

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿՆԵՐԻ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2006

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО  
ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ  
КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Վ.Ն. Հակոբյան, Լ.Լ. Դաշտոյան

Օղակաձև կիսասանվերջ ճարձվ թուլացված բաղադրյալ տարածության համար  
առանցքափմետրիկ մի խնդիր

Ուսումնասիրված է երկու տարբեր կիսատարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածության լարվածային վիճակը, երբ այն երկու նյութերի միացման հարթության հարթության մեջ թուլացված է օղակաձև կիսասանվերջ ճարձվ, որի ափերին տրված են խառը եզրային պայմաններ: Խնդիրը պտտման օպերատորների օգնությամբ բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի և կառուցվել է նրա փակ լուծումը:

**On Some Axis-Symmetrical Problem for Compound Space  
Weakened by Semi-Infinite Crack**

In present work the axis-symmetrical strain state of compound space, consisting of two half-spaces with different shear coefficients  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and Lamé coefficients  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  with semi-infinite ring-type crack in plane of junction with the given strains on one bank and the displacements on the other is considered.

The system of two singular integral equations of second kind is brought out and the closed solution is built.

Смешанным задачам для однородных или составных упругих тел с трещинами посвящено множество работ как зарубежных, так и армянских ученых. Среди них отметим работы [1-6].

В настоящей работе рассмотрено осесимметричное напряженное состояние составного пространства, состоящего из двух разнородных полупространств, в плоскости стыка которых имеется полубесконечная кольцеобразная трещина, на одном берегу которой заданы напряжения, а на другом – перемещения.

Выведена разрешающая поставленную задачу система уравнений, состоящая из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода, и построено ее замкнутое решение.

1. Пусть упругое составное пространство состоит из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ламэ  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ , которые в цилиндрической системе координат заполняют соответственно верхнее ( $z \geq 0$ ) и нижнее ( $z \leq 0$ ) полупространства, а на плоскости их стыка ( $z = 0$ ) имеется полубесконечная кольцеобразная трещина, занимающая область  $a < r < \infty$ . На верхнем берегу трещины заданы нормальные  $P_0(r)$  и касательные  $\tau_0(r)$  напряжения, а на нижнем берегу – нулевые радиальные и нормальные перемещения.

Задача состоит в определении контактных напряжений на стыке полупространств, коэффициентов их интенсивности и раскрытия трещины.

Снабдив индексом 1 характерные величины верхнего полупространства, а индексом 2—нижнего полупространства, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = P_0(r) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_0(r) \\ u_2(r, 0) = 0 \\ w_2(r, 0) = 0 \end{cases} \text{ при } a < r < \infty \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \\ u_1(r, 0) = u_2(r, 0) \\ w_1(r, 0) = w_2(r, 0) \end{cases} \text{ при } r \in (0; a)$$

Здесь  $u_i(r, z)$  и  $w_i(r, z)$  ( $i=1, 2$ ) – радиальные и нормальные смещения точек полупространств, а  $\sigma_z^{(i)}(r, z)$  и  $\tau_{rz}^{(i)}(r, z)$  ( $i=1, 2$ ) – компоненты напряжения

Чтобы решить поставленную задачу, компоненты напряжений и смещений, действующих в зоне контакта, обозначим через  $\sigma(r)$ ,  $\tau(r)$ ,  $u(r)$ ,  $w(r)$  и рассмотрим две вспомогательные задачи для верхнего и нижнего полупространств, которые определяются следующими граничными условиями:

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \begin{cases} P_0(r) & \text{при } r > a \\ \sigma(r) & \text{при } 0 < r < a \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \begin{cases} \tau_0(r) & \text{при } r > a \\ \tau(r) & \text{при } 0 < r < a \end{cases}$$

$$u_2(r, 0) = \begin{cases} u(r) & \text{при } 0 < r < a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases} \quad (1.3)$$

$$w_2(r, 0) = \begin{cases} w(r) & \text{при } 0 < r < a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases}$$

Решения уравнений Ламэ, записанных в цилиндрической системе координат, для верхнего и нижнего полупространств представим в виде интегралов

$$u_j(r, z) = \int_0^\infty \left[ B_j + (-1)^j \theta_3^{(j)}(B_j + (-1)^j C_j) sz \right] s e^{(-1)^j sz} J_1(rs) ds \quad (1.4)$$

$$w_j(r, z) = \int_0^{\infty} \left[ C_j - \theta_3^{(j)} (B_j + (-1)^j C_j) \right] s z e^{(-1)^j s z} J_0(rs) ds \quad (j=1,2) \quad (1.5)$$

Используя последние представления, для компонентов напряжений получим формулы:

$$\sigma_z^{(j)}(r, z) = -2 \int_0^{\infty} \left[ \theta_1^{(j)} B_j - (-1)^j \theta_2^{(j)} C_j \right] s^2 e^{(-1)^j s z} J_0(sr) ds \quad (1.6)$$

$$-2\mu_j \int_0^{\infty} \left[ (-1)^j \theta_3^{(j)} (B_j + (-1)^j C_j) \right] s^2 e^{(-1)^j s z} J_0(sr) ds$$

$$\tau_{rz}^{(j)}(r, z) = 2 \int_0^{\infty} \left[ (-1)^j \theta_2^{(j)} B_j - \theta_1^{(j)} C_j \right] s^2 e^{(-1)^j s z} J_1(sr) ds + \quad (1.7)$$

$$+ 2\mu_j \int_0^{\infty} \left[ \theta_3^{(j)} (B_j + (-1)^j C_j) \right] s^2 e^{(-1)^j s z} J_1(sr) ds$$

где

$$\theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j (\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_3^{(j)} = \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + 3\mu_j} \quad (j=1,2)$$

$J_k(x)$  ( $k=0,1$ ) – функции Бесселя,  $B_j, C_j$  ( $j=1,2$ ) – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Выразив при помощи условий (1.2) и (1.3) постоянные  $B_j, C_j$  ( $j=1,2$ ) через компоненты напряжений и смещений, действующих в зоне контакта, и удовлетворив условиям

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(2)}(r, 0) &= \sigma(r); \quad \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = \tau(r) \\ u_1(r, 0) &= u(r); \quad w_1(r, 0) = w(r) \end{aligned} \quad r \in (0; a)$$

придем к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \theta_2^{(2)} L_{0,0}^2[w] - \theta_1^{(2)} L_{0,1}^2[u] &= \frac{\sigma(r)}{2} \\ -\theta_1^{(2)} L_{1,0}^2[w] + \theta_2^{(2)} L_{1,1}^2[u] &= \frac{\tau(r)}{2} \\ -\theta_1^{(1)} L_{1,0}^0[\sigma] + \theta_2^{(1)} L_{1,1}^0[\tau] &= 2 \left[ (\theta_1^{(1)})^2 - (\theta_2^{(1)})^2 \right] u(r) - f_1(r) \\ \theta_2^{(1)} L_{0,0}^0[\sigma] - \theta_1^{(1)} L_{0,1}^0[\tau] &= 2 \left[ (\theta_1^{(1)})^2 - (\theta_2^{(1)})^2 \right] w(r) - f_2(r) \end{aligned} \quad (0 < r < a) \quad (1.8)$$

где

$$L_{m,n}^k(\varphi) = \int_0^a W_{m,n}^k(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^k = \int_0^\infty t^k J_m(tr) J_n(t\xi) dt$$

$$f_1(r) = \theta_1^{(1)} \bar{L}_{1,0}^0 [P_0] - \theta_2^{(1)} \bar{L}_{1,1}^0 [\tau_0]$$

$$-f_2(r) = -\theta_2^{(1)} \bar{L}_{0,0}^0 [P_0] + \theta_1^{(1)} \bar{L}_{0,1}^0 [\tau_0]$$

$$\bar{L}_{m,n}^k = \int_a^\infty W_{m,n}^k(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi$$

Чтобы построить замкнутое решение системы (1.8), введем новые функции по формулам [4]

$$\{w_*(t); \sigma_*(t)\} = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi \{w(\xi); \sigma(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad (1.9)$$

$$\{u_*(t); \tau_*(t)\} = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{\{u(\xi); \tau(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi;$$

и продолжим их на интервал  $(-a; 0)$ , соответственно, четным и нечетным образом. Тогда, применяя к обеим сторонам второго и третьего уравнений (1.8) оператор  $J^*$ , а к остальным двум – оператор  $I^*$  [4]

$$J^*(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y \varphi(r) dr; \quad I^*(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

и введя комплексные функции

$$\chi(x) = \sigma_*(x) + i\tau(x); \quad V'(x) = \theta_2^{(2)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} - i \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

после несложных математических выкладок, приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$V'(x) + \frac{ib_1^*}{\pi} \int_{-a}^a \frac{V'(t)}{t-x} dt + \frac{ia_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(t)}{t-x} dt = F(x)$$

$$\chi(x) + \frac{ia_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(t)}{t-x} dt - \frac{ib_2^*}{\pi} \int_{-a}^a \frac{V'(t)}{t-x} dt = G(x) \quad (1.11)$$

Здесь

$$F(x) = -\frac{2}{\pi} C_1, \quad C_1 = \int_0^a \frac{\tau_*(t)}{t} dt - 2i\theta_1^{(2)} \int_0^a \frac{1}{t} \frac{\partial w^*}{\partial t} dt - \pi\theta_2^{(2)} \frac{du^*(0)}{dt}$$

$$G(x) = \frac{i\theta_2^{(1)}}{\left[ (\theta_1^{(1)})^2 - (\theta_2^{(1)})^2 \right]} \frac{d}{dx} [f_1^*(x) + if_2^*(x)] \quad (1.12)$$

$$f_1^*(x) = J^*[f_1(x)]; \quad f_2^*(x) = I^*[f_2(x)]$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{\theta_1^{(1)}}{\theta_2^{(1)}}; \quad b_1^* = \frac{\theta_1^{(2)}}{\theta_2^{(2)}}; \quad b_2^* = \frac{2 \left[ (\theta_2^{(1)})^2 - (\theta_1^{(1)})^2 \right]}{\theta_2^{(2)} \theta_2^{(1)}}$$

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.11). Заметим, что эта система качественно не отличается от систем, полученных в работах [5,6], и ее решение можно построить сведением к двум независимым сингулярным интегральным уравнениям в случае, когда квадратное уравнение

$$a_1 \lambda^2 + (a_2 - b_1^*) \lambda + b_2^* = 0 \quad (2.1)$$

имеет два различных корня, или же к поочередному интегрированию двух сингулярных интегральных уравнений в случае, когда уравнение (2.1) имеет один корень [5].

Далее будем рассматривать только случай, когда уравнение (2.1) имеет два различных корня. В этом случае, умножив первое уравнение (1.11) поочередно на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и суммируя со вторым, получим следующие два независимые сингулярные интегральные уравнения второго рода

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = F_j(x) \quad (-a < x < a) \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j V'(x), \quad F_j(x) = G(x) + \lambda_j F(x)$$

$$q_j = \frac{a_2 + b_1^* - (-1)^j \sqrt{(a_2 - b_1^*)^2 - 4a_1 b_2^*}}{2}$$

$$\lambda_j = \frac{-(a_2 - b_1^*) + (-1)^j \sqrt{(a_2 - b_1^*)^2 - 4a_1 b_2^*}}{2a_1} \quad (j = 1, 2)$$

При решении уравнений (2.2) нужно учесть тот факт, что применение операторов вращения приводит к понижению порядка особенности искомых функций в концевых точках на  $1/2$ . Исходя из этого, искомые функции

$\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) в концевых точках интервала  $(-a;a)$  должны иметь особенность ниже  $1/2$ . Следовательно, в концевых точках, где особенность превышает  $1/2$ , нужно взять ограниченные решения.

Учитывая вышесказанное, для решений интегральных уравнений (2.2) получим выражение [7,8]

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1-q_j^2} \left( F_j(x) + \frac{q_j \omega_j(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_j(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} \right) \quad (2.3)$$

Здесь

$$\omega_j(x) = \left( \frac{a-x}{a+x} \right)^{\gamma_j}; \quad \gamma_j = \begin{cases} \gamma_j' & 0 < \theta_j = \arg(g_j) < \pi \\ 1-\gamma_j' & \pi < \theta_j = \arg(g_j) < 2\pi \end{cases}$$

$$\gamma_j' = \frac{1}{4\pi i} \ln |g_j| + \frac{\theta_j}{2\pi}; \quad g_j = \frac{1+q_j}{1-q_j} \quad 2.3$$

Нетрудно проверить, что в случае действительных корней уравнения (2.1) числа  $g_j$  ( $j=1,2$ ) являются действительными положительными числами, вследствие чего точки  $\pm a$  являются концами автоматической ограниченности [8]. В выражении функции  $F_j(x)$  фигурирует константа  $C_1$ , которую можно определить подстановкой значений найденных приведенных напряжений и смещений в (1.12). Однако, более проще использовать равенство нулю компонентов смещения в концевых точках трещин, т.е. условия

$$u(a) = w(a) = 0$$

которые посредством функций  $\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) можно записать в следующем виде:

$$\int_{-a}^a [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] dx = 0 \quad (2.4)$$

Подставляя сюда значения функций  $\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) из (2.3), для константы  $C_1$  получим выражение

$$C_1 = -\frac{q_1 q_2}{2i(\lambda_2 q_1 - \lambda_1 q_2)} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{1-q_j^2}} \int_{-a}^a \frac{G(x)}{\omega_j(x)} dx \quad (2.5)$$

Контактные напряжения и смещения в зоне контакта при помощи функций  $\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\sigma(r) &= -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a s \operatorname{Re} \left[ \frac{\lambda_2 \varphi_1(s) - \lambda_1 \varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (s^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} ds \\
\tau(r) &= -\frac{d}{dr} \int_r^a \operatorname{Im} \left[ \frac{\lambda_2 \varphi_1(s) - \lambda_1 \varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (s^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} ds \\
u(r) &= -\frac{d}{dr} \int_r^a \operatorname{Re} \left[ \int_{-a}^s \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} dx \right] (s^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} ds \\
w(r) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a s \operatorname{Im} \left[ \int_{-a}^s \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} dx \right] (s^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} ds
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В частном случае поставленной задачи, когда пространство однородное, имеем

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \frac{-(-1)^j i \sqrt{\varepsilon}}{1 - \nu}; \quad g_j = (-1)^{j+1} i \sqrt{\varepsilon}; \quad q_j = \frac{1 - 2\nu - (-1)^j i \sqrt{\varepsilon}}{2(1 - \nu)}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{4} - i\beta \\
\gamma_2 &= \frac{1}{4} + i\beta; \quad \omega_1(x) = \left( \frac{a-x}{a+x} \right)^{\frac{1}{4} - i\beta}; \quad \omega_2(x) = \left( \frac{a+x}{a-x} \right)^{\frac{1}{4} - i\beta}
\end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона для материала пространства, а  $\varepsilon = 3 - 4\nu$  – постоянная Мусхелишвили.

Для наглядности вычислим коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концевой точке трещины  $x = a$  для указанного частного случая. С этой целью заметим, что в этой точке функция  $\varphi_1(x)$  равна нулю. Следовательно, особенность напряжений в точке  $x = a$  обусловлена функцией  $\varphi_2(x)$ , которую можно представить в виде

$$\varphi_2(x) = \frac{\Psi(x)}{(a-x)^{\frac{1}{4} - i\beta}} \tag{2.7}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{1 - q_2^2} \left\{ (a-x)^{\frac{1}{4} - i\beta} F_2(x) + \frac{q_2 (a+x)^{\frac{1}{4} - i\beta}}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_2(s) ds}{\omega_2(s)(s-x)} \right\}$$

ограниченная функция в точке  $x = a$ .

Тогда из первых двух соотношений (2.6) можем записать

$$\begin{aligned} \sigma(r) = & -\frac{1}{2r} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s\varphi_1(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} + \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi(s, r) - \varphi(s, a)}{\sqrt{s-r}(a-s)^{\frac{1}{4}-i\beta}} ds + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(5/4+i\beta)} (a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta} \frac{d\varphi(a, r)}{dr} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(1/4+i\beta)} \frac{(a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta}}{a} \varphi(a, r) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{a\Gamma(1/4+i\beta)} (a-r)^{\frac{-3}{4}+i\beta} \varphi(a, r) \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \tau(r) = & -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi_1(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} + \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{a\varphi(s, r) - s\varphi(s, a)}{as\sqrt{s-r}(a-s)^{\frac{1}{4}-i\beta}} ds - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(5/4+i\beta)} \frac{(a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta}}{a} \frac{d\varphi(a, r)}{dr} \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{a\Gamma(1/4+i\beta)} (a-r)^{\frac{-3}{4}+i\beta} \varphi(a, r) \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

При выводе формул (2.8) и (2.9) использовано значение интеграла

$$\int_r^a \frac{ds}{\sqrt{s-r}(a-s)^\alpha} = (a-r)^{\frac{1}{2}-\alpha} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3/4-\alpha)}$$

и обозначение

$$\varphi(r, s) = \frac{s\psi(s)}{\sqrt{s+r}}$$

Легко проверить, что первые слагаемые в формулах (2.8) и (2.9) ограничены в точке  $r = a$ . Следовательно,

$$K_I + iK_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow a} [\sigma(r) + i\tau(r)] (a-r)^{\frac{3}{4}-i\beta} = \frac{\pi\Gamma(3/4+i\beta)}{\sqrt{2}a\Gamma(1/4+i\beta)} \varphi(a, a)$$

Подставляя значение функции  $\varphi(a, a)$ , окончательно получим:

$$K_I + iK_{II} = \frac{\Gamma(3/4+i\beta)q_2(2a)^{\frac{1}{4}-i\beta}}{i\sqrt{2}a\Gamma(1/4+i\beta)(1-q_2^2)} \int_{-a}^a \frac{F_2(s) ds}{\omega_2(s)(s-a)}$$

где  $K_I, K_{II}$  — коэффициенты интенсивности нормальных и тангенциальных напряжений, действующих в зоне контакта, в концевой точке трещины  $x = a$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. // ДАН СССР. 1940. Т.27 №4. С.330-334

2. Черепанов Г.П. Решение одной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып.5. С.907-912.
3. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. // В сб.: «Современные проблемы механики и авиации», посвященном И.Ф.Образцову. 1980. С.156-162.
4. Мхитарян С.М. Об одном классе смешанных задач теории упругости. Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis" Dedicated to the Centenary of Academician N. Muskhelishvili – Tbilisi, 1991. P.35.
5. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48, N4. С.57-65.
6. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной смешанной задаче для составного пространства с монетообразной трещиной. // В сб.: "Проблемы механики деформируемых тел", посв. 90-летию Н.Х. Арутюняна, Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2003. С.68-76.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи М.: Наука. 1977. 640с.

Институт механики  
НАН РА

Поступила в редакцию  
12.05.2005

УДК 539.3

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ОБЛАДАЮЩЕМ ОДНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Саакян Г. С., Саакян С. Г.

Գ. Ս. Սահակյան, Ս. Գ. Սահակյան

Առաձգական համաչափության մեկ հարթություն ունեցող անիզոտրոպ անհամասեռ առաձգական կիսատարածությունում ալիքների տարածման հակահարթ խնդիրը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ըստ խորության անհամասեռ, առաձգական համաչափության մեկ հարթություն ունեցող անիզոտրոպ առաձգական կիսատարածությունում զանգվածային իմպուլսի ներքին կետային աղբյուրից զրգրվող սահքի ծավալային ալիքների տարածման, ինչպես նաև ազատ եզրից նրանց անդրադարձման օրինաչափությունները: Խնդրի անալիտիկական լուծումը հնարավոր է եղել ստանալ մոդիֆիկացնելով Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների եղանակը: Մոդիֆիկացիայի էությունը կայանում է նրանում, որ կիրառելով կոնտուրային ինտեգրման եղանակը և Ֆուրյեի էքսպոնենցիալ ինտեգրալ ձևափոխությունը փոխարինելով կոսինուս-ձևափոխությունով՝ տրանսֆորմանտը հնարավոր է բերել հայտնի ֆունկցիաների Լապլասի ձևափոխությանը:

G. S. Sahakyan, S. G. Sahakyan

Antiplane Problem of the Propagation of Waves in Anisotropic Inhomogeneous Elastic Half-space Having a Plane of Elastic Symmetry

The antiplane problem of the propagation of waves from point source in anisotropic inhomogeneous elastic medium having a plane of elastic symmetry and occupying half-space is considered. The solution is obtained by bringing the equation of motion to quasi-wave equation with variable coefficient and with the term of point impulse source. Then, the problem is solved by developing the method of integral transformations and the solution is obtained in closed form. Analytical solution of the problem is succeeded in finding by modifying integral transformations of Laplace and Fourier, the crux of which is that by means of contour integration and replacement of exponential Fourier transform by cosine transformation, transformant of solution is given rise to Laplace transformation of known functions. Further, field of displacements of shear modes is investigated and the law of wave reflection from surface of anisotropic inhomogeneous elastic half-space is deduced.

Исследование волн, распространяющихся от точечного источника массовых сил в анизотропной неоднородной упругой среде, имеет важные приложения в сейсмологии и смежных с ней научных областях, в том числе для решения таких важных прикладных проблем, какими являются прогнозирование землетрясений, идентификация подземных атомных взрывных волн малой мощности и их отличие от сейсмических. Динамика волн, распространяющихся от внутреннего точечного источника массовых сил в неоднородных изотропных упругих средах рассмотрена в [1,2] методом обобщенных потенциалов. Решение антиплоской задачи для однородного упругого полупространства с однородным слоем получено в [3], а для некоторых вертикально-неоднородных сред – в [4,5]. В работах [6-9] исследованы антиплоские задачи для трещины в анизотропной однородной упругой среде, а в [10] – для среды малой и произвольной неоднородности.

В настоящей работе рассматривается антиплоская задача распространения сдвиговых волн в неоднородном по глубине, анизотропном упругом полупространстве, обладающем одной плоскостью упругой симметрии от внутреннего точечного источника массовых сил. Аналитическое решение задачи удалось найти, модифицируя метод интегральных преобразований Лапласа и Фурье, суть которого заключается в том, что путем контурного интегрирования и заменой экспоненциального преобразования Фурье на косинус-

преобразование, трансформант решения можно привести к преобразованию Лапласа известных функций. Далее, исследовано поле смещения сдвиговых волн и получен закон отражения волн от границы неоднородного анизотропного упругого полупространства.

1. Исследуется волновое поле сдвиговых волн в анизотропной линейно-упругой среде, которая в декартовой координатной системе  $oxyz$  занимает полупространство  $y > 0$ , является неоднородной по оси  $y$  и обладает одной плоскостью упругой симметрии, которую примем за плоскость  $oxz$ . Примерами тел, имеющих одну плоскость симметрии упругих свойств, являются кристаллы моноклинной системы. Пусть плотность и модули упругости неоднородного анизотропного упругого полупространства непрерывно изменяются по оси  $y$ . Тогда, такая среда математически описывается, кроме функции плотности  $\rho(y)$ , еще функциями модулей упругости  $c_{11}(y)$ ,  $c_{22}(y)$ ,  $c_{33}(y)$ ,  $c_{44}(y)$ ,  $c_{55}(y)$ ,  $c_{66}(y)$ ,  $c_{12}(y)$ ,  $c_{13}(y)$ ,  $c_{23}(y)$ ,  $c_{16}(y)$ ,  $c_{26}(y)$ ,  $c_{36}(y)$ ,  $c_{45}(y)$ . В антиплоской задаче компоненты вектора смещения имеют вид  $u_x = u_y = 0$ ,  $u_z = u(x, y, t)$  и напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  определяются законом Гука [11]

$$\tau_{xz} = c_{55} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{45} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = c_{45} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

В (1.1) из 13 модулей упругости среды входят только три:  $c_{44}(y)$ ,  $c_{45}(y)$  и  $c_{55}(y)$ .

Примем, что плотность  $\rho = \rho_0 \varphi(y)$  и модули упругости  $c_{55} = a_1^0 \varphi(y)$ ,  $c_{45} = a_{12}^0 \varphi(y)$ ,  $c_{44} = a_2^0 \varphi(y)$ , где  $\varphi(y)$  – непрерывно дифференцируемая функция в  $(0; +\infty)$ ;  $\rho_0$ ,  $a_1^0$ ,  $a_{12}^0$  и  $a_2^0$  – некоторые положительные постоянные. Тогда, основное уравнение волнового поля в моноклинном анизотропном неоднородном полупространстве, возбужденного от импульса массовых сил  $I_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(t)$ , где  $I_0$  – постоянная,  $\delta(x)$  – функция Дирака, будет

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(t) \quad (1.2)$$

Условие, что на границе полупространства напряжения равны нулю, принимает вид

$$y = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) в (1.2) и вводя новые переменные

$$x_1 = x - (a_{12}^2 / a_2^2) y, \quad y_1 = (a / a_2^2) y \quad (1.4)$$

где  $a_1^2 = a_1^0 / \rho_0$ ,  $a_2^2 = a_2^0 / \rho_0$ ,  $a_{12}^2 = a_{12}^0 / \rho_0$ ,  $a^2 = a_1^2 a_2^2 - a_{12}^4$ , получим следующие соотношения:

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0 \Phi} = a \frac{\partial u}{\partial y_1} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{a_2^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a_2^2}{a^2} I_0 \delta(x_1 + \frac{a_{12}}{a} y_1) \delta(y_1 - y_{10}) \delta(t) \quad (1.6)$$

Полагая в (1.6)  $\Phi(y) = \exp(y/h)$  и вводя функцию

$$u = \exp(-\alpha y_1) \cdot w(x_1, y_1, t) \quad (1.7)$$

где  $h$  – характерная глубина неоднородности,  $\alpha = a_2^2 / (2ah)$ , из (1.5) и (1.6) получим

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0} = a \exp(-\alpha y_1) \left( \frac{\partial w}{\partial y_1} - \alpha w \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - \alpha^2 w = \frac{a_2^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{a_2^2 I_0}{a^2 \rho_0} \exp(\alpha y_1) \delta(x_1 + \frac{a_{12}}{a} y_1) \delta(y_1 - y_{10}) \delta(t) \quad (1.9)$$

Граничное условие (1.3) будет

$$y_1 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y_1} - \alpha w = 0 \quad (1.10)$$

2. Граничную задачу (1.9) и (1.10) можно решить методом интегральных преобразований [12]. Применим к (1.9) и (1.10) преобразование Лапласа по  $t$

$$W_L(x_1, y_1, s) = \int_0^{\infty} w(x_1, y_1, t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

а затем, к полученным уравнениям – преобразование Фурье по  $x_1$

$$W_{LF}(k, y_1, s) = \int_{-\infty}^{\infty} W_L(x_1, y_1, s) e^{-ikx_1} dx_1 \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (1.9) и граничное условие (1.10) для трансформанты  $W_{LF}(k, y_1, s)$  будут

$$\frac{d^2 W_{LF}}{dy_1^2} - (k^2 + \frac{a_2^2 s^2}{a^2} + \alpha^2) W_{LF} = \frac{I_0 a_2^2}{\rho_0 a^2} \exp\left[\left(\alpha + \frac{ika_{12}^2}{a}\right) y_1\right] \delta(y_1 - y_{10}) \quad (2.3)$$

$$y_1 = 0, \quad \frac{dW_{LF}}{dy_1} - \alpha W_{LF} = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) имеет систему фундаментальных решений

$$W_{LF}^{(1)}(k, y_1, s) = \exp(-ny_1), \quad W_{LF}^{(2)}(k, y_1, s) = \exp(ny_1) \quad (2.5)$$

где ветвь радикала  $n = \sqrt{k^2 + (a_2 s/a)^2 + \alpha^2}$  определена по условию:  $\arg n = 0$  при  $k > 0$  и  $s > 0$ .

Определим ограниченное решение неоднородного уравнения (2.3) в виде

$$W_{LF}(k, y_1, s) = \begin{cases} A \exp(ny_1) + B \exp(-ny_1), & 0 < y_1 < y_{10} \\ C \exp(-ny_1), & y_{10} < y_1 < +\infty \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – некоторые величины, удовлетворяющие условиям:

$$W_{LF}(k, y_{10} + 0, s) = W_{LF}(k, y_{10} - 0, s) \quad (2.7)$$

$$\frac{dW_{LF}(k, y_{10} + 0, s)}{dy_1} - \frac{dW_{LF}(k, y_{10} - 0, s)}{dy_1} = \frac{I_0 a_2^2}{\rho_0 a^2} \exp\left[\left(\alpha + \frac{ika_{12}^2}{a}\right)y_{10}\right] \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) в (2.4), (2.7) и (2.8), получим относительно  $A$ ,  $B$  и  $C$  систему уравнений первой степени. Решая эту систему и подставляя  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (2.6), получим функцию Грина:

$$W_{LF} = \frac{I}{n} \exp\left[\left(\alpha + \frac{ika_{12}^2}{a}\right)y_{10}\right] \left[ \begin{aligned} & \exp(-n|y_1 - y_{10}|) - \exp(-n(y_1 + y_{10})) + \\ & + \frac{2n}{n + \alpha} \exp(-n|y_1 - y_{10}|) \end{aligned} \right] \quad (2.9)$$

где  $I = -I_0 a_2^2 / (2\rho_0 a^2)$ .

Для нахождения  $W_L(x_1, y_1, s)$  по (2.9) применим к нему обратное преобразование Фурье по  $k$ :

$$W_L(x_1, y_1, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{LF}(k, y_1, s) e^{-ikx_1} dk \quad (2.10)$$

В (2.10) подынтегральное выражение является четной по  $k$  функцией. Это дает возможность экспоненциальное преобразование Фурье заменить на косинус-преобразование. В результате получим косинус-преобразование известной функции [12, стр. 26 (26)]:

$$W_L(x_1, y_1, s) = \frac{I}{2\pi} \exp(\alpha y_{10}) \left[ \begin{aligned} & W_L^{(1)}(x_1, y_1, s) - W_L^{(2)}(x_1, y_1, s) + \\ & + W_L^{(3)}(x_1, y_1, s) \end{aligned} \right] \quad (2.11)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$W_L^{(1)} = K_0 \left( \sqrt{\left[ \frac{a_2^2 s^2}{a^2} + \alpha^2 \right] \left[ \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right)^2 + (y_1 - y_{10})^2 \right]} \right) \quad (2.12)$$

$$W_L^{(2)} = K_0 \left( \sqrt{\left[ \frac{a_2^2 s^2}{a^2} + \alpha^2 \right] \left[ \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right)^2 + (y_1 + y_{10})^2 \right]} \right) \quad (2.13)$$

$$W_L^{(3)} = 2 \exp[\alpha(y_1 + y_{10})] \int_0^{\infty} \frac{\exp[-(n + \alpha)(y_1 + y_{10})]}{n + \alpha} \cos \left[ k \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right] dk \quad (2.14)$$

Изображения преобразования Лапласа (2.12) и (2.14) являются табличными [12, с.250 (45)]. Для их оригиналов  $w^{(1)}(x_1, y_1, t)$  и  $w^{(2)}(x_1, y_1, t)$  имеем:

$$w^{(1)} = \frac{H \left( t - \frac{a_2}{a} \sqrt{\left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right)^2 + (y_1 - y_{10})^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right]^2 - \left[ \frac{a_2}{a} (y_1 - y_{10}) \right]^2}} \times$$

$$\times \cos \left[ \frac{a\alpha}{a_2} \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right]^2 - \left[ \frac{a_2}{a} (y_1 - y_{10}) \right]^2} \right] \quad (2.15)$$

$$w^{(2)} = \frac{H \left( t - \frac{a_2}{a} \sqrt{\left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right)^2 + (y_1 + y_{10})^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right]^2 - \left[ \frac{a_2}{a} (y_1 + y_{10}) \right]^2}} \times$$

$$\times \cos \left[ \frac{a\alpha}{a_2} \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right]^2 - \left[ \frac{a_2}{a} (y_1 + y_{10}) \right]^2} \right] \quad (2.16)$$

Для нахождения оригинала  $w^{(3)}(x_1, y_1, t)$  по изображению (2.14) необходимо иметь в виду, что преобразование Лапласа от  $F(s) = (s + \alpha_0)^{-1} \exp[-(s + \alpha_0)\beta_0]$  есть  $f(t) = H[t - \beta_0] \exp(-\alpha_0 t)$ , а  $F(\sqrt{s^2 + \alpha_1^2})$  определяется формулой [12, стр. 205 (6)]:

$$F(\sqrt{s^2 + \alpha_1^2}) \div \int_0^t f(t') J_0(\alpha_1 \sqrt{t^2 - t'^2}) dt' \quad (2.17)$$

Совершая обратное преобразование Лапласа от  $W_L^{(3)}$ , получим

$$w^{(3)} = 2e^{\alpha(y_1 + y_{10})} \int_0^{\infty} \int_{\frac{a_2}{a}(y_1 + y_{10})}^t \exp\left(-\frac{\alpha a}{a_2} t'\right) J_0\left(\frac{a}{a_2} \sqrt{(k^2 + \alpha^2)(t^2 - t'^2)}\right) dt' \times$$

$$\times \cos \left[ k \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right] dk \quad (2.18)$$

Меняя порядок интегрирования в (2.18) и учитывая формулу [12, стр.57 (35)], имеем

$$w^{(3)} = 2e^{\alpha(y_1+y_{10})} H \left( t - \frac{a_2}{a} \sqrt{\left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right)^2 + (y_1 + y_{10})^2} \right) \times$$

$$\times \int_{\frac{a_2}{a}(y_1+y_{10})}^t \frac{\exp\left(-\frac{a\alpha}{a_2} t'\right)}{\sqrt{t_*^2 - t'^2}} \cos\left(\frac{a\alpha}{a_2} \sqrt{t_*^2 - t'^2}\right) dt' \quad (2.19)$$

$$\text{где } t_{*1} = \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10} \right) \right]^2}.$$

Окончательно, решение  $u(x, y, t)$ , согласно формулам (1.4), (1.7) и (2.11), будет

$$u(x, y, t) = -\frac{I_0 a_2^2}{2\pi \rho_0 a^2} \exp\left(-\frac{y_0}{2h}\right) \left\{ \frac{H \left( t - \sqrt{\left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 + \left( \frac{y - y_0}{a_2} \right)^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 - \left( \frac{y - y_0}{a_2} \right)^2}} \times \right.$$

$$\times \cos \left( \frac{a}{2a_2 h} \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 - \left( \frac{y - y_0}{a_2} \right)^2} \right) -$$

$$\frac{H \left( t - \sqrt{\left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 + \left( \frac{y + y_0}{a_2} \right)^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 - \left( \frac{y + y_0}{a_2} \right)^2}} \times$$

$$\times \cos \left( \frac{a}{2a_2 h} \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 - \left( \frac{y + y_0}{a_2} \right)^2} \right) +$$

$$\left. + 2 \exp\left(\frac{y + y_0}{2h}\right) H \left( t - \sqrt{\left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a^2} (y - y_0) \right) \right]^2 + \left( \frac{y + y_0}{a_2} \right)^2} \right) \times \right. \quad (2.20)$$

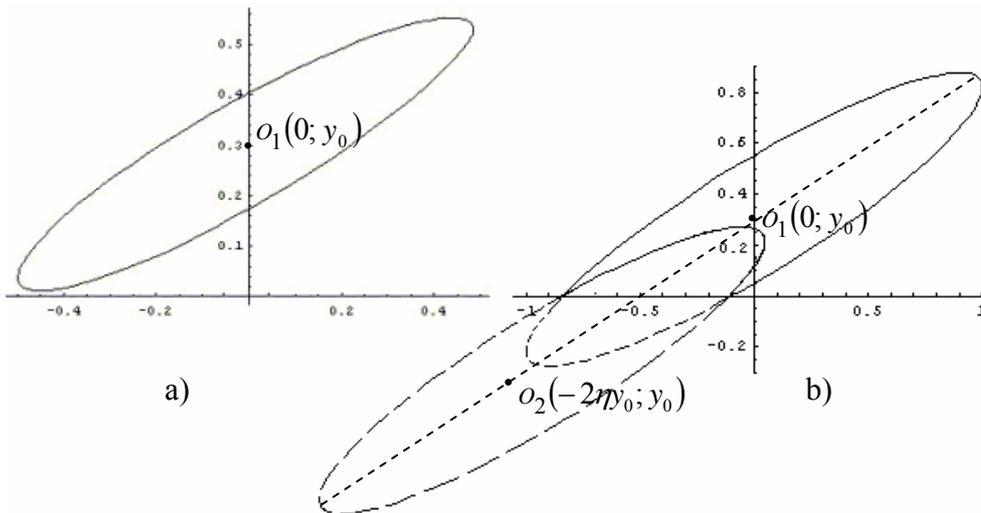
$$\left. \times \int_{\frac{y+y_0}{a_2}}^t \frac{\exp\left(-\frac{a_2 t'}{2h}\right)}{\sqrt{t_*^2 - t'^2}} \cos\left(\frac{a_2}{2h} \sqrt{t_*^2 - t'^2}\right) dt' \right\}$$

где  $t_* = \sqrt{t^2 - \left[ \frac{a_2}{a} \left( x - \frac{a_{12}^2}{a_2^2} (y - y_0) \right) \right]^2}$ .

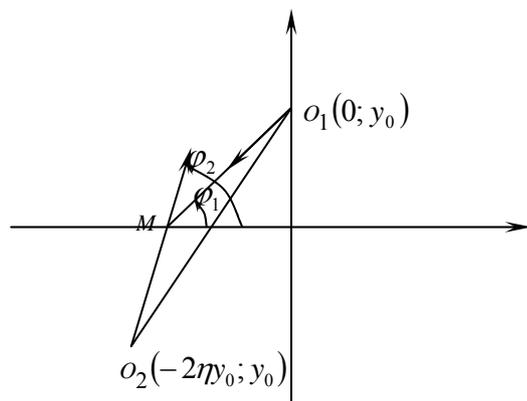
Таким образом, в неоднородном по глубине анизотропном упругом полупространстве от внутреннего точечного источника массовых сил до характерного времени  $t = t_*$  распространяется сдвиговая волна с эллиптическим фронтом  $y = y_0 + \gamma^{-1} \left( \eta x \pm \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{(a_1 t)^2 - x^2} \right)$ ,  $y > 0$ , где  $\gamma = a_1/a_2$ ,  $\eta = a_{12}^2/(a_1 a_2)$ . Начиная с времени  $t = t_*$ , падающая сдвиговая волна отражается от границы среды. Отраженная волна распространяется с эллиптическим фронтом

$$y = (2\eta^2 - 1)y_0 + \gamma^{-1} \left( \eta x \pm \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{(a_1 t)^2 - (x + 2\eta y_0)^2} \right), \quad y > 0,$$

с центром в точке  $O_2(-2\eta y_0; -y_0)$ . Этот центр эллиптического фронта отраженной волны центрально симметричен относительно границы среды с точкой  $O_1(0; y_0)$ , где приложен точечный источник массовых сил (фиг. 1). При этом, известный закон отражения волн от границы однородной изотропной среды не имеет места. В неоднородных анизотропных средах отраженная волна от границы среды в ее любой точке  $M$  уже имеет направление луча  $O_2M$ , которое получается зеркальным отражением падающего луча  $O_1M$  относительно границы среды и вращением его вокруг нормали границы на полуоборот (фиг. 2). Между углом падающей волны  $\varphi_1$  и углом отраженной волны  $\varphi_2$  имеет место соотношение  $\text{tg } \varphi_2 = \text{tg } \varphi_1 / (2\eta \text{tg } \varphi_1 - 1)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

$h \rightarrow \infty$  – анизотропной однородной среды [8]. Во всех этих случаях смещение на фронтах падающей и отраженной волн имеет особенность одного порядка  $-1/2$ .

Следует отметить, что амплитуды волн зависят, кроме координат наблюдаемой точки, от характерных величин: плотности и модулей упругости анизотропной неоднородной среды, т. е. от их значений при  $y = 0$ . Из решения (2.20) при  $a_{12} = 0$  ( $\eta = 0$ ) получается решение аналогичной задачи для неоднородной изотропной среды [10], а при

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гук Дж. Функция Грина для осесимметричных упругих волн в неограниченной неоднородной среде, имеющих постоянные градиенты скорости. // Прикладная механика. Сер. Е. (Тр. Амер. Об-ва инж.-мех.) 1965. Т. С. 85-93.
2. Саакян С. Г. Распространение волн от точечного источника в слоисто-неоднородном изотропном упругом полупространстве. // Механика. Межвуз. сб. научн. тр. 1989. Вып. 7. С. 98-106.
3. Mitra M. An SH-point source in a halfspace with a layer. // Bulletin of the Seismological Society of America. 1963. Vol. 53. № 5. P. 1031-1037.
4. Белубекян М. В., Мухсихачоян А. Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих средах. // Акустический журнал. 1996. Т. 42. № 2. С. 179-182.
5. Саакян С. Г., Варданян И. А. Фундаментальное решение антиплоской задачи для вертикально-неоднородной упругой среды. // Доклады НАН Армении. 1999. Т. 99. №4. С. 328-333.
6. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. // МТТ. 1979. № 4. С. 54-73.
7. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 2. М.: Мир. 1983. С. 525-880.

8. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042-1049.
9. Поручиков Б. В. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с.
10. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. Антиплоская задача распространения трещины с произвольной скоростью в анизотропной неоднородной упругой среде. // МТТ. 2002. № 2. С. 145-154.
11. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука. 1982. 424 с.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука. 1969. 343 с.

Ереванский государственный университет  
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию  
25.01.2005

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ  
СИЛАМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ НА СВОБОДНОМ КРАЮ

Багдасарян З.Р., Белубекян М.В.

Զ.Ռ. Բաղդասարյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան

Ընդլայնական սահքերի ազդեցությունը, ազատ եզրում կիրառված ուժերով ծովող սալի խնդրում

Մ.Ա.Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության հիման վրա, ներկայացվող աշխատանքում դիտարկված են կիսաանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդիրներ, երբ բեռը կիրառված է սալի ազատ եզրում:

Ցույց է տրված, որ դիտարկվող խնդիրներում Կիրխոֆի հիպոթեզի ճշտությունը սալի հարաբերական հաստության առհամարհումն է մեկի նկատմամբ, ի տարբերություն ընդունված ճշտության, համաձայն որի մեկի նկատմամբ առհամարհվում է սալի հարաբերական հաստության քառակուսին:

Կատարված է նաև թվային հաշվարկ և ցույց է տրված, որ սալի ճկվածքի փոփոխությունը՝ կախված նրա հարաբերական հաստությունից, էապես է կախված ընդլայնական սահքերի հաշվառումից:

Z.R. Baghdasaryan, M.V. Belubekyan

Influence of transversal shear at a bend of a plate with the forces enclosed at free edge

In present article problems of a bend of a plate when loading is enclosed at free edge are considered.

It is shown, that in this case accuracy of hypothesis Kirghoff is neglect relative thickness in comparison with unit, as against the accepted accuracy of a square of relative thickness in comparison with unit.

The resulted numerical values of change of a deflection of a plate depending on relative thickness show essential influence of the account of cross-section shifts

Согласно теории пластин Кирхгофа на каждом краю прямоугольной пластинки должны быть заданы два граничных условия. Однако из допущений гипотезы Кирхгофа, в общем случае, для каждого края получаются три граничных условия. Во многих случаях одно из граничных условий удовлетворяется тождественно. При других случаях, например, для свободного края, три условия заменяются альтернативными (приближенными) двумя условиями. В этих случаях теории, учитывающие поперечные сдвиги, позволяют удовлетворить трем граничным условиям точно.

В настоящей статье, на основе уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], рассматриваются задачи изгиба пластины, когда нагрузка приложена на свободном краю. Показывается, что в этом случае точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной по сравнению с единицей, в отличие от принятой точности квадрата относительной толщины по сравнению с единицей.

Приведенные численные значения изменения прогиба пластинки в зависимости от относительной толщины показывают существенное влияние учета поперечных сдвигов.

1. Полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины  $2h$  занимает область  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Уравнения равновесия пластинки по теории С. А. Амбарцумяна при отсутствии поперечной нагрузки имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W + \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] - \frac{4h}{3} \varphi_1 = 0 \quad (1.1) \\
& -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W + \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] - \frac{4h}{3} \varphi_2 = 0
\end{aligned}$$

где  $W$  – функция прогиба,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяют перерезывающие усилия (или углы поворота)

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Предполагается, что края пластинки  $y = 0, b$  шарнирно закреплены, свободный край  $x = 0$  пластинки загружен либо изгибающим моментом, либо крутящим моментом, либо перерезывающей силой. Требуется, чтобы выполнялись условия затухания

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_2(x, y) = 0 \quad (1.2)$$

Аналогичная задача для полубесконечной пластинки (неограниченной по координате  $y$ ) рассматривалась в [1,3]. В [4] приводится частное решение указанной задачи.

Решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющих граничным условиям шарнирного закрепления и условиям затухания (1.2), имеет вид

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\lambda_n x} + B_n x e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y \\
\varphi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{3D}{2h} \lambda_n^2 B_n e^{-\lambda_n x} + C_n e^{-\lambda_n \mu_n x} \right) \sin \lambda_n y \\
\varphi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3D}{2h} \lambda_n^2 B_n e^{-\lambda_n x} - \mu_n C_n e^{-\lambda_n \mu_n x} \right) \cos \lambda_n y
\end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{b}, \quad \mu_n = \frac{\sqrt{1 + \xi_n^2}}{\xi_n}, \quad \xi_n = \sqrt{\frac{2}{5}} \lambda_n h \quad (1.4)$$

2. Пусть свободный край  $x=0$  пластинки загружен изгибающим моментом [1,3]

$$M_1 = M_1(y), \quad H = 0, \quad N_1 = 0 \quad (2.1)$$

Условия (2.1) в обозначениях статьи [2] имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) &= -\frac{M_1(y)}{D} \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 0
\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\varphi_1 = 0$$

где  $G$ —модуль сдвига.

После представления  $M_1(y)$  в виде ряда Фурье

$$M_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y \quad (2.3)$$

и подстановки, вместе с (1.3), в граничные условия (2.1), получается система уравнений относительно произвольных постоянных  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$ .

После определения произвольных постоянных, окончательное решение задачи приводится к виду

$$\begin{aligned} W(x, y) &= -\frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\eta_n \lambda_n^2} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} - \lambda_n x \right) e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y \\ \varphi_1(x, y) &= -\frac{3}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n}{\eta_n} \left( e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_n \mu_n x} \right) \sin \lambda_n y \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{3}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n}{\eta_n} \left( e^{-\lambda_n x} - \mu_n e^{-\lambda_n \mu_n x} \right) \cos \lambda_n y \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\eta_n = 3 + \nu - 4\xi_n \sqrt{1 + \xi_n^2} + 4\xi_n^2 \quad (2.5)$$

Выражение для прогиба  $W$  из (2.4) совпадает с решением по теории пластин Кирхгофа, если принять  $\xi_n \ll 1$ . Т.е. для рассматриваемой задачи точность гипотезы Кирхгофа есть относительная толщина, а не квадрат относительной толщины, как принято считать.

Для сравнения рассматривается частный случай задания изгибающего момента (2.3)

$$M_1(y) = a_1 \sin \lambda_1 y \quad (2.6)$$

Тогда отношение прогиба с учетом сдвигов ( $W_s$ ) к прогибу, определенному по теории Кирхгофа ( $W_k$ ), задается формулой

$$\frac{W_s}{W_k} \approx \left( 1 - \frac{4}{3+\nu} \xi_1 \sqrt{1 - \xi_1 + \xi_1^2} \right)^{-1} \quad (2.7)$$

Из (2.7) получается также следующая формула в приближении  $\xi_1^2 \ll 1$ :

$$\frac{W_s}{W_k} \approx \left( 1 - \frac{4}{3+\nu} \xi_1 \sqrt{1 - \xi_1} \right)^{-1} \quad (2.8)$$

В табл. 1 приводятся значения отношений прогибов, вычисленных по формулам (2.7) и (2.8) при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,2$  для различных значений параметра  $\xi_1$ .

Таблица 1

$\xi_1$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$W_s / W_k$ (2.7)	1.0125	1.0025	1.1275	1.2579	1.3870	1.5117

(2.8)	1.0127	1.0667	1.1429	1.3333	1.6	2.0
-------	--------	--------	--------	--------	-----	-----

33331.62.0 Следует отметить, что  $\xi_1 = 0,01$  значению соответствует относительная толщина  $2h/b \approx 0,01$  пластинки, а  $\xi_1 = 0,1$  значению  $\xi_1 = 0,4$  чениям и, соотв  $2h/b \approx 0,078$  етс  $2h/b \approx 0,33$  т

венно, и .Из табл. 1 видно, что, начиная со значения относительно  $2h/b = 0,1$  й толщины, влияние поперечных сдвигов существенно. Необходимо также отметить, что в приведенном примере коэффициент Пуассона слабо влияет на полученные численные р

езультаты.Решение вида (2.4) дл  $W$  я прогиба получается также при использовании уточненной теории первого порядка типа Рейснера [5,6], с той лишь разницей, что  $\xi_n$  параметр из (1.4) необходимо з

а 
$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_n h$$
 менить

на (2.9)Перерезывающие усилия, согласно [1], определяются следующие

м 
$$N_1 = \frac{4h}{3} \varphi_1, N_2 = \frac{4h}{3} \varphi_2$$
 образ

ом: (2.10)В частности, из (2.4) и (2.10)

$$N_2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n}{\eta_n} (e^{-\lambda_n x} - \mu_n e^{-\lambda_n \mu_n x}) \cos \lambda_n y$$
 получа

ется(2.11)откуда также получаютс опорные ре  $y = 0, b$  а

кции при .Для сравнения приводится выражение для поперечной нагрузки по теории

и 
$$N_2 = \frac{2}{3 + \nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y$$
 Кирхг

офа (2.12)Очевидно, что при малых  $x$  значениях, т.е. в окрестности угловых точек пластинки, поперечные нагрузки, вычисленные по формулам (2.11) и (2.12), будут существенно отличаться друг от друга. Это обстоятельство было отмечено в [7] на основе исследования задачи изгиба прямоугольной пластинки по теории

Рейснера.В частном случае задания изгибающего момента (2.6) результаты вычислений опорных реакций по формулам (2.11) и (2.12) будут мало отличаться (меньше десяти процентов) пр

и 
$$\xi_1 < 0.1, \quad \frac{x}{2h} \gg \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\ln(\xi_1^{-1} \sqrt{1 + \xi_1^2})}{\sqrt{1 + \xi_1^2} - \xi_1}$$
 услов

иях (2.13)Из (2.11) и (2.13) следует, что вк  $\mu_n \exp(-\lambda_n \mu_n x)$  лад члена быстро уменьшается при удалени  $x = 0$  и от края пластинки. Численные результаты показывают  $\xi_1 = 0,01$ , что при п  $x/(2h) \approx 1,471$  олучаетс  $\xi_1 = 0,05$  я,  $\xi_1 = 0,1$  а при и, соотве  $x/(2h) \approx 1,329$  тст  $x/(2h) \approx 0,809$ .

венно, и 3. Рассматривается задача изгиба полубесконечной пластинки-полосы, когда полубесконечные края шарнирно закреплены и свободный

конечный край загружен перерезывающим усилием. В этом случае граничные условия  $x = 0$  я на краю имеют

$$M_1 = 0, H = 0, N_1 = N_1(y) \quad \text{т вид}$$

[1] (3.1) или в обозначениях с

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{ьи [2]}$$

$$\varphi_1 = \frac{3}{4h} N_1(y)$$

(3.2) Представляя перерезывающую нагрузку в

$$N_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n y \quad \text{виде}$$

ряда (3.3) и подставляя вместе с (1.3) в граничные условия (3.2), получим систему уравнений относительно произвольных  $A_n$ ,  $B_n$  ост  $C_n$

$$(1-\nu)\lambda_n A_n - 2(1+2\xi_n^2)B_n + \frac{4\mu_n}{5G}(1-\nu)C_n = 0$$

$$\lambda_n A_n + \left(1 + \frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\right)B_n - \frac{2\mu_n^2}{5G}C_n = \frac{3b_n}{10Gh} \quad \text{нных}$$

$$-\frac{3D\lambda_n^2}{2h}B_n + C_n = \frac{3b_n}{4h}$$

и (3.4) Из системы (3.4) произвольные постоянные определяются следующим

$$A_n = \frac{2b_n}{(1-\nu)D\lambda_n^3} \cdot \frac{(1+2\xi_n^2)^2 - \xi_n(1-\nu+4\xi_n^2)\sqrt{1+\xi_n^2}}{1-\nu-4\xi_n\sqrt{1+\xi_n^2}+4\xi_n^2} \quad \text{о}$$

$$B_n = -\frac{(1+2\xi_n^2)b_n}{(1+\nu)D\lambda_n^2} - \frac{\lambda_n}{\theta} A_n \quad \text{разом}$$

$$C_n = -\frac{3(1-\nu+4\xi_n^2)}{4(1+\nu)h} - \frac{3D\lambda_n^3}{2h\theta} A_n$$

(3.5) Если в (3.5)  $\xi_n^2 \ll 1$  принять, что соответствует точности пластин теории Кирхгофа, в частности, для  $A_n$  остоянной будем иметь

$$A_n \approx \frac{2[1-(1-\nu)\xi_n]}{(1-\nu)(1-\nu-4\xi_n)D\lambda_n^3} b_n \quad \text{выраж}$$

ение (3.6) с  $\xi_n^2 \ll 1$  точностью функция прогиба получае

$$W(x, y) \approx \frac{2}{(1-\nu)D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^3(1-\nu-4\xi_n)} [1-(1-\nu)\xi_n] \sin \lambda_n x \sin \lambda_n y$$

$$y + 0,5(1-\nu)(1+2\xi_n)\lambda_n x] e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y \quad \text{в вид}$$
 (3.7) В этом же приближении реакции опор  $n$  у  $= 0$ ,  $b$  а кромках определяются

и
 
$$N_2 \approx 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-\lambda_n x} - \frac{5-3\nu-8\xi_n}{2(1-\nu-4\xi_n)} \mu_n e^{-\lambda_n \mu_n x} \right] b_n \cos \lambda_n y \quad \text{з фор}$$

мулы (3.8) Аналогичные результаты получаются также для случая, когда край  $x = 0$  нагружен крутящим моментом [4], т.е., когда зада

$$M_1 = 0, \quad H = H_0(y), \quad N_1 = 0 \quad \text{ы усло}$$

вия (3.9) Л

1. ИТЕРАТУРА Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: (Проблемы механики тонких деформируемых тел). Ереван. Изд. (Гитутюн) НАН Армении. 2002. С.67-88.
3. Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю.// Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук. 1965. Т.18. № 2.
4. С. 39-47. Ананян А.К., Хачатрян А.А. К задаче полубесконечной пластинки-полосы, нагруженной по прямоугольной кромке.// Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. № 1.
5. С. 70-77. Reissner E. (The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.// Journ. Applied Mech. 1945. V.12. P. A69-A77.
6. Васильев В.В. Классическая теория пластин-история и современный анализ.// Изв. РАН. МТТ. 1998. 13
7. С. 46-58. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин.// Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 140-150.

Институт  
в редакцию

механики Поступила  
АН Армении

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛКИ С ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО, НО  
СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ОПОРАМИ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Гнуни В.Ц.

Վ.Ց. Գնունի

Երկու կամայական, բայց համաչափ դասավորված հենարաններով  
հեծանի կայունությանը հետևող բեռի ազդեցության դեպքում

Ուսումնասիրված է սեղմվող հեծանի կայունության ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը, երբ հեծանի երկու հենարանները տեղադրված են համաչափ ծայրերից կամայական հեռավորությունների վրա: Սեղմող բեռը համարվում է հետևող: Ստացվել է խնդրի կրիտիկական պարամետրերը որոշող հավասարումը և ցույց տրվել կայունության կորստի ստատիկական ձևերի հնարավորությունը: Որոշել են բեռի կրիտիկական արժեքները:

V.Ts. Gnuni

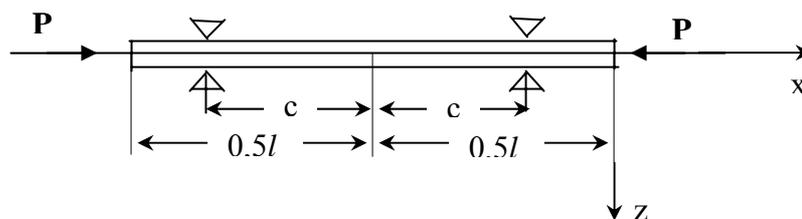
**The stability of beam with two billeting arbitrarily, but symmetrical support under action of follow loading**

The unconservative stability problem of pressing beam when two support billeting symmetrical on arbitrarily distance from the end is considered. It is show the possibility statical form loss of stability. The critical loads are determined.

Исследована неконсервативная задача устойчивости свободно опертой сжатой балки, когда две опоры расположены симметрично на произвольных от концов балки расстояниях. Считается, что сжимающая нагрузка следящая. Получено частотное уравнение, определяющее критические параметры задачи. Показывается возможность дивергентной (статической) формы потери устойчивости. Определены критические нагрузки.

Известно, что при применении статического подхода (метода Эйлера) получается, что консольная балка, сжатая следящей силой (балка Бекка), всегда устойчива [1,2]. Однако, есть примеры задач устойчивости балки со следящей силой, когда возможна статическая форма потери устойчивости [3,4]. Обзор неконсервативных задач устойчивости балки приводится в [5,6].

1. Пусть упругая балка длины  $l$  сжата следящей силой  $P$  и опирается на две опоры, расположенные на расстоянии  $c$  от середины балки (фиг.1).



Фиг.1

Уравнение колебаний балки представляется в виде [1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + \frac{Pl^2}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{PSl^4}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где  $w(\bar{x}, t)$  – прогиб,  $\bar{x} \in [-(0,5 + \alpha); (0,5 - \alpha)]$ ,  $\bar{x} = x/l$  – безразмерная координата по длине балки,  $\alpha = c/l \in [0; 0,5]$ ,  $t \geq 0$  – время,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $I$  – момент инерции,  $S$  – площадь поперечного сечения балки.

Функция  $w(\bar{x}, t)$  ищется в виде

$$w(\bar{x}, t) = \begin{cases} f_3(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in [-(0,5 + \alpha); -2\alpha] \\ f_1(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in (-2\alpha; 0) \\ f_2(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in (0; (0,5 - \alpha)] \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\omega$  – искомая частота собственных колебаний нагруженной силой  $P$  балки.

Подстановкой (1.2) в (1.1), для определения искомых  $f_i(\bar{x})$  получается

$$f_i^{IV} + \bar{P}f_i'' - \bar{\omega}^2 f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где

$$\bar{P} = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{PS}{EI}} l^2 \omega \quad (1.4)$$

–соответствующие приведенные значения сжимающей силы и частот собственных колебаний.

На концах балки имеются граничные условия свободного края.

$$f_3''(\bar{x}) = 0, \quad f_3'''(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} = -(0,5 + \alpha) \quad (1.5)$$

$$f_2''(\bar{x}) = 0, \quad f_2'''(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} = 0,5 - \alpha \quad (1.6)$$

На опорах  $\bar{x} = -2\alpha$ ,  $\bar{x} = 0$  должны удовлетворяться условия совместности решений

$$f_3 = f_2 = 0, \quad f_3' = f_2', \quad f_3'' = f_2'' \quad \text{при } \bar{x} = -2\alpha \quad (1.7)$$

$$f_2 = f_1 = 0, \quad f_2' = f_1', \quad f_2'' = f_1'' \quad \text{при } \bar{x} = 0 \quad (1.8)$$

Если разделить колебания балки на симметричные и антисимметричные, то можно рассматривать лишь половину балки. Тогда в середине балки должны быть удовлетворены условия симметрии

$$f_1'(\bar{x}) = 0, \quad f_1'''(\bar{x}) = 0, \quad \text{при} \quad \bar{x} = -\alpha \quad (1.9)$$

при этом  $f_3(x) = f_2(x)$ , или условия антисимметрии

$$f_1(\bar{x}) = 0, \quad f_1'' = 0 \quad (1.10)$$

при этом  $f_3(\bar{x}) = -f_2(\bar{x})$ .

2. В случае симметричных колебаний в (1.3)  $i = 1$  и  $i = 2$  при граничных условиях (1.1) и условиях совместности (1.8).

Решения (1.3) при  $i = 1, 2$  представляются в виде

$$f_i(\bar{x}) = u_i \operatorname{ch} \gamma_i \bar{x} + b_i \operatorname{sh} \gamma_i \bar{x} + c_i \cos \gamma_2 \bar{x} + d_i \sin \gamma_2 \bar{x} \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_1 = \left[ \left( 0,25\bar{P}^2 + \bar{\omega}^2 \right)^{0,5} - 0,5\bar{P} \right]^{0,5}, \quad \gamma_2 = \left[ \left( 0,25\bar{P}^2 + \bar{\omega}^2 \right)^{0,5} + 0,5\bar{P} \right]^{0,5} \quad (2.2)$$

Для определения восьми постоянных  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) из восьми условий (1.6), (1.8), (1.9) получается однородная система алгебраических уравнений

$$a_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + c_2 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0$$

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 d_1 = \gamma_1 b_2 + \gamma_2 d_2$$

$$a_1 \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha - b_1 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha - c_1 \gamma_2 \sin \gamma_2 \alpha - d_1 \gamma_2 \cos \gamma_2 \alpha = 0$$

$$a_1 \gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha - b_1 \gamma_1^3 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha + c_1 \gamma_2^3 \sin \gamma_2 \alpha + d_1 \gamma_2^3 \cos \gamma_2 \alpha = 0 \quad (2.3)$$

$$a_2 \gamma_1^2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + b_2 \gamma_1^2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) - c_2 \gamma_2^2 \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - d_2 \gamma_2^2 \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) = 0$$

$$a_2 \gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + b_2 \gamma_1^3 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + c_2 \gamma_2^3 \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - d_2 \gamma_2^3 \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) = 0$$

Из условия существования ненулевого решения системы (2.3) получается следующее уравнение для определения  $\bar{\omega}$  при заданных значениях  $\bar{P}$  и  $\alpha$ :

$$\gamma_1 \operatorname{th} \gamma_1 \alpha + \gamma_2 \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha = \quad (2.4)$$

$$= \frac{(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha)}{\gamma_1 \gamma_2 [\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha)]}$$

Семь искомых постоянных выражаются через постоянную  $a_1$  следующим образом:

$$a_2 = a_1, \quad c_1 = -a_1, \quad c_2 = -a_1, \quad (2.5)$$

$$b_1 = a_1 \operatorname{th} \gamma_1 \alpha, \quad d_1 = a_1 \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha$$

$$b_2 = \frac{\gamma_1^2 \left[ \gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right] + \gamma_2^3}{\gamma_1^2 \left[ \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right]} a_1$$

$$d_2 = \frac{\gamma_2^2 \left[ \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) + \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right] + \gamma_1^3}{\gamma_2^2 \left[ \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) + \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right]} a_1$$

Ниже рассматриваются частные случаи трансцендентного уравнения (2.4).

Пусть  $\alpha = 0,5$ , что соответствует случаю, когда опоры расположены на концах балки  $\bar{x} = -1$ ,  $\bar{x} = 0$ , (шарнирно опертая балка длины  $l$ ). В этом случае из (2.4) получается

$$\operatorname{tg} 0,5 \gamma_2 = \infty \Rightarrow \gamma_2 = (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда с учетом второй формулы (2.2) получается

$$\bar{\omega}_{2k+1} = \bar{\omega}_{2k+1}^0 \sqrt{1 - \frac{\bar{P}}{\bar{P}_{2k+1}^*}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

где  $\bar{\omega}_{2k+1}^0$  и  $\bar{P}_{2k+1}^*$  – приведенные значения (см. обозначения (1.4)) частот симметричных собственных колебаний и нечетных собственных значений задачи статической устойчивости

$$\bar{P}_{2k+1}^* = (2k + 1)\pi^2 \Rightarrow \bar{P}_1^* = \pi^2 \quad (2.7)$$

При  $\alpha = 0$ , что соответствует случаю консольной балки длины  $0,5l$ , заделанной в конце  $\bar{x} = 0,5$  и свободной в конце  $\bar{x} = 0$ . В этом случае уравнение (2.4) представляется в виде

$$\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 \operatorname{ch} 0,5 \gamma_1 \cos 0,5 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{sh} 0,5 \gamma_1 \sin 0,5 \gamma_2 = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение хорошо исследовано многими авторами [1,2,7] в классической задаче устойчивости консольной балки под действием следящей силы.

При  $\bar{\omega} = 0$  получается задача статической устойчивости под действием следящей сжимающей силы, когда опоры расположены на расстоянии  $c = \alpha l$  от середины стержня. В этом случае

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sqrt{\bar{P}}$$

и из уравнения (2.4) получается

$$\operatorname{tg}\sqrt{P} \alpha = \infty$$

откуда первый (наименьший) корень

$$\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{4\alpha^2}, \quad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4c^2} \quad (2.9)$$

происходит потеря устойчивости между опорами. При  $\alpha = 0,5$  ( $c = 0,5l$  – случай шарнирного опирания концов балки), откуда для приведенного значения критической силы получается  $\bar{P} = \pi^2$ ,  $P = \pi^2 EI / l^2$ , а при  $\alpha = 0$  (случай консольной балки длиной  $0,5l$ )  $\bar{P}_{\text{кр}} = \infty$ , что соответствует известному факту [1], что при следящей силе  $P$  в статической постановке потеря устойчивости не наблюдается.

При  $\bar{P} = 0$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{\bar{\omega}}$$

и уравнение (2.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{th}\sqrt{\bar{\omega}}\alpha + \operatorname{tg}\sqrt{\bar{\omega}} \alpha = \\ & = \frac{2 + 2\operatorname{ch}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \cos\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha)}{\operatorname{ch}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \sin\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) - \operatorname{sh}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \cos\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha)} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Этот случай рассмотрен в [8]. В табл. 1 приводятся результаты расчетов приведенного значения первой (наименьшей) частоты при некоторых значениях  $\alpha$ .

Таблица 1

$\alpha$	0	0,1	0,2	0,259	0,3	0,4	0,5
$\bar{\omega}_1$	14,06	15,46	19,59	22,89	21,93	15,22	$\pi^2$

В табл. 1 случай  $\alpha^* = 0,259$  соответствует оптимальному варианту расположения опор, при котором

$$\bar{\omega}_1^* = \max_{\alpha} \bar{\omega}_1(\alpha) = 22,89$$

При  $\alpha = 0$  из (2.10) получается

$$\operatorname{ch} 0,5\sqrt{\bar{\omega}} \cos 0,5\sqrt{\bar{\omega}} = -1 \quad (2.11)$$

что соответствует известному случаю [9] собственных колебаний консольной балки длиной  $0,5l$

При  $\alpha = 0,5$  из (2.10) получается

$$\operatorname{tg} 0,5\sqrt{\bar{\omega}} = \infty$$

откуда для приведенных значений частот собственных симметричных колебаний шарнирно опертой по концам балки получается

$$\bar{\omega} = (2k + 1)^2 \pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} (2k + 1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \text{ я}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат ф.-м. лит., 1961. 340 с
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. (Современные концепции, парадоксы и ошибки.) М.: Наука. 1987. 352 с
3. Lee G.E., Reissner E. Note on a Problem of Beam Buckling. 1975, Z. Angew. Math. Phys., 26, p.839-841.
4. Neer A., Baruch M. Note on Static and Dynamic Instability of a Nonuniform Beam. 1977, Z. Angew. Math. Phys. 28, p. 735-740
5. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dinamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads. A.Survey 2000. Journal of Sound and Vibration 238 (5), p.809-851
6. Elishakoff I. Controversy Associated with the So-Called (Follower Forces): Critical Over view 2005. Transactions of the ASME, Applied Mechanics Reviews. vol.58, March., p. 117-142
7. Beck M. Die Knicklast der einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. Zeitschr. angew. Math. Phys. 1952, 3, N3
8. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб.: „Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем” Ереван, Изд. ЕГУ, С. 110-119
9. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Колебания линейных систем. Т.1 (под ред. В.В.Болотина). М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
и12.10.200

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ  
ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЕ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Առաձգական սյունի կայունության մասին  
Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Դիտարկվում են առաձգական կոնսոլային հեծանի կայունության խնդիրները, երբ ազատ եզրում տրվում են պայմաններ գծային կապերի տեսքով ծոռղ մոմենտի և պտտման անկյան միջև, կամ կտրող ուժի ու ճկվածքի միջև: Կապերը կարող են լինել ինչպես առաձգական, այնպես էլ առաձգամածուցիկ: Վերջին դեպքում ստատիկական դրվածքով ստացվում է, որ երկարատև կրիտիկական ուժը մեծ է քան ակնթարթայինը, իսկ դինամիկական դրվածքի դեպքում ստացված է, որ այդ կապերը խաղում են դիստաբիլիզացիոն դեր:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan  
On the Stability of Elastic Columns

The stability of a column in two cases when on its end are given a lineare condition between bending moment and angle of turning or between cuttig forse and displacement. For viscoelastic connection in static statement longtime critical forse is greater than instantenous one and in dynamical statement viscoelastic connection destabilisises the sistem.

Известно, что классическая задача устойчивости консольной балки, когда на свободном конце действует следящая сила, в статической постановке не имеет решения [1,2]. Известны также еще различные модификации этой задачи (напр. [3-6] и др.).

В настоящей статье рассматриваются две задачи устойчивости, когда на „свободном“ конце заданы условия комбинационного типа – вместо момента – линейная связь между моментом и углом поворота и вместо перерезывающей силы – сила и прогиб. Связи эти двоякого рода: упругие и вязкоупругие, причем для последних два случая изучаются.

Показано, что статический и динамический подходы при упругих связях дают для критической силы одинаковые значения. В рассмотренных задачах длительная критическая сила (статическая постановка) больше, чем мгновенная. При динамическом рассмотрении внешние вязкоупругие связи играют дестабилизирующую роль и получаемая критическая сила меньше, чем при отсутствии вязкости.

1. Если решение уравнения балки

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{Pl^2}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\rho Fl^2}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

искать в виде ( $0 \leq x \leq l$ )

$$w = X(x) e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

то для  $X(x)$  получим обыкновенное уравнение

$$X^{IV} + 2\lambda X'' - \Omega^4 X = 0 \quad (1.3)$$

здесь 
$$2\lambda = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \Omega^4 = \frac{\rho Fl^4}{EJ} \omega^2 \quad (1.4)$$

Обозначения – общепринятые и нет надобности разъяснения.

Конец балки  $x = 0$  жестко заделан –

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = X'(0) = 0 \quad (1.5)$$

На конце  $x = 1$  заданы два типа комбинированных условий

а) 
$$Q = \frac{EJ}{l^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad X'''(1) = 0$$

$$M + \tilde{A} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{EJ}{l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\tilde{A}}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$X''(1) + \tilde{\alpha} X'(1) = 0, \quad \tilde{\alpha} = \frac{l\tilde{A}}{EJ} \quad (1.6)$$

б) 
$$M = 0, \quad X''(1) = 0$$

$$Q - \tilde{A} w = 0 \quad \Rightarrow \quad X'''(1) - \tilde{\beta} X(1) = 0$$

$$\tilde{\beta} = \frac{l^3 \tilde{A}}{EJ} \quad (1.7)$$

Для коэффициента пропорциональности  $\tilde{A}$  будут рассмотрены три случая.

1.  $\tilde{A}$  – скалярная величина -  $\tilde{A}u = Au$  и

$$\tilde{\alpha} = \frac{lA}{EJ} = \alpha = \text{const} \quad (1.8)$$

2.  $\tilde{A}$  – вязкоупругий оператор по Фохту -

$$\tilde{A}u = A \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) u, \quad \tilde{\alpha} = \alpha (1 + i\delta\Omega^2)$$

$$\delta = \varepsilon \frac{1}{l^2} \left( \frac{EJ}{\rho F} \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

3.  $\tilde{A}$  – среда типа Кельвина-Максвелла –

$$\tilde{A}u = A \left[ u - \frac{A_1}{n} \int_{-\infty}^t \varepsilon^{\frac{1}{n}} \cdot u(\tau) d\tau \right]$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \left[ 1 - \frac{A_1}{1 + \gamma^2 \Omega^4} + i \frac{A_1 \gamma \Omega^2}{1 + \gamma^2 \Omega^4} \right]$$

$$\gamma = \frac{n}{l^2} \left( \frac{EJ}{\rho F} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

Для второй задачи в формулах (1.9)-(1.10)  $\alpha$  должны быть заменены на  $\beta$

$$\beta = \frac{l^3 A}{EJ}$$

2. Сначала задачи рассмотрим в статической постановке. Тогда потребуя, чтобы решение уравнения устойчивости

$$w = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 x + C_4 \quad (2.1)$$

удовлетворяло условиям (1-5)-(1-7), для первой задачи получим

$$k + \tilde{\alpha} \sin k = 0, \quad k^2 = 2\lambda = \frac{Pl^2}{EJ} \quad (2.2)$$

и для второй задачи, соответственно,

$$k^3 = \tilde{\beta}(k \cos k - \sin k) \quad (2.3)$$

Сначала изучим случай, когда  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  постоянные. Уравнения (2.2) и (2.3) имеют корни как для положительных, так и для отрицательных  $\alpha$  и  $\beta$ . Однако в обоих случаях будем принимать положительные значения, что соответствует тому, что при изгибе консольной балки, если вместо условий  $M = Q = 0$  заданы условия типа (1.6) или (1.7), то прогиб на конце должен быть меньше, чем при свободном конце.

Уравнение (2.2) при  $\alpha \rightarrow \infty$  имеет корень [1]

$$k = \pi, \quad P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \quad (2.4)$$

Анализ уравнения (2.2) показывает, что для каждого  $\alpha$  имеются два корня.

Например, для  $\alpha = \frac{11\pi}{3}$  корни эти следующие:  $k_1 = 3.445$  и  $k_2 = 5.759$ .

Предельной  $\alpha$ , при котором (2.2) имеет действительный корень

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \quad k = \frac{3\pi}{2}, \quad P_{кр} = \frac{9EJ\pi^2}{4l^2} \quad (2.5)$$

И что еще важно, в интервале изменения  $\alpha$  чем больше  $\alpha$ , тем меньше соответствующий корень. Такой факт интересен для вязкоупругой связи.

Случай (1.9) ничего нового не дает в смысле значения критической силы в отличие от вышеприведенных. А вот при (1.10) вместо уравнения (2.2) получим

$$kc(t) + \alpha \left[ c(t) - \frac{A_1}{n} \int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)} c(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (2.6)$$

которое для  $c(t)$  дает (при  $t = 0 \quad c = c_0$ )

$$c = c_0 \exp \left\{ - \frac{k + \alpha(1 - A_1) \sin k}{n(k + \alpha \sin k)} t \right\} \quad (2.7)$$

откуда для длительной критической силы

$$k + \alpha(1 - A_1) \sin k = 0 \quad (2.8)$$

Но, так как  $\alpha(1 - A_1) < \alpha$ , то согласно вышеприведенному факту относительно зависимости  $k$  от  $\alpha$ , выходит, что длительная критическая нагрузка больше, чем мгновенная. В общем-то, интересный факт, обнаруженный еще и в [6] для другой задачи.

Относительно уравнения (2.3) можно сказать почти все, что и для первой задачи. При  $\alpha \rightarrow \infty$  корень уравнения [1]

$$k = 4,493 ; \quad P_{\text{кр}} = 20.187 \frac{EJ}{l^2} \quad (2.9)$$

Здесь также имеется предельный  $\alpha$ , при котором имеется действительный корень

$$\alpha = 4\pi^2, \quad k = 2\pi, \quad P_{\text{кр}} = \frac{4EJ\pi^2}{l^2} \quad (2.10)$$

и с увеличением  $\alpha$  корень уменьшается. Следовательно, и здесь длительная критическая сила больше, чем мгновенная.

3. Решение уравнения (1.3) есть

$$X(x) = C_1 \text{ch } p_1 x + C_2 \text{sh } p_1 x + C_3 \cos p_2 x + C_4 \sin p_2 x \quad (3.1)$$

$$p_1 = \left( \sqrt{\lambda^2 + \Omega^4} - \lambda \right)^{1/2}, \quad p_2 = \left( \sqrt{\lambda^2 + \Omega^4} + \lambda \right)^{1/2}$$

После удовлетворения условиям (1.4) и (1.5) для определения критических сил для первой задачи получим уравнение

$$p_1^4 + p_2^4 + p_1 p_2 (p_2^4 - p_1^4) (1 + \text{sh } p_1 \sin p_2) + 2 p_1^2 p_2^2 \text{ch } p_1 \cos p_2 + \\ + \tilde{\alpha} (p_1^2 + p_2^2) (p_1 \text{sh } p_1 \cos p_2 + p_2 \text{ch } p_1 \sin p_2) = 0 \quad (3.2)$$

отсюда при  $\Omega = 0$  получается (2.2), а при  $\lambda = \alpha = 0$  – уравнение для определения собственных частот консольной балки [8]

$$\text{ch } p \cos p + 1 = 0, \quad p_1 = p_2 = p$$

Для второй задачи аналогичное уравнение будет

$$p_2 (p_2^4 + p_1^4) + 2 p_1^2 p_2^3 \text{ch } p_1 \cos p_2 + p_1 p_2^2 p (p_2^2 - p_1^2) \text{sh } p_1 \sin p_2 + \\ + \tilde{\alpha} (p_1^2 + p_2^2) \left( \text{ch } p_1 \sin p_2 - \frac{p_2}{p_1} \text{sh } p_1 \cos p_2 \right) = 0 \quad (3.3)$$

4. Корни уравнений (3.2) и (3.3) определялись численно. Задавались значения для  $\lambda$  и определялись  $\Omega$ . Так как нас интересовал качественный вывод, а не точное значение критической силы, шаги для  $\lambda$  принимались 0.5.

В качестве критерия потери устойчивости при упругих связях принимаются такие  $\lambda$ , при которых частоты  $\Omega$  становятся нулями. Для вязкоупругих случаев  $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$  и в качестве критерия неустойчивости –  $\Omega_2 \leq 0$ .

В табл. 1 и 2 приведены некоторые результаты вычислений. Табл. 1 соответствует уравнению (3.2) (первые задачи), а табл. 2 – (3.3).

В первых столбцах для проверки программы приведены случаи упругих связей, хотя, как уже отметили из (3.2) и (3.3) при  $\Omega = 0$  получаются (2.2) и (2.3). Вторые и третьи столбцы – для связей (1.9), а последний столбец – (1.10).

В каждой клетке первые числа соответствуют  $\Omega_1$ , а вторые  $10^5 \cdot \Omega_2$ . В каждой клетке есть две строки. Для табл. 1 в первых строках помещены  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  при  $\alpha = 10$ , а во вторых – при  $\alpha = 4.712$ , которым соответствуют критические  $\lambda$  в упругой постановке  $\lambda_{\text{кр}} = 6.125$  и  $\lambda_{\text{кр}} = 11.103$ . То же самое относится и к

табл. 2. В первых строках приведены  $\Omega$  для  $\beta = 105,646$ , а во вторых  $\beta = 36.167$  с соответствующими  $\lambda_{кр} = 11.103$  и  $\lambda_{кр} = 15.113..$

Для материала (1.10) в качестве  $A_1$  бралось  $A_1 = 0,5$ , что соответствует тому, что длительный коэффициент жесткости пружины равен половине мгновенного коэффициента.

Как видно из приведенных таблиц при вязкоупругих связях балка теряет устойчивость задолго до значения статических критических сил. т.е. внешнее трение приводит к дестабилизации общей системы, как и в [5]. Таким образом, и в этих задачах существуют зоны квазиустойчивости [5]. Надо отметить, что изменение знака  $\Omega_2$  с положительного на отрицательный, как видно из таблиц, так и изменяющихся данных для  $\delta = 0.05, 0.1$ , мало зависит от значений  $\delta$ .

#### 5.Выводы.

1. В рассмотренных задачах статический и динамический подходы для критических сил дают одинаковые результаты при упругих связях.

2. В статической постановке при вязкоупругих связях длительные критические силы больше, чем мгновенные.

3. В динамической постановке при вязкоупругих связях критическая сила меньше, чем упругая критическая сила, т.е. имеется дестабилизация и существование зоны квазиустойчивости.

Таблица 1

(	0	0,001	0,01	$\gamma = 100$
0	2.291 2.231	2.291; 32.4 2.231; 40	2.291; 327.1 2.231; 470	2.291; 1 2.231; 8.414
0,5	2.245 2.197	2.245; 25 2.197; 36	2.243 ; 250 2.198 ; 360	2.245 ; 1 2.198 ; 7.558
1	2.196 2.163	2.196 ; 16.5 2.163 ; 24	2.196 ; 160 2.163 ; 240	2.196 ; 1 2.163 ; 5.332
1.5	2.144; 2.128	2.144 ; 0.755 2.128 ; 11	2.144 ; 79.5 2.128 ; 110	2.144 ; 1 2.128 ; 2.363
2	2.089 2.092	2.089 ; -1 2.093 ; 10	2.089 ; -17.5 2.092 ; - 20	2.089 ; - 0.1 2.092 ; - 0.977
2.5	2.028 2.054	2.028 ; -12 2.054 ; -16	2.028 ; -120 2.054 ; -167	2.028 ; -1 2.054 ; -4.685

Таблица 2

(	0	0,001	0,01	$\gamma = 100$
0	3.644 3.237	3.648 355 3.237; 500	3.648; 5311 3.239; 5050	3.644; 1 3.234; 29
1	3.570 3.187	3.570; 311 3.189; 466	3.573 ; 3111 3.131 ; 4670	3.570 ; 1 3.189 ; 25

2	3.491 3.145	3.490 ; 268 3.145 ; 410	3.493 ; 2658 3.147 ; 4180	3.491 ; 1 3.145 ; 21
3	3.405; 3.104	3.405 ; 218 3.104 ; 350	3.407 ; 2168 3.106 ; 3500	3.405 ; 1 3.104 ; 19
4	3.3.10 3.066	3.310 ; 166 3.066 ; 280	3.312 ; 1653 3.067 ; 2880	3.310 ; 1 3.066 ; 16
5	3.203 3.025	3.203 ; 113 3.025 ; 207	3.204 ; 1122 3.206 ; 2070	3.203 ; 1 3.025 ; 12
6	3.079 2.978	3.079 ; 58,6 2.978 ; 114	3.079 ; 584 2.979 ; 1130	3.071 ; 1 2.970 ; 1
7	2.929 2.921	2.929 ; 1 2.921 ; +7	2.929 ; 43 2.921 ; +80	2.929 ; 1 2.920 ; +1
7.5	2.842 2.888	2.842 ; -23 2.888 ; -40	2.842 ; -230 2.888 ; -500	2.942 ; -1 2.888 ; -1

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М: Наука, 1987. 352с.
4. Феодосьев В.И. Об одной задаче устойчивости. // ПММ. 1965. N2. С.391-393.
5. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N5. С. 135-140.
6. Белубекян М.В., Мовсисян Л.А. К задаче устойчивости консольного стержня сжатого следящей силой. // Тр. Межд. конф., Математика. модел. мех. сплошной среды". Санкт–Петербург. Т.2. С.95-98.
7. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. N 4. С. 3-12.
8. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 733 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
19.08.2005

УДК 539.3

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ НАСЛЕДСТВЕННО  
СТАРЕЮЩЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С  
КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Мирзоян Е.С.

Ե.Ս.Միրզոյան

Կոչոտ ներդրակների համագիծ համակարգով ժառանգականորեն ծերացող առաձգամածուցիկ  
հարթության լարվածային վիճակի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կոչոտ ներդրակների համագիծ համակարգով ժառանգականորեն համասեռ ծերացող առաձգամածուցիկության տեսության խնդիրը հարթության համար: Ստացված է հիմնական հավասարումը, որը լարումների թռիչքի ֆունկցիայի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում է: Որոշված է լարումները ներդրակների համակարգի վրա և համակարգից դուրս: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր, երբ հարթությունը պարունակում է մեկ կամ երկու ներդրակներ:

Y.S. Mirzoyan

On the Stress State of Ageing Heredity Viscoelastic Plane with Collinear System Solid Inclusions

In this work the stress-strain state of ageing heredity viscoelastic plane with collinear system finite absolute solid thin inclusions is investigated. The theory of creep of the material, together with age and the heredity factors is based on N.Kh.Harutyunyan's theory. The general equation for this problem is received and solved. Particular cases are taken into consideration.

Многие инженерные конструкции, армированные тонкостенными элементами, например, железобетонные конструкции, по технологическим условиям изготовления во многих случаях неоднородны, а по эксплуатационным условиям службы подвержены воздействиям изменяющихся во времени длительных нагрузок. Поэтому при разработке эффективных методов их расчета должны полнее учитываться реологические свойства отдельных блоков или элементов конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. Это приводит к необходимости рассмотрения задач о напряженном состоянии таких конструкций или их деталей в постановке теории ползучести неоднородно-наследственно стареющих тел. Такая теория построена Н.Х.Арутюняном [1-3].

В работе [4] в постановке теории ползучести неоднородно стареющих тел рассмотрены задачи контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами. В [5] обсуждена задача о напряженном состоянии вязкоупругой плоскости с разрезами. В [6] исследованы важные классы новых контактных задач теории ползучести.

В настоящей работе в постановке теории ползучести однородно-наследственно стареющих тел рассматривается задача о напряженном состоянии вязкоупругой плоскости, армированной коллинеарной системой произвольного конечного числа абсолютно жестких тонких включений. Обсуждаются частные случаи поставленной задачи.

Исследование этой же задачи в постановке неоднородно-наследственно стареющих тел составляет предмет отдельного исследования и будет рассматриваться в дальнейшем.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.**

Пусть однородная наследственно стареющая вязкоупругая плоскость, отнесенная к правой прямоугольной системе координат  $Oxy$ , по совокупности отрезков  $L_k = \{y = 0; a_k \leq x \leq b_k, a_k < b_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ); причем  $b_k < a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) армирована абсолютно жесткими тонкими

прямолинейными включениями. Будем считать, что материал плоскости обладает мерой ползучести  $C(t, \tau)$ , модулем упруго-мгновенной деформации  $E(t)$  и находится в условиях плоской деформации. Пусть далее в момент времени  $\tau_0$  на  $k$ -ом ( $k = \overline{1, n}$ ) включении действуют силы с главным вектором  $\{T_k(t), P_k(t)\}$  и главным моментом  $M_k(t)$ , изменяющимися во времени  $t$ . Одновременно начиная с момента  $\tau_0$ , вязкоупругая плоскость на бесконечности подвержена воздействиям равномерно распределенных нормальных и касательных напряжений, т.е.

$$\sigma_y^\infty = p(t), \quad \sigma_x^\infty = q(t), \quad \sigma_{xy}^\infty = \tau(t)$$

где  $\sigma_y^\infty, \sigma_x^\infty$  и  $\sigma_{xy}^\infty$  – соответствующие компоненты напряжений на бесконечности.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние плоскости. Предположим, что для материала плоскости коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации  $\nu(t)$  и деформация ползучести  $\nu^*(t, \tau)$  постоянны [1-3]:

$$\nu(t) = \nu^*(t, \tau) = \nu = \text{const} \quad (1.1)$$

Тогда для плоской деформации основные реологические соотношения-зависимости между напряжениями и деформациями для материала плоскости имеют вид [3-5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E^*(t)} \left[ \sigma_x(t) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y(t) \right] - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{1-\nu^2}{E^*(\tau)} \left[ \sigma_x(\tau) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y(\tau) \right] E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \\ \varepsilon_y^*(t) &= \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{E^*(t)} \left[ \sigma_y(t) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x(t) \right] - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{1-\nu^2}{E^*(\tau)} \left[ \sigma_y(\tau) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x(\tau) \right] E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \\ \gamma_{xy}^*(t) &= \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = 2(1+\nu) \left[ \frac{\tau_{xy}(\tau)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\tau_{xy}(\tau)}{E^*(\tau)} E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \right] \\ E^*(t) &= E(t+\rho), \rho = t - \tau_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$K^*(t, \tau) = K(t+\rho, \tau+\rho), K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \quad (1.4)$$

Здесь звездочки над компонентами деформаций и смещений означают, что они берутся с учетом ползучести. Входящие в (1.4) меры ползучести представляются в виде [1-3]:

$C(t, \tau) = \varphi(\tau)f(t - \tau)$  ( $t \geq \tau$ ), где функция  $\varphi(t)$  характеризует старение материала, а функция  $f(t - \tau)$  – его наследственные свойства, причем

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^n B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad B_0 = 1, \sum_{k=0}^n B_k = 0, \gamma_0 = 0, \gamma_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

а функция  $\varphi(\tau)$  аппроксимируется одним из выражений

$$\varphi(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{-\beta_k \tau}, \quad \varphi(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tau^k} \quad (\beta_k > 0, k = 1, 2, \dots, n)$$

где  $A_k, B_k, \gamma_k$  и  $\beta_k$  – константы материала плоскости, определяемые экспериментальным путем. В дальнейшем примем также, что  $E(t) = E = \text{const}$ .

Применив к (1.2) известную процедуру получения перемещений [5], придем к соотношениям ( $I$  – единичный оператор)

$$u^*(x, y, t) = (I - K)u(x, y, t), \quad v^*(x, y, t) = (I - K)v(x, y, t)$$

$$K\varphi = \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau) E^*(\tau) K^*(t, \tau) d\tau \quad (1.5)$$

Таким образом, при условиях (1.1) компоненты смещений  $u^*$  и  $v^*$  точек упруго-ползучего тела с учетом ползучести выражаются через те же компоненты упруго-мгновенных смещений  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$ . В случае обобщенного плоского напряженного состояния тела в уравнениях (1.2) следует произвести замену:  $v \rightarrow v/(1 + \nu)$ ,  $E \rightarrow E(1 + 2\nu)/(1 + \nu)^2$ .

Далее вязкоупругую плоскость по горизонтальной оси  $Ox$  разрежем на верхнюю и нижнюю полуплоскости и вычислим компоненты смещений граничных точек верхней (+) и нижней (–) полуплоскостей. На основании известных результатов [5] и с учетом (1.1)–(1.4)

$$W_{\pm}(x, 0, t) = u_{\pm}(x, 0, t) + iv_{\pm}(x, 0, t) = \pm \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\pm}(u, t) \ln \frac{1}{|x - u|} du +$$

$$+ i \frac{\kappa - 1}{8\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\pm}(u, t) \text{sgn}(x - u) du + \frac{x}{8\mu} [(\kappa - 3)p(t) + (\kappa + 1)q(t) + 4i\tau(t)]$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad \mu = E/2(1 + \nu); \chi_{\pm}(x, t) = T_{\pm}(x, t) + i\Sigma_{\pm}(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$-\sigma_y \Big|_{y=\pm 0} = \Sigma_{\pm}(x, t) = \begin{cases} p_{\pm}(x, t), & x \in L \\ \sigma(x, t), & x \in L' \end{cases} \quad -\sigma_{xy} \Big|_{y=\pm 0} = T_{\pm}(x, t) = \begin{cases} \tau_{\pm}(x, t), & x \in L \\ \tau(x, t), & x \in L' \end{cases}$$

$$L = \bigcup_{k=1}^n L_k, \quad L' = R/L, \quad R = \{y = 0, -\infty < x < \infty\}$$

Здесь  $u_{\pm}(x, 0, t), v_{\pm}(x, 0, t)$  – смещения граничных точек, соответственно, верхней и нижней полуплоскостей, а  $\sigma_y, \sigma_{xy}$  – компоненты напряжений.

Теперь приняв во внимание (1.5) из (1.6), находим

$$W^*(x, 0, t) = W_+^{*/} + W_-^{*/} = \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du + i \frac{\kappa - 1}{4\mu} (I - K) \Sigma(x, t) +$$

$$+ \frac{1}{4\mu} (I - K) [(\kappa - 3)p(t) + (\kappa + 1)q(t) + 4i\tau(t)]$$

$$\Phi^*(x, 0, t) = W_+^{*/'} - W_-^{*/'} = \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma(u, t)}{u - x} du + i \frac{\kappa - 1}{4\mu} (I - K) \Omega(x, t)$$

где штрих означает производную по  $x$ , а

$$\Omega(x, t) = \chi_+(x, t) - \chi_-(x, t), \quad \Sigma(x, t) = \chi_+(x, t) + \chi_-(x, t) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда при помощи преобразования Фурье получим

$$W^*(x, 0, t) = \frac{\kappa}{\mu\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du - i \frac{\kappa - 1}{\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u, 0, t)}{u - x} du + \frac{1}{4\mu} (I - K) [(\kappa - 3)p(t) + (\kappa + 1)q(t) + 4i\tau(t)] \quad (1.7)$$

$$\Sigma^*(x, t) = -\frac{4\mu}{\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u, 0, t)}{u - x} du + i \frac{\kappa - 1}{\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du$$

Так как смещения непрерывны на оси  $Ox$ , то  $\Phi(x, 0, t) \equiv 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ). С другой стороны, из-за непрерывности напряжений на  $L'$  имеем  $\Omega(x, t) \equiv 0$  при  $x \in L'$ . С учетом этих фактов (1.7) примет вид

$$W^*(x, 0, t) = \frac{\kappa}{\mu\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du + \frac{1}{4\mu} (I - K) [(\kappa - 3)p(t) + (\kappa + 1)q(t) + 4i\tau(t)] \quad (1.8)$$

$$\Sigma^*(x, t) = i \frac{\kappa - 1}{\pi(\kappa + 1)} (I - K) \int_L \frac{\Omega(u, 0, t)}{u - x} du \quad (-\infty < x < \infty)$$

Далее при помощи (1.8) приходим к следующему ключевому уравнению поставленной задачи:

$$W(x, 0, t) = \frac{\kappa}{\mu\pi(\kappa + 1)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du + \frac{1}{4\mu} [(\kappa - 3)p(t) + (\kappa + 1)q(t) + 4i\tau(t)]$$

$$\Sigma(x, t) = i \frac{\kappa - 1}{\pi(\kappa + 1)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.9a, b)$$

## 2. Решение определяющего интегрального уравнения

Рассматривая ключевое уравнение (1.9a) на системе включений  $L$ , относительно  $\Omega(x, t)$  получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_L \frac{\Omega(u, t)}{u - x} du = f(x, t)$$

$$f(x, t) = \frac{2E\pi(1 - \nu)}{(3 - 4\nu)(1 + \nu)} W(x, 0, t) + \frac{4\pi(1 - \nu)}{3 - 4\nu} [\nu p(t) - (1 - \nu)q(t) - i\tau(t)] \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения можно представить формулой [7]:

$$\Omega(x, t) = \frac{(-1)^{n-l+1}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (x - a_m)(x - b_m)}} \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (y - a_m)(y - b_m)} \times \right. \\ \left. \times \frac{f(y, t)}{y - x} dy + P_{n-1}(x) \right] \quad (2.2)$$

$$a_l < x < b_l \quad (l = \overline{1, n}) \quad P_{n-1}(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

где  $c_m(t)$  ( $m = \overline{0, n-1}$ ) – произвольные функции (постоянные по  $x$ ), подлежащие определению. Они определяются из условий равновесия включений:

$$\int_{a_m}^{b_m} \Omega(x, t) dx = T_m(t) + iP_m(t), \quad \text{Im} \int_{a_m}^{b_m} \Omega(x, t) x dx = M_m(t) \quad (m = \overline{1, n}) \quad (2.3)$$

В результате, для контактных напряжений на берегах включения и на  $L'$  получим

$$\begin{aligned} \tau_+(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \text{Re} \Omega(x, t) - \text{Im} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \right] \\ \tau_-(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[ \text{Re} \Omega(x, t) + \text{Im} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \right] \\ p_+(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \text{Im} \Omega(x, t) + \text{Re} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \right] \quad (x \in L) \\ p_-(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ -\text{Im} \Omega(x, t) + \text{Re} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \right] \\ \tau(x, t) &= -\frac{1}{2} \text{Im} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \\ \sigma(x, t) &= \frac{1}{2} \text{Re} \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du \quad (x \in L'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 3. Частные случаи.

Пусть плоскость содержит только одно включение,  $L = (-a, a)$ . Тогда

$$W(x, 0, t) = W_+(x, 0, t) + W_-(x, 0, t) = 2i\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол вращения включения.

В данном случае

$$f(x) = \beta = \frac{2E\pi\alpha(1-\nu)i}{(3-4\nu)(1+\nu)} + \frac{4\pi(1-\nu)}{3-4\nu} [\nu p - (1-\nu)q - i\tau]$$

и уравнение (2.1) примет вид

$$\int_{-a}^a \frac{\Omega(u, t)}{u-x} du = \beta \quad (3.1)$$

Решение этого уравнения дается формулой [7]:

$$\Omega(x, t) = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} \beta dt + c_0 \right] \quad |x| < a \quad (3.2)$$

Так как [8]:

$$\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x - y} dx = \begin{cases} \pi \operatorname{sgn} y \sqrt{y^2 - a^2} - \pi y & (|y| > a) \\ -\pi y & (|y| < a) \end{cases}$$

то из (2.3)

$$c_0 = -T(t) - iP(t), \quad \beta = \frac{4\pi(1 - \nu)}{3 - 4\nu} \left[ \nu p(t) - (1 - \nu)q(t) + i \frac{M(t)(3 - 4\nu)}{2\pi a^2(1 - \nu)} \right]$$

Следовательно, по (2.4)-(2.6) ( $T_1 = T, P_1 = P, M_1 = M$ )

$$\begin{aligned} \Omega(x, t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} [\beta x + T + iP] \\ \tau_+(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ T + \frac{4\pi(1 - \nu)[\nu p - (1 - \nu)q]}{3 - 4\nu} x \right] - \frac{1 - 2\nu}{\pi(1 - \nu)} \frac{M}{a^2} \right\} \\ \tau_-(x, t) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ T + \frac{4\pi(1 - \nu)[\nu p - (1 - \nu)q]}{3 - 4\nu} x \right] + \frac{1 - 2\nu}{\pi(1 - \nu)} \frac{M}{a^2} \right\} \\ p_+(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ P + \frac{2M}{a^2} x \right] + \frac{2(1 - 2\nu)[\nu p - (1 - \nu)q]}{3 - 4\nu} \right\} \\ p_-(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(1 - 2\nu)[\nu p - (1 - \nu)q]}{3 - 4\nu} - \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ P + \frac{2M}{a^2} x \right] \right\} \quad (|x| < a) \\ \tau(x, t) &= -\frac{1 - 2\nu}{4\pi(1 - \nu)} \left[ \frac{2M}{a^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sgn} x \right) - \frac{P}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sgn} x \right] \quad (|x| > a) \\ \sigma(x, t) &= -\frac{(1 - 2\nu)[\nu p - (1 - \nu)q]}{3 - 4\nu} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sgn} x \right) - \frac{1 - 2\nu}{4\pi(1 - \nu)} \frac{T}{\sqrt{x^2 - a^2}} \operatorname{sgn} x \end{aligned}$$

Если плоскость содержит два одинаковых и симметрично расположенных относительно начала координат включения  $L = (-b, a) \cup (a, b)$ , то из (2.2) получим

$$f(x) = \frac{4E\pi\gamma_l(1 - \nu)i}{(3 - 4\nu)(1 + \nu)} - \frac{4\pi(1 - \nu)}{3 - 4\nu} [-\nu p + (1 - \nu)q + i\tau] = \beta_l \quad (l = 1, 2)$$

$$\Omega(x,t) = \frac{(-1)^{3-l}}{\pi\sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}} \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^{-a} \sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)} \frac{\beta_1 ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)} \frac{\beta_2 ds}{s-x} + c_0 + c_1 x \right] \quad (x \in (-b, -a) \cup (a, b))$$

После простых преобразований и с учетом (2.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \tau_+(x,t) &= \frac{1}{2} \left\{ -\operatorname{sgn} x \left[ \operatorname{Re} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varphi(x) + \frac{\operatorname{Re} c_0}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} + \frac{\operatorname{Re} c_1 x}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \right] - \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \left[ \operatorname{Im} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \operatorname{Im} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \operatorname{sgn} x \right] \right\} \\ \tau_-(x,t) &= -\frac{1}{2} \left\{ -\operatorname{sgn} x \left[ \operatorname{Re} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varphi(x) + \frac{\operatorname{Re} c_0}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} + \frac{\operatorname{Re} c_1 x}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \right] + \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \left[ \operatorname{Im} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \operatorname{Im} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \operatorname{sgn} x \right] \right\} \\ p_+(x,t) &= \frac{1}{2} \left\{ -\operatorname{sgn} x \left[ \operatorname{Im} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varphi(x) - \operatorname{Im} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \psi(x) + \frac{\operatorname{Im} c_0}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} + \frac{\operatorname{Im} c_1 x}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \right] + \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right\} \quad (x \in (-b, -a) \cup (a, b)) \\ p_-(x,t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \operatorname{sgn} x \left[ \operatorname{Im} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varphi(x) - \operatorname{Im} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \psi(x) + \frac{\operatorname{Im} c_0}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} + \frac{\operatorname{Im} c_1 x}{\pi^2 \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \right] \right\} \end{aligned}$$

где

$$\beta_1 + \beta_2 = -\frac{8\pi(1-\nu)}{3-4\nu} [-\nu p(t) + (1-\nu)q(t)] + i \frac{\pi b(P_1 - P_2) + 2K(k)(M_1(t) + M_2(t))}{(a^2 + b^2)K(k)/2 - b^2 E(k)}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = i \frac{M_1(t) + M_2(t) + 2bE(k)/\pi(P_1 + P_2)}{\int_a^b \left[ -2x + \frac{4bE(k)}{\pi} \right] \psi(x) dx}$$

$$c_0 = \frac{\pi^2 b}{2K(k)} \left\{ T_1 - T_2 + \frac{8(1-\nu)}{b(3-4\nu)} [-\nu p(t) + (1-\nu)q(t)] \left[ \frac{a^2 + b^2}{2} K(k) - b^2 E(k) \right] \right\} - i(M_1(t) + M_2(t))\pi$$

$$c_1 = -\frac{\int_a^b [(P_1 + P_2)x + M_1(t) - M_2(t)]\psi(x)dx}{(T_1 + T_2)\pi + i \int_a^b \left[ -\frac{x}{\pi} + \frac{2bE(k)}{\pi^2} \right] \psi(x)dx}$$

$$\psi(x) = \frac{x}{\pi^2 \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \left\{ (a^2 + b^2 - x^2) \frac{K(k)}{b} - bE(k) + \right.$$

$$\left. + \left[ (a^2 + b^2)x^2 - x^4 - a^2b^2 \right] \frac{1}{b(b^2 - x^2)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b^2 - a^2}{b^2 - x^2}, k\right) \right\}$$

$$k = \sqrt{1 - a^2/b^2}$$

Здесь  $K(k)$ ,  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода [8], а  $\Pi(\varphi, x, k)$  – эллиптический интеграл третьего рода [8]. А компоненты смещений можем получить при помощи (1.5) и (1.6).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 741 с.
3. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
4. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учетом неоднородности старения материалов // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1981. Т. 34. № 5. 27-40 с.
5. Мхитарян С.М., Давтян З.А., Оганесян А.Н. О напряженно-деформированном состоянии вязкоупругого стареющего тела в форме плоскости с прямолинейными разрезами // Ереван: Гитутюн, 2003. 254-264 с.
6. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд. НАН РА. 1999. 318 с.
7. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
19.12.2005

УДК 539.376

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО СТРИНГЕРА  
 К УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Туманян Р.С.

Ռ. Ս Թումանյան

Բեռի փոխանցումը օղակաձև վերդրակից առաձգական անվերջ սալին սողքի հաշվառումով

Սողքի տեսության դրվածքով դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր՝ օղակաձև վերդրակից առաձգական անվերջ սալին բեռի փոխանցման մասին: Խնդրի լուծումը բերվում է ըստ ժամանակի Վոլտերի օպերատոր պարունակող սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման լուծման: Չեֆիշևի բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարումը բերված է Վոլտերի երկրորդ սեռի գծային ինտեգրալ հավասարումների անվերջ համակարգի: Կատարված է այդ համակարգի հետազոտություն ըստ սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի: Ստացված են թվային արդյունքներ:

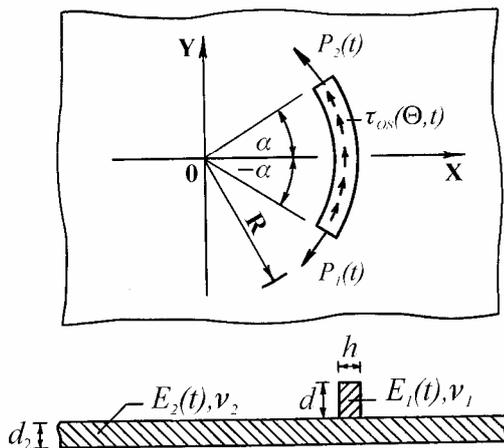
R.S. Toumanyán

A Load Transfer from Circular Stringer to an Elastic infinite plate taking into account the creep

The solution of problem is reduced to Volter's linear integral equation's infinite system of second kind. Numerical results are obtained.

В постановке теории ползучести рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от кольцеобразного стрингера к упругой бесконечной пластине. Решение задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени. При помощи аппарата многочленов Чебышева это уравнение сведено к бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Проведено исследование этих систем по принципу сжимающих отображений. Получены числовые результаты.

1. Пусть бесконечная пластина высотой  $d$  на своей верхней грани усилена кольцеобразным стрингером с круговой осью радиуса  $R$ , имеющим высоту  $d$ , ширину  $h$ , угол раствора  $2\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ). Требуется определить контактные напряжения в области соединения стрингера с пластиной в любой момент времени  $t$  ( $t \geq \tau_0$ ), если в момент времени  $t = \tau_0$  к концам стрингера приложены сосредоточенные силы  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  и одновременно стрингер на своей верхней грани загружен тангенциальными силами интенсивности  $\tau_{os}(\Theta, t)$ , сосредоточенными вдоль средней линии этой грани (фиг. 1). При этом считается, что  $h, d \ll R$  ( $h < d$ ).



Фиг. 1

Предполагается, что контактирующие между собой элементы (пластина, стрингер) изготовлены из упруго-ползучих материалов и обладают свойством ползучести, которая характеризуется неоднородностью процесса старения.

Предполагается также, что коэффициент поперечного сжатия при деформациях ползучести  $\nu_2(t, \tau)$  равен коэффициенту поперечного сжатия при упруго-мгновенных деформациях  $\nu_1(t)$  и постоянен во времени:

$$\nu_1(t) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const.}$$

Основные реологические характеристики стрингера:  $C_1(t, \tau)$ — мера ползучести,  $E_1(t)$ — модуль упруго-мгновенной деформации,  $\tau_1$  — постоянный по его длине возраст, а соответствующие характеристики для пластины—  $C_2(t, \tau)$ ,  $E_2(t)$ ,  $\tau_2$ .

В указанной постановке выведем определяющие уравнения поставленной задачи. Для этого, как в [1], воздействие кольцеобразного стрингера заменим неизвестными осевыми тангенциальными  $\bar{\tau}_s(\Theta, t)$  и поперечными радиальными  $\bar{q}_s(\Theta, t)$  контактными напряжениями.

Приняв во внимание [1], при помощи известных результатов [2] с учетом ползучести вычислим деформацию бесконечной пластины в окружном направлении  $\varepsilon_\Theta^{(2)}(\Theta, t)$  и осевую деформацию  $\varepsilon_1(\Theta, t)$  стрингера. На основании условия контакта  $\varepsilon_\Theta^{(2)}(\Theta, t) = \varepsilon_1(\Theta, t)$  ( $-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0$ ) решение поставленной задачи сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени:

$$(1 - L_2^0) \left[ \int_{-\alpha}^{\alpha} \text{ctg} \frac{U - \Theta}{2} \varphi'(U, t) dU + \nu_0 C(t) - f_2(\Theta, t) \right] = \quad (1)$$

$$= \lambda(t) (1 - L_1^0) [\varphi(\Theta, t) + f_1(\Theta, t)] \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha, t) = 0, \quad \varphi(\alpha, t) = g(t) \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$L_i^0 [X(t)] = \int_{\tau_0}^t E_i^*(t) K_i^*(t, \tau) X(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2)$$

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad E_i^*(t) = E_i(t + \rho_i)$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [E_i^{-1}(\tau) + C_i(t, \tau)], \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

$$\lambda(t) = \frac{8\pi d_2 R E_2^*(t)}{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2) h d E_1^*(t)}, \quad \nu_0 = \frac{2(1 - \nu_2)}{3 - \nu_2}$$

$$\varphi(\Theta, t) = \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau(U, t) dU, \quad C(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau(U, t) dU$$

$$f_1(\Theta, t) = p_1(t) - \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU$$

$$\begin{aligned}
f_2(\Theta, t) &= v_0 \left\{ \alpha [p_1(t) + p_2(t)] + \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau_0(U, t) dU \right\} + \\
&+ p_1(t) \sin(\alpha + \Theta) + p_2(t) \sin(\alpha - \Theta) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(U - \Theta) \tau_0(U, t) dU \\
\tau(U, t) &= \bar{\tau}_s(U, t) R / P_0, \quad \tau_0(U, t) = \tau_{os}(U, t) R / P_0 \\
p_1(t) &= P_1(t) / P_0, \quad p_2(t) = P_2(t) / P_0, \quad P(t) = P_0 g(t)
\end{aligned}$$

$v_2/l$ -коэффициент Пуассона бесконечной пластины,

$\tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t)$  – тангенциальные контактные напряжения под кольцеобразным стрингером.

При этом, как вытекает из [1], радиальные контактные напряжения будут определяться по формуле:

$$q(\Theta, t) = -p_1(t) - \varphi(\Theta, t) + \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU \quad (4)$$

$$q(\Theta, t) = \bar{q}_s(\Theta, t) R / P_0$$

и при больших  $R$  можно считать  $\bar{q}_s(\Theta, t) \approx 0$ .

Следует отметить, что интеграл в (1) понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) представим в виде бесконечного ряда [3, 4]

$$\begin{aligned}
\tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t) &= \frac{\sec(\Theta/2)}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \alpha)}} \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) T_n\left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0),
\end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_n(x)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) – многочлены Чебышева первого рода,  $X_n(t)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени и подлежащие определению.

Отсюда после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\varphi(\Theta, t) &= \sec \frac{\alpha}{2} \left\{ X_0(t) \left[ \pi - \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n(t) \sin \left[ n \cdot \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad (-\alpha \leq \Theta \leq \alpha, t \geq \tau_0).
\end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2), непосредственно находим:

$$X_0(t) = \pi^{-1} \cos(\alpha/2) g(t).$$

Далее, следуя известной процедуре [3,4], для определения неизвестных коэффициентов  $\{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  получим следующую бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго ряда:

$$Y_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)}(t) Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t B_{m,n}^{(2)}(t, \tau) Y_n(\tau) d\tau = N_m(t) \quad (m=1, 2, \dots; t \geq \tau_0). \quad (6)$$

Отметим, что исходя из (5), для коэффициентов интенсивности тангенциальных контактных напряжений в концевых точках стрингера получим:

$$A_1(t) = \lim_{\Theta \rightarrow \alpha} \sqrt{\alpha - \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[ Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \right] E_2^*(t) \quad (7)$$

$$A_2(t) = \lim_{\Theta \rightarrow -\alpha} \sqrt{\alpha + \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[ Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n(t) \right] E_2^*(t)$$

3. Исследования бесконечных систем уравнений (6) проведены согласно принципу сжимающих отображений [6], придерживая при этом методику, изложенную в [5]. Исследования показали, что при выполнении условия  $t \in [\tau_0, T]$

$$\sup_m \sup_n \sum_{n=1}^{\infty} \left[ |B_{m,n}^{(1)}(t)| + \int_{\tau_0}^t |B_{m,n}^{(2)}(t, \tau)| d\tau \right] < 1$$

бесконечная система (6) имеет единственное решение, которое можно найти методом редукции или последовательных приближений.

4. Для проведения числового расчета меры ползучести стрингера  $C_1(d\Box\Box)$  и пластины  $C_2(d\Box\Box)$  приняты в форме, как в [7-9]:

$$C_1(t, \tau) = \varphi_1(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]$$

$$C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]$$

где  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  – функции старения материалов стрингера и пластины, которые описывают процесс неоднородного старения. Тогда ядра ползучести  $K_1^*(t, \tau)$  и  $K_2^*(t, \tau)$  примут вид:

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_i(\tau)} + \varphi_i(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\}$$

$$\varphi_i(\tau) = C_i + \frac{A_i}{\tau} \quad (i = 1, 2).$$

Численный анализ проведен с учетом разновозрастности контактирующих элементов.

Для вязкоупругих характеристик пластины и стрингера приняты следующие значения:

$$E = E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \gamma = 0,026 \text{ сум.}^{-1}, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu = 1/6,$$

$$C = C_1 = C_2 = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}, \quad \tau_1 = \tau_0, \quad \rho_1 = 0; \quad \rho_2 = \tau_2 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1.$$

$$A = A_1 = A_2 = 4,82 \cdot 10^{-4} \text{ сум. МПа}^{-1},$$

При числовых расчетах было положено  $\tau_{0s}(\Theta, t) \equiv 0$  и рассмотрены два случая нагружения стрингера: симметричное нагружение, когда

$$P_1(t) = P_1 = \text{const}, \quad P_2(t) = P_2 = \text{const}, \quad P_1 = P_2,$$

$$\tau(-\Theta, t) = -\tau(\Theta, t), \quad q(\alpha, t) = -1$$

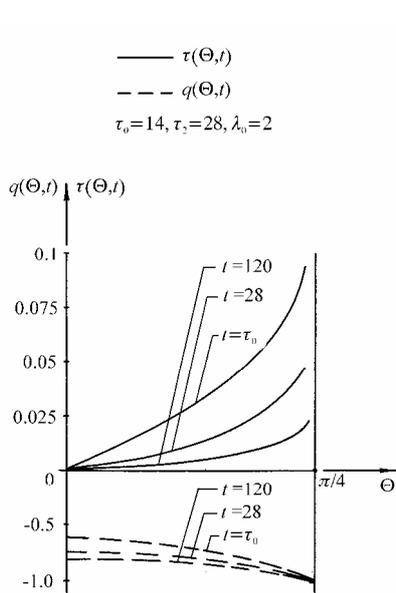
и косимметричное нагружение, когда

$$P_1(t) = P_1 = \text{const}, \quad P_2(t) = P_2 = \text{const}, \quad P_2 = -P_1,$$

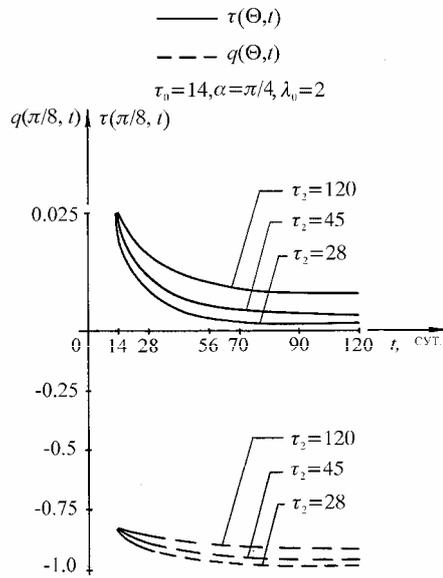
$$\tau(-\Theta, t) = \tau(\Theta, t), \quad q(\alpha, t) = -1/2.$$

Результаты вычислений в довольно широком диапазоне возрастов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  контактирующих элементов и времени  $t$  приведены в виде таблиц и иллюстрированы на графиках.

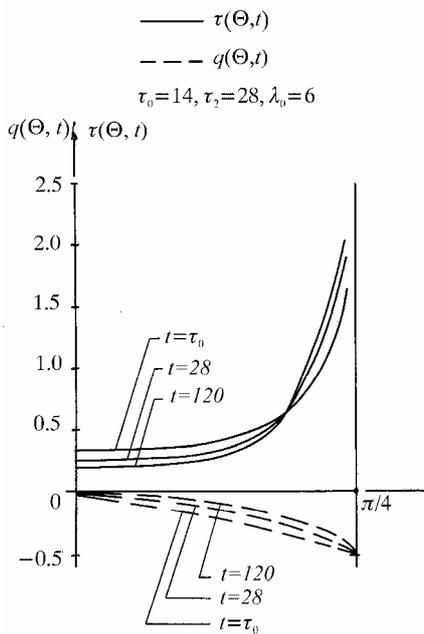
Графики изменения контактных напряжений  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  для различных моментов времени  $t$  при  $0 < \Theta < \pi/4$  представлены на фиг. 2 при симметричном нагружении и на фиг. 4 при кососимметричном нагружении. Кривая  $t = \tau_0$



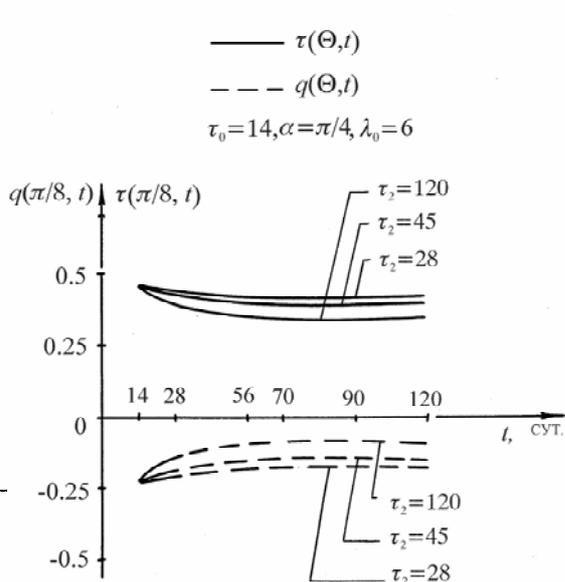
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

соответствует чисто упругому контакту стрингера с пластиной.

Графики изменения контактных напряжений во времени при различных значениях возраста основания  $\tau_2$  представлены на фиг. 3 при симметричном

нагружении в фиксированной точке  $\Theta = \pi/8$  и на фиг. 5, 6 при кососимметричном нагружении в двух фиксированных точках  $\Theta = \pi/8$  и  $\Theta = 2\pi/9$ .

В табл. 1 и 2 приведены значения  $A_1(t)$  при различных значениях  $t$  и  $\tau_2$ . Причем  $A_2(t) = -A_1(t)$  при симметричном нагружении (табл. 1) и  $A_2(t) = A_1(t)$  при кососимметричном нагружении (табл. 2).

Анализ числовых результатов при симметричном нагружении стрингера показывает, что

1) учет фактора неоднородности старения контактирующих тел по сравнению с упругим случаем приводит к существенному перераспределению контактных напряжений, причем с возрастанием времени  $t$  контактные напряжения заметно падают и при больших  $t$  мало отличаются друг от друга (фиг. 2);

2) в фиксированной точке ( $\Theta = \text{const}$ ) контактные напряжения с возрастанием времени  $t$  уменьшаются, а с возрастанием возраста пластины  $\tau_2$  увеличиваются (фиг. 3);

3) коэффициенты интенсивности тангенциальных контактных напряжений при фиксированном времени  $t$  с возрастанием возраста пластины  $\tau_2$  увеличиваются, а при фиксированном  $\tau_2$  с возрастанием времени  $t$  уменьшаются. При этом значения коэффициента интенсивности  $A_1(t)$  с учетом ползучести остаются меньшими значений  $A_1(t)$  в чисто упругом случае (табл. 1).

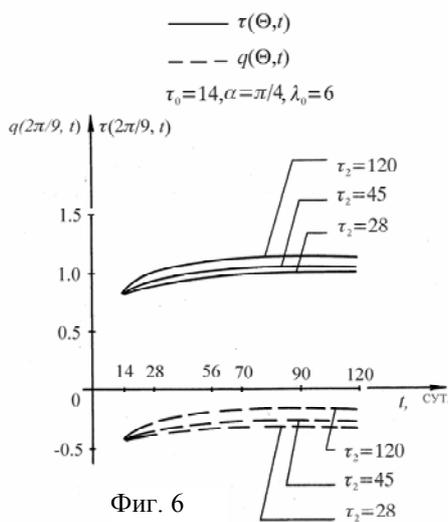
Анализ числовых результатов при кососимметричном нагружении стрингера показывает, что

1) с возрастанием времени  $t$  контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  уменьшаются, причем графики  $\tau(\Theta, t)$  при различных значениях времени  $t$  пересекаются в определенной точке (фиг. 4);

2) в фиксированной точке  $\Theta = \pi/8$  и находящейся левее от указанной точки пересечения графиков, с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  уменьшаются (фиг. 5), а в другой фиксированной точке  $\Theta = 2\pi/9$  и находящейся правее от той же точки пересечения графиков, с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  тангенциальные контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  возрастают, а радиальные контактные напряжения  $q(\Theta, t)$  убывают (фиг. 6);

3) коэффициенты интенсивности с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  возрастают (табл. 2).

Отметим, что для остальных значений  $\tau_2$  и  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = 8\pi d_2 R / (1 + \nu_2)(3 - \nu_2) = \text{const}$ ) и  $\alpha$  ход изменения контактных напряжений в обоих случаях нагружения, в основном, такой же, что на фиг. 2-6. Необходимо подчеркнуть, что характер распределения контактных напряжений существенно зависит от нагрузки, параметров ползучести и положения точки в контактной зоне. Все эти факторы



конкретных практических расчетах конструкций из стареющих материалов следует учесть.

Таблица 1

$\lambda_0 = 2, \alpha = \pi/4, \tau_0 = \tau_1 = 14 \text{ сут.}$				
$t$	28	45	90	120
14	0.02932	0.02932	0.02932	0.02932
28	0.01086	0.01299	0.01607	0.01689
56	0.00341	0.00577	0.01041	0.01195
70	0.00267	0.00480	0.00940	0.01105
120	0.00218	0.00392	0.00801	0.00966

Таблица 2

$\lambda_0 = 6, \alpha = \pi/4, \tau_0 = \tau_1 = 14 \text{ сут.}$				
$t$	28	45	90	120
14	0.33261	0.33261	0.33261	0.33261
28	0.34320	0.34653	0.35190	0.35349
56	0.34761	0.35185	0.36023	0.36318
70	0.34844	0.35276	0.36172	0.36501
120	0.34989	0.35434	0.36418	0.36803

Автор благодарит профессора Мхитаряна С. М. за постановку задачи и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян С.М., Туманян Р.С. Передача нагрузки от кольцеобразного стрингера к упругой бесконечной пластине // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. 1 1. С. 3-15.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К периодической контактной задаче для полубесконечности с упругими накладками // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 172-178.
5. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. 1 3. С. 3-17.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 324с.
8. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. 1 3. С. 153-164.

9. Арутюнян Н.Х. Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

Ванадзорский филиал Государственного  
инженерного университета Армении

Поступила в редакцию  
10.05.2005

УДК 537.2 : 539.3

ПРОСАЧИВАНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ  
ЧЕРЕЗ ЗАЗОР МЕЖДУ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ  
КРИСТАЛЛАМИ КУБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ  
СИММЕТРИИ (КЛАССЫ 23 и 6mm)

Берберян А.Х.

**Ա.Խ. Բերբերյան**

**Սահիքի էլեկտրաառաձգական ալիքի թափանցումը խորանարդաձև և հեքսագոնալ պլեզոէլեկտրիկ 23 և 6mm դասի բյուրեղների ճեղքի միջև**

Դիտարկված է սահիքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի թափանցումը խորանարդաձև և հեքսագոնալ պլեզոէլեկտրիկ 23 և 6mm դասի բյուրեղների ճեղքի միջև: Որոշված են առաջացող ալիքների լայնույթային գործակիցները: Ցույց է տրված, որ բյուրեղներում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիքներ:

**A.Kh.Berberyan**

**The passage of an electroelastic shear wave at the interface between a cubic and hexagonal piezoelectric crystal of 23 and 6mm classes**

The passage of a flat electroelastic shear wave through a backlash between cubic and hexagonal crystals of classes 23 and 6mm is considered. The peak factors reflection and refraction of arising waves, and also attitude(relation) so-called " symmetric and antisymmetric " of waves extending in a backlash are determined. Is shown, that in a crystal there are accompanying superficial waves.

Рассмотрено просачивание плоской электроупругой сдвиговой волны через зазор между кубическим и гексагональным пьезоэлектрическим кристаллами классов 23 и 6mm. Определены амплитудные коэффициенты отражения и преломления возникающих волн, а также отношение так называемых "симметричных и антисимметричных" волн, распространяющихся в зазоре. Показано, что в кристаллах возникают сопутствующие поверхностные волны.

Падение электроупругой волны на границу пьезоэлектрика сопровождается электроакустическими сопутствующими поверхностными колебаниями (СПК). Известно, что взаимодействия СПК с прилегающей к пьезоэлектрику средой, например, с полупроводником, может существенно изменить коэффициент отражения даже в отсутствие акустического контакта между средами [1]. Очевидно, что СПК должны возбуждать упругую волну и в пьезоэлектрике, расположенном вблизи границы, при этом соответственно меняется и коэффициент отражения. Если вблизи поверхности пьезокристалла поместить второй пьезоэлектрик таким образом, чтобы зазор между пьезокристаллами был меньше или порядка длины волны, то во втором кристалле также возникает переменное электрическое поле, а вследствие пьезоэффекта и упругие деформации. Таким образом, часть энергии акустоэлектрической волны,

падающей на поверхность пьезокристалла, должна просачиваться во вторую среду, если она также является пьезоэлектриком, и распространяться там в виде объемной волны, уходящей от границы раздела [2].

**Введение.** Пьезоэлектрические свойства кристаллов могут существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи мал по сравнению с единицей. Например, такая ситуация возникает при отражении и преломлении электроупругих волн на границе пьезоэлектриков. В работах [3,7,10] для пьезокристаллов ромбической и кубической симметрий показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний (сопутствующие поверхностные колебания–СПК). В настоящей работе рассматривается задача просачивания сдвиговой электроупругой волны через зазор между пьезоэлектрическими кристаллами кубической и гексагональной симметрии классов 23 и 6mm.

**1. Постановка задачи.** Пусть два пьезоэлектрических кристалла кубической и гексагональной симметрий классов 23 и 6mm в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  разделены вакуумным промежутком  $2h$ . Кубический кристалл, в котором задана падающая волна, занимает область  $y > h$ , а гексагональный –  $y < -h$ . Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящийся при  $y > h$ , будем сопровождать индексом  $\alpha$ , а при  $y < -h$  – индексом  $\beta$ , а область  $-h < y < h$  – индексом  $\gamma$ . Одна из осей симметрии второго порядка кубического кристалла параллельна главной оси гексагонального кристалла и оси  $OZ$  (фиг. 1). Далее, пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в средах имеют вид:

$$\begin{aligned} y > h: \bar{u}_\alpha &= \{0, 0, u_\alpha(x, y, t)\}; & \varphi_\alpha &= \varphi_\alpha(x, y, t) \\ y < -h: \bar{u}_\beta &= \{0, 0, u_\beta(x, y, t)\}; & \varphi_\beta &= \varphi_\beta(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\bar{u}$  – вектор упругого перемещения точек среды,  $\varphi$  – потенциалы электрических полей в средах.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [3,11]:

1. В области  $y > h$ :

$$\begin{aligned} c_{44}^\alpha \left( \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \right) + 2e_{14}^\alpha \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x \partial y} &= \rho^\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \\ 2e_{14}^\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} - \varepsilon_{11}^\alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. В области  $-h < y < h$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

3. В области  $y < -h$ :

$$c_{44}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} \right) + e_{15}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial y^2} \right) = \rho^{\beta} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

$$e_{15}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_{11}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Граничные условия задачи на границах  $y = -h$ ,  $y = h$  имеют вид:

$$y = h \begin{cases} c_{44}^{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + e_{14}^{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial y} = 0 \\ e_{14}^{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} - \varepsilon_{11}^{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial y} + \varepsilon_0^{\gamma} \frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial y} = 0 \\ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\gamma} \end{cases}, \quad y = -h \begin{cases} c_{44}^{\beta} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial y} + e_{15}^{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y} = 0 \\ e_{15}^{\beta} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial y} - \varepsilon_{11}^{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y} + \varepsilon_0^{\gamma} \frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial y} = 0 \\ \varphi_{\beta} = \varphi_{\gamma} \end{cases} \quad (1.5)$$

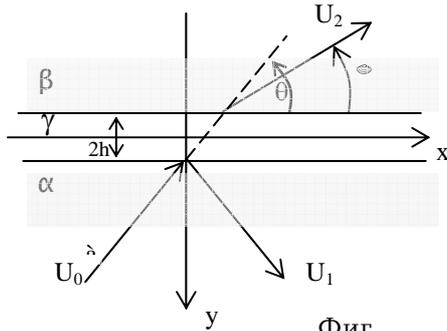
В (1.2)–(1.5) приняты обозначения:  $c_{44}^{\alpha}$ ,  $c_{44}^{\beta}$  – упругие постоянные,  $e_{14}^{\alpha}$ ,  $e_{15}^{\beta}$  – пьезоэлектрические модули,

$\varepsilon_{11}^{\alpha}$ ,  $\varepsilon_{11}^{\beta}$ ,  $\varepsilon_0^{\gamma}$  – диэлектрические

проницаемости,  $\rho^{\alpha}$ ,  $\rho^{\beta}$  – плотности, а

$u_{\alpha}$ ,  $u_{\beta}$ ,  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\varphi_{\beta}$ ,  $\varphi_{\gamma}$  – упругие смещения и потенциалы пьезокристаллов кубической и гексагональной симметрий соответственно, а также вакуума.

В работе используется международная система измерения СИ.



Фиг.

**2. Решение задачи.** Пусть из объема кубического пьезоэлектрика на границу раздела падает под углом скольжения  $\theta$  (фиг. 1) плоская сдвиговая электроупругая волна вида  $u = Ue^{i(px+qy-\omega t)}$ ,  $\varphi = \Phi e^{i(px+qy-\omega t)}$  с амплитудами  $U_0$ ,  $\Phi_0$ , частотой  $\omega$ , волновым числом  $k_{\alpha}$ . Вследствие взаимодействия падающей волны с вакуумным зазором в кубическом пьезоэлектрике возникают: отраженные электроупругие плоские волны и сопутствующие поверхностные электроупругие волны; волна, просачиваясь через вакуумный промежуток, преломляется под углом  $\phi = \arccos(S_{\beta} S_{\alpha}^{-1} \cos \theta)$  в гексагональный кристалл, порождая сопутствующие поверхностные электроупругие волны.

Используя решения, полученные в работе [11], для кубического кристалла, при  $y > h$  полное решение будет:

$$u_{\alpha} = \left[ U_0 e^{-iq_0 y} + U_{\alpha} e^{iq_0 y} + iB \Phi_{\alpha} e^{-ry} \right] e^{i(px-\omega t)}$$

$$\varphi_{\alpha} = \left[ -U_0 A e^{-iq_0 y} + A U_{\alpha} e^{iq_0 y} + \Phi_{\alpha} e^{-ry} \right] e^{i(px-\omega t)} \quad (2.1)$$

Для гексагонального кристалла, где возникают преломленные волны и сопутствующие поверхностные электроупругие волны, имеем при  $y < -h$  следующее решение [11]:

$$u_\beta = U_\beta e^{-iq_\beta y} e^{i(px-\omega t)}$$

$$\Phi_\beta = \left[ \frac{e_{15}^\beta}{\varepsilon_{11}^\beta} U_\beta e^{-iq_0 y} + \Phi_\beta e^{|p|y} \right] e^{i(px-\omega t)} \quad (2.2)$$

Для вакуумного промежутка решение представим в виде:

$$\Phi_\gamma = (\Phi_{\gamma 1} e^{|p|y} + \Phi_{\gamma 2} e^{-|p|y}) e^{i(px-\omega t)} \quad (2.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$p = k_\alpha \cos \theta, \quad q_{0,\beta} = \sqrt{k_{\alpha,\beta}^2 - p^2} = k_{\alpha,\beta} \sin \theta, \quad q_\alpha = -q_0, \quad A = \frac{e_{14}^\alpha \sin 2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha},$$

$$B = \frac{2e_{14} p \cos^2 \theta}{c_{44}^\alpha r}, \quad r = \frac{k_\alpha |\cos \theta| \sqrt{1 + 4\chi_\alpha^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta}}, \quad k_\alpha = \frac{\omega}{S_\alpha},$$

$$k_\beta^2 = \omega^2 / S_\beta^2 (1 + \chi_\beta^2), \quad S_\alpha^2 = \frac{c_{44}^\alpha}{\rho^\alpha}, \quad \chi_\alpha^2 = \frac{e_{14}^2}{c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha}, \quad S_\beta^2 = \frac{c_{44}^\beta}{\rho^\beta}, \quad \chi_\beta^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta}.$$

$U_0, U_\alpha, U_\beta$  – амплитуды смещения падающей, отраженной и преломленной волн соответственно,  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta$  – амплитуды потенциала в кубическом и гексагональном кристаллах,  $\Phi_{\gamma 1}, \Phi_{\gamma 2}$  – амплитуды потенциала симметричных и антисимметричных колебаний в зазоре.

Подставляя решения (2.1)–(2.3) в граничные условия (1.5), после громоздких вычислений получим:

$$R = \frac{U_\alpha}{U_0}, \quad U_\alpha = \frac{DD(U_\alpha)}{Det}, \quad T = \frac{U_\beta}{U_0} = \frac{DD(U_\beta)}{U_0 Det} \quad (2.4)$$

где

$$Det = e^{-3h(|p|-r)+i(hq_0+q_2)} (D_R + iD_I)$$

$$DD(U_\alpha) = e^{-3h(|p|-p-r)+i(hq_0+q_2)} (DU_R^\alpha + iDU_I^\alpha)$$

$$DD(U_\beta) = -\frac{1}{\varepsilon_{11}^\alpha \gamma} (4ie^{-h(|p|+\gamma)} e_{14} e_{15} |p| (p - q_0 \sin(2\theta)) (4e_{14}^2 \cos^3 \theta p \sin \theta + c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 \gamma))$$

$$D_R = \frac{1}{\varepsilon_{11}^\gamma \varepsilon_{11}^\alpha (\varepsilon_{11}^\beta r)^2} (\varepsilon_{11}^\beta r (-e^{|p|} \varepsilon_{11}^\alpha e_{14}^2 (e_{15}^2 + \varepsilon_{11}^\beta c_{44}^\beta) ((1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\gamma + pq_\beta \times$$

$$\times (-1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\beta) (p - q_0 \sin(2\theta)) (1 + \cos(2\theta) - r) + e^p (-1 + e^{4h|p|}) \times$$

$$\times (\varepsilon_{11}^\gamma e_{15} p)^2 (4e_{14}^2 \cos^3(\theta) p \sin(\theta) + c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 r) - e^p (1 + e^{4h|p|}) (e_{15}^2)^2 \times$$

$$\times \varepsilon_{11}^\gamma |p| (c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 + e_{14}^2 p \sin(2\theta) (2c_{44}^\alpha e_{14}^2 (p \cos(\theta))^2 - \varepsilon_{11}^\alpha r^2))$$

$$D_I = (e_{15}^2 + \varepsilon_{11}^\beta c_{44}^\beta) M_1 + M_2$$

$$\begin{aligned}
DU_R^\alpha &= e_{14}^2 c_{44}^\alpha p (r e_{15}^2 \cos \theta - c_{44}^\beta) M_1 + \varepsilon_{11}^\beta M_2 \\
DU_I^\alpha &= (e_{15}^2 - \varepsilon_{11}^\beta c_{44}^\beta) M_1 + M_2 \\
M_1 &= -4c_{44}^\alpha e^{|p|} ((1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\gamma + (-1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\beta) p^3 q_\beta \cos^3(\theta) \sin(\theta) r \\
M_2 &= c_{44}^\alpha e^{|p|} \varepsilon_{11}^\alpha e_{14}^2 \left( \frac{1}{2} p \cos \theta \right) + e^p (-1 + e^{4h|p|}) (\varepsilon_{11}^\gamma e_{14} p)^2 (4e_{14}^2 p \sin \theta + c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 r) - \\
&- e^p (1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\gamma e_{15}^2 |p| (c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 + e_{14}^2 p \sin(2\theta) (2c_{44}^\alpha e_{14}^2 (p \cos \theta)^2 - \varepsilon_{11}^\alpha r^2))
\end{aligned}$$

Отношение амплитуд потенциалов гексагонального и кубического кристаллов равно:

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_\beta}{\Phi_\alpha} &= -\frac{1}{r} (8e^{|p|-3h|p|+2iq_\beta-hy} e_{14}^2 \varepsilon_{11}^\gamma (e_{15}^2 + c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta) q_\beta (-ie^p (1 + e^{4h|p|}) e_{15}^2 \varepsilon_{11}^\beta |p| + \\
&+ e^{|p|} (e_{15}^2 + c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta) ((1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\gamma + (-1 + e^{4h|p|}) \varepsilon_{11}^\beta) q_\beta) \times \\
&\times (c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha q_0 + e_{14}^2 p \sin(2\theta) (p - q_0 \sin(2\theta))^2 (4e_{14}^2 \cos^3(\theta) p \sin(\theta) + c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha r))
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Отношение амплитуд симметричных и антисимметричных электростатических колебаний в вакууме будет:

$$\frac{\Phi_{\gamma 1}}{\Phi_{\gamma 2}} = e^{2h|p|} \frac{-ie^p e_{15}^2 \varepsilon_{11}^\gamma |p| + e^{|p|} (\varepsilon_{11}^\gamma + \varepsilon_{11}^\beta) (e_{15}^2 + c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta) q_\beta}{-ie^p e_{15}^2 \varepsilon_{11}^\gamma |p| + e^{|p|} (\varepsilon_{11}^\gamma - \varepsilon_{11}^\beta) (e_{15}^2 + c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta) q_\beta} \quad (2.6)$$

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если  $\theta \ll \chi_\alpha^2$ , то  $\Phi_2 \rightarrow 0$  и  $U_1 \rightarrow -U_0$ , т.е. сдвиговые электроупругие волны не распространяются параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой кубической симметрии. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при  $\chi_\alpha^2 = 0$ ,  $R = 1$ ).

Далее, при  $\theta \sim \chi_\alpha^2$  амплитуда потенциала СПК существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны.

Преломленная волна скользит во второй среде под углом  $\phi$ , находимым из соотношения:  $\cos \phi = S_\beta S_\alpha^{-1} \cos \theta$ , т.е. величина  $S_\beta S_\alpha^{-1}$  играет роль показателя преломления.

Если показатель преломления больше единицы, то при углах скольжения  $\theta > \phi_n$  величина  $q_\beta$  становится мнимой и по модулю равной единице, т.е. возникает полное внутреннее отражение.

Как видно, пьезоэффект меняет величину  $\phi_n$  лишь постольку, поскольку перенормирует скорость акустических волн. В отличие от оптики и акустики непьезоэлектрических сред, отражение и преломление в пьезокристаллах отличается тем, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньших угла полного внутреннего отражения  $\phi_n$ . Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R / \text{Re } R)$  и

$\arctg(\text{Im } T / \text{Re } T)$  соответственно. Если показатель преломления меньше единицы и  $\rho^\alpha < \rho^\beta$ , то в непьезоэлектрических кристаллах граница может стать прозрачной ( $R=0$ ) для волн, скользющих под углом  $\theta_T = \arcsin\{(S_\beta S_\alpha^{-1})[(1 - S_\alpha^2 S_\beta^{-2})(\rho^\beta / \rho^\alpha - 1)]^{1/2}\}$ . В пьезоэлектриках условие прозрачности существенно ужесточается, т.к.  $R$  – комплексная величина и необходимо обращение в нуль ее действительной и мнимой частей.

**Заключение.** Рассмотрено просачивание плоской электроупругой сдвиговой волны через вакуумный промежуток между пьезокристаллами кубической и гексагональной симметрий классов 23 и 6mm.

Определены волновые поля в пьезоэлектрических кристаллах. Показано, что падающие волны, отражаясь на границе зазора (вакуума), просачиваются в гексагональный кристалл, где преломляются с показателем преломления  $S_\beta S_\alpha^{-1}$ , порождая в нем упругое поле. В зазоре при этом распространяются связанные поверхностные электроакустические волны, которые являются результатом расщепления известных волн Гуляева–Блюстейна [12,13] на два вида волн: симметричную и антисимметричную из-за взаимодействия электрических полей СПК при сближении пьезоэлектриков. Падающая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле кубической симметрии, а следовательно, и сопутствующее ей упругое колебание. В свою очередь, электрическое поле падающей волны частично просачивается в кристалл гексагональной симметрии, порождая в нем, около границы раздела волну электрического поля, распространяющуюся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в вакууме, просачивается в гексагональный пьезокристалл, порождая сопутствующие упругие колебания.

Далее, сдвиговые волны, параллельно поверхности кристаллов (при малых углах скольжения ( $\theta < \chi^2$ )) не могут распространяться. При углах скольжения  $\theta > \phi_n$  ( $\cos \phi_n = S_\beta S_\alpha^{-1}$ ), и если показатель преломления больше единицы, величина  $q$  становится мнимой и по модулю равной единице, т.е. Возникает полное внутреннее отражение. А также на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины  $\arctg(\text{Im } R / \text{Re } R)$  и  $\arctg(\text{Im } T / \text{Re } T)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Сопутствующие поверхностные колебания и усиление ультразвука при отражении от полупроводника с током. // ФТТ. 1974. Т.16. Вып.12. С.3144-3146.
2. Kaliski S. The passage of an ultrasonic wave across a contactless junction between two piezoelectric bodies.- Proc. Of vibr. Problem. Warsaw. 1966. V. 2. N 1. P. 7-13.
3. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240с.
4. Дзелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.

5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюзного научного семинара, Ереван, 1991. 23–26 июня. С.49–54.
6. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. № 3–4. С.78–82.
7. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум// ФТТ. 1969. Т.11. Вып.4. С.1027–1029.
8. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12–19.
9. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
10. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Берберян А.Х. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. № 1. С.63–65.
11. Bleustein J. L. A new surface wave in piezoelectric materials// Appl. Phys. Lett. 1968. V. 13. 1 .12. P. 412-413.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
16.11.2005

УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Геворкян А.В.

Ա. Վ. Գևորգյան

Ալիքային հավասարումները վերջավոր հաղորդիչ միջավայրում

Արտածված են երկայնական և լայնական ալիքների տարածումը նկարագրող հավասարումները վերջավոր հաղորդիչ միջավայրում՝ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

A.V. Gevorgyan

Wave Equations in Finitely Conducting Medium

The equations, describing longitudinal and transverse waves propagation in finitely conducting medium with the presence of external constant magnetic field, are derived.

Выведены уравнения, описывающие распространение продольных и поперечных волн в конечно-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля.

Для исследования волновых движений в конечно-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля будем исходить из системы линеаризированных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела (при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости), записанной в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  в виде [1-3]

$$c_2^2 \nabla^2 \vec{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad} \text{div} \vec{u} + \frac{H_0}{4\pi\rho} \text{rot} \vec{h} \times \vec{i}_{H_0} = \partial_t^2 \vec{u}$$

$$D \vec{h} = -\frac{4\pi\sigma H_0}{c^2} \partial_t \text{rot}(\vec{u} \times \vec{i}_{H_0}), \quad D \equiv \nabla^2 - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \partial_t$$

$$\text{div} \vec{h} = 0$$

где  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  – вектор смещения,  $\vec{h}(x_1, x_2, x_3, t)$  – вектор индуцированного магнитного поля,  $\vec{i}_{H_0}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  – единичный вектор направления внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$ ,  $c_2$  – скорость распространения упругих поперечных волн в среде,  $c_1$  – скорость продольных волн в среде,  $\rho$  – плотность материала среды,  $\sigma$  – удельная электропроводимость среды. Магнитная проницаемость среды принимается равной единице.

Представим вектор перемещения  $\vec{u}$  через потенциальную и соленоидальную части [2].

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}, \quad \text{div} \vec{\psi} = 0$$

где  $\varphi$  и  $\vec{\psi}$  – функции времени и координат, называемые скалярным и векторным потенциалами (представление Ламе).

Подставляя соотношения (2) в систему уравнений (1), после простых преобразований будем иметь

$$\text{grad}(\Delta_1 \varphi - \frac{H_0}{4\pi\rho} \vec{h} \cdot \vec{i}_{H_0}) + \text{rot}(\Delta_2 \vec{\psi} - \frac{H_0}{4\pi\rho} \vec{i}_{H_0} \times \vec{h}) = 0 \quad (3)$$

$$D\vec{h} = -H_0 4\pi\sigma c^{-2} \partial_t \text{rot} \text{rot}(\varphi \vec{i}_{H_0} + \vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0}) \quad (4)$$

$$\Delta_s \equiv c_s^2 \nabla^2 - \partial_t^2, \quad s = 1, 2$$

Умножая обе части уравнения (3) скалярно на вектор  $\vec{i}_{H_0}$ , получим следующее соотношение:

$$\Delta_1 \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0}) = -\Delta_2 \text{div}(\vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0}) \quad (5)$$

Применяя оператор  $D$  к уравнению (3), с учетом (4) и соотношений

$$\vec{i}_{H_0} \times D\vec{h} = -H_0 4\pi\sigma c^{-2} \partial_t [\text{grad}(\vec{i}_{H_0} \cdot \vec{F}) + \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})]$$

$$\vec{i}_{H_0} \cdot D\vec{h} = H_0 4\pi\sigma c^{-2} \partial_t \text{div}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})$$

$$\vec{F} = \text{rot}(\varphi \cdot \vec{i}_{H_0} + \vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0})$$

приходим к

$$\text{grad}[D\Delta_1 \varphi - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \text{div}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})] + \text{rot}[D\Delta_2 \vec{\psi} + 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})] = 0$$

$$v^2 = \frac{H_o^2}{4\pi\rho} \quad (6)$$

Применяя к уравнению (6) поочередно операции  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ , получим систему уравнений [1-2].

$$[D\Delta_1 \varphi - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \text{div}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})] = 0 \quad (7)$$

$$[D\Delta_2 \vec{\psi} + 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F})] = 0 \quad (8)$$

Далее, используя тождества

$$\text{div}(\vec{i}_{H_0} \times \vec{F}) = \nabla^2 \varphi - \text{div}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0} + \vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0})) \quad (9)$$

$$\text{rot}(\vec{F} \times \vec{i}_{H_0}) = (\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \vec{\psi} + \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0}))$$

уравнения (7) и (8) примут вид:

$$D\Delta_1 \varphi - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t [\nabla^2 \varphi - \text{div}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0} + \vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0}))] = 0 \quad (10)$$

$$D\Delta_2 \vec{\psi} - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t [(\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \vec{\psi} + \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0}))] = 0 \quad (11)$$

$$\vec{i}_{H_0} \nabla \equiv \alpha_k \partial_k \quad (\text{суммировать})$$

Учитывая соотношение (5), из уравнений (10) и (11) исключив, соответственно, функции  $\vec{\psi}$  и  $\varphi$ , получим

$$D\Delta_1 \Delta_2 \varphi - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t [\Delta_2 \nabla^2 \varphi + (\Delta_1 - \Delta_2) \text{div}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\varphi \vec{i}_{H_0}))] = 0 \quad (12)$$

$$D\Delta_1 \Delta_2 \vec{\psi} - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t [(\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \Delta_1 \vec{\psi} - \Delta_2 \text{rot}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0}))] = 0 \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) с помощью следующих тождеств

$$\text{rot}(\vec{i}_{H_0} \text{div}(\vec{\psi} \times \vec{i}_{H_0})) = (\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \vec{\psi} - \nabla^2 \vec{\psi} - \text{rot} \text{rot}((\vec{\psi} \cdot \vec{i}_{H_0}) \vec{i}_{H_0})$$

$$\operatorname{div}(\vec{i}_{H_0} \operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{i}_{H_0})) = (\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla)\varphi$$

преобразуются к виду

$$\left\{ D\Delta_1\Delta_2 - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \left[ \Delta_2 \nabla^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)(\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \right] \right\} \varphi = 0 \quad (14)$$

$$\left\{ D\Delta_1\Delta_2 - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \left[ \Delta_2 \nabla^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)(\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \right] \right\} \vec{\psi} - \\ - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \Delta_2 \operatorname{rotrot}(\vec{\psi} \cdot \vec{i}_{H_0}) \vec{i}_{H_0} = 0 \quad (15)$$

Для исключения последнего члена уравнения (15) умножим обе части уравнения (11) скалярно на единичный вектор  $\vec{i}_{H_0}$ , тогда

$$\left[ D\Delta_2 - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t (\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \right] (\vec{\psi} \cdot \vec{i}_{H_0}) = 0 \quad (16)$$

Наконец, с учетом (16) из (14) и (15) приходим к окончательным уравнениям для продольных и поперечных волн соответственно,

$$L\varphi = 0 \quad (17)$$

$$TL\vec{\psi} = 0 \quad (18)$$

$$L = D\Delta_1\Delta_2 - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t \left[ \Delta_2 \nabla^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)(\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla) \right]$$

$$T = D\Delta_2 - 4\pi\sigma v^2 c^{-2} \partial_t (\vec{i}_{H_0} \nabla)(\vec{i}_{H_0} \nabla)$$

Существенное упрощение уравнения (18) достигается, если использовать теорему Боджио [2], которая утверждает, что решение уравнения (18) получается как сумма решений более простых уравнений:

$$L\vec{\psi}' = 0 \quad (19)$$

$$T\vec{\psi}'' = 0 \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}' + \vec{\psi}'' \quad (20)$$

Отметим также, что уравнения (17) и (18) могут существенно упрощаться, в частности, в случае одномерных, плоских и антиплоских задач в зависимости от направления внешнего постоянного магнитного поля.

Еще одно обстоятельство.

При выводе уравнений (17) и (18) требовалось достаточной гладкости решений. Однако волновые уравнения (17) и (18) описывают волновые процессы в конечно-проводящей среде при любой гладкости решений и при любых обобщенных решениях [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.:Наука, 1983. 528с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.:Наука, 1982. 620с.
4. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.



УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛАТТЕРА  
ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Худаяров Б.А.

Բ. Ա. Խուդայարով

**Առաձգամածուցիկ սալերի և գլանային պանելների ֆլաթերի մաթեմատիկական մոդելավորումը**

Դիտարկվում է գազի հոսքով շրջհոսվող առաձգամածուցիկ սալերի և գլանային պանելների ֆլաթերի խնդիրը: Աշխատանքի հիմնական ուղղվածությունը նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների հաշվառումն է գերձայնային արագությունների դեպքում: Մշակված է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման ալգորիթը: Բերված են ֆլաթերի կրիտիկական արագության հաշվարկման արդյունքները:

**B. A. Khudayarov**

**Mathematical modeling of flutter of viscoelastic plates and cylindrical panels**

The flutter of viscoelastic plates and cylindrical panels streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basis of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей, обтекаемых потоком газа. Основное направление работы состояло в учете вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Разработан алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений. Приведены результаты расчетов критической скорости флаттера

**Введение.** Проблемы панельного флаттера элементов тонкостенных конструкций представляют значительный интерес для авиа и ракетостроения. Эти явления порождаются весьма разнообразными причинами. Поэтому вопросы флаттера постоянно требуют новых исследований, сочетающих тщательность, детальность и общность анализа.

В этой статье рассматривается задача о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата в сверхзвуковом потоке газа с учетом геометрических и аэродинамических нелинейностей. Здесь даются в двухмерных постановках математические модели, при которых используется теория пологих оболочек Маргерра [1] применительно к исследованию проблем прочности, жесткости и устойчивости тонкостенных конструкций типа авиационных крыльев. Аэродинамическое давление рассчитано в соответствии с поршневой теорией [2].

Ранее в работах [3-7] и др. уже рассматривались подобные задачи для упругих как однослойных, так и трехслойных пластин в сверхзвуковом потоке газа.

При реальном учете физико-механических свойств материала изучаемого объекта, математической моделью рассматриваемых задач служат системы ИДУ в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. Полученные нелинейные ИДУ в частных производных с помощью метода Бубнова-Галеркина при рассмотренных граничных условиях сводятся к решению систем нелинейных обыкновенных ИДУ с постоянными или переменными коэффициентами относительно функции времени. Интегрирование

уравнений, полученных с помощью многочленной аппроксимации перемещений, было проведено численным методом, предложенным в работах [8, 10]. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи, пригодный для всех вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций типа пластин, панелей и оболочек.

### 1. Постановка задачи и методы решения

Основные зависимости, относящиеся к модели вязкоупругой пластины и оболочки, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява, были приведены в работах [9, 10] и др. Использование данной модели позволяет достичь достаточной точности при решении ряда практических задач.

Рассмотрим пологую вязкоупругую оболочку, обтекаемую с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа; невозмущенную скорость потока  $V$  будем считать направленной вдоль образующей. Будем пользоваться обычными гипотезами теории упругих оболочек [11, 12], считая справедливой гипотезу Кирхгофа-Лява и полагая прогибы малыми по сравнению с толщиной оболочки.

Уравнения Маргерра в декартовой системе координат относительно перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций можно записать в следующем виде [10]:

$$\begin{aligned} (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + L_1(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + L_2(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ D(1-R^*) \nabla^4 w + L_3^*(u, v, w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – жесткость при изгибе;  $\rho$  – плотность материала;  $h$  – толщина оболочки;  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;

$$\begin{aligned} L_1(w) &= -(k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ L_2(w) &= -(\mu k_x + k_y) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ L_3^*(u, v, w) &= (1-R^*) \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ -(k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} - (\mu k_x + k_y) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ &\left. + (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w - \frac{k_x + \mu k_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{k_y + \mu k_x}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w \right] + \right. \\
& + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left. \right\} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial y} - (\mu k_x + k_y) w \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}
\end{aligned}$$

где  $q = -B \frac{\partial w}{\partial t} - BV \frac{\partial w}{\partial x} - B_1 V^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \dots$  –аэродинамическое давление,

определяемое по теории Ильюшина;  $B = \frac{\chi p_\infty}{V_\infty}$ ,  $B_1 = \frac{\chi(\chi+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$ ,

$\chi$  – показатель политропы газа;  $p_\infty, V_\infty$  –соответственно давление и скорость звука на бесконечности.

Для полного определения задачи к ИДУ (1) необходимо добавить граничные и начальные условия. Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{array}{ll}
\text{при } x=0, x=a & w=0; v=0; N_x=0; M_x=0; \\
\text{при } y=0, y=b & w=0; u=0; N_y=0; M_y=0.
\end{array}$$

При интегрировании основных уравнений должны быть удовлетворены также следующие начальные условия, относящиеся к перемещениям и скоростям точек срединной поверхности оболочки:

$$u(x,y,0)=\varphi_1(x,y), \quad \dot{u}(x,y,0) = \psi_1(x,y) \quad (2)$$

$$v(x,y,0)=\varphi_2(x,y), \quad \dot{v}(x,y,0) = \psi_2(x,y) \quad (3)$$

$$w(x,y,0)=\varphi_3(x,y), \quad \dot{w}(x,y,0) = \psi_1(x,y) \quad (4)$$

Представим функцию  $u(x,y,t)$ ,  $v(x,y,t)$ ,  $w(x,y,t)$  в виде разложения по функциям  $\varphi_{nm}(x,y)$ ,  $\psi_{nm}(x,y)$ ,  $\theta_{nm}(x,y)$ , удовлетворяющим соответствующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm} \varphi_{nm}(x,y) \\
v(x,y,t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm} \psi_{nm}(x,y) \\
w(x,y,t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^L w_{nm} \theta_{nm}(x,y)
\end{aligned} \quad (5)$$

где  $u_{nm}=u_{nm}(t)$   $v_{nm}=v_{nm}(t)$   $w_{nm}=w_{nm}(t)$  –искомые функции времени;  $\varphi_{nm}(x,y)$ ,  $\psi_{nm}(x,y)$ ,  $\theta_{nm}(x,y)$ – известные ортогональные функции, зависящие от граничных условий.

Подставляя (5) в (1) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина, для определения  $u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm}(t)$  получим систему нелинейных ИДУ в виде:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} \ddot{u}_{nm} - \Omega(1 - R^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( A_{1k \ln m} u_{nm} + \frac{1 + \mu}{2} B_{1k \ln m} v_{nm} - \right. \right. \\ \left. \left. - (k_x + \mu k_y) C_{1k \ln m} w_{kl} \right) + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{1k \ln mir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \Omega(1 - R^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{1 + \mu}{2} A_{2k \ln m} u_{nm} + B_{2k \ln m} v_{nm} - \right. \right. \\ \left. \left. - (k_y + \mu k_x) C_{2k \ln m} w_{kl} \right) + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{2k \ln mir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} \left( \ddot{w}_{nm} + M_\lambda \dot{w}_{nm} \right) + (1 - R^*) \Omega \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{1 + \mu}{2} A_{3k \ln m} u_{nm} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{3k \ln m} v_{nm} + C_{3k \ln m} w_{nm} \right) - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M P_{k \ln mir} w_{nm} w_{ir} \right\} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{nm} \times \\ \times (1 - R^*) \{ A_{4k \ln mir} u_{ir} + B_{4k \ln mir} v_{ir} + C_{4k \ln mir} w_{ir} \} \Omega + \\ + \chi M_p \left( \lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{k \ln m} w_{nm} + \frac{\chi + 1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{kenmir} w_{nm} w_{ir} \right) = 0 \quad (8)$$

$$N_{1k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{nm} \varphi_{kl} dx dy, \quad N_{2k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_{nm} \psi_{kl} dx dy$$

$$A_{1k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \varphi_{nm,xx}'' + \frac{\lambda^2 (1 - \mu)}{2} \varphi_{nm,yy}'' \right) \varphi_{kl} dx dy$$

$$A_{2k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda \varphi_{nm,xy}'' \psi_{kl} dx dy, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \lambda_1 = \frac{a}{h}$$

$$B_{1k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda \psi_{nm,xy}'' \varphi_{kl} dx dy, \quad C_{1k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \beta_1 \lambda_1 \theta'_{nm,x} \varphi_{kl} dx dy$$

$$B_{2k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1 - \mu}{2} \psi_{nm,xx}'' + \lambda^2 \psi_{nm,yy}'' \right) \psi_{kl} dx dy$$

$$C_{2k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \beta_1 \lambda_1 \lambda \theta'_{nm,y} \psi_{kl} dx dy, \quad \Omega = \frac{M_E}{1 - \mu^2}$$

$$D_{1k \ln mir} = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^1 \int_0^1 \left( \theta'_{nm,x} \theta''_{ir,xx} + \frac{\lambda^2(1-\mu)}{2} \theta'_{nm,x} \theta''_{ir,yy} + \frac{\lambda^2(1+\mu)}{2} \theta'_{nm,y} \theta''_{ir,xy} \right) \theta_{kl} dx dy$$

$$D_{2k \ln mir} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_0^1 \int_0^1 \left( \lambda^2 \theta'_{nm,y} \theta''_{ir,yy} + \frac{1+\mu}{2} \theta'_{nm,x} \theta''_{ir,xy} + \frac{1-\mu}{2} \theta'_{nm,y} \theta''_{ir,xx} \right) \psi_{kl} dx dy$$

$$N_{3k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \theta_{nm} \theta_{kl} dx dy, \quad A_{3k \ln m} = - \int_0^1 \int_0^1 (k_x + \mu k_y) \lambda_1 \beta_1 \theta'_{nm,x} \theta_{kl} dx dy$$

$$B_{3k \ln m} = - \int_0^1 \int_0^1 (k_y + \mu k_x) \lambda^2 \beta_1 \psi'_{nm,y} \theta_{kl} dx dy, \quad C_{3k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) \times \right. \\ \left. \times \lambda^2 \beta_1^2 \theta_{nm} + \frac{1}{12\lambda_1^2} \{ \theta_{nm,xxxx}^{IV} + 2\lambda^2 \theta_{nm,xyxy}^{IV} + \lambda^4 \theta_{nm,yyyy}^{IV} \} \right] \theta_{kl} dx dy$$

$$P_{k \ln mir} = \frac{k_x + \mu k_y}{2} \beta_1 \cdot K_{1k \ln mir} + \frac{k_y + \mu k_x}{2} \beta_1 \lambda K_{2k \ln mir}$$

$$K_{1k \ln mir} = \int_0^1 \int_0^1 \theta'_{nm,x} \theta'_{ir,x} \theta_{kl} dx dy, \quad K_{2k \ln mir} = \int_0^1 \int_0^1 \theta'_{nm,y} \theta'_{ir,y} \theta_{kl} dx dy$$

$$A_{4k \ln mir} = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{\lambda} \theta''_{nm,xx} \theta'_{ir,x} + \frac{1}{\lambda} \theta'_{nm,x} \theta'_{ir,xx} + \frac{1-\mu}{2} \theta'_{nm,y} \theta''_{ir,xy} + \lambda \mu \theta''_{nm,yy} \theta'_{ir,x} + \right. \\ \left. + \lambda \mu \theta'_{nm,y} \theta''_{ir,xy} + \lambda(1-\mu) \theta''_{nm,xy} \theta'_{ir,y} + \lambda \frac{1-\mu}{2} \theta'_{nm,x} \theta''_{ir,yy} \right) \theta_{kl} dx dy$$

$$B_{4k \ln mir} = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^1 \int_0^1 \left( \mu \theta''_{nm,xx} \theta'_{ir,y} + \mu \theta'_{nm,x} \psi''_{ir,xy} + \frac{1-\mu}{2} \theta'_{nm,y} \psi''_{ir,xx} + \lambda \theta''_{nm,yy} \psi'_{ir,y} + \right. \\ \left. + \lambda^2 \theta'_{nm,y} \cdot \psi''_{ir,yy} + (1-\mu) \theta''_{nm,xy} \psi'_{ir,x} + \frac{1-\mu}{2} \theta'_{nm,x} \psi''_{ir,xy} \right) \theta_{kl} dx dy$$

$$C_{4k \ln mir} = -\beta_1 \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{k_x + \mu k_y}{\lambda} \left[ \theta''_{nm,xx} \theta_{ir} + \theta'_{nm,x} \theta'_{ir,x} \right] + \lambda (k_y + \mu k_x) \times \right. \\ \left. \times \left[ \theta''_{nm,yy} \theta_{ir} + \theta'_{nm,y} \theta'_{ir,y} \right] \right) \theta_{ke} dx dy, \quad \gamma_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \theta'_{nm,x} \theta_{kl} dx dy$$

$$\Gamma_{k \ln mir} = \int_0^1 \int_0^1 \theta'_{nm,x} \theta'_{ir,x} \theta_{kl} dx dy$$

$$u_{nm}(o) = u_{onm}, \quad \dot{u}(o) = \dot{u}_{onm}, \quad v_{nm}(o) = v_{onm}$$

$$\dot{v}(o) = \dot{v}_{onm}, \quad w_{nm}(o) = w_{onm}, \quad \dot{w}(o) = \dot{w}_{onm}$$

$$n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M}$$

где  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  – искомые функции времени.

## 2. Алгоритм численного решения ИДУ задачи о флаттере вязкоупругих пластин и оболочек

Проблемы алгоритмизации задачи механики сплошных сред изучены в работах академика АН РУз В.К.Кабулова [13-15] и др. В данном разделе этот вопрос рассматривается для нелинейных задач о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата. Для вычисления критической скорости флаттера предлагается численный алгоритм, построенный на основе метода Ф.Бадалова и Х.Эшматова [8, 10].

Одним из основных преимуществ метода Ф.Бадалова и Х.Эшматова является его универсальность и простота реализации алгоритмов решений на персональных компьютерах. Здесь этот метод применим и для систем (6)–(8). Запишем эту систему в интегральной форме. Полагая затем  $t=t_i$ ,  $t_i=i h$ ,  $i=1,2,\dots$  ( $h=\text{const}$ ) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами для вычисления  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$ , получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} u_{pnm} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} (u_{0nm} + \dot{u}_{onm} t_p) - \\
 & - \Omega \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ A_{1k \ln m} \left[ u_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm} \right] + \right. \right. \\
 & + \frac{1+\mu}{2} B_{1k \ln m} \left[ v_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right] - \\
 & \left. \left. - (k_x + \mu k_y) C_{1k \ln m} \left[ w_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} \right] \right] \right\} + \\
 & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{1k \ln mir} \left( w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \\
 & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} v_{pnm} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} (v_{0nm} + \dot{v}_{onm} t_p) - \Omega \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \times \\
 & \times \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1+\mu}{2} A_{2k \ln m} \left[ u_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_{2k \ln m} \left[ v_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (k_y + \mu k_x) C_{2k \ln m} \left[ w_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} \right] \right] \right\} +
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{2k \ln mir} \left( w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \Bigg\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} w_{pnm} = \frac{1}{1 + A_p M_\lambda} \times \\ & \times \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} \left\langle w_{0nm} + \left( \dot{w}_{0nm} + M_\lambda w_{0nm} \right) t_p \right\rangle - \right. \\ & \quad - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \left( M_\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} w_{jnm} - \right. \\ & \quad - (t_p - t_j) \left[ \chi M_p \left( \lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \gamma_{k \ln m} w_{jnm} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\chi+1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{k \ln mir} w_{jnm} w_{jir} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{1+\mu}{2} \Omega \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{3k \ln m} \left( u_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm} \right) + \\ & \quad + \Omega \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{3k \ln m} \left( v_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-snm} \right) + \\ & \quad + \Omega \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{3k \ln m} \left( w_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} \right) - \\ & \quad - \Omega \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M p_{k \ln mir} \left( w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\ & \quad - \Omega \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{jnm} \left\langle A_{4k \ln mir} \left( u_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-sir} \right) + \right. \\ & \quad + B_{4k \ln mir} \left( v_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-sir} \right) + \\ & \quad \left. \left. + C_{4k \ln mir} \left( w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-sir} \right) \right\rangle \right\} \Bigg\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots; \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M}$$

где  $A_j$ ,  $B_s$  –числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции:

$$A_0 = h/2, A_j = h, j = \overline{1, i-1}, A_i = h/2, B_0 = h^\alpha / 2,$$

$$B_j = h^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha) / 2, s = j; B_s = h^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha) / 2$$

На основе разработанного алгоритма создан пакет прикладных программ на языке «Delphi».

### 3. Численные результаты

В качестве критерия, определяющего критическую скорость  $V_{кр}$ , принимаем условие, предложенное в работе [16]. В таблице приводятся результаты расчетов для вязкоупругой цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа с постоянными параметрами  $\chi=1,4$ ;  $V_\infty=3,4 \cdot 10^4$  см/с;  $\mu=0,32$ ;  $E=7 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $\rho_\infty=1,014$  кг/см<sup>3</sup>.

Таблица

**Зависимость критической скорости флаттера  
от физико-механических и геометрических параметров  
цилиндрической панели**

A	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\lambda_1$	$\beta_1$	$V_{кр}$
0						1528
0,001						1497
0,01	0,25	0,05	6	100	0,01	1386
0,1						871
	0,1					575
0,1	0,3	0,05	6	100	0,01	918
	0,5					1281
		0,1				869
0,1	0,25	0,3	6	100	0,01	867
			3,5			964
0,1	0,25	0,05	4	100	0,01	1251
			4,5			1143
			5,5			1658
				50		1184
0,1	0,25	0,05	6	75	0,01	988
				100		871
					0,005	723
0,1	0,25	0,05	6	100	0,008	807
					0,015	1324

Как видно из анализа результатов, приведенных в таблице, критические значения скорости флаттера  $V_{кр}$  оказываются в упругом ( $A=0$ ) и в вязкоупругом случае ( $A=0,1$ ), соответственно, равными 1528 и 871. Таким

образом, вязкоупругие свойства материала конструкций приводят к уменьшению критической скорости флаттера. Влияние коэффициента вязкости  $A$  на критическую скорость флаттера соответствует результатам Г.С. Ларионова [17] и В.И. Матяша [18].

Обратим внимание на влияние параметра сингулярности ( $\alpha$ ) на критическую скорость флаттера. Для  $\alpha = 0,1; 0,3$  критические скорости флаттера, найденные по формуле (9-11), соответственно равны 575 и 918 и отличаются друг от друга на 59,6 %. Следовательно, учет этого эффекта при проектировании в авиа и ракетостроении имеет большое значение для обеспечения безопасности полета.

Изучено влияние параметра затухания  $\beta$  на критическую скорость  $V_{кр}$  флаттера. Расчеты были проведены при  $\beta=0,1$  и  $\beta=0,3$ . Полученные результаты показывают, что влияние параметра затухания  $\beta$  на критическую скорость флаттера панели незначительно.

Таблица показывает, что увеличение параметра  $\lambda_1$  приводит к уменьшению критической скорости флаттера, а с увеличением параметров  $\lambda$  и  $\beta_1$ , критическое число  $V_{кр}$  увеличивается, т.е. уменьшается опасность флаттерных движений.

В заключение отметим, что влияние параметра затухания  $\beta$  ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости  $A$  и сингулярности  $\alpha$  незначительно, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно описать наследственные свойства материала конструкций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. - М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. - 1956. Т. XX. - Вып. 6. - С. 733-755.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С. 91-96.

4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №5. С. 96-99.
5. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Изв. АН Армянской ССР. Серия физ-мат. наук. 1961. Т. XIV. №5. С. 21-30.
6. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вест. МГУ. Серия 1. Математика, Механика. - 1994. - №4. - С. 40-44.
7. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере полой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167-171.
8. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5. С. 867-871.
9. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир. 1965. 200 с.
10. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис. доктора техн. наук: 18.05.13. Киев, 1991. 337 с.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
12. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
13. Кабулов В. К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. Ташкент: Фан. 1979. 304 с.
14. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной прочности. Ташкент: Фан, 1966. 391 с.
15. Кабулов В.К. Проблемы алгоритмизации в теории вязкоупругости // Вопр. вычисл. и прикл. математики. Ташкент. 1996. – Вып.102. С.4-18.
16. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С. 59-62.
17. Ларионов Г.С. Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки // Механика твердого тела. 1974. №4. С. 95-100.
18. Матяш В.И. Флаттер упруго-вязкой пластинки // Механика полимеров. 1971. №6. С.1077-1083.

Ташкентский институт  
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию  
25.05.2005

УДК.678.067.5.539.4.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТАРЕНИЯ НА ПРОЧНОСТНЫЕ И  
ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ГЕТИНАКСА

Валесян С.Ш.

Ս. Շ. Վալեսյան

Գետինաքսի ամրության և դեֆորմացիոն հատկությունների վրա ծերացման ազդեցության  
հետազոտումը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ծերացման ազդեցությունը ջերմամամլման տեխնոլոգիայով պատրաստված գետինաքսի ամրության և դեֆորմացիոն հատկությունների վրա: Բացահայտված է պոլիմերիզացիայի ընթացքում ջերմամամլման ճնշման մեծության ազդեցությունը գետինաքսի մեխանիկական վարքի վրա ծերացման հաշվառմամբ: Հաշվարկված և կառուցված են ապրոկսիմացված կորերը:

S.Sh.Valesyan

Investigation of the influence of aging on strength and deformation properties of getinaks.

An influence of aging on strength and deformation properties of getinaks manufactured by regulation thermopressing technology is investigated. An influence of value of pressure of thermopressing during polymerization to the mechanical behavior of getinaks taking into account aging is given. Approximated curves are calculated and designed.

В работе исследуется влияние старения на прочностные и деформационные свойства гетинакса, изготовленного по технологии регулируемого термопрессования. Выявлено влияние величины давления термопрессования в процессе полимеризации на механическое поведение гетинакса с учетом старения. Рассчитаны и построены аппроксимированные кривые.

Известно, что армированные композиционные материалы на основе полимерных связующих подвержены влиянию старения: то есть величины механических характеристик этих материалов изменяются со временем.

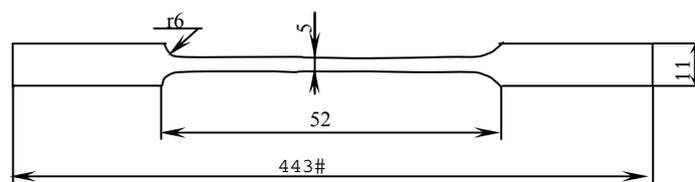
В работах [1-8] исследуется влияние старения на прочность и деформационные свойства армированных композиционных материалов с учетом физико-механической природы их составляющих, ориентации армирования, технологии переработки материала, температурно-влажностных условий окружающей среды и др.

Согласно данным указанных работ, полученным в результате испытания ориентированных стеклопластиков СВМ [1,2,3,4,8], ЭФ-32-301 и ФН[6], КАСТ-3[4], стеклопластика на основе рубленного стекложгута [7,5], стеклотекстолита [4], прочность и механическое поведение этих материалов как при кратковременных, так и при длительных силовых воздействиях могут оказаться весьма чувствительными к “возрасту”.

Представляется целесообразным изучение влияния старения на прочность и деформативность, широко используемого в различных отраслях техники, материала- гетинакса.

Опытные образцы в виде двухсторонних лопаток (фиг.1), размеры которых соответствуют требованиям ГОСТа 11262-80, были вырезаны из

листовых гетинаксов толщиной 5мм, полученных по технологии регулируемого термопрессования [9,10] при трех различных значениях давления. Последние были изготовлены на основе препрега, полученного из пропитанной раствором фенол-формальдегидного связующего сульфат-целлюлозной бумаги и высушенного при температуре 100-140°C согласно ГОСТу 25500-82.



Фиг.1. Образец в виде двухсторонней лопатки.

Листовые гетинаксы всех трех партий после полимеризации остывали в выключенной печи во избежание возникновения температурных напряжений, а затем хранились в лабораторном помещении при температуре среды 20-25°C.

Испытания опытных образцов на растяжение, проведенные через 1 год и 4 года после их изготовления, осуществлялись на испытательной машине ZD 10/90 при скорости нагружения 5 мм/мин. Деформации образцов измерялись с помощью механических индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм.

В каждом случае были испытаны по 3 образца-близнеца, разрушение которых имело место в рабочей зоне. При этом максимальное отклонение полученных механических характеристик по отношению к среднему их значению не превышало 11%.

Результаты испытаний приведены в табл. 1 и на фиг. 2.

Таблица 1

NN серии образцов	Давление при прессовании образцов, МПа	Возраст образцов ( в момент испытания, год	Прочность образцов при растяжении, МПа
I	1,9	1	117,3(1.322
		4	118,4(1.334
II	2,4	1	136,1(14.997
		4	144,3(15.903
III	5,1	1	140,4(5.64
		4	152,8(5.176

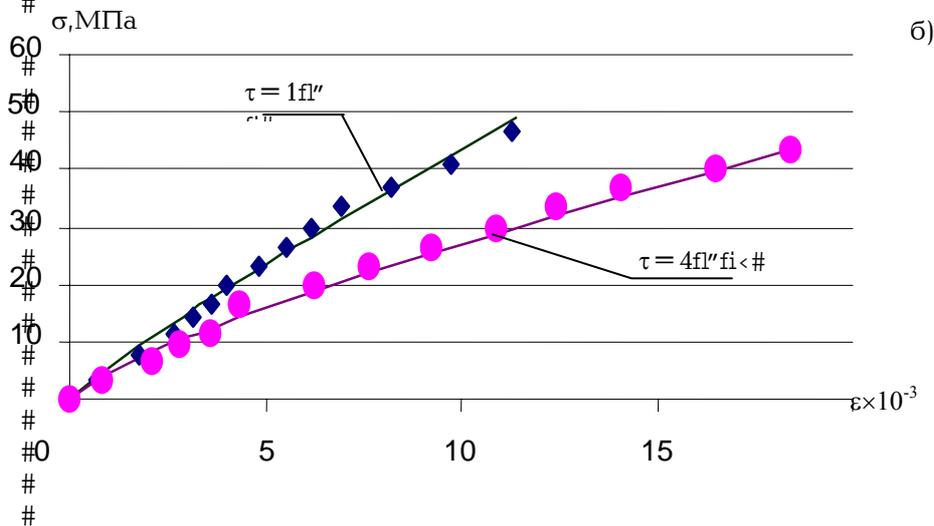
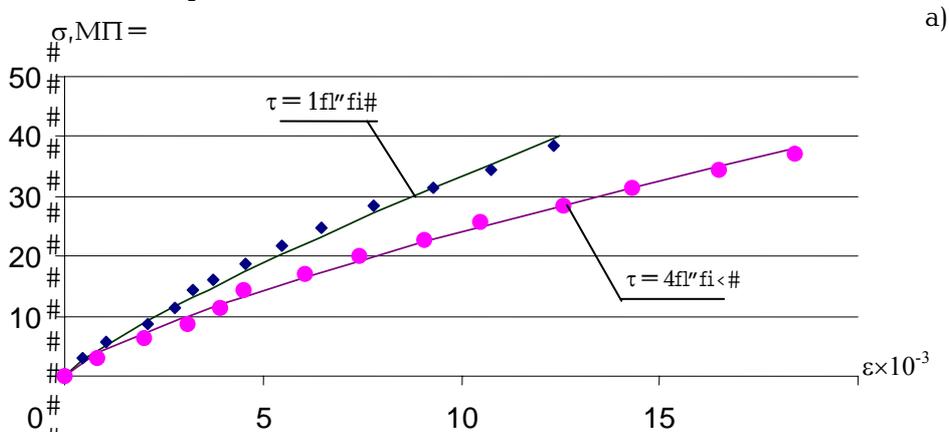
#

Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что изменение прочности гетинакса в зависимости от величины давления прессования как в возрасте 1 года, так и в возрасте 4 лет носит один и тот же характер. А именно в обоих указанных возрастах высокое давление прессования приводит к большей прочности гетинакса при растяжении.

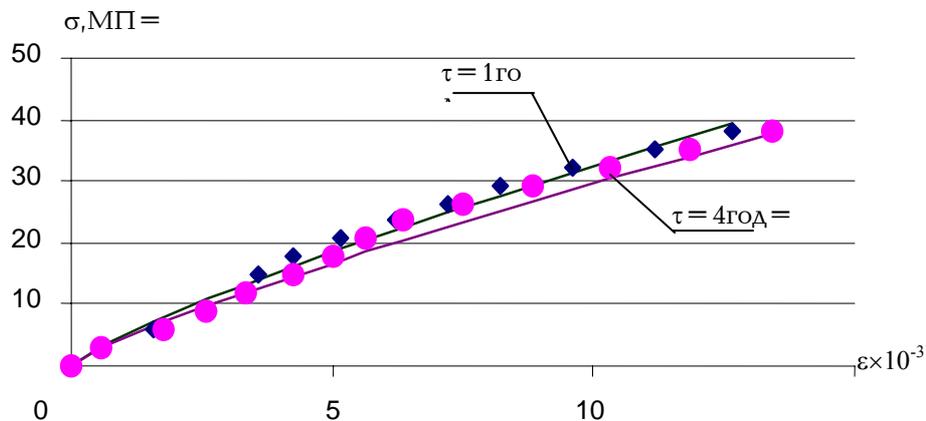
Так, для  $\tau=1$  год прочность образцов второй серии, спрессованных под давлением 2,4 МПа, оказалась на 16% больше по сравнению с прочностью образцов первой серии, спрессованных под давлением 1,9 МПа. Прочность же образцов третьей серии, спрессованных под давлением 5,1 МПа, приблизительно на 20% превышает прочность образцов первой серии (табл.1).

Для  $\tau=4$  года прочность образцов второй и третьей серий по сравнению с прочностью образцов первой серии оказались большими приблизительно на 22 и 29% соответственно.

Согласно данным табл.1 в случае образцов первой серии старение практически не повлияло на прочность гетинакса при растяжении. В случаях образцов остальных серий увеличение возраста с 1 года до 4-х лет приводит к увеличению прочности гетинакса, в частности, для третьей серии, достигающего приблизительно 9%.



в)



Фиг.2. Диаграммы растяжения образцов из гетинакса, спрессованных под давлением 1,9 МПа (а), 2,4 МПа (б), 5,1 МПа (в).

В работе [8] приводятся результаты по исследованию влияния 20-тилетнего старения в лабораторном помещении стеклопластика СВМ 1:1 на прочность при растяжении. В этой работе показано, что старение от 1 года до 4 лет приводит к увеличению прочности стеклопластика с углом армирования  $\varphi=0^\circ$  примерно на 10%. Согласно данным табл. 1 настоящей работы качественно и количественно аналогичное явление наблюдается и у гетинакса, спрессованного под давлением 5.1 МПа.

На фиг. 2 точками показаны экспериментально полученные значения зависимости напряжение – деформация гетинакса, спрессованного при вышеуказанных уровнях давления и испытанных в возрасте 1 года и 4 лет.

Экспериментальные данные были аппроксимированы кривыми, построенными согласно формуле

$$\sigma = \alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^n$$

Значения параметров аппроксимации  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $n$  приведены в табл. 2.

#

Таблица 2

#	I серия#		II серия#		III серия#	
	$\tau@4\#$	$\tau@7\#$	$\tau@4\#$	$\tau@7\#$	$\tau@4\#$	$\tau@7\#$
$\alpha\#$	0,31014	0,400215	0,10236	0.68998	0.40125	1.11215
$\beta\#$	5,201111	4,00104	5,49999	3.99987	4.6213	3.88787
$n\#$	0,7981	0,6987	0,8874	0.6986	0.78954	0.6986

Из приведенных кривых на фиг.2 можно заключить, что в рассматриваемых случаях испытаний, аппроксимацию экспериментальных данных указанной выше формулой можно считать приемлемой.

Согласно приведенным на фиг.2 данным, при кратковременных силовых воздействиях старение приводит к увеличению деформируемости гетинакса и тем меньше, чем больше уровень давления при прессовании материала. Так, величина отношения деформаций, зафиксированных при растягивающем напряжении  $\sigma_{30}$  МПа, спрессованных под давлением 1.9 МПа, 2.4 МПа и 5.1 МПа, составляет соответственно 1.6, 1.7 и 1.1.

Исходя из вышеизложенного анализа, можно сделать вывод, что при изготовлении конструктивных элементов из гетинакса на основе сульфат-целлюлозной бумаги и фенол-формальдегидной смолы прессование следует проводить под давлением не менее 5.1 МПа, которое обеспечит меньшие деформационные изменения и практическую независимость механических свойств от возраста, т.е. надежность и долговечность эксплуатации.

#

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян М.М. О ползучести стеклопластика СВМ в разный период после изготовления материала//Изв.АН. Арм.ССР.Сер. физ.-мат. наук.1964.Т.17.№5.С.51-60.
2. Мартиросян М.М. Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВМ при растяжении с учетом ориентации волокон//Мех.пол. 1965.№6.С.20-29.
3. Мартиросян М.М. К описанию ползучести стеклопластика СВМ 1:1 с помощью теории упруго-ползучего тела// Изв. АН.Арм.ССР.Механика.1966.Т.19.№6.С.42-51.
4. Огибалов П.М., Тюнеева И.М. Влияние длительного хранения на механические свойства армированных пластиков// Мех. пол.1969.№3. С.556-558.
5. Смирнова З.А., Власов П.В. Прочностные свойства и старение листовых стеклопластиков в различных климатических условиях//Мех. пол. 1971.№3.С.554-558.
6. Грицах Л.Е., Ющенко Ю.Н., Литвиенко Ю.А., Розенберг Л.Б. Влияние различных условий испытания на характер разрушения образцов//Мех. пол.1976.№6. С.1107-1108.
7. Гракова Т.С., Киселева Г.И., Кочуева Л.И. Исследование естественного старения стеклопластиновых материалов в различных климатических районах//Научно-техн.сб. 1980. Серия XXIV. вып.31. С.35-37.
8. Мартиросян М.М. О длительном старении стеклопластиков//Мех. композит. мат.-1985.-№1.-с.67-70.
9. Симонян А.М., Валесян С.Ш. Конструкции оправок для регулируемого самопрессования композитов в процессе полимеризации//Изв. НАН Армении.Сер.ТН.1999.№1.С.14-19.
10. Симонян А.М., Валесян С.Ш. Эффективная технология изготовления элементов конструкций из полимерного композиционного материала// Сб. научн. трудов конференции ,посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна.1999.С.197-201.
11. Справочник по электротехническим материалам. Под ред. Ю.В.Корицкого, В.В. Пасынков, Б.М. Тареев.М.:Энергоатомиздат,1987.Т.1. С. 368. (С. 313-315)

#  
#

Институт механики  
НАН Армении

#  
#

Поступила в редакцию  
18.07.2005

УДК 532.5, 62,62-233

ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ШИРИНЫ ШЕРОХОВАТОГО ЗАЗОРА ИЛИ КАНАЛА  
СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Степанов И.А.

E-mail: [igstepanov@yahoo.com](mailto:igstepanov@yahoo.com)

Ի. Ա. Ստեպանով

Անհարթություններով ճեղքի կամ բարդ մակերևույթով փողանցքի միջին լայնության հաշվարկը

Նոր գործոն է հաշվի առնված անհարթություններով ճեղքի միջին լայնության հաշվարկի ժամանակ, երբ անհարթությունները համաչափելի են նրա լայնության հետ: Նրա հաշվառումը բերում է ճեղքի միջին լայնության մինչև մի քանի տասնյակ տոկոսի փոքրացման: Այդ մեթոդը կիրառելի է նաև բարդ մակերևույթով փողանցքի միջին լայնության կամ լայնական հատույթի մակերեսի հաշվարկի համար:

I.A.Stepanov

Calculation of the average width of a clearance with roughness or a channel with complicated shape of surface

A new factor is taken into account in the calculation of the average width of a clearance with roughness whose size is comparable to its width. Taking this factor into account leads to a reduction of the average width of the clearance from a few dozen percent. This method is applicable also to the calculation of the average width or cross sectional area of a channel or a pipe with complicated shape of surface.

Новый фактор учтён в вычислении средней ширины зазора, размер шероховатости которого сравним с его шириной. Его учет приводит к уменьшению средней ширины зазора на величину до нескольких десятков процентов. Этот метод применим и к вычислению среднего значения ширины или площади поперечного сечения канала со сложной формой поверхности.

**Введение.**

В некоторых задачах техники, например, в механике смазки в деталях машин возникает необходимость вычисления средней ширины зазора, размер шероховатости в котором сравним с его шириной [1–4]. Это среднее значение используется в дальнейших расчетах. Ранее в таком вычислении не учитывался один фактор: движение жидкости через зазор. В данной статье показано, что учет этого фактора приводит к уменьшению этой средней ширины на величину до нескольких десятков процентов. Эта же формула может быть обобществлена для вычисления среднего значения ширины или площади поперечного сечения канала со сложной формой поверхности, размер неровностей которой сравним с его диаметром [5].

**Теория.**

Рассмотрим двумерный зазор. На верхней и нижней поверхностях его имеется шероховатость. Обозначим ширину зазора  $h(x)$ . Ось  $x$  направлена вдоль зазора. Можно написать

$$h(x) = h_0(x) + g(x) \quad (1)$$

где  $h_0(x)$  – ширина зазора без шероховатости, а  $g(x)$  – функция, описывающая шероховатость. Предположим, что шероховатость состоит из пиков, уменьшающих ширину зазора, и из впадин, делающих эту ширину больше, чем  $h_0(x)$ . Предположим, что площадь пиков равна площади впадин. Тогда, согласно традиционному методу,

$$\langle h(x) \rangle = \langle h_0(x) + g(x) \rangle = h_0(x) \quad (2)$$

[1–4]. Действительно, традиционный метод – это расчет по формуле

$$\langle f(x) \rangle = 1/L \int_0^L f(x) dx \quad (3)$$

В нашем случае  $L$  – это длина зазора.

Однако, у этого метода есть недостаток: не учитывается движение жидкости вдоль зазора. Это приводит к неверному результату:  $\langle h(x) \rangle$  не зависит от величины шероховатости. Но  $\langle h(x) \rangle$  – это величина, пропорциональная количеству жидкости, проходящему через зазор. Если сумма высот пиков верхней и нижней поверхностей равна  $h_0(x)$ , то жидкость через зазор не пойдёт, хотя и в этом случае  $\langle h(x) \rangle = h_0(x)$ .

Рассмотрим, например, следующую задачу. Катер идёт по реке от пункта А до пункта Б и обратно. Скорость катера в стоячей воде –  $v_0$ , скорость течения –  $\Delta$ . Определить среднюю скорость катера. Эту задачу можно попытаться решить по формуле (3):

$$\langle v \rangle = 1/2L \int_0^{2L} v(x) dx = 1/2L \left( \int_0^L (v_0 + \Delta) dx + \int_L^{2L} (v_0 - \Delta) dx \right) = v_0 \quad (4)$$

где  $L$  – расстояние от А до Б. Но это решение неверно. Правильное решение таково:

$$\langle v \rangle = 2L / (L/(v_0 + \Delta) + L/(v_0 - \Delta)) = v_0 - \Delta^2 / v_0 \quad (5)$$

Решим нашу задачу про шероховатость по аналогии. Предположим, что среднее значение высоты пика (или впадины) шероховатости –  $\Delta/2$ . Сумма средних значений высот пиков шероховатости нижней и верхней поверхностей равна  $\Delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle h(x) \rangle &= \langle h_0(x) + g(x) \rangle = L / (L/2(h_0(x) - \Delta) + L/2(h_0(x) + \Delta)) = \\ &= h_0(x) - \Delta^2 / h_0(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Тут, естественно, учтено, что половину длины зазора занимают пики, а другую половину – впадины. Видно, что при изменении  $\Delta$  от  $0.1h_0(x)$  до  $h_0(x)$   $\langle h(x) \rangle$  меняется от  $0.99h_0(x)$  до нуля. При  $\Delta = 0.5h_0(x)$   $\langle h(x) \rangle = 0.75h_0(x)$ .

Формулу (6) можно обобщить на случай канала со сложной формой поверхности, размер неровностей которой сравним с его диаметром [5]. Рассмотрим двумерный случай. Если часть длины нижней поверхности канала, занятая пиками неровностей, равна  $L_1$ , часть, занятая впадинами, равна  $L_2$  ( $L_1 + L_2 = L$ ), средняя высота пиков нижней поверхности равна  $\Delta_1$ , средняя глубина впадин –  $\Delta_2$ , часть длины верхней поверхности канала, занятая пиками неровностей, равна  $L'_1$ , часть, занятая впадинами, равна  $L'_2$  ( $L'_1 + L'_2 = L$ ), средняя высота пиков верхней поверхности равна  $\Delta'_1$ , средняя глубина впадин –  $\Delta'_2$ , то

$$\langle h(x) \rangle = \langle h_1(x) \rangle + \langle h_2(x) \rangle = L/L_1 / (h_0(x)/2 - \Delta_1) + \quad (7)$$

$$+ L_2 / (h_0(x)/2 + \Delta_2) + L/L'_1 / (h_0(x)/2 - \Delta'_1) + L'_2 / (h_0(x)/2 + \Delta'_2)$$

Здесь  $\langle h_1(x) \rangle$  – среднее значение ширины нижней половины канала (от нижней поверхности до средней линии), а  $\langle h_2(x) \rangle$  – среднее значение ширины верхней половины. В случае вычисления средней площади поперечного сечения трехмерного канала формулу (7) нужно видоизменить для конкретной формы канала.

#### Выводы.

Формула (3) не годится для вычисления средней ширины зазора с неровностями, по которому течёт жидкость. Согласно ей, эта ширина не зависит от размера неровностей. Метод, изложенный в данной статье, даёт правильный результат: при увеличении размера неровностей жидкость встречает больше сопротивления и средняя ширина зазора уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Усов П.П. Гидродинамическая смазка подшипника при наличии шероховатости // Трение и износ. 1983. Т.4. № 6. С.1025-1037.
2. Усов П.П. Теоретическое исследование влияния шероховатости поверхности на несущую способность смазки // Машиноведение. 1984. № 1. С.92-100.
3. Усов П.П. Теория гидродинамической смазки шероховатых поверхностей // Трение и износ. 1986. Т.7. № 2. С.214-222.
4. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. М.: Наука, 1990. 277 с.

5. Zamir M. The Physics of Pulsatile Flow. Springer–Verlag New York, Inc., 2000.

Поступила в редакцию  
25.07.2005

**Вышли в свет**

**Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.** Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2004. 468 с.

Рассмотрены принципиально новые классы задач для анизотропных, слоистых термоупругих балок, пластин и оболочек. Отличительной чертой этих классов является неприменимость к ним гипотез классической теории балок и пластин. Предложен асимптотический метод решения уравнений соответствующих пространственных задач теории упругости и вязкоупругости. Установлены асимптотические порядки компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, построены итерационные процессы для определения этих компонентов с заранее заданной асимптотической точностью, указаны случаи, когда решение становится математически точным.

Приведены решения о действии сосредоточенных и кусочно-непрерывных нагрузок на слоистые балки и пластины, рассмотрены случаи, когда часть слоев из несжимаемых или реономных материалов. Контакт между слоями может быть полным или неполным. Рассмотренные классы задач являются основными, в частности, для фундаментостроения, сейсмостойкого строительства, авиа-судостроения, расчета клеевых соединений. Получены математически точные решения для слоистых полос-балок, содержащих накладки и включения и на их основе проведен анализ модели Мелана.

**Բովանդակություն**

**Վ.Ն. Հակոբյան, Լ.Լ. Դաշտոյան**  
 Օղակաձև կիսասանվերջ ճաքով թուլացված  
 բաղադրյալ տարածության համար  
 առանցքասխմետրիկ մի խնդիր

3

**Գ. Ս. Մահակյան, Ս. Գ. Մահակյան**  
 Առաձգական համաչափության մեկ հարթություն  
 ունեցող անիզոտրոպ անհամասեռ առաձգական  
 կիսատարածությունում ալիքների տարածման  
 հսկահարթ խնդիրը

11

**Զ.Ռ. Բաղդասարյան, Ս.Վ. Բելուբեկյան**  
 Ընդլայնական սահբերի ազդեցությունը, ազատ  
 եզրում կիրառված ուժերով ծովող սալի խնդրում

19

**Վ.Ց. Գևուռնի**

Երկու կամայական, բայց համաչափ դասավորված  
 հենարաններով փեժանի կայունությանը հետևող բեռի  
 ազդեցության դեպքում

29

**Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան**  
 Առաձգական պոլիմերի կայունության մասին

31

**Ե.Ս.Միրզոյան**

Վոշտ ներդրակների համագլծ համակարգով  
 ժառանգականորեն ձերացող առաձգամածուցիկ  
 հարթության լարվածային վիճակի մասին

37

**Ռ. Ս Թումանյան**

Բեռի փոխանցումը օղակաձև վերդրակից  
 առաձգական անվերջ սալին սողքի հաշվառումով

45

**Ա.Խ.Բերբերյան**

Մահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի թափանցումը  
 խորանարդաձև և հեքսագոնալ պլեզոէլեկտրիկ 23 և  
 6mm դասի բյուրեղների ճեղքի միջև

52

**Ա. Վ. Գևորգյան**

Ալիքային հավասարումները վերջավոր հաղորդիչ  
 միջավայրում

59

**Բ. Ա. Խոտայարով**

Առաձգամածուցիկ սալերի և գլանային պանելների  
 ֆլաթերի մաթեմատիկական մոդելավորումը

62

**Ս. Շ. Վալեսյան**

Գետինաքսի ամրության և դեֆորմացիոն  
 հատկությունների վրա ձերացման ազդեցության  
 հետազոտումը

72

**Содержание**

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.  
 ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
 СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО  
 ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ  
 ТРЕЩИНОЙ

Саакян Г. С., Саакян С. Г.  
 АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
 ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ  
 УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ,  
 ОБЛАДАЮЩЕМ ОДНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ  
 УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Багдасарян З.Р., Белубекян М.В.  
 ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ ПРИ ИЗГИБЕ  
 ПЛАСТИНКИ СИЛАМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ НА  
 СВОБОДНОМ КРАЮ

Գևուռնի Վ.Ս.  
 УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛКИ С ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО,  
 НО СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ  
 ОПОРАМИ  
 ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.  
 К УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ  
 СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЕ

Мирзоян Е.С.  
 О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ НАСЛЕДСТВЕННО  
 СТАРЕЮЩЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С  
 КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ  
 ВКЛЮЧЕНИЙ

Туманян Р.С.  
 ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО  
 СТРИНГЕРА  
 К УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ  
 ПОЛЗУЧЕСТИ

Берберян А.Х.  
 ПРОСАЧИВАНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ  
 ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ЗАЗОР МЕЖДУ  
 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ КРИСТАЛЛАМИ  
 КУБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ  
 (КЛАССЫ 23 и 6mm)

Գևորգյան Ա.Վ.  
 ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕЙ  
 СРЕДЕ

Худаяров Б.А.  
 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛАТТЕРА  
 ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
 ПАНЕЛЕЙ

Վալեսյան Ս.Շ.  
 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТАРЕНИЯ НА  
 ПРОЧНОСТНЫЕ И ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА  
 ГЕТИНАКСА

**Ի. Ա. Ստեպանով**  
**Անհարթություններով ճեղքի կամ բարդ**  
**մակերևույթով փողանցքի միջին լայնության**  
**հաշվարկը**

Լույս են տեսել

77

Степанов И.А.  
ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ШИРИНЫ ШЕРОХОВАТОГО  
ЗАЗОРА ИЛИ КАНАЛА СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ

80

Вышли в свет