_1} d\sigma = i e^{i\sigma_1 |x_1|}$$

в силу вышесказанного для $q(x_1)$ при $|x_1| \rightarrow \infty$ получим асимптотическую формулу

$$q(x_1) = iA_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{B_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1| - \frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{C_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o(x_1^{-2}) \quad (32)$$

при $|x_1| \rightarrow \infty$

Аналогичным образом можно получить асимптотические представления для индукции электрического поля, электрического потенциала и перемещения

$$\begin{aligned} \bar{D}(x_1, 0) &= i\tilde{A}_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\tilde{B}_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1| - \frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\tilde{C}_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o(x_1^{-2}) \quad \text{при } |x_1| \rightarrow \infty \\ \bar{\phi}^{(1)}(x_1, 0) &= i\tilde{A}'_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\tilde{B}'_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1| - \frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\tilde{C}'_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o(x_1^{-2}) \quad \text{при } |x_1| \rightarrow \infty \quad (33) \\ u^{(1)}(x_1, 0) &= i\hat{A}'_{-1}e^{i\sigma_1|x_1|} + \frac{\hat{B}'_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i\left(k|x_1| - \frac{\pi}{4}\right)}}{|x_1|^{3/2}} - \frac{\hat{C}'_1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} + o(x_1^{-2}) \quad \text{при } |x_1| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Как видно из (32) и (33), $\phi^{(1)}(x_1, 0)$ и $D(x_1, 0)$ тоже имеют неволновую часть, обусловленную пьезоэффектом, которая на бесконечности имеет порядок x_1^{-2} , еще и состоит из частей электроупругой волны Лява и сдвиговой объемной волны.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 279с.
3. Григорян Э.Х., Саркисян К.Г. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический упругий слой с кусочно-постоянным диэлектрическим коэффициентом проницаемости.//Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т.57. №1. С.18-25.
4. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. – Cambridge Univ. Press, 1959.
5. Саркисян К.Г. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический упругий слой, состоящий из двух полубесконечных диэлектрических частей.// Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.9-16.

Ереванский Государственный
Университет

Поступила в редакцию
30.09.2005

УДК 534.14.014.2

О ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО
ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Оганян Г. Г., Саакян С. Л.

Գ.Գ. Օհանյան, Ս.Լ.Սահակյան

Անստեղծիկ հեղուկում գնդաձև գազային պղպջակի ոչ գծային բարձրագույն մասին

Ստացված է մաթեմատիկական հեղուկում պղպջակի ոչ գծային ստիպողական տատանումները նկարագրող հավասարումը: Հարմոնիկ անալիզի մեթոդների միջոցով հետազոտված են առաջնային (գլխավոր) և երկրորդական ռեզոնանսների դեպքերը, երբ արտաքին հարուցումը տրվում է սինուսոիդալ տեսքով: Առաջինի համար դուրս է բերված ռեզոնանսային կորի հավասարումը, որի ուսումնասիրությունը թույլ է տալիս հետևել ամպլիտուդի հնարավոր թռիչքաձև փոփոխություններին: Երկրորդական ռեզոնանսների պարագայում գտնված են գրգռված շառավղի ըստ ժամանակի փոփոխման օրենքները:

G.G. Oganyan, S.L. Sahakyan

On nonlinear Pulsation of spherical Gas-bubble in noncompressible Fluid

Here is considered the problem of forced oscillation of spherical gas-bubble in viscous noncompressible Fluid. The nonlinear equation of oscillation of single bubble is obtained. The primary and secondary resonances are investigated, when the external strength is changed within sine low.

На основе упрощенной модели движения безграничной разреженной газожидкостной смеси, предложенной в [1], получено уравнение, описывающее нелинейные вынужденные колебания пузырька. При синусоидальном внешнем возбуждении исследованы случаи первичного и вторичных резонансов. Для первого из них выведено уравнение резонансной кривой (частотно-амплитудной характеристики), а для остальных резонансов выявлены законы изменения во времени возмущенного радиуса пузырька.

1. **Исходные уравнения. Прямое разложение.** Пусть одиночный газовый пузырек сферической формы находится в безграничной вязкой жидкости. В отсутствие эффектов сжимаемости, поверхностного натяжения и теплообмена радиальное движение системы пузырек-жидкость опишется системой уравнений [1]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$
$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}}$$

Здесь t – время, p – давление, ρ – плотность, R – радиус пузырька, c_p и c_v – удельные теплоемкости, γ – показатель адиабаты, μ – динамическая вязкость жидкости. Индексы 1, 2 и 0 отнесены, соответственно, к жидкости, газу и состоянию покоя (равновесия).

Будем полагать, что в любой момент времени отклонения параметров течения от своих значений в состоянии равновесия малы

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0(1 + p'_2), & p_1 &= p_0(1 + p'_1) \\ \rho_2 &= \rho_{20}(1 + \rho'_2), & R_2 &= R_0(1 + R'_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь штрихи отнесены к избыточным значениям параметров и в дальнейшем опускаются. Подставляя разложения (1.2) в систему (1.1), упростим ее, оставляя в рассмотрении, помимо линейных, слагаемые с квадратичной нелинейностью. В рассматриваемом приближении, в случае пренебрежения взаимным влиянием эффектов вязкости, дисперсии и нелинейности, система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\mu}{p_0} \frac{dR}{dt} - p_2 + p_1 &= 0, & \omega_{ar}^2 &= \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \\ p_2 &= -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} R^2, & \rho_2 &= -3R + 6R^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ω_{ar} –линейная частота свободных (собственных) колебаний пузырька (адиабатическая частота Миннаерта). При упрощении уравнений состояния и сохранения массы газа в нелинейные слагаемые подставлены соотношения линейной акустики. Исключая в системе (3.1) избыточное давление p_2 , получим

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 R &= -2\delta\dot{R} + \alpha R^2 - \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1(t) \\ \delta &= \frac{2}{3\gamma} \frac{\mu}{p_0} \omega_{ar}^2, & \alpha &= \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь точки над искомой функцией R и в последующем над другими функциями означают дифференцирование по t . Пусть в жидкости вдали от пузырька возмущение давления $p_1(t)$ совершает периодические колебания с заданной частотой ω и амплитудой p_m . Уравнение (1.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 R &= -2\delta\dot{R} + \alpha R^2 - \omega_{ar}^2 F \cos \omega t \\ p_1 &= 3\gamma F \cos \omega t = p_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приближенное решение уравнения (1.5) ищется в виде разложения по степеням малого безразмерного параметра ε

$$R(t) = \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t) + \varepsilon^3 r_3(t) \quad (1.6)$$

В результате применения прямого разложения к уравнению (1.5) определяются функции r_1, r_2 , откуда, в силу представления R в виде (1.6), получим

$$\begin{aligned} R &= a(1 - \delta t) \cos \varphi - \frac{\omega_{ar}^2 F}{\omega_{ar}^2 - \omega^2} \left(\cos \omega t + \frac{2\delta\omega}{\omega_{ar}^2 - \omega^2} \sin \omega t \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \left[\frac{a^2}{\omega_{ar}^2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) + \frac{\omega_{ar}^2 F^2}{(\omega_{ar}^2 - \omega^2)^2} \left(1 - \frac{\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t \right) \right] + \\ &+ \frac{2aF\omega_{ar}^2 \cos(\omega t - \varphi)}{\omega(\omega - 2\omega_{ar})(\omega_{ar}^2 - \omega^2)} \left(1 + \frac{\omega - 2\omega_{ar} \cos(\omega t + \varphi)}{\omega + 2\omega_{ar} \cos(\omega t - \varphi)} \right) \Big] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $a = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ – амплитуда и фаза колебаний, $\varphi = \omega_{ar}t + \beta$. Очевидно, что выписанное решение (1.7) не является равномерно пригодным разложением второго порядка, поскольку содержит как секулярный (вековой) член, так и дроби со знаменателями, из которых определяются резонансные частоты колебаний.

2. Основной (первичный) резонанс $\omega \approx \omega_{ar}$. В прямом разложении (1.7) при $\omega \rightarrow \omega_{ar}$ значение R неограниченно возрастает. Однако, в этом случае все большую роль начинают играть диссипативный член и нелинейное слагаемое в возвращающей силе, что приводит к изменению порядков, приписываемым величинам различных членов уравнения (1.5). Поэтому теперь будем полагать, что величина внешней силы p_1 одного порядка с диссипативным членом, т.е. $p_1 \sim \varepsilon^3$, $|\delta| \sim \varepsilon^2$, $R \sim \varepsilon$. Для исследования явления резонанса используется асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [2], являющийся одним из вариантов обобщенного метода усреднения. Подставляя разложение (1.6) в уравнение (1.5), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В первом приближении получим однородное уравнение, решением которого является функция

$$r_1 = a \cos(\omega_{ar}t + \beta) = a \cos \varphi \quad (2.1)$$

Здесь, в отличие от решения (1.7), амплитуда a и фаза β полагаются медленно меняющимися функциями времени, что позволяет представить их в виде

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1(a) + \varepsilon^2 \phi_2(a) + \dots, \quad \varphi = \dot{\omega}_{ar} + \dot{\beta} \quad (2.2)$$

Полагая, как обычно [2,3], что a и φ являются новыми независимыми переменными, производные по t выразим через частные производные по a и φ . Опуская выкладки, аналогичные приведенным в [3], из требования отсутствия секулярных членов в общем решении уравнения второго приближения, получим $A_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$. Само второе приближение решения (1.6) предстанет в виде

$$r_2 = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right)$$

Из уравнения третьего приближения относительно r_3 , в силу требования об отсутствии секулярных членов в общем решении, можно определить функции A_2 и ϕ_1 , подстановка которых в разложение (2.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin(\sigma t + \beta), \quad \sigma = \omega_{ar} - \omega \\ \dot{\varphi} &= \omega_{ar} - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^3} a^2 + \frac{\omega_{ar}}{2} \frac{1}{a} F \cos(\sigma t + \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ – линейная расстройка частоты, при этом третье приближение решения (1.6) запишется в виде

$$r_3 = \frac{1}{48} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} a^3 \cos 3\varphi$$

Необходимо отметить важный факт. Исследование колебаний иным способом–методом многих масштабов [3] вновь приводит к системе (2.3) и формулам для функций r_1 , r_2 , r_3 полностью идентичными вышеприведенным. Система уравнений (2.3) описывает модуляцию фазы и амплитуды в решениях r_1 , r_2 и r_3 , которые определяют в разложении (1.3) форму свободных колебаний. Она является неавтономной, поскольку время t явным образом входит в уравнения. Введением новой безразмерной переменной

$$v(t) = \sigma t + \beta, \dot{v} = \sigma + \dot{\beta}, \dot{\varphi} = \omega_{ar} - \sigma + \dot{v}$$

можно исключить явную зависимость уравнений от t и тем самым преобразовать систему (2.3) в автономную

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta a + \frac{\omega_{ar}}{2} F \sin v \\ a\dot{v} &= \sigma a - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^3} a^3 + \frac{\omega_{ar}}{2} F \cos v \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выведем уравнение резонансной кривой [4] или амплитудно-частотной характеристики [3], выявляющей зависимость амплитуды a_0 установившихся колебаний от расстройки частоты σ . Поскольку при установившихся колебаниях имеем $\dot{a} = 0$, $\dot{v} = 0$, то, согласно определению (1.4) коэффициента α , из системы (2.4) получим

$$\begin{aligned} (Ba_0^2)^3 - 2\sigma_1 (Ba_0^2)^2 + (\sigma_1^2 + \delta_1^2) Ba_0^2 &= \frac{1}{4} BF^2 \\ B &= \frac{5}{3} \left(\frac{3\gamma + 1}{4} \right)^2, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{ar}} \\ \delta_1 &= \frac{\delta}{\omega_{ar}} \sim \varepsilon^2, \quad a_0 \sim \varepsilon, \quad F \sim \varepsilon^3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученное соотношение представляет собой безразмерное уравнение резонансной кривой. В плоскости (a_0, σ_1) уравнение касательной к исследуемой резонансной кривой имеет вид

$$\frac{da_0}{d\sigma_1} = \frac{a_0 (-\sigma_1 + Ba_0^2)}{\sigma_1^2 - 4Ba_0^2\sigma_1 + 3(Ba_0^2)^2 + \delta_1^2} \quad (2.6)$$

Приравняв нулю уравнение (2.6), получим зависимость максимального значения амплитуды от расстройки σ_1 , подстановка которой в соотношение (2.5) выявляет ее зависимость от величины внешнего воздействия

$$\left((a_0)_{\max} \right)^2 = \frac{\sigma_1}{B}, \quad (a_0)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F}{\delta_1}$$

Уравнение вертикальной касательной к резонансной кривой определится из условия $da_0/d\sigma_1 = \infty$, т.е. равенства нулю знаменателя в (2.6)

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - 4Ba_0^2\sigma_1 + 3(Ba_0^2)^2 + \delta_1^2 &= 0 \\ \sigma_1^{(1,2)} &= 2Ba_0^2 \pm \sqrt{(Ba_0^2)^2 - \delta_1^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Комбинирование уравнений (2.5) и (2.7) позволяет получить алгебраическое соотношение

$$a_0^6 - \frac{\sigma_1}{B}a_0^4 + \frac{F^2}{8B^2} = 0$$

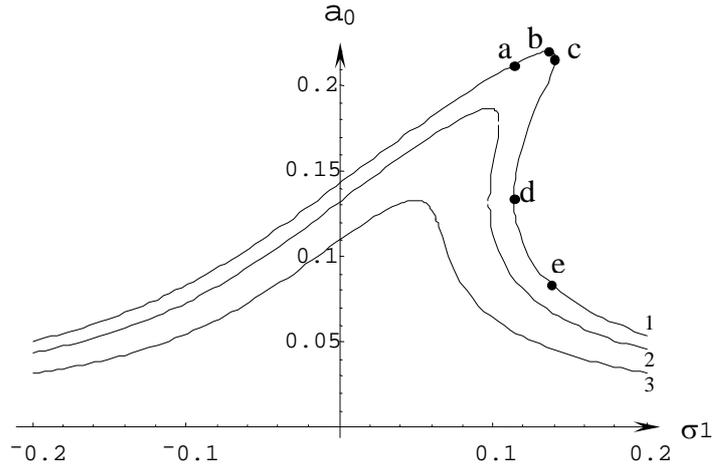
определяющее те значения a_0 , которые удовлетворяют как вертикальной касательной, так и резонансной кривой. Из требования $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}$, т.е. равенства нулю дискриминанта в (2.7), находят значения критической амплитуды и внешнего воздействия

$$\begin{aligned}\left((a_0)_{crit}\right)^2 &= \frac{\delta_1}{B} = \frac{\sigma_1}{2B}, \quad \sigma_1 = 2\delta_1 \\ F_{crit}^2 &= \frac{\sigma_1}{B} = \frac{8}{B}\delta_1^3 = \frac{4}{5} \frac{96}{(3\gamma+1)^2} \frac{\delta^3}{\omega_{ar}^3}\end{aligned}\quad (2.8)$$

начиная с которых на резонансной кривой появляется гистерезис. При значениях $F < F_{crit}$ резонансная кривая однозначна.

На фиг.1 представлены резонансные кривые амплитуд пульсаций воздушного пузырька в воде, построенные по формулам (2.5)-(2.8) при исходном давлении $p_0 = 0.1$ МПа. Они указывают, что каждому размеру пузырька соответствует своя критическая величина внешнего воздействия F_{crit} , начиная с которой ($F \geq F_{crit}$) проявляется гистерезис. Действительно, на кривых 1, 2 имеют место неоднозначность амплитуд, поскольку одним и тем же значениям параметра расстройки частот σ_1 соответствует несколько значений амплитуды a_0 . В качестве иллюстрации остановимся на кривой 1 фиг.1. Передвижение по ней вдоль отрицательного направления оси σ_1 , соответствующее увеличению частоты ω вынуждающей силы, приводит к медленному увеличению амплитуды. По достижению значений $\sigma_1 = 0.11407$, $a_0 = 0.13395$ (точка d) происходит скачкообразное увеличение амплитуды до величины $a_0 = 0.21239$ (точка a). Дальнейшее увеличение частоты ω (уменьшение σ_1) приводит к уменьшению амплитуды установившихся пульсаций. Передвижение по резонансной кривой 1 фиг.1 вдоль положительного направления оси σ_1 , равнозначное уменьшению вынуждающей частоты ω , приводит к медленному возрастанию амплитуды a_0 до максимального значения $(a_0)_{max} = 0.21977$ при $\sigma_1 = 0.13604$ (точка b). По достижении точки c ($\sigma_1 = 0.14058$, $a_0 = 0.21578$) происходит скачкообразное

уменьшение амплитуды до величины $a_0 = 0.08184$ (точка e). При дальнейшем увеличении σ_1 (уменьшении частоты ω) имеет место плавное уменьшение амплитуды. Кривая 3 иллюстрирует случай отсутствия гистерезиса, когда величины вынуждающих сил меньше критических ($F < F_{crit}$). С увеличением размера пузырька ее собственная частота убывает, что, в силу формулы (2.8), уменьшает критическую величину внешнего воздействия.



Фиг.1. Резонансные кривые для воздушного пузырька в воде при исходных данных: $p_0 = 0.1$ МПа, $R_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м ($\delta_1 = 0.04884$). Кривая 1 соответствует значению $F = 2.1467 \cdot 10^{-2}$, 2 - $F = F_{crit} = 1.82 \cdot 10^{-2}$, 3 - $F = 1.2994 \cdot 10^{-2}$.

3. Вторичные резонансы. При их исследовании удобно пользоваться методом Ван-дер-Поля. Для компактной записи результатов последующих выкладок представление искомого решения в комплексной форме предпочтительнее действительной. Полагается, что решение нелинейного уравнения (1.5) и его производная внешне имеют одинаковый вид с решением линейного неоднородного уравнения и его производной:

$$R(t) = Ae^{i\omega_{ar}t} + \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.), \quad A = \frac{a}{2} e^{i\beta}, \quad \Lambda = \frac{\omega_{ar}^2}{\omega^2 - \omega_{ar}^2} \frac{F}{2} \quad (3.1)$$

$$\dot{R} = i\omega_{ar} A e^{i\omega_{ar}t} + i\omega \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.) \quad (3.2)$$

Здесь комплексная амплитуда $A(t)$ и фаза $\beta(t)$ являются медленно-меняющимися функциями времени, символ $(k.c.)$ означает совокупность комплексно-сопряженных функций. Дифференцируя (3.1) и сравнивая полученный результат с (3.2), приходим к связи между производными от комплексно-сопряженных амплитуд

$$\dot{A} = -Ae^{2i\omega_{ar}t} \quad (3.3)$$

Не вдаваясь в подробности выкладок, укажем, что подстановка функции (3.1) в уравнение (1.5) и учет связи (3.3) приводит к искомому уравнению первого приближения для комплексной амплитуды

$$\begin{aligned}
i\dot{A} = & -i\delta \left(A e^{i\omega_{ar}t} + \frac{\omega}{\omega_{ar}} \Lambda e^{i\omega t} + (k.c.) \right) e^{-i\omega_{ar}t} + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} (A\bar{A} + \Lambda\bar{\Lambda}) e^{-i\omega_{ar}t} + \\
& + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \left(A\Lambda (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{\Lambda^2}{2} [e^{i(2\omega - \omega_{ar})t} + e^{-i(2\omega + \omega_{ar})t}] \right) + \\
& + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \left(\bar{A}\Lambda [e^{i(\omega - 2\omega_{ar})t} + e^{-i(\omega + 2\omega_{ar})t}] + \frac{1}{2} (A^2 e^{i\omega_{ar}t} + \bar{A}^2 e^{-3i\omega_{ar}t}) \right)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

При исследовании различных случаев вторичного резонанса из (3.4) можно получать уравнения первого приближения для действительной амплитуды и фазы.

а. Случай $\omega \approx 0$. Полагая $\omega = \sigma$, $\sigma \sim \varepsilon^2$, в уравнении (3.4) оставим в рассмотрение лишь медленно меняющиеся члены

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{\alpha}{\omega_{ar}} A\Lambda (e^{i\sigma t} + e^{-i\sigma t})$$

В силу определений из (3.1), отделение действительной и мнимой частей приводит к уравнениям относительно $a(t)$ и $\beta(t)$, интегрирование которых дает

$$a = c e^{-\delta t}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \frac{\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2 - \sigma^2} \frac{F}{\sigma} \sin \sigma t, \quad c = \text{const}$$

Решение (3.1) предстанет в виде

$$\begin{aligned}
R = & a_0 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \cos \left(\omega_{ar} t + \frac{3\gamma + 1}{2} \frac{F}{1 - \sigma_1^2} \frac{\sin(\sigma_1 \omega_{ar} t)}{\sigma_1} \right) - \\
& - \frac{F}{1 - \sigma_1^2} \cos(\sigma_1 \omega_{ar} t), \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\omega_{ar}}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

На фиг.2 решению (3.5) соответствует кривая 1 ($a_0 = 0.1$, $F = 0.016$, $\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$).

б. Случай $\omega \approx \omega_{ar}/2$. Супергармонический резонанс на частоте $\omega_{ar}/2$. Чтобы подчеркнуть близость удвоенной вынуждающей частоты к собственной, введем в рассмотрение параметр σ расстройки частоты: $2\omega = \omega_{ar} + \sigma$. Удерживая в (3.4) медленно меняющиеся члены, получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$i\dot{A} = -i\delta A + \frac{\alpha}{2\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i\sigma t}$$

общим решением которого является функция

$$A = ce^{-\delta t} - \frac{i}{\delta + i\sigma} \frac{\alpha}{2\omega_{ar}} \Lambda^2 e^{i\sigma t}, \quad \frac{1}{\delta + i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \sigma^2}} e^{-i \arctg \frac{\sigma}{\delta}}, \quad c = \frac{a_0}{2} e^{i\beta_0}$$

где c – комплексная постоянная. Отсюда следует, что решение (3.1) предстанет в виде

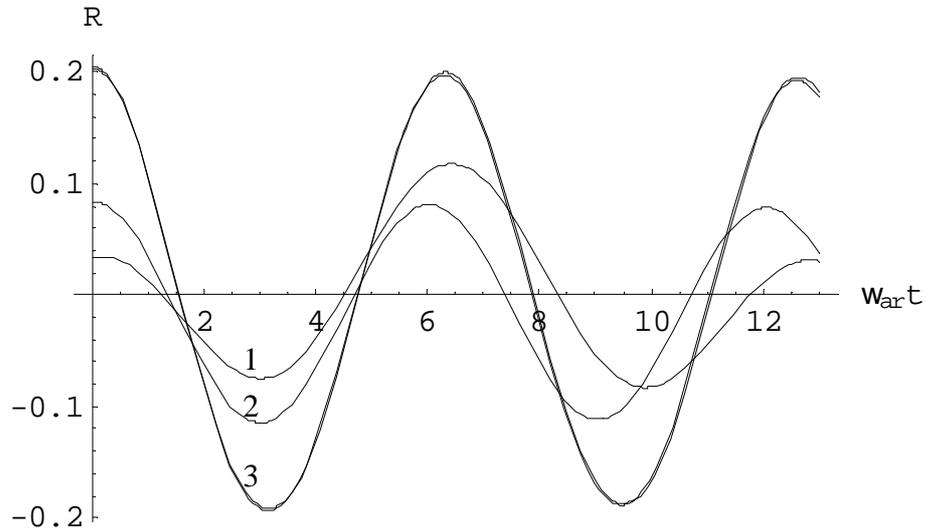
$$R = a_0 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \cos(\omega_{ar} t + \beta_0) + \frac{4F}{(1 + \sigma_1^2)^2 - 4} \cos\left(\frac{1 + \sigma_1}{2} \omega_{ar} t\right) + \frac{2(3\gamma + 1)}{\sqrt{\delta_1^2 + \sigma_1^2}} \frac{F^2}{\left[(1 + \sigma_1^2)^2 - 4\right]^2} \sin\left((1 + \sigma_1) \omega_{ar} t - \arctg \frac{\sigma_1}{\delta_1}\right) \quad (3.6)$$

На фиг.2 решению (3.6) соответствует кривая 2

$$(a_0 = 0.1, \beta_0 = 0, F = 0.016, \sigma_1 = 0.01, \delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}).$$

в. Случай $\omega \approx 2\omega_{ar}$. Субгармонический резонанс на частоте $2\omega_{ar}$. Для количественного описания близости вынуждающей частоты к удвоенной собственной вновь вводится параметр σ расстройки частоты: $\omega = 2\omega_{ar} + \sigma$. Оставляя в (3.4) лишь медленно меняющиеся члены, получим неоднородное уравнение с переменным коэффициентом

$$\dot{A} + \delta A = -i \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \bar{A} \Lambda e^{i\sigma t}$$



Фиг.2. Графики решений при вторичных резонансах.

Кривая 1 соответствует решению (3.5); 2 – решению (3.6); 3 – решениям (3.8) и (3.9).

Подстановкой $A = Be^{i\sigma t/2}$ оно преобразуется в неоднородное с постоянным коэффициентом

$$\dot{B} + \left(\delta + i \frac{\sigma}{2} \right) B = -i \frac{\alpha}{\omega_{ar}} \Lambda \bar{B}$$

Опуская выкладки, выпишем общее решение

$$B = \left[1 - i \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \right] b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} + \left[1 + i \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \right] b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t}, \quad b_{1,2} = \text{const} \quad (3.7)$$

$$\kappa_{1,2} = -\delta_1 \pm \frac{3\gamma+1}{4} \frac{\sqrt{F^2 - E^2}}{(2+\sigma_1)^2 - 1}, \quad E = \frac{2\sigma_1}{3\gamma+1} \left[(2+\sigma_1)^2 - 1 \right]$$

При фиксированных значениях σ_1 , δ_1 условие конечности решения (3.7) при $t \rightarrow \infty$ налагает на величину вынуждающей силы F ограничения, в соответствии с которыми решение (3.7) записывается в разных формах. Действительно, если

$$E \leq F \leq E \sqrt{1 + \left(\frac{2\delta_1}{\sigma_1} \right)^2}$$

величины $\kappa_{1,2}$ являются действительными и неположительными ($\kappa_{1,2} \leq 0$) и тогда решение (3.1) запишется в виде

$$R(t) = 2 \left(b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} + b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t} \right) \cos \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) \omega_{ar} t + \frac{F \cos(2 + \sigma_1) \omega_{ar} t}{(2 + \sigma_1)^2 - 1} + \quad (3.8)$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{F+E}{F-E}} \left(b_1 e^{\kappa_1 \omega_{ar} t} - b_2 e^{\kappa_2 \omega_{ar} t} \right) \sin \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) \omega_{ar} t$$

На фиг.2 решению (3.8) соответствует кривая 3 ($\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$, $F = 0.016$, $b_1 = b_2 = 0.05$).

В случае $F < E$ величины $\kappa_{1,2}$ являются комплексными и поэтому решение (3.1) предстанет в виде функции

$$R(t) = 2b_1 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \left(1 - \sqrt{\frac{E+F}{E-F}} \right) \cos \left[1 + \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2}} \right) \right] \omega_{ar} t +$$

$$+ 2b_2 e^{-\delta_1 \omega_{ar} t} \left(1 + \sqrt{\frac{E+F}{E-F}} \right) \cos \left[1 + \frac{\sigma_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2}} \right) \right] \omega_{ar} t + \quad (3.9)$$

$$+ \frac{F}{(2 + \sigma_1)^2 - 1} \cos(2 + \sigma_1) \omega_{ar} t$$

Решение (3.9) при значениях $\sigma_1 = 0.01$, $\delta_1 = 4.884 \cdot 10^{-3}$, $b_1 = b_2 = 0.05$; $F = 0.01$ практически совпадает с (3.8) и на фиг.2 ему соответствует кривая 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
3. Nayfeh A.S. Introduction to perturbation techniques etc.: Wiley. 1981.= Найфе А. Введение в теорию возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
4. Рабинович Н.И., Трубецкой Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.

Институт механики НАН РА
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26.01.2006

УДК 539.3

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРА И ВТУЛКИ В
РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ**

Шекян А. Л.

Ա. Լ. Շեկյան

Գլանի և վրանի կոնտակտային փոխազդեցությունը սահմանային շփման ռեժիմում

Դիտարկված է իր առանցքի շուրջը պտտվող կոշտ գլանի և արտաքին եզրով ամրացված առաձգական վրանի կոնտակտային փոխազդեցության հարթ խնդիրը շփման, մաշման և շփումից անջատված ջերմության առկայությամբ: Խնդիրը բերված է ոչ գծային հավասարումների համակարգի և վերջինիս հետազոտությունը կատարված է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Բերված է թվային օրինակ:

A.L. Shekyan

The Contact interaction of cylinder and bush in conditions of boundary friction

A plane problem of the contact interaction of uniformly rotating about its axis nondeformable cylinder with a rigidly closed up elastic bush in response to friction, wear and heat excretion from friction is considered. The problem is reduced to the solution of nonlinear equations, the examination of which follows by compressed reflecton principles. Numerical example is presented.

Рассмотрена плоская задача контактного взаимодействия вращающегося жесткого цилиндра с упругой втулкой, заземленной внешним краем с учетом трения, износа и температуры выделения от трения. Задача приведена к исследованию систем нелинейных уравнений, которые проведены с использованием принципа сжимающих отображений. Проведен численный пример.

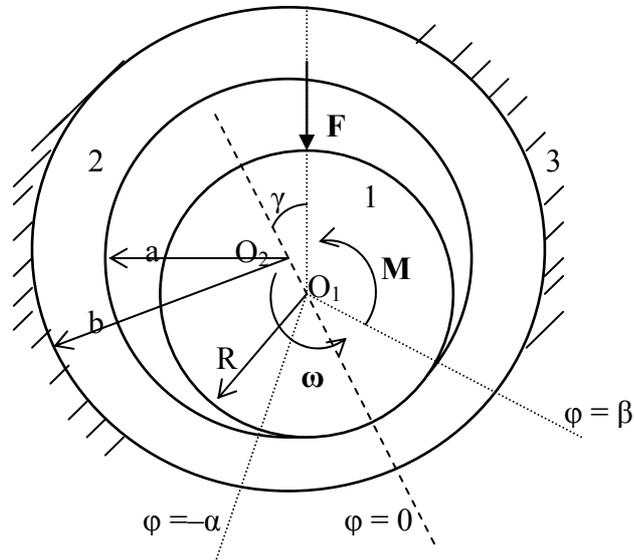
Контактным задачам в трибологии посвящены многочисленные исследования [1-7]. Повышенный интерес к задачам этой области обусловлен как математической корректностью формулировки задач и достоверностью их решения, так и применением результатов исследований в расчетах при проектировании узлов трения инженерных конструкций.

В настоящей работе проводится теоретическое исследование задачи контактного взаимодействия цилиндра и втулки в режиме граничного трения [8] с учетом факторов деформируемости, износа и тепловыделения от трения. Решение этой задачи сведено к решению замкнутой системы нелинейных уравнений и на основе принципа сжимающих отображений проведено ее полное математическое исследование. Получено приближенное аналитическое решение задачи и построены графики, отражающие ход изменений основных механических величин в зависимости от характерных параметров задачи.

§1. Постановка задачи и вывод основных уравнений.

Пусть длинный жесткий круговой цилиндр с радиусом R под действием внешних сил равномерно вращается вокруг своей оси и вдоль своих образующих вдавливается во внутреннюю цилиндрическую поверхность с радиусом a упругой втулки 2, заземленный по своей внешней цилиндрической поверхности с радиусом b ($R < a < b$) с неподвижной недеформируемой обоймой 3 (фиг. 1). Считаем, что цилиндр и втулка находятся в режиме граничного трения [8,9] с

постоянным коэффициентом трения f и с учетом фактора износа и тепловыделения от трения.



Фиг.1

Требуется определить законы распределения нормальных и касательных контактных напряжений, действующих между телами 1 и 2, положение и размеры области контакта, меру и направление погружения цилиндра во втулку, а также потери в узле трения.

При таких предположениях условие равенства радиальных перемещений в зоне трения $\varphi \in [-\alpha; \beta]$ имеет вид

$$U_w + U_T + U_P + U_\tau = \delta - a + \sqrt{R^2 + 2R(a - R)\cos\varphi + (a - R)^2} \quad (1)$$

где радиальные перемещения U_w , U_T , U_P и U_τ обусловлены износом, температурной деформацией и упругой деформацией, возникающих от действия контактного давления $\overline{p}(\varphi)$ и контактного касательного напряжения $\tau(\varphi)$ соответственно, δ – мера погружения цилиндра во втулку, α и β – координаты, соответствующие началу и концу области трения.

Известно [7], что если угловая скорость цилиндра $\omega > 5$ рад/с, то температурное поле в рассматриваемом узле трения близко к осесимметричному. Исходя из этого, считаем, что цилиндр и обойма находятся в однородных температурных полях с некоторыми постоянными температурами T_1 и T_0 , соответственно, притом рост температуры цилиндра ($T_1 - T_0$) пропорционален средней мощности сил трения [7]

$$T_1 - T_0 = K_1 \omega R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi \quad (2)$$

где K_1 – температурный эквивалент мощности сил трения.

При таких предположениях закон распределения температуры $T(r)$ радиальных температурных перемещений $U_T(r)$ и температурных нормальных напряжений $\sigma_T(r)$ во втулке определяются формулами [10]:

$$T(r) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, \quad a \leq r \leq b \quad (3)$$

$$U_T(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{1}{r} \int_a^r T(r) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (4)$$

$$\sigma_T(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_2}{r^2} - \frac{C_1}{1-2\nu} \right) \quad (5)$$

где E , ν и α_T –упругие постоянные и коэффициент температурного расширения материала втулки, а C_1 и C_2 –постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий

$$U_T(b) = 0, \quad \sigma_T(a) = 0 \quad (6)$$

Теперь, используя (3)–(6), окончательно для входящего в формулу (1) U_T получим

$$U_T = \frac{(1+\nu)(T_1 - T_0)\alpha_T a}{1-2\nu+\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\ln\varepsilon} \right) \quad (7)$$

где $\varepsilon = a/b$.

Перемещения, возникающие вследствие износа рабочих поверхностей тел, в случае абразивного износа определяются формулой [1]

$$U_w = K_2 \omega R \tau(\varphi) t, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (8)$$

где K_2 –коэффициент износостойкости пары трущихся тел, t –время изнашивания.

Наконец, упругие перемещения U_p определяем на основе обобщенной гипотезы Винклера [7,11]

$$U_p = (b-a) \left[\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} p(\varphi) \right]^m, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta], \quad 0 < m \leq 1 \quad (9)$$

а перемещения U_τ –на основе приближенной формулы [12]

$$U_\tau = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} R \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) \operatorname{sgn}(\varphi - \theta) d\theta, \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (10)$$

Условия равновесия цилиндра имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin(\varphi + \gamma) + \tau(\varphi) \cos(\varphi + \gamma)] d\varphi = 0 \quad (11)$$

$$R \int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \cos(\varphi + \gamma) - \tau(\varphi) \sin(\varphi + \gamma)] d\varphi = F \quad (12)$$

$$R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi = M \quad (13)$$

где F и M –соответственно, внешняя радиальная сила и вращающий момент пары, действующие на единицу длины цилиндра, (γ –угол между линией действия силы

F с линией, проходящей через центры O_1 и O_2 (фиг. 1).

При решении задачи будем пользоваться также законом Кулона

$$\tau(\varphi) = fp(\varphi), \quad \varphi \in [-\alpha; \beta] \quad (14)$$

и условиями непрерывности контактных напряжений

$$p(-\alpha) = 0, p(\beta) = 0 \quad (15)$$

Таким образом, для определения $p(\alpha)$, $\tau(\varphi)$, α , β , δ , M и T_1 имеются соотношения (1), (2) и (11)-(15), которые, как выясняется ниже, образуют полную систему уравнений относительно указанных неизвестных.

§2. Исследование полученной системы уравнений

Полное математическое исследование системы уравнений задачи проводим на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций [13]. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha + \varphi}{\alpha + \beta}, q(\xi) = \frac{b-a}{R} \left[\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} p(\varphi) \right]^m, \quad \psi = \frac{a-R}{R} \\ \lambda_1 &= \frac{(1-\nu)Ea\omega RfK_1\alpha_T}{(1-2\nu)(1-2\nu+\varepsilon^2)} \left[\varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{2 \ln \varepsilon} \right] \left(\frac{R}{b-a} \right)^{1/m}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{R} \\ \lambda_2 &= \frac{(1-\nu)}{2} (\alpha + \beta) \left(\frac{R}{b-a} \right)^{1/m} f, \quad \lambda_3 = \frac{(1-\nu)E\omega ftK_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{R}{b-a} \right)^{1/m} \\ F_0 &= \frac{(1-\nu)(1+\nu)F}{(\alpha + \beta)(1-\nu)RE} \left(\frac{b-a}{R} \right)^{1/m}, \quad M_0 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)M}{(\alpha + \beta)(1-\nu)R^2 Ef} \left(\frac{b-a}{R} \right)^{1/m} \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношения (1) с учетом (2), (7)-(10) и (14) получим

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \delta_0 - 1 - \psi + \sqrt{1 + 2\psi \cos[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi] + \psi^2} - \\ &- \int_0^1 [\lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{sgn}(\xi - \eta)] q^m(\eta) d\eta - \lambda_3 q^m(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

а условия (15) принимают вид

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 0 \quad (18)$$

Заметим, что в трех соотношениях (17), (18) входят четыре неизвестные α, β, δ_0 и $q(\xi)$.

Учитывая это обстоятельство и структуру остальных уравнений задачи, временно, в уравнениях задачи считаем неизвестной также силу F и вместе с этим одновременно считаем заданным жесткое перемещение цилиндра, принимая для него некоторое значение δ из области его изменения $0 < \delta \ll b - a$. Тогда уравнения (17), (18) образуют замкнутую систему уравнений относительно $\alpha, \beta, q(\xi)$. Коль скоро будет известно решение этой системы, с помощью (16) определится закон распределения контактных давлений

$$p(\varphi) = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{R}{b-a} q(\xi) \right]^{1/m} \quad (19)$$

а затем с помощью (14), (13) и (2) последовательно определяются $\tau(\varphi)$, M , T . Далее, из соотношения (11) определяется угол наклона (

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin \varphi + \tau(\varphi) \cos(\varphi)] d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\beta} [\tau(\varphi) \sin \varphi - p(\varphi) \cos \varphi] d\varphi} \quad (20)$$

а условие (12) служит для определения той силы F , которая соответствует принятому значению δ . Установленную таким образом зависимость F от δ можно трактовать как зависимость δ от F , что соответствует требованиям задачи.

Теперь приступим к определению α, β и $q(\xi)$ из (17) и (18). При условии (18) на основе (17) получаем формулы:

$$\alpha = \arccos \left\{ \left[\frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \int_0^1 q^{\frac{1}{m}}(\xi) d\xi \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\} \quad (21)$$

$$\beta = \arccos \left\{ \left[\frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \int_0^1 q^{\frac{1}{m}}(\xi) d\xi \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\}$$

которые вместе с (17) имеют наиболее удобную форму для определения неизвестных α, β и $q(\xi)$ методом последовательных приближений.

Введя вектор $\vec{x} = \{\alpha, \beta, q(\xi)\}$ и представляя систему уравнений (21), (17) в векторном виде $\vec{x} = A(\vec{x})$, решение этой системы сводится к определению неподвижной точки оператора A . Пусть в множестве X , каждый элемент которого является совокупностью двух произвольных чисел α, β и непрерывной в $\xi \in [0; 1]$ функции $q(\xi)$, введена метрика формулой

$$\rho(\vec{x}_1; \vec{x}_2) = |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} |q(\xi_1) - q(\xi_2)| \quad (22)$$

где $\vec{x}_i = \{\alpha_i, \beta_i, q_i(\xi)\}$, ($i=1, 2$)—два произвольных элемента из X . Тогда множество X становится полным метрическим пространством. Пусть, далее, $S(o, r)$ —замкнутый шар [13] в пространстве X с центром $o\{0, 0, 0\}$ и с радиусом r . Способом, предложенным в [4], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\vec{y} = A(\vec{x})$ отображает шар S в себе и в нем является сжимающим. Тогда для любого начального элемента $\vec{x}_0 \in S$, формулами

$$\vec{x}_{i+1} = A(\vec{x}_i), \quad (i=0; 1; 2; \dots) \quad (23)$$

получается последовательность $\{\vec{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая по метрике (22) стремится к некоторому пределу \vec{x}^* , являющемуся неподвижной точкой оператора A . Следовательно, \vec{x}^* соответствует единственному решению системы уравнений

(17), (21). Принимая $\bar{x}_0 = 0$, на основе (23), (17) и (21) можно получить следующие приближенные аналитические выражения для α, β и $q(\xi)$:

$$\alpha = \arccos \left\{ \left[\frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \delta_0^{\frac{1}{m}} \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\}$$

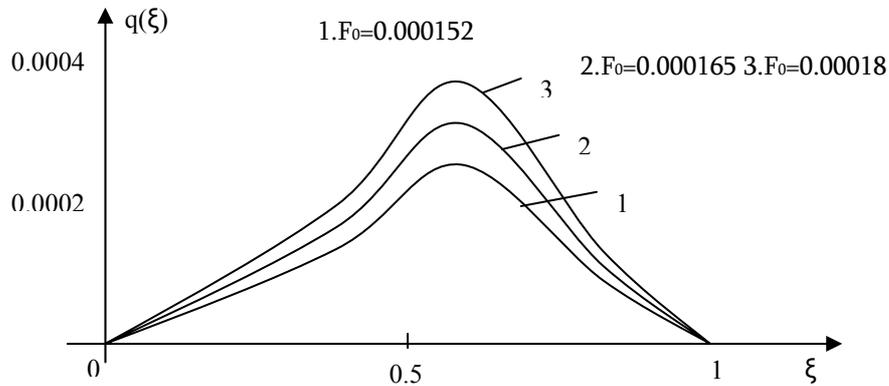
$$\beta = \arccos \left\{ \left[\frac{1 + \psi - \delta_0}{\sqrt{2\psi}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2\psi}} \delta_0^{\frac{1}{m}} \right]^2 - \frac{1 + \psi^2}{2\psi} \right\} \quad (24)$$

$$q(\xi) = \delta_0 - 1 - \psi + 1 + 2\psi \cos[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi] + \psi^2 -$$

$$- [\lambda_1 + \lambda_2(2\xi - 1) + \lambda_3] \delta_0^{\frac{1}{m}}, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

3. Анализ числовых результатов

На основе соотношений (17), (21), (23), для следующих значений характерных параметров $m = 1; \psi = 0,005; \lambda_1 = 0,85; \lambda_2 = 0,1; \lambda_3 = 0,015$ получены значения α, β и $q(\xi)$. При этом принимается $\delta_0 = 0,0029; 0,003; 0,0031; 0,0032$ с помощью формул (2), (12), (13) и (20) получены остальные неизвестные. По результатам вычислений построены графики безразмерного контактного давления $q(\xi)$ (фиг.2) и приведены значения основных характеристик задачи (табл.1), в которых показан ход изменения этих величин в зависимости от безразмерной силы F_0 .



Фиг. 2

Как видно из этих результатов, соблюдаются характерные закономерности, установленные экспериментально для подшипников скольжения [9]. А именно, значения α (показывают о небольшом отклонении жесткого перемещения цилиндра от точного направления силы F в ту сторону, по которой движутся граничные точки цилиндра в зоне трения. Кроме того, для всех конкретных случаев α значительно превышает β , а точка, в которой контактное давление принимает

свой максимум, находится примерно в середине той части контактной области, которая охвачена углом ((фиг. 1).

Таблица 1

$F_0 \times 10^{-4}$	1.52	1.6	1.65	1.8
$\delta_0 \times 10^{-3}$	2.9	3	3.1	3.2
α	30° 40'	32°	34°	36°
β	17°	18° 50'	20° 15'	21° 20'
(3° 50'	3° 30'	3°	2° 20'

Автор выражает благодарность профессору С. М. Мхитаряну за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины. // МТТ, 1978. №4. С. 60-67.
2. Александров В. М. Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения. //МТТ. 2003. .№4. С. 128-135.
3. Акопян В. Н., Мхитарян С. М. К осесимметричной контактной задаче теории упругости при наличии износа. // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 75. №3. С. 140-144.
4. Мхитарян С. М., Шекиян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 15-32.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Плоские контактные задачи теории упругости для класических областей при наличии износа. //ПМТФ. 1980. №3. С. 163-172.
6. Горячева И. Г., Торская Е. В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости. //Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 185-194.
7. Богатин О. Б., Коров В. А., Тихонов А. Г. Проблемы моделирования нестационарного термоконтактного взаимодействия в трибосистемах. //Трение и износ.1992. Т.13. №1. С. 172-184.
8. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526с.
9. Детали машин. Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение. 1968. 440с.
10. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука.1979. 560с.
11. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
12. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510с.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 360с.

УДК 678.44:620.17:539.53

**МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭБОНИТОВЫХ КОМПОЗИТОВ,
МОДИФИЦИРОВАННЫХ МИНЕРАЛЬНЫМИ НАПОЛНИТЕЛЯМИ**

Акопян В.В., Кабальян Л.Ю., Кабальян Ю.К., Карапетян К.А.

Վ.Վ.Հակոբյան, Լ.Յու.Կաբալյան, Յու.Կ.Կաբալյան, Կ.Ա.Կարապետյան
Միներալային լցիչներով մոդիֆիկացված էբոնիտային կոմպոզիտների մեխանիկական
հատկությունները

Հետազոտվել է էբոնիտային կոմպոզիտների մեխանիկական հատկությունների փոփոխման վարքը կախված նրանց Հայաստանի որոշ լեռնային ապարներով լցման քանակից:

Փորձնականորեն որոշված է բարձր մեխանիկական հատկություններով օժտված էբոնիտային կոմպոզիտներում առանձին լցանյութի օգտագործման նպատակահարմար քանակությունը:

V.V. Akopyan, L.Yu. Kabalyan, Yu.K. Kabalyan, K.A. Karapetyan
Mechanical properties of ebonit composites modified by mineral fillings

It is investigated mechanical properties of ebonit composites depending on quantity of filling by some mountain minerals of Armenia.

On the basis of experimental data the optimum quantity of separate filling is established with the purpose of reception ebonit composites with high mechanical properties.

Исследовано изменение механических свойств эбонитовых композитов в зависимости от количества наполнения их некоторыми горными минералами Армении.

На основе экспериментальных данных установлено оптимальное количество отдельных наполнителей с целью получения эбонитовых композитов с высокими механическими свойствами.

Эбонит (твердая резина), представляющий собой жесткий материал и обладающий некоторой эластичностью и гибкостью, широко используется в автомобильной, авиационной, машиностроительной и других отраслях промышленности [1]. Эбониты характеризуются высокими электроизоляционными свойствами, хорошей химической стойкостью, высокой твердостью, легко могут подвергаться механической обработке и т.д.

Армения богата минералами [2], которые в виде порошка могут быть использованы как наполнители в производстве эбонита с целью модификации его механических свойств, придания необходимой перерабатываемости, удешевления готового продукта и т.д. [3].

Известно, что в наполненных материалах первичные связи определяются строением и размерами молекул, взаимным их расположением, их макросвойствами и химической природой, а также наличием посторонних молекул. Все это оказывает влияние на вторичные связи, которые базируются на различных межмолекулярных взаимодействиях как внутри тел, так и на их поверхности, что справедливо как для наполнителей, так и для связующих веществ (каучуков, смол и т.д.) [4].

В настоящей работе рассматриваются данные, полученные в результате введения в состав эбонита различных порошкообразных наполнителей, отличающихся как по химическому составу, так и по строению (формой) частиц.

Известно, что наполнители по форме частиц подразделяются на трехмерные (корпускулярные), двухмерные (ламелльные) и одномерные (фибриллярные). На механические характеристики эбонитов оказывают влияние не только форма частиц наполнителя, но и их размер, по которому в настоящее время они подразделяются на:

- макродисперсные – выше 0,1 мм;
- микродисперсные – от 0,1 до 0,05 мм;
- коллоиднодисперсные – от 0,05 до 0,001 мм;
- высокодисперсные – меньше 0,001 мм.

Принципиальный недостаток такого распределения заключается в том, что получающиеся при рассеивании фракции можно сравнить только в случае одинаковой формы зерен.

Порошкообразные наполнители характеризуются также строением их поверхности, что определяется удельной поверхностью (отношение общей поверхности диспергированного в данной среде тела к его объему или массе).

Диаметр частиц и величина удельной поверхности наполнителей можно представить следующей зависимостью [5]:

диаметр частиц (мкм)	удельная поверхность (м ² /кг)
100	50
1	5000
0.1	50000

Величина удельной поверхности увеличивается с ростом насыпного веса, объемного веса и седиментационного объема порошкового наполнителя. Для корпускулярных наполнителей отношение объемного и насыпного удельных весов является достаточно постоянным, в то время как отношения этих характеристик возрастают при переходе к ламеллярной и фибриллярной формам частиц [6].

При проведении настоящих исследований выбранные наполнители предварительно измельчались в шаровой мельнице, после чего в виде водного раствора пропускались через сито с размерами ячеек 0,05 мм. В итоге все наполнители имели размеры частиц меньше 50 мкм [7].

Технология изготовления использованных в работе наполнителей дает нам право принять следующие допущения:

- величина частиц наполнителей ограничивается сверху 50 мкм,
- количество частиц с меньшим диаметром и их распределение по размерам и удельной поверхностью принимается приблизительно одинаковым для всех наполнителей с корпускулярной формой частиц.

При исследованиях были использованы только широко распространенные в Армении трехмерные (мрамор, туф, доломит и серпентинит) и двухмерный (сланец негорючий) минеральные наполнители, которые вводились в рецептуру эбонита в различных количествах (30, 60, 100 и 200 массовых %) на 100 массовых частей каучука (Наирит ДП И СКН-28).

Химический состав использованных наполнителей в % [8] приведен в табл. 1

Таблица 1

Наименование наполнителей	SiO ₂	CaO	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	MgO	K ₂ O+Na ₂ O	TiO ₂
Туф (Артик)	63,5	3.56	4.47	15.56	1.38	9.46	1.0
Сланец (Раздан)	64.32	4.61	5.42	13.93	2.6	1.5	-
Серпентинит (Шоржа)	32..0	1.32	3.35	5.80	35.06	-	-
Мрамор (Арташат)	0.23	53.5	0.11	0.42	2.14	-	-
Доломит (Сисиан)	1.05	31.34	0.47	1.16	21.48	-	-

Согласно данным табл. 1 туф и сланец почти не отличаются по химическому составу, однако, как отмечалось выше, они имеют различные формы частиц: трехмерную – туф и двухмерную – сланец [5]. Остальные наполнители одинаковы по форме частиц – все трехмерные, но различаются по химическому составу (см. табл.1). Отметим также, что удельные массы использованных наполнителей колеблются в пределах 2,2 до 2,8 г/см³ [7].

При изготовлении эбонитовых композитов (ЭК) используемые наполнители вводили в состав на лабораторных вальцах 320 160/160 при фрикции 1:1,27 с интенсивным охлаждением вальцов холодной водой.

Технологический процесс изготовления смесей ЭК на вальцах предусматривал следующие операции:

- предварительная пластикация каучука;
- введение стабилизаторов старения;
- введение наполнителей и масла;
- введение ускорителей вулканизации;
- введение сшивающих компонентов;
- снятие готовой смеси с вальцев в виде полотна толщиной 2-2,5мм.

Время изготовления смесей ЭК в количестве до 1 кг зависело от количества вводимого наполнителя и составляло от 15 до 35 мин.

С целью определения физико-механических свойств ЭК были изготовлены опытные исходные образцы в виде пластин с длиной 170 мм, шириной 140 мм, толщиной 2 и 4мм, а также цилиндры с диаметром 20 и высотой 30мм.

Вулканизация образцов производилась под давлением 10 и 20 МПа в течение 30 и 45 мин. Образцы из прессформ извлекались при различных режимах охлаждения без затруднений.

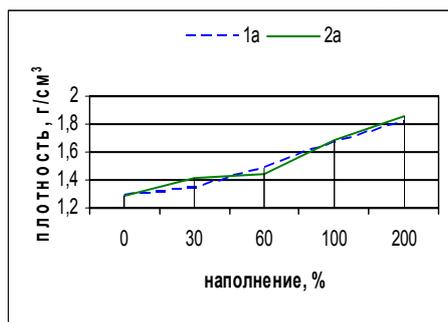
Механические и физические характеристики изготовленных образцов эбонитовых композитов оценивались по следующим показателям:

- прочность при сжатии по ГОСТ-у 4652-81 (СТ СЭВ 2896-61)
- прочность при разрыве по ГОСТ-у 1162-80 (СТ СЭВ 1199-78)
- напряжение изгиба при заданном прогибе по ГОСТ-у 4648-71 (СТ СЭВ 892-78)
- твердость по Бринеллю по ГОСТ-у 4670-91 (ИСО 2039/1-87) .
- плотность по ГОСТ-у 6427-71.

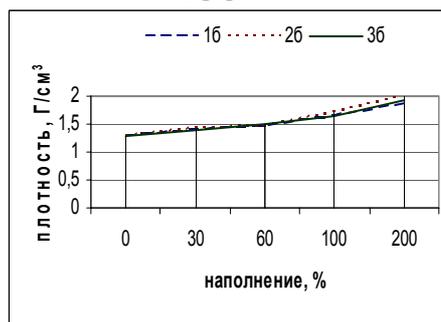
Результаты и их обсуждение

На фиг.1 приведены графики изменения плотности ЭК в зависимости от количества введенных наполнителей.

Из этих графиков можно заключить, что на характер изменения плотности ЭК введенные наполнители практически не оказывают влияния ни по форме частиц (кривые 1а и 2а), ни по химическому составу (кривые 1б, 2б и 3б). Такой результат свидетельствует о том, что плотность как характеристика для исследованных ЭК зависит только от количества введенного наполнителя и индифферентна к их качеству.



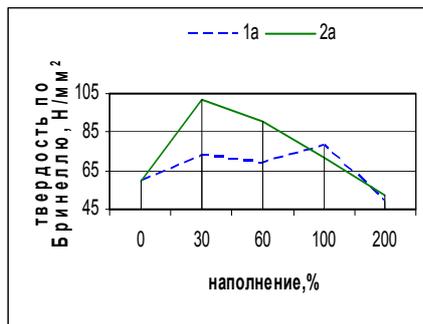
а)



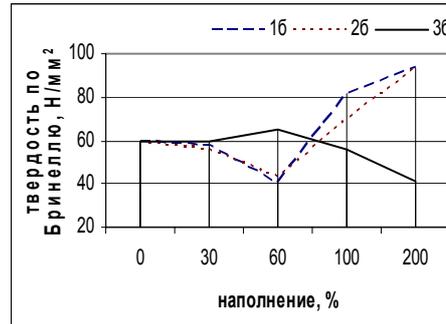
б)

Фиг.1. Графики изменения плотности ЭК в зависимости от количества введенных наполнителей. 1а-туф, 2а- сланец, 1б- серпентинит, 2б – мрамор, 3б- доломит.

Графики изменения твердости по Бринеллю образцов из ЭК в зависимости от количества введенных в их состав наполнителей приведены на фиг.2.



а)



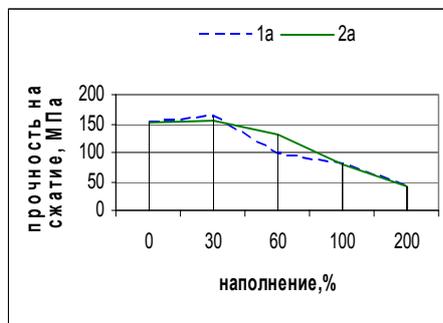
б)

Фиг.2. Графики изменения твердости по Бринеллю ЭК в зависимости от количества введенных наполнителей. 1а-туф, 2а- сланец, 1б- серпентинит, 2б – мрамор, 3б- доломит.

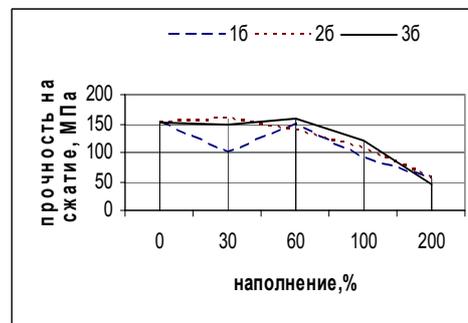
Согласно данным фиг.2 при наполнении до 60% твердость ЭК в случае использования сланцевого наполнителя (кривая 2а) оказывается значительно больше, чем в случае использования тупого наполнителя (кривая 1а). При дальнейшем увеличении количества указанных наполнителей (100 и 200%) твердости ЭК выравниваются и одновременно снижаются.

Таким образом, при одинаковом химическом составе наполнителей (туф и сланец) ламеллярная форма частиц (сланец) при низких концентрациях наполнения (до 60%) приводит к значительному росту твердости ЭК. Несколько иные закономерности наблюдаются при наполнении ЭК серпентинитом, мрамором и доломитом (кривые 1б, 2б и 3б.)

На фиг.3 приведены графики изменения прочности на сжатие ЭК в зависимости от количества введенных в состав наполнителей.



а)



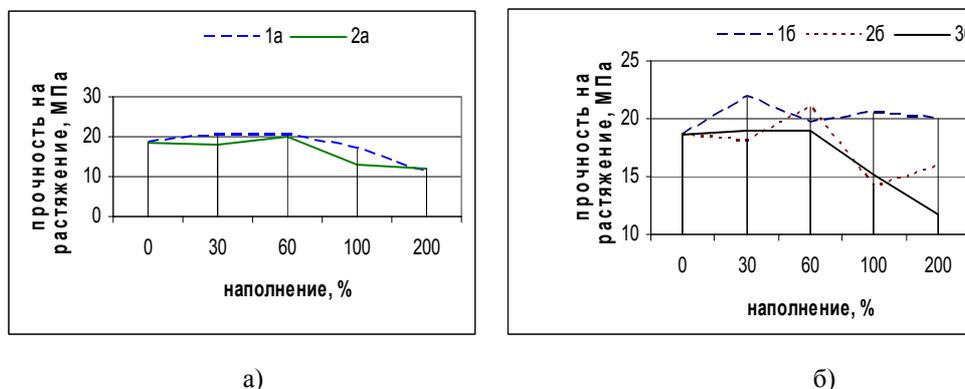
б)

Фиг.3 Графики изменения прочности на сжатие ЭК в зависимости от количества введенных наполнителей. 1а-туф, 2а- сланец, 1б- серпентинит, 2б – мрамор, 3б- доломит.

Из данных фиг.3а следует, что при наполнении в 60% прочность на сжатие ЭК в случае использования сланцевого наполнителя (кривая 2а) оказывается существенно больше, чем в случае использования тупого наполнителя (кривая 1а), а более высокое наполнение (100 и 200%) в рассматриваемых случаях приводит только к снижению прочности ЭК.

Согласно графикам фиг.3б зависимости прочности при сжатии ЭК от количества введенного наполнителя (серпентинит, мрамор и доломит) имеют практически одинаковый характер, кроме 30% наполнения ЭК серпентинитом (кривая 1б).

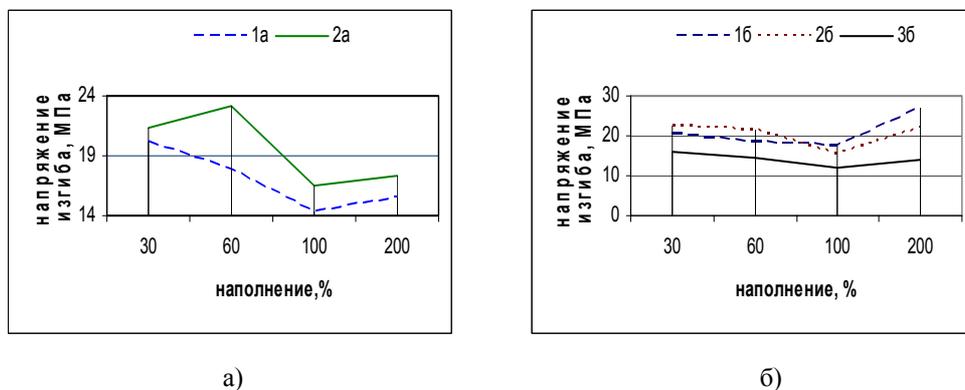
Графики изменения прочности ЭК при одноосном растяжении в зависимости от количества введенных в состав наполнителей приведены на фиг.4.



Фиг.4 Графики изменения прочности на растяжение ЭК в зависимости от количества наполнителя. 1а-туф, 2а- сланец, 1б- серпентинит, 2б – мрамор, 3б- доломит

Из данных фиг.4а следует, что при увеличении количества введенных туфовых и сланцевых наполнителей до 60% наблюдается некоторый рост разрывной прочности ЭК (кривые 1а и 2а), а дальнейшее увеличение количества этих наполнителей приводит к снижению прочности. Почти аналогичные изменения разрывной прочности ЭК при наполнении до 60% наблюдаются и для мрамора, и для доломита (кривые 2б и 3б). Прочность же на растяжение ЭК, наполненного серпентинитом, практически не зависит от количества введенного наполнителя (кривая 1б).

На фиг.5 приведены графические зависимости изгибающего напряжения при прогибе 3мм балочных образцов из ЭК от количества введенных наполнителей.



Фиг.5 Графики изменения изгибающего напряжения ЭК в зависимости от количества наполнителя. 1а-туф, 2а- сланец, 1б- серпентинит, 2б – мрамор, 3б- доломит.

Согласно графикам фиг.5 значения изгибающего напряжения ЭК, наполненных от 30% до 200%, в случае использования сланца оказывается всегда больше, чем в случае использования туфа (см. кривые 2а и 1а). Практически аналогичное явление наблюдаются и для ЭК, наполненных серпентинитом и мрамором (кривые 1б и 2б) по сравнению с ЭК, наполненным доломитом (кривая 3б).

Приведенные на фиг.1-5 данные об изменении физико-механических характеристик эбонитовых композитов в зависимости от степени их наполнения различными минеральными наполнителями дают возможность установить определенные закономерности.

Из сравнения физико-механических показателей ЭК, полученных с использованием наполнителей с близкими химическими составами, но с различными

формами частиц (туфовый-трехмерный и сланцевый-двухмерный), можно заключить, что:

- величины плотности ЭК со сланцем и с туфом практически не зависят от вида наполнителя и с увеличением степени наполнения они увеличиваются;

- до 60% наполнения твердость ЭК со сланцем существенно превосходит твердость ЭК с туфом, а увеличение наполнения от 100 до 200% приводит к выравниванию и дальнейшему, практически одинаковому снижению твердости ЭК;

- значения прочности на сжатие рассматриваемых ЭК при наполнении до 30% не меняются и практически одинаковые, а при увеличении степени наполнения до 200% имеет место снижение прочности в 3,5 раза, при этом, в случае наполнения в 60% прочность ЭК со сланцем окзывается существенно больше прочности ЭК с туфовым наполнителем;

- увеличение степени наполнения до 60% практически не влияет на разрывную прочность рассматриваемых ЭК, наполнение же до 200% приводит к снижению прочности ЭК примерно в два раза;

- напряжения изгиба при заданном прогибе для ЭК со сланцевым наполнителем, оставаясь выше по сравнению с туфовым наполнителем, в зависимости от степени наполнения изменяется более выражено.

Результаты, полученные при наполнении эбонитов серпентинитом, мрамором и доломитом, имеющими одинаковую форму частиц (корпускулярная), но отличающимися по химическому составу, свидетельствуют о следующем:

- величины плотности упомянутых ЭК практически не зависят от типа наполнителя и увеличивается с увеличением степени наполнения;

- твердость ЭК, наполненных до 30%, для всех трех наполнителей практически одинакова, а при дальнейшем увеличении степени наполнения ее изменение для ЭК с серпентинитом и мрамором резко отличается от изменения ЭК с доломитом;

- изменение прочности на сжатие ЭК для вышеотмеченных наполнителей до 200% наполнения носит один и тот же характер, кроме случая наполнения серпентинитом в 30%;

- в случае увеличения наполнения серпентинитом до 200% прочность на растяжение ЭК остается практически одинаковой в то время как для мрамора и доломита такое постоянство наблюдается до наполнения до 60%, а дальше падает;

- закономерность изменения напряжения изгиба ЭК при заданом прогибе для всех вышеупомянутых трех наполнителей почти одинаковая, различие наблюдается только в значениях этой характеристики.

Заключение

Исходя из приведенного анализа, можно сделать определенный вывод о выборе оптимального, в зависимости от назначения, количества наполнения эбонитовых композитов, что удобно отобразить в виде табл.2.

Таблица 2

Наименование наполнителей	Оптимальное кол-во наполнителя в масс.% от 100 масс частей связующего			
	Твердость	Прочность на сжатие	Прочность на растяжение	Напряжение изгиба
Сланец	30-60	30	30-60	60
Туф	30-100	30	30-60	30
Серпентинит	100-200	60	до 200	200
Мрамор	100-200	30-60	до 200	60
Доломит	до 60	30-60	до 200	60

Таким образом, минеральные наполнители Армении в виде порошка с размерами частиц меньше 50мкм можно успешно использовать в рецептурах эбонитовых композитов на основе каучуков (наирит ДП и СКН-28) как общетехнического назначения, так и для создания изделий со сэндвичным строением—мостовые подушки, сейсмические опорные изоляторы и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке МНТЦ в рамках проекта А–892.

Литература:

1. Ржевская Т.Н., Сосина И.А. Производство эбонитовых изделий. М.: Химия, 1978. 68с.
2. Мелкумян С. Камень—наше богатство. Ереван: Луйс, 1989. 335с.
3. Hansmann. J. Anwendung Von Füllstoffen -Adhasion, 1971. Bd. 15. №8. P. 226-270.
4. Hansmann. J. Füllstoffe. Arten und Wirkung -Adhasion, 1970. Bd. 14. №10. P.360-384.
5. Oswald W. Kolloid-Taschenbuch: Leipzig, 1984. 215p.
6. Грач С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость. М.: Химия, 1975. 265с.
7. Справочное руководство. Л.: Химия, 1975. 285с.
8. Оганесян М.Л. Индустрия камня. Ереван: Айастан, 1976. 270с.

Институт механики
НАН Армении
АООТ ЕрЗРИ

Поступила в редакцию
12.12.2005

УДК 620:678

**РАЗРУШЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ
МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ
ДЕФОРМИРОВАНИИ**

Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н.

Ն.Ե.Սարգսյան, Ն.Ն.Սարգսյան

Թեղիկավոր կոմպոզիտային նյութերի քայքայման երկարատև և ցիկլիկ ձևախախտման դեպքում

Հետազոտված է շերտավոր կոմպոզիտային նյութերի քայքայման մեխանիզմը կառճատև ստատիկ և երկարատև ցիկլիկ բեռնավորման դեպքերում: Վերլուծությունը հիմնված է ապակե-, աջիե- և օրգանապլաստների ամրության, ձևախախտման և քայքայման փորձարարական հետազոտման մեծածավալ արդյունքների ուսումնասիրության վրա, նրանց սակավացիկային և բազմացիկլային հոգնածության պայմանների դեպքում ձգման, սեղմման, սիմետրիկ ցիկլով ձգման-սեղմման, հարթ մաքուր ծռման և միջշերտային սահքի պայմաններում: Դիտարկված է սիմետրիկ կենտրոնական անցքի և մակերևույթային ճեղքի տեսք ունեցող լարումների կուտակիչների ազդեցությունը նյութի վնասվածության գործընթացի զարգացման վրա: Ուսումնասիրված է ճաքերի ծագման, կուտակման և տարածման առանձնահատկությունները, կախված կոմպոզիտի ամրանավորման կառուցվածքից և բեռնավորման ուղղությունից: Նկարագրված են հոգնածային ճաքերի ծագման և տարածման երեք փուլեր, որոնք միասին վերցրած բերում են կոմպոզիտի քայքայմանը: Քննարկվում են թեղիկավոր կոպոզիտների քայքայման էմպիրիկ մոդելի կառուցման հարցեր, որոնք հաշվի են առնում նյութի լարվածային վիճակի և երկարատև ցիկլիկ բեռնավորման հիմնական բնութագրիչները:

N.E.Sargsyan, N.N.Sargsyan

Destruction Of Fiber Composite Material Under Long Term Cycle Deformation

Researched the laminar composite materials failure mechanism under the static short-term and cyclic long-term loading. The analysis reasoning on the results of extensive experimental studies of strength, deformability and failure of glass-fiber, black-reinforced and organoplast materials under the stipulation that low-cycle and high-cycle fatigue are under the stretching, pressuring, symmetric stretching-pressuring cycle, simple bending and interlaminar shift. Considered the impact of symmetrical cut stress concentrator and central round outlet into the process of material development of failure. Studied the characteristics of crack birth process, their accumulation and extension depend upon the structure of armoured composite material and loading direction. Described three stage of fatigue crack beginning and spreading which is in aggregate bring to damage of composite. Discussed the questions of fibrous composite damaging empirical model considering the major characteristics of strained state and cyclic warping duration.

Исследован механизм разрушения слоистых композитных материалов при кратковременном статическом и длительном циклическом нагружении. Анализ основан на результатах обширного экспериментального исследования прочности, деформативности и разрушения стекло-, угле- и органопластиков в условиях мало- и многоциклового усталости при растяжении, сжатии, симметричном цикле растяжения-сжатия, плоского чистого изгиба и межслойного сдвига. Рассмотрено влияние на процесс развития повреждаемости материала концентратора напряжений в виде симметричного поверхностного надреза и центрального кругового отверстия, соответственно проведённых в плоскости армирующего слоя и перпендикулярного к нему направления. Изучены особенности процесса зарождения трещин, их накопления и распространения в зависимости от структуры армирования композита и направления нагружения. Описаны три этапа возникновения и распространения усталостных трещин, в совокупности приводящих к разрушению композита.

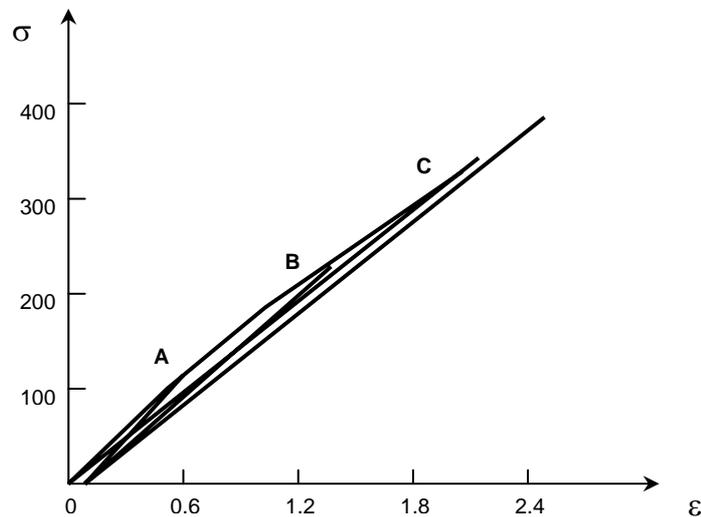
Исследованию процессов зарождения и развития усталостных трещин в конструкционных материалах посвящено множество статей, обзоров, монографий и т.д. Проблема разрушения материалов особенно актуальна в связи с ужесточением температурно-силовых и других условий эксплуатации конструкций и элементов, повышением требований к их надежности и долговечности ([1-2] и др.).

Целью настоящей работы является исследование макрохарактера усталостного разрушения полимерных армированных композитных материалов в условиях длительного циклического деформирования. Работа основывается на результатах экспериментального исследования усталостной прочности, деформативности и разрушения волокнистых композитных материалов, опубликованных в [3-10], ранее нами не опубликованных данных и на известных положениях механики разрушения армированных сред. Объектом исследования служат ориентированные слоистые пластики, изготовленные на основе различных модификаций эпоксидных смол. Наполнителем для этих композитов служат органические и неорганические материалы типа органических, углеродных и стеклянных волокон. Экспериментальные результаты соответствуют испытаниям плоских образцов в виде двухсторонней лопатки и прямоугольной полоски. Образцы были как гладкие (без концентратора напряжений) и с концентраторами напряжений в виде центрального кругового отверстия или поверхностного надреза. Рассматриваются случаи длительного симметричного растяжения-сжатия, пульсирующего цикла растяжения и сжатия, а также плоского чистого изгиба и межслойного сдвига образцов, вырезанных из готового пластика в направлениях армирования и в промежуточных к ним направлениях. Указанные испытания соответствуют областям мало- и многоциклового усталости материалов. При этом частота циклического нагружения фиксировалась в пределах, соответственно, 1-3 и 800-3600 цикл./мин. Продолжительность циклического деформирования (база испытаний) составляла соответственно 1000 и 10^6 циклов.

Проведено визуальное и микроскопное изучение процессов зарождения и дальнейшего развития повреждаемости материалов (усталостных трещин) при длительном переменном деформировании образцов композита. В результате исследований установлено, что основной причиной разрушения композитного материала является зарождение трещины в полимерном связующем или возникновение трещины на поверхности раздела «армирующее волокно-полимерная матрица», а не разрыв отдельно взятых армирующих волокон. В каждом из рассмотренных случаев нагружения кривая зависимости «напряжение-деформация» статического кратковременного растяжения материала может быть представлена ломанной диаграммой, состоящей из двух или трёх линейных участков. Точки слома этой диаграммы определённо указывают на особенности процесса развития повреждаемости материала на различных стадиях его сопротивления разрушению и на скачкообразный характер накопления механических повреждений во времени вплоть до его окончательного разрушения, т.е. излома образца. Установлены экспериментальные значения напряжений и деформаций, соответствующих указанным точкам слома диаграммы деформативности. Эти напряжения, например, для нижней точки слома (перегиба) диаграммы статической деформируемости находятся в пределах 0,1-0,25 от предела кратковременной прочности композита и зависят от типа наполнителя, степени ортогонального армирования, угла линии действия нагрузки относительно направления волокон, а также других свойств композита. На фиг.1, в частности, приведены кривые растяжения и разгрузки образцов, иллюстрирующие сопротивляемость стеклопластика разрушению при повторно-статическом нагружении.

Циклическое деформирование материала в итоге приводит к образованию магистральной трещины. При этом, на фазе образования микротрещин, их накопления и зарождения магистральной трещины развитие повреждаемости происходит в

области опасного сечения образца материала. Основная часть настоящего исследования проведена на стекловолокнистых слоистых пластиках, что даёт возможность последующего отделения (отслаивания) армирующих слоёв друг от друга и осуществить описание характера повреждаемости композита, т.е. его дефектацию.



Фиг.1. Типовая диаграмма растяжения разгрузки ортогонально-армированного стеклопластика. Разгрузка начинается с точек А, В, С.

Усталостное разрушение испытанных здесь композитных материалов имеет объёмный характер и развитие повреждаемости происходит не только в плоскостях параллельных максимальным напряжениям, но и в соседних к ним сечениях.

Поверхность повреждаемости, в частности, у образцов с концентратором напряжения в виде центрального кругового отверстия, в опасном сечении имеет вид параболоида вращения с вершиной у поверхности концентратора с геометрической осью, перпендикулярной к линии действия нагрузки.

Как показывают расчёты, в ходе разрушения материала температура его циклического разогрева, имеющего место в области многоциклового усталости, незначительно влияет на общую меру повреждаемости, т.е. чисто механический характер процесса повреждаемости существенно превалирует над тепловым размягчением и разрушением материала из-за влияния теплового поля напряжений.

Композитный материал может иметь ряд различных плоскостей, по которым его механические свойства проявляются достаточно слабо, что является следствием особенностей микроструктуры материала. Локальные разрушения начинаются именно в этих плоскостях и, в основном, обусловлены действием касательных напряжений, по отношению к которым, как известно, слоистые композитные материалы слабо сопротивляются.

В наших предыдущих работах, а также другими авторами ранее установлено, что такого характера макроразрушения композита определённым образом снижает влияние концентратора напряжения на ход процесса разрушения, несколько сглаживая пиковые значения полей напряжений. Эта особенность слоистых композитных материалов резко отличает их от механического поведения под нагрузкой традиционных изотропных конструкционных материалов, типа металлов и сплавов.

В качестве критерия разрушения принимается нарушение сплошности среды в полимерной матрице или граничной поверхности «волокно-матрица», которые являются следствием зарождения микротрещин и их определённого накопления в

первичной стадии сопротивления материала. В подобных случаях значение напряжения вблизи некоторого повреждённого участка или их группы превосходит определённое предельное значение, которое может быть названо критической величиной напряжения, соответствующего так называемому нижнему порогу трещинообразования материала.

В соответствии с современной оценкой потери несущей способности композита, их разрушение начинается с процесса зарождения трещины в окрестности имеющегося в материале исходного дефекта различного происхождения и в дальнейшем возникновением и развитием (распространением) трещин на поверхности раздела «матрица-волокно», и, наконец, при наиболее высоких напряжениях, разрывом тех волокон, которые имеют те или иные технологические несовершенства или же какие-то недостатки структуры армирования. Последнее может проявляться разрывом отдельных волокон. Указанными выше явлениями в целом и обусловлено появление отдельных сломов (перегибов) диаграммы деформирования материалов при их кратковременном статическом нагружении вплоть до слома образца.

Таким образом, установлены три основных случая разрушения волокнистых материалов. Они сводятся к появлению повреждения материалов вследствие накопления трещин в полимерной матрице, разрыву или отрыву отдельных волокон от матрицы и накоплению повреждений в некотором слабом звене композита, которые вместе взятые и приводят к конечному разрушению материала.

Слоистые пластики, испытанные в настоящей работе, по-разному сопротивляются деформированию и разрушению при сдвиге в плоскости армирования (слоя) и в перпендикулярном к ней направлении. В первом случае эффект влияния армирования практически отсутствует и прочность композита при сдвиге, в основном, определяется прочностью полимерного связующего и сопротивляемостью адгезионных связей на граничной поверхности «волокно-матрица». Во втором случае, при нагружении в направлении перпендикулярном плоскости армирования, эффект армирования имеет значение, которое существенно возрастает по мере усиления степени ортогонального армирования композита.

Описанные выше три вида процесса разрушения в конечном итоге мало зависят от режима нагружения, а именно: растяжения, сжатия, изгиба и сдвига.

Разрушение стеклопластиков может происходить и от нормальных напряжений, при их действии в плоскости армирующего слоя или же в направлении, перпендикулярном в плоскости армирования. В первом случае разрушение происходит вследствие образования и накопления микротрещин или нарушений связей на граничной поверхности «волокно-матрица». Во втором же случае разрушение происходит из-за отслаивания армирующих слоёв композита друг от друга.

В данной работе, при циклическом деформировании стеклопластиков, в зависимости от взаимного расположения армирующих слоёв, дальнейшее развитие возникающих трещин могло произойти нелинейно, т.е. в некоторых случаях наблюдалось отклонение направления распространения трещины от волокна, а именно: «перепрыгивание» трещины на направление соседнего волокна.

Поскольку в слоистых пластиках могут быть различные плоскости слабого сопротивления разрушению, то, очевидно, что в процессе объёмного разрушения материала распространение трещин может происходить в любом направлении.

Обобщая вышеуказанное, в механизме усталостного разрушения композита можно выделить три характерных процесса:

- зарождение осевых трещин в направлении внешней силы;
- распространение трещин в направлении, перпендикулярном направлению нагружения;

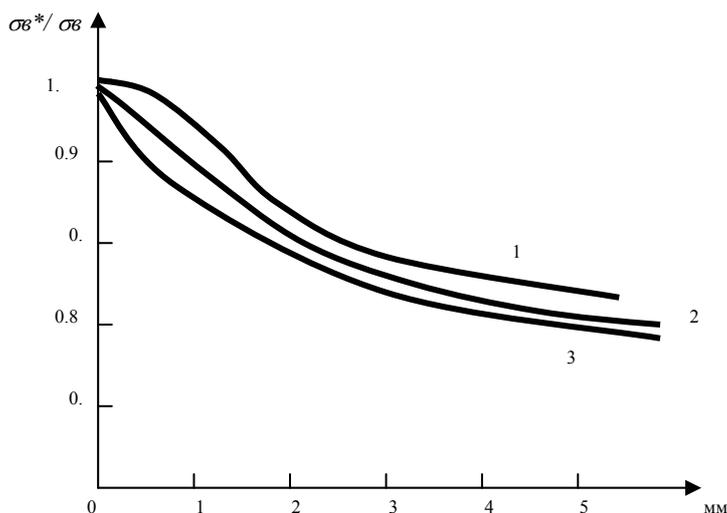
- развитие трещин в направлениях, отличных от направления нагружения, но при этом, одновременно, параллельно направлениям армирующих волокон.

Если материал разрушается при амплитудных значениях напряжения, которые меньше прочности контрольных образцов (предварительно не подвергшихся циклическому деформированию), то это свидетельствует о том, что в процессе продолжительного нагружения в материале происходят необратимые изменения, вызывающие снижение значения его прочностных характеристик до величины действующего циклического напряжения.

Очевидно, что усталостное разрушение волокнистых композитных материалов происходит по трём вышеописанным процессам одновременно.

Циклическое нагружение слоистых пластиков, имеющих слабые участки сопротивления и условия для развития трещин, приводит к нарушению прочностных связей между полимерной матрицей и армирующими волокнами, дальнейшему распространению трещин и отслаиванию слоёв композита друг от друга.

Обработка экспериментальных результатов показывает, что для исследованных стеклопластиков значение предельной деформации разрушения в перпендикулярном к волокнам направлении составляет не более, чем две трети от величины деформации разрушения композита в направлении волокон. В этом заключается причина преждевременного разрушения слоёв композита, уложенных перпендикулярно к основному направлению армирования.



Фиг.2. Влияние длины поверхностного надреза на изменение прочности стеклопластика.

Для иллюстрации на фиг.2 приведены графики, показывающие влияние изменения длины поверхностного надреза на сопротивляемость стеклопластика разрушению при его длительном деформировании (падение прочности стеклопластика). Цифрами 1, 2 и 3 на графиках обозначено количество циклов предварительного растяжения-разгрузки, соответственно, 100, 200 и 400, при напряжении, равном условному пределу малоциклового усталостной прочности на принятой базе испытания. В рассматриваемых испытаниях глубина поверхностного надреза составляла 0,5 мм, при ширине призматического рабочего участка образца 15мм.

Как известно, при одноосном растяжении образцов в виде двухсторонней лопатки, строго говоря, в материале возникает плоское напряжённое состояние. В этом случае причину разрушения часто принято объяснять концентрацией

напряжений, возникающих на концах волокон, выходящих на торцевую поверхность рабочего участка образца (т.н. эффект перерезанных нитей). Вместе с тем, в литературе имеются известные экспериментальные данные [11], подтвержденные нашими работами, которые указывают не только на отсутствие концентраций напряжений у концевых участков волокон, выходящих на торцевую часть рабочего участка образца, но и подтверждают определённую степень их недогруженности во всём процессе кратковременного статического растяжения образца вплоть до момента его излома, когда нагружение происходит в диагональном, по отношению к ортогонально ориентированным волокнам композита, направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. Новосибирск: Наука, 1992. 294с.
2. Глушак Б.Л., Новиков С.А., Рузанова А.И., Садырин А.И. Разрушение деформируемых сред при импульсивных нагрузках. Нижний Новгород: Нижегородский Университет. 1992. 192с.
3. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. Особенности влияния концентратора напряжений на прочность композитного материала. // Изв. НАН и ГИУА. Сер. «Технические науки». 2003. Т. LVI. №3. С.355-359.
4. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. Особенности процесса распространения усталостных трещин вблизи концентратора напряжений в композитных материалах при их осевом растяжении. // Изв. НАН и ГИУА. Сер. «Технические науки». 2003. Т. LVI. №1. С.3-7.
5. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. Характер повреждения композитных материалов и оценка снижения их прочности при циклическом деформировании. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №1. С.78-82.
6. Саркисян Н.Е., Карапетян К.А., Хачикян А.Г. Прочность и деформативность слоистых пластиков при сложном нагружении. // Изв. НАН и ГИУА. Сер. «Технические науки». 1998. №1. 5с.
7. Саркисян Н.Е. Расчётная модель анизотропии малоциклового деформативности стеклопластиков. // Механика композитных материалов. 1985. №3. С.437-442.
8. Саркисян Н.Е., Кравченко В.Л., Петров В.С. Влияние УКИ на прочность и деформативность стеклотекстолита при малоциклового растяжении. // Механика композитных материалов. 1979. №1. С.163-165.
9. Саркисян Н.Е. Анизотропия малоциклового усталостной прочности и деформативности стеклопластика при растяжении. // Механика полимеров. 1976. №3. С.425-429.
10. Саркисян Н.Е. Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВМ. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1971. Т.24. №3. С.61-73.
11. Гольдман А.Я., Савельева Н.Ф. О напряженном состоянии и некоторых особенностях разрушения образцов стеклопластиков при растяжении под углом к направлению армирования. // Механика полимеров. 1967. №6. С.1030-1034.

Ереванский Государственный Университет
Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
18.07.2006

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հատոր
Том 59 13 2006
Volume

Բովանդակություն

Содержание

Ասատրյան Վ.Մ., Բարբոյան Ա.Հ. Ասիմպտոտիկ բանաձևեր Վեբերի ֆունկցիաների արմատների համար	3	В.М. Асатрян, А.А. Баблоян АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ ВЕБЕРА
Ա.Ս. Ավետիսյան, Դ.Ռ. Ալեքսանյան Ներքին և արտաքին եզրերով հավասարաչափ բաշխված նորմալ ուժերի ազդեցության տակ շրջանային օղակաձև սալի կայունության մի խնդրի մասին	13	Аветисян А.С., Алексанян Д.Р. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВНУТРЕННЕМУ И ВНЕШНЕМУ КОНТУРАМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ
Ս.Վ. Վարդանյան Արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը լրիվ պլաստիկության պայմանի դեպքում	21	Варданян С.В. ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ БЫСТРОВАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ
Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան Բարակ պիեզաէլեկտրիկ սեպի համար էլեկտրաառաձգականության չորս եզրային խնդիրների լուծման մասին	27	Саргсян А.М., Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г. О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА
Զ. Ն. Դանոյան, Ն. Զ. Դանոյան, Գ.Ա.Մանուկյան Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և փափուկ դիէլեկտրիկ շերտով շերտավոր համակարգում (Բնութագրիչ հավասարման հետազոտումը – Մաս II)	34	Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕК- ТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И МЯГКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ (Исследование характеристического уравнения – часть II)
Գ.Հ. Սարգսյան Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևութին ամրացված է դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ կտոր առ կտոր հաստատուն առաձգականության գործակցով	45	Саркисян К.Г. О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕК- ТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ С КУСОЧНО- ПОСТОЯННЫМ УПРУГИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ
Գ.Գ. Օհանյան, Ս.Լ.Սահակյան Անսեղմելի հեղուկում գնդաձև զազային պղպջակի ոչ գծային բաբախումների մասին	56	Оганян Г. Г., Саакян С. Л. ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
Ա. Լ. Շեկյան Գլանի և վրանի կոնտակտային փոխազդեցությունը սահմանային շփման ռեժիմում	66	Шемян А. Л. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРА И ВТУЛКИ В РЕЖИМЕ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ
Վ.Վ.Հակոբյան, Լ.Յու.Կարապյան, Յու.Կ.Կարապյան, Կ.Ա.Կարապետյան Միներալային լցիչներով մոդիֆիկացված էրոնիտային կոմպոզիտների մեխանիկական հատկությունները	73	Акопян В.В., Кабалян Л.Ю., Кабалян Ю.К., Карапетян К.А. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭБОНИТОВЫХ КОМПОЗИТОВ, МОДИФИЦИРОВАННЫХ МИНЕРАЛЬНЫМИ НАПОЛНИТЕЛЯМИ
Ն.Ե.Սարգսյան, Ն.Ն.Սարգսյան Թելիկավոր կոմպոզիտային նյութերի քայքայումն երկարատև և ցիկլիկ ձևախախտման դեպքում	80	Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. РАЗРУШЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ

ДЕФОРМИРОВАНИИ