

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2006

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ  
УПРУГОЙ СРЕДЕ

Белубекян В. М., Мгерян Д. Э.

#

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Դ. Հ. Մհերյան

**Տրանսվերսալ իզոտրոպ, առաձգական միջավայրում, մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը**

Առանձգական ալիքները և մասնավորաբար մակերևութային ալիքները տրանսվերսալ իզոտրոպ միջավայրերում եղել են շատ հեղինակների հետազոտության օբյեկտ [1]: Տվյալ աշխատանքում, Ռեյլեյի տիպի մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդրի համար, ստացվել են ալիքի գոյության պայմաններ կոնկրետ անիզոտրոպ նյութերի համար:

V. M. Belubekyan, D. H. Mheryan

**Three-Dimensional Problem of the Surface Waves Propagation in Transversely Isotropic Elastic Medium**

Elastic waves and particular surface waves in transversely isotropic elastic media were object of research of many authors. In this work we obtain conditions of existence of wave for three-dimensional problem of the surface waves propagation in transversely isotropic elastic media for concrete materials.

Упругие волны, и в частности, поверхностные волны, в трансверсально-изотропной среде были объектом исследований многих авторов [1]. В настоящей работе для трехмерной задачи распространения поверхностных волн типа Рэлея получены условия существования для конкретных анизотропных материалов.

1. Рассматривается трансверсально-изотропное упругое полупространство. Предполагается, что через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Иначе говоря, в каждой точке имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Можно такое тело рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии бесконечно высокого порядка – ось вращения.

Предполагается, что плоскость, ограничивающее полупространство, является плоскостью изотропии. Ось  $z$  направлена нормально к плоскости изотропии, а оси  $x$  и  $y$  произвольно в этой плоскости. В таком случае полупространство в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область  $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \leq z < \infty)$ :

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид [2]:

$$\begin{aligned}
& c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\
& + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
& \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
& + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$c_{44} \Delta_2 w + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

здесь  $u, v, w$  – проекции вектора перемещения на оси координат  $x, y, z$  соответственно,  $c_{ij}$  – пять упругих независимых констант трансверсально-

изотропной среды,  $\rho$  – плотность материала,  $\Delta_2$  – двумерный оператор Лапласа:  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  (1.2)

Для первого и второго уравнений из системы (1.1), по аналогии с задачей плоской деформации [3], вводится преобразование

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \tag{1.3}$$

Отметим, что преобразование (1.3) было использовано также для пространственной задачи статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [4], а также для пространственной задачи распространения поверхностных волн в изотропной среде [5].

С помощью преобразования (1.3) первые два уравнения системы (1.1) заменяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \Delta_2 \chi + c_{44} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\
& c_{11} \Delta_2 \psi + c_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial w}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Затем третье уравнение системы (1.1) дифференцируется по  $z$  и туда подставляется выражение  $\frac{\partial w}{\partial z}$  из второго уравнения системы (1.4), что дает:

$$\begin{aligned}
& \Delta_2^2 \psi + 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta_2 \psi + \alpha_2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_2 \psi - \\
& - \left( \frac{\alpha_2}{c_2^2} + \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{2c_{11}c_{44}}, \quad \alpha_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}$$

$$c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{c_{44}}{\rho} \quad (1.6)$$

В частном случае изотропной среды  $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ,  $c_{44} = \mu$ ,  $c_{12} = c_{13} = \lambda$ , из (1.6) следует  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  и уравнение (1.5) приводится к виду [5]

$$\left( \Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \Delta \Psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.7)$$

где  $\Delta$  – трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Таким образом, система уравнений (1.1) привелась к решению автономных первого уравнения из (1.4) и уравнения (1.5). Второе уравнение из (1.4) будет определять функцию перемещения  $w$  после определения искомого  $\Psi$  и  $\chi$ . При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} w = 0 \quad (1.8)$$

Из первых двух условий (1.8) и из (1.3) следуют условия затухания для функций  $\Psi$  и  $\chi$ :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \chi = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi = 0 \quad (1.9)$$

2. Решения первого уравнения из (1.4) и уравнения (1.5) представляются в виде

$$\chi = \Phi(z) \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$\Psi = F(z) \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в первое уравнение из (1.4) и в уравнение (1.5) приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомого функций  $\Phi$  и  $F$ . Решение указанных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям затухания (1.9), имеет вид

$$\Phi = B e^{-p_3 \Gamma z}$$

$$F = A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + A_2 e^{-p_2 \Gamma z} \quad (2.2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \pm \sqrt{\left[ \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \right]^2 - \alpha_2(1-\eta)(1-\theta\eta)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \sqrt{1 - \alpha_3 \eta} \quad (2.4)$$

$$\theta = \frac{c_{44}}{c_{11}}, \eta = \frac{\omega^2}{c_2^2 \Gamma^2}, \Gamma^2 = k_1^2 + k_2^2, \alpha_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \quad (2.5)$$

Из (2.2)–(2.4) следует, что для удовлетворения условиям затухания (1.9) необходимо выполнение условий

$$0 < \eta < \min(1, \alpha_3^{-1}, \theta^{-1}) \quad (2.6)$$

В случае изотропного материала  $\alpha_3 = 1$   $\theta \leq 0,5$ .

Подстановкой (2.1) с учетом (2.2) во второе уравнение системы (1.4), искомая функция  $w$  с учетом условия затухания (1.8) определяется следующим образом:

$$w = \frac{c_{44} \Gamma}{c_{13} + c_{44}} \left[ \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} A_2 e^{-p_2 \Gamma z} \right] \times \quad (2.7)$$

$\times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$

3. Рассматривается полупространство со свободной от нагрузки поверхностью

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = 0, \sigma_{32} = 0 \text{ при } z = 0 \quad (3.1)$$

Граничные условия (3.1) в перемещениях имеют вид

$$c_{13} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Подстановка (1.3) с учетом (2.1), (2.2) и (2.7) в граничные условия (3.2) приводит к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных  $A_1, A_2, B$ :

$$\begin{aligned} & [p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4] A_1 + [p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4] A_2 = 0 \\ & \left[ \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} - \alpha_5 p_1 \right] A_1 + \left[ \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} - \alpha_5 p_2 \right] A_2 = 0 \quad (3.3) \\ & p_3 B = 0 \end{aligned}$$

Из (3.3) при  $p_3 \neq 0$  следует  $B=0$  и равенство нулю детерминанта приводит к дисперсионному уравнению, которое преобразуется к виду [6]

$$R(\eta) = (p_1 - p_2) R_1(\eta) \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(\eta) = & \frac{c_{13}}{c_{44}} \frac{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}{\alpha_2} + \theta^{-1}(1 - \theta\eta) \frac{2}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \right] + \\ & + \left\{ \theta^{-1}(1 - \theta\eta) - \frac{c_{13}}{c_{44}} [\alpha_4 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)] \right\} p_1 p_2 + \theta^{-1}(1 - \theta\eta) [\alpha_4 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)] \quad (3.5) \end{aligned}$$

В (3.3) и (3.5) дополнительно использованы обозначения

$$\alpha_4 = \frac{c_{13}(c_{13} + c_{44})}{c_{33}c_{44}}, \alpha_5 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{44}} \quad (3.6)$$

В этом случае  $A_2 = -\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4} \dot{A}_1, B = 0$

Компоненты вектора перемещения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 i \left[ e^{-p_1 \Gamma z} - e^{-p_2 \Gamma z} \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4} \right] A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ v &= -k_2 i \left[ e^{-p_1 \Gamma z} - e^{-p_2 \Gamma z} \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4} \right] A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ w &= \frac{c_{44} \Gamma}{c_{13} + c_{44}} \left[ \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} e^{-p_1 \Gamma z} - \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta) + \alpha_4} e^{-p_2 \Gamma z} \right] A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

В частном случае изотропной среды уравнение  $p_1 - p_2 = 0$  имеет единственное решение  $\eta = 0$ . Корню уравнения  $p_1 - p_2 = 0$  соответствует тривиальное решение:  $u = v = w = 0$ . В табл.1 приводятся корни уравнения  $p_1 - p_2 = 0$  для некоторых трансверсально-изотропных материалов.

Характеристики материалов взяты из монографии [7].

Таблица 1

материал	Условия затухания	$\eta$
Ве(бериллий)	(0 ; 0,8172)	0,9382; -2,1731
ЦТЦ-4(керамика)	(0 ; 1)	∅
ZnO(окись цинка)	(0 ; 1)	∅
CdS(сульфид кадмия)	(0 ; 1)	∅
Ti(титан)	(0 ; 0,7537)	∅
Zn(цинк)	(0 ; 1)	0,9858; -80,2468
Y(итрий)	(0 ; 1)	∅
TiO <sub>2</sub> (оксид титана)	(0 ; 0,3880)	0,9976; -1,4812
Sn(anag)	(0 ; 1)	∅
Cd(кадмий)	(0 ; 1)	0,7009; -10,4816
In(индий)	(0 ; 0,3846)	0,5484; -8,9361

Из исследованных материалов только для Zn и Cd получается корень в интервале затухания, но этим корням соответствует тривиальное решение, поскольку если  $p_1 = p_2$ , то  $u = v = w = 0$ .

Значения функции  $R_1(\eta)$  на концах интервала  $[0,1]$  имеют вид:

$$R_1(0) = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{33}c_{44}} \frac{\sqrt{c_{11}}}{\sqrt{c_{33}}} (c_{11}c_{33} - c_{13}^2), R_1(1) = \frac{c_{11} - c_{44}}{c_{33}c_{44}} (-c_{13}c_{44} - c_{44}^2) \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что  $R_1(1) < 0$ , а знак выражения  $R_1(0)$  определяет выражение  $c_{11}c_{33} - c_{13}^2$ , который положительный для тех материалов, которые мы исследуем.

$$R_1(\alpha_3^{-1}) = \frac{c_{44} + c_{13}}{4c_{33}c_{44}^2} \times \left\{ c_{12}^2 - c_{11}^2 + (c_{11}c_{33} + c_{12}c_{33} - 2c_{13}^2) \frac{\sqrt{(2c_{44} - c_{11} + c_{12})(c_{11} + c_{12})}}{\sqrt{c_{44}c_{33}}} \right\} \quad (3.9)$$

Знак (3.9) определяет выражение

$$\left\{ c_{12}^2 - c_{11}^2 + (c_{11}c_{33} + c_{12}c_{33} - 2c_{13}^2) \frac{\sqrt{(2c_{44} - c_{11} + c_{12})(c_{11} + c_{12})}}{\sqrt{c_{44}c_{33}}} \right\}$$

Для Ti условия затухания–промежутков  $(0; \alpha_3^{-1})$ . Из  $R_1(\alpha_3^{-1}) > 0 \Rightarrow$ , что уравнение  $R_1(\eta) = 0$  не имеет действительных корней в промежутке  $(0; \alpha_3^{-1})$ .

Для Be условия затухания–промежутков  $(0; \alpha_3^{-1})$ . Из  $R_1(\alpha_3^{-1}) < 0 \Rightarrow$ , что уравнение  $R_1(\eta) = 0$  имеет действительный корень в промежутке  $(0; \alpha_3^{-1})$ .

В табл. 2 приводятся корни уравнения  $R_1(\eta) = 0$  в промежутке условия затухания для некоторых трансверсально-изотропных материалов.

Таблица 2

материал	Условия затухания (2.6)	$R_1(\eta)$ в концах промежутка затух.	$\eta$
Be(бериллий)	(0 ; 0,8172)	1,8175; -0,1081	0,7443
ЦТЦ-4 (керамика)	(0 ; 1)	15,2686; -3,8364	0,88886
ZnO(окись цинка)	(0 ; 1)	12,8193; -2,7533	0,9131
CdS(сульфид кадмия)	(0 ; 1)	16,5452; -3,0995	0,9374
Ti(титан)	(0 ; 0,7537)	6,8425; 0,9130	∅
Zn(цинк)	(0 ; 1)	10,3983; -4,2645	0,7489
Y(итрий)	(0 ; 1)	5,1063; -1,2035	0,8676
TiO <sub>2</sub> (оксид титана)	(0 ; 0,3880)	2,9913; 1,2744	∅
Sn(anag)	(0 ; 1)	6,1082; -1,3361	0,8849
Cd(кадмий)	(0 ; 1)	18,4050; -5,5514	0,8638
In(индий)	(0 ; 0,3846)	8,4165; 1,6617	∅

В табл. 1 и 2 приведены также численные результаты для  $\lambda$  и  $\nu$ , которые не являются чисто трансверсально-изотропными, но имеют близкие к ним свойства.

Когда верхний предел промежутка затухания становится меньше, чем 0,8, то уравнение  $R_1(\eta) = 0$  не имеет действительного решения в этом промежутке и, следовательно, поверхностная волна не существует.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chadwick P. Wave Propagation in Transversely Isotropic Elastic Media. Parts 1 – 3, Proc. of the Roy. Soc. of London (A). 1989, v. 422, 1 1862, p 23 – 121.
2. Royer D., Dieulesaint E. Elastic Waves in Solids. V1. Springer - Verlag Berlin Heidelberg 2000 374p.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Wang Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media. // Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. N1. PP. 105 – 115.
5. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. №4. С. 362 –369.
6. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах. // В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. НАН Армении. 1997. С. 79–96.
7. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.:Наука, 1977. 399 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
22.12.2005

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ  
ИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ

Պոգոսյան Ն.Դ.

Ն.Զ. Պոգոսյան

Հարթ առաձգական ալիքների անդրադարձումը իզոտրոպ համասեռ ալիքատարում

Հնդվածում ուսումնասիրվում է հարթ լայնական և երկայանական ալիքների անդրադարձումը ալիքատարի  $x = 0$  միջնապատից, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

N. D. Poghosyan

The Reflections of Plane Elastic Weves in Homogenous Isotropic Waveguide

In the paper the plane longitudinal and transverse (shear) waves reflection from waveguidepartition  $x=0$  are considered in different cases of conditions on boundary  $x=0$ .

Имеется ряд работ об отражении упругих волн в волноводе в случае, когда направляющие поверхности свободны от нагрузок [1], [2].

Исследование указанных задач связано с большими трудностями. В настоящей работе предлагается в качестве модельной случай, когда на направляющих поверхностях волновода заданы условия Навье, что позволяет получить аналитические результаты.

В статье рассматривается отражение плоских продольных и поперечных (сдвиговых) волн от перегородки волновода  $x = 0$  при разных условиях на границе  $x = 0$ .

1. Рассматриваются плоские волны, которые распространяются либо в области  $\Gamma\{x \in [0, +\infty); y \in [0, h]; z \in (-\infty, +\infty)\}$  (плоская деформация), либо в слое  $\Gamma'\{x \in [0, +\infty); y \in [0, h], z \in (-b, b)\}$  (обобщенное плоское напряженное состояние) при наличии следующих граничных условий (условие Навье) [3]:

$$u|_{y=0} = u|_{y=h} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=h} = 0 \quad (1.1)$$

где  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  – соответствующие компоненты перемещения  $\vec{w} = \{u; v; 0\}$ .

Продольные волны в области  $\Gamma$  распространяются со скоростью

$$C_e^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ламе,  $\nu$  – коэффициент Пуассона  $E$  – модуль Юнга, а  $\rho$  – плотность среды [4,5].

Продольные волны в области  $\Gamma'$  распространяются со скоростью

$$C_i^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \quad (1.2.1)$$

Поперечные волны в  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  распространяются с одинаковой скоростью [4,5]

$$C_t^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \quad (1.3)$$

При рассмотрении отражения продольных и поперечных волн от границы  $x = 0$  мы воспользуемся уравнением Ламе [4]:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \bar{W}) + \mu \Delta \bar{W} \quad (1.4)$$

После замены

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.5)$$

система (1.4) приводится к уравнениям [1]

$$C_l^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad C_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

для потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ , где  $C_l$  определяется по формулам (1.2) и (1.2.1).

С учетом граничных условий (1.1), для  $\varphi$  и  $\psi$  получим выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= A_n \exp i(\omega_n t + k_{1n} x) \sin \lambda_n y + B_n \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \sin \lambda_n y \\ \psi_n &= D_n \exp i(\omega_n t + k_{2n} x) \cos \lambda_n y + C_n \exp i(\omega_n t - k_{2n} x) \cos \lambda_n y \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

(или суперпозиция этих выражений, так как уравнения (1.6) линейны и однородны)

$$\eta_n = \frac{\omega_n^2}{C_t^2 \lambda_n^2}, \quad \theta = \frac{C_t^2}{C_l^2} = \frac{1-\nu}{2}$$

$$\text{где } \lambda_n = \frac{n\pi}{h}, \quad k_{1n} = \lambda_n \sqrt{\theta \eta_n - 1}, \quad k_{2n} = \lambda_n \sqrt{\eta_n - 1}$$

$\theta \eta_n - 1 > 0$ ,  $\eta_n - 1 > 0$  для существования нетривиального решения.

1. Пусть на границу  $x = 0$  падает продольная волна

$$\varphi_0 = A_n \exp i(\omega_n t + k_{1n} x) \sin \lambda_n y \quad (1.6.2)$$

тогда отражаются продольная и поперечные волны:

$$\varphi_1 = B_n \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \sin \lambda_n y \quad (1.6.3)$$

$$\psi_1 = C_n \exp i(\omega_n t - k_{2n} x) \cos \lambda_n y \quad (1.6.4)$$

Для получения общего решения надо полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \psi = \psi_1, \quad \theta_{1n} = \sqrt{\theta \eta_n - 1}, \quad \theta_{2n} = \sqrt{\eta_n - 1}.$$

Пусть на границе  $x = 0$  выполняются условия Навье

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0 \quad (1.7)$$

Учитывая (1.5), условия (1.7) записываются в виде

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.7.1)$$

или в виде системы

$$\begin{cases} -B_n \theta_{1n}^2 + i \theta_{2n} C_n = A_n \theta_{1n}^2 \\ B_n + i \theta_{2n} C_n = -A_n \end{cases} \quad (1.7.2)$$

из (1.7.2) получим

$$i \theta_{2n} (1 + \theta_{1n}^2) C_n = 0 \quad (1.7.3)$$

отсюда вытекает  $C_n = 0$ .

В итоге получили, что при выполнении условий (1.7) при падении на границу  $x = 0$  продольной волны (1.6.2) отражается только продольная волна (1.6.3), (при этом  $B_n = -A_n$ )

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -A_n \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \sin \lambda_n y \\ \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = i A_n k_{1n} \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \sin \lambda_n y \quad (1.7.5)$$

$$v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -A_n \lambda_n \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \cos \lambda_n y$$

Рассмотрим отражение волны (1.6.2) при условии скользящего контакта на границе [3]

$$u|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.7.6)$$

или 
$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.7.7)$$

или 
$$\begin{cases} i \theta_{1n} \lambda_n A_n - i \theta_{1n} \lambda_n B_n - \lambda_n C_n = 0 \\ i \lambda_n^2 A_n \theta_{1n} - i \lambda_n^2 b_n \theta_{1n} - \lambda_n^2 \theta_{2n} C_n = 0 \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Откуда следует  $C_n = 0$ , т.е. отраженная волна будет продольной и задается по формулам (1.7.5).

Усложним граничные условия при  $x = 0$

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0 \quad (\text{жесткое закрепление}) \quad (1.7.9)$$

С учетом (1.5) условие принимает вид:

$$\begin{cases} B_n - i \theta_{1n}^{-1} C_n = A_n \\ B_n + i \theta_{2n} C_n = -A_n \end{cases}$$

Отсюда получим

$$C_n = \frac{2i \theta_{1n}}{\theta_{1n} \theta_{2n} + 1} A_n \quad (1.7.10)$$

Из (1.7.10) следует, что  $C_n \neq 0$ . Из (1.7.10) также следует, что  $B_n = 0$  при  $\theta_{1n} \theta_{2n} = 1$ , откуда  $C_n = i \theta_{1n} A_n$  (уравнение  $\theta_{1n} \theta_{2n} = 1$  имеет решение

$\eta_n = 1 + 1/\theta$ ) и в данном случае продольная волна трансформируется в отраженную сдвиговую волну.

С учетом (1.7.10) получим

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\theta_{1n}\theta_{2n}-1}{\theta_{1n}\theta_{2n}+1} A_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x) \sin \lambda_n y \\ \psi_1 &= \frac{2i\theta_{1n}}{\theta_{1n}\theta_{2n}+1} A_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x) \cos \lambda_n y\end{aligned}\quad (1.7.11)$$

В случае  $\theta_{1n}\theta_{2n} = 1$  получим

$$\psi_1 = i\theta_{1n} A_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x) \cos \lambda_n y$$

Рассмотрим граничное условие при  $x = 0$  (свободный край)[3].

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.7.12)$$

С учетом (1.5) получим

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-v) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \Big|_{x=0} &= 0 \\ \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=0} &= 0\end{aligned}$$

Подставляя значения  $\varphi$  и  $\psi$ , получим

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 \theta_{1n}^2 A_n - \lambda_n^2 \theta_{1n}^2 B_n - v \lambda_n^2 A_n - v \lambda_n^2 B_n + i \lambda_n^2 (1-v) \theta_{1n} C_n = 0 \\ 2i \lambda_n^2 \theta_{1n} A_n - 2i \lambda_n^2 \theta_{1n} B_n - \lambda_n^2 C_n + \lambda_n^2 \theta_{2n}^2 C_n = 0 \end{cases} \quad (1.7.13)$$

Из (1.7.13) следует

$$\begin{aligned}i \left[ \frac{(1-v)\theta_{2n}}{\theta_{1n}^2 + v} + \frac{\theta_{2n}^2 - 1}{2\theta_{1n}} \right] C_n &= 2A_n \\ \text{или} \quad i \frac{2(1-v)\theta_{1n}\theta_{2n} + (\theta_{2n}^2 - 1)(\theta_{1n}^2 + v)}{2\theta_{1n}(\theta_{1n}^2 + v)} C_n &= 2A_n\end{aligned}$$

С учетом того, что в случае области  $\Gamma'$  (пластинка)  $\theta = \frac{1-v}{2}$ , имеем

$$\begin{aligned}i \frac{2(1-v)\theta_{1n}\theta_{2n} + (\eta_n - 2) \cdot \frac{1}{2}(1-v)(\eta_n - 2)}{2\theta_{1n} \frac{1-v}{2}(\eta_n - 2)} C_n &= 2A_n \\ i \frac{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}}{2\theta_{1n}(\eta_n - 2)} C_n &= 2A_n\end{aligned}$$

Используя полученное соотношение, получим

$$C_n = -i \frac{4\theta_{1n}(\eta_n - 2)}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}} A_n$$

$$B_n = A_n - i \frac{\theta_{2n}^2 - 1}{2\theta_{1n}} C_n = \frac{4\theta_{1n}\theta_{2n} - (\eta_n - 2)^2}{4\theta_{1n}\theta_{2n} + (\eta_n - 2)^2} A_n$$
(1.7.14)

В случае  $B_n = 0$  падающая продольная волна полностью трансформируется в поперечную волну.

Из (1.7.14) следует, что  $B_n = 0$  при

$$4\theta_{1n}\theta_{2n} - (\eta_n - 2)^2 = 0,$$

или

$$(\eta_n - 2)^2 - 4\sqrt{(\theta_{1n} - 1)(\eta_n - 1)} = 0$$
(1.7.15)

Получили знакомое уравнение Рэлея. Например, при  $\theta = \frac{1}{3}$  уравнение (1.7.15) имеет решение  $\eta_n = 4$ , которое удовлетворяет условиям

$$\theta\eta_n - 1 > 0, \quad \eta_n - 1 > 0$$

2. Пусть на границу  $x = 0$  падает поперечная волна

$$\psi_0 = D_n \exp i(\omega_n t + k_{2n} x) \cos \lambda_n y$$
(2.1.1)

тогда отражаются волны:

$$\psi_1 = C_n \exp i(\omega_n t - k_{2n} x) \cos \lambda_n y$$
(2.1.2)

$$\varphi_1 = B_n \exp i(\omega_n t - k_{1n} x) \sin \lambda_n y$$
(2.1.3)

В данном случае надо полагать  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ . Рассмотрим случай граничных условий (1.7) (условия Навье).

С учетом (1.5) получим

$$-\lambda_n^2 \theta_{1n} B_n - i\lambda_n^2 \theta_{2n} D_n + i\lambda_n^2 \theta_{2n} C_n = 0$$

$$\lambda_n B_n - i\lambda_n \theta_{2n} D_n + i\lambda_n \theta_{2n} C_n = 0$$

После элементарных преобразований получим

$$\begin{cases} -\theta_{1n} B_n + i\theta_{2n} C_n = i\theta_{2n} D_n \\ B_n + i\theta_{2n} C_n = i\theta_{2n} D_n \end{cases}$$

Из полученной системы следует  $(1 + \theta_{1n})B_n = 0$ , так как  $1 + \theta_{1n} \neq 0$ , то  $B_n = 0$  и  $C_n = D_n$ .

Следовательно, отражается только поперечная волна, а отраженная продольная волна отсутствует. При наличии условия (1.7.7) (скользящий контакт) имеем

$$\begin{cases} -i\lambda_n \theta_{1n} B_n - \lambda_n D_n - \lambda_n C_n = 0 \\ -i\lambda_n^2 \theta_{1n} B_n + \lambda_n^2 \theta_{2n} D_n + \lambda_n^2 \theta_{2n} C_n = 0 \end{cases}$$

От полученной системы следует, что  $B_n = 0$  и  $C_n = -D_n$ , и опять отраженная продольная волна (2.1.3) отсутствует.

В случае  $u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0$  (жесткое закрепление) имеем

$$\begin{cases} i\theta_{1n}B_n + C_n = -D_n \\ B_n + i\theta_{2n}C_n = i\theta_{2n}D_n \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно  $B_n$  и  $C_n$ , получим

$$B_n = \frac{2i\theta_{2n}}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} D_n \quad C_n = \frac{\theta_{1n}\theta_{2n} - 1}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} D_n \quad (2.1.4)$$

Из (2.1.4) следует, что при  $\omega_n = C_1\lambda_n$  имеем  $B_n = 0$ , а второе из полученных соотношений показывает, что отраженная поперечная волна имеет меньшую амплитуду.

В случае граничных условий (1.7.12) с учетом (1.5) получим

$$\begin{cases} -\lambda_n^2\theta_{1n}^2B_n - v\lambda_n^2B_n - i\lambda_n^2(1-v)\theta_{2n}D_n + i\lambda_n^2(1-v)\theta_{2n}C_n = 0 \\ 2i\lambda_n^2\theta_{1n}B_n - \lambda_n^2D_n - \lambda_n^2C_n + \lambda_n^2\theta_{2n}^2D_n + \lambda_n^2\theta_{2n}^2C_n = 0 \end{cases}$$

После некоторых преобразований получим

$$\begin{cases} -(\theta_{1n}^2 + v)B_n + i(1-v)\theta_{2n}C_n = i(1-v)\theta_{2n}D_n \\ -2i\theta_{1n}B_n + (\theta_{2n}^2 - 1)C_n = -(\theta_{2n}^2 - 1)D_n \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Определитель этой системы  $\Delta \neq 0$ .

Решив эту систему относительно  $B_n$  и  $C_n$ , получим

$$B_n = -\frac{4i\theta_{2n}(\eta_n - 2)D_n}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}} \quad (2.1.6)$$

Из (2.1.6) следует, что при  $\eta_n = 2$  отраженной продольной волны не существует

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{4i\theta_{2n}(\eta_n - 2)}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}} D_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x) \\ \psi_1 &= -D_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x) \cos \lambda_n y \end{aligned}$$

В итоге получено, что при падении продольной волны на стенку  $x = 0$  волновода  $\Gamma\{x \in [0, +\infty); y \in [0, h]; z \in (-\infty, +\infty)\}$  или волновода  $\Gamma\{x \in [0, +\infty), y \in [0, h], z \in (-b, b)\}$  и при наличии на границе  $x = 0$  условий Навье или скользящего контакта, отраженная волна будет продольной (т.е. трансформация продольной волны в сдвиговую не происходит). При наличии на границе  $x = 0$  граничных условий жесткого закрепления или свободного края есть отраженная, продольная и поперечные волны. При этом в некоторых частных случаях падающая продольная волна полностью трансформируется в отраженную сдвиговую волну.

Аналогичные выводы имеют место при падении на границу волновода поперечной волны.

В конце статьи хочу выразить благодарность М.В. Белубеяну за существенные консультации по данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Городецкая Н.С., Гринченко В.Т. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах. // Акустический Вестник. 2004. Т.7. №1. С.30–43.
2. Городецкая Н.С. Еще раз о краевом резонансе. // Акустический Вестник. 2000. Т.3. №4. С.35–44.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин учитывающих поперечные сдвиги. // В сб: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд. НАН Армении. 2002. С.67–88.
4. Новацкий В Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.
5. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука. 1982.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
29.12.2005

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ  
 ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ  
 ПОЛОСЫ И НЕКОТОРОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В.

Լ.Ա.Աղալովյան, Ռ.Ս.Գևորգյան, Ա.Վ.Սահակյան

Հնգաշերտ իզոտրոպ շերտառաձգական շերտի համար խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը և որոշ կիրառություն

Չերտառաձգական շերտի համար առաձգականության տեսության երկչափ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրմամբ հաշվարկված են համաչափ հավաքված հնգաշերտ իզոտրոպ շերտի ներքին խնդրի լարումների թեկոթը և տեղափոխությունների վեկտորը, երբ շերտերի մի մասի միջև տեղի ունի ոչ լրիվ կոնտակտ Կուլոնի օրենքով: Կատարված է վերլուծություն մի մասնավոր դեպքի համար, որով կարելի է մոդելավորել սկավառակային արգելակների լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը արգելակման ժամանակ:

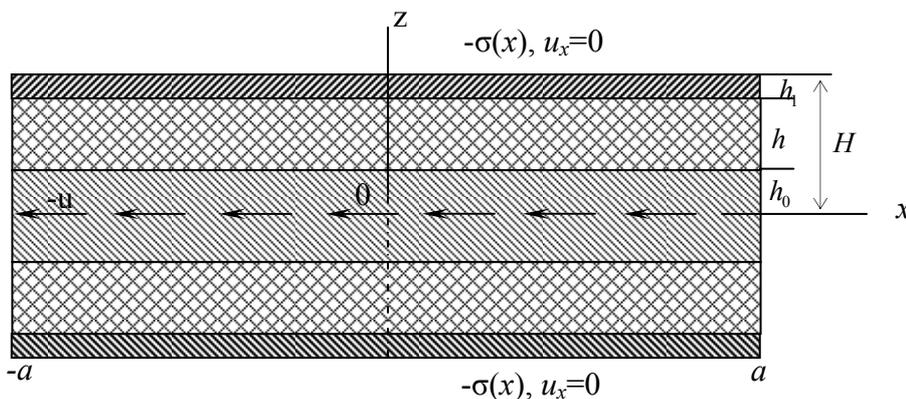
L.A. Aghalovyan, R.S. Gevorgyan, A.V. Sahakyan

Asymptotic solution of a mixed boundary value problem for five-layer isotrope thermoelastic strip and some application

By asymptotic integration of the two-dimensional equations of elasticity theory for a thermoelastic strip, the components of stress tensor and components of displacement vector are calculated in inner problem of symmetrical assembled five-layer strip, when between a parts of layers there are noncomplete contact subjected to Coulomb law of dry friction. Analysis of the special case, which can model of stress-strain state of brake pads at braking, is carried out.

Асимптотическим интегрированием двумерных уравнений теории упругости для термоупругой полосы вычислены компоненты тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче симметрично собранной пятислойной изотропной полосы, когда между частью слоев осуществляется неполный контакт по закону сухого трения Кулона. Проведен анализ для частного случая, которым можно смоделировать напряженно-деформированное состояние дисковых тормозных колодок при торможении.

**Постановка задачи.** Пусть имеем составную полосу, занимающую область  $\Omega = \{x, z : |x| \leq a, -H \leq z \leq H, |a| \gg H = h_0 + h + h_1\}$  и состоящую из пяти симметрично собранных слоев, упругим и температурным характеристикам которых в дальнейшем придаются индексы в соответствии с индексами их толщин (фиг.1). При этом предполагается, что средний слой имеет возможность скольжения и в зоне контакта со соседними слоями имеет место закон Кулона



Фиг. 1.

сухого трения с коэффициентом трения  $f$ .

На внешних краях полосы заданы симметричные смешанные граничные условия

$$\sigma_{zz}(x, \pm H) = -\sigma(x); \quad u_x(x, \pm H) = 0 \quad (1.1)$$

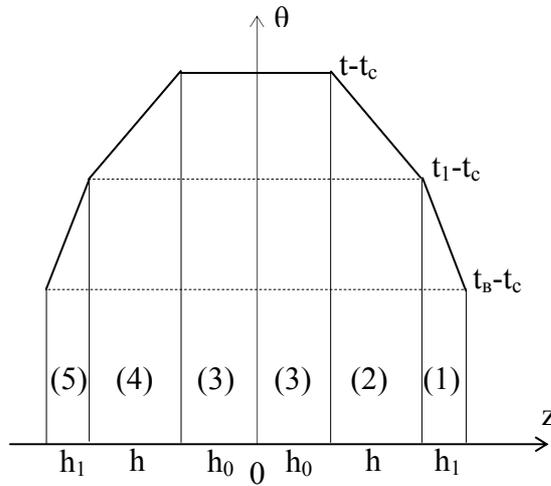
Считается, что ось симметрии полосы жестко смещается на  $-u = \text{const}$

$$u_x(x, 0) = -u, \quad u_z(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

а условия контакта между слоями имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}^{(1)}(x, h_0 + h) &= \sigma_{jz}^{(2)}(x, h_0 + h), \quad u_j^{(1)}(x, h_0 + h) = u_j^{(2)}(x, h_0 + h) \\ \sigma_{jz}^{(4)}(x, -h_0 - h) &= \sigma_{jz}^{(5)}(x, -h_0 - h), \quad u_j^{(4)}(x, -h_0 - h) = u_j^{(5)}(x, -h_0 - h) \quad j = x, z \\ \sigma_{zz}^{(2)}(x, h_0) &= \sigma_{zz}^{(3)}(x, h_0), \quad u_z^{(2)}(x, h_0) = u_z^{(3)}(x, h_0) \\ \sigma_{xz}^{(2)}(x, h_0) &= \sigma_{xz}^{(3)}(x, h_0) = f \sigma_{zz}^{(3)}(x, h_0) \\ \sigma_{zz}^{(4)}(x, -h_0) &= \sigma_{zz}^{(3)}(x, -h_0), \quad u_z^{(4)}(x, -h_0) = u_z^{(3)}(x, -h_0) \\ \sigma_{xz}^{(4)}(x, -h_0) &= \sigma_{xz}^{(3)}(x, -h_0) = f \sigma_{zz}^{(3)}(x, -h_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

По модели Дюгамеля-Неймана [1-3] учитывается также влияние изменения температурного поля  $\theta$  на напряженное состояние. Исходя из того, что средний слой тонок и его нагревание за счет действия сил трения происходит симметрично с обоих продольных краев, будем полагать, что в среднем слое  $|z| \leq h_0$  поддерживается постоянная температура  $t$ , а в полосах  $h_0 < |z| \leq h + h_1$  температура меняется кусочно-линейно (фиг.2). При этом считается, что на гранях  $z = \pm(h_0 + h + h_1)$  имеет место теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру  $t_c$ .



Фиг.2.

Исходя из принятых предположений, для изменения температур  $\theta$  в каждом слое будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \theta_3 &= t - t_c = \text{const} & -h_0 \leq z \leq h_0 \\
 \theta_2 &= t - t_c - \frac{z - h_0}{h} (t - t_1) & h_0 \leq z \leq h_0 + h \\
 \theta_4 &= t - t_c + \frac{z + h_0}{h} (t - t_1) & -h_0 - h \leq z \leq -h_0 \\
 \theta_1 &= \frac{(t_1 - t_c)}{\lambda_1 + \alpha h_1} [\lambda_1 - \alpha (z - h_0 - h - h_1)] & h_0 + h \leq z \leq h_0 + h_1 + h \\
 \theta_5 &= \frac{(t_1 - t_c)}{\lambda_1 + \alpha h_1} [\lambda_1 + \alpha (z + h_0 + h + h_1)] & -h_0 - h - h_1 \leq z \leq -h_0 - h
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $t_1$  – температура на контактной линии  $z = h_0 + h$ , которая определяется из условия равенства тепловых потоков на этой линии и дается формулой

$$t_1 = \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \alpha h_1) t + \lambda_1 \alpha h t_c}{\lambda_1 \lambda_2 - \alpha (\lambda_1 h - \lambda_2 h_1)} \tag{1.5}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности соответственно первого (пятого) и второго (четвертого) слоев,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена внешнего слоя со средой.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы.

**Решение задачи.** Для решения поставленной задачи в уравнениях плоской деформации теории упругости с учетом влияния температурного поля, записанных для каждого слоя,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \quad (x, z) \\
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1-\nu}{2G} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{2G} \sigma_{zz} + \alpha(1+\nu)\theta \quad (x, z) \\
\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{1}{G} \sigma_{xz}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{H} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{a}, \quad \varepsilon = \frac{H}{a}, \quad u = \frac{u_x}{a}, \quad w = \frac{u_z}{a} \tag{2.2}$$

и получаем сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon$  систему уравнений, решение которой ищем в виде асимптотического разложения [1-3]

$$Q(\xi, \zeta) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q+s} Q^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{2.3}$$

где для данного класса задач асимптотические порядки величин имеют вид  $\chi_\sigma = 1$  (для всех напряжений) и  $\chi_u = 0$  (для всех перемещений).

Одновременно представим температурную функцию в виде

$$\theta = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{2.4}$$

Подставив (2.3), (2.4) в возмущенную систему уравнений и приравняв соответствующие коэффициенты при  $\varepsilon^k$  в левых и правых частях, получим непротиворечивую систему уравнений относительно коэффициентов разложения (2.3), решение которой выражается через рекуррентные формулы, которые в размерных координатах и перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{s=0}^S Q^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{jz}^{(s)} &= \sigma_{jz}^{(s)}(x) + \sigma_{jz_*}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{xx}^{(s)} &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^{(s)} + \frac{2G}{1-\nu} \frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)G}{1-\nu} \theta^{(s)} \\
u_x^{(s)} &= u_{x0}^{(s)}(x) + \frac{z}{G} \sigma_{xz0}^{(s)} + u_{x_*}^{(s)}(x, z) \\
u_z^{(s)} &= u_{z0}^{(s)}(x) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} z \sigma_{zz0}^{(s)} + u_{z_*}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{jz_*}^{(s)} &= - \int_0^z \frac{\partial \sigma_{xj}^{(s-1)}}{\partial x} dz \quad j = x, z \\
u_{x_*}^{(s)} &= \int_0^z \left( \frac{1}{G} \sigma_{xz_*}^{(s)} - \frac{\partial u_z^{(s-1)}}{\partial x} \right) dz
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u_{z_*}^{(s)} = \int_0^z \left( \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} z \sigma_{zz_*}^{(s)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial x} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^{(s)} \right) dz$$

где величины  $\sigma_{jz_0}^{(s)}$ ,  $u_{j_0}^{(s)}$  ( $j = x, z$ ) – по четыре функции интегрирования для каждого слоя, которые должны определяться из условий (1.1)-(1.3).

Уравнения (2.1) и их общее решение, выраженное рекуррентными формулами (2.5), справедливы для всех слоев, поэтому величинам не приписаны индексы, указывающие слой.

Удовлетворив граничным условиям (1.1), условиям симметрии (1.2) и условиям контакта слоев (1.3) для  $s = 0$  (первого шага итерации) получаем

1) для первого слоя ( $h_0 + h \leq z \leq h_0 + h_1 + h$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1,0)} &= -\frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma(x) - \frac{2\alpha_1(1+\nu_1)}{1-\nu_1} \left[ t_1 - t_c - \frac{z-h-h_0}{h_1} (t_1 - t_s) \right] \\ \sigma_{zz}^{(1,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(1,0)} = f\sigma(x), \quad u_x^{(1,0)} = \frac{1}{G_1} (z-h_0-h_1-h) f\sigma(x) \\ u_z^{(1,0)} &= -\frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)G_1} (z-h_0-h)\sigma(x) - \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0\sigma(x) - \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} h\sigma(x) + \\ &+ \alpha_1 \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \left[ (t_1 - t_c)(z-h-h_0) - \frac{(z-h-h_0)^2}{2h_1} (t_1 - t_s) \right] + \\ &+ \frac{\alpha h}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} (t+t_1-2t_c) - \alpha_0 h_0 \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0} (t-t_c) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2) Для второго слоя ( $h_0 \leq z \leq h_0 + h$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(2)} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma(x) - \frac{2\alpha G(1+\nu)}{1-\nu} \left[ t - t_c + \frac{z-h_0}{h} (t+t_1) \right] \\ \sigma_{zz}^{(2,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(2,0)} = f\sigma(x) \quad u_x^{(2)} = -\left( \frac{z-h-h_0}{G} - \frac{h_1}{G_1} \right) f\sigma(x) \\ u_z^{(2)} &= -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (z-h_0)\sigma(x) + \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0\sigma(x) + \\ &+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ (t-t_c)(z-h_0) + \frac{(z-h_0)^2}{2h} (t-t_1) \right] + \alpha_0 \frac{1+\nu_0}{(1-\nu_0)} h_0(t-t_c) \end{aligned} \quad (2.7)$$

3) Для третьего слоя ( $-h_0 \leq z \leq h_0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(3)} &= -\frac{\nu_0}{1-\nu_0} \sigma(x) - \frac{2\alpha_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0} G_0(t-t_c) \\ \sigma_{zz}^{(3,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(3,0)} = f\sigma(x) \text{sign}(z) \end{aligned}$$

$$u_x^{(3)} = -u + \frac{1}{G_0} z f \sigma(x) \quad (2.8)$$

$$u_z^{(3)} = -\frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} z \sigma(x) + z \frac{\alpha_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0} (t-t_c)$$

4) Для четвертого слоя ( $-h-h_0 \leq z \leq -h_0$ )

$$\sigma_{xx}^{(4)} = -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma(x) - \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-\nu} G\theta$$

$$\sigma_{zz}^{(4,0)} = -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(4,0)} = -f \sigma(x)$$

$$u_x^{(4)} = -\left( \frac{z+h+h_0}{G} + \frac{h_1}{G_1} \right) f \sigma(x)$$

$$u_z^{(4)} = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (z+h_0) \sigma(x) + \frac{1-2\nu_0}{2G(1-\nu_0)} h \sigma(x) - \alpha_0 \frac{1+\nu_0}{(1-\nu_0)} h_0 (t-t_c) +$$

$$+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ (t-t_c)(z+h_0) + \frac{(z+h_0)^2}{2h} (t-t_1) \right] \quad (2.9)$$

5) Для пятого слоя ( $-h_1-h_0-h \leq z \leq -h_0-h$ )

$$\sigma_{xx}^{(5)} = -\frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma(x) - \frac{2\alpha_1 G_1 (1+\nu_1)}{1-\nu_1} \left[ t_1 - t_c + \frac{z+h+h_0}{h_1} (t_1 - t_6) \right]$$

$$\sigma_{zz}^{(5,0)} = -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(5,0)} = -f \sigma(x)$$

$$u_x^{(5)} = -\frac{1}{G_1} (z+h_1+h+h_0) f \sigma(x),$$

$$u_z^{(5)} = -\frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)G_1} (z+h+h_0) \sigma(x) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} h \sigma(x) +$$

$$+ \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0 \sigma(x) - \alpha_0 h_0 (t-t_c) +$$

$$+ \alpha_1 \left[ (t_1 - t_c)(z+h+h_0) + \frac{(z+h+h_0)^2}{2h_1} (t_1 - t_6) \right] - \frac{\alpha h}{2} (t+t_1 - 2t_c) \quad (2.10)$$

где  $t_6$  – температура на внешних краях пятислойной полосы, определяемая формулой

$$t_6 = t_c + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha h_1} \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \alpha h_1) (t-t_c) + 2\lambda_1 \alpha h t_c}{\lambda_1 \lambda_2 - \alpha (\lambda_1 h - \lambda_2 h_1)} \quad (2.11)$$

Выведенные формулы (2.6)-(2.10) описывают напряженно-деформированное состояние полосы с точностью  $O(\varepsilon)$ . Для более точных расчетов необходимо продолжить итерационный процесс по формулам (2.5). При этом, если функции,

заданные на продольных краях полосы, являются многочленами степени  $n$ , то после  $n + 1$  шага итерационный процесс обрывается и приводит к математически точному решению внутренней краевой задачи пятислойной полосы. Таким образом, (2.6)-(2.10) дают математически точные значения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, если считать функции, заданные на продольных краях, постоянными.

**Частный случай.** Приведенными формулами (2.6)-(2.10) можно моделировать напряженно-деформированное состояние тормозной колодки автомобилей при торможении, предполагая, что на внешних поверхностях заданы нормальные напряжения  $\sigma$ .

Выведенные формулы (2.6)-(2.10) позволяют провести также примерный энергетический расчет тормозной колодки. Предполагается, что торможение начинается в момент, когда диск автомобиля (третий слой модельной задачи) имеет кинетическую энергию  $K_0$ , которая расходуется на преодоление сил трения и приводит к неизбежному разогреву особенно среднего слоя. Следовательно, заданием величины температуры  $t$  среднего слоя, которая тем выше, чем выше кинетическая энергия  $K_0$ , неявным образом учитывается и ее влияние. Таким образом кинетическая энергия  $K_0$  превращается в работу сил трения  $A_{\text{тр}}$ , которая, в свою очередь, в тепловую энергию  $E_{\text{теп}}$  и энергию упругой деформации  $E_{\text{деф}}$

$$K_0 = A_{\text{тр}} = E_{\text{теп}} + E_{\text{деф}} \quad (3.1)$$

При этом работа силы трения будет

$$A_{\text{тр}} = f \sigma a b u \quad (3.2)$$

где  $a$  и  $b$  – продольные размеры колодки,  $u$  – жесткое перемещение третьего слоя.

Энергия деформации будет

$$\begin{aligned}
 E_{\text{деф}} = & \frac{ab}{2G_0} \int_0^h [(1-\nu_0)(\sigma_{xx}^{(3)^2} + \sigma_{zz}^{(3)^2}) - 2\nu_0\sigma_{xx}^{(3)}\sigma_{zz}^{(3)} + \sigma_{xz}^{(3)^2}] dz + \\
 & + \frac{1}{2G} \int_{h_0}^{h_0+h} [(1-\nu)(\sigma_{xx}^{(2)^2} + \sigma_{zz}^{(2)^2}) - 2\nu\sigma_{xx}^{(2)}\sigma_{zz}^{(2)} + 2\sigma_{xz}^{(2)^2}] dz + \\
 & + \frac{1}{2G_1} \int_{h_0+h}^{h_0+h+h_1} [(1-\nu_1)(\sigma_{xx}^{(1)^2} + \sigma_{zz}^{(1)^2}) - 2\nu_1\sigma_{xx}^{(1)}\sigma_{zz}^{(1)} + 2\sigma_{xz}^{(1)^2}] dz
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

А энергия нагревания диска и колодки определяется по формуле

$$E_{\text{теп}} = C_1 m_1 (t_1 + t_6 - 2t_c) + C m (t + t_1 - 2t_c) + C_0 m_0 (t - t_c) \quad (3.4)$$

где  $C_1, C, C_0$  – удельные теплоемкости материалов первого (пятого), второго (четвертого) и третьего слоев,  $m_1, m, m_0$  – их массы, а температуры  $t_1$  и  $t_6$  определяются формулами (1.5) и (2.11).

Подставив (3.2)-(3.4) в (3.1), получим связь между жестким перемещением  $u$  и заданным нормальным напряжением  $\sigma$ .

Работа выполнена в рамках проекта МНТЦ А-892.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией// В сб.: “Гр.IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов.” Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.:Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи для анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн (Наука) 2005, 468с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.02.2006

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ  
 УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Арустамян А.М.

Ա.Մ. Առուստամյան

Ուղղանկյունի զոտրոպ սալի սալի դինամիկ կայունության խնդրի թվային անալիտիկ լուծումը

Առաջարկվող աշխատանքում դիտարկվում է սեղմվող սալի դինամիկ կայունության խնդիրը, որի մոտավոր լուծման համար կիրառվել է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդը: Օգտագործվել են ֆունդամենտալ ֆունկցիաները տարբեր եզրային պայմանների դեպքում և խնդիրը բերվել է Մատյե-Հիլլի հավասարմանը: Գրաֆիկորեն ցույց են տրված դինամիկ անկայունության տիրույթները: Սեփական հաճախության հաշվարկների ստացված արդյունքները համեմատվել են տարբեր մեթոդներով հաշվարկված արդյունքների հետ: Բերված են նաև առաջին (գլխավոր) տիրույթի լայնության արժեքները մասնավոր դեպքի համար:

A. M. Arustamyan

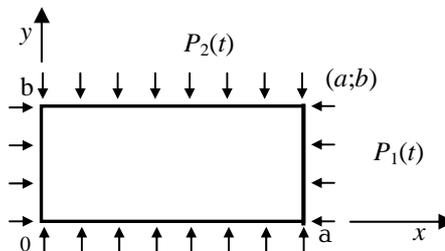
On Dynamic Stability of Rectangular Isotropic Plate with Different Boundary Conditions

The problem of dynamic stability of rectangular isotropic plate in case of different boundary conditions is considered. The solution of the problem is based on the method of solving Mathieu's equation.

В предлагаемой работе рассматривается задача динамической устойчивости и колебаний сжимаемой пластинки, для приближенного решения которой применен метод Бубнова-Галеркина. В качестве базисных функций использованы фундаментальные балочные функции при различных комбинациях граничных условий и сама задача сводится к уравнению Матье-Хилла. Графически показаны области динамической неустойчивости пластинки. Полученные результаты вычислений безразмерной частоты (с учетом свойства квазиортогональности) были сопоставлены с результатами вычислений различными методами. Приведены также значения ширины первой (главной) области неустойчивости для частного случая.

Существует много работ, которые характерны тем, что задача динамической устойчивости сводится к дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнению Матье-Хилла). К числу таких работ относятся работы Ониашвили О.Д., Болотина В.В [3,6], Алфутова Н.А, Багдасаряна Г.Е [1,2].

1. Рассматривается задача динамической устойчивости изотропной пластинки, шарнирно опертой по краям  $y=0$  и  $y=b$ , а на краях  $x=0$ ,  $x=a$  приняты различные граничные условия. Пластика выбрана размерами  $(a, b, h)$ , модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , нагруженной усилиями  $P_i(t) = P_{i0} + P_{ii} \cdot \cos \theta t$  ( $i = 1, 2$ ) (фиг. 1).



Փիգ. 1

Уравнение динамической устойчивости имеет вид [1]:

$$D\nabla^2 w + P_1(t) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2(t) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где  $w(x, y, t)$  – прогиб,  $t$  – время,  $D$  – цилиндрическая жесткость пластинки.

Представим функцию прогиба в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_m(x) \cdot V_n(y) \cdot w_{mn}(t) \quad (2)$$

где  $m, n$  – числа полуволн по осям  $Ox$  и  $Oy$ ,  $U_m(x)$  и  $V_n(y)$  – фундаментальные балочные функции собственных колебаний, удовлетворяющие условиям на краях пластинки [3].

Для рассматриваемых условий шарнирного опирания пластинки на краях  $y=0, y=b$  балочные функции и собственные значения имеют вид [2]:

$$V_n(y) = \sin \mu_n y, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

Для пластинки с граничными условиями на краях  $x=0, x=a$  имеем [2]:

1.  $x=0, x=a$  – шарнирное опирание

$$U_m(y) = \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}$$

2.  $x=0$  – шарнирное опирание,  $x=a$  – жесткая заделка

$$U_m(x) = \sin \lambda_m x - k_m \operatorname{sh} \lambda_m x$$

$$k_m = \frac{\sin \lambda_m a}{\operatorname{sh} \lambda_m a}$$

$$\lambda_1 = 3.927, \quad \lambda_2 = 7.069, \quad \lambda_3 = 10.210, \quad \lambda_4 = 13.352, \quad \lambda_m = \frac{4m+1}{4} \cdot \frac{\pi}{a} \quad (\text{при } m > 4).$$

3.  $x=0$  – жесткая заделка,  $x=a$  – жесткая заделка

$$U_m(x) = \sin \lambda_m x - \operatorname{sh} \lambda_m x - k_m (\cos \lambda_m x - \operatorname{ch} \lambda_m x)$$

$$k_m = \frac{\sin \lambda_m a - \operatorname{sh} \lambda_m a}{\cos \lambda_m a - \operatorname{ch} \lambda_m a}$$

$$\lambda_1 = 4.730, \quad \lambda_2 = 7.859, \quad \lambda_3 = 10.996, \quad \lambda_4 = 14.137, \quad \lambda_m = \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi}{a} \quad (\text{при } m > 4).$$

4.  $x=0$  – жесткая заделка,  $x=a$  – свободный край

$$U_m(x) = \sin \lambda_m x - \operatorname{sh} \lambda_m x - k_m (\cos \lambda_m x - \operatorname{ch} \lambda_m x)$$

$$k_m = \frac{\sin \lambda_m a + \operatorname{sh} \lambda_m a}{\cos \lambda_m a + \operatorname{ch} \lambda_m a}$$

$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_3 = 7.855, \quad \lambda_4 = 10.966, \quad \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi}{a} \quad (\text{при } m > 4).$$

**Случай 1** хорошо известен [3]. Применение в данном случае метода Бубнова-Галеркина лишь подтверждает известное точное решение. Функция прогиба имеет вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_m x \cdot \sin \mu_n y \cdot w_{mn}(t) \quad (3)$$

На основании метода Бубнова – Галеркина имеем:

$$\int_0^a \int_0^b L(w_{mn}(x, y, t)) \cdot \sin \lambda_i x \cdot \sin \mu_j y dx dy = 0 \quad (4)$$

В итоге уравнение (4) принимает вид уравнения Матье-Хилла:

$$w''_{mn} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) w_{mn} = 0 \quad (5)$$

$$\text{где } \Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[ 1 - \frac{P_{10}}{P_{1mn}^*} - \frac{P_{20}}{P_{2mn}^*} \right], \quad \mu = \frac{P_{1t} \cdot P_{2mn}^* + P_{2t} \cdot P_{1mn}^*}{2 \cdot (P_{1mn}^* \cdot P_{2mn}^* - P_{10} \cdot P_{2mn}^* - P_{20} \cdot P_{1mn}^*)} \quad (6)$$

$$P_{1mn}^* = \frac{D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{\lambda_m^2}, \quad P_{2mn}^* = \frac{D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{\mu_n^2} \quad (7)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{\rho h} \quad (8)$$

$P_{1mn}^*$ ,  $P_{2mn}^*$  – критические значения усилий  $P_1$ ,  $P_2$  при их независимых статических действиях,  $\mu$  – коэффициент возбуждения,  $\omega_{mn}$  – частота собственных колебаний незагруженной пластинки,  $\Omega_{mn}$  – частота собственных колебаний пластинки, нагруженной постоянными составляющими усилий.

**Для случая 2** функция прогиба представляется в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \lambda_m x - k_m \cdot \text{sh} \lambda_m x) \cdot \sin \mu_n y \cdot w_{mn}(t) \quad (9)$$

Подставив выражение (9) в уравнение (1), получаем:

$$\begin{aligned} L(w(x, y, t)) = & D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (\lambda_m^4 (\sin \lambda_m x - k_m \text{sh} \lambda_m x) + 2\lambda_m^2 \mu_n^2 (\sin \lambda_m x + k_m \text{sh} \lambda_m x) + \right. \\ & \left. + \mu_n^4 (\sin \lambda_m x - k_m \text{sh} \lambda_m x)) w_{mn}(t) - P_1(t) \cdot \lambda_m^2 (\sin \lambda_m x + k_m \text{sh} \lambda_m x) \cdot w_{mn}(t) - \right. \\ & \left. - P_2(t) \cdot \mu_n^2 (\sin \lambda_m x - k_m \text{sh} \lambda_m x) \cdot w_{mn}(t) + \rho h \cdot w''_{mn}(t) \right] \cdot \sin \mu_n y = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

На основании метода Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^a \int_0^b L(w(x, y, t)) \cdot (\sin \lambda_i x - k_i \text{sh} \lambda_i x) \sin \mu_j y dx dy = 0 \quad (11)$$

Задача динамической устойчивости пластинки приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка – к уравнению Матье-Хилла:

$$w''_{mn} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) w_{mn} = 0 \quad (12)$$

$$\text{где } \Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[ 1 - \frac{P_{10}}{P_{1mn}^*} - \frac{P_{20}}{P_{2mn}^*} \right], \quad \mu = \frac{P_{1t} \cdot P_{2mn}^* + P_{2t} \cdot P_{1mn}^*}{2 \cdot (P_{1mn}^* \cdot P_{2mn}^* - P_{10} \cdot P_{2mn}^* - P_{20} \cdot P_{1mn}^*)} \quad (13)$$

$$P_{1mn}^* = \frac{D}{\lambda_m^2 A_m} (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \mu_n^2 A_m + \mu_n^4), \quad P_{2mn}^* = \frac{D}{\mu_n^2} (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \mu_n^2 A_m + \mu_n^4) \quad (14)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} (\lambda_m^4 + 2 \cdot \lambda_m^2 \cdot \mu_n^2 \cdot A_m + \mu_n^4) \quad (15)$$

$$\text{где } A_m = \frac{\int_0^a \overline{U_m(x)} \cdot U_m(x) \cdot dx}{\int_0^a U_m^2(x) \cdot dx} \quad (16)$$

$\overline{U_m(x)}$  – сопряженная  $U_m(x)$  функция.

Фундаментальные функции, ортогональность которых хорошо известна, не всегда сохраняют это свойство в отношении своих производных. При подстановке балочных функций в уравнение (1) будем иметь производные второго и четвертого порядков. В отношении производных четвертого порядка и кратных им полученные функции ортогональны, в отношении производных второго порядка свойство ортогональности нарушается.

Из отдельных исследований известно, что балочные функции в отношении производных второго порядка обладают свойством квазиортогональности, т.е. сумма интегралов произведений с разными индексами пренебрегаема [6].

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \frac{\rho h b^4}{D \pi^4}, \quad \tilde{P}_{1mn}^* = P_{1mn}^* \frac{b^2}{D \pi^2}, \quad \tilde{P}_{2mn}^* = P_{2mn}^* \frac{b^2}{D \pi^2} \quad (17)$$

Без учета квазиортогональности:

$$\omega_{ni}^2 = \frac{D}{\rho h} (B_i + 2\mu_n^2 A_i + \mu_n^4) \quad (18)$$

$$\text{где } A_i = \frac{\int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \cdot \overline{U_m(x)} \cdot U_i(x) \cdot dx}{\int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x) \cdot U_i(x) \cdot dx}, \quad B_i = \frac{\int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^4 \cdot U_m(x) \cdot U_i(x) \cdot dx}{\int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x) \cdot U_i(x) \cdot dx} \quad (19)$$

Аналогичным образом, для двух других случаев получаем уравнение Матье (12), где (13) – (17) имеют тот же вид, но с применением соответствующих балочных функций.

Значения безразмерной величины частот собственных колебаний незагруженной пластинки в зависимости от соотношения длины и ширины пластинки при различных граничных условиях приведены в табл. 1 (без учета свойства квазиортогональности) и в табл. 2 (с учетом свойства квазиортогональности). Расхождение при сопоставлении результатов двух таблиц составляет не более 3%.

2. Рассмотрим случаи, когда на краях  $y=0$  и  $y=b$  приняты другие граничные условия. В частности,

- $x=0$  – жесткая заделка,  $y=0$  – жесткая заделка,
- $x=a$  – жесткая заделка,  $y=b$  – жесткая заделка.
- $x=0$  – шарнирное опирание,  $y=0$  – жесткая заделка,
- $x=a$  – жесткая заделка,  $y=b$  – жесткая заделка.
- $x=0$  – шарнирное опирание,  $y=0$  – шарнирное опирание,
- $x=a$  – жесткая заделка,  $y=b$  – жесткая заделка.

Для определения частоты собственных колебаний незагруженной пластинки получаем:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} (\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \mu_n^2 A_{mn} + \mu_n^4) \quad (20)$$

где

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b U_m(x) \cdot \overline{V_n(y)} \cdot U_m(x) \cdot V_n(x) \cdot dx \cdot dy}{\int_0^a \int_0^b U_m^2(x) \cdot V_n^2(x) \cdot dx \cdot dy} \quad (21)$$

3. При определенных соотношениях коэффициентов уравнение Матье-Хилла имеет неограниченно возрастающие решения, которым соответствуют области динамической устойчивости рассматриваемой задачи.

Области неограниченно возрастающих решений отделяются от областей устойчивости периодическими решениями с периодами  $T$  и  $2T$ . Два решения с одинаковым периодом ограничивают область неустойчивости, а два решения с разными периодами – область устойчивости.

Периодические решения уравнения Матье представим в виде рядов Фурье:

$$w_{mn}(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) - \text{для решения с периодом } 2T \quad (22)$$

$$w_{mn}(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) - \text{для решения с периодом } T \quad (23)$$

подстановка которых в уравнение (5) Матье приводит к уравнению критических частот, связывающее частоты внешней нагрузки с собственной частотой пластинки. Под критическими частотами понимаем частоты внешней нагрузки  $\theta_*$ , соответствующие границам областей неустойчивости.

Для определения областей неустойчивости, ограниченных периодическими решениями с периодом  $2T$ :

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

Для определения областей неустойчивости, ограниченных периодическими решениями с периодом  $T$ :

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

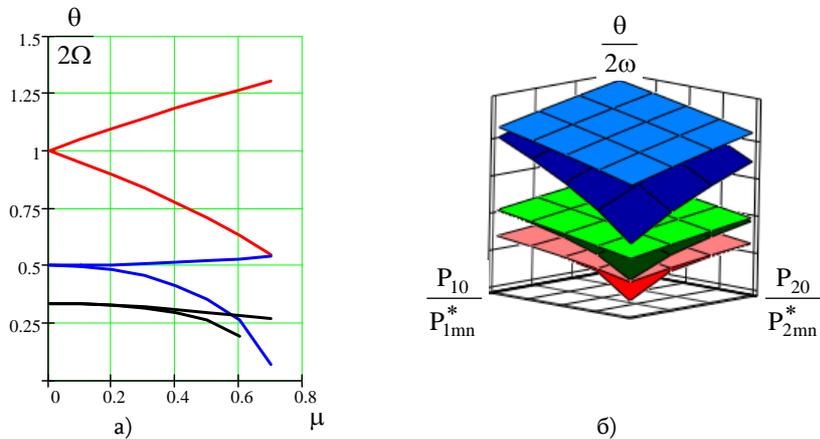
Для определения границ главной области неустойчивости, а также второй и третьей областей получены следующие приближенные формулы критических частот:

$$\theta_* = 2\Omega\sqrt{1 \pm \mu}, \quad \theta_* = \Omega\sqrt{1 + \frac{1}{3}\mu^2}, \quad \theta_* = \Omega\sqrt{1 - 2\mu^2}, \quad \theta_* = \frac{2}{3}\Omega\sqrt{1 - \frac{9\mu^2}{8 \pm 9\mu}} \quad (27)$$

Из (27) видно, что ширина полосы первой области неустойчивости (в табл. 2 приведены значения коэффициента  $\mu$  для частного случая, когда  $P_{1t}/P_{10} = 0.3$ ,  $P_{2t}/P_{20} = 0.1$ ).

На фиг. 2а показано распределение первых трех областей неустойчивости пластинки для уравнения Матье-Хилла (5) на плоскости  $(\theta/2\Omega, \mu)$ .

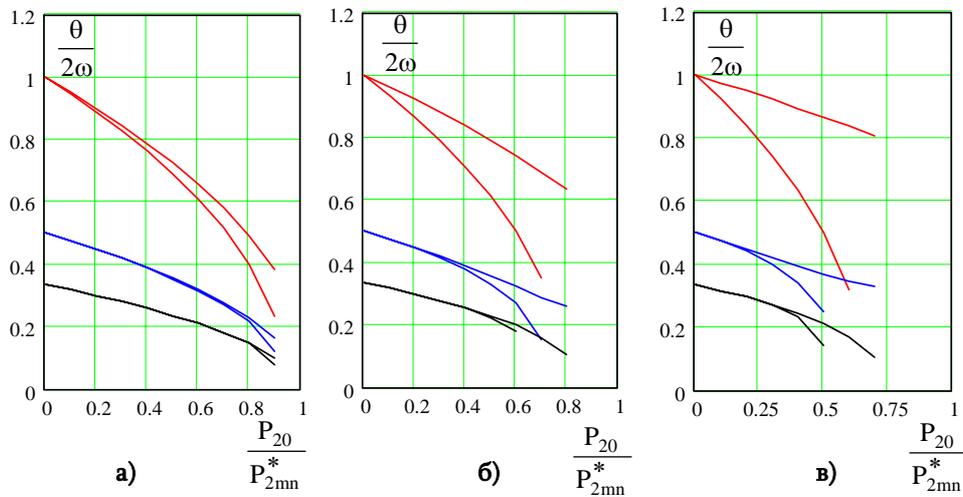
На фиг. 2б изображены области неустойчивости в зависимости от соотношений  $P_{10}/P_{1mn}^*$  и  $P_{20}/P_{2mn}^*$  для частного случая  $P_{1t}/P_{10} = 0.3$ ,  $P_{2t}/P_{20} = 0.1$ .



Фиг. 2 Распределение первых трех областей неустойчивости

На фиг. 3 показано изменение ширины областей неустойчивости при увеличении  $P_{2t}/P_{20}$  для частного случая, когда  $P_1(t)=0$ . При больших  $P_{20}/P_{2mn}^*$  формулы (27) неприменимы. В этом случае нужно пользоваться диаграммой Матье или таблицами собственных значений уравнения Матье.

В табл. 1 приведены значения безразмерной величины частот собственных колебаний незагруженной пластинки без учета свойства квазиортогональности, а в табл. 2—с учетом свойства квазиортогональности и коэффициента  $\mu$ .



Фиг. 3 Области неустойчивости пластинки при  $P_1(t)=0$ , когда:  
 а)  $P_{2t}/P_{20}=0.1$ , б)  $P_{2t}/P_{20}=0.5$ , в)  $P_{2t}/P_{20}=1.0$ .

Таблица 1.

Граничн. условия	d=a/b							
	$\omega_{mn}$	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4
1. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – шарнир x=a – шарнир	$\omega_{11}$	17.00	10.00	5.000	2.000	1.250	1.110	1.063
	$\omega_{13}$	25.00	18.00	13.00	10.00	9.250	9.110	9.063
	$\omega_{31}$	145.0	82.00	37.00	10.00	3.250	2.000	1.563
	$\omega_{33}$	153.0	90.00	45.00	18.00	11.25	10.00	9.563
2. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – шарнир x=a – заделка	$\omega_{11}$	25.75	14.84	7.049	2.422	1.326	1.139	1.076
	$\omega_{13}$	32.47	21.80	14.41	10.26	9.308	9.137	9.077
	$\omega_{31}$	169.9	96.00	43.19	11.51	3.597	2.141	1.636
	$\omega_{33}$	177.5	103.6	50.81	19.27	11.52	10.11	9.625
3. y=0 – шарнир y=b – заделка x=0 – шарнир x=a – заделка	$\omega_{11}$	25.94	15.04	7.295	2.797	1.824	1.671	1.621
	$\omega_{13}$	33.49	22.94	15.72	11.75	10.85	10.69	10.63
	$\omega_{31}$	170.1	96.21	43.40	11.75	3.930	2.549	2.093
	$\omega_{33}$	178.4	104.5	51.83	20.51	12.96	11.61	11.15
4. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – заделка x=a – заделка	$\omega_{11}$	36.27	20.47	9.210	2.578	1.205	1.059	1.025
	$\omega_{13}$	38.29	23.21	13.50	9.542	9.087	9.035	9.019
	$\omega_{31}$	196.6	110.9	49.71	13.00	3.857	2.203	1.646
	$\omega_{33}$	202.6	117.0	55.93	19.83	11.44	10.05	9.579
5. y=0 – шарнир y=b – заделка x=0 – заделка x=a – заделка	$\omega_{11}$	36.32	20.54	9.313	2.864	1.709	1.604	1.580
	$\omega_{13}$	38.79	23.95	14.66	11.05	10.64	10.59	10.58
	$\omega_{31}$	196.8	111.1	49.88	13.20	4.157	2.593	2.095
	$\omega_{33}$	203.3	117.7	56.80	20.99	12.87	11.55	11.11
6. y=0 – заделка y=b – заделка x=0 – заделка	$\omega_{11}$	36.24	20.49	9.345	3.218	2.336	2.276	2.265
	$\omega_{13}$	39.18	24.65	15.85	12.65	12.31	12.27	12.26
	$\omega_{31}$	196.1	110.4	49.22	12.65	3.963	2.739	2.449

x=a – заделка	$\omega_{33}$	202.8	117.3	56.55	21.50	14.14	13.03	12.67
---------------	---------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Полученные результаты были сопоставлены с результатами вычислений безразмерной частоты, заземленной по контуру пластинки методом Эдмана [7]. Расхождение составляет 1.7%. Сопоставление результатов вычислений различными методами безразмерной частоты  $\omega_{11}$  квадратной пластинки показало:

- $\omega_{11} = 37.46$  – метод Рэлея-Ритца (первое приближение),
- $\omega_{11} = 36.59$  – метод Бубнова-Галеркина,
- $\omega_{11} = 35.99$  – метод Рэлея-Ритца,
- $\omega_{11} = 35.999$  – метод Эдмана.

Таблица 2.

Граничн. условия	d=a/b							
	$\omega_{mn}$	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4
1. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – шарнир x=a – шарнир	$\omega_{11}$	17.00	10.00	5.000	2.000	1.251	1.111	1.063
	$\mu_{11}$	0.009	0.016	0.033	0.100	0.280	0.540	0.894
	$\omega_{13}$	25.00	18.00	13.00	10.00	9.250	9.111	9.063
	$\mu_{13}$	0.005	0.006	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006
	$\omega_{31}$	145.0	82.00	37.00	10.00	3.25	2.000	1.563
	$\mu_{31}$	0.001	0.002	0.004	0.016	0.053	0.100	0.153
	$\omega_{33}$	153.0	90.00	45.00	18.00	11.25	10.00	9.563
	$\mu_{33}$	0.001	0.002	0.003	0.006	0.007	0.007	0.007
2. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – шарнир x=a – заделка	$\omega_{11}$	25.76	14.82	7.028	2.403	1.318	1.136	1.075
	$\mu_{11}$	0.004	0.008	0.017	0.062	0.211	0.434	0.737
	$\omega_{13}$	32.28	21.63	14.29	10.22	9.296	9.131	9.074
	$\mu_{13}$	0.003	0.005	0.006	0.007	0.006	0.006	0.006
	$\omega_{31}$	169.9	95.96	43.15	11.47	3.569	2.120	1.621
	$\mu_{31}$	0.001	0.001	0.003	0.012	0.044	0.086	0.135
	$\omega_{33}$	177.2	103.3	50.52	19.08	11.44	10.07	9.600
	$\mu_{33}$	0.001	0.001	0.002	0.005	0.007	0.007	0.007
3. y=0 – шарнир y=b – заделка x=0 – шарнир x=a – заделка	$\omega_{11}$	25.90	14.99	7.238	2.758	1.810	1.666	1.619
	$\mu_{11}$	0.003	0.006	0.013	0.040	0.074	0.083	0.086
	$\omega_{13}$	33.05	22.57	15.48	11.67	10.83	10.68	10.63
	$\mu_{13}$	0.003	0.004	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005
	$\omega_{31}$	170.1	96.12	43.32	11.67	3.869	2.508	2.066
	$\mu_{31}$	0.001	0.001	0.002	0.009	0.030	0.050	0.064
	$\omega_{33}$	177.7	103.8	51.21	20.12	12.80	11.54	11.11
	$\mu_{33}$	0.001	0.001	0.002	0.005	0.006	0.006	0.005

Продолжение таблицы 2

4. y=0 – шарнир y=b – шарнир x=0 – заделка x=a – заделка	$\omega_{11}$	36.83	20.97	9.654	2.938	1.395	1.158	1.085
	$\mu_{11}$	0.002	0.004	0.009	0.037	0.153	0.350	0.628
	$\omega_{13}$	41.90	26.44	15.91	10.42	9.324	9.141	9.079
	$\mu_{13}$	0.002	0.003	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006
	$\omega_{31}$	196.8	111.1	49.83	13.08	3.923	2.254	1.685
	$\mu_{31}$	0.001	0.001	0.002	0.010	0.036	0.073	0.119
	$\omega_{33}$	203.4	117.7	56.60	20.29	11.64	10.14	9.637
	$\mu_{33}$	0.001	0.001	0.002	0.005	0.007	0.007	0.007
5. y=0 – шарнир y=b – заделка x=0 – заделка x=a – заделка	$\omega_{11}$	36.94	21.09	9.813	3.239	1.868	1.682	1.626
	$\mu_{11}$	0.002	0.003	0.007	0.027	0.067	0.081	0.085
	$\omega_{13}$	42.51	27.23	16.99	11.85	10.85	10.69	10.63
	$\mu_{13}$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005
	$\omega_{31}$	197.0	111.2	49.97	13.26	4.203	2.625	2.119
	$\mu_{31}$	0.000	0.001	0.002	0.007	0.025	0.045	0.060
	$\omega_{33}$	203.9	118.3	57.24	21.28	12.99	11.60	11.14
	$\mu_{33}$	0.001	0.001	0.002	0.004	0.006	0.006	0.005
6. y=0 – заделка y=b – заделка x=0 – заделка x=a – заделка	$\omega_{11}$	37.02	21.20	9.989	3.659	2.497	2.355	2.314
	$\mu_{11}$	0.001	0.002	0.006	0.021	0.037	0.039	0.039
	$\omega_{13}$	43.19	28.13	18.23	13.42	12.52	12.37	12.32
	$\mu_{13}$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.004	0.004
	$\omega_{31}$	197.1	111.3	50.06	13.42	4.557	3.125	2.699
	$\mu_{31}$	0.000	0.001	0.001	0.005	0.019	0.030	0.035
	$\omega_{33}$	204.4	118.8	57.92	22.38	14.48	13.20	12.78
	$\mu_{33}$	0.000	0.001	0.002	0.004	0.005	0.005	0.005

Приведенные в табл. 2 результаты вычислений показывают, что величина коэффициента возбуждения  $\mu$ , которая характеризует параметры главной области неустойчивости, в зависимости от закрепления краев пластинки меняется, причем более жестким закреплениям соответствуют меньшие значения  $\mu$ , т.е. с увеличением жесткости закрепления главная область неустойчивости уменьшается.

Из табл. 2 следует также, что характер возрастания значений безразмерных частот  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{13}$ ,  $\omega_{31}$ ,  $\omega_{33}$  при ужесточении граничных условий существенно зависит от отношения сторон  $d=a/b$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 335с.
2. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнетиупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.:Гостехиздат. 1956. 600с.
4. Власов В.З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. М.: Стройиздат, 1949. 435 с.
5. Гнуни В.В. Параметрические колебания нагруженной осевой силой цилиндрической оболочки из композиционного материала. Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. 1 2. С. 23–29.
6. Онишвили О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М.: Изд. АН СССР, 1957.
7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах.Т.3. М.: Машиностроение, 1968. 968с.

Государственный Инженерный  
Университет Армении

Поступила в редакцию  
13.01.2006

УДК 393.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ-МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Ванян Л.А.

Լ.Ա. Վանյան

Անմոմենտ գլանային մեմբրանի թաղանթի կայունությունը գազի գերձայնային հոսքում

Ուսումնասիրվում է անմոմենտ գլանային մեմբրանի թաղանթի կայունությունը գազի երկչափ գերձայնային հոսքում: Համեմատվում են անկայունության տիրույթները ըստ «պիստոնային» և ըստ ճշգրտված մոտավորության՝ երբ աերոդինամիկական ճնշման կախվածությունը մեմբրանի շարժումից կրում է դիֆերենցիալ տիպի ոչ լոկալ բնույթ: Հաշվարկները ճշգրտված տեսությամբ ցույց են տալիս փոքր գերձայնային Մախի թվի դեպքում մեմբրանի անկայունություն, ինչպես նաև զգալիորեն փոքրանում է կայունության տիրույթի վերին սահմանը, ի տարբերություն «միտոսային» տեսության:

L.A. Vanyan

The Stability Of Momentless Cylindrical Membrane Shell In Supersonic Gas Flow

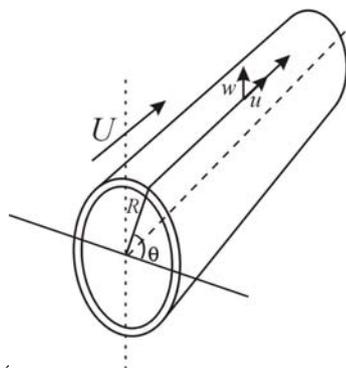
The stability of momentless cylindrical membrane shell in the two-dimensional flow of gas is investigated here. The areas of instability are compared according to “piston” theory and the one of precise approximation, when the aerodynamical pressure dependence from the motion of membrane has non-local character of differential type. Unlike the “piston” theory, the calculations according to the theory of precise approximation show the instability of membrane under the small supersonic numbers of Mach. At the same time the upper verge (border) of stability area is considerably reduced as well.

Исследуется устойчивость безмоментной цилиндрической оболочки мембраны в двумерном потоке газа. Сравниваются области неустойчивости по “поршневой” теории и по уточненному приближению, когда зависимость аэродинамического давления от движения мембраны носит нелокальный характер дифференциального типа. В отличие от “поршневой”, расчеты по уточненной теории показывают неустойчивость мембраны при малых сверхзвуковых числах Маха, а также ощутимо снижается верхняя граница области устойчивости.

Колебания безмоментной круговой цилиндрической оболочки мембраны в двумерном потоке газа описываются уравнениями:

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w + \frac{\nu Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial u}{\partial x} + P = 0$$

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



где  $u(x,t)$ ,  $w(x,t)$  – перемещения,  $\rho_0$  – плотность материала,  $h, R$  – соответственно, толщина и радиус срединной поверхности оболочки,  $\varepsilon$  – коэффициент затухания,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $N$  – усилие,  $P(x,t)$  – аэродинамическое давление.

1. По точной теории для линеаризованного потенциального потока

Фиг. 1

идеального газа зависимость давления от производных прогиба представляется интегральным оператором с весьма сложным ядром [1]. Но при больших скоростях потока газа (т.е. при больших числах Маха  $M = U/a_0$ ) для упрощения задачи можно применить «поршневою» теорию [1], представив эту зависимость в виде (2)

$$P = \rho a_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $a_0$  – скорость звука для невозмущенного потока газа,  $U$  – скорость потока газа.

Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{c_2^2}{R^2} w + \frac{v c_2^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{v c_2^2}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_1^2 = \frac{N}{\rho_0 h}$ ,  $c_2^2 = \frac{E}{\rho_0(1-v^2)}$ ,  $\gamma = \frac{\rho a_0}{\rho_0 h}$ .

Представив решение в виде бегущих волн  $w = w_0 e^{i(\omega t - kx)}$ ,  $u = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) \equiv \left( \omega^2 - i(\varepsilon + \gamma)\omega - c_1^2 k^2 + i\gamma U k - \frac{c_2^2}{R^2} \right) \left( \omega^2 - c_2^2 k^2 \right) - \frac{v^2 c_2^4 k^2}{R^2} = 0 \quad (4)$$

После введения безразмерных величин

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{a_0}, \alpha_2 = \frac{c_2}{a_0}, \alpha_3 = Rk, \alpha_4 = \frac{\rho}{\rho_0}, \alpha_5 = \frac{h}{R}, \lambda = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (5)$$

уравнение (4) примет следующий вид:

$$\left( \Omega_0^2 - i \frac{\alpha_4}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5} (\lambda + 1) \Omega_0 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + i \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_5} M - \frac{1}{\alpha_3^2} \right) (\Omega_0^2 - 1) - \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \quad (6)$$

где  $\Omega_0 = \omega/c_2 k$ .

Отделяя действительные и мнимые части (6), получим следующую систему:

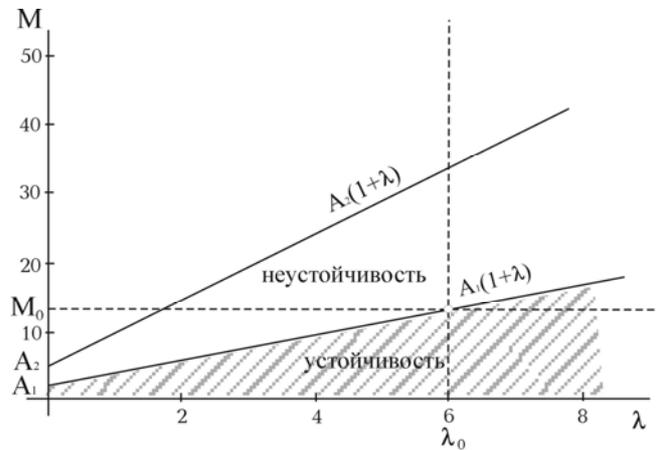
$$\begin{cases} \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} \right) (\Omega_0^2 - 1) - \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \left( (\lambda + 1) \Omega_0 - \frac{M}{\alpha_2} \right) (\Omega_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

из которой получим следующие соотношения между  $M$  и  $\lambda$  (фиг. 2):

$$M_i = A_i (1 + \lambda), \text{ где } A_i = \alpha_i \Omega_{0i} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} + 1 - \sqrt{(\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} - 1)^2 + 4v^2 / \alpha_3^2}}{2}}$$

$$\Omega_{02} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} + 1 + \sqrt{(\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} - 1)^2 + 4v^2 / \alpha_3^2}}{2}}$$



Фиг. 2

Для зафиксированных  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 0.4$ ,  $\alpha_4 = 1/3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha_5 = 0.01$ ,  $v = 0.25$ ,  $\lambda = 6$  в табл. 1 приведены значения действительных и мнимых частей двух фазовых скоростей  $c = \omega/k$  при различных числах Маха, вычисленные из дисперсионного уравнения (6).

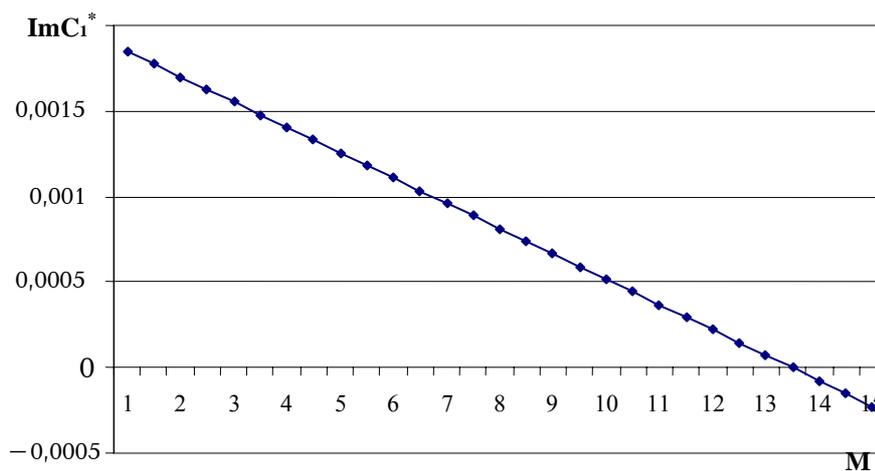
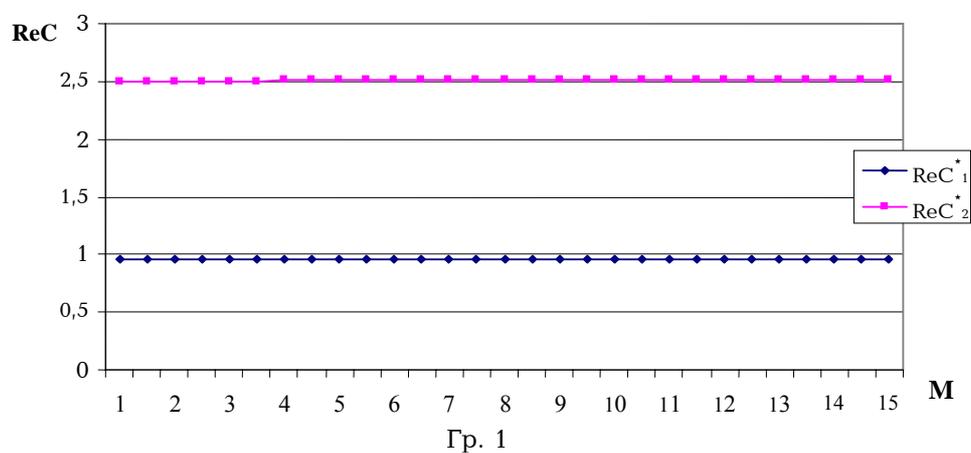
Построены графики действительных и мнимых частей двух фазовых скоростей  $c = \omega/k$  при различных числах Маха .

Таблица 1

$M$	$\text{Re } C_1^*$	$\text{Im } C_1^*$	$\text{Re } C_2^*$	$\text{Im } C_2^*$
1.0	0.962513	0.00184954	2.50514	0.139734
1.5	0.962506	0.00177571	2.50516	0.137683
2.0	0.962499	0.00170184	2.50517	0.135632
2.5	0.962493	0.00162793	2.50518	0.133581
3.0	0.962487	0.00155399	2.5052	0.13153
3.5	0.962481	0.00148002	2.50522	0.129479
4.0	0.962476	0.00140601	2.50524	0.127429
4.5	0.962471	0.00133198	2.50526	0.125378
5.0	0.962466	0.00125791	2.50528	0.123327
5.5	0.962461	0.00118382	2.50531	0.121277
6.0	0.962457	0.00110971	2.50533	0.119226
6.5	0.962453	0.00103557	2.50536	0.117176
7.0	0.962449	0.00096141	2.50539	0.115126
7.5	0.962446	0.00088723	2.50542	0.113075
8.0	0.962442	0.000813032	2.50545	0.111025
8.5	0.962439	0.000738818	2.50548	0.108975
9.0	0.962437	0.000664588	2.50552	0.106925

9.5	0.962435	0.000590346	2.50555	0.104875
10.0	0.962433	0.000516092	2.50559	0.102826
10.5	0.962431	0.000441828	2.50563	0.100776
11.0	0.962429	0.000367556	2.50567	0.098727
11.5	0.962428	0.000293278	2.50572	0.096677
12.0	0.962427	0.000218995	2.50576	0.094628
12.5	0.962427	0.000144708	2.50581	0.092579
13.0	0.962427	0.000070421	2.50586	0.09053
13.5	0.962427	-3.86689x10 <sup>-6</sup>	2.5059	0.088481
14.0	0.962427	-0.0000781526	2.50596	0.086432
14.5	0.962428	-0.000152435	2.50601	0.084384
15.0	0.962428	-0.000226711	2.50606	0.082335

здесь.  $C^* = c/c_2 5$



Неустойчивость мембраны соответствует отрицательным значениям мнимых частей  $\omega$  [1], и как видно из табл. 1 и фиг. 2,  $M = 13.5$  является точкой, с

которой начинается область неустойчивости для больших чисел Маха. Назовем ее “верхней границей” устойчивости.

2. “Поршневое” приближение применимо при больших сверхзвуковых скоростях потока. При небольших же сверхзвуковых числах Маха оно становится непригодным. В работе [2] построено новое приближение для аэродинамического давления, которое применимо также при малых числах Маха.

$$\frac{D_1 P}{Dt} = \rho a_0 \frac{D_1}{Dt} \left[ \frac{Dw}{Dt} - \frac{a_0 w}{2R} \right] + \chi \rho a_0^3 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{w}{R^2} \right] \quad (9)$$

$$\frac{D_1}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

где  $\chi$  – поправочный коэффициент ( $\chi = 0$  соответствует “поршневому” приближению).

Представив решение в виде бегущих волн  $w = w_0 \exp(i(\omega t - kx))$ ,  $u = u_0 \exp(i(\omega t - kx))$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) \equiv \left( \frac{\omega - ka_0(M-1)}{\gamma a_0^2} \left( i \left( \omega^2 - c_1^2 k^2 - \frac{c_2^2}{R^2} + \frac{\gamma a_0}{2R} \right) - \gamma(a_0 k M - \omega(\lambda + 1)) \right) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \chi k^2 - \frac{3\chi}{4R^2} \right) (\omega^2 - c_2^2 k^2) - i \frac{v^2 c_2^4 k^2}{\gamma a_0^2 R^2} (\omega - ka_0(M-1)) = 0$$

Перейдя на безразмерные величины (5), уравнение (10) примет вид:

$$\left( i \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} \right) - \frac{\alpha_4}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5} \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \times \right. \quad (11)$$

$$\left. \times \left( \frac{M}{\alpha_2} - \Omega_0(\lambda + 1) \right) + \frac{\alpha_4}{\alpha_2^3 \alpha_3 \alpha_5} \left( \chi - \frac{3\chi}{4\alpha_3^2} \right) \right) (1 - \Omega_0^2) + i \frac{v^2}{\alpha_3^2} \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) = 0$$

действительные и мнимые части которого составляют систему (12)

$$\begin{cases} \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} \right) (1 - \Omega_0^2) + \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \left( \frac{M}{\alpha_2} - \Omega_0(\lambda + 1) \right) - \frac{1}{\alpha_2^2} \left( \chi - \frac{3\chi}{4\alpha_3^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Для  $\chi = 0$  из (12) получаем

$$M_i = A_i(1 + \lambda), \quad M_j = A_j + 1, \quad \text{где } A_i = \alpha_i \Omega_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

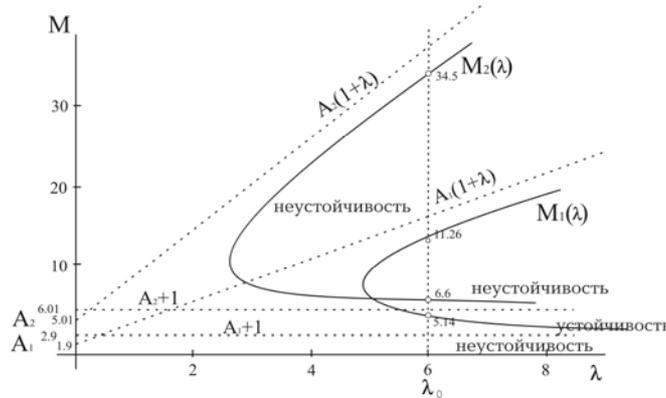
$$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} + 1 - \sqrt{\left( \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} - 1 \right)^2 + \frac{4v^2}{\alpha_3^2}}}{2}}$$

$$\Omega_{02} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5} + 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5} - 1\right)^2 + \frac{4v^2}{\alpha_3^2}}}{2}} \quad (13)$$

При  $\chi \neq 0$  из (12) получаем

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_2 \Omega_0} \left( \frac{4\alpha_3^2 \chi - 3\chi}{4\alpha_3^2 (\alpha_2 \Omega_0 - M + 1)} + M \right) - 1 \quad (14)$$

что соответствует кривым  $M_1(\lambda)$ ,  $M_2(\lambda)$  для  $\Omega_{01}$ ,  $\Omega_{02}$ . Линии (13) являются асимптотами для кривых  $M_1(\lambda)$  и  $M_2(\lambda)$



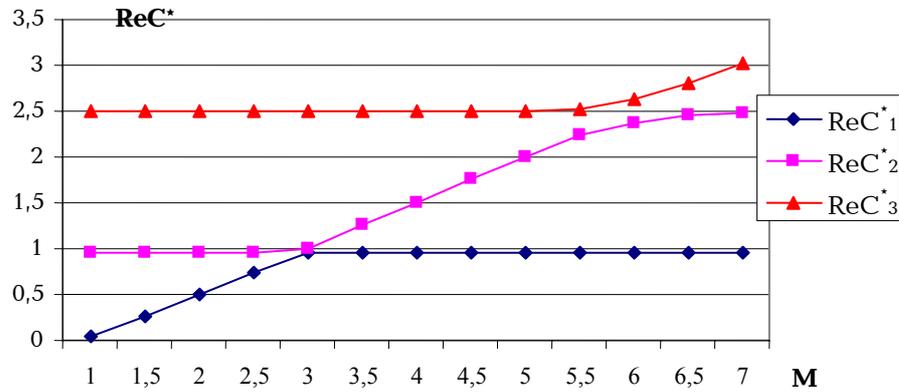
Фиг. 3

Для зафиксированных  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 0.4$ ,  $\alpha_4 = 1/3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha_5 = 0.01$ ,  $v = 0.25$ ,  $\lambda = 6$ ,  $\chi = 5$  в табл. 2 приведены значения действительных и мнимых частей трех фазовых скоростей  $c = \omega/k$  (по уточненной теории имеются уже три фазовые скорости, что является следствием повышения порядка дифференциального уравнения для прогиба, по сравнению с "поршневой" теорией) при различных числах Маха, вычисленные из дисперсионного уравнения (6).

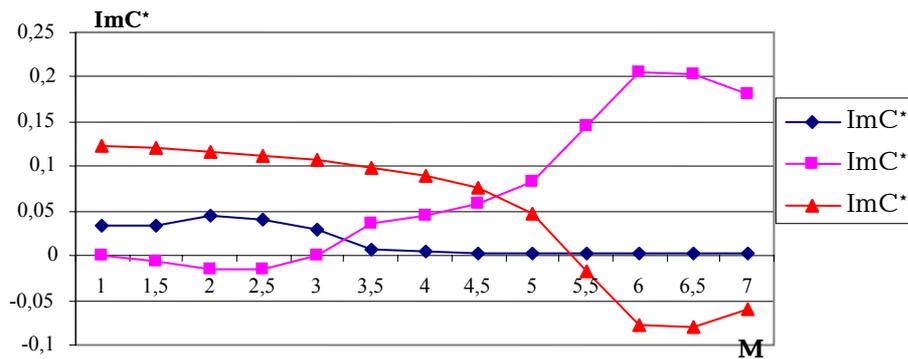
Таблица 2

$M$	$\text{Re } C_1^*$	$\text{Im } C_1^*$	$\text{Re } C_2^*$	$\text{Im } C_2^*$	$\text{Re } C_3^*$	$\text{Im } C_3^*$
1.0	0.0499267	0.0329894	0.962428	0.00033733	2.5045	0.123949
1.5	0.250102	0.0334784	0.962428	-0.006	2.50441	0.120948
2.0	0.500289	0.045	0.962479	-0.015	2.50427	0.116816
2.5	0.749887	0.0401898	0.963164	-0.015	2.50406	0.112093
3.0	0.963423	0.029	1	0	2.50375	0.106484
3.5	0.963323	0.0061325	1.25063	0.0360398	2.50328	0.0994585
4.0	0.962808	0.0039216	1.50197	0.0449458	2.50251	0.0899489
4.5	0.96266	0.00305583	1.75342	0.0575963	2.50125	0.0754349
5.0	0.962592	0.00256915	2.00482	0.0826633	2.49996	0.0481952
5.5	0.962553	0.0022419	2.23528	0.146038	2.51958	-0.0174533
6.0	0.962526	0.00199662	2.37037	0.205046	2.63456	-0.0787681

<b>6.5</b>	0.962507	0.00179902	2.44707	0.204124	2.80792	-0.0801582
<b>7.0</b>	0.962493	0.0016316	2.48242	0.180496	3.02263	-0.0588364



Гр. 3



Гр. 4

Как видно из табл. 2, в отличие от “поршневой” теории, по уточненной теории имеет место также неустойчивость при малых сверхзвуковых числах Маха [3,4,5]. Для больших же чисел Маха неустойчивость начинается уже с  $M = 5.4$  (по “поршневой” теории неустойчивость начиналась с  $M = 13.5$ ).

В табл. 3 приведены области неустойчивостей для различных  $\chi$ .

Таблица 3

	$\chi = 0.1$	$\chi = 0.2$	$\chi = 0.3$	$\chi = 0.4$	$\chi = 0.5$	$\chi = 1$
Область неустойчивости	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.8$ по 2.99	с $M = 2.8$ по 2.99	с $M = 2.6$ по 2.99
	с $M = 6.1$	с $M = 6$	с $M = 5.9$			

	$\chi = 1.5$	$\chi = 2$	$\chi = 2.5$	$\chi = 3$	$\chi = 3.5$	$\chi = 4$
Область неустойчивости	с $M = 2.5$ по 2.99	с $M = 2.3$ по 2.99	с $M = 2.2$ по 2.99	с $M = 2$ по 2.99	с $M = 1.9$ по 2.99	с $M = 1.7$ по 2.99
	с $M = 5.9$	с $M = 5.8$	с $M = 5.8$	с $M = 5.7$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$

	$\chi = 2.5$	$\chi = 3$	$\chi = 3.5$	$\chi = 4$	$\chi = 4.5$	$\chi = 5$
Область неустойчивости	с $M = 2.2$ по 2.99	с $M = 2$ по 2.99	с $M = 1.9$ по 2.99	с $M = 1.7$ по 2.99	с $M = 1.6$ по 2.99	с $M = 1.4$ по 2.99
	с $M = 5.8$	с $M = 5.7$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$	с $M = 5.4$

Уже при малых  $\chi$  уточненная теория дает существенную разницу как для малых, так и для больших сверхзвуковых чисел Маха, по сравнению с “поршневой” теорией, значительно уменьшает область устойчивости, ощутимо снижая ее верхнюю границу.

В работе [5] исследована устойчивость конечной мембраны при малых числах Маха по одной моде. Расчеты по УТ показывают неустойчивость конечной мембраны с закрепленными концами при малых скоростях Маха.

В работе [6] показано, что неустойчивость бесконечной мембраны при малых сверхзвуковых скоростях всегда имеет конвективный характер. Для конечной же мембраны вопрос остается открытым.

Автор выражает благодарность профессору М.В. Белубеяну за помощь и ценные указания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1. №1. С.49-54.
3. Минасян Д.М. Флаттер пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Ереван: Канд. диссертация. 2002. 115с.
4. Белубекян М.В., Минасян М.М. О характере неустойчивости бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.53. №3. С.29-35.
5. Ванян Л.А. К устойчивости конечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа при малых числах Маха. // Сб. научных трудов конференции “Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем”. 2002. С. 134-137.
6. Ванян Л.А., Минасян М.М. К флаттеру мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т.55. №3. с. 59-64.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
28.09.2005

УДК 539.3:537.2

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В  
СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПОДЛОЖКОЙ И МЯГКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ  
( Исследование характеристического уравнения. – Часть I )**

**Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А.**

**Ջ. Ն. Դանոյան, Ն. Ջ. Դանոյան, Գ.Ա.Մանուկյան**

**Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և  
փափուկ դիէլեկտրիկ շերտով շերտավոր համակարգում  
(Բնութագրիչ հավասարման հետազոտումը – Մաս I)**

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6, 4, 622, 422, 6mm, 4mm դասի պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ իզոտրոպ դիէլեկտրիկ շերտով համակարգում՝ կախված շերտավոր համակարգի ֆիզիկա-մեխանիկական բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից: Մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը հետազոտված է փափուկ շերտի դեպքում, երբ շերտում ծավալային առաձգական ալիքների տարածման արագությունը ավելի փոքր է հիմքում ծավալային էլեկտրաառաձգական ալիքների տարածման արագությունից: Հետազոտությունը հենվում է [13] աշխատանքում բերված մակերևութային ալիքի էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցի (ԿԷՄԳ) վարքի ուսումնասիրության վրա: Մասնավորապես ցույց է տրված ձեռքային տիպի Լյավի ալիքների գոյությունը, որը պայմանավորված է զուտ պլեզոէլեկտրական էֆեկտով: Ուսումնասիրված են Լյավի ալիքի կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները: Քննարկված է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների կապը Լյավի սովորական ալիքների և Գույասի - Բյուստեյնի ալիքների հետ: Հետազոտված են որոշակի պայմանների բավարարող դեպքեր: Մյուս հնարավոր դեպքերը քննարկվելու են հեղինակների հաջորդ աշխատանքում:

**Z.N.Danoyan., N. Z. Danoyan, G.A.Manukyan**

**The Surface Electroelastic Love's Waves in a Layered System with a Piezoelectric  
Substructure and Soft Dielectric Isotropic Layer  
(The investigation of the characteristic equation – Part I)**

In the article is investigated the existence and the behaviour Love's surface electroelastic waves in a layered system with a piezoelectric substructure if the class 6,4, 6mm, 4mm, 622, 422 and a soft dielectric isotropic layer with a finite arbitrary thickness depending on the physicomaterial properties of the system and the relative thickness of the layer. The characteristic equation at the surface wave is investigated in the case of the soft layer when the propagation velocity of volume of clastic waves in the layer is less than the propagation velocity of the volume electroelastic waves in the substructure. In particular it is shown that the existence of split waves of Love's type due to solely piezoelectrical effect.

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 и изотропного диэлектрического слоя произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. Характеристическое уравнение искомой поверхностной волны исследовано в случае мягкого слоя, когда скорость объемной упругой волны в слое меньше скорости объемной электроупругой волны в подложке. Исследование основано на свойствах коэффициента электромеханической связи (КЭМС) поверхностной волны, приведенных в работе [13]. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых. Обсужден вопрос связи электроупругих волн Лява с

обычными волнами Лява и волнами Гуляева-Блюстейна. Исследованы случаи, удовлетворяющие определенным условиям. Другие возможные случаи будут обсуждаться в следующей работе авторов.

**Введение.** Известно, что [1,2,10,12] в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява существуют только в случае мягкого слоя, когда скорость распространения объемной упругой волны в слое  $S_{02}$  меньше, чем скорость распространения электроупругой объемной волны в подложке  $S_{01}$ , причем скорость  $V_{0L}$  волны Лява удовлетворяет условию  $S_{02} < V_{0L} < S_{01}$ . Представляет интерес исследование волн Лява в слоистых системах, когда подложка или слой является пьезоэлектриком [3-10]. В [3,4,7,9] исследован вопрос существования волн Лява, когда слой является диэлектриком, а подложка – пьезоэлектриком. В [5-7] рассмотрена электроупругая задача Лява, когда слой является проводником, а подложка – пьезоэлектриком. В [8] рассматривается случай, когда слой является пьезоэлектриком, а подложка – диэлектриком. В работе [13] исследовано поведение коэффициента электромеханической связи (КЭМС)  $R(k)$  для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 при наличии диэлектрического слоя.

В настоящей работе на основе результатов работы [13] исследуются существование и поведение электроупругих волн Лява для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 с изотропным диэлектрическим мягким слоем, когда скорость объемных упругих волн в слое  $S_2$  меньше скорости объемных электроупругих волн в подложке  $S_1$ , дополняя и уточняя результаты работ [3,4,6,7].

### 1. Основные соотношения задачи.

Пусть слоистая система, состоящая из диэлектрического изотропного слоя толщины  $h$  и полубесконечной пьезоэлектрической подложки классов 4, 6, 4mm, 6mm, 422, 622, находящихся в жестком контакте, отнесена к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Ось  $Ox_3$  совпадает с главной осью симметрии ( $L_4$  или  $L_6$ ) пьезоэлектрической подложки и лежит в плоскости  $x_1=0$  границы раздела слоя и подложки, ось  $Ox_1$  направлена вглубь подложки. Вне слоистой системы (в области  $x_1 < -h$ ) предполагается вакуум или диэлектрическая среда, которая граничит со слоем без акустического контакта. Границы слоя  $x_1 = 0$  и  $x_1 < -h$  электрически свободны (неметаллизированны), граница  $x_1 = -h$  механически свободна.

Согласно [13], скорость сдвиговых электроупругих волн Лява  $V = V_L$  определяется выражением

$$V = V(k) = \omega / p, \quad \omega > 0, \quad p > 0 \quad (1.1)$$

где  $\omega$  и  $p$  – частота и волновое число волны,  $k = ph$  – относительная толщина слоя, и должна удовлетворять характеристическому уравнению поверхностной волны:

$$\beta_1(V) = c\beta_2(V)\text{tg}[k\beta_2(V)] + R(k) \quad (1.2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 thk + 1) - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + thk)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 thk + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + thk)} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(V) &= \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)}, & \beta_2(V) &= \sqrt{(V^2 / S_2^2) - 1} \\ S_1 &= \sqrt{\bar{c}_1 / \rho_1}, & S_2 &= \sqrt{c_2 / \rho_2}, & \bar{c}_1 &= c_1(1 + \chi_1^2) \\ \chi_1^2 &= e_1^2 / \varepsilon_1 c_1, & c_1 &= c_{44}^{(1)}, & c_2 &= c_{44}^{(2)}, & d_1 &= e_{14}^{(1)} \\ e_1 &= e_{15}^{(1)}, & \bar{e}_1 &= e_1 / \varepsilon_1, & \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}^{(1)}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{11}^{(2)}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{11}^{(3)} \\ c &= c_2 / \bar{c}_1, & \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1 / \varepsilon_3, & \bar{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2 / \varepsilon_3, & R_1^2 &= e_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1, & K_1^2 &= d_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выше нижние индексы 1-3 относятся к подложке, слою и вакууму соответственно,  $\beta_1(V)$  и  $\beta_2(V)$  – коэффициенты затухания;  $S_1$  и  $S_2$  – скорости сдвиговых объемных волн;  $R_1^2$ ,  $K_1^2$  и  $\chi_1^2$  – коэффициенты электромеханической связи для объемной волны;  $R(k)$  – коэффициент электромеханической связи для поверхностной волны;  $c_1$  и  $c_2$  – упругие постоянные;  $e_1$  и  $d_1$  – пьезомодули;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  – диэлектрические проницаемости;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – массовые плотности. Заметим, что вышеприведенные названия коэффициентов электромеханической связи используются в [2,3,8].

Из условия затухания поверхностной волны вглубь подложки (при  $x_1 \rightarrow +\infty$ ) следует, что  $\beta_1(V)$  – положительная величина, что дает необходимое условие существования поверхностной волны:

$$0 < V_L < S_1 \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что парциальная волна в подложке всегда должна быть неоднородной. В отличие от  $\beta_1(V)$ , величина  $\beta_2(V)$  может быть как действительной, так и мнимой. В первом случае она должна быть неотрицательной, что дает условие:  $V_L \geq S_2$ . В этом случае в слое распространяются однородные упругие волны, испытывая полное внутреннее отражение от ограничивающих поверхностей слоя (как и в случае обычной волны Лява). Во втором случае, когда  $\beta_2(V)$  мнимая, имеет место условие  $V_L < S_2$ . В этом случае в слое будут распространяться неоднородные упругие парциальные волны, рождая волны Лява щелевого типа.

## 2. Исследование характеристического уравнения поверхностной волны

Из соотношений (1.3)–(1.4) следует, что при отсутствии пьезоэффекта ( $e_1 = d_1 = 0$ ) коэффициент электромеханической связи  $R(k)$  обращается в нуль, а характеристическое уравнение (1.2) совпадает с характеристическим уравнением обычной волны Лява [1,2]. При  $V \geq S_2$  обе величины  $\beta_1(V)$  и  $\beta_2(V)$

действительны и фазовая скорость искомой волны определяется из характеристического уравнения (1.2). Если же  $V < S_2$ , то  $\beta_2(V)$  становится мнимой, волны Лява становятся щелевого типа, а их скорость распространения будет определяться из преобразованного характеристического уравнения:

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_2(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_2^2)} \quad (2.2)$$

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристических уравнениях (1.2) и (2.1) проявляется двумя факторами: наличием дополнительного члена – коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  и зависимости скорости  $S_1 = (c_1 / \rho_1)\sqrt{1 + \chi_1^2}$  от пьезоэффекта. Отметим, что характеристические уравнения получены для классов 6 и 4. Для классов 6mm и 4mm следует в этих уравнениях и других соответствующих выражениях положить  $d_1 = 0$ , а для классов 622, 422 –  $e_1 = 0$ .

Далее, как и в работе [13], принимается следующее ограничение:

$$|R(k)| \ll 1 \quad (2.3)$$

что имеет место для большинства известных пьезоэлектриков [3,11].

Итак, пусть слоистая система имеет мягкий слой, т.е. скорости объемных волн удовлетворяют условию:

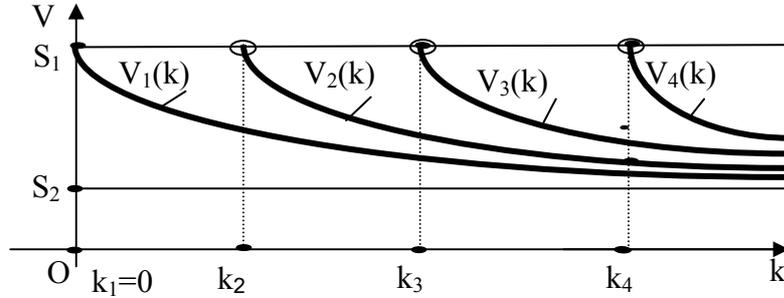
$$S_2 < S_1 \quad (2.4)$$

При отсутствии пьезоэффекта ( $e_1 = d_1 = 0$ ) и наличии мягкого слоя ( $S_2 = S_{02} < S_{01} = S_1$ ) волны Лява имеют скорость, удовлетворяющую условию  $S_{02} < S_{0L} < S_{01}$ , и описываются только уравнением (1.2) при  $e_1 = d_1 = 0$ . Как известно [12], в этом случае для каждого значения относительной толщины слоя  $k \in (0, \infty]$  существуют несколько мод волны Лява, фазовые скорости  $V = V_n(k)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) которых удовлетворяют условию:

$$V_1(k) < V_2(k) < \dots < V_n(k) \quad (2.5)$$

Критические значения  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), при которых начинается рождение новых мод, определяются из уравнения (1.2) при условии  $\beta_1(V) = 0$ , так что каждая мода начинается с объемной волны, распространяющейся со скоростью  $V = S_1 = \text{const.}$  ( $V_n(k_n) = S_1$ ), причем для первой моды  $k_1 = 0$ . При увеличении параметра  $k$  скорости всех мод монотонно убывают, стремясь асимптотически к скорости  $S_2$  объемных сдвиговых волн в слое при  $k \rightarrow \infty$ . В пределе получаем случай двух полупространств, когда слиянием всех мод получается единственная так называемая объемно-поверхностная волна [12], которая должна распространяться со скоростью  $V = S_2$ . Однако, как показывает непосредственное простое исследование, в случае двух полупространств граничная задача не имеет решения такого вида. Поведение дисперсионных

кривых для мод обычной волны Лява показано на фиг. 1. При наличии пьезоэффекта ситуация оказывается более сложной и зависит от поведения коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  поверхностной волны. Сначала рассмотрим слоистые системы с условием  $R(k) > 0$  [13].



Фиг.1

Случай I. Слоистые системы, определяемые условием  $R(k) > 0$ .

Когда  $k = 0$ , т.е.  $h = 0$  (слой отсутствует), характеристические уравнения (1.2) и (2.1) совпадают и принимают вид  $\beta_1(V) = R_0$ , где  $R_0 \equiv R(0)$ . Это уравнение при  $R_0 > 0$  всегда имеет решение:

$$V = V_{GB} \equiv S_1 \sqrt{1 - R_0^2} < S_1 \quad (2.6)$$

Этот факт следует из того, что согласно (2.3) имеют место условия:

$$|R_0| \ll 1, \quad |R_\infty| \ll 1 \quad (2.7)$$

где  $R_\infty \equiv R(\infty)$ . Величина  $V_{GB} \equiv S_1 \sqrt{1 - R_0^2}$  представляет собой скорость так называемой поверхностной волны Гуляева-Блюстейна, которая существует в пьезоэлектрической полубесконечной среде при условии  $R_0^2 < 1$ , что всегда имеет место согласно (2.7). Скорость волны Гуляева-Блюстейна  $V_{GB}$  всегда меньше скорости объемных электроупругих волн в той же среде  $S_1$ .

При  $k = \infty$ , т.е. когда слой становится полупространством ( $h = \infty$ ), то, как покажем в дальнейшем, вдоль общей границы упругих полупространств могут распространяться как поверхностные, так и объемно-поверхностные волны, причем в зависимости от значений параметров слоистой среды одна или обе волны могут не распространяться.

Очевидно, что соотношение между значениями скоростей  $V_G$  и  $S_2$  могут быть различными в зависимости от значений характеристик слоистой системы:

$$\begin{aligned} \text{a) } & V_{GB} > S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) > R_0 \\ \text{b) } & V_{GB} = S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) = R_0 \\ \text{c) } & V_{GB} < S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) < R_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\beta_1(S_2) = \sqrt{1 - (S_1/S_2)^2} \quad (2.9)$$

Согласно условию получения характеристических уравнений (1.2) и (2.1), из (2.7) имеем: при условии а) значение  $V = V_{GB}$  является решением уравнения (1.2) при  $k \rightarrow \infty$ , а уравнение (2.1) не имеет решения. При условии с) имеется обратная ситуация. При условии б)  $V = V_{GB} = S_2$  будет решением обоих уравнений при  $k \rightarrow 0$ .

Теперь рассмотрим изменение поведения решений характеристических уравнений, когда параметр  $k$  начинает возрастать от значения 0 при наличии условий (2.8). Сначала рассмотрим случай а) из (2.8):  $\beta_1(S_2) > R_0$ , или  $V_{GB} > S_2$ .

Случай I(a).  $R(k) > 0$ ,  $V_{GB} > S_2$  ( $\beta_1(S_2) > R_0$ ). Производя замену в характеристическом уравнении (1.2)

$$k \beta_2(V) \equiv \eta \quad (2.10)$$

преобразуем его к виду

$$\text{tg } \eta = f(k, \eta) \quad (2.11)$$

где

$$f(k, \eta) \equiv (k/c \eta) g(k, \eta) \quad (2.12)$$

$$g(k, \eta) \equiv \sqrt{\beta_1^2(S_2) - (S_2 \eta / S_1 k)^2} - R(k) \quad (2.13)$$

Из (2.10) следует, что скорость  $V$  выражается через  $k$  и  $\eta$  следующим образом:

$$V = S_2 \sqrt{1 + (\eta/k)^2} \quad (2.14)$$

Легко видеть, что функция  $f(k, \eta)$  при  $k > 0$  действительна в промежутке

$$0 \leq \eta \leq \eta^*(k) \quad (2.15)$$

где

$$\eta^*(k) \equiv k \beta_2(S_1), \quad \beta_2(S_1) = \sqrt{(S_1/S_2)^2 - 1} \quad (2.16)$$

причем, согласно (2.14), имеем:

$$V = S_2 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } V = S_1 \text{ при } \eta = \eta^* \quad (2.17)$$

Определим знак функции  $f(k, \eta)$  в концах промежутка (2.15) при фиксированном значении  $k$ . Согласно (2.12), (2.13) и (2.16) имеем:

$$f(k, \eta^*(k)) \equiv f^*(k) = -R(k)/c, \quad \beta_2(S_1) < 0 \quad (2.18)$$

так как  $R(k) > 0$ .

При  $\eta = 0$  функция  $g(k, 0)$  из (2.13) имеет вид:

$$g^*(k) = \beta_1(S_2) - R(k) \quad (2.19)$$

знак которого зависит от значений характеристик слоистой системы и параметра  $k$ .

При условии а) имеем:

1. Для слоистых систем с условиями (3.10) и (3.12) ([13], Фиг. За, 4а):

$$g^*(k) > 0, k \in [0, \infty] \quad (2.20)$$

2. Для слоистых систем с условиями (3.8) ([13], Фиг. 2а):

$$\text{а) } g^*(k) \geq 0, k \in [0, \infty] \text{ при } \beta_1(S_2) \geq R_\infty \quad (2.21)$$

$$\text{б) } g^*(k) \geq 0, k \in [0, k_{\text{пер}}]; g^*(k) < 0, k \in (k_{\text{пер}}, \infty] \text{ при } \beta_1(S_2) < R_\infty \quad (2.22)$$

где  $k = k_{\text{пер}}$  определяется из условия:

$$R(k_{\text{пер}}) = \beta_1(S_2) \quad (2.23)$$

Отметим, что в случае (2.21)  $g^*(\infty) = 0$  при  $\beta_1(S_2) = R_\infty$ . Далее, из (2.10) следует, что

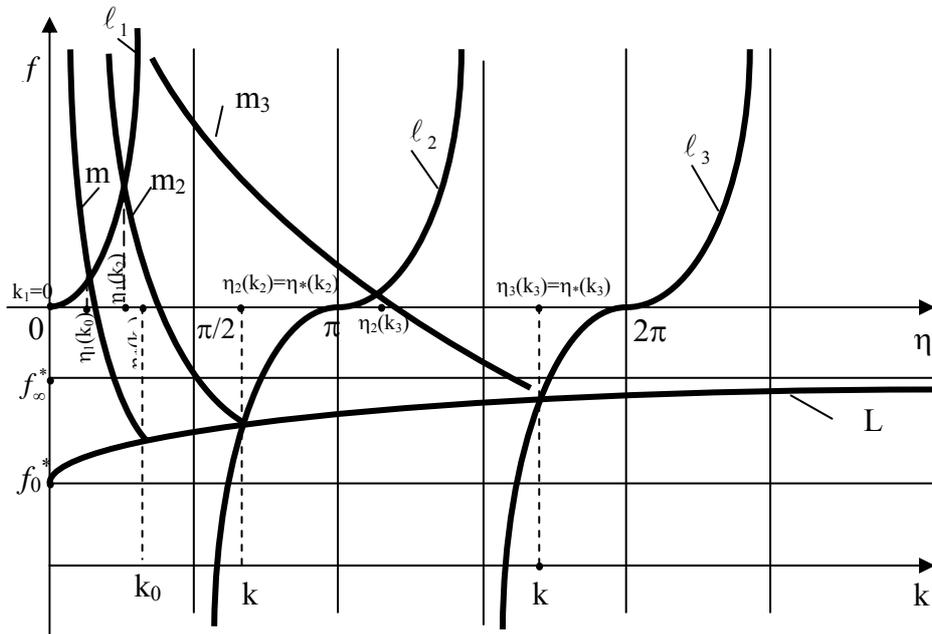
$$\begin{aligned} f(k, 0) &= +\infty && \text{при } g^*(k) > 0 \\ f(k, 0) &= -\infty && \text{при } g^*(k) < 0 \\ f(k_{\text{пер}}, 0) &= 0/0 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

При  $k = k_{\text{пер}}$  получается неопределенность вида  $0/0$ , раскрытие которой приводит к значению  $f(k_{\text{пер}}, 0) = 0$ . Отсюда приходим к следующему заключению.

Функция  $f(k, \eta)$  при фиксированном значении  $k > 0$  в промежутке  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$  обладает свойствами:

- 1) Монотонно убывает от значения  $+\infty$  до значения  $f^*(k) \equiv f(k, \eta^*(k)) < 0$  при  $g^*(k) > 0$ ;
- 2) Монотонно возрастает от  $-\infty$  до значения  $f^*(k) < 0$  при  $g^*(k) < 0$ ;
- 3) Монотонно убывает от 0 до значения  $f^*(k_{\text{пер}}) < 0$  при  $k = k_{\text{пер}}$ , т.е. при  $g^*(k) = 0$ .

Используя полученные свойства функции  $f(k, \eta)$ , можно графически исследовать поведение решений характеристического уравнения (2.11).



Фиг.2

Случай I(a).1. Слоистые системы с условием (3.10) ([13], Фиг.3.a ). Построим графики функций  $\operatorname{tg}\eta$  и  $\operatorname{tg}(k, \eta)$  для фиксированного значения  $k > 0$ . На фиг. 2 кривые  $l_1, l_2, l_3$  и т.д. представляют собой графики ветвей функции  $\operatorname{tg}\eta$ , а кривые  $m_2, m_3$ , и т.д. – графики функции  $f(k, \eta)$  при некоторых значениях параметра  $k$  (смысл которых будет ясен из дальнейшего изложения), когда  $\eta$ ; меняется в промежутке  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$ ,  $L$  – график функции  $f^*(k)$  при  $k > 0$ . Здесь:

$$f_0^* \equiv f^*(0) = -R_0 / c\beta_2(S_1), f_\infty^* \equiv f^*(\infty) = -R_\infty / c\beta_2(S_1) \quad (2.25)$$

При фиксированном значении  $k$  точки пересечения графика функции  $f(k, \eta)$  с кривыми  $l_1, l_2, l_3$ , и т.д. как раз определяют значения корней  $\eta = \eta_n(k)$  характеристического уравнения (2.11), которым отвечают фазовые скорости мод волны Лява соответствующего порядка  $V = V_n(k)$ :

$$V_n(k) = S_2 \sqrt{1 + (\eta_n(k)/k)^2} \quad (2.26)$$

Графики решений характеристического уравнения  $V_n(k)$  называются дисперсионными кривыми волны Лява.

Как видно из фиг. 2, в окрестности точки  $k = k_1 = 0 (\eta = 0)$  графики функции  $f(k, \eta)$  при фиксированном значении  $k = k_{12}$ , например кривая  $m_{12}$ , пересекаются только с графиком первой ветви  $l_1$  функции  $\operatorname{tg}\eta$ , причем абсцисса

точки пересечения  $\eta = \eta_1(k)$  возрастает с увеличением  $k$ . При некотором значении  $k = k_2$ , которое удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\eta^*(k_2) = f^*(k_2) \text{ или } \operatorname{tg}(k_2\beta_2(S_1)) = -R(k)/c\beta_2(S_1) \quad (2.27)$$

график функции  $f(k, \eta) = f(k_2, \eta)$  (кривая  $m_2$ ) впервые пересекается с графиком второй ветви  $l_2$  функции  $\operatorname{tg}\eta$ , причем абсцисса точки пересечения определяется соотношением:  $\eta = \eta_2(k_2) = \eta^*(k_2)$ . Именно от этого значения  $k$ , т.е. от значения  $k_2$  начинается вторая ветвь решения характеристического уравнения, при этом  $V_2(k_2) = S_1$ , т.е. вторая мода волны Лява начинается от объемной волны, которая распространяется со скоростью  $S_1$ . При дальнейшем увеличении  $k$  до некоторого значения  $k_3$ , определяемого уравнением

$$\operatorname{tg}\eta^*(k_3) = f^*(k_3) \quad (2.28)$$

характеристическое уравнение (2.11) для каждого значения  $k > 0$  имеет два решения:  $\eta_1(k)$  и  $\eta_2(k)$ , которым соответствуют первая и вторая моды волны Лява, причем скорости их распространения удовлетворяют условию:  $V_1(k) < V_2(k)$ . Начиная со значения  $k_3$  параметра  $k$ , возникает третья мода волны Лява, которая при  $k = k_3$  является объемной и распространяется со скоростью  $V = V_3(k_3) = S_1$ . При дальнейшем увеличении  $k$  вышеуказанная картина аналогично повторяется: начиная с некоторых определенных значений  $k_4, k_5, \dots, k_n$  и т.д. начинаются следующие высшие моды. При увеличении параметра  $k$  скорости всех мод уменьшаются, причем они удовлетворяют условию (2.5). В пределе при  $k \rightarrow \infty$  все моды, сливаясь между собой, образуют единственную объемно-поверхностную волну, которая должна распространяться со скоростью  $V = S_2$ . Однако, как и в случае обычной волны Лява, такая волна не существует, не является решением граничной задачи для двух полупространств. В самом деле, в этом случае для объемно-поверхностной волны непосредственно получаем условие

$$\beta_1(S_2) = R_\infty \quad (2.29)$$

которое можно получить также из характеристического уравнения (1.2), подставляя в нем  $V = S_2, \beta_2(S_2) = 0, k = \infty, R_\infty = R(\infty)$ . Равенство (2.29) имеет место, если  $0 < R_\infty < 1$ . Итак, если для слоистой системы одновременно выполняются условия

$$0 < R_\infty < 1, \beta_1(S_2) = R_\infty \quad (2.30)$$

то при  $k \rightarrow \infty$  существуют объемно-поверхностные волны, которые убывают вглубь пьезоэлектрической среды. Если же первое условие нарушается или при его выполнении нарушается второе условие, то волны указанного типа не существуют. При существовании этих волн скорость их распространения определится формулой:

$$V = S_2 = S_1\sqrt{1 - R_\infty^2} \quad (2.31)$$

Так как в нашем случае  $\beta_1(S_2) > R_2$ , то отсюда следует, что в слоистых системах с условием (3.10) из [13] при  $k = \infty$  объемно-поверхностные волны не могут распространяться подобно обычным волнам Лява.

Наконец, можно показать, что в этом случае характеристическое уравнение (2.1) в интервале  $(0, S_2)$  решений не имеет. Действительно, уравнение (2.1) можно привести к виду:

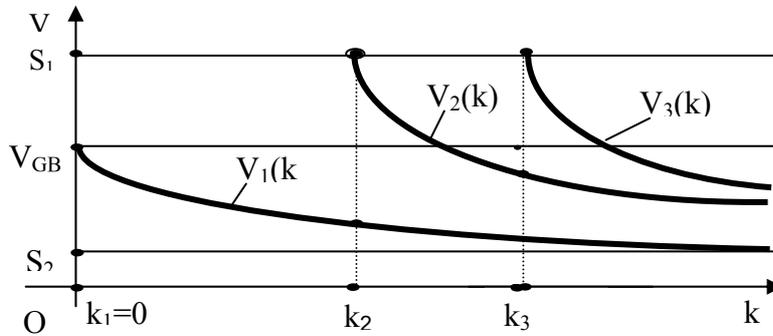
$$\mu(k, V) \equiv \beta_1(V) + c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] = R(k) \quad (2.32)$$

В этом случае имеется оценка:  $\mu(k, V) \geq \mu(0, V) > R_0 > R(k)$ . Откуда следует, что при любом значении параметра  $V$  из интервала  $(0, S_2)$  графики функций  $\mu(k, V)$  и  $R(k)$  не пересекаются, т.е. уравнение (2.32) в этом интервале решений не имеет.

Таким образом, в слоистых системах с условием (3.10) из [13], при  $\beta_1(S_2) > R_0$  электроупругие волны Лява существуют и имеют следующую структуру: первая мода волны Лява начинается с поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, имеющей скорость  $V = V_{GB} < S_1$  при  $k = k_1 = 0$  и при увеличении  $k$  распространяется с убывающей скоростью  $V = V_1(k)$ , которая стремится к скорости  $S_2$  объемных волн в слое при  $k \rightarrow \infty$ . При некотором определенном значении  $k_2$ , зависящем от характеристик слоистой системы, возникает объемная электроупругая волна со скоростью распространения  $S_1$ . Из этой волны при увеличении параметра  $k$  возникает вторая мода волны Лява, скорость распространения которой  $V = V_2(k)$  при увеличении  $k$  убывает от значения  $S_1$  и в пределе при  $k \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_2$ , равную скорости распространения объемных упругих волн в слое. Далее, таким же образом при некотором определенном значении  $k_3$ , зависящем от характеристик слоистой системы, возникает объемная электроупругая волна со скоростью распространения  $S_1$ . Из этой волны при увеличении параметра  $k$  возникает третья мода волны Лява, скорость распространения которой  $V = V_3(k)$  при увеличении  $k$  убывает от значения  $S_1$  и в пределе при  $k \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_2$ , равную скорости распространения объемных упругих волн в слое. Далее, таким же образом возникают остальные более высокие моды  $V_4(k)$ ,  $V_5(k)$  и т.д. волны Лява, число которых при  $k \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности, и которые распространяются с убывающими скоростями, удовлетворяющими условию (2.5). В пределе при  $k \rightarrow \infty$  все моды сливаясь, составляют одну объемно-поверхностную волну со скоростью распространения  $S_2$ , которая не может распространяться в рассматриваемых слоистых системах. В этом случае поведение дисперсионных кривых показано на фиг.3.

Случай I(a).2. Слоистые системы с условиями (3.12) и (3.8) из [13, Фиг.4.а,2.а]. Легко показать, что для систем (3.12) и для систем (3.8) с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) \geq R_\infty$  можно провести такие же исследования,

как в случае (3.10). В результате приходим к заключению: в таких слоистых системах при наличии мягкого слоя ( $S_2 < S_1$ ) и условия  $V_{GB} > S_2$  волны Лява существуют при любом значении  $k > 0$ , а их скорость распространения



Фиг.3

принадлежит интервалу  $(S_2, S_1)$ , причем поведение мод волны Лява описывается дисперсионными кривыми, показанными на фиг 3. Для слоистых систем (3.12) имеет место условие  $\beta_1(S_2) > R_0 = R_\infty$ , что согласно (2.30) показывает отсутствие объемно-поверхностных волн в случае двух полупространств.

Такие волны отсутствуют также в слоистых системах (3.8), когда  $\beta_1(S_2) > R_\infty$ . А когда для таких систем имеет место условие  $\beta_1(S_2) = R_\infty$ , то при  $k \rightarrow \infty$  в них существуют объемно-поверхностные волны.

Случай I(a).3. Слоистые системы (3.8) с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) < R_\infty$ . Как будет показано ниже, в этом случае поведение мод волны Лява имеет определенную особенность, отсутствующую у слоистых пьезоэлектрических систем с симметрией 622, 6mm, 422, 4mm.

В этом случае в интервале  $(0, k_{\text{пер}})$  для фиксированного значения  $k$  поведение функции  $f(k, \eta)$  в интервале  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$  подобно предыдущему случаю, а именно: функция  $f(k, \eta)$  на концах указанного интервала принимает значения:  $f(k, 0) = \infty$  и  $f(k, \eta^*(k) = f^*(k) < 0) = f^*(k)$ , и графики функции  $f(k, \eta)$  для фиксированных значений  $k$  пересекаются с ветвями графика функции  $\text{tg}\eta$  в точках с абсциссами  $\eta_1(k), \eta_2(k), \eta_3(k)$  и т.д., причем насколько больше  $k_{\text{пер}}$ , настолько больше и число этих пересечений и имеет место условие (фиг.4):

$$0 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_{\text{пер}} \quad (2.33)$$

Отметим, что величина параметра  $k_{\text{пер}}$  зависит от того, в каком соотношении делится отрезок  $[R_0 = R_\infty]$  величиной  $\beta_1(S_2)$ , причем насколько  $\beta_1(S_2)$  близка к  $R_\infty$ , настолько больше и  $k_{\text{пер}}$ ; когда  $\beta_1(S_2) \rightarrow R_\infty$ , то  $k_{\text{пер}} \rightarrow \infty$ , когда

$\beta_1(S_2) \rightarrow R_0$ , то  $k_{\text{пер}} \rightarrow 0$ . Когда  $k = k_{\text{пер}}$ , то  $f(k_{\text{пер}}, 0) = 0$ ,  $f(k_{\text{пер}}, \eta_*(k_{\text{пер}})) = f^*(k_{\text{пер}}) < 0$  и в этом случае график функции  $f(k_{\text{пер}}, \eta)$  (кривая  $m_{\text{пер}}$ ) пересекается с первой ветвью  $l_1$  графика функции  $\text{tg}\eta$  в точке с абсциссой  $\eta = \eta_1(k_{\text{пер}}) = 0$ , т.е. в начале координат, которой соответствует

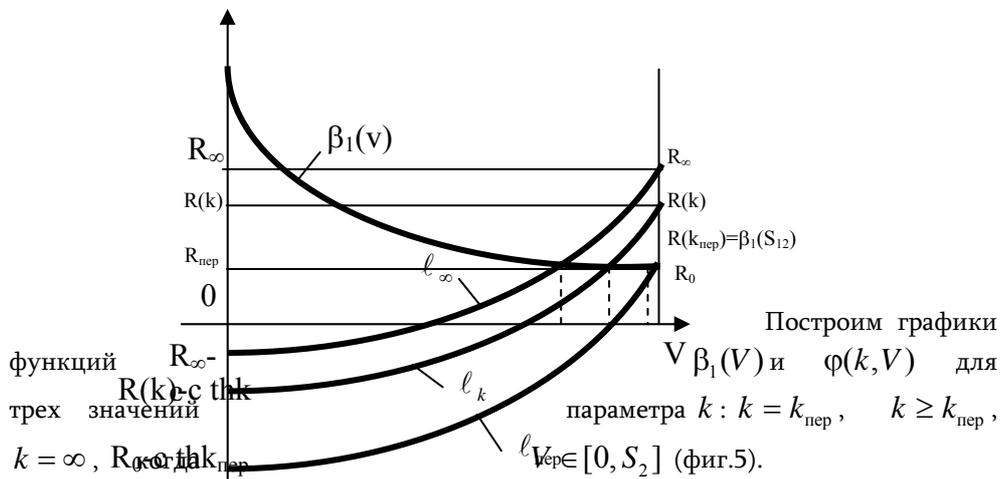


первая мода волны Лява, распространяющейся со скоростью  $V_1(k_{пер}) = S_2$ . Точкам пересечения графика функции  $f(k_{пер}, \eta)$  с графиками остальных ветвей функции  $\text{tg}\eta$  соответствует абсцисса  $\eta_2(k_{пер}), \eta_3(k_{пер})$  и т.д., которым и соответствуют скорости высших мод волны Лява  $V_2(k_{пер}), V_3(k_{пер})$  и т.д. Далее, когда  $k > k_{пер}$ , то  $f(k, 0) = -\infty$ ,  $f(k, \eta^*(k)) = f^*(k) < 0$  и график функции  $f(k, \eta)$  уже не пересекается с первой ветвью  $l_1$  функции  $\text{tg}\eta$ , но обязательно пересекается с ветвями  $l_2, l_3, \dots, l_n$  этой функции (на фиг.4 показан случай, когда  $n=3$ ), определяя соответствующие абсциссы  $\eta_1(k), \eta_2(k), \dots, \eta_n(k)$  точек пересечения и соответствующие скорости мод  $V_2(k), V_3(k), \dots, V_n(k)$ . Начиная с некоторого значения  $k = k_{n+1} > k_{пер}$ , возникают моды порядка  $n+1$  и выше так, как в предыдущем случае.

Таким образом, для рассматриваемых слоистых систем при значениях  $k \in [0; k_{пер}]$  первая мода волны Лява существует и описывается характеристическим уравнением (2.11) (или (1.2)), остальные моды существуют при любом значении параметра  $k$  и описываются характеристическим уравнением (2.1).

Теперь рассмотрим первую моду, когда  $k \geq k_{пер}$ . Ясно, что при  $k = k_{пер}$  скорость  $V = V_1 = S_2$  удовлетворяет также уравнению (2.1). При  $k \geq k_{пер}$  из (2.1) имеем:

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \equiv \varphi(k, V) \quad (2.34)$$



Как видно из фиг.5, для любого значения  $k \geq k_{пер}$  графики функций  $\beta_1(V)$  и  $\varphi(k, V)$  пересекаются в одной точке, абсцисса которой дает скорость  $V = V_1 = V_1(k)$ . Когда  $k$  начинает увеличиваться от значения  $k = k_{пер}$ , скорость  $V$  убывает от значения  $S_2$  и когда  $k \rightarrow \infty$ , то  $V \rightarrow V_\infty$ , что определяется из уравнения:

$$\beta_1(V_\infty) = -c\gamma_2(V_\infty) + R_\infty \quad (2.35)$$

Легко видеть, что характеристическое уравнение (2.34) не имеет решений, принадлежащих интервалу  $(0, V_\infty)$ .

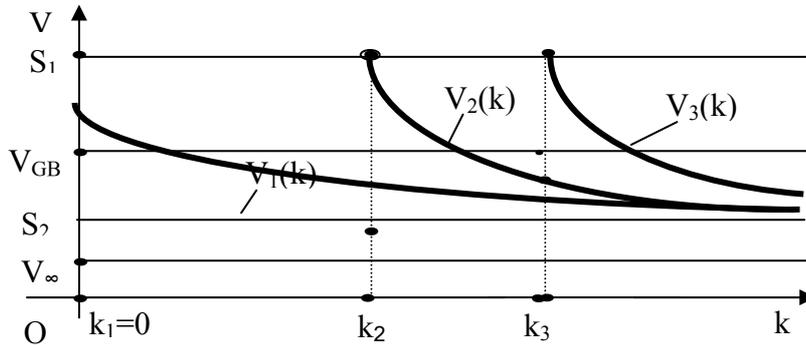
Таким образом, для слоистых систем (3.8) из [13] с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) < R_\infty$  поведение мод волны Лява следующее: первая мода волны Лява начинается с волны Гуляева–Блюстеина при  $k = k_1 = 0$  и распространяется при увеличении  $k$  с убывающей скоростью  $V = V_1(k)$ . При достижении  $k$  некоторого определенного значения  $k_{\text{пер}}$ , скорость принимает значение  $V = V(k_{\text{пер}})$ , которое равняется скорости объемных волн в слое  $S_2$ . В дальнейшем, при увеличении  $k$  скорость первой моды продолжает уменьшаться и при  $k \rightarrow \infty$  стремится к определенному значению  $V_\infty$ , причем в интервале  $(0, k_{\text{пер}})$  первая мода обычного типа (как классические волны Лява), а в интервале  $(k_{\text{пер}}, \infty)$  – щелевого типа, значение  $k_{\text{пер}}$  является переходным между этими случаями. Подобными свойствами не обладают как обычные волны Лява, так и электроупругие волны Лява для предыдущих слоистых систем.

Начиная с некоторого значения  $k_2$ , возникает вторая мода волны Лява и при увеличении  $k$  при определенных критических значениях  $k_3, k_4$  и т.д. возникают остальные высшие моды и подобно предыдущим системам в пределе, когда  $k \rightarrow \infty$ , эти моды сливаясь, составляют одну объемно-поверхностную волну, которая не может распространяться в рассматриваемой слоистой системе.

В этом случае поведение дисперсионных кривых показано на фиг.6.

Отметим следующий важный факт. Легко показать, основываясь на предыдущих рассуждениях, что в случае мягкого слоя характеристическое уравнение (1.2) при условии (2.3) для коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  всегда имеет решение при некотором значении  $k_2$  параметра  $k$ , описывающее объемную волну,

от которой рождается вторая мода волны Лява.



Фиг.6

При увеличении  $k$  появляются другие решения, описывающие остальные высшие моды, скорость которых, уменьшаясь с увеличением  $k$ , при  $k \rightarrow \infty$

стремится к значению  $S_2$  – скорости объемных волн в слое. При этом, в предельном случае двух полупространств существование объемно–поверхностной волны определяется по условию (2.18). Первая же мода в зависимости от поведения  $R(k)$ , как выяснилось выше, может иметь различные поведения. Поэтому в дальнейшем будем исследовать, в основном, поведение первой моды, которое в общем случае описывается обоими характеристическими уравнениями (1.2) и (2.1).

Выше мы рассматривали поведение мод электроупругой волны Лява в мягких слоистых системах ( $S_2 < S_1$ ), для которых коэффициент электромеханической связи  $R(k) > 0$ , а скорость волны Гуляева–Блюстеина в подложке удовлетворяет условию  $S_2 < V_{GB}$ . В следующей работе будем исследовать волновой процесс в указанных слоистых системах при предположениях: 1)  $V_{GB} = S_2$ , 2)  $V_{GB} < S_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some problems of Geodinamics. London: Cambrige University Press. 1911, 180p.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
3. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Шувалов Л.А. О поверхностных волнах Лява в пьезоэлектриках. // Кристаллография. 1982. Т.27. №3. С.437-443
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. Ереван: Материалы Всесоюз. науч. семинара, 1991, с.49-54
5. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carring a metal layer of finite thickness.// J. Appl. Phys. 1973. Vol.44. N5. P.2002-2007
6. Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в гексагональных и тетрагональных пьезоэлектрических подложках с проводящим слоем.– Тезисы докладов “Механика неоднородных структур”, Львов, 1991. С. 101.
7. Даноян З.Н. Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем.// Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1995.Т. 48. №3. С.43-52.
8. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Филиппов В.В. Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем. // Акуст. журнал. 1985. Т.31. вып.4. С.492-495
9. Аветисян А.С. Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем.–III Всесоюзн. симпоз. « Теоретические вопросы магнитоупругости » (тезисы докладов), Ереван - Цахкадзор, 1984, с. 7-10.
10. Балакирев М.К., Гилянский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
11. Иона Ф.,Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы.–М.:Мир,1965
12. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М.:Наука,1981.281с.
13. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. (Исследование поведения коэффициента

электромеханической  
// Изв.НАН РА. Механика.2003. Т. 56. №4. С.46-55.

связи).

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.09.2005

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН,  
 ОСЛАБЛЕННЫХ МОНЕТООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Եգիազյան Կ.Ա.

S.Z. Եղիազյան

Ճաքով թուլացված կլոր սալերի առանցքասիմետրիկ ծռումը

Աշխատանքում դիտարկվում է ճաքի ազդեցությունը համասեռ, հաստատուն հաստության սիմետրիկ բեռնավորված կլոր սալի ծռման վրա՝ կախված ճաքի դիրքից և մեծությունից, ինչպես նաև սալի ամրակցման ձևից (կոշտ և հոդակապորեն):

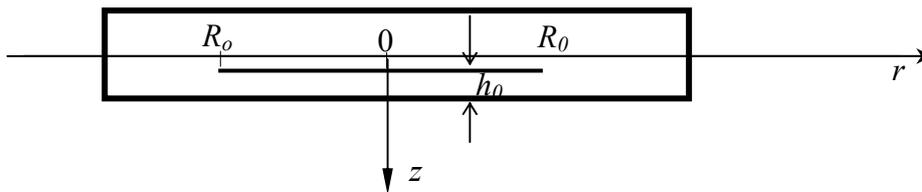
T.H. Yeghiazaryan

The axisymmetric bending of circular plates impaired by crack

In the article it has been considered the axisymmetric bending of circular plate with constant thickness, which has been impaired by crack. It has been analyzed the results depending on length and position of crack.

Рассмотрена задача осесимметричного изгиба круглой пластинки постоянной толщины, внутри которой расположена трещина. Проведен анализ результатов в зависимости от длины и расположения трещины пластинки.

Пусть в равномерно нагруженной круглой пластинке с радиусом  $R$  и толщиной  $h$  с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона (имеется трещина с радиусом  $R_0 \in [0, R]$ , расположенная на расстоянии  $h_0 \in [0, 0.5h]$  от наружной плоскости (фиг.1).



Փիգ.1

В рассмотренном случае жесткость на изгиб пластинки представится в виде

$$D = \begin{cases} D_1 & r \in (0; R_0) \\ D_2 & r \in (R_0; R) \end{cases}$$

где  $D_1 = D$ ,  $D_2 = D$ ,  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость пластинки.

Здесь  $\nu = 1 - 3(1 + 3\nu^2)$ ,  $\nu = h_0/h$ .

Уравнения изгиба пластинки в цилиндрической системе координат  $r, z$  имеют вид:

$$w_i^{IV} + \frac{2}{r} w_i^{III} - \frac{1}{r^2} w_i^{II} + \frac{1}{r^3} w_i^I = \frac{q}{D_i} \quad (1)$$

$$i=1 \quad r \in [0; R_0]; \quad i=2 \quad r \in (R_0, R];$$

где  $q$  – равномерно распределенная нагрузка.

Приведенная модель для определения интегральных характеристик пластин с планарными трещинами была предложена в [1]. На основе этой модели были решены задачи устойчивости пластин с трещинами [1,2]. В [3] исследованы задачи собственных колебаний прямоугольных пластин с планарными трещинами.

Решения уравнений (1) представляются в виде [4]

$$w_i = A_i r^2 + B_i r^2 \ln r + C_i \ln r + K_i + \frac{q r^4}{64 D_i}, \quad (i=1,2) \quad (2)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i, K_i$  ( $i=1,2$ ) – постоянные интегрирования.

Производя замену  $\bar{w} = \frac{w}{h}$ ,  $\bar{r} = \frac{r}{R}$ ,  $\alpha = \frac{R_0}{R}$ , получим (1) в безразмерном виде

$$\bar{w}_i^{IV} + \frac{2}{\bar{r}} \bar{w}_i^{III} - \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{w}_i^{II} + \frac{1}{\bar{r}^3} \bar{w}_i^I = \frac{q R^4}{h D_i} \quad (3)$$

Общие решения уравнений (3) имеют вид:

$$\bar{w}_i = A_i \bar{r}^2 + B_i \bar{r}^2 \ln \bar{r} + C_i \ln \bar{r} + K_i + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_i}$$

Из условия ограниченности прогиба и изгибающего момента в центре пластинки следует  $B_1 = C_1 = 0$  и для участка  $(0, R_0)$  прогиб (2) имеет вид [4]:

$$\bar{w}_1(\bar{r}) = A_1 \bar{r}^2 + K_1 + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_1} \quad (4)$$

А для участка  $(R_0; R)$

$$\bar{w}_2 = A_2 \bar{r}^2 + B_2 \bar{r}^2 \ln \bar{r} + C_2 \ln \bar{r} + K_2 + \frac{q \bar{r}^4}{64 D_2} \quad (5)$$

Для определения коэффициентов  $A_1, K_1, A_2, B_2, C_2, K_2$  поступаем следующим образом.

Условия сопряжения на окружности  $\bar{r} = \alpha$  имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{w}_2, \quad \bar{w}_1' = \bar{w}_2' \\ M_{rr}^{(1)} &= M_{rr}^{(2)}, \quad Q_{rz}^{(1)} = Q_{rz}^{(2)} \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$M_{rr}^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D_i \left[ \frac{d^2 w_i}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_i}{dr} \right] - \text{изгибающий момент,}$$

$$Q_{rz}^{(i)} = -D_i \left( \frac{d^3 w_i}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_i}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_i}{dr} \right) - \text{перерезывающая сила.}$$

Из условия  $Q_{rz}^{(1)} = Q_{rz}^{(2)}$  следует, что  $B_2 = 0$ . Подставляя в (6) прогибы (4) и (5), получим

$$K_1 - K_2 + A_1\alpha^2 - A_2\alpha^2 - \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^4}{16Eh^4} + \frac{3(1-\nu^2)q\alpha^4 R^4}{16Eh^4\delta} - C_2 \ln \alpha = 0$$

$$-\frac{h}{R}\left(2A_2\alpha + \frac{C_2}{\alpha} + \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^3}{4Eh^4}\right) + \frac{h}{R}\left(2A_1\alpha + \frac{3(1-\nu^2)qR^4\alpha^3}{4Eh^4\delta}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{h}{\alpha^2 R}((1-\nu)C_2 + 2A_2\alpha^2(1+\nu) - 2A_1\alpha^2\delta(1+\nu)) = 0$$

1) На жестко заделанном крае  $\bar{r} = 1$  пластинки прогиб и угол касательной к срединной поверхности равны нулю

$$\bar{w}_2 = 0, \quad \frac{d\bar{w}_2}{d\bar{r}} = 0,$$

т.е.

$$A_2 + K_2 + \frac{12qR^4(1-\nu^2)}{64Eh^4} = 0$$

$$\frac{h}{R}\left(2A_2 + C_2 + \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{4Eh^4}\right) = 0 \quad (8)$$

что дает еще два уравнения относительно произвольных постоянных.

Решая уравнения (7) и (8), получим для жестко заделанной пластинки

$$w_1(\alpha) = \frac{3(\nu^2 - 1)qR^4(\delta + \delta^2 - \delta\nu + \delta^2\nu + \alpha^6(\delta - 1)^2(1 + \nu) - 4\delta\alpha^2 + \alpha^4 + \delta\alpha^4 - \nu\alpha^4 + \delta\nu\alpha^4)}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))} -$$

$$-\frac{\alpha^4(\delta - 1)(1 + \delta - \nu + \delta\nu - 2\alpha^2 - 2\nu\alpha^2) - \alpha^2(\delta - 1)(\delta(1 + \nu) + \alpha^2(\alpha^2 - 2 + \nu(2 + \alpha^2)))}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))} -$$

$$-\frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)(\delta - 1)\delta(1 + \nu)\ln \alpha}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))}$$

Наибольший прогиб при равномерно распределенной нагрузке  $q$ , как видно из (4), получается в точке  $\bar{r} = 0$ , где  $\bar{w}_1 = K_1$

$$K_1 = 3(\nu^2 - 1)qR^4 \left( \frac{(\alpha^4(\delta - 1) - \delta)(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(1 + \nu) - \delta(1 + \nu))}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(\nu + 1) - \delta(1 + \nu))} - \frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)(\delta - 1)\delta(\nu + 1)\ln \alpha}{16\delta Eh^4(\nu - 1 + \alpha^2(\delta - 1)(\nu + 1) - \delta(1 + \nu))} \right)$$

В табл. 1 приведены значения  $\bar{K}_1 = K_1 \frac{16Eh^4}{3(1-\nu^2)qR^4}$  для различных  $\alpha$  и  $\beta$

Таблица 1

(жестко заделанная по краям пластинка,  $\nu=0,3$ )

$\beta \backslash \alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1.019	1.052	1.085	1.110	1.128	1.141	1.157	1.190	1.254	1.369
0.2	1	1.041	1.111	1.179	1.231	1.269	1.303	1.353	1.450	1.627	1.923
0.3	1	1.062	1.169	1.271	1.351	1.413	1.481	1.593	1.796	2.145	2.702

0.4	1	1.079	1.214	1.342	1.445	1.535	1.647	1.836	2.169	2.720	3.571
0.5	1	1.086	1.231	1.369	1.483	1.587	1.722	1.951	2.350	3.003	4

2) Если край пластинки шарнирно оперт, то прогиб и изгибающий момент в радиальном направлении равны нулю:

$$\bar{w}_2 = 0, \quad M_{rr}^{(2)} = 0$$

$$A_2 + K_2 + \frac{12qR^4(1-\nu^2)}{64Eh^4} = 0$$

$$\frac{-4C_2Eh^4(\nu-1) + (1+\nu)(-8A_2Eh^4 + 3(-3+2\nu+\nu^2)qR^4)}{4Eh^3R} = 0 \quad (9)$$

Решая уравнения (7) и (9), определим выражение прогиба для шарнирно опертой пластинки

$$w_1(r) = \frac{3(\nu-1)qR^4(5\delta+5\delta^2-4\delta\nu+6\delta^2\nu-\delta\nu^2+\delta^2\nu^2+\alpha^6(\delta-1)^2(1+\nu^2))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} +$$

$$+ \frac{-12\delta r^2-4\delta\nu r^2+r+\delta r^4-2\delta\nu r^4-\nu^2 r^4+\delta\nu^2 r^4}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$- \frac{\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)(\delta(7+\nu)+(\nu-1)r^2(2+r^2))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$- \frac{\alpha^4(\delta-1)(1+\nu)(\delta(\nu-3)-(\nu-1)(1+2r^2))-4\alpha^2(\delta-1)\delta(1+\nu)(-\nu-3+\alpha^2(\nu+1))\ln r}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(1+\nu)+\nu-\delta(1+\nu))}$$

и наибольший прогиб

$$K_1 = \frac{(1+\nu)(\nu-1)qR^4((\alpha^4(\delta-1)(1+\delta(\nu-3)-\nu)(\nu+1)+\delta(5+\nu)(1+\delta-\nu+\delta\nu))}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))} +$$

$$+ \frac{\alpha^6(\delta-1)^2(\nu^2-1)-\alpha^2(\delta-1)\delta(7+8\nu+\nu^2)}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))} -$$

$$- \frac{4\alpha^2(\delta-1)\delta(1+\nu)(-3-\nu+\alpha^2(1+\nu))\ln \alpha}{16\delta Eh^4(-1+\alpha^2(\delta-1)(\nu-1)+\nu-\delta(1+\nu))}$$

В табл. 2 приведены значения  $\bar{K}_1 = K_1 \frac{64(1+\nu)Eh^4}{(5+\nu)qR^4}$  для различных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Таблица 2

(шарнирно опертая по краям пластинка,  $\nu=0,3$ )

$\beta \backslash \alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1.016	1.050	1.092	1.138	1.185	1.230	1.271	1.308	1.341	1.369

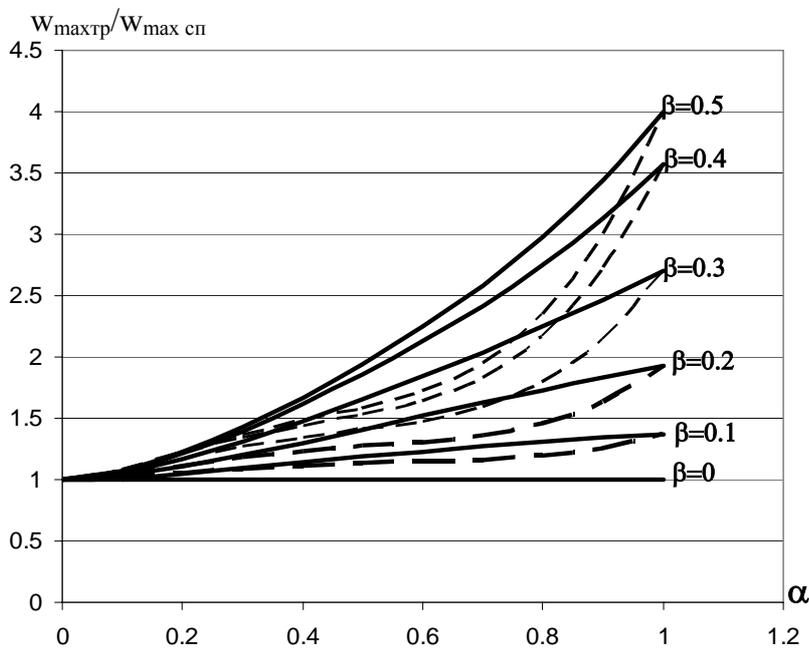
0.2	1	1.034	1.107	1.199	1.302	1.410	1.519	1.625	1.728	1.827	1.923
0.3	1	1.053	1.164	1.309	1.474	1.653	1.843	2.041	2.249	2.468	2.702
0.4	1	1.067	1.210	1.397	1.615	1.858	2.126	2.421	2.751	3.128	3.571

При отсутствии трещины, то есть когда  $\alpha=0$  или  $\alpha=1$ , получим

$$K_1 = \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{16Eh^3} \quad \text{для жестко заделанной пластинки и} \quad K_2 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{3(1-\nu^2)qR^4}{16Eh^3}$$

для шарнирно опертой пластинки.

В случае  $\alpha=1$  и  $\alpha=0.5$ , то есть когда трещина находится в середине и расположена по всему диаметру пластинки, максимальный прогиб в 4 раза больше максимального прогиба сплошной пластинки.



Фиг. 2

На фиг.2 для некоторых значений параметра  $\beta$  представлены графики отношения максимального прогиба пластинки с трещиной к максимальному прогибу сплошной пластинки в зависимости от  $\alpha$ . Сплошные линии относятся к защемленной пластинке, а пунктирные – к шарнирно опертой.

Автор благодарит научного руководителя Гнуни В.Ц. за постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной. // В сб.: "Исследование современных научных проблем в вузах" Ереван: Изд. "Айастан". 2000. Т2. С. 130-133.
2. Гнуни В.Ц., Егиазарян Т.А. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной. //В сб. "Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем" Ереван. Изд. ЕГУ. 2002. С. 37-41.
3. Егиазарян Т.А. О собственных колебаниях пластинок ослабленных трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С. 9-14.
4. Кац А.М. Теория упругости. М.: Гостехтеориздат, 1956. 205с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.02.2006

УДК 534.14.014

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ГАЗОВОГО  
ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

**Оганян Г.Г.**

**Գ.Գ. Օհանյան**

**Անսեղմելի հեղուկում զազային պղպջակի ազատ ոչ գծային բաբախումները**

Հետազոտված է մենակյաց գնդաձև պղպջակի վարքը մածուցիկ հեղուկում: Հենվելով նոսր պղպջակային կառուցվածք ունեցող խառնուրդի շարժումը նկարագրող պարզեցված հավասարումների վրա, դուրս է բերված քառակուսային ոչգծայնություն պարունակող տատանումների հավասարումը: Դիտարկված է ազատ բաբախումների խնդիրը և կառուցված են նրա մասնավոր ճշգրիտ լուծումները: Ցույց է տրված պարբերական տատանումների իրականացման հնարավորությունը, որը կարող է վերածվել հարմոնիկի:

**G.G. Oganyan**

**The Nonlinear Free Oscillations of Gas-Bubble in a Noncompressible Fluid**

The behavior of single spherically bubble in viscous fluid is investigation. The simplified equation for description of motion of rarefied mixture of bubble structure are used. Nonlinear equation of vibrations with quadratic nonlinearity is obtained. The exact particular it solutions are constructed.

Рассмотрено поведение одиночного сферического пузырька в вязкой жидкости. На основе упрощенной системы уравнений, описывающей поведение разреженной смеси пузырьковой структуры, выведено уравнение с квадратичной нелинейностью для исследования задачи свободных колебаний. Построены его точные частные решения, указывающие на возможность реализации периодических осцилляций, в пределе переходящих в гармонические. Показано, что при очень малых амплитудах осцилляций пузырька приближенное решение, полученное асимптотическим методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского, достаточно удовлетворительно согласуется с асимптотикой точного решения.

Полная непротиворечивая система уравнений, описывающая безграничное течение газожидкостной смеси пузырьковой структуры с учетом сил поверхностного натяжения, вязких и тепловых эффектов приведена в [1]. Без учета этих эффектов линейные уравнения пульсации пузырька в несжимаемой жидкости получены и аналитически исследованы в [2,3], а с их привлечением – в [1,4]. В нелинейной постановке численный анализ поведения воздушного пузырька, пульсирующего в воде, приведен в [3,4].

**1. Исходные уравнения.** Пусть одиночный сферически симметричный пузырек с неизменяемой массой идеального газа находится в безграничной вязкой несжимаемой жидкости, в которой эффекты теплообмена и силы поверхностного натяжения отсутствуют. При адиабатическом поведении газа в пузырьке радиальное движение жидкости около пузырька можно описать системой, состоящей из обыкновенного дифференциального уравнения, а также уравнений состояния и сохранения массы газа [1,2]

$$p_2 - p_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{r2}} \quad (1.2)$$

Здесь и далее индексы 1, 2 и 0 отнесены соответственно к жидкости, газу и состоянию покоя (начального равновесия),  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $R$  – радиус пузырька,  $c_p$  и  $c_v$  – удельные теплоемкости,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $t$  – время.

Предполагается, что в любой момент времени отклонения параметров системы пузырек-жидкость мало отличаются от своих значений в состоянии покоя

$$p_2 = p_0(1 + p'_2), \quad p_1 = p_0(1 + p'_1), \quad \rho_2 = \rho_{20}(1 + \rho'_2), \quad R = R_0(1 + R') \quad (1.3)$$

Здесь штрихи отнесены к возмущениям и в дальнейшем будут опущены. При упрощении системы (1.1), (1.2) в нелинейные слагаемые будут подставляться соотношения линейной акустики и в рассмотрении оставляются слагаемые до второго порядка малости включительно, т.е. как линейные, так и члены с квадратичной нелинейностью.

В рассматриваемом приближении подстановка разложений (1.3) в уравнения состояния и сохранения массы газа (1.2) дает

$$\rho_2 = -3R + 6R^2, \quad p_2 = -3\gamma R + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} R^2 \quad (1.4)$$

Аналогичное упрощение уравнения Рэлея-Лэмба (1.1) позволяет в случае пренебрежения эффектами взаимовлияния вязкости, дисперсии с нелинейностью записать его в виде

$$\frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\mu}{p_0} \frac{dR}{dt} - p_2 + p_1 = 0, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1 R_0^2} \quad (1.5)$$

где  $\omega_{ar}$  – адиабатическая частота Миннаерта. Комбинированием соотношения из (1.4) с уравнением (1.5) можно исключить из рассмотрения избыточное давление газа  $p_2$  в пузырьке и получить уравнение

$$\ddot{R} + \delta \dot{R} + \omega_{ar}^2 R - \alpha R^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1(t) = 0, \quad \delta = \frac{4}{3\gamma} \frac{\mu}{p_0} \omega_{ar}^2, \quad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2 \quad (1.6)$$

Здесь точки над искомой функцией означают дифференцирование по  $t$ . Уравнение (1.6) при  $p_1 = 0$  описывает свободные колебания, а при задании избыточного давления в жидкости, т.е. внешней силы  $p_1(t)$  – вынужденные колебания пузырька. Оно может быть интерпретировано как уравнение, описывающее поведение нелинейного осциллятора с одной степенью свободы.

**2. Свободные колебания. Недиссипативный случай**  $\delta = 0$ . Принимается, что давление в жидкости вдали от пузырька постоянно, так что возмущение давления в ней отсутствует:  $p_1 = 0$ .

Умножая уравнение (1.6) на интегрирующий множитель  $\dot{R}$ , получим

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 \left( R^3 - \frac{3}{3\gamma+1} R^2 + \frac{2}{\gamma} \frac{c}{3\gamma+1} \right) = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 f(R) \quad (2.1)$$

Здесь  $c$  – постоянная интегрирования, существенно влияющая на число нулей функции  $f(R)$  и, тем самым, на решения уравнения (2.1). Очевидно, что рассмотрению подлежат лишь положительно определенные ограниченные значения  $f(R)$ . В случае пузырьков воздуха кривые функции  $f(R)$ , построенные для различных значений параметра  $c$ , приведены на фиг.1.

Пусть функция  $f(R)$  имеет три вещественных корня  $b_3 < b_2 < b_1$ , (фиг.1, кривые 2,3), или обладает одним действительным и одним действительным двукратным корнем  $b_5 < b_4$  (фиг.1, кривая 1). Налагаемые требования равнозначны условию, по которому дискриминант

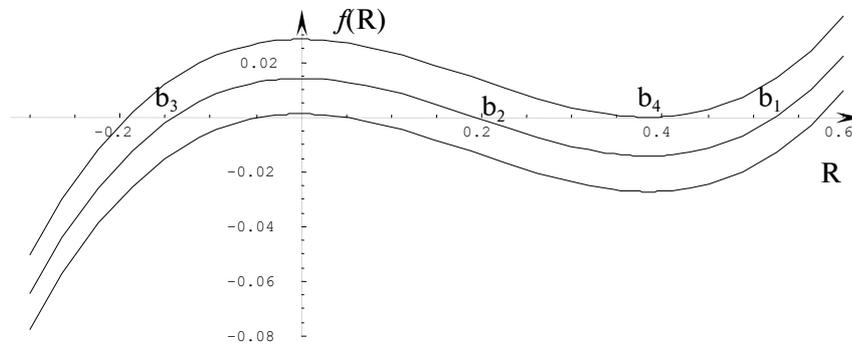
$$D = \frac{c}{\gamma^2(3\gamma+1)^2} \left[ c - \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \right]$$

приведенного кубического уравнения, получаемого из  $f(R)$ , не может быть положительным, т.е.  $D \leq 0$ . Отсюда следуют ограничения

$$0 < c \leq \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \quad (2.2)$$

на величину постоянной  $c$ . В случае реализации знака равенства (фиг.1, кривая 1) уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma+1}{3} \omega_{ar}^2 \left( R + \frac{1}{3\gamma+1} \right) \left( R - \frac{2}{3\gamma+1} \right)^2, \quad c = \frac{2\gamma}{(3\gamma+1)^2} \quad (2.3)$$



□

Фиг.1 Зависимость функции  $f(R)$  от параметра интегрирования  $c$  для воздушного пузырька ( $\gamma=1,4$ ). Кривым соответствуют значения:  $1-c=2\gamma(3\gamma+1)^{-2}$ ,  $2-c=\gamma(3\gamma+1)^{-2}$ ,  $3-c=53,5\gamma[216(3\gamma+1)]^{-2}$ .

Поскольку решение должно быть вещественным и ограниченным, из (2.3) определится интервал изменения искомой функции  $R$

$$b_5 = -\frac{1}{3\gamma+1} < R < \frac{2}{3\gamma+1} = b_4$$

Интегрирование уравнения (2.3) дает формулу

$$R(t) = \frac{2}{3\gamma + 1} - \frac{3}{3\gamma + 1} \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{\omega_{ar}}{2} t \right) \quad (2.4)$$

при выводе которой постоянная повторного интегрирования определялась из условия, что в момент времени  $t = 0$  состоянию покоя соответствует значение  $R = b_3$ . Поскольку  $R(0) < R(\infty)$ , то решение (2.4) описывает расширение пузырька, при этом изменение возмущенного радиуса во времени подчиняется поведению одиночного импульса.

В случае реализации строгого неравенства (2.2) уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = \frac{3\gamma + 1}{3} \omega_{ar}^2 (b_1 - R)(b_2 - R)(R - b_3) \quad (2.5)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — нули функции  $f(R)$ . Требование ограниченности и вещественности решения уравнения (2.5) определяет интервал изменения возмущения радиуса пузырька:  $b_3 \leq R \leq b_2$ . Проводя замену переменной

$$R = b_2 \sin^2 z + b_3 \cos^2 z$$

приведем уравнение (2.5) к виду

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{12} (b_1 - b_3) \omega_{ar}^2 \sqrt{1 - s^2 \sin^2 z}}, \quad s^2 = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3} < 1 \quad (2.6)$$

После интегрирования уравнения (2.6) от 0 до  $z$  получим эллиптический интеграл первого рода, при этом постоянная интегрирования, равная нулю, выбиралась из условия, когда  $t \rightarrow 0$   $R \rightarrow b_3$ , т.е.  $z \rightarrow 0$ . В силу определений эллиптического интеграла и родственных ему функций, решение уравнения (2.6) можно выразить через эллиптический косинус [5]

$$R(t) = b_2 - a \operatorname{cn}^2 \left( \frac{\Omega}{2} t, s \right), \quad \Omega = \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{3} (b_2 - b_3) \frac{\omega_{ar}}{s}}, \quad a = b_2 - b_3 \quad (2.7)$$

Здесь  $a$  — амплитуда,  $\Omega$  — частота пульсаций,  $s$  — модуль эллиптической функции Якоби, служащий мерой нелинейности. Как и следовало ожидать, частота  $\Omega$  является функцией амплитуды. Решение (2.7) описывает изменение во времени поверхности одиночного пузырька, свободно пульсирующего в несжимаемой жидкости с периодом

$$T = \frac{4K(s)}{\Omega} = \sqrt{\frac{3}{3\gamma + 1} \frac{1}{b_1 - b_3} \frac{4K(s)}{\omega_{ar}}}$$

где  $K(s)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда определится нелинейная угловая частота  $\omega$  пульсации с произвольными амплитудами

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{K(s)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3\gamma + 1}{3} (b_1 - b_3) \frac{\omega_{ar}}{K(s)}}$$

В пределе, когда  $b_1 \rightarrow b_2$ , имеем  $s=1$  и функция  $f(R)$  имеет одно действительное  $b_3 \equiv b_5$  и одно двукратное действительное  $b_2 \equiv b_4$  решения. Тогда, в силу формул [5]

$$cn(\Omega t/2, 1) = ch^{-1}(\Omega t/2), \quad \Omega = \omega_{ar}$$

решение (2.7) переходит в (2.4).

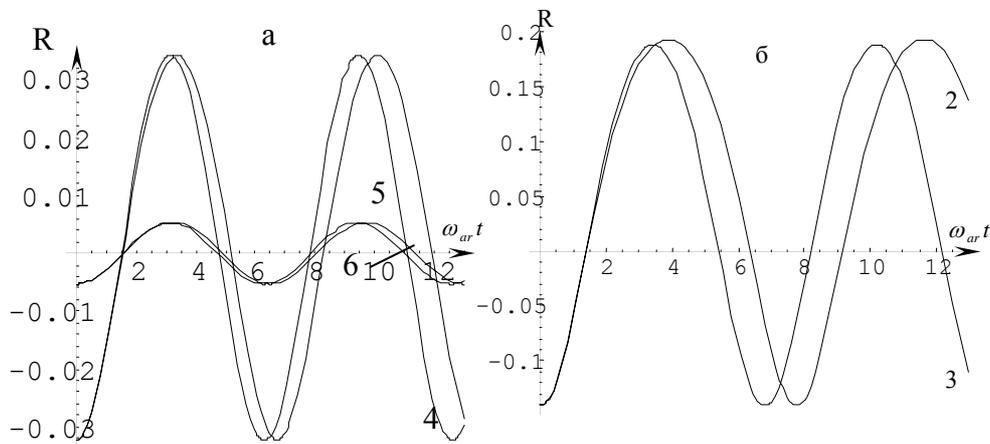
Наконец, исследуем другой предельный случай, когда  $b_2 \rightarrow b_3$ , но  $b_2 \neq b_3$  и  $s \ll 1$ , т.е. случай пульсации с малыми амплитудами. Предварительно выведем некоторые необходимые соотношения. В рассматриваемом случае  $c \ll 1$  с точностью до членов порядка  $c^2$  будем иметь

$$b_1 = \frac{3}{3\gamma+1} \left[ 1 - \frac{2}{3\gamma} \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 c \right] = \frac{3}{3\gamma+1} \left[ 1 - \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{4} \right]$$

$$b_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\gamma} c} = \pm \frac{a}{2}, \quad c = \frac{3\gamma}{8} a^2$$

$$s^2 = \frac{3\gamma+1}{3} a \left[ 1 - \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a}{2} + \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{2} \right]$$

Теперь разложим эллиптический косинус сначала в ряд по параметру Якоби  $q$ , а затем  $q(s)$  и  $K(s)$  в ряды по малому параметру  $s$  [5]. Учитывая полученные связи, периодическое решение (2.7) выразится через тригонометрические функции



Фиг.2. Свободные пульсации воздушного пузырька при  $\delta=0$  по точному (2.7) и приближенному (4.2) решениям. Для малой ( $a=0.09243$ ,  $s=0.38687$ ) и очень малой ( $a=0.01064$ ,  $s=0.13515$ ) амплитуд пульсации на фиг.2а им соответствуют кривые 1,4 и 5,6. В случае конечной ( $a=0.33308$ ,  $s=0.7071$ ) амплитуды решениям соответствуют кривые 2,3 фиг.2б.

$$R(t) = \bar{R} - \frac{a}{2} \left[ \cos \omega t + \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a}{8} \cos 2\omega t + \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{3}{256} a^2 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \right]$$

$$\bar{R} = \frac{3\gamma+1}{3} \frac{a^2}{16} \left[ 1 + \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 \frac{a^2}{32} \right], \quad \omega = \omega_{ar} \left[ 1 - \frac{11}{64} \left( \frac{3\gamma+1}{3} \right)^2 a^2 \right] \quad (2.8)$$

где  $\bar{R}$  – среднее значение возмущенного радиуса пузырька,  $\omega$  – нелинейная частота пульсации с малыми амплитудами, являющаяся функцией от квадрата амплитуды. Последний случай соответствует предельным значениям  $c \rightarrow 0$ , однако,  $c \neq 0$  и  $b_1 \rightarrow 3/(3\gamma+1)$ . В качестве числового примера выберем параметры кривой 3 фиг.1:

$$c = \frac{107}{72} \frac{\gamma}{[36(3\gamma+1)]^2}, \quad b_{1,3} = \frac{107 \pm \sqrt{11887}}{72} \frac{1}{3\gamma+1}, \quad b_2 = \frac{1}{36} \frac{1}{3\gamma+1}$$

Тогда в случае воздушного пузырька ( $\gamma = 1,4$ ) для параметров решений (2.7) и (2.8) будем иметь значения  $a = 0.01064$ ,  $s = 0.13515$ . При таких параметрах кривые, построенные согласно решениям (2.7) и (2.8), практически совпадают и на фиг.2а представлены в виде кривой 5. С уменьшением величины  $c$  значения параметра  $s$  и амплитуды  $a$  также уменьшаются и совпадение точного решения с асимптотическим становится еще более убедительным.

**3. Свободные колебания с учетом вязкости.** Точное частное решение полного уравнения

$$\ddot{R} + \delta \dot{R} + \omega_{ar}^2 R - \alpha R^2 = 0 \quad (3.1)$$

Будем следовать методу, разработанному в [6] и использованному в [7,8] для построения решений нелинейных эволюционных уравнений. Искомые решения будем искать в виде ряда Лорана

$$R = r_1 F^{-2} + r_2 F^{-1} + r_3 + r_4 F + \dots \quad (3.2)$$

где функции  $r_i(t)$ ,  $F(t)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) должны определяться в процессе решения задачи. Подставляя (3.2) в уравнение (3.1), приравняем нулю коэффициенты при  $F^{-4}$ ,  $F^{-3}$ ,  $F^{-2}$ . В результате приходим к рекуррентным соотношениям, из которых последовательно определяются функции

$$r_1 = \frac{6}{\alpha} F_t^2, \quad r_2 = -\frac{6}{\alpha} \left( F_{tt} + \frac{\delta}{5} F_t \right), \quad F_t = \dot{F}, \quad F_{tt} = \ddot{F}, \dots$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} - \frac{1}{50} \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{3}{5} \frac{\delta}{\alpha} F_t^{-1} F_{tt} + \frac{2}{\alpha} F_t^{-1} F_{ttt} - \frac{3}{2\alpha} F_t^{-2} F_{tt}^2 \quad (3.3)$$

Для нахождения функции  $r_7(t)$  рассматривается приравненный нулю коэффициент при  $F^2$ . Однако, в силу определения (3.3) функции  $r_1(t)$ , величина  $r_7(t)$  выпадает из выражения коэффициента, что приводит к нарушению рекуррентности получаемых соотношений. Поэтому можно полагать  $r_i = 0$  для  $i \geq 7$ . Тогда из коэффициентов при  $F^5$ ,  $F^4$ ,  $F^3$  соответственно будем иметь

$r_6 = r_5 = r_4 = 0$ . Таким образом, в ряде (3.2) можно было бы ограничиться рассмотрением лишь первых трех членов. Из приравненного нулю коэффициента при  $F^{-1}$  следует уравнение

$$\ddot{r}_2 + \delta \dot{r}_2 + \omega_{ar}^2 r_2 - 2\alpha r_2 r_3 = 0 \quad (3.4)$$

Помимо определения (3.3) функции  $r_3$ , из приравненного нулю коэффициента при свободных членах находим, что  $r_3$  удовлетворяет также уравнению, по виду совпадающему с (3.1), откуда следуют тривиальные решения

$$r_3 = 0, \quad r_3 = \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} = \frac{2}{3\gamma + 1} \quad (3.5)$$

Теперь определим явный вид функции  $F(t)$ . Начнем со случая  $r_3 = 0$ . Тогда уравнение (3.4) становится линейным и его общее решение запишется в виде ( $c_1, c_2 = \text{const}$ )

$$r_2 = c_2 e^{\omega_1 t} + c_1 e^{\omega_2 t}, \quad \omega_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \omega_{ar}^2} \quad (3.6)$$

Сравнение формул (3.3) и (3.6) приводит к линейному неоднородному уравнению относительно функции  $F(t)$

$$F_{tt} + \frac{\delta}{5} F_t = -\frac{\alpha}{6} [c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t}]$$

Интегрирование полученного уравнения дает ( $B_1, B_2 = \text{const}$ )

$$F(t) = B_1 + B_2 e^{-\frac{\delta}{5}t} - \frac{\alpha}{6} \frac{c_1}{\omega_1} \frac{1}{\omega_1 + \delta/5} e^{\omega_1 t} - \frac{\alpha}{6} \frac{c_2}{\omega_2} \frac{1}{\omega_2 + \delta/5} e^{\omega_2 t} \quad (3.7)$$

Комбинирование формулы (3.7) с последним соотношением из (3.3), в котором  $r_3 = 0$ , позволяет получить связь между коэффициентами уравнения (3.1) и определить коэффициенты  $c_1, c_2$

$$\omega_{ar}^2 = \frac{6}{25} \delta^2, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad r_2 = 0 \quad (3.8)$$

Нормируя с учетом (3.8) функцию (3.7), окончательно получим

$$F(t) = 1 + e^{-\delta t/5} = 1 + e^{-\omega_{ar} t / \sqrt{6}}, \quad B_1 = B_2 = 1$$

Тогда решение уравнения (3.1), в силу формулы для  $r_1$  из (3.3), предстанет в виде

$$R = \frac{6}{25} \frac{\delta^2}{\alpha} (1 + e^{\delta t/5})^{-2} = \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} (1 + e^{\omega_{ar} t / \sqrt{6}})^{-2}$$

$$R(\infty) = 0 \quad R(0) = \frac{\omega_{ar}^2}{4\alpha} = \frac{1}{2(3\gamma + 1)} \quad (3.9)$$

Очевидно, что построенное решение описывает стадию сжатия пузырька.

Пусть теперь, согласно (3.5),  $r_3 = \omega_{ar}^2 / \alpha$ . Аналогичные выкладки вновь дают связь (3.8) и приводят к решению (3.9).

В заключение отметим, что в отсутствие вязкости  $\delta = 0$  и реализации значения  $r_3 = \omega_{ar}^2 / \alpha$  изложенный подход позволяет выявить явный вид функции  $F(t) = 1 + \exp(\omega_{ar} t)$ , посредством которого решение уравнения (3.1) вновь запишется в виде (2.4). Если же использовать значение  $r_3 = 0$ , то функция  $F(t)$  после нормировки предстанет в виде  $F(t) = 1 + \exp(\pm i \omega_{ar} t)$  и решением уравнения явится функция

$$R(t) = \frac{3}{2} \frac{\omega_{ar}^2}{\alpha} \cos^{-2} \left( \frac{\omega_{ar}}{2} t \right) = \frac{3}{3\gamma + 1} \cos^{-2} \left( \frac{\omega_{ar}}{2} t \right)$$

область применения которой ограничена ввиду возможности обращения в нуль знаменателя.

**4. Гармонический анализ.** Воспользуемся обобщенным методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского для построения приближенного решения уравнения (1.6), в котором  $p_1 = 0$  [9]. Искомое решение представляется в виде

$$R(t) = A(t) \cos \varphi + r_2(A, \varphi) + r_3(A, \varphi), \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta \quad (4.1)$$

Здесь амплитуда  $A \sim \varepsilon$  и фаза  $\beta$  являются медленно меняющимися функциями времени,  $r_2$  и  $r_3$  – слагаемые порядка  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$  соответственно,  $\varepsilon$  – безразмерный малый параметр. Подстановка разложения (4.1) в уравнение и последующее приравнивание нулю совокупности членов одного порядка малости приводит к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям относительно  $r_2$  и  $r_3$ . Требование отсутствия секулярных (вековых) членов в их общих решениях позволяет получить укороченные уравнения для определения  $A$  и  $\varphi$

$$\dot{A} = -\frac{\delta}{2} A, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} \left( 1 - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} A^2 \right) = \omega_{ar} \left( 1 - \frac{5}{48} (3\gamma + 1)^2 A^2 \right)$$

Сами решения  $r_2$  и  $r_3$  предстанут в виде функций от амплитуды и фазы

$$r_2 = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right), \quad r_3 = \frac{\alpha^2}{\omega_{ar}^4} \frac{A^3}{48} \cos 3\varphi$$

Тогда решение (4.1) примет окончательный вид

$$R(t) = \bar{R}(A) + A \cos(\varphi t) - \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{6} \cos(2\varphi t) + O(\varepsilon^3) \quad (4.2)$$

$$\bar{R}(A) = \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} \frac{A^2}{2}, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \frac{5}{48} \frac{(3\gamma + 1)^2}{\delta} \omega_{ar} A^2, \quad A = c_1 e^{-\frac{\delta}{2} t}$$

где  $\bar{R}(A)$  – среднее значение возмущенного радиуса,  $c_1$  – постоянная интегрирования.

При пренебрежении вязкостью  $\delta = 0$  решение (4.1) запишется вновь в виде (4.2), в котором, однако,

$$\varphi \equiv \omega t = \omega_{ar} \left( 1 - \frac{5}{48} (3\gamma + 1)^2 A^2 \right) t, \quad A = c_1 = \text{const}$$

Здесь  $\omega(A)$  – нелинейная частота, являющаяся функцией амплитуды. Очевидно, что нелинейная частота меньше частоты собственных колебаний пузырька. Постоянная  $c_1$  определится из требования совпадений в начальный момент времени  $t = 0$  решения (2.7) с (4.2) – случай малых, но конечных амплитуд пульсаций и решения (2.8) с (4.2) – случай очень малых амплитуд. Численный анализ будет проведен на примере воздушного пузырька. В первом случае выберем значения  $b_1 = 0.5254$ ,  $b_2 = 0.1923$ ,  $b_3 = -0.1408$ , соответствующие кривой 2 фиг.1. Тогда в приближенном решении (4.2) будем иметь  $A = c_1 = -0.16412$ . Кривые 2,3, представленные на фиг.2б, построены по формулам (2.7) и (4.2) для конечных амплитуд. Из их сравнения видно, что различие между точным (2.7) и приближенным (4.2) решениями достаточно ощутимо. И это различие становится все большим с увеличением амплитуды  $a$  и параметра нелинейности  $s < 1$ . Во втором случае при малых пульсациях выберем  $a = 0.09243$ ,  $s = 0.038687$  соответствующие значению  $c = 5.5\gamma[8(3\gamma + 1)]^2$  в определении функции  $f(R)$ . Тогда для приближенного решения (4.2) будем иметь  $A = c_1 = -0.04621$ . Для таких значений параметров точному (2.7) и приближенному (4.2) решениям на фиг.2а соответствуют кривые 1 и 4. При очень малых пульсациях возьмем ранее выбранные параметры точного решения (2.7) или его асимптотики (2.8), графики которых совпадают и приведены на фиг.2а в виде кривой 5. Тогда для приближенного решения (4.2) получим значение  $A = c_1 = -0.005372$ , по которому строится кривая 6 фиг.2а. Из сопоставления кривых 5 и 6 следует вывод, что в случае очень малых амплитуд приближенное (4.2) и точное (2.7) решения достаточно удовлетворительно согласуются. Согласование еще более улучшается с уменьшением амплитуды пульсации и параметра нелинейности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
2. Chapman R.B., Plesset M.S. Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles // Trans. ASME, ser. D. J. Basic Eng. 1971. V.93, № 3. Рус. пер.: // Теор. основы инж. расчетов. 1971. Т.93. № 3. С.37-40.
3. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968. С.129-165.
4. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400с.
5. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Edited by M. Abramowitz and I. Stegun. National bureau of standards. Appl. mathem. series. 1964. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука. 1979. 832с.
6. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V.24. № 3. P.522-526.
7. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде. // ПММ. 2001. Т.65. Вып.5. С.884-894.
8. Оганян Г.Г. О структурах нелинейных волн в термически релаксирующей газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 2. С.110-119.
9. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. etc.: Wiley. 1981. (Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.)

Институт механики  
НАН РА

Поступила в редакцию  
25.11.2005

УДК 539.3

## РАСЧЕТ НА ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Худаяров Б.А.

Բ.Ա. Խուդայարով

Առաձգամածուցիկ եռաշերտ զլանային պանելների ֆլաթերի հաշվարկը

Դիտարկվում է գազի հոսքով շրջհոսվող առաձգամածուցիկ եռաշերտ զլանային պանելների ֆլաթերի խնդիրը: Պանելի տատանումները նկարագրվում են մասնակի ածանցյալներով ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումներով: Բուբնով-Գալերկինի մեթոդով խնդիրը բերված է սովորական ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց լուծումը գտնվում է թվային մեթոդով: Այդ մեթոդի հիման վրա մշակված է խնդրի թվային լուծման ալգորիթմ: Որոշված են եռաշերտ պանելների ֆլաթերի կրիտիկական արագությունները:

B. A. Khudayarov

Computation on Flutter of Viscoelastic sandwich of Cylindrical Panels

The flutter of viscoelastic sandwich of cylindrical panels streamlined by a gas current is investigated. The vibrations are described by integro-differential equations in partial derivatives. By the Bubnov-Galerkin method the problem is reduced to a system of ordinary integro-differential equations, which is solved by numerical method. Critical speeds of sandwich of panel's flutter are defined.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей, обтекаемых потоком газа. Колебания панели описываются интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) в частных производных. При помощи метода Бубнова-Галеркина задача сведена к исследованию системы обыкновенных ИДУ. Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи. Определены критические скорости флаттера трехслойных панелей.

### 1. Введение

Широкое применение композиционных материалов в авиационной технике привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования тонкостенных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В соответствии с этим представляет значительный интерес анализ особенностей по отношению к аналогичным задачам для упругих тонкостенных конструкций. Такой анализ интересен и важен ещё и потому, что наличие демпфирующих свойств вязкоупругих материалов может показаться достаточным, чтобы предпочесть их для создания соответствующих тонкостенных конструкций из какого-либо материала, обладающего требуемыми свойствами.

Имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач расчета характеристик вязкоупругих тонкостенных конструкций (1-6).

Колебания и устойчивость вязкоупругих систем является весьма актуальной по двум причинам. С одной стороны, это связано со все большим внедрением в авиационной промышленности и других отраслях машиностроения материалов, обладающих ярко выраженными вязкоупругими свойствами, а с другой стороны,

при использовании наследственных моделей [4, 7] для описания внутреннего демпфирования материала уравнения колебаний упругих систем записывается в такой же форме, как и для вязкоупругих систем. Часто при рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью модели Фойхта, хотя известно, что даже в системах с конечным числом степеней свободы большим единицы она приводит к некорректным результатам, поскольку для большинства материалов внутреннее трение фактически не зависит или, по крайней мере, слабо зависит от скорости колебаний на достаточно широком частотном диапазоне. В этом смысле более предпочтительной является модель материала, обладающего наследственными свойствами.

В предлагаемой статье рассматривается аэроупругая устойчивость вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей с жестким, сопротивляющимся поперечному сдвигу заполнителем, обтекаемых с внешней стороны сверхзвуковым потоком. На основе численного метода [8] описан алгоритм численного решения нелинейных задач вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей.

Ранее в работах [9-12] и других уже рассматривались подобные задачи для упругой трехслойной пластинки и оболочки в сверхзвуковом потоке газа.

## 2. Постановка задачи флаттера вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей и методы решения

Рассмотрим задачу о флаттере вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей со сторонами  $a$  и  $b$ , обтекаемых сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$ , направленной вдоль образующих. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории [13].

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 & D(1 - R^*)(1 - \Theta h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \nabla^4 \chi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - q = 0 \\
 & \nabla^4 \Phi = E(1 - R^*) h \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \right)^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\chi(x, y, t)$  – функция перемещений, связанная с прогибом  $W(x, y, t)$  соотношением:

$$W = (1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi$$

где  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ .

Величины  $D, \Theta, \beta_3$  характеризуют соответственно цилиндрическую жесткость трехслойного пакета, жесткость несущих слоев и жесткость заполнителя на сдвиг;  $h$  – толщина пакета;  $R^*$  – интегральный оператор с ядром релаксации  $R(t)$ :  $R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$ ;  $\Phi(x, y, t)$  – функция напряжений.

Поперечная нагрузка  $q(x, y, t)$  складывается из сил инерции, сил аэродинамического демпфирования и аэродинамического давления

$$q(x, y, t) = -\Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] - B \frac{\partial}{\partial t} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] + \Delta p$$

где  $\Omega$  – удельная масса трехслойного пакета;  $B = \left( \frac{p_\infty}{V_\infty} \right)$ ;  $\gamma$  – показатель политропы газа;  $p_\infty$  и  $V_\infty$  – соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Аэродинамическое давление  $\Delta p$  в случае одностороннего обтекания имеет вид

$$\Delta p = -\gamma p_\infty \left[ M^* \frac{\partial}{\partial x} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] + \frac{\gamma + 1}{4} M^{*2} \left( \frac{\partial}{\partial x} [(1 - h^2 \beta_3^{-1} \nabla^2) \chi] \right)^2 + \dots \right]$$

где  $M^* = V/V_\infty$  – число Маха для невозмущенного потока.

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} \chi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \chi_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y) \\ \Phi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Phi_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $\varphi_{nm}(x, y)$ ,  $\psi_{nm}(x, y)$  подобраны так, чтобы каждый член суммы (2) удовлетворял граничным условиям на краях панелей, а  $\chi_{nm}(t)$ ,  $\Phi_{nm}(t)$  – некоторые функции, подлежащие определению.

Учитывая координатные функции в виде

$$\varphi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}; \quad \psi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

подставляя (2) в уравнение системы (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов (2). Введя следующие безразмерные параметры

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{y}{b}, \quad \frac{V_\infty}{a} t, \quad \frac{W}{h}$$

и сохраняя прежние обозначения, систему ИДУ сводим к уравнению относительно  $\chi_{nm}$ :

$$\begin{aligned}
& A_{kl} \ddot{\chi}_{kl} + B_{kl} \dot{\chi}_{kl} + (1 - R^*) C_{kl} \chi_{kl} + V_* \sum_{n=1}^N F_{knl} \chi_{nl} + V_*^2 \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{k \ln mir} \chi_{nm} \chi_{ir} - \\
& - \beta_1 p_1 \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{k \ln mir} \chi_{nm} (1 - R^*) \chi_{ir} + \beta_1 p_1 \lambda^2 \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{k \ln mir} (1 - R^*) \chi_{nm} \chi_{ir} + \\
& + p_1 \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{k \ln mirjs} \chi_{nm} (1 - R^*) \chi_{ir} \chi_{js} = 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\chi_{kl}(0) = \chi_{okl}, \quad \dot{\chi}_{kl}(0) = \dot{\chi}_{okl}, \quad \kappa = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M}$$

Здесь  $\beta_1 = \frac{b^2}{Rh}$ ;  $\lambda = a/b$ ;  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$ ,  $C_{kl}$ ,  $E_{kl}$ ,  $F_{kln}$ ,  $K_{klnmir}$ ,  $F_{klnmir}$ ,  $a_{klnmirjs}$ ,  $p_1$ ,  $V_* = (p_\infty a^3 M^* / D)$  – безразмерные параметры.

### 3. Численные результаты

Интегрируем систему (3) два раза по  $t$ , запишем ее в интегральной форме. Полагая затем  $t = t_i$ ,  $t_i = ih$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ( $h = \text{const}$ ) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления  $(\chi_{ikl} = \chi_{ikl}(t_i))$  получим следующие рекуррентные формулы при ядре Колтунова-Ржаницына

$$(R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1):$$

$$\begin{aligned}
& (A_{kl} + A_i B_{kl}) \chi_{ikl} = A_{kl} \left( \chi_{0kl} + \dot{\chi}_{0kl} \right) - \sum_{j=0}^{i-1} A_j (t_i - t_j) \times \\
& \times \left\{ V_* \sum_{n=1}^N F_{knl} \chi_{jnl} + V_*^2 \sum_{n,i_1=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{k \ln mi_1 r} \chi_{jnm} \chi_{ji_1 r} + C_{kl} \chi_{jkl} + \right. \\
& - \frac{A}{\alpha} C_{kl} \sum_{s=0}^j B_s e^{-\beta t_s} \chi_{j-skl} - \beta_1 p_1 \sum_{n,i_1=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{k \ln mi_1 r} \chi_{jnm} \chi_{ji_1 r} + \\
& + \frac{A}{\alpha} \beta_1 p_1 \sum_{n,i_1=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{k \ln mi_1 r} \chi_{jnm} \sum_{s=0}^j B_s e^{-\beta t_s} \chi_{j-si_1 r} + \beta_1 p_1 \lambda^2 \sum_{n,i_1=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{k \ln mi_1 r} \chi_{jnm} \chi_{ji_1 r} - \\
& - \frac{A}{\alpha} \beta_1 p_1 \lambda^2 \sum_{n,i_1=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{k \ln mi_1 r} \sum_{s=0}^j B_s e^{-\beta t_s} \chi_{j-snm} \chi_{j-si_1 r} + \\
& + p_1 \sum_{n,i_1,j_1=1}^N \sum_{m,r,s_1=1}^M a_{k \ln mi_1 rj_1 s_1} \chi_{jnm} \chi_{ji_1 r} \chi_{jj_1 s_1} - \frac{A}{\alpha} p_1 \sum_{n,i_1,j_1=1}^N \sum_{m,r,s_1=1}^M a_{k \ln mi_1 rj_1 s_1} \chi_{jnm} \times \\
& \left. \times \sum_{s=0}^j B_s e^{-\beta t_s} \chi_{j-si_1 r} \chi_{j-sj_1 s_1} \right\} + B_{kl} \left( \chi_{0kl} t_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_j \chi_{jkl} \right);
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots; \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M};$$

где

$$A_0 = A_i = h/2, A_j = h, j = \overline{1, i-1}, B_0 = h^\alpha / 2$$

$$B_j = h^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha) / 2, s = j, B_s = h^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha) / 2, s \neq j$$

Результаты вычислений представлены в таблице.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость  $V_{*кр}$ , принимаем условие, что при этих скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При  $V > V_{*кр}$  происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае  $V < V_{*кр}$ , амплитуда колебаний затухает [14].

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента вязкости  $A$  приводит к уменьшению критической скорости  $V_{*кр}$  флаттера на 46%. При  $A=0$  и  $A=0,1$  скорость флаттера соответственно равна 938 и 509,5.

С увеличением сингулярного параметра ( критическая скорость флаттера трехслойной цилиндрической панели увеличивается. Этот эффект более сильно заметен при значениях  $\epsilon=0,7$  в отличие от значения  $\epsilon=0,1$ . Численные результаты показали, что влияние параметра затухания  $\Theta$  в ядре наследственности на критическую скорость флаттера по сравнению с параметром вязкости  $A$  и сингулярности  $\epsilon$  оказалось незначительным, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы – экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкции.

Увеличение параметра  $k_1$  ( $k_1 = h^2 \beta_3^{-1} / a^2$ ) приводит к существенному изменению  $V_{*кр}$ . Исследования были проведены при  $k_1=0,01; 0,03$  и  $0,05$ . Видно, что с уменьшением жесткости заполнителя на сдвиг (ростом коэффициента  $k_1$ ) критическая скорость флаттера трехслойной панели уменьшается.

С ростом удлинения панели  $\lambda$  увеличивается протяженность панели в направлении течения и происходит сближение удлиненных краев панели. Последнее способствует повышению относительной жесткости системы и росту критической скорости флаттера, которое можно проследить по таблице.

Таблица

**Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров цилиндрической панели**

A	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$k_1$	$\Theta$	$\epsilon$	$V_{*кр}$
0							938
0,001							816
0,01	0,25	0,05	1	0,02	0,05	0,1	620
0,1							509,5
	0,2						457,5
0,1	0,5	0,05	1	0,02	0,05	0,1	604,5
	0,7						624,5
0,1	0,25	0,01	1	0,02	0,05	0,1	510
		0,1					509
		0,05	1,1				604,9

0,1	0,25		1,2 1,4	0,02	0,05	0,1	728 1083,75
0,1	0,25	0,05	1	0,01 0,03 0,05	0,05	0,1	541 487,5 297
0,1	0,25	0,05	1	0,02	0,01 0,08 0,5 0,8	0,1	502,2 514,9 587 637,2
0,1	0,25	0,05	1	0,02	0,05	0,5 5 10	510,5 517 521,5

Изучено влияние параметра  $\Theta$ , характеризующее жесткость несущих слоев. Увеличение параметра  $\Theta$  благоприятно влияет на флаттерные характеристики.

Также изучено влияние параметра  $\gamma$  (аэродинамическое демпфирование). С ростом коэффициента  $\gamma$  наблюдается повышение безразмерной критической скорости флаттера.

#### 4. Заключение

В заключение отметим, что вязкоупругие свойства материала уменьшают критическую скорость флаттера трехслойных цилиндрических панелей. Увеличение жесткости заполнителя на сдвиг и жесткость несущих слоев приводит к возрастанию критической скорости. Увеличение жесткости несущих слоев в некоторых случаях влияет значительно слабее. Влияние увеличения жесткости несущих слоев и жесткости заполнителя на сдвиг в каждом конкретном случае следует оценивать специальным расчетом. Кроме того, следует иметь в виду, что увеличение изгибной жесткости несущих слоев и жесткости заполнителя на сдвиг требует дополнительного увеличения массы трехслойных конструкций типа цилиндрических панелей и делается только при крайней необходимости, когда другие способы увеличения критической скорости оказываются недостаточными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.Д. Исследование динамической устойчивости вязкоупругих систем с помощью показателей Ляпунова // Изв. АН. МТТ. 2000. № 6. С. 82-89.
2. Бондарев Э.А., Будугаева В.А., Гусев Е.Л. Синтез слоистых оболочек из конечного набора вязкоупругих материалов // Изв. АН РФ. МТТ. 1998. № 1. С.173-181.
3. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
4. Каминский А.А., Подильчук И.Ю. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости // Прикладная механика. 1998. т.34. № 12. С. 77-85.
5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Об одном методе решения квазистатических и динамических задач вязкоупругости // Прикладная механика. 1977. 13. № 4. С. 3-8.

6. Сорокин Е.С., Муравский Г.Б. Об учете упругих несовершенств материалов методами наследственной упругости // Строит. Механика и расчет сооружений. 1975. № 4. С. 41-46.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 5. С. 867-871.
8. Смирнов А.И. Сверхзвуковой флаттер трехслойных пластин // ДАН СССР. 1968. Т. 183. № 3.–С.540-543.
9. Григолюк Э.И., Михайлов А.П. Флаттер трехслойных цилиндрических оболочек//Инженерный журнал. Т.V. Вып.6. –1965. –С.1087-1091.
10. Смирнов А.И. Собственные колебания и флаттер трехслойных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 3. С.533-536.
11. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 5. С.96-99.
12. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6. С.733-755.
13. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 1. С. 59-62.

Ташкентский институт  
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию  
25.05.2005

УДК 519.95

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ  
ДВИЖЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЙКОЙ  
ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М.С., Мазманян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մազմանյան

Երկակի, հաստատուն փոքր կորության թաղանթների տատանողական շարժման օպտիմալ  
ղեկավարման մասին հակամետ իրավիճակներում

Դիտարկված է երկակի, հաստատուն փոքր կորության թաղանթների գծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է անվերջ հատ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խաղային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են էքստրեմալ նշանառության եղանակով: Սահմանված է ռեզուլյարության պայմանը անվերջ համակարգերի համար: Ցույց է տրված, որ եթե առաջին խաղացողի ռեսուրսները ավելի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը, և ազդող ուժերը պատկանում են  $L_2$  դասին, ապա լուծվում է թաղանթի տատանումների մարման խնդիրը: Աշխատանքի վերջում բերված է թվային օրինակ:

**M.S. Gabrielyan, L.A. Mazmanyanyan**

**On The Optimal Control of Vibrations of the Shallow Shells of Double  
Constant Curve in the Conflict Situations**

It is discussed the problem of an optimal control for the shallow shell's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of Fourier and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is defined the regularity for the infinite systems. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class  $L_2$ , then the problem of damping of shell's vibrations is solved. In the end of the article a numerical example is given.

Исследуется задача об оптимальном управлении линейных колебаний пологих оболочек при помощи противоборствующих сил, приложенных к поверхностям оболочки. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода экстремального прицеливания определяются оптимальные управляющие силы. Определяется регулярность для бесконечных систем. Указываются условия, при которых действующие силы, принадлежащие классу  $L_2$ , гасят колебательное движение оболочки, если ресурсы первого игрока больше, чем второго. В конце статьи приведен численный пример.

1. Рассмотрим однородную изотропную пологую панель, имеющую в плане вид прямоугольника со сторонами  $a, b$ , предполагая, что главные кривизны срединной поверхности  $k_x, k_y$  постоянны для всех ее точек. Будем считать, что панель шарнирно оперта по контуру при наличии свободного смещения точек ее краев вдоль линий кривизны  $x, y$ .

Пусть  $h$  – постоянная толщина,  $\rho$  – плотность оболочки ( $\rho = \gamma/g$ , где  $\gamma$  – удельный вес материала,  $g$  – ускорение силы тяжести). Координату  $z$  будем отсчитывать вдоль нормали к поверхности, считая  $z$  направленной к центру кривизны. Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлениям  $x, y, z$  через  $u, v, w$  соответственно. Для пологой оболочки можно считать перемещения точки срединной поверхности в плане равными перемещениям в плоскости, касательной к поверхности в данной точке [1].

Пусть на поверхности оболочки на множестве положительной меры действуют две перпендикулярные ограниченные распределенные силы:  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$ , под действием которых оболочка будет колебаться. Обозначим нормальные перемещения срединной поверхности оболочки через  $w(x, y, t)$ .

Дифференциальные уравнения линейных колебаний пологих оболочек будут ([1], с.227, [2], с.29)

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F_1(x, y, t)}{h} + \frac{F_2(x, y, t)}{h} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

где  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$  – жесткость оболочки,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости материала при растяжении (сжатии),  $\Phi(\cdot)$  – функция напряжения срединной поверхности, а  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

Пусть граничные условия удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания ([2], с. 110):

$$\begin{aligned} w = 0, v = 0, M_x = 0, N_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a \\ w = 0, u = 0, M_y = 0, N_y = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b \end{aligned} \quad (1.3)$$

где изгибающие моменты –

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

а нормальные усилия –

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right] \right\} \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right] \right\} \end{aligned}$$

Пусть начальные условия будут

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (1.4)$$

где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности соответственно.

Условия (1.3) шарнирного опирания будут удовлетворены, если прогиб представить в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.5)$$

(рассматривая при этом  $t$  как параметр). Для определения  $w(x, y, t)$  достаточно определить функции  $f_{mn}(t)$ .  $m, n$  – числа полуволн вдоль оболочки. Подставляя (1.5) в (1.2) и интегрируя, получим

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \frac{a^2 b^2 E (b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.6)$$

Так как в области  $[0, a] \times [0, b]$  система функций  $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$ , ( $m, n = 1, 2, \dots$ ) ортогональная и полная, то функции  $F_1(x, y, t)$ ,  $F_2(x, y, t)$ ,  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  можно разложить в ряд Фурье ([3], с. 173):

$$\begin{aligned} F_1(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ F_2(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F_1(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \bar{v}_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F_2(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \varphi_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \psi_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

Подставляя (1.5), (1.6), (1.7) в уравнение (1.1), умножая на  $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  и интегрируя, получим

$$\left( \frac{Dg}{\gamma h} \frac{\pi^4 (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{(b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)^2}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \right) \frac{f_{mn}(t)}{h} + \frac{f_{mn}''(t)}{h} - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t) - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t) = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

От (1.8) перейдем к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, описывающим линейные колебания полой оболочки:

$$\frac{d^2 \xi_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 \xi_{mn}(t) + u_{mn}(t) + v_{mn}(t) \quad (1.9)$$

где  $\xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}$ ,  $u_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t)$ ,  $v_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t)$

при следующих начальных условиях:

$$f_{mn}(0) = \Phi_{mn} \quad \dot{f}_{mn}(0) = \Psi_{mn}$$

Квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Dg}{\gamma h} \frac{\pi^4 (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{(b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)^2}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \quad (\omega_{mn}^2 > 0, \quad m, n = 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

Предположим, что силы  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$  принадлежат классу  $L_2$  и удовлетворяют условиям [5]

$$\left[ \int_0^a \int_0^b [F_1(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[ \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P$$

$$\left[ \int_0^a \int_0^b [F_2(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[ \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \quad (1.11)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ .

Здесь  $P, Q, T$  – заданные положительные числа.

Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями  $u_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), стремится минимизировать

значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_{mn}^2(\mathcal{G}) + \xi_{mn}(\mathcal{G})]$  при самом упорном сопротивлении

второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями  $v_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), а второй игрок в свою очередь стремится максимизировать

значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_{mn}^2(\mathcal{G}) + \xi_{mn}(\mathcal{G})]$  при самом упорном сопротивлении

со стороны первого игрока. Величину  $\mathcal{G}$  ( $0 < \mathcal{G} \leq T$ ) определим ниже.

Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.9).

*Определение:* Задача для системы (1.9) назовем регулярной, если она регулярна для любых конечных  $m, n$  из (1.9).

С помощью метода экстремального прицеливания были построены оптимальные управляющие воздействия каждого игрока и гипотетическое рассогласование [5,6]:

$$u_{mn}^{(0)}(\tau) = - \frac{P \left[ l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$v_{mn}^{(0)}(\tau) = \frac{Q \left[ l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m,n=1}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq 1} \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - (P - Q) \times \right.$$

$$\left. \times \int_t^T \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2} d\tau \right\} \quad (1.13)$$

где

$$a_{mn} = z_{mn}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t)$$

$$b_{mn} = z_{mn}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t)$$

$$z_{mn}^{(1)} = \xi_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\xi_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

При условии  $P > Q$  выражение в фигурных скобках в формуле (1.13) является вогнутой функцией по переменным  $l_{rj}^{(1)}$  и  $l_{rj}^{(2)}$  ( $r, j = 1, 2, \dots$ ), следовательно, максимум в (1.13) при любых  $z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)$  достигается на единственном векторе  $(l_{mn}^{(1)})^0, (l_{mn}^{(2)})^0$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна [5,7]. Получены уравнения, из которых определяются компоненты вектора  $l^0$  [5,6].

Заметим, что  $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$  – ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (1.13), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (1.12) равномерно по  $\tau \in [0, T]$ , составляют сходящиеся квадратом ряды ([5], [4], с.173). Для определения момента  $T = \mathcal{G}$ , при котором гипотетическое рассогласование в первый раз превращается в нуль, нужно найти наименьший корень уравнения:

$$\varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\}, T) = 0, \quad (1.14)$$

где  $(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\})$  ( $0 \leq t_* \leq T$ ) – начальные позиции.

**2. Численный пример.** Исследуем случай, когда оболочка совершает колебания с образованием четырех полуволн вдоль каждой стороны ( $m = 4, n = 4$ ).

Так как  $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0, \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T), u_{mn}^{(0)}$  и  $v_{mn}^{(0)}$  ( $m, n = 1, 2, 3, 4$ ) трудно представить в аналитической форме, то задачу решим численно.

Для численного примера возьмем оболочку из стали, которая имеет следующие значения параметров:  $a = 1$  м,  $b = 0.5$  м,  $k_x = \frac{1}{5}$ ,  $k_y = \frac{1}{2}$ ,  $h = 0.001$  м,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 200$  ГПа =  $2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0,3$ ,  $P = 8$ ,  $Q = 2$ ,  $t = 0$ .

Пусть начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности будут

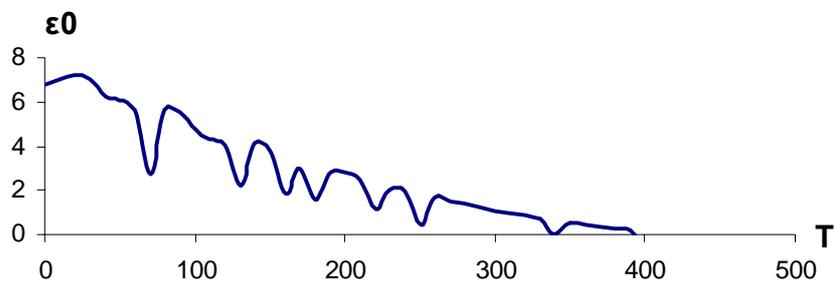
$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{200}y^2 \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{100}y^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вычисляя квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах из (1.10) для  $m = 4, n = 4$ , получим

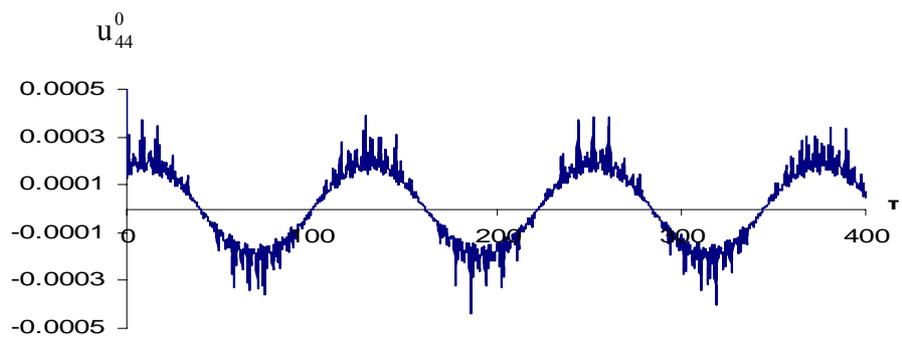
$$\begin{aligned} \lambda_{11} = \omega_{11}^2 &= 173905, & \lambda_{12} = \omega_{12}^2 &= 128072, & \lambda_{13} = \omega_{13}^2 &= 142361 \\ \lambda_{14} = \omega_{14}^2 &= 203988, & \lambda_{21} = \omega_{21}^2 &= 315566, & \lambda_{22} = \omega_{22}^2 &= 182482 \\ \lambda_{23} = \omega_{23}^2 &= 172237, & \lambda_{24} = \omega_{24}^2 &= 227224, & \lambda_{31} = \omega_{31}^2 &= 430053 \\ \lambda_{32} = \omega_{32}^2 &= 257536, & \lambda_{33} = \omega_{33}^2 &= 219650, & \lambda_{34} = \omega_{34}^2 &= 265894 \\ \lambda_{41} = \omega_{41}^2 &= 505559, & \lambda_{42} = \omega_{42}^2 &= 337524, & \lambda_{43} = \omega_{43}^2 &= 280934 \\ \lambda_{44} = \omega_{44}^2 &= 319717 \end{aligned}$$

Учитывая эти значения, с помощью программы «Mathematica 5.0» и «Microsoft Excel» численным методом вычислены  $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0$  ( $m = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, 3, 4$ ), а следовательно, вычислены гипотетическое рассогласование из (1.13) и оптимальные управляющие воздействия из (1.12).

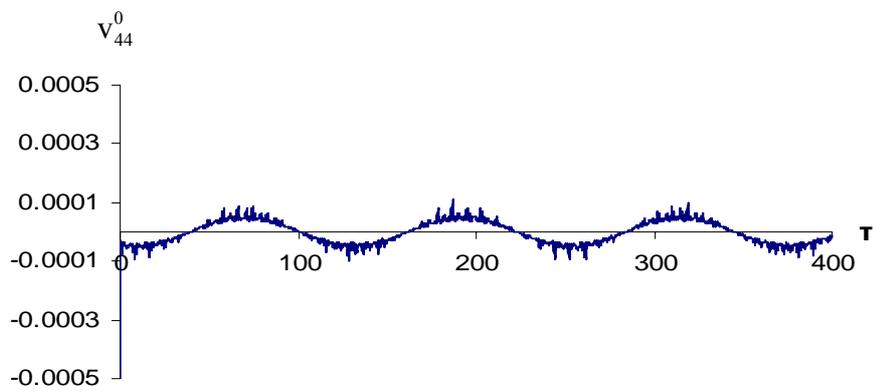
Ниже представлены зависимости  $\varepsilon^0\{T, 0, 500\}$  (фиг. 1),  $u_{44}^0\{\tau, 0, 400\}$  (фиг. 2),  $v_{44}^0\{\tau, 0, 400\}$  (фиг. 3).



Фиг. 1

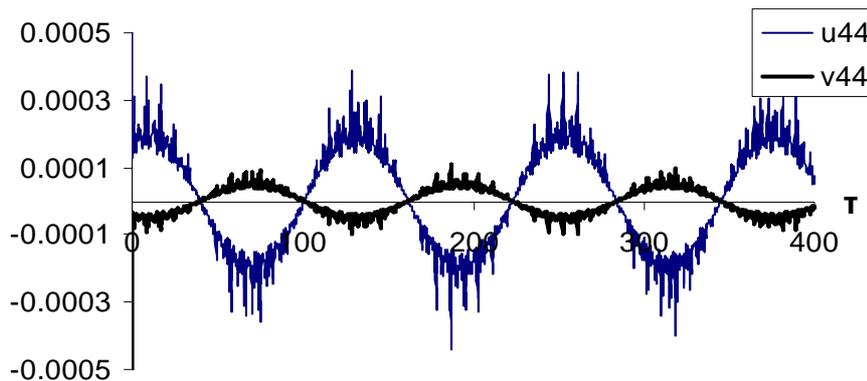


Фиг. 2



Фиг. 3

$u_{44}^0, v_{44}^0$



Фиг. 4

Из фиг. 4 видно, что  $u_{44}^0$  и  $v_{44}^0$  имеют противоборствующее влияние в том же интервале времени. При этом, когда  $v_{44}^0 = 0$ , то  $u_{44}^0$  также превращается в нуль. Остальные оптимальные управляющие воздействия  $u_{mn}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$ ,  $v_{mn}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$  ( $m, n = 1, 2, 3, 4$ ) имеют тот же характер, что и  $u_{44}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$  (фиг. 2) и  $v_{44}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$  (фиг. 3).

Из фиг. 1 следует, что в момент  $\mathcal{G} \approx 400$  гипотетическое рассогласование превращается в нуль, т.е. игра заканчивается в пользу первого игрока, когда его ресурсы больше, чем у второго.

Следовательно, при  $P > Q$  первый игрок, распоряжающийся управлением  $u_{mn}^0$ , гасит колебательное движение оболочки (которая совершает колебания с образованием конечных счетов полуволн вдоль каждой стороны) при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Наука. 1956. 416с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432с.
3. Tolstov G.P. Fourier Series. New York. Dover Publications. 1962. 336p.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. 624с.
5. Габриелян М.С. Об оптимальном управлении механической системой мощности континуума в конфликтных ситуациях. //Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т.51. № 4. С. 72–76.
6. Мазмяян Л.А. Об оптимальном управлении линейных колебаний пластинки в конфликтных ситуациях. //В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С. 48–52.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.

М.: Наука. 1974. 456с.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
20.06.2005

УДК 620:678.

**АНИЗОТРОПИЯ ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЯХ  
ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ**

Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н., Казарян А.Н.

**Ն.Ե. Սարգսյան, Ն.Ն. Սարգսյան, Ա.Ն. Կազարյան**

**Վուպոզիտային նյութերի ձևախախտելիության հատկությունների անիզոտրոպիան ցիկլիկ  
բեռնավորման զանազան դեպքում**

Հետազոտված է ապակե-, աջիւե- և օրգանապլաստների ձևախախտելիության հատկությունների անիզոտրոպիան բարբախող ձգման և սեղանաձև ցիկլով ձգման –հանգստի դեպքերում: Դիտարկված են անընդհատ ձգման հաճախության և հաստատուն ձգման ու պայմանական հանգստի վիճակում գտնվելու տևողությունների փոփոխության ազդեցությունները նշված գործընթացների վրա: Սահմանված է ապակե-, և ածխեպլաստների ձևախախտելիության հատկությունների հաստատունությունը նյութի ամրանավորման ուղղություններով ձգման դեպքում: Ուժի այլ ուղղություններով ազդման դեպքերում, ինչպես նաև օրգանապլաստների դեպքում տեղի է ունենում ձևախախտությունների անընդհատ աճ, պայմանավորված բեռնավորման հաճախությամբ, լարման մակարդակով և թելիկների նկատմամբ բեռնվածքի կողմնորոշման անկյունով:

**N.E.Sargsyan, N.N.Sargsyan, A.N.Kazaryan**

**Anisotropy Of Deformability Behaviour Of Composite Materials Under Different Type Of Cyclic Loading**

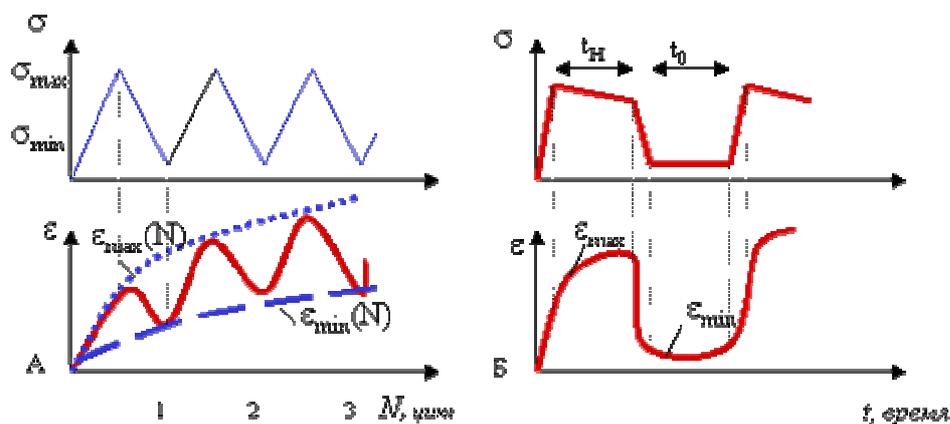
Investigated changing of deformability anisotropy of fiberglass, black-reinforced and organic plastics under pulsating cycle of straining and trapeziform cycle straining-relaxation. Analyzed the impact of persistent loading frequency and loading time into material under the constant loading and conventional relaxation. Established the stability of fiberglass, black-reinforced plastics deformation under straining with grain. The growth of deformation in time depending to loading frequency, strain level and angel orientation depending to fiber are taking place.

Исследовано изменение анизотропии деформативности стекло-, угле- и органопластиков при пульсирующем цикле растяжения и трапециевидном цикле растяжения-«отдыха». Рассмотрено влияние на указанный процесс частоты непрерывного нагружения и изменения продолжительности времени нахождения материала под постоянной нагрузкой и в состоянии условного отдыха. Установлена стабильность деформативных свойств стекло- и углепластиков при растяжении в направлениях армирования. При прочих направлениях действия силы, а также для органопластиков происходит закономерный рост деформации во времени, обусловленный частотой нагружения, уровнем напряжения и углом ориентации нагрузки относительно волокон.

Исследование механического поведения армированных композитных материалов под нагрузкой, в частности, выявления особенностей их сопротивления деформациям и разрушению, представляет большой научный и практический интерес, обусловленный непрерывным ростом объемов производства и расширением областей применения композитов в быстроразвивающихся отраслях современной техники ([1] и др.).

Приобретают приоритетное значение исследования, направленные на установление закономерностей возникновения и развития различного рода механических повреждений, накопление которых во времени может привести не

только к снижению значений характеристик надёжности конструкций и элементов, но и стать причиной преждевременного истощения их несущей способности и разрушения (см., например [2, 3]). При этом продолжает оставаться актуальной комплексная программа экспериментального исследования прочности и деформативных свойств композитных материалов при различных случаях длительного циклического нагружения, отражающих технологические особенности изготовления конструкции и температурно-влажностные и прочие важнейшие условия их эксплуатации. При этом следует отметить, что подавляющая часть опубликованных данных относится лишь к реализациям одного какого-либо простого вида циклической деформации [4-6], в то время как влияние сложного напряжённого состояния изучалось крайне редко [7]. Отметим также, что по исследованию рассматриваемой здесь проблеме имеется относительно небольшое количество работ, при этом их основная часть относится к области многоциклового усталости материала (реализация сравнительно высокой частоты нагружения), в то время как малоцикловая усталость (низкочастотное



нагружение) изучена ещё в меньшей мере.

Фиг.1. Схема изменения напряжений и деформаций во времени, соответствующие пилообразному (а) и трапециевидному (б) циклу нагружения материала.

Целью настоящей работы является исследование анизотропии деформативных свойств армированных полимерных композитных материалов при пульсирующем непрерывном цикле растяжения и повторно-переменном цикле растяжения с «отдыхом».

На фиг.1 приведена схема изменения напряжений и деформаций во времени, которые соответствуют пилообразному (а) и трапециевидному (б) циклу нагружения материала.

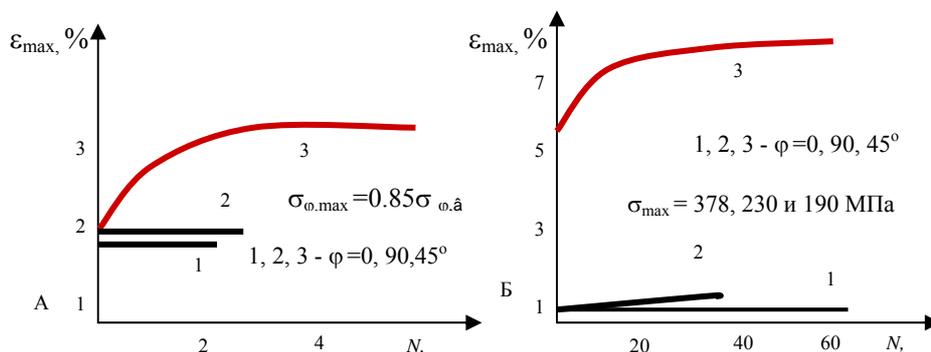
Частота непрерывного малоциклового растяжения составляла 0.5; 1; 2 и 4 цикл/мин. при принятой базе усталостных испытаний, равной 1000 или 10000 циклов. Частота повторно-статического цикла растяжения-«отдыха» зависела от продолжительности времени нахождения образца в состоянии условного отдыха (без нагрузки), которое составляло 15, 30 и 120 мин. и от времени выдержки образца под нагрузкой ( $t = 30$  и  $60$  мин).

Следует отметить, что в рассматриваемом здесь экспериментальном исследовании непрерывное циклическое нагружение-разгрузка образцов происходила не с постоянной скоростью изменения напряжения, что имеет место в обычных усталостных испытаниях, а при постоянной величине скорости деформации, которая для указанных выше частот нагружения соответствовала скоростям холостого перемещения захватов испытательной машины, составляющей соответственно 4; 6; 8 и 10 мм/мин. База испытаний в этом случае деформирования композита была принята равной 24, 48 или 96 циклов.

В работе были испытаны плоские образцы различных форм и геометрий, которые были вырезаны из листов композитного материала в направлениях ортогонального армирования и в промежуточных к ним направлениях. Угол вырезки продольной оси образца  $\varphi$  составлял 0; 15; 30; 45 и 90° и отсчитывался от направления укладки основной части волокон (от направления основы ткани).

В качестве материала для испытаний служили композитные материалы, изготовленные на термопластичных смолах, преимущественно эпоксидных, и в качестве армирующих элементов, имеющие стеклянные, углеродные и органические волокна.

На фиг.2 приведены экспериментальные кривые, которые иллюстрируют анизотропию циклической деформативности ортогонально неравнопрочностно армированных стеклопластиков (стеклотекстолитов) при одинаковом относительном уровне напряжения (а) и одинаковом абсолютном его



значении (б).

Фиг.2. Экспериментальные кривые, иллюстрирующие анизотропию циклической деформативности ортогонально неравнопрочностно армированных стеклопластиков (стеклотекстолитов) при одинаковом относительном уровне напряжения (а) и одинаковом абсолютном его значении (б).

Полученные данные указывают на качественные различия, которые имеются в тех случаях циклического деформирования стеклопластиков, при которых нагружение происходит в направлениях волокон ( $\varphi=0^\circ$  и  $90^\circ$ ) и в промежуточных к ним направлениях. При растяжении в направлении волокон зависимость деформации  $\epsilon \sim N$  от числа циклов нагружения может быть принята линейной вплоть до излома образца.

Рост максимальных значений деформаций  $\epsilon_{\max}$  по сравнению с величиной первого цикла растяжения не меняется за всё дальнейшее нагружение.

Величина этой деформации практически не отличается от деформации образца при кратковременном статическом растяжении. Во всё время циклического деформирования друг от друга практически не отличаются также и диаграммы нагружения и разгрузки композита. Следовательно, в случаях нагружения композитов в направлениях волокон явление деформационного гистерезиса в процессе циклического нагружения-разгрузки полностью отсутствует. Таким образом, при растяжении в направлениях армирования испытанные здесь композитные материалы проявляют стабильность деформативных свойств вплоть до излома образца и, поэтому, разрушение материала носит чисто хрупкий характер, обусловленный только развитием механической повреждаемости. Отметим, что такую же картину анизотропии циклической деформируемости проявляют углепластики, когда нагружение происходит в направлениях армирующих волокон.

Иную картину представляют случаи циклического деформирования материалов, когда нагружение происходит в направлениях промежуточных к направлениям волокон (фиг. 2,б). В этих случаях максимальные значения деформации  $\varepsilon_{\max}$  за время продолжительного циклического нагружения возрастают примерно в 1.2-1.8 раза в зависимости от уровня напряжения и угла направления действия нагрузки. Что касается минимальных значений деформаций цикла  $\varepsilon_{\min}$ , которые соответствуют моментам времени достижения напряжения цикла своего минимального (практически нулевого) значения и обусловленные циклической ползучестью материала, то они практически отсутствуют вплоть до излома образца, если растяжение происходит в направлениях армирования. Между тем, при деформировании композитов в направлениях, промежуточных к направлениям волокон, наблюдается бурный рост минимальных деформаций цикла, значения которых к моменту излома образца могут возрастать по отношению к соответствующему значению первого цикла в 1.2-2.5 раза в зависимости от величины циклического напряжения и угла ориентации линии действия нагрузки. При этом установлено, что когда нагрузка действует в направлениях  $\varphi=15^\circ$  и  $30^\circ$ , величина деформации к моменту циклического разрушения практически совпадает со значением деформации статического разрушения образца при его кратковременном растяжении.

При нагружении только в направлении  $\varphi=45^\circ$  циклическая деформация разрушения получается заметно больше (8-12% от начального значения в зависимости от свойств композита), чем соответствующая статическая деформация.

В работе исследована кинетика деформативности испытанных композитов П~N, выявлены количественные характеристики, которые определяют рост деформаций, начиная с первого цикла нагружения вплоть до момента времени излома образца.

Установлено, что на линейном участке графика  $\varepsilon_{\max} \sim N$  имеет место двухпараметровая зависимость вида показательной функции между максимальным значением деформации и соответствующим напряжением  $\sigma_{\max}$ . Параметры указанной зависимости не обусловлены величиной напряжения и определяются только углом линии действия нагрузки относительно волокон. Такая же

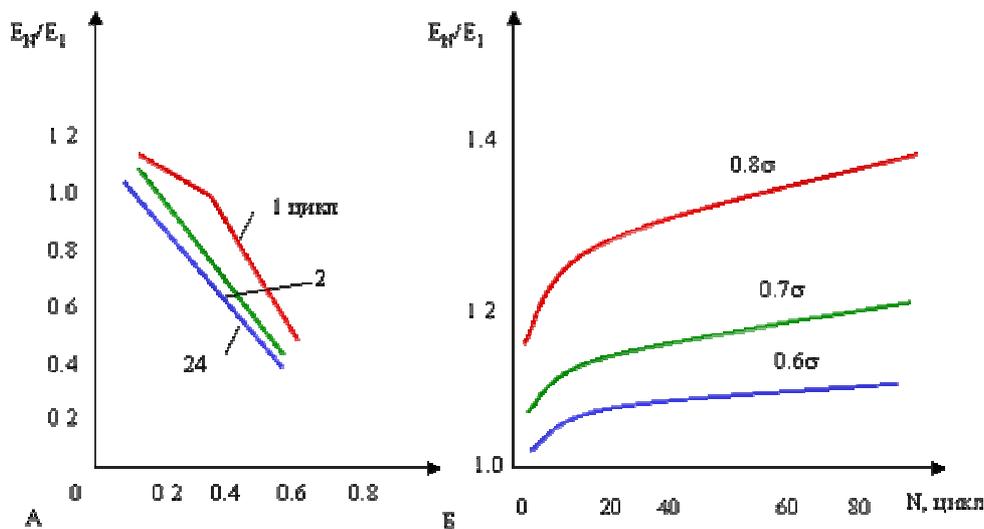
зависимость с несколько иными значениями тех же параметров справедливо также для деформации  $\varepsilon_{\min}$  [8, 9].

Выводы о деформационном упрочнении органопластика получены впервые и, естественно, нуждаются в дальнейшем подтверждении.

Изучены закономерности изменения деформации  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$  при трапециевидном цикле растяжения-отдыха при различных вариантах времени нахождения образца под постоянной нагрузкой и времени его условного отдыха, т.е. нахождения в разгруженном состоянии [8, 9]. Рассмотрено влияние на указанный процесс деформируемости угла  $\varphi$  ориентации линии действия растягивающей нагрузки, количества циклов нагружения и величины относительного уровня напряжения цикла  $\sigma_{\varphi\max}=0.2-0.85\sigma_{\varphi}$

Установлено, что эффективность цикличности приложения статической нагрузки в большей мере зависит от свойств композитного материала и ориентации линии действия нагрузки относительно волокон, в то время как изменение временных параметров нахождения образца под нагрузкой  $t_n$  и в условиях разгрузки  $t_o$  мало влияет на деформативные характеристики исследованных здесь композитов. Для органо- и стеклопластиков, изготовленных на одном и том же полимерном связующем и подвергающихся одинаковым условиям нагружения вдоль волокон, выявлен качественно различный характер изменения деформативных свойств. Значения деформаций  $\varepsilon_{\max}$ , представляющих сумму условно мгновенной деформации нагружения и деформаций циклической ползучести, накапливаемой во времени, в направлениях промежуточных к волокнам, существенно зависят от количества циклов растяжения и отдыха.

Исследовано явление прямой и обратной (восстановление деформации после снятия нагрузки) ползучести стекло- и органопластиков в зависимости от уровня напряжения и количества циклов нагружения. Построены графики экспериментальных зависимостей  $\varepsilon(\sigma, t, N)$ , анализ которых позволяет установить взаимосвязи, выражающие меру накапливаемой во времени деформации, скорость изменения деформации, их зависимость от уровня напряжения и количества циклов [8, 9].



Фиг.3. Закономерности изменения циклического модуля упругости при диагональном направлении нагружения стеклопластиков  $\varphi=45^\circ$  (а) и однонаправленных органических (б).  $E_N/E_1$  – модуль упругости начального (линейного участка) диаграммы ( $\sim$ П).

Изучено изменение величины модуля упругости композитных материалов в процессе длительного нагружения по циклу растяжения-отдыха.

Полученные в работе данные, в частности, показывают, что при диагональном направлении нагружения стеклопластиков  $\varphi=45^\circ$  (фиг.3,а) и однонаправленных органических (фиг.3,б) закономерности изменения циклического модуля упругости качественно различны.

В условиях, указанных выше случаев, малоциклового растяжения имеет место определённое изменение модуля упругости композита.

Изменение циклического модуля упругости стеклопластиков незначительно (около 10 %) и, как правило, происходит в сторону снижения его значения. При этом можно установить определённую зависимость – чем больше долговечность материала (меньше напряжение), тем больше падение значения  $E_N$ . Для испытанных здесь органических, наоборот, наблюдается увеличение циклического модуля упругости (до 13-20 %).

При описанном выше виде нагружения модуль упругости стеклопластика закономерно убывает, при этом на снижение значения  $E_N$  в особенности сильно влияют уровень циклического напряжения и угол ориентации нагрузки относительно волокон. Когда  $\varphi=45^\circ$ , при малом количестве циклов нагружения и сравнительно низких уровнях напряжения, модуль упругости  $E_N$  не только не снижается, но, наоборот, наблюдается определённое его возрастание. Вместе с тем, при дальнейшем увеличении циклов растяжения-отдыха, независимо от напряжения, имеет место падение значения  $E_N$ . Между тем, данные по органическому свидетельствуют о существенном деформационном упрочнении этого материала (фиг.3 б).

В заключение отметим, что разброс средних опытных данных (коэффициент вариации) значений циклических деформаций разрушения и модулей упругости в

данной работе не выходил за пределы 4-7%, имел случайный характер и не зависел от условий испытаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: Изд. РАХ. 2004. 187с.
2. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. Характер повреждения композитных материалов и оценка снижения их прочности при циклическом деформировании. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. No.1. С. 78-82.
3. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н. Особенности процесса распространения усталостных трещин вблизи концентратора напряжений в композитных материалах при их осевом растяжении. // Изв. НАН и ГИУА. Сер. «Технические науки». 2003. Т.LVI. No.1. С.3-7.
4. Саркисян Н.Е., Кравченко В.Л., Петров В.С. Влияние УКИ на прочность и деформативность стеклотекстолита при малоцикловом растяжении. // Механика композитных материалов. 1979. No.1. С.163-165
5. Krempf E., Niu-Tyan-Min. Graphite/Epoxy (45). Tybes. Their static axial and shear properties and their fatigue behavior under completely reversed load controlled loading.-J.Compos. Mater., 1982. v.16, May, P. 172-187.
6. Wang S.S.,Chim E.S.- M., Zahlan N.M. Fatigue crack propacation in random short-fiber SMC composite. // Composite Materials, 1983. v.17, № 3, P. 250-268.
7. Саркисян Н.Е., Карапетян К.А., Хачикян А.Г. Прочность и деформативность слоистых пластиков при сложном нагружении. // Изв. НАН и ГИУА. 1998. Серия «Технические науки». No.1. С.127-132.
8. Саркисян Н.Е. Анизотропия малоцикловой усталостной прочности и деформативности стеклопластика при растяжении. // Механика полимеров. 1976. No.3. С.425-429.
9. Саркисян Н.Е. Анизотропия циклической деформативности стеклопластика при растяжении с “отдыхом”. // Механика композитных материалов. 1979. No.6. С.991-994.

Ереванский Государственный Университет  
Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию  
18.07.2005

УДК 539.374

ԿՈՆԱԿԱՆ ՄԱՍԼԱՍԱՅՐՈՒՄ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՄԻՋՈՒԿՈՎ  
ԵՐԿՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ՁՈՂԻ ՄԱՍԼՄԱՆ ԵՎ ՔԱՐՇՄԱՆ  
ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ՍՈՂԵԼԱՎՈՐՈՒՄԸ ՀԱՄԱԿԱՐԳՉԻ  
ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Պետրոսյան Գ.Լ., Խաչատրյան Հ.Հ.

Г.Л. Петросян, Г.Г. Хачатрян

Моделирование процесса прессования и волочения биметаллических заготовок с пористой сердцевиной через коническую матрицу с помощью компьютера

Использованы формулы теории пластичности пористых материалов, метод тонких сечений и безмоментная теория оболочек. Показано, что система уравнений в безразмерных величинах, полученная в случае пластического деформирования биметаллических заготовок через коническую матрицу, дает возможность для разных случаев прессования и волочения (материалов, пористости и размеров продукции) определить реальные параметры.

**G.L. Petrosyan, H.H. Khachatryan**

**Modeling extrusion process of bimetallic rods with porous core through conical die wherewith computer**

The formulas theory plasticity of porous material, method of slim section and anmoment theory of shells are used. The equation system in dimensionless values, obtained in case plastic deformation of bimetallic blanks through conical die let us possibility for different cases (materials, porosity and sizes of production) of extrusion and drawing determine real parameters are shown.

Օգտագործվել է ծակոտկեն նյութի պլաստիկության տեսության բանաձևերը, բարակ հատույթների մեթոդը և թաղանթների անմոմենտ տեսությունը: Ցույց է տրվել, որ անչափ մեծություններով ստացված երկմետաղական նախապատրաստվածքի կոնական մամլամայրում պլաստիկ դեֆորմացման դեպքում հավասարումների համակարգի թվային լուծման արդյունքները հնարավորություն են տալիս որոշել մամլման և քարշման տարբեր դեպքերի համար (նյութերի, ծակոտկենության և մամլվածքի չափսերի) իրական պարամետրերը:

Բարդ մեխանիկական գործընթացների հաշվարկային մեթոդները հիմնականում հանգեցնում են խնդիրների լուծման թվային եղանակների, որոնց օգտագործման հիմնական խոչընդոտը թվաբանական գործողությունների բավական մեծ քանակն է: Համկարգչային տեխնիկայի զարգացումը հնարավորություն է տալիս վարկյանում կատարել միլիոնավոր թվաբանական գործողություններ, որը մատչելի է դարձնում թվային եղանակների օգտագործումը և նյութի իրական հատկությունների հաշվառումը մաթեմատիկական մոդելներում: Այսօր արդեն գոյություն ունեն բազմաթիվ համակարգչային ծրագրեր (Mathlab, Mathcad, Excel), ինչպես նաև վերջավոր տարրերի մեթոդի վրա հիմնված այսպես կոչված ավտոմատ նախագծման համակարգեր (ANSYS, ABAQUS): Առաջինների միջավայրում կազմվում են մաթեմատիկական մոդելների ծրագրերը և խնդիրները լուծվում որոշ մոտավորությամբ, իսկ վերջինները նախագծողին թույլ են տալիս ստանալ հետազոտվող գործընթացների համար անհրաժեշտ հաշվարկային և փորձնական մոդելների վիրտուալ նմանակները համակարգում, որը կրճատում է նախագծման ամբողջ գործընթացի ծախսերը և ժամանակը [1]: Այսպիսով

հետազոտվող գործընթացը բնութագրող մեծությունների որոշման համար համակարգչային տեխնոլոգիաների հիման վրա ստեղծված հաշվարկային համալիրի կիրառումը, առավել ճշգրիտ և արդյունավետ է դարձնում խնդրի լուծման ընթացքը:

Կոնական մամլամայրում երկմետաղական ձողերի մամլման ժամանակ կոնական մասում բարդ պլաստիկ դեֆորմացիաների պատճառով նրա հետազոտումը հնարավոր է միայն մոտավոր թվային եղանակների կիրառմամբ: Տվյալ գործընթացի հետազոտումը առավել ամբողջական է դառնում համակարգչային տեխնիկայի կիրառմամբ [2]:

[2]-ում նկարագրված են փափուկ նյութից միջուկով երկմետաղական ձողի կոնական մամլամայրում մամլման գործընթացի պարամետրերի որոշման համար անհրաժեշտ հավասարումները և կազմված է խնդրի լուծման ալգորիթմ: Երկմետաղի շերտերի լարվածային վիճակի բաղադրիչների որոշման համար կազմված ալգորիթմը իրականացված է MS EXCEL փաթեթի օգնությամբ:

[3,4]-ում օգտագործելով գնդային և տորոնդալ կոորդինատային համակարգերում երկմետաղական ձողի միջուկի և արտաքին շերտի հոսքի արագությունների համար բանաձևերը ստեղծվել են մամլման ժամանակ համապատասխանաբար միջուկի և արտաքին շերտի քայքայման կանխման չափանիշները, ընդ որում անչափ մեծություններով ներկայացվում են լարումներն ու շառավիղները, հաշվի են առնվում մակերեսի փոքրացումը, շփումը, մամլամայրի անկյունն ու ձևը:

[5]-ում հետազոտված է կոնական մամլամայրում մամլելիս առանցքահամաչափ երկմետաղական ձողի դեֆորմացիոն վիճակը, օգտագործելով z-ից (ձողի առանցք) և r-ից (շառավիղ) կախված յուրաքանչյուր շերտի համար հոսունության ֆունկցիաներ: Ընդ որում երկմետաղը բաղկացած է երկու տարբեր պլաստիկ հատկություններ ունեցող մետաղներից՝ այլումին (միջուկ) և պղինձ (արտաքին շերտ): Մտացված արդյունքները համեմատված են փորձնական տվյալների հետ և ցույց է տրված նրանց համապատասխանությունը: Նշված աշխատանքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ժամանակակից համակարգչային ծրագրային միջավայրերում մեխանիկական գործընթացների պարամետրերի որոշման համար գոյություն ունեցող վերլուծական եղանակների կիրառմամբ խնդիրների լուծումը դառնում է բավականին արդյունավետ:

Առավել բարդ և կարևոր են երկմետաղական ձողերի և խողովակների մամլման գործընթացների հետազոտությունները, որտեղ երկմետաղի բաղադրիչներից մեկը կամ երկուսը կարող են լինել ծակոտկեն: [6]-ում տրված են երկմետաղական խողովակների և ձողերի լուծման տարբերակներ, որոնք ներառում են ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության տեսության բանաձևերը: Սակայն այնտեղ ամբողջությամբ ներկայացված չեն տարբեր եզրային պայմանների համար գործընթացի պարամետրերի բնութագրերը:

Աշխատանքի նպատակն է համակարգչի օգնությամբ կատարել կոնական մամլամայրում ծակոտկեն միջուկով երկմետաղ ձողի պլաստիկ դեֆորմացման (մամլման և քարշման) գործընթացի համալիր հետազոտում, որը իր մեջ ընդգրկում է լարվածադեֆորմացիոն վիճակի բանաձևերի ստացում, տեխնոլոգիական գործընթացի տարբեր պարամետրերի հաշվառմամբ համակարգչային մոդելավորում, ինչպես նաև արդյունքների վերլուծում

շահագործման առավել բարձր մեխանիկական հատկություններով արտադրանքի ստացման համար:

Ծակոտկեն միջուկի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի հետազոտումը իրականացվել է ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության տեսության բանաձևերի հիման վրա օգտագործելով բարակ հատույթների մեթոդը: Դիտարկվում է մամլամայրի փոքր կոնականության դեպքը, երբ կոնտակտային շոշափող լարումների մեծությունները նույնպես փոքր են: Գործընթացի գծապատկերը ցույց է տրված նկ.1-ում, որտեղ 1-ը ծակոտկեն միջուկն է, 2-ը արտաքին շերտը և 3-ը մամլամայրը:

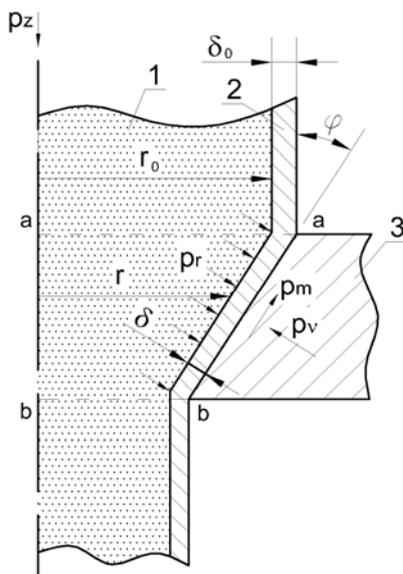
Ծակոտկեն իզոտրոպ նյութերի համար պլաստիկության հոսունության տեսության հավասարումները թենզորային գրառմամբ ունեն հետևյալ տեսքը [6]՝

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} + 9\alpha^m \sigma_0^2 \right)^{1/2} / \beta^{n+0.5} \quad (1)$$

$$d\bar{\varepsilon}_{eq} = \beta^{2n-0.5} \left( \frac{2}{3} de_{ij} de_{ij} + \frac{d\varepsilon_0^2}{\alpha^m} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij} = 3 d\varepsilon_{eq} \left[ \sigma_{ij} - (1 - 2\alpha^m) \delta_{ij} \sigma_0 \right] / 2\beta^{3n} \sigma_{eq} \quad (3)$$

$$dv = 9\alpha^m (1 - \nu) \sigma_0 d\bar{\varepsilon}_{eq} / \beta^{3n} \sigma_{eq} \quad (4)$$



Նկ. 1. Ծակոտկեն միջուկով երկմետաղական ձողի մամլման գործընթացի գծապատկերը:

են [7]:  $m$  և  $n$  ծակոտկենության պարամետրերն են, որոնք կախված են նյութից և ստացվում են փորձնական ճանապարհով:

(1) հավասարման օգնությամբ գրենք պլաստիկության պայմանը ընդունելով

որտեղ  $\sigma_{eq}$  – համարժեքային

լարումն է,  $d\bar{\varepsilon}_{eq}$  – պլաստիկ դեֆորմացիաների համարժեքային աճն է,  $S_{ij}$  – լարումների դեվիատորի բաղադրիչներն են,  $d\varepsilon_{ij}$  – պլաստիկ դեֆորմացիաների աճերի թենզորի բաղադրիչներն են,  $de_{ij}$  – պլաստիկ դեֆորմացիաների աճերի դեվիատորի բաղադրիչներն են,  $\sigma_0$  – միջին նորմալ լարումն է,  $d\varepsilon_0$  – միջին դեֆորմացիաների աճն է,  $\delta_{ij}$  – Կրոնեկերի սիմվոլն է,  $\nu$  – նյութի ծակոտկենությունն է,  $dv$  – նյութի ծակոտկենության աճն է,  $\alpha = \nu$  և  $\beta = 1 - \nu$  – ծակոտկենության ֆունկցիաներն

$\sigma_{eq} = \sigma_{h1}$ , որտեղ  $\sigma_{h1}$  – նյութի հոսունության սահմանն է: Կստանանք՝

$$\sigma_{h1} = \sqrt{\sigma_i^2 + 9\alpha^m \sigma_0^2} / \beta^{n+0.5} \quad (5)$$

որտեղ  $3S_{ij}S_{ij}/2 = \sigma_i$  –լարումների ինտենսիվությունն է՝

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (6)$$

իսկ միջին լարումը՝

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (7)$$

Կլոր հատույթով ձողերի  $p_z$  ճնշմամբ մամլման դեպքում ըստ բարակ հատույթների մեթոդի ունենք հետևյալ պայմանները [6]

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta = \sigma_r = -p_r \quad (8)$$

$$\sigma_1 = -p_z \quad (9)$$

որտեղ  $p_r$  –շառավղային նորմալ ճնշումն է:

Այսպիսով տեղադրելով (6)-ը և (7)-ը (5)-ի մեջ՝ հաշվի առնելով (8), (9), կստացվի քառակուսի հավասարում, որը լուծելով ըստ  $p_r$  -ի կստանանք՝

$$p_r = [(1 - 2\alpha^m)p_z + Q_1] / (1 + 4\alpha^m) \quad (10)$$

որտեղ

$$Q_1 = \sqrt{\beta^{2n+1}(1 + 4\alpha^m)\sigma_{h1}^2 - 9\alpha^m p_z^2}$$

Անջատված տարրի հետևյալ հավասարակշռության հավասարումից [6]

$$dp_z/dr = 2[(p_r - p_z)tg\varphi + f_1 p_r] / rtg\varphi$$

և (10)-ից կստանանք  $dp_z$  առանցքային ճնշման փոփոխության արտահայտությունը՝

$$dp_z/dr = 2[(-6\alpha^m tg\varphi + f_1(1 - 2\alpha^m))p_z + (tg\varphi + f_1)Q_1] / (1 + 4\alpha^m)rtg\varphi \quad (11)$$

Գլանական նախապատրաստվածքների մամլման ժամանակ շրջանային դեֆորմացիաների աճի համար ունենք հետևյալ բանձնը [6]՝

$$d\varepsilon_\theta = dr/r \quad (12)$$

Հետևաբար հաշվի առնելով (8)-ը, (10)-ը և (12)-ը, (3)-ից կստանանք՝

$$d\varepsilon_{eq}/dr = -2\beta^{3n}\sigma_{eq}/rQ_1 \quad (13)$$

Մյուս կողմից հաշվի առնելով (7)-ը և (13)-ը, (4)-ից ծակոտկենության փոփոխության համար կունենանք

$$dv/dr = 6\alpha^m(1 - \nu)(2p_r + p_z)/rQ_1 \quad (14)$$

որի մեջ տեղադրելով (10)-ը և ձևափոխելով, այն կբերենք հետևյալ տեսքի՝

$$dv/dr = 6\alpha^m(1 - \nu)(3p_z + 2Q_1)/(1 + 4\alpha^m)rQ_1 \quad (15)$$

Նկ.1-ում պատկերված երկմետաղական ձողի միջուկի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող պարամետրերի համար ստացված բանաձևերը անչափ մեծություններով ներկայացնելու համար կատարենք

հետևյալ նշանակումները՝  $\bar{p}_z = p_z/\sigma_{h1}$ ,  $\bar{p}_r = p_r/\sigma_{h1}$ ,  $\bar{Q}_1 = Q_1/\sigma_{h1}$ ,  $\bar{r} = r/r_0$ ,  
 $d\bar{r} = d(r/r_0)$ :

Արդյունքում ստանում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝  
 $d\bar{p}_z/d\bar{r} = 2\left[(-6\alpha^m \text{tg}\varphi + f_1(1-2\alpha^m))\bar{p}_z + (\text{tg}\varphi + f_1)\bar{Q}_1\right]/(1+4\alpha^m)\bar{r}\text{tg}\varphi$  (16)

$$\bar{p}_r = \left[(1-2\alpha^m)\bar{p}_z + \bar{Q}_1\right]/(1+4\alpha^m) \quad (17)$$

$$\bar{Q}_1 = \sqrt{\beta^{2n+1}(1+4\alpha^m) - 9\alpha^m\bar{p}_z^2} \quad (18)$$

$$dv/d\bar{r} = 6\alpha^m(1-\nu)(3\bar{p}_z + 2\bar{Q}_1)/(1+4\alpha^m)\bar{r}\bar{Q}_1 \quad (18)$$

Երկվետաղական ձողի արտաքին շերտը դիտարկվում է որպես բարակապատ թաղանթ և շոշափող լարումների փոքրության պատճառով ընդունվում է, որ գլխավոր լարումներն են միջօրեական  $\sigma_m$ , շրջանային  $\sigma_\theta$  և խողովակի մակերևույթին նորմալ շառավղային  $\sigma_r = -p_r$  լարումները: Այդ դեպքում պլաստիկության հոսունության տեսության հիման վրա  $\sigma_m$ -ի փոփոխության համար ստացվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$d\sigma_m = \left[c_1\sigma_\theta - c_2rp_r/\delta - \sigma_m(1+rd\delta/\delta dr)\right]dr/r \quad (19)$$

որտեղ

$$c_1 = 1 + 2f_2r\text{ctg}\varphi/(2r + \delta \cos \varphi), \quad c_2 = f_2(2r - \delta \cos \varphi)/(2r + \delta \cos \varphi) \sin \varphi$$

$d\delta$  արտաքին շերտի հաստության փոփոխությունը և  $\sigma_\theta$  շրջանային լարումը որոշվում են համապատասխանաբար հետևյալ բանաձևերով՝

$$d\delta = -\delta(2p_r + \sigma_\theta + \sigma_m)dr/r(2\sigma_\theta - \sigma_m + p_r) \quad (20)$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_m - p_r - Q_2)/2 \quad (21)$$

որտեղ

$$Q_2 = \sqrt{4\sigma_{h2}^2 - 3\sigma_m^2 - 3p_r^2 - 6p_r\sigma_m} \quad (22)$$

Արտաքին շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող հավասարումների համակարգը ներկայացնենք անչափ մեծություններով, դրա համար կատարենք հետևյալ նշանակումները՝  $\bar{\sigma}_m = \sigma_m/\sigma_{h2}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/\sigma_{h2}$ ,  $\bar{Q}_2 = Q_2/\sigma_{h2}$ ,  $\bar{\delta} = \delta/\delta_0$ ,  $d\bar{\delta} = d(\delta/\delta_0)$ , որտեղ  $\sigma_{h2}$ -ը արտաքին շերտի նյութի հոսունության սահմանն է: Այսպիսով ստանում ենք՝

$$d\bar{\sigma}_m = \left[\bar{c}_1\bar{\sigma}_\theta - \bar{c}_2\bar{r}\bar{p}_r k_{\sigma_r}/\bar{\delta}k - \bar{\sigma}_m(1+\bar{r}d\bar{\delta}/\bar{\delta}d\bar{r})\right]d\bar{r}/\bar{r} \quad (23)$$

$$\bar{c}_1 = 1 + 2f_2 \cdot \bar{r}\text{ctg}\varphi/(2\bar{r} + \bar{\delta}k \cos \varphi)$$

$$c_2 = f_2(2\bar{r} - \bar{\delta}k \cos \varphi)/(2\bar{r} + \bar{\delta}k \cos \varphi) \sin \varphi$$

$$d\bar{\delta} = -\bar{\delta}(2\bar{p}_r k_{\sigma_r} + \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_m)d\bar{r}/\bar{r}(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_m + \bar{p}_r k_{\sigma_r}) \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = (\bar{\sigma}_m - \bar{p}_r k_{\sigma_r} - \bar{Q}_2)/2 \quad (25)$$

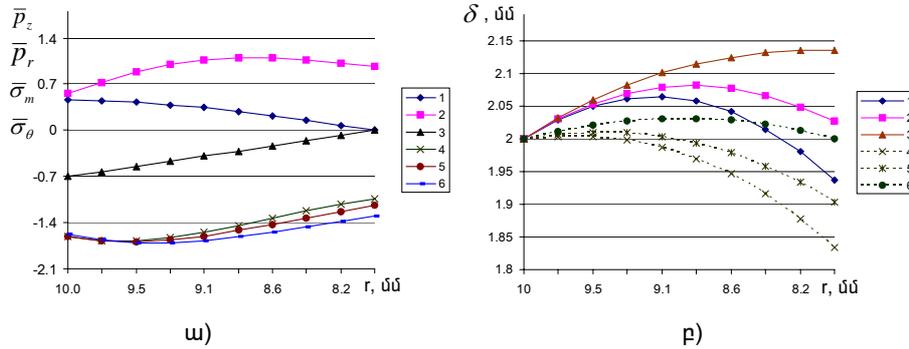
$$\bar{Q}_2 = \sqrt{4 - 3\bar{\sigma}_m^2 - 3\bar{p}_r^2 k_{\sigma_h}^2 - 6\bar{p}_r k_{\sigma_h} \bar{\sigma}_m} \quad (26)$$

որտեղ  $k_{\delta} = \delta_0 / r_0$  - թաղանթի սկզբնական չափսերի հաշվառման գործակիցն է ,  
 $k_{\sigma_h} = \sigma_{h1} / \sigma_{h2}$  - միջուկի և թաղանթի հոսունության սահմանների  
 հարաբերությունը:

Թվային արդյունքների հաշվարկի համար ընտրված է նախապատրաստվածք, որի միջուկի սկզբնական շառավիղն է՝  $r_0 = 10$  մմ, արտաքին շերտի հաստությունը՝  $\delta_0 = 2$  մմ: Շփման գործակիցը միջուկի ու արտաքին շերտի միջև և արտաքին շերտի ու մամլամայրի միջև  $f_1 = f_2 = 0.2$ : Դիտարկված են երկմետաղի շերտերի հոսունության սահմանների հարաբերության գործակցի  $k_{\sigma_h}$  (նկ.2  $\nu_0 = 0.2$ ), միջուկի սկզբնական ծակոտկենության  $\nu_0$  (նկ.3  $k_{\sigma_h} = 1$ ) և արտադրանքի չափսերի ստացման (նկ. 4, 5,  $\nu_0 = 0.2$ ,  $k_{\sigma_h} = 1$ ) տարբեր դեպքեր: Խնդրի լուծումը իրականացվել է MS EXCEL ծրագրային փաթեթի օգնությամբ: Նախապատրաստվածքի մամլման և քարշման գործընթացների տարբերությունը հաշվի է առնվում  $\sigma_z$  առանցքային լարման միջոցով՝ մամլման դեպքում այն բացասական է և ձողը մամլամայրից դուրս գալու մասում (նկ.1 b-b) հավասարվում է զրոի, իսկ քարշման դեպքում այն դրական է և զրոի է հավասարվում ձողի մամլամայր մտնելու մասում (նկ.1 a-a):

Նկ.2 ա -ում բերված են լարվածային վիճակի բաղադրիչները տարբեր  $k_{\sigma_h}$  -ի արժեքների համար ( $k_{\sigma_h} = 1, 0.9, 0.7$ ): Ինչպես հետևում է անչափ  $\bar{p}_z$  և  $\bar{p}_r$  ճնշումների որոշման (10) և (11) արտահայտություններից նրանք կախված չեն  $k_{\sigma_h}$  -ից և հետևաբար դիտարկված երեք դեպքերի համար էլ նրանց կորերը նույնն են:

Սակայն եթե հաշվի առնենք  $p_z = \bar{p}_z \cdot \sigma_{h1}$  և  $p_r = \bar{p}_r \cdot \sigma_{h1}$  մեծությունները, ապա տարբեր նյութերի համար կստանանք տարբեր արժեքներ:  $\bar{\sigma}_m$  -ը,  $\delta$  -ն,  $\bar{\sigma}_0$  -ն համաձայն (23), (24) և (25) բանաձևերի կախված են  $k_{\sigma_h}$  -ից: Չնայած դրան  $\bar{\sigma}_m$  -ի փոփոխությունը  $r$  -ից կախված նույնպես գրաֆիկորեն չի արտահայտվում:



Նկ.2. Լարվածային վիճակի բաղադրիչների և  $\delta$ -ի բաշխման էպյուրաները, երբ  $\nu_0 = 0.2$ .

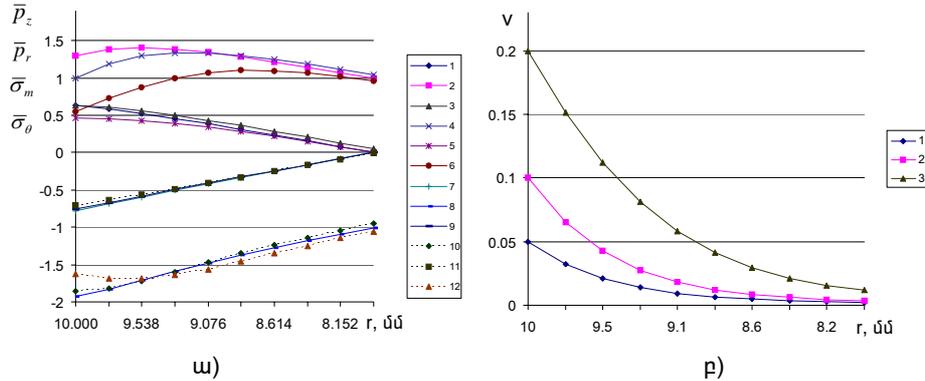
ա) սամլում՝ 1-  $\bar{p}_z$ , 2-  $\bar{p}_r$ , 3-  $\bar{\sigma}_m$ , 4, 5, 6-  $\bar{\sigma}_\theta$  համապատասխանաբար  $k_{\sigma_h} = 1, 0.9, 0.7$ , բ) սամլում՝ 1-  $k_{\sigma_h} = 1$ , 2-  $k_{\sigma_h} = 0.9$ , 3-  $k_{\sigma_h} = 0.7$ , քարշում՝ 4-  $k_{\sigma_h} = 1$ , 5-  $k_{\sigma_h} = 0.9$ , 6-  $k_{\sigma_h} = 0.7$

Սակայն  $\sigma_m = \bar{\sigma}_m \cdot \sigma_{h_2}$  մեծությունները նույնպես փոփոխվում են թաղանթի հոսունության սահմանի տարբեր արժեքների դեպքում: Այսպիսով երկմետաղական ձողի շերտերի նյութերի տարբերությունից փոխվում են հիմնականում ձևավորող  $\bar{\sigma}_\theta$  անչափ լարման արժեքները և  $r$ -ի փոքրացման հետ  $\bar{\sigma}_\theta$ -ների տարբերությունը մեծանում է: Գործնական կարևոր նշանակություն ունի նաև նկ.2 բ-ում պատկերված թաղանթի պատի հաստության փոփոխության կորերը  $r$ -ից կախված, որտեղ  $k_{\sigma_h}$ -ի ազդեցությունը բավականին ակնառու է, ինչպես որակապես այնպես էլ քանակապես: Ընդ որում մամլման դեպքում, երբ միջուկը փափուկ է ( $k_{\sigma_h} = 0.7$ ) թաղանթի պատի հաստությունը ( $\delta$ ) աստիճանաբար մեծանում է:  $k_{\sigma_h}$ -ի մեծացման դեպքում սկզբում  $\delta$ -ն մեծանում է ստանալով առավելագույն արժեք, այնուհետև սկսում է փոքրանալ: Քարշման դեպքում այդ օրինաչափությունը պահպանվում է, բայց սկզբում  $\delta$ -ի մեծացումը ավելի քիչ է, իսկ փոքրացումը ավելի շատ:

Նկ.3-ում բերված են երկմետաղական ձողի միջուկի ծակոտկենության տարբեր  $\nu_0$  սկզբնական արժեքների դեպքում մամլամայրի կոնական մասում լարումների (նկ.3 ա) և  $\nu$  ծակոտկենության (նկ.3 բ) փոփոխության կորերը: Նկ.3 ա - ից երևում է, որ ծակոտկենության սկզբնական արժեքի փոփոխությունը ավելի ազդեցիկ է  $\bar{p}_z$  և  $\bar{p}_r$  մեծությունների վրա, և ծակոտկենության փոքրացման հետ մեկտեղ համապատասխանաբար մեծանում են լարումները:

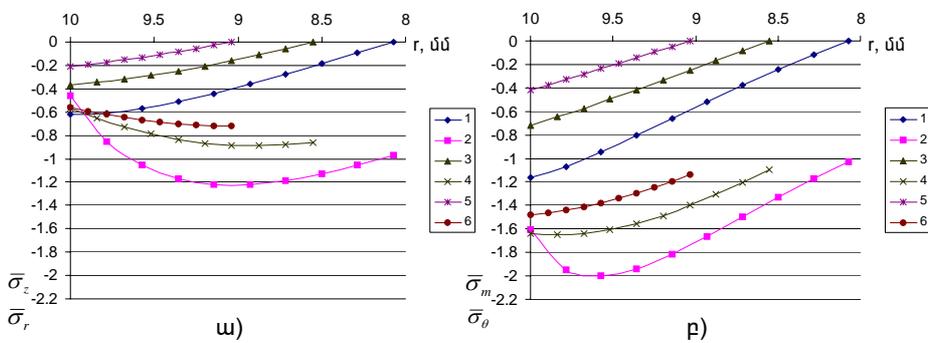
Նկ.4 -ում պատկերված են արտադրանքի (երկմետաղական մամլվածքի) շառավղի տարբեր արժեքների դեպքում լարումների բաղադրիչների գրաֆիկները միջուկում (նկ.4 ա)  $\bar{\sigma}_z = -\bar{p}_z$ ,  $\bar{\sigma}_r = -\bar{p}_r$  և թաղանթում (նկ.4 բ)  $\bar{\sigma}_m$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ : Պարզ երևում է, որ արտադրանքի շառավղի փոքրացման հետ մեծանում են լարումները և միջուկում և թաղանթում, քանի որ տեխնոլոգիական գործընթացը համեմատաբար ավելի երկար ժամանակում է ավարտվում:

Նկ.5 - ում նույն սկզբնական ծակոտկենության դեպքում ( $\nu_0 = 0.2$ ) տեսնում ենք, որ կախված մամլամայրի վերջնական շառավղից փոփոխվում է նաև արտադրանքի ծակոտկենությունը, այսինքն հնարավորություն է ստեղծվում ստանալ մեզ անհրաժեշտ ծակոտկենությամբ արտադրանք ընտրելով համապատասխան վերջնական շառավղով մամլամայր:



Նկ.3. Լարվածային վիճակի բաղադրիչների ( $\omega$ ) 1, 3, 5 -  $\bar{p}_z$ , 2, 4, 6 -  $\bar{p}_r$ , 7, 9, 11 -  $\bar{\sigma}_m$ , 8, 10, 12 -  $\bar{\sigma}_\theta$  համապատասխանաբար  $\nu_0 = 0.05, 0.1, 0.2$  և միջուկի ծակոտկենության բաշխման ( $\rho$ ) էպյուրաները, երբ  $k_{\sigma_n} = 1$

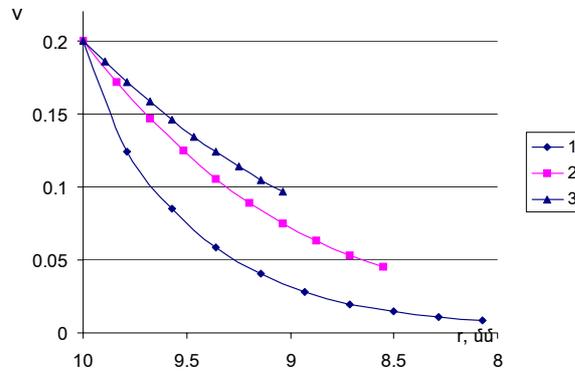
Նկ.4 և նկ.5 - ի կորերի բնութագրերի տարբերությունը բացատրվում է համապատասխան շառավիղների դեպքում լարումների մեծությամբ: Նշենք, որ ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս կատարել գործիքների (մամլամայրի և մամլամատի) ամրության հաշվարկը:



Նկ.4. Լարվածային վիճակը բնութագրող բաղադրիչների փոփոխման կորերը մասնավորապես տարբեր շառավիղների դեպքում ( $r = 8.1, 8.6, 9.1$  մմ).  $\omega$  միջուկի համար 1, 3, 5 -  $\bar{\sigma}_z$ , 2, 4, 6 -  $\bar{\sigma}_r$  և  $\rho$  բաղանթի համար 1, 3, 5 -  $\bar{\sigma}_m$ , 2, 4, 6 -  $\bar{\sigma}_\theta$

Այսպիսով ծակոտկեն միջուկով երկմետաղական կլոր հատույթով նախապատրաստվածքի կոնական մամլամայրում պլաստիկ դեֆորմացման գործընթացը հետազոտվել է իրական ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության տեսության բանաձևերի օգնությամբ: Միջուկի համար օգտագործվել է բարակ հատույթների մեթոդը, իսկ նախապատրաստվածքի արտաքին շերտի համար՝ թաղանթների անմոմենտ տեսությունը: Ստացվել են անչափ մեծություններով

հավասարումների համակարգի թվային լուծման արդյունքները երկմետաղական նախապատրաստվածքի բաղադրիչների նյութերի, միջուկի ծակոտկենության և մամլվածքի չափսերի տարբեր դեպքերի համար:



Նկ.5. Ծակոտկենության փոփոխությունը մամլվածքի տարբեր շառավիղների դեպքում ( $r = 8.1, 8.6, 9.1$  մմ)

Դրանք հնարավորություն են տալիս երկմետաղի բաղադրիչ նյութերի հատկությունների և չափսերի ցանկացած արժեքների համար գործարանային և լաբորատոր պայմաններում որոշել տեխնոլոգիական գործընթացի բոլոր իրական պարամետրերը:

### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
2. Խաչատրյան Հ.Հ. Փափուկ նյութից միջուկով երկմետաղ ձողերի մամլման գործընթացի հետազոտումը. ՀՊՃՀ, տարեկան գիտաժողով, Երևան, 2005. էջ 416-418:
3. Avitzur B., Wu R., Talbert S., Chou Y.T. Criterion for the Prevention of Core Fracture During Extrusion of Bimetal Rods. // Journal of Engineering for Industry. 1982. № 104. P. 293-304.
4. Avitzur B., Wu R., Talbert S., Chou Y.T. Criterion for the Prevention of Sleeve Fracture During Extrusion of Bimetal Rods. Journal of Engineering for Industry. - 1986. № 108. P. 205-212.
5. Hwang Yeong-Maw, Hwang Te-Fu An investigation into the plastic deformation behavior within a conical die during composite rod extrusion. //Journal of Materials Processing Technology. 2002. № 121. - p. 226-233.
6. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1988. 153 с.
7. Петросян Г.Л., Вайс П., и др. Особенности построения диаграммы деформирования пористых спеченных образцов из стального порошка // Сб. Материалов годичной научной конф. ГИУА. 2001. Т1. С. 209-210.

Հայաստանի Պետական  
Ճարտարագիտական Համալսարան

Ընդունվել է խմբագրություն  
11.04.2006

Բովանդակություն		Содержание
Վ. Մ. Բելուբեկյան, Ղ. Հ. Մհերյան Տրանսվերսալ իզոտրոպ, առաձգական միջավայրում, մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը	3	Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ
Ն.Ջ. Պողոսյան Հարթ առաձգական ալիքների անդրադարձումը իզոտրոպ համասեռ ալիքատարում	10	Погосян Н.Д. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ
Լ.Ա. Աղաբաբյան, Ռ.Ս. Գևորգյան, Ա.Վ. Մահակյան Հնգաշերտ իզոտրոպ ջերմաառաձգական շերտի համար խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը և որոշ կիրառություն	17	Агаловян Л. А., Геворкян Р. С., Саакян А. В. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛОСЫ И НЕКОТОРОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ
Ա.Մ. Առուստամյան Ուղղանկյուն իզոտրոպ սալի սալի դինամիկ կայունության խնդրի թվային անալիտիկ լուծումը	24	Арустамян А. М. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
Լ.Ա. Վանյան Անմոմենտ գլանային մեմբրանի թաղանթի կայունությունը գազի գերձայնային հոսքում	34	Ванян Л. А. УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ-МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА
Ջ. Ն. Դանոյան, Ն. Ջ. Դանոյան, Գ.Ա. Մանուկյան Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները այեզոդեկտրիկ հիմքով և փափուկ դիէլեկտրիկ շերտով շերտավոր համակարգում (Բնութագրիչ հավասարման հետազոտումը – Մաս I)	43	Даноян З. Н., Даноян Н. З., Манукян Г. А. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕК- ТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И МЯГКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ (Исследование характеристического уравнения – часть I)
Տ.Հ. Եղիազարյան Ճարով թուլացված կլոր սալերի առանցքասիմետրիկ ծռումը	57	Егиазарян Т. А. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ МОНЕТОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ
Գ.Գ. Օհանյան Անսեղմելի հեղուկում գազային պղպջակի ազատ ոչ գծային բարխալումները	62	Оганян Г. Г. НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
Բ.Ա. Խուդայարով Առաձգամածուցիկ եռաշերտ գլանային պանելների ֆլաթերի հաշվարկը	72	Худаяров Б. А. РАСЧЕТ НА ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГИХ ТРЕХ- СЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ
Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մազմանյան Երկակի, հաստատուն փոքր կորությամբ թաղանթների տատանողական շարժման օպտիմալ դեկավարման մասին հակամետ իրավիճակներում	78	Габриелян М. С., Мазманян Л. А. ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБА- ТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЙКОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ
Ն.Ե. Մարգարյան, Ն.Ն. Մարգարյան, Ա.Ն. Ղազարյան Կոմպոզիտային նյութերի ձևախախտելիության հատկությունների անիզոտրոպիան ցիկլիկ բեռնավորման զանազան դեպքում	86	Саркисян Н. Е., Саркисян Н. Н., Казарян А. Н. АНИЗОТРОПИЯ ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАЗЛИЧ- НЫХ СЛУЧАЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

**Գ.Լ. Պետրոսյան, Հ.Հ. Խաչատրյան**  
**Կոնական մամլամայրում ծակոտկեն միջուկով**  
**երկմետաղական ձողի մամլման և քարշման**  
**գործընթացների մոդելավորումը համակարգչի**  
**օգնությամբ**

92

Петросян Г.Л., Хачатрян Г.Г.  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ И  
ВОЛОЧЕНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЗАГОТОВОК С  
ПОРИСТОЙ СЕРДЦЕВИНОЙ ЧЕРЕЗ КОНИЧЕСКУЮ  
МАТРИЦУ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА