

Զ Ե Վ ՈՒ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XLII, № 5

1966

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐՍԷԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ.
ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ
(պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Ս.
ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ.
ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ.
խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А.
МИРЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР,
А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР
(отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН,
чл.-корресп. АН АрмССР, А. А. ТАЛА-
ЛЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, М. Л.
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корресп. АН Арм
ССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

էջ

Մաթեմատիկա

Վ. Ի. Մազանկ և Յու. Ա. Պալանու — Բազմանդամային օպերատոր փնջի սպեկտրի բաշխման մասին	257
Ի. Ս. Սաբալյան — Թեորեմ ըստ Դիրակի միաչափ սխտեմի սեփական ֆունկցիաների դիֆերենցիալ վերլուծությունների հավասարահանրագումարելիության մասին	262
Ի. Ս. Իսիվիդով — Ը-դասի իրական հաջորդականություններ	268
Լ. Դ. Սուլոմոնցև — Նրեք գնդային մակերևույթների թեորեմը հարմոնիկ ֆունկցիա- ների համար	274

Ֆիզիկական մեխանիկա

Ռ. Հ. Համադյան — Ստատիստիկական առումով մոդելացման նյութերի ընտրու- թյան հարցի շուրջը	279
---	-----

Ֆիզիկա

Վ. Ի. Հավունջյան և Պ. Հ. Սեզիրզանյան — Ռենտգենյան դիֆրակցիոն պատկերի օգնությամբ պլեգոէլեկտրական տատանումների ուղղության որոշումը	284
Ա. Դ. Կազազյան — Կոհերենտ ճառագայթման փոխազդեցությունը ատոմների հետ	289

Ֆաբրիկիկա

Ի. Դ. Կառաչենցև — Դաշակտիկաների ցրված խումբ	294
---	-----

Հանրաբանություն

Մ. Ա. Սարյան, Ժ. Հ. Ստեփանյան և Գ. Մ. Սկրուչյան — Դվին գյուղի դանիական- պալեոցենյան նստվածքների ցեղատիների և ստրոնցիանիտի մասին	298
--	-----

Բույսերի ֆիզիոլոգիա

Վ. Վ. Պապուրյան — Տերենների կենսագործունեության վրա արմատային սխտեմի հորրության ազդեցության մասին	304
--	-----

Միջատաբանություն

Ս. Ս. Յարյուկով-Լեննույան — Կարծրաթևավորների Լրկու խոր տեսակ Հայաստանից (Insecta, Coleoptera)	309
Բովանդակություն XLII հատորի	315

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- В. И. Мацаев и Ю. А. Палант* — О распределении спектра полиномиального операторного пучка 257
- И. С. Саргсян* — Теорема о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака 262
- И. С. Иохвидов* — Вещественные последовательности класса P_1 268
- Е. Д. Соломенцев* — Теорема о трех сферах для гармонических функций 274

Строительная механика

- Р. С. Амасян* — К подбору модельных материалов по подобию в статистическом смысле 279

Физика

- В. И. Авунджян и П. А. Безирганян* — Определение направлений пьезоэлектрических колебаний с помощью рентгеновской дифракционной картины 284
- А. Д. Газазян* — Взаимодействие когерентного излучения с атомами 288

Астрофизика

- И. Д. Караченцев* — Рассеянная группа галактик 294

Минералогия

- М. А. Сатиан, Ж. О. Степанян и Г. М. Мкртчян* — О целестине и стронцианите из отложений дания-палеоцена у сел. Двин 298

Физиология растений

- В. В. Казарян* — О влиянии мощности корневой системы на фотосинтетическую активность листьев и накопление хлорофилла 304

Энтомология

- С. М. Яблоков-Хнзорян* — Два новых вида жесткокрылых из Армянской ССР (Insecta, Coleoptera) 309
- Содержание XLII тома 319

МАТЕМАТИКА

В. И. Мацаев и Ю. А. Палант

О распределении спектра полиномиального операторного пучка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 20/IX 1965)

Мы намечаем здесь доказательство теоремы о распределении спектра полиномиальных пучков операторов в гильбертовом пространстве

$$L(\lambda) = I - T_0 - \lambda T_1 H - \dots - \lambda^{n-1} T_{n-1} H^{n-1} - \lambda^n H^n, \quad (1)$$

$$M(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \dots - \lambda^{n-1} H^{n-1} T_{n-1} - \lambda^n H^n, \quad (2)$$

которая близка к известной теореме М. В. Келдыша, опубликованной в (1) без доказательства.

1. Всюду в дальнейшем мы будем писать $\psi(u) \asymp \varphi(u)$, если существуют такие положительные u_0, m, M , что $m < \psi(u)/\varphi(u) < M$ при всех $u > u_0$; $\psi(u) \sim \varphi(u)$, если $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u)/\varphi(u) = 1$. Через c будем

обозначать положительные постоянные (возможно, различные).

Будем говорить, что неубывающая неотрицательная функция $\varphi(u)$ ($0 \leq u < +\infty$) удовлетворяет условию (A), если существует число a такое, что $\varphi(au) \geq 2\varphi(u)$, и условию (T), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех достаточно больших u $\varphi[(1+\delta)u] \leq (1+\varepsilon)\varphi(u)$. Отметим, что вместе с функцией $\varphi(u)$ условиям (A) или (T) удовлетворяет любая функция $\psi(u)$ такая, что $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Теорема 1. Если $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ ($0 \leq u < +\infty$) неубывающие функции, $\varphi(u)$ удовлетворяет условию (T), $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +\infty$ и при

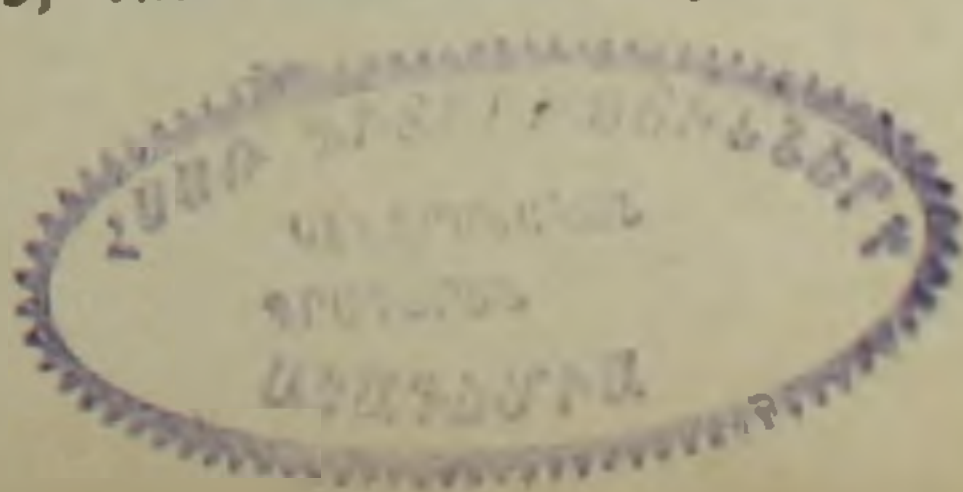
некотором $m > 0$.

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{(t+u)^m} \sim \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{(t+u)^m},$$

то $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Это предложение, обобщающее тауберову теорему М. В. Келдыша (2), доказывается аналогично теореме Б. И. Коренблума (3).

Лемма 1. Условие (A) эквивалентно следующему: для каждого $q > 0$ существует $c > 0$ такое, что для всех $s > 0$



$$\int_0^s u^q d\varphi(u) \geq c\varphi(s) s^q.$$

Лемма 2. Если $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ — неубывающие функции, $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям (A) и (T) и для некоторых $q > 0$ и $m > 0$

$$\int_0^\infty \frac{u^q d\psi(u)}{(t+u)^m} \sim \int_0^\infty \frac{u^q d\varphi(u)}{(t+u)^m},$$

то $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Лемма 3. Если $\varphi(u)$ удовлетворяет условию (T), то при некоторых $\beta > 0$, $c > 0$ и $u \geq t$ $\varphi(u)/\varphi(t) \leq c(u/t)^\beta$.

2. Следуя статье (4), обозначим через S_p ($p > 0$) класс вполне непрерывных операторов A в гильбертовом пространстве, для которых $\|A\|_p^p = sp(A^*A)^{p/2} < \infty$, через S_∞ класс всех вполне непрерывных операторов, через R — класс ограниченных операторов. Функцией распределения $n(u)$ множества комплексных чисел будем называть количество элементов этого множества, лежащих в круге $|z| < u$.

Теорема 2. Пусть $A = H(I + S)$, где $S \in S_\infty$, $(I + S)^{-1} \in R$, $H \in S_p$ — нормальный оператор, аннулирующийся только в нуле, со спектром на системе лучей l_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$), исходящих из точки 0. Обозначим через $n_i(u, H)$ функцию распределения характеристических чисел оператора H , лежащих на луче l_i . Пусть Γ_i — контур, состоящий из двух лучей, исходящих из точки 0 и не пересекающих спектра оператора A , и содержащий внутри себя точно один луч l_i ; $n_i(u, A)$ — функция распределения характеристических чисел оператора A , попавших внутрь контура Γ_i .

Если при всех $i = 0, 1, \dots, n-1$ и некотором j $n_i(u, H) \asymp n_j(u, H)$ и $n_j(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (T), то $n_j(u, A) \sim n_j(u, H)$.

Наметим основные этапы доказательства.

Не ограничивая общности, можно считать, что $j = 0$ и луч l_0 совпадает с положительной полуосью. Чтобы не затруднять изложения, ограничимся случаем простого спектра оператора H .

Рассмотрим оператор-функцию

$$K(\mu, A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^\gamma A_\lambda d\lambda}{\lambda - \mu},$$

где $A_\lambda = A(I - \lambda A)^{-1}$ и γ — число, удовлетворяющее условию $0 < \gamma < 1$, которое будет выбрано позже; μ лежит вне угла Γ_0 . Можно показать, что при $m > p$

$$sp K^m(\mu, A) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^{\gamma m}}{(\lambda_k - \mu)^m},$$

где λ_k — характеристические числа оператора A , лежащие внутри контура Γ_0 . Далее, $A_\lambda = H_\lambda(I + C_\lambda)$, где

$C_\lambda = (I - TR_\lambda)^{-1} - I$, $T = (I + S)^{-1} - I$, $R_\lambda = (I - \lambda H)^{-1}$, $H_\lambda = HR_\lambda$. По лемме М. В. Келдыша (1), $\|C_\lambda\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \in \Gamma_0$). Введем обозначение

$$S_{\mu} = K(\mu, A) - K(\mu, H) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^{\gamma} H_{\lambda} C_{\lambda} d\lambda}{\lambda - \mu}. \quad (3)$$

Пусть $\mu = -s$ ($s > 0$), $|\lambda| = t$. Тогда для нормы в S_m интеграла по одной из сторон угла Γ_0

$$\left| \int \frac{\lambda^{\gamma} H_{\lambda} C_{\lambda} d\lambda}{\lambda - \mu} \right|_m \leq C \int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma} |H_{\lambda}|_m |C_{\lambda}| dt}{t + s}. \quad (4)$$

Пользуясь леммой 3, получаем

$$\begin{aligned} |H_{\lambda}|_m^m &\leq c \int_0^{\infty} \frac{dn_0(u, H)}{(u + t)^m} = cm \int_0^{\infty} \frac{n_0(u, H) du}{(u + t)^{m+1}} \\ &\leq cm n_0(t, H) \int_0^t \frac{du}{(u + t)^{m+1}} + cn_0(t, H) \int_t^{\infty} \frac{u^{\gamma} du}{t^{\gamma} (u + t)^{m+1}} \leq \frac{cn_0(t, H)}{t^m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выбрав N таким, чтобы $|C_{\lambda}| < \varepsilon$ при любом λ , лежащем на контуре Γ_0 и удовлетворяющем условию $|\lambda| > N$, разобьем контур на две части Γ_0' и Γ_0'' , на одной из которых $|\lambda| \leq N$, а на другой $|\lambda| > N$. Тогда

$$|S_{\mu}|_m \leq \left| \int_{\Gamma_0'} \frac{\lambda^{\gamma} H_{\lambda} C_{\lambda} d\lambda}{\lambda - \mu} \right|_m + \left| \int_{\Gamma_0''} \frac{\lambda^{\gamma} H_{\lambda} C_{\lambda} d\lambda}{\lambda - \mu} \right|_m.$$

Первое слагаемое есть $O(1/s)$, а второе, согласно (5), допускает оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_0''} \frac{\lambda^{\gamma} H_{\lambda} C_{\lambda} d\lambda}{\lambda - \mu} \right|_m &\leq c\varepsilon \int_0^{\infty} \frac{n_0^{1/m}(t, H) dt}{t^{1-\gamma}(t + s)} \\ &\leq c\varepsilon \left[\frac{1}{s} \int_0^s \frac{n_0^{1/m}(t, H) dt}{t^{1-\gamma}} + \int_0^{\infty} \frac{n_0^{1/m}(t, H) dt}{t^{2-\gamma}} \right] \leq c\varepsilon n_0^{1/m}(s, H) s^{\gamma-1}; \end{aligned} \quad (7)$$

из оценок (5–7) следует

$$|S_{\mu}|_m = O(n_0^{1/m}(s, H) s^{\gamma-1}). \quad (8)$$

Теперь выберем γ таким, чтобы $0 < \gamma < 1 - \beta/m$. Тогда это выражение стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Пользуясь леммой 1, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{\gamma m} dn_0(u, H)}{(u + s)^m} \geq \frac{c}{S^m} \int_0^s u^{\gamma m} dn_0(u, H) \geq cn_0(s, H) s^{m(\gamma-1)},$$

откуда

$$n_0^{1/m}(s, H) s^{\gamma-1} = O[(spK^m(\mu, H))^{1/m}]. \quad (9)$$

Заметим, что из (3) следует

$$K^m(\mu, A) - K^m(\mu, H) = \sum K^{\alpha_1}(\mu, H) S_{\mu}^{\beta_1} \cdots K^{\alpha_m}(\mu, H) S_{\mu}^{\beta_m},$$

где суммирование распространяется на все комбинации чисел $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_m, \beta_m$ принимающих значения 0 или 1, причем $\alpha_1 + \beta_1 = \dots = \alpha_m + \beta_m = 1$ и комбинация, в которой $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 1$, исключается. Отсюда, пользуясь (8), (9) и неравенством Гёльдера, получаем, что при $\mu \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} |sp K^m(\mu, A) - sp K^m(\mu, H)| &\leq |K^m(\mu, A) - K^m(\mu, H)|_1 \leq \\ &\leq \sum |K(\mu, H)|_m^{\alpha_1} |S_{\mu}|_m^{\beta_1} \cdots |K(\mu, H)|_m^{\alpha_m} |S_{\mu}|_m^{\beta_m} = \\ &= o[(n_0^{1/m}(s, H) s^{1-1/m})^m] = o(sp K^m(\mu, H)). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\mu \rightarrow -\infty$

$$sp K^m(\mu, A) \sim sp K^m(\mu, H),$$

т. е. при $s \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{1/m} dn_0(u, A)}{(u+s)^m} \sim \int_0^{\infty} \frac{u^{1/m} dn_0(u, H)}{(u+s)^m},$$

откуда, согласно лемме 2, $n_0(u, A) \sim n_0(u, H)$.

3. Для полиномиального пучка операторов (1), сводя его к линейному (5.6) и пользуясь теоремой 2, мы получили следующее предложение, которое распространяется и на пучки вида (2).

Теорема 3. Пусть H — положительный оператор, принадлежащий при некотором $p > 0$ классу S_p ; $T_j \in S_{-}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Обозначим через $n(u, H)$ функцию распределения характеристических чисел оператора H и через $n_j(u, L)$, $n_j(u, M)$ — функции распределения характеристических чисел пучков (1) и (2) внутри угла, окружающего луч $\arg \lambda = 2\pi j/n$.

Если $n(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (T), то

$$n_j(u, L) \sim n(u, H); \quad n_j(u, M) \sim (n, H).$$

Замечания. 1) Условие $H > 0$ можно заменить более слабым: $H = H^*$, $n_{-}(u, H) = o(n_{+}(u, H))$, где $n_{+}(u, H)$ и $n_{-}(u, H)$ — функции распределения, соответственно, положительных и отрицательных характеристических чисел оператора H .

2) В теореме 3 ограничения на T_j ($j > 0$) слабее, чем в теореме М. В. Келдыша (1), в которой (при наших обозначениях) предполагается, что $H^{j-n} T_j \in R$. Далее, от оператора H в (1) требуется, чтобы существовала такая гладкая неубывающая функция $\varphi(u)$ ($0 \leq u < +\infty$), что $\varphi(u) \sim n(u, H)$ и при достаточно больших u

$$\alpha \varphi(u) \leq u \varphi'(u) \leq \beta \varphi(u) \quad (0 < \beta < \alpha + 1).$$

Из левого неравенства, при дополнительном ограничении $\alpha > 0$, следует, что $\varphi(u)$, а с нею и $n(u, H)$ удовлетворяет условию (A); условие (T) слабее правого неравенства.

4. Рассуждения, подобные примененным в доказательстве теоремы 2, позволили получить следующий результат о распределении спектра пучков, содержащих параметр рациональным образом

$$N(\lambda) = L(\lambda) + G(\lambda), \quad (10)$$

$$P(\lambda) = M(\lambda) + G(\lambda), \quad (11)$$

$$\text{где } G(\lambda) = \frac{G_1}{\lambda} + \frac{G_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{G_r}{\lambda^r},$$

Теорема 4. Пусть положительный оператор H и операторы G_j ($j=1, 2, \dots, r$) принадлежат при некотором $p > 0$ классу S_p ; операторы $T_j \in S_\infty$ ($j=0, 1, \dots, n-1$). Обозначим через $n_j(u, N)$ и $n_j(u, P)$ функции распределения характеристических чисел пучков (10) и (11), лежащих внутри угла, окружающего луч $\arg \lambda = 2\pi j/n$ и вне круга $|\lambda| \leq 1$. Если $n(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (1), то

$$n_j(u, N) \sim n(u, H), \quad n_j(u, P) \sim n(u, H).$$

Возможно, что условие (A) в теоремах 2—4 является лишним.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Харьковский
государственный
университет

Վ. Ի. ՄԱՅԱՆՎ և ՅՈՒ. Ա. ՊԱՆԱՆՏ

Բազմանդամային օպերատոր փնջի սպեկտրի բաժանման մասին

Հիլբերտյան տարածության մեջ դիտարկվում են հետևյալ փնջերը՝

$$N(\lambda) = L(\lambda) + G(\lambda), \quad P(\lambda) = M(\lambda) + G(\lambda),$$

որտեղ

$$L(\lambda) = I - T_0 - \lambda T_1 H - \dots - \lambda^{n-1} T_{n-1} H^{n-1} - \lambda^n H^n,$$

$$M(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \dots - \lambda^{n-1} H^{n-1} T_{n-1} - \lambda^n H^n,$$

$$G(\lambda) = \frac{G_1}{\lambda} + \frac{G_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{G_r}{\lambda^r}.$$

Նշանակենք $n_j(u, N)$ -ով $N(\lambda)$ փնջի այն խարակտերիստիկ թվերի քանակը, որոնք ընկած են $\arg \lambda = \frac{2\pi j}{n}$ ճառագայթի շրջակայքում և $1 < |\lambda| < u$ օղակում: Դիցուք $n(u, H)$ -ը H

օպերատորի խարակտերիստիկ թվերի քանակն է $|\lambda| < u$ շրջանում: Կասենք, որ $\varphi(u)$ ($0 < u < +\infty$) ոչ բացասական շնվազող ֆունկցիան բավարարում է (A) պայմանին, եթե գոյություն ունի այնպիսի a թիվ, որ $\varphi(au) > 2\varphi(u)$ և կասենք, որ $\varphi(u)$ -ն բավարարում է (T) պայմանին, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ -ի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ բավականաչափ մեծ բոլոր u -երի համար լինի՝ $\varphi((1+\delta)u) < (1+\varepsilon)\varphi(u)$:

Իկադրուցվում է, որ եթե H դրական օպերատորը և G_j ($j=1, 2, \dots, r$) օպերատորները ունեն վերջավոր կարգ, իսկ T_j ($j=0, 1, \dots, n-1$) օպերատորները լիովին անընդհատ են, ապա

$$n_j(u, N) \sim n(u, H), \quad n_j(u, P) \sim n(u, H).$$

Թննարկվում է այս թեորեմի կապը Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի թեորեմի հետ (տես⁽¹⁾):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). ² М. В. Келдыш, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38 (1951). ³ Б. Н. Коренблум, ДАН СССР, 88, № 5 (1953). ⁴ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, ДАН СССР, 137, № 5 (1961). ⁵ Ю. А. Палант, ДАН СССР, 141, № 3 (1961). ⁶ В. Н. Визитей, А. С. Маркус, Матем. сб., 66 (103): 2 (1965).

И. С. Саргсян

Теорема о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/X 1965)

1. В релятивистской квантовой теории стационарная система Дирака имеет вид ⁽¹⁾

$$\left\{ \begin{aligned} (W - V + mc^2) X_1 - ic \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) X_4 - ic \frac{\partial X_3}{\partial z} &= 0 \\ (W - V + mc^2) X_2 - ic \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) X_3 + ic \frac{\partial X_4}{\partial z} &= 0, \\ (W - V - mc^2) X_3 - ic \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) X_2 - ic \frac{\partial X_1}{\partial z} &= 0, \\ (W - V - mc^2) X_4 - ic \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) X_1 + ic \frac{\partial X_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $V = V(x, y, z)$ — потенциальная функция, c — скорость света, W — энергия, а m — масса частицы. Если $X_1(x, y, z) = X_4(x, y, z) = 0$, а функции $V(x, y, z)$, $X_2(x, y, z)$ и $X_3(x, y, z)$ не зависят от x и z , то система (1) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \{W - V(y) + mc^2\} X_2 + cX_3' &= 0, \\ \{W - V(y) - mc^2\} X_3 - cX_2' &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Пусть единицы измерения выбраны так, что скорость света $c = 1$. Если положим $W = \lambda$, $X_3(y) \sim y_1(x)$, $X_2(y) \sim y_2(x)$, $V(y) + m \sim p(x)$ и $V(y) - m \sim r(x)$, то систему (2) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + p(x) y_1 &= \lambda y_1, \\ -\frac{dy_1}{dx} + r(x) y_2 &= \lambda y_2. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Присоединим к системе (3) граничное условие

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0,$$

где h — произвольное вещественное число.

В работе (2) мы изучали вопросы разложения по собственным функциям задачи (3)—(4) вектор-функций с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ и пришли к окончательным результатам, а именно, было доказано, что равномерно в каждом конечном интервале полупрямой $(0, \infty)$ разность между разложением произвольной вектор-функции $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ с интегрируемым квадратом на $(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx = 0,$$

в обобщенный интеграл Фурье по собственным функциям задачи (3)—(4) и разложением в обычный интеграл Фурье стремится к нулю. Эта теорема дает окончательное решение вопроса о сходимости разложения по собственным функциям одномерного оператора Дирака для двухкомпонентных вектор-функций класса $L^2(0, \infty)$.

В настоящей работе, используя методы, аналогичные методам, разработанным Б. М. Левитаном (3) и В. А. Марченко (4) для уравнения Шредингера, мы изучаем вопросы сходимости почленно дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака, т. е. задачи (3)—(4).

2. Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \{\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)\}$ решение системы (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h. \quad (4)$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет условию (4).

В работе (5) Е. Ч. Титчмарш доказал, что при данном h каждой граничной задаче (3)—(4) соответствует единственная (единственность доказана Б. М. Левитаном) неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$, порождающая взаимно обратные изометрические отображения пространства $L^2(0, \infty)$ на $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, \infty)$ на $L^2(0, \infty)$, соответственно, по формулам

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \{f_1(x) \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x) \varphi_2(x, \lambda)\} dx, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda), \\ f_2(x) &= \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где интегралы (5) и (6) сходятся в метриках пространств $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

Положим

$$\Theta_{ij}(x, s; \lambda) = \begin{cases} \int_0^\lambda \varphi_i(x, \lambda) \varphi_j(s, \lambda) d\rho(\lambda), & \lambda > 0, \\ - \int_{-\lambda}^0 \varphi_i(x, \lambda) \varphi_j(s, \lambda) d\rho(\lambda) & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (i, j = 1, 2)$$

Матрица $\Theta(x, s; \lambda) = \|\Theta_{ij}(x, s; \lambda)\|$ называется *спектральной матрицей* граничной задачи (3)–(4).

Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \in L^2(0, \infty)$.

Введем обозначения

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^\infty \{f_1(s) \Theta_{11}(x, s; \lambda) + f_2(s) \Theta_{12}(x, s; \lambda)\} ds, \quad (7)$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^\infty \{f_1(s) \Theta_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s) \Theta_{22}(x, s; \lambda)\} ds. \quad (8)$$

В силу определения функций $\Theta_{ij}(x, s; \lambda)$, $i, j = 1, 2$ и равенства (5) для функций $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ получим выражения

$$S_1(x, \lambda) = \int_{-\lambda}^\lambda F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_{-\lambda}^\lambda F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

Функции $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ являются *отрезками разложения* соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. формулы (6)) в интеграле Фурье по собственным функциям задачи (3)–(4).

Рассмотрим задачу (3)–(4) при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $h = 0$. Тогда $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$, $\varphi_2(x, \lambda) = \sin \lambda x$. Поэтому в этом случае спектральная матрица, которую мы обозначим через $\Theta^*(x, s; \lambda) = \|\Theta_{ij}^*(x, s; \lambda)\|$, определяется по формулам

$$\Theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \cos \mu s d\mu,$$

$$\Theta_{12}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \sin \mu s d\mu,$$

$$\Theta_{21}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \cos \mu s d\mu,$$

$$\Theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \sin \mu s d\mu.$$

Следовательно функции, аналогично формулам (7) и (8),

$$S_1^*(x, \lambda) = \int_0^\infty \{f_1(s) \Theta_{11}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \Theta_{12}^*(x, s; \lambda)\} ds,$$

$$S_2^*(x, \lambda) = \int_0^\infty \{f_1(s) \Theta_{21}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \Theta_{22}^*(x, s; \lambda)\} ds,$$

являются отрезками разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам.

Используя асимптотические оценки для производных спектральной матрицы $\Theta(x, s; \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, полученные нами в работе (6), на основании определения функций $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$, т. е. равенств (7) и (8), доказывается следующая

Лемма 1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3) имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные, то при каждом фиксированном x и при $|a| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S_i(x, \lambda)}{\partial x} \right\} = \int_a^{a+1} |F(\lambda)| \cdot |\varphi_i^1(x, \lambda)| d\rho(\lambda) = o(a), \quad i=1, 2. \quad (9)$$

Асимптотические оценки (9) имеют место равномерно в каждом конечном интервале изменения x .

Из определения спектральной матрицы $\Theta^*(x, s; \lambda) = \|\Theta_{ij}^*(x, s; \lambda)\|$ и функций $S_1^*(x, \lambda)$ и $S_2^*(x, \lambda)$ непосредственно следует

Лемма 2. При $|a| \rightarrow \infty$ равномерно на полупрямой $(0, \infty)$ справедливы асимптотические оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S_i^*(x, \lambda)}{\partial x} \right\} = o(a), \quad i=1, 2. \quad (10)$$

Оценки, аналогичные оценкам (9) и (10), имеют место и для старших производных, а именно, справедлива

Лемма 3. Если функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют суммируемые в каждом конечном интервале производные до n -го порядка включительно, то при каждом фиксированном x и при $|a| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^n S_i(x, \lambda)}{\partial x^n} \right\} = \int_a^{a+1} |F(\lambda)| \cdot |\varphi_i^{(n)}(x, \lambda)| d\rho(\lambda) = o(a^n), \quad i=1, 2. \quad (11)$$

Оценки (11) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Оценки (9) и (10) позволяют применить тауберову теорему для интегралов Фурье В. А. Марченко (7). В результате можно доказать следующую теорему о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложений в обычный интеграл Фурье.

Теорема 1. Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \in L^2(0, \infty)$. Если функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные, то равномерно в каждом конечном интервале имеют место равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) d_v \left\{ \frac{\partial S_1(x, v)}{\partial x} - \frac{\partial S_2^*(x, v)}{\partial x} \right\} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) d_v \left\{ \frac{\partial S_2(x, v)}{\partial x} - \frac{\partial S_2^*(x, v)}{\partial x} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Риссу первого порядка производных первого порядка разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложения в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Исходя из асимптотических оценок (11) можно доказать аналогичную теорему и для старших производных, а именно, справедлива

Теорема 2. Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \in L^2(0, \infty)$. Если функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют суммируемые в каждом конечном интервале производные до порядка n включительно, то равномерно в каждом конечном интервале справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n d_v \left\{ \frac{\partial^n S_1(x, v)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n S_1^*(x, v)}{\partial x^n} \right\} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n d_v \left\{ \frac{\partial^n S_2(x, v)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n S_2^*(x, v)}{\partial x^n} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Риссу порядка n производных n -го порядка разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложения в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Из теоремы 1 легко получить теорему суммирования дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака к значению соответствующих производных разлагаемой функции. Справедлива

Теорема 3. Пусть функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные и выполнены следующие условия:

1. $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \in L^2(0, \infty)$;

2. В некоторой окрестности точки x_0 функция $f'(x) = \{f'_1(x), f'_2(x)\}$ существует и суммируема.

3. В точке x_0 функция $f'(x) = \{f'_1(x), f'_2(x)\}$ непрерывна. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) d_v \frac{\partial S_1(x, v)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = f'_1(x_0),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) d_v \frac{\partial S_2(x, v)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = f'_2(x_0),$$

т. е. первая производная разложения функции $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ по собственным функциям одномерного оператора Дирака в точке суммируема по методу Рисса первого порядка к значению $f'(x_0)$.

Справедлива аналогичная теорема и для старших производных.

Приношу глубокую благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ՍԱՐԴՍՅԱՆ

**Թեորեմ՝ ըստ Դիրակի ռիաչափ սխեմի՝ սեփական ֆունկցիաների
դիֆերենցված վերլուծությունների հավասարահանգույնաբե-
րվորյան մասին**

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Այս կիսաառանցքի վրա քառակուսով հանրագումարելի վեկտոր-ֆունկցիայի ըստ Դիրակի ռիաչափ սխեմի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության առաջին կարգի ածանցյալների և ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության առաջին կարգի ածանցյալների տարրերության իրարից առաջին կարգի միջինները հավասարաչափ ձգտում են դերոյի ամեն մի վերջավոր հատվածում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Ф. Мотт и Н. Н. Снеддон, Wave mechanics and its application, Oxford, 1948. ² И. С. Саргсян, ДАН СССР (в печати). ³ Б. М. Левитан, Известия АН СССР, серия матем., 16 (1952), 325—352. ⁴ В. А. Марченко, Труды Московского мат. общества, т. 1 (1952), 327—420. ⁵ Э. Ч. Титчмарш, Proc. London Math. Soc., (3), 11 (1961) 156—168. ⁶ И. С. Саргсян, ДАН АрмССР, т. 42, № 3 (1966). ⁷ В. А. Марченко, Известия АН СССР, серия матем. 19 (1955), 381—422.

И. С. Иохвидов

Вещественные последовательности класса P_1

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/XI 1965)

1. Последовательность комплексных чисел $\{c_p\}_0^\infty$ ($c = \bar{c}_0$) называется последовательностью класса P_1 (целое $\kappa \geq 0$), если для всех достаточно больших n ($n > N$) теплицева форма

$$\sum_{p, q=0}^{n-1} c_{p-q} \bar{\xi}_p \bar{\xi}_q \quad (c_{-p} = \bar{c}_p, \quad p=0, 1, 2, \dots)$$

имеет в своем каноническом представлении точно κ положительных квадратов. При $\kappa=0$ получаем хорошо изученный в классической теории тригонометрической проблемы моментов класс P_0 *непозитивных последовательностей*. Класс P_1 впервые был введен и рассмотрен М. Г. Крейном, а класс P_1 ($\kappa \geq 1$) — М. Г. Крейном и автором (см. гл. V их совместной монографии ⁽¹⁾; там же — подробные библиографические указания).

В § 24 работы ⁽¹⁾ отдельно исследовались вещественные последовательности $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1 , для которых там были указаны следующие (исключающие друг друга) интегральные представления:

$$(I) \quad c_p = a \operatorname{ch} p\varsigma - \int_0^\pi \cos pt \, d\varsigma_r(t) \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

$$(II) \quad c_p = \rho - \int_0^\pi \cos pt \, d\varsigma_s(t) \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

$$(III) \quad c_p = c_0 + \mu p^2 + \int_{+0}^\pi \frac{\sin^2 \frac{pt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} d\varsigma_n(t) \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

где $a = \bar{a} \neq 0$, $\varsigma > 0$, $\rho > 0$, $\mu = \varsigma_n(+0) - \varsigma(0) \geq 0$, а $\varsigma_r(t)$, $\varsigma_s(t)$, $\varsigma_n(t)$ — неубывающие функции ($0 \leq t \leq \pi$), причем

$$\varsigma_s(0) = \varsigma_s(+0), \quad \int_0^\pi \frac{d\varsigma_n(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \infty. \quad (1)$$

Представление (I) называется *гиперболическим*, (II) — *эллиптическим*, а (III) — *параболическим*. Каждое из них (при фиксированной нормировке спектральных функций $\varepsilon_r(t)$, $\varepsilon_s(t)$ и $\varepsilon_n(t)$) определяется единственным образом своими „моментами“ $\{c_p\}_0^\infty$.

Однако, как уже указывалось в ⁽²⁾, эти представления не охватывают всего класса P_1 . Например, последовательность $c_p = (-1)^p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$), как легко видеть, принадлежит классу P_1 и в то же время не допускает ни одного из представлений (I) — (III). Объясняется этот факт тем, что наряду с каждой последовательностью $\{c_p\}_0^\infty$ из класса P_1 (и вообще из класса P_2) этому классу принадлежит и последовательность $\{(-1)^p c_p\}_0^\infty$. В самом деле, переход от первой из них ко второй равносильно тому, что в каждой теплицевой форме

$\sum_{p, q=0}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q$ произведено диагональное преобразование переменных $\eta_p = (-1)^p \xi_p$ ($p = 0, 1, \dots, n-1$), не изменяющее ни ранга, ни сигнатуры этой формы.

Таким образом, каждой из последовательностей $\{c_p\}_0^\infty$ вида (I) — (III) отвечает последовательность $\{(-1)^p c_p\}_0^\infty \in P_1$. Представления (Ia) — (IIIa), отличающиеся от (I) — (III) (соответственно) только множителем $(-1)^p$, назовем *альтернирующими*, сохранив и для них наименования *гиперболического* (Ia), *эллиптического* (IIa) и *параболического* (IIIa). Представления же (I) — (III) назовем *неальтернирующими*. Важным является то обстоятельство, что *представлениями* (I) — (III) и (Ia) — (IIIa) теперь уже *исчерпываются все вещественные последовательности класса P_1* (⁽²⁾, теорема 5.11).

2. В работе ⁽¹⁾ были указаны критерии того, когда последовательность $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1 допускает гиперболическое, эллиптическое или параболическое представления. Эти критерии в ⁽²⁾ уточнены с учетом возможности также альтернирующих представлений (Ia) — (IIIa). С такой возможностью связана и вновь возникшая задача о различении (по алгебраическим свойствам и асимптотике) вещественных последовательностей класса P_1 , допускающих неальтернирующие и альтернирующие представления. Этот вопрос в ⁽²⁾ частично затрагивается лишь в теореме 5.13, из которой следует, что *эллиптическое и параболическое представления последовательности $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$ будут неальтернирующими ((II) и (III)) или альтернирующими ((IIa) и (IIIa)) в зависимости от того, будут ли неотрицательными при всех $n = 1, 2, \dots$ формы*

$$\sum_{p, q=0}^{n-1} (c_p + c_q - c_{p-q} - c_0) \xi_p \bar{\xi}_q \text{ или } \sum_{p, q=0}^{n-1} [(-1)^p c_p + (-1)^q c_q - (-1)^{p-q} c_{p-q} - c_0] \xi_p \bar{\xi}_q$$

соответственно.

В дополнение к этому критерию полезно еще заметить, что в случае параболических представлений (III) или (IIIa) постоянная μ вычисляется по формулам

$$\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} (c_p / p^2) \text{ или } \mu = \lim_{p \rightarrow \infty} [(-1)^p c_p / p^2]$$

соответственно (см. (1), стр. 475).

3. Приведем теперь некоторые другие критерии, позволяющие различать случаи существования неальтернирующих или альтернирующих представлений:

Теорема 1. Пусть $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$. Если $L = \lim_{p \rightarrow \infty} (|c_p|/p^2) = \infty$, т. е.

(см. (2)) последовательность $\{c_p\}_0^\infty$ имеет гиперболическое представление (I) или (Ia), то постоянная ζ вычисляется по формуле (см. (1)):

$$\zeta = \lim_{p \rightarrow \infty} (\ln |c_p|/p) > 0 \quad (|c_p| > 0 \text{ при } p > N_1).$$

При этом представление последовательности $\{c_p\}_0^\infty$ будет неальтернирующим (I) или альтернирующим (Ia) в зависимости от того, существует или не существует предел $\lim_{p \rightarrow \infty} (e^{-p\zeta} c_p)$ соответственно. В первом случае постоянная a из представления (I) вычисляется по формуле

$$a = 2 \lim_{p \rightarrow \infty} (e^{-p\zeta} c_p) \neq 0,$$

а во втором (в представлении (Ia)):

$$a = 2 \lim_{p \rightarrow \infty} [e^{-p\zeta} (-1)^p c_p] \neq 0.$$

Теорема 2. Неограниченная последовательность $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1 при достаточно больших p либо сохраняет знак, либо является знакопередающей. В первом случае ее представление является неальтернирующим ((I) или (III)), а во втором — альтернирующим ((Ia) или (IIIa)).

Доказательства теорем 1 и 2 получаются прямым рассмотрением формул (I), (III) и (Ia), (IIIa) с применением леммы 5.3 из (1).

Теорема 3. Для того чтобы ограниченная вещественная последовательность $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1 допускала неальтернирующее эллиптическое представление (II), необходимо, чтобы $c_p \geq c_0$ ($p = 0, 1, 2, \dots$), а при $c_0 \geq 0$ достаточно, чтобы $c_1 \geq c_0$.

Достаточно также (при любом c_0), чтобы хотя бы для одного k ($k = 0, 1, 2, \dots$): $c_{2k+1} > -c_0$.

Замечание 1. Условие $c_0 \geq 0$ не является необходимым для существования неальтернирующего представления (II). Это видно хотя бы из примера

* Из этого факта, между прочим, вытекает полная обоснованность формулы (26.6) в работе (1).

$$c_p = 1 - 2 \cos p\pi \quad (p = 0, 1, 2, \dots): -1, 3, -1, 3, \dots \quad (2)$$

Однако требование $c_0 \geq 0$ существенно для достаточности условия $c_1 \geq c_0$. В самом деле, рассмотрим, например, последовательность

$$\{c_p\}_0^\infty: -1, -1, 3, -1, -1, -1, 3, -1, -1, -1, -3, \dots \quad (3)$$

Здесь $c_1 = c_0 (< 0)$. Применяя критерий из п. 2, уже при $n = 3$ убеждаемся, что форма

$$\sum_{p, q=0}^2 (c_p + c_q - c_{p-q} - c_0) \xi_p \bar{\xi}_q = 8 (\xi_1 \bar{\xi}_2 + \xi_2^2)$$

оказывается indefinitной, т. е. последовательность (3) не допускает представления (II). В действительности для нее имеет место альтернирующее представление вида (IIa):

$$c_p = (-1)^p \left(1 - 2 \cos p \frac{\pi}{2} \right) \quad (p = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Заметим также, что в данном случае выполняется и условие

$$c_p \geq c_0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots),$$

которое, таким образом, оказывается только необходимым (см. теорему 3), но не достаточным для существования представления (IIa).

С другой стороны, отбросив в формуле (4) множитель $(-1)^p$, получаем последовательность с неальтернирующим эллиптическим представлением:

$$c_p = 1 - 2 \cos p \frac{\pi}{2} \quad (p = 0, 1, 2, \dots): -1, 1, 3, 1, -1, 1, 3, 1, -1, 1, 3, \dots,$$

для которой при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ имеем $c_{2k+1} = 1 = -c_0$. Следовательно, достаточное условие, указанное в последней части теоремы 3, не является необходимым.

4. Полученная с помощью представлений (I)–(III) и (Ia)–(IIIa) классификация вещественных последовательностей $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$ на „эллиптические“, „параболические“ и „гиперболические“ может быть распространена и на комплексные последовательности $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$, а именно: все ограниченные последовательности из P_1 назовем *эллиптическими*; при $L \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} (|c_p|/p^2) < \infty$ назовем неограниченную последовательность $\{c_p\}_0^\infty (\in P_1)$ *параболической*, а при $L = \infty$ — *гиперболической*. То, что этим исчерпаны все возможные случаи, легко проверить с помощью формул (20.14), (20.15) и леммы 5.3' из (1).

Приведенная классификация представляет интерес в связи с проблемой продолжения конечных последовательностей $\{c_p\}_0^{n-1}$ класса $P_{1;n}$, т. е. таких, для которых форма

$$\sum_{p, q=0}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q \quad (c_{-p} = \bar{c}_p; p = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5)$$

имеет точно один положительный квадрат, до бесконечных последовательностей $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$.

Для вещественных последовательностей уже в ⁽¹⁾ (ср. ⁽²⁾) были обнаружены случаи, когда, несмотря на существование у последовательности $\{c_p\}_0^{n-1} \in P_1$, бесконечного множества различных вещественных продолжений $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1^* , некоторые типы продолжений (например, гиперболический или эллиптический и параболический) оказывались „запрещенными“.

Для комплексных продолжений вещественных и комплексных последовательностей класса $P_{1;n}$ эта проблема еще мало изучена. То, что положение здесь, вообще говоря, иное, чем в случаях, упомянутых выше, показывает, например, установленная для случая $n=2$

Теорема 4. Если теплицева эрмитова форма

$$\sum_{p,q=0}^1 c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q = c_0 |\xi_0|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}_1 \xi_0 \bar{\xi}_1) + c_0 |\xi_1|^2$$

невырождена и имеет один положительный квадрат, то последовательность $\{c_p\}_0^1$ допускает бесконечные продолжения $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$ всех трех типов. Более того, даже среди тех только продолже-

ний, для которых ранг всех форм $\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q$ ($n=2, 3, \dots$) ос-

тается равным двум**, имеется бесконечное множество как эллиптических, так и гиперболических продолжений, и два различных параболических продолжения.

Затронутая в настоящем пункте проблематика (и, в частности, теорема 4) имеет интересный теоретико-операторный аспект, на чем мы остановимся в другом месте.

Одесский инженерно-строительный институт

* Это имеет место тогда и только тогда, когда форма (5) невырождена ((¹), (²)).

** Они существуют в силу теоремы 5.10 из (¹).

Ի. Ս. ԻՈՒԿԻՆՈՎ

P_1 -դասի իրական հաջորդականություններ

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են P_1 -դասի հաջորդականություններ $\{c_p\}_0^\infty$ այսինքն այնպիսի հաջորդականություններ, որոնց համար բոլոր էրմիտյան ձևերը

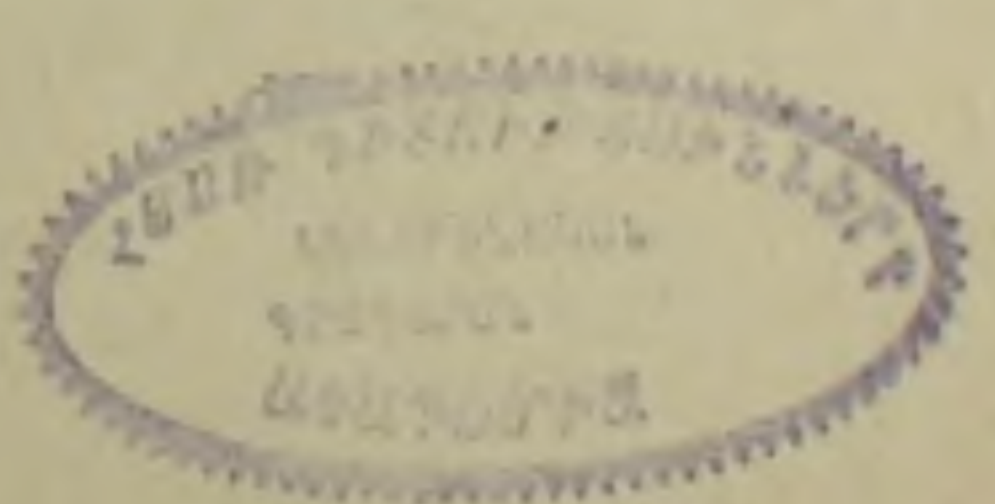
$$\sum_{p,q=1}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q \quad c_p = c_{\bar{p}} \quad (p=0, 1, \dots, n-1 \quad n=1, 2, \dots)$$

բաժանվում են մեծ n -երի դեպքում ունեն ճիշտ մեկ դրական բառակուսի: Դասի իրական հաջորդականությունների համար կ. 2—3 տրված են չհերթադադող (неальтернирующее) ((I)—(III)) և հերթադադող (альтернирующее) ((I_a)—(III_a)) ինտեգրալ ներկայացումների գոյության թեորեմներ (критерий) (1—3):

Վերջին 4-րդ կետում դրվում է վերջավոր $\{c_p\}_0^{n-1}$ (իրական կամ կոմպլեքս) հաջորդականությունների տարբեր տիպերի կոմպլեքս շարունակման խնդիրները: $n=2$ դեպքի համար ապացուցվում է հետևյալ թեորեմ 4. $\{c_p\}_0^1$ հաջորդականությունը, որին համապատասխանում է չվերածվող $c_0|\xi|^2 + 2Re(c_1\xi_0, \xi_1)$ (անորոշ) ձևը ρ -ով է տալիս դրական ունեցող բոլոր տիպերի անվերջ շարունակումներ $\{c_p\}_0^\infty$:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

- ¹ И. С. Нохвидов, М. Г. Крейн, Труды Моск. матем. общ., 8 (1959), 413–496.
 И. С. Нохвидов, М. Г. Крейн, Труды Моск. матем. общ., 13 (1966).



Е. Д. Соломенцев

Теорема о трех сферах для гармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/1 1966)

Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $D = \{z; 0 < r < |z| = \rho < R < +\infty\}$, непрерывная в замыкании $\bar{D}$. Если $|f(z)| \leq m$ на окружности $S_1 = \{z; |z| = r\}$ и $|f(z)| \leq M$ на окружности $S_2 = \{z; |z| = R\}$, то классическая теорема Адамара о трех кругах выражается неравенством

$$|f(z)| \leq m^{\frac{\log \frac{R}{\rho}}{\log \frac{R}{r}}} M^{\frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}}}, \quad z \in D. \quad (1)$$

Неравенство (1) представляет собой количественное выражение граничного свойства единственности ограниченных аналитических функций для кольцевой области D . Желая получить аналоги теоремы Адамара для гармонических функций в пространстве, мы должны, естественно, потребовать, чтобы на границе области налагались ограничения не только на модуль самой функции, но и на модуль ее нормальной производной или градиента. Проблемы такого типа в связи с задачами аппроксимации посредством гармонических функций были поставлены С. Н. Мергеляном ⁽¹⁾ в 1955 г.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^p)$, $y = (y^1, \dots, y^p)$ — точки евклидова пространства E^p , $p \geq 2$, заданные декартовыми координатами, $|x| = \rho = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^p)^2}$. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области $D = \{x; 0 < r < |x| < R < +\infty\}$, непрерывная вместе с частными производными первого порядка по всем координатам в замыкании $\bar{D}$. Обозначим интегралы по граничным сферам $S_1 = \{y; |y| = r\}$ и $S_2 = \{y; |y| = R\}$

$$I_1 = \frac{1}{\omega_p} \int_{S_1} \left[|u(y)| + \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \right] dS_1, \\ I_2 = \frac{1}{\omega_p} \int_{S_2} \left[|u(y)| + \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \right] dS_2, \quad (2)$$

где $\omega_p = p\pi^{p/2}/\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)$ — площадь единичной сферы в E^p , а $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по направлению нормали к S_1 или S_2 .

В этой работе доказывается следующая

Теорема. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция указанного вида в области $D = \{x; 0 < r < |x| < R < +\infty\}$. Тогда для любого фиксированного замкнутого множества $F \subset D$ при всех достаточно малых значениях интеграла I_1 выполняется неравенство

$$|u(x)| < \left(1 + \frac{R}{r}\right) \left(3 + \frac{1}{\log \frac{R}{r}} \log \frac{BI_2}{AI_1}\right)^{p-2} \times \\ \times (AI_1)^{\frac{\log \frac{R}{r}}{\log \frac{R}{r}}} (BI_2)^{\frac{\log \frac{R}{r}}{\log \frac{R}{r}}}, \quad x \in F, \quad (3)$$

где интегралы I_1, I_2 определены в (2), $A = A(x)$, $B = B(x)$ — некоторые положительные функции, зависящие только от $|x|$ (и, конечно, от параметров r, R кольца D).

Доказательство. Идея доказательства навеяна методом вывода полюсов М. В. Келдыша и С. Н. Мергеляна ^(1,2). Ради краткости мы рассмотрим подробно только случай $p=3$, принимая обозначения сферических координат $x = (r, \theta, \varphi)$, $y = (r', \theta', \varphi')$.

Пусть выбрано замкнутое множество $F \subset D$ и фиксирована точка $x \in F$. Для всех точек y таких, что $|y| > |x|$, справедливо разложение

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\cos \gamma) \frac{|x|^j}{|y|^{j+1}}, \quad |y| > |x|, \quad (4)$$

где $P_j(\cos \gamma)$ — полином Лежандра степени j от $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$.

Фиксируем пока произвольно целое число $n \geq 0$ и рассмотрим функцию

$$K(x, y) = \frac{1}{|x-y|} - \sum_{j=0}^n P_j(\cos \gamma) \frac{|x|^j}{|y|^{j+1}}. \quad (5)$$

Согласно (4), для всех y таких, что $|y| > |x|$, эта функция представима рядом

$$K(x, y) = \sum_{j=n+1}^{\infty} P_j(\cos \gamma) \frac{|x|^j}{|y|^{j+1}}, \quad |y| > |x|. \quad (6)$$

Для дальнейшего нужно оценить величину $|K(x, y)| + \left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y} \right|$ на

сферах $S_1 = \{y; |y| = r\}$ и $S_2 = \{y; |y| = R\}$. На S_2 , пользуясь известной оценкой $|P_j(\cos \gamma)| \leq 1$, из выражения (6) получаем

$$\max_{|y|=R} \left\{ |K(x, y)| + \left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y} \right| \right\} < \\ < \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho^j}{R^{j+1}} + (j+1) \frac{\rho^j}{R^{j+2}} \right\} < B(n+2) e^{-\beta n}, \quad (7)$$

где

$$\beta = \log \frac{R}{\rho} > 0,$$

$$B = B(x) = \frac{\rho}{R(R-\rho)} \left(1 + \frac{1}{R-\rho} \right) > 0. \quad (8)$$

На S_1 , пользуясь представлением (5), находим, принимая во внимание, что $\left| \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \leq \frac{1}{|x-y|^2}$,

$$\max_{|y|=r} \left\{ |K(x, y)| + \left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y} \right| \right\} < \\ < \frac{1}{\rho-r} + \frac{1}{(\rho-r)^2} + \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\rho^j}{r^{j+1}} + (j+1) \frac{\rho^j}{r^{j+2}} \right\} < \\ < A(n+2) e^{\alpha n}, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \log \frac{\rho}{r} > 0,$$

$$A = A(x) = \frac{1}{\rho-r} \left[1 + \frac{1}{\rho-r} + \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2(\rho-2)} \right] > 0. \quad (10)$$

Функция $K(x, y)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в области D и непрерывна вместе с первыми производными (по y) на S_1 и S_2 . Поэтому для гармонической функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, справедлива формула Грина

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{S_1} + \int_{S_2} \right\} \left[K(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y} \right] dS, \quad (11)$$

где $\partial/\partial n_y$ обозначает дифференцирование по направлению внешней относительно D нормали к $S = S_1 + S_2$ в точке $y \in S$.

Из формулы (11), принимая во внимание оценки (7) и (9), получаем

$$|u(x)| < A(n+2) e^{\alpha n} I_1 + B(n+2) e^{-\beta n} I_2. \quad (12)$$

Неравенство (12) справедливо при любом целом $n \geq 0$, и, как легко видеть, его правая часть достигает минимума при некотором конечном n . Не отыскивая этого минимизирующего значения, заменим в правой части (12) дискретное n на непрерывное переменное λ и примем для λ значение

$$\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta} \log \frac{BI_2}{AI_1},$$

при котором оба слагаемых в правой части (12) равны. При этом потребуем, чтобы интеграл I_1 для всех точек $x \in F$ удовлетворял неравенству $AI_1 \leq BI_2$ [см. формулы (8) и (10)]. Из вида функций $A(x)$ и $B(x)$ ясно, что это условие выполнимо для любого замкнутого множества $F \subset D$.

Теперь число $n \geq 0$ определяем из условия $n = [\lambda] + 1$, где $[\lambda]$ — целая часть λ , т. е.

$$\frac{1}{\alpha + \beta} \log \frac{BI_2}{AI_1} < n \leq \frac{1}{\alpha + \beta} \log \frac{BI_2}{AI_1} + 1. \quad (13)$$

Подставляя это значение n в (12) и учитывая неравенства (13), находим

$$|u(x)| < \left(1 + \frac{\rho}{r}\right) \left(3 + \frac{1}{\alpha + \beta} \log \frac{BI_2}{AI_1}\right) \times \\ \times (AI_1)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} (BI_2)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}, \quad x \in F. \quad (14)$$

Так как $\alpha + \beta = \log \frac{R}{r}$, из (14) получаем неравенство (3) при $\rho = 3$.

Теорема доказана для этого случая.

При $\rho = 2$ или $\rho > 3$ рассуждаем по той же схеме, но вместо полиномов Лежандра в разложениях вида (5)–(7) будут фигурировать

ультрасферические полиномы $P_{\frac{(\rho-2)}{2}}(\cos \gamma)$. Применяя известные оценки для этих полиномов, докажем теорему в общем случае.

Замечание. Если $I_2 < I_1$, то рассуждение по той же схеме проводится с применением разложений в области $|y| < |x|$. Получается оценка (3), но функции $A(x)$ и $B(x)$ несколько изменятся.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Б. Г. ПРЦНУБЕНՅԵՎ

Երեւ գնդային մակերևութների բեռեմք հաճախակի ֆունկցիաների համար

Դիցուք $x = (x^1, \dots, x^p)$ -ն էվկլիդյան E^p տարածության կետ է, $\rho \geq 2$, $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^p)^2}$, **Դիցուք** $u(x)$ -ը հարմոնիկ է $D = \{x; r < |x| < R\}$ տիրույթում և իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է D փակ տիրույթում: Նշանակենք

$$I_1 = \frac{1}{\omega_p} \int_{S_1} \left[|u(y)| + \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \right] dS_1, \quad I_2 = \frac{1}{\omega_p} \int_{S_2} \left[|u(y)| + \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \right] dS_2.$$

Երանի $S_1 = \{x; |x| = r\}$ և $S_2 = \{x; |x| = R\}$ -ը եզրային զննային մակերևութներն են, ω_p -ն միավոր զննային մակերևութի մակերեսն է E^p -ում, $\partial/\partial n_y$ -ը S_1 -ի կամ S_2 -ի նորմալի ուղղությամբ վերցրած ածանցյալն է:

Այս աշխատանքում ապացուցվում է

Թեորեմ — ղիցուք $u(x)$ -ը նշված տիպի հարմոնիկ ֆունկցիա է D -ում: Այդ ղեպքում ցանկացած ֆիքս փակ $F \subset D$ բազմության համար I_1 ինտեգրալի բավականաչափ փոքր արժեքների ղեպքում բավարարվում է հետևյալ անհավասարույունը

$$|u(x)| < \left(1 + \frac{R}{r}\right) \left(3 + \frac{1}{\log \frac{R}{r}} \log \frac{BI_2}{AI_1}\right)^{p-2} \times \\ \times (AI_1)^{\frac{\log \frac{R}{r}}{\log \frac{R}{r}}} (BI_2)^{\frac{\log \frac{p}{r}}{\log \frac{R}{r}}}, \quad x \in F$$

որտեղ $A=A(x)$ և $B=B(x)$ հայտնի ղրական ֆունկցիաներ են, կախված միայն $|x|=r$ -ից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ը Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ С. Н. Мергелян, Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, Успехи матем. наук, 11, № 5 (71), 3—26, 1956.

² С. Н. Мергелян, О полноте систем аналитических функций, Успехи матем. наук, 8, № 4 (56), 3—63, 1953.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. О. Амасян

К подбору модельных материалов по подобию в статистическом смысле*

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 1 IV 1966)

При моделировании строительных конструкций на сейсмические воздействия делается предположение о полной определенности, детерминированности свойств модельных материалов.

Однако поликристаллическая структура, местные флуктуации химического состава и другие факторы, порождающие флуктуации механических свойств, и, как следствие, локальные возмущения поля напряжений носят изменчивый, случайный характер. Поэтому единичные испытания моделей или их отдельных элементов не могут дать достоверные результаты. Здесь очень важно воспользоваться статистическими методами, которые позволяют более полно и надежно использовать информацию, извлекаемую из результатов испытания моделей и глубже понять значение и смысл полученных данных.

Основные положения статистической теории подобия изложены в монографии академика АН Армянской ССР А. Г. Назарова (¹).

В наших экспериментальных исследованиях сделана попытка отыскания путей эффективного применения статистической теории подобия к подбору модельных материалов по их предельным прочностям.

Статистический подбор материала по прочностям фактически приводит к установлению подобия в статистическом смысле между кубиками разных размеров и разных прочностей.

При этом системы кубиков разных размеров считаются подобными, если среднеарифметические значения прочностей сравниваемых серий опытных образцов удовлетворяют условию

$$\bar{R}' = \beta \bar{R} \quad (1)$$

и плотности распределения безразмерных величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$ тождественны.

* При выполнении настоящей работы автор пользовался консультацией Г. А. Амбарцумян, за что выражает ей свою благодарность.

В настоящей статье рассматривается задача статистического моделирования легкого бетона марки М-50 легким бетоном марки М-25.

Так как плотности легких бетонов этих марок приблизительно одинаковы, то множитель подобия для плотности равен $\delta = 1$.

Отсюда, учитывая, что множитель подобия для напряжения $\beta = 0,5$, для линейного множителя получим $\alpha = \beta/\delta = 0,5$.

Характерный размер контрольных образцов (кубиков) оригинала был принят $l = 20$ см, следовательно, характерный размер контрольных кубиков модели будет $l' = \alpha l = 10$ см.

Опытные образцы указанных размеров, в количестве 36 шт. каждой серии, изготавливались из легкого бетона на туфовом песке и щебне Ленинанканского карьера.

Составы бетонов обеих серий, подобранные в соответствии с их предельной прочностью, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры кубиков см	Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м ³ бетона в кг				в/ц	γ_b т/м ³
		цемент	песок	щебень	вода		
20×20×20	1:2,7:4,5	176	480	797	293	1,66	1,746
10×10×10	1:3,8:6,3	130	493	818	163	1,25	1,604

Для определения предельной прочности все образцы испытывались на центральное одноосное сжатие. Испытания производились в возрасте 28 суток на пятидесятитонном гидравлическом прессе типа 2 ПГ-50А.

Результаты испытания бетонных кубиков каждой серии табулировались в вариационных рядах, которые затем оформлялись графически в виде гистограмм. Для каждой гистограммы подбирались теоретические кривые плотности распределения вероятностей. Случайные отклонения прочностей бетонных кубиков от их средней являются результатом действия большого числа независимых причин и поэтому на основании центральной предельной теоремы можно считать, что удовлетворительное сглаживание полученных гистограмм должно достигаться при использовании нормального (Гаусовского) закона распределения ⁽²⁾

$$f(R) = \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{R - \bar{R}}{\sigma_R} \right)^2}$$

При этом выравнивание гистограмм сводилось к нахождению оценок подходящих значений для числовых характеристик нормального распределения: математического ожидания $\bar{R}$ и среднеквадратического отклонения σ_R .

Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения осуществлялись по формулам:

для математического ожидания

$$\bar{R} = a + \frac{k \sum n_k \xi_R}{n},$$

для среднеквадратического отклонения

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{k^2 \sum n_k \xi_R^2}{n} - (\bar{R} - a)^2},$$

где ξ_R — случайная величина, вводимая для упрощения промежуточных расчетов,

$$\xi_R = \frac{R - a}{k};$$

n_k — частота случаев;

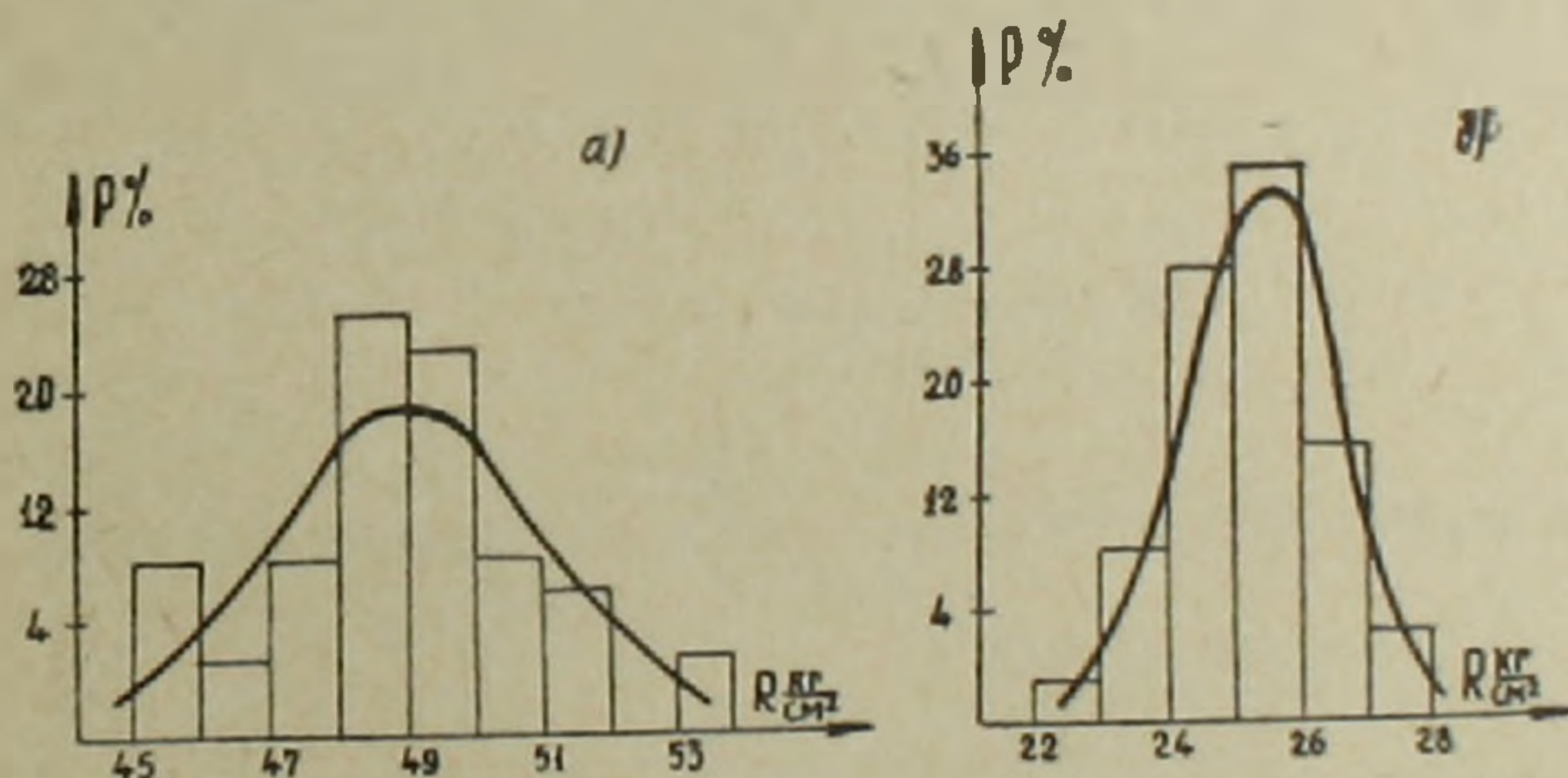
a — произвольное число, вводимое для удобства расчетов („ложный нуль“);

k — ширина разряда;

n — объем выборок.

Проверки согласия наблюдаемых данных с законами нормального распределения при помощи критерия Пирсона — χ^2 дали положительные результаты.

Гистограммы частот обеих серий со своими теоретическими распределениями приведены на фиг. 1а, б. Как видно из этих графиков,



Фиг. 1.

для среднеарифметических значений прочностей условие (1) выполняется с точностью 7%, которая для бетона вполне приемлема. Однако для полного соблюдения статистического подобия необходимо выполнение второго условия: тождественность плотностей распределения безразмерных величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$.

Плотности распределения величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$, как следует из фиг. 2, по точности не совпадают. Проверка подобности бетонных кубиков

Возможна лишь при оценке разницы между их плотностями распределения. Ниже приведем метод их оценки в первом приближении.

Назначим некоторую достаточно большую вероятность γ (например, $\gamma = 0,9$ или $0,95$) такую, что событие с вероятностью γ можно считать практически достоверным и найдем такое значение ε , для которого

$$P(|R' - \beta R| < \varepsilon) = \gamma. \quad (2)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибок, возникающий при замене бетона одной марки бетоном другой марки,

будет $\pm \varepsilon$. Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью $\zeta = 1 - \gamma$.

Составим разность

$$X = R' - \beta R, \quad (3)$$

которая в силу нормальностей случайных величин R' и βR также распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)$, средним значением

$$\bar{X} = \bar{R}' - \beta \bar{R} \quad (4)$$

и среднеквадратическим отклонением

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_{R'}^2 + \beta^2 \sigma_R^2}.$$

Вычисляя вероятность γ с учетом (3)–(5), получим

$$\begin{aligned} \gamma &= P(|R' - \beta R| < \varepsilon) = P(|X| < \varepsilon) = \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{X}}{\sigma_X} \right)^2} dx. \end{aligned}$$

Путем замены переменной $\frac{X - \bar{X}}{\sigma_X \sqrt{2}} = t$ можно выразить вероятность γ через функции Лапласа:

$$\gamma = P(|X| < \varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\varepsilon - \bar{X}}{\sigma_X \sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{\varepsilon + \bar{X}}{\sigma_X \sqrt{2}} \right) \right]. \quad (6)$$

Так как нам необходимо оценить только дисперсные свойства случайной величины X , то вместо ее, без ущерба для точности расчета, можем рассмотреть центрированную случайную величину

$$\bar{X} = X - \bar{X}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\gamma = \Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_X \sqrt{2}} \right).$$

Отсюда ε определяется однозначно

$$\varepsilon = \sigma_X \sqrt{2} \Phi^{-1}(\gamma), \quad (7)$$

где $\Phi^{-1}(\gamma)$ — функция обратная функции Лапласа.

В нашем случае, согласно формуле (7), при надежности $\gamma=0,95$, для ε было получено значение $\varepsilon=12,2\%$, которое свидетельствует о выполнении второго условия статистического подобия.

Полученные результаты указывают на то, что статистическое подобие между легкими бетонами марки М-50 и М-25 установлено.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ՀԱՄԻՍՅԱՆ

Սառսրահական առումով մոդելացման նյութերի բնորոշման հարցի շուրջը

Հոդվածում բերված է մոդելացման նյութերի ստատիստիկական բնորոշման մեթոդիկան բստիրենց սահմանային ամրության: Մասնավորապես դիտարկվում է М 50 մարկայի թեթև բետոնի ստատիստիկական մոդելացման ինդիքը М 25 մարկայի թեթև բետոնով: Բետոնյա նմուշների երկու սերիաները, որոնց չափերը և բաղադրությունները բերված են 1-ին աղյուսակում, ենթարկված են մեկ առանցքային սեղմման:

Փորձարկումներից ստացված արդյունքների ստատիստիկական մշակումը հանգել է սահմանային ամրությունների հավանականությունների բաշխման կորերի կառուցմանը (գծ. 1, 2), որոնց համեմատության հետագա անալիզից հանված է եզրակացություն երկու տարբեր մարկայի բետոնների մեջ ստատիստիկական նմանության հաստատման մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

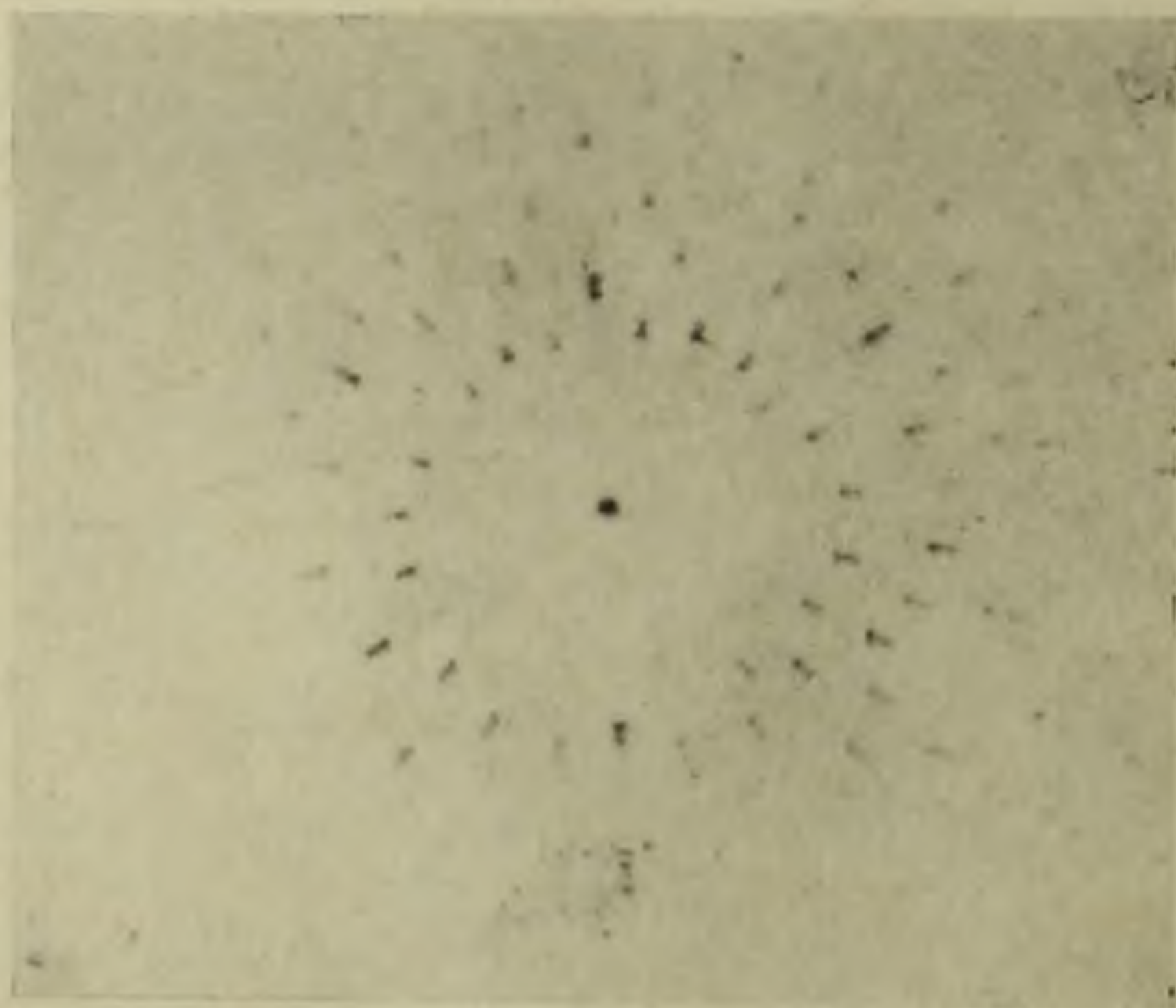
¹ А. Г. Назаров, О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1965. ² Е. С. Вентцель, Теория вероятностей. Гос. изд. физ. мат. лит., М., 1962.

В. И. Авунджян и П. А. Безирганян

Определение направления пьезоэлектрических колебаний с помощью рентгеновской дифракционной картины

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 19/X 1965)

Как известно (¹⁻⁵), при совершенных кристаллических шлифованных и полированных толстых образцах наблюдаются расщепления рентгеновских дифракционных пятен на лауэграмме — все пятна лауэграммы окажутся двойными (фиг. 1). Эту раздвоенность пятен можно объяснить тем, что внутренняя совершенная часть кристалла отражает слабее, а шлифованные и полированные разрушенные поверхностные слои отражают сильнее. Далее известно, что нарушение каким-то образом внутренней совершенной структуры увеличивает отра-



Фиг. 1. Лауэграмма неколеблущегося кристалла.

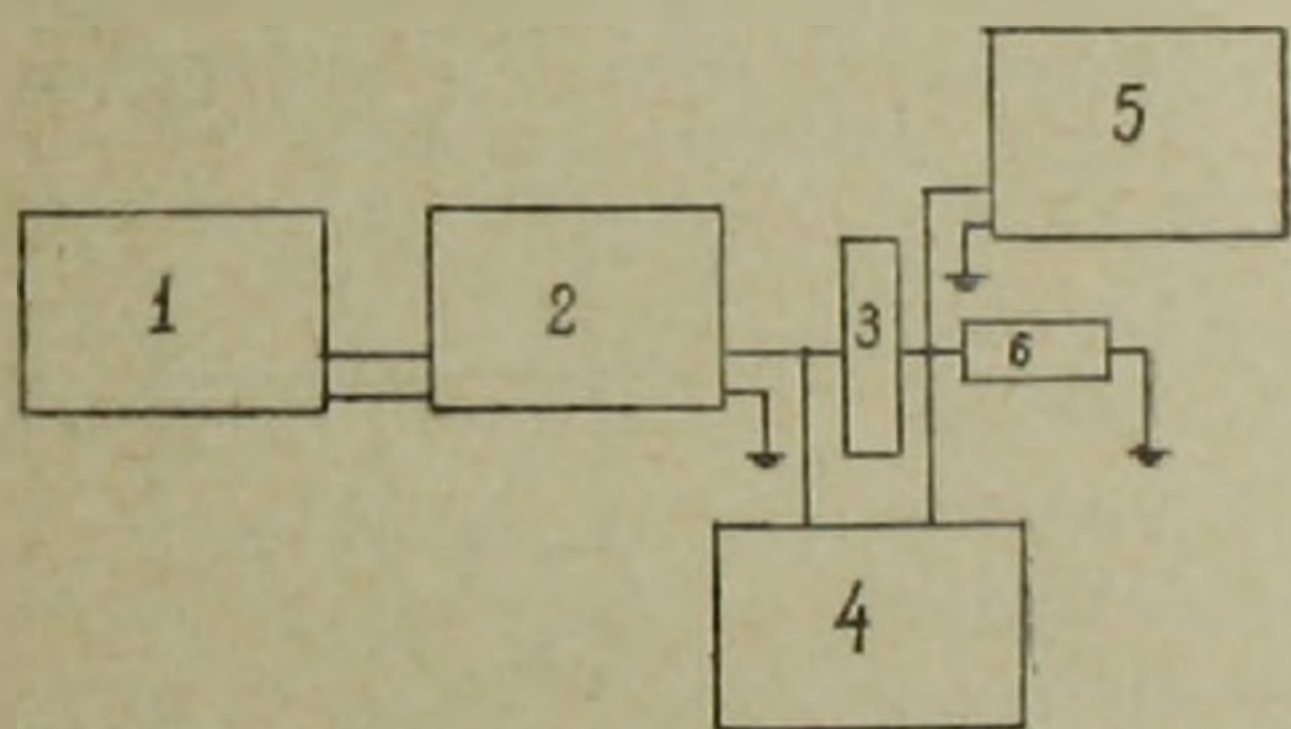
жающую способность этой части, и исчезает раздвоение пятен. В частности, подвергая пьезоэлектрическим колебаниям кристаллическую решетку, можно нарушить внутреннюю кристаллическую совершенную структуру таких образцов и, таким образом, слить в одну раздвоенные части пятен.

В работе (⁶) показано, что если кристалл рассмотреть как систему зеркально отражающих плоскостей, то все атомы данной плос-

кости этой системы (независимо от структуры) будут рассеивать в одинаковых фазах, и если пьезоэлектрические колебания рассеивателей происходят в этих плоскостях, то интенсивность отражения не будет зависеть от таких колебаний. С другой стороны, там же показано, что пьезоэлектрические колебания максимально влияют на интенсивность отражения в том случае, когда они перпендикулярны к отражающим плоскостям. Итак, одним из выражений влияния ультразвуковых колебаний на интенсивность рассеяния рентгеновских волн является то, что при более толстых совершенных кристаллах исчезает расщепление пятен лауэ, и это исчезновение происходит тем сильнее и быстрее, чем ближе направление пьезоэлектрических колебаний к направлению нормали отражающих плоскостей. Следовательно, исследуя зависимость степени исчезновения раздвоенности пятен лауэ от направления отражения, мы можем определить направления пьезоэлектрических колебаний.

Действительно, так как при жестком первичном рентгеновском излучении лауэграмма очень богата пятнами—во всех направлениях имеется отражение, то, исследуя исчезновение раздвоенности различных пятен в зависимости от пьезоэлектрических колебаний, мы можем найти те системы плоскостей, на которых влияние этих колебаний максимально. Тогда, без труда, с достаточной точностью можем определить направление пьезоэлектрических колебаний.

Для этой цели нами был поставлен следующий опыт. Кварцевый стержень размерами $27 \times 3 \times 3$ мм, механическая (Y), электрическая



Фиг. 2. Блок-схема колебания кварца: 1—генератор сигналов; 2—усилитель; 3—кварц; 4—вольтметр; 5—осциллограф; 6—сопротивление.

(X) и оптическая (Z) оси которого соответственно были ориентированы по его длине, толщине и ширине (X срез), от сигнал-генератора приводился в колебание на основной собственной частоте (резонанс) по длине (Y). Электрическое переменное поле было направлено по оси (X) (фиг. 2, (6)). Узкий пучок рентгеновского белого излучения

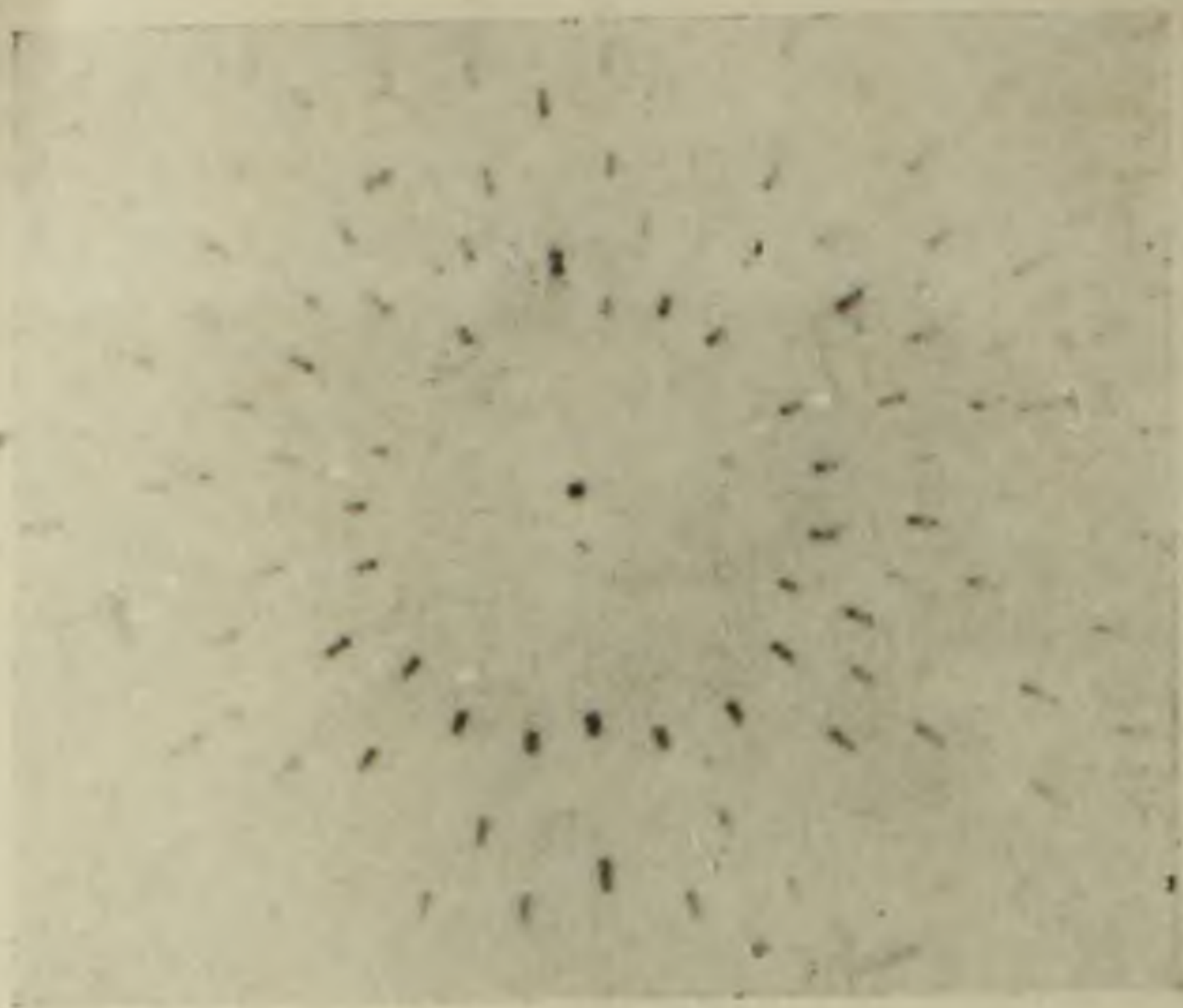
по направлению оси Z падал на поверхность XY, рентгеновская пленка была поставлена перпендикулярно к первичному пучку. Таким образом, была получена лауэграмма без колебания кристалла и при колеблющемся кристалле.

Эксперимент показал, что возбужденные колебания влияли только на интенсивность лауэ пятен, расположенных на верхней части (выше экваториальной линии) лауэграммы (фиг. 3), —исчезли раздвоенности только этих пятен, а раздвоенность пятен, расположенных на нижней части рентгенограммы, сохранилась.

Не трудно догадаться о том, что такая анизотропия в исчезновении раздвоенности лауэ пятен обусловлена тем, что пьезоэлектри-

ческие колебания в нашем образце, в кристалле кварца, происходили не в направлении оси Y , а под каким-то углом относительно этой оси.

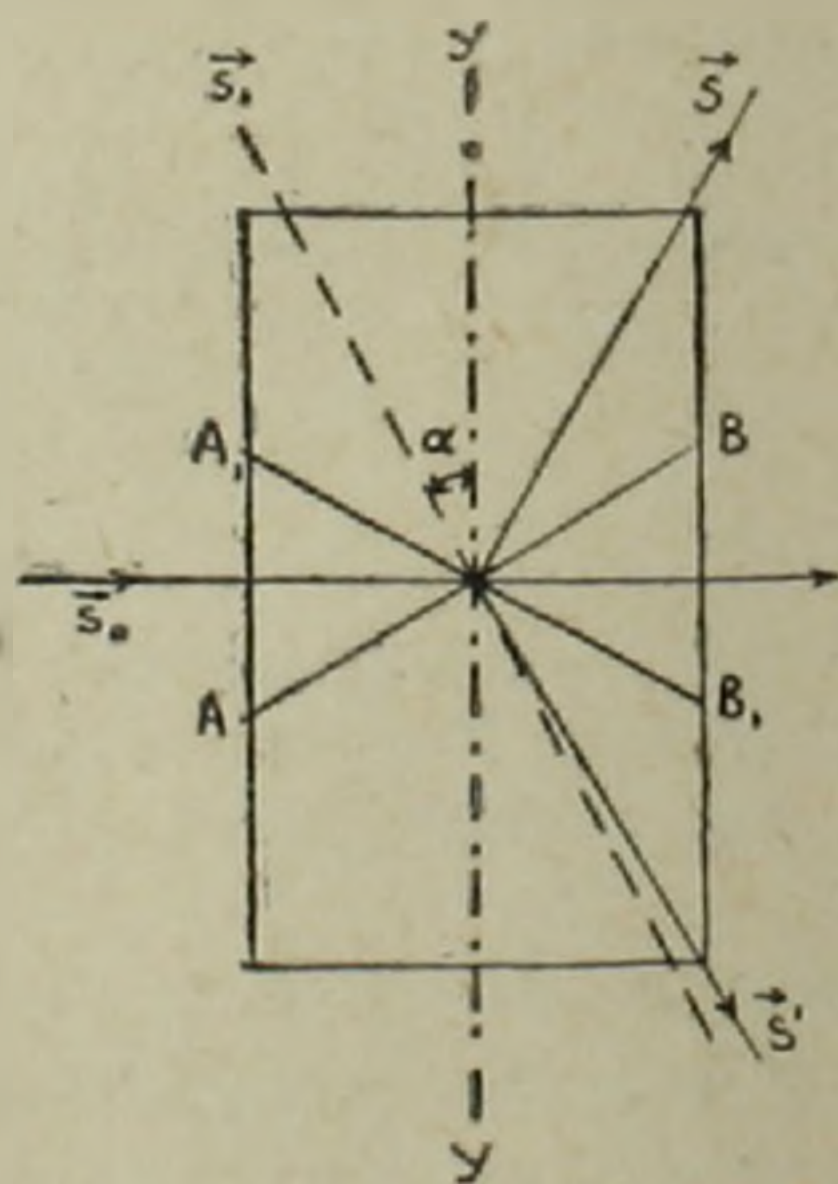
Действительно, допустим, что пьезоэлектрические колебания с максимальной амплитудой направлены под углом α относительно оси



Фиг. 3. Лауэграмма колеблющегося кристалла.

Y (фиг. 4). На фиг. 4 единичный вектор $\vec{s}_0$ показывает направление падения, $\vec{s}_1$ — направление пьезоэлектрических колебаний, AB — плоскость, отражающая вверх, A_1B_1 — отражающая вниз, $\vec{s}$ — направление

волны, дифрагированной вверх, а $\vec{s}'$ — направление волны, дифрагированной вниз. Как видно из рисунка, если пьезоэлектрические колебания почти перпендикулярны к плоскостям, отражающих вверх (AB), то они будут параллельны плоскостям, отражающих вниз (A_1B_1), поэтому они влияют на интенсивность верхних пятен и не влияют на интенсивность нижних пятен. Исследуя изменение интенсивности (микрофотометрированием) лауэ пятен в зависимости от пьезоэлектрических колебаний и от их направления расположения, мы нашли, что максимально исчезла раздвоенность тех пятен, нормали отражающих плоскостей которых расположены приблизительно под углом 19° относительно оси Y .



Фиг. 4. К исчезновению раздвоенности лауэ-пятен.

Оказывается, что этот результат вполне соответствует действительности, так как по данным Штраубеля (¹) в кварцевых стержнях, вырезанных обычным способом (X срез), колебания по длине никогда не возбуждаются точно по оси Y. Колебания с максимальной амплитудой происходят под углом 19° относительно оси Y.

Таким образом, из вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. С помощью дифракционной картины рентгеновских лучей можно с достаточной точностью определить истинные направления пьезоэлектрических колебаний мотивов кристаллов.

2. С помощью лауэграмм, полученных от кристаллов, подвергнутых пьезоэлектрическим колебаниям, можно составить картину пространственного распределения амплитуд колебаний мотивов кристаллов и, таким образом, от этой картины получить пространственную картину зависимости упругих постоянных от направления.

Ереванский государственный университет

Վ. Ի. ՀԱՎՈՐՆՋՅԱՆ և Պ. Հ. ՐԵԶԻՐԳԱՆՅԱՆ

**ՌԵՆՏԳԵՆԻԱՆ ՂԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՎԻՃԿԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ ՎԵՋՈՒԼԵԿՏՐԱԿԻԱՆ
ՊԱՅԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՂՂՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ**

Հաստ կվարցյա բյուրեղներից լաուեգրամներ նկարելիս, բծերը ստացվում են կրկնակի, որոնց միջակայքը լցվում է, երբ բյուրեղը կատարում է պիեզոէլեկտրական տատանումներ:

Աշխատանքում ուսումնասիրված է վերոհիշյալ լցման կախումը բյուրեղում տատանումների ուղղություներից: Ցույց է տրված, որ ուսումնասիրելով լցման բաշխումը ունեցնելու ճառագայթների ՂԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՎԻՃԿԵՐԻ ՎՐԱ, կարելի է բավարար ճշտությամբ որոշել պիեզոէլեկտրական տատանումների ճշգրիտ ուղղությունը, կարելի է կազմել տատանումների ամպլիտուդի տարածական բաշխման պատկերը և նրա օգնությամբ ստանալ բյուրեղի առաձգական հաստատունների կախումը ուղղություններից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Нишикава, И. Сакисака, И. Сумото, Note on „The Effect of Piesoelectric Oscillation on the Intensity of X-Ray Reflections from Quartz, Phys. Rev., 38, 1078, 1931. ² Ч. С. Баррет, К. Е. Хой, X-Ray Reflection from Inhomogeneously Strained Quartz, Phys. Rev., 39, 889, 1932. ³ Дж. М. Корк, „Laue Patterns from Thick Crystals at Rest and Oscillating Piezoelectrically“—Phys. Rev., 42, 749, 1932. ⁴ М. И. Колби, С. Гарис, Effect of Etching on the Relative Intensities of the Components of Double Laue Spots Obtained from a Quartz Crystal, Phys. Rev., 43, 562, 1933. ⁵ Дж. В. Фоки В. А. Фрейзер, X-Ray Extinction in Piezoelectrically Oscillating Crystals, Phys. Rev. 47, 899, 1935. ⁶ И. А. Безирганян, В. И. Авунджян, „Кристаллография“, в печати. ⁷ А. Бергман—Ультразвук и его применение в науке и технике, Изд. иностр. лит., М., 1957.

А. Д. Газазян

Взаимодействие когерентного излучения с атомами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 10/1 1966)

В последнее время в литературе появился ряд работ, посвященных вопросу взаимодействия излучения с резонансной средой (¹⁻³). В этих работах рассматривается излучение и поглощение определенного фиксированного числа фотонов. При таком подходе всякого рода фазовые соотношения и, следовательно, эффекты когерентности фотонного пучка не могут быть рассмотрены. В работах М. Л. Тер-Микаеляна (⁴) эти вопросы рассмотрены на основе квазиклассической теории, и результаты этих работ в некоторых предельных случаях совпадают с результатами, полученными из квантово-электродинамического рассмотрения.

Математический аппарат квантовой электродинамики, который построен в представлении чисел заполнения, то есть в представлении, где диагонально число фотонов, не дает возможности получить информацию о фазе фотонов. Изучению статистических свойств фотонного пучка посвящены последние работы Глаубера, Сударшана и некоторых других авторов.

В данной работе рассматривается взаимодействие полностью когерентного излучения с двухуровневыми атомами. Метод расчета, использованный здесь, аналогичен работе (³).

Полный гамильтониан для системы атомов и фотонного поля в одномодовом приближении имеет вид:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} J_z + \hbar\omega c^+c + \hbar (c\beta^* J_+ + c^+ \beta J_-) \quad (1)$$

с предположением, что матричные элементы перехода всех атомов одинаковы. Здесь ω_0 — частота перехода в атоме

$$J_z = \sum_j \sigma_z^j, \quad J_+ = \sum_j \sigma_+^j, \quad J_- = \sum_j \sigma_-^j$$

где суммирование идет по числу атомов.

$$\begin{aligned} \beta^* &= \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} (\vec{M} \vec{e}), \\ \beta &= \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} (\vec{M}^* \vec{e}), \end{aligned} \quad (2)$$

ω — частота, c и c^+ соответственно операторы уничтожения и рождения фотона, M — матричный элемент перехода изолированного атома с нижнего уровня на верхний с одновременным поглощением фотона, а M^* — матричный элемент обратного перехода с излучением фотона.

Начальное состояние фотонного пучка будем описывать в представлении, где диагонален оператор уничтожения c :

$$c |z\rangle = z |z\rangle, \quad (3)$$

следовательно,

$$\langle z | c^+ = z^* \langle z|. \quad (3')$$

Разлагая функции $|z\rangle$ по числу фотонов

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle, \quad (4)$$

для коэффициентов A_n находим ⁽⁵⁾

$$A_n = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \quad (5)$$

Предположим, сейчас, что в начальный момент ($t=0$) первые N_2 атомов возбуждены, а остальные $N_1 = N - N_2$ находятся в основном состоянии. Тогда волновую функцию N атомов в момент t можно записать в виде:

$$\Phi(0) = \Phi_1(j_1, -j_1) \Phi_2(j_2, j_2), \quad (6)$$

где $j_2 = \frac{N_2}{2}$, $j_1 = \frac{N_1}{2}$, или разлагая, по аналогии теоремы суммирования моментов, в ряд Клебша—Гордана, получим

$$\Phi(0) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j \Phi(j, j_2-j_1), \quad (7)$$

где

$$C_j = \left[\frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1+j_2-j)!} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Полная начальная волновая функция для системы N атомов и когерентного фотонного поля, следовательно, будет иметь вид:

$$\Psi(0) = \Phi(0) |z\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j \Phi(j, j_2-j_1) \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle. \quad (9)$$

Представим волновую функцию в момент t в виде:

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j \left\{ \sum_{n=0}^{l-(j_2-j_1)} A_n \sum_{m=0}^{n+j+j_2-j_1} B_m^{n,j}(t) |m\rangle \Phi(j, n-m+j_2-j_1) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=j-(j_2-j_1-1)}^{\infty} A_n \sum_{m=n-[j-(j_2-j_1)]}^{n+j-j_2} B_m^{n,l}(t) |m\rangle \Phi(j, n-m+j_2-j_1) \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где пределы суммирования по m определяются из условия

$$-j \leq n - m + j_2 - j_1 \leq j. \quad (11)$$

Подставляя функцию (10) в уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H \Psi(t),$$

получим следующую систему уравнений для коэффициентов $B_m^{n,j}(t)$:

$$i \frac{\partial B_m^{n,j}(t)}{\partial t} = \left[(n - m + j_2 - j_1) \omega_0 - m \omega \right] B_m^{n,j}(t) + \\ + \beta^* \sqrt{(m+1)(j+n-m+j_2-j_1)(j-n+m-j_2+j_1+1)} B_{m+1}^{n,j}(t) + \\ + \beta \sqrt{m(j-n+m-j_2+j_1)(j+n-m+j_2-j_1+1)} B_{m-1}^{n,j}(t) \quad (12)$$

с начальными условиями

$$B_m^{n,j}(0) = \delta_m^n. \quad (13)$$

Среднее число фотонов в момент t определяется следующей формулой:

$$n(t) = \langle \Psi(t) | c^\dagger c | \Psi(t) \rangle. \quad (14)$$

Подставляя сюда выражение (10) для волновой функции, получим

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 \rho_n(t), \quad (15)$$

где $\rho_n(t)$ — среднее число фотонов в момент t , если в начальный момент имели n фотонов; $|A_n|^2$ представляет собой распределение числа начальных фотонов в пучке, которое в случае полной когерентности, исходя из формулы (5), имеет вид распределения Пуассона:

$$|A_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}, \quad (16)$$

а $\bar{n} = |z|^2$ — среднее число фотонов в падающем пучке. Подставляя выражение (16) в формулу (15) для среднего числа фотонов в момент t , получим

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!} \rho_n(t), \quad (17)$$

где

$$\rho_n(t) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j^2 \begin{cases} \sum_{m=0}^{n+j+j_2-j_1} m |B_m^{n,j}(t)|^2 & n \leq j - (j_2 - j_1) \\ \sum_{m=n-|j-(j_2-j_1)|}^{n+j+j_2-j_1} m |B_m^{n,j}(t)|^2 & n > j - (j_2 - j_1). \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим теперь частные случаи одного атома.

1. Пусть когерентный фотонный пучок падает на один атом, который находится в основном состоянии. Это соответствует случаю, когда $j = j_1 = \frac{N_1}{2} = \frac{1}{2}$, а $j_2 = \frac{N_2}{2} = 0$ (так как $N_1 = 1$, $N_2 = 0$) и $C_j = 1$.

(по формуле (8)). Подставляя эти значения в уравнение (12) и учитывая, что при этом $m = n, n - 1$ (как видно из формулы (18)), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial B_n(t)}{\partial t} &= \left(-\frac{\omega_0}{2} + n\omega \right) B_n(t) + \beta \sqrt{n} B_{n-1}(t), \\ i \frac{\partial B_{n-1}(t)}{\partial t} &= \left[\frac{\omega_0}{2} + (n-1)\omega \right] B_{n-1}(t) + \beta^* \sqrt{n} B_n(t) \end{aligned} \quad (19)$$

с начальными условиями

$$B_n(0) = 1, B_{n-1}(0) = 0 \quad (20)$$

(здесь $B_n(t) \equiv B_{n, \frac{1}{2}}(t)$ и $B_{n-1}(t) \equiv B_{n-1, \frac{1}{2}}(t)$).

Решая систему уравнений (19) с начальными условиями (20) получим

$$B_n(t) = \frac{1}{2\Omega_n} e^{-i(n-\frac{1}{2})\omega t} \left\{ e^{\frac{i\Omega_n}{2}t} [(\omega_0 - \omega) + \Omega_n] - e^{-\frac{i\Omega_n}{2}t} [(\omega_0 - \omega) - \Omega_n] \right\}, \quad (21)$$

$$B_{n-1}(t) = -\frac{2i}{\Omega_n} e^{-i(n-\frac{1}{2})\omega t} \sqrt{n} \beta^* \sin \frac{\Omega_n}{2} t,$$

где

$$\Omega_n = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4n|\beta|^2}.$$

Формула для среднего числа фотонов (17) и (18) в этом случае примет вид:

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!} [n|B_n(t)|^2 + (n-1)|B_{n-1}(t)|^2]. \quad (22)$$

Подставляя сюда выражения для $B_n(t)$ и $B_{n-1}(t)$ из формул (21), окончательно для числа фотонов получим:

$$n(t) = \bar{n} - 4|\beta|^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} \sin^2 \frac{\Omega_n}{2} t. \quad (23)$$

В резонансе, когда $\omega_0 = \omega$, $\Omega_n = 2\sqrt{n}|\beta|$, получим:

$$n(t) = \bar{n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!} \sin^2 \sqrt{n} |\beta| t. \quad (24)$$

2. Пусть когерентный фотонный пучок падает на один атом, который находится в возбужденном состоянии. Это соответствует случаю $j_1 = \frac{N_1}{2} = 0, j = j_2 = \frac{N_2}{2} = \frac{1}{2}$ (так как $N_1 = 0, N_2 = 1$) и $C_j = 1$ (по формуле (8)). Подставляя эти значения в уравнение (12) и учитывая, что при этом $m = n, n + 1$ (как видно из формулы (18)), получим следующую систему уравнений:

$$i \frac{\partial B_n(t)}{\partial t} = \left(\frac{\omega_0}{2} + n\omega \right) B_n(t) + \beta^* \sqrt{n+1} B_{n+1}(t),$$

$$i \frac{\partial B_{n+1}(t)}{\partial t} = \left[-\frac{\omega_0}{2} + (n+1)\omega \right] B_{n+1}(t) + \beta \sqrt{n+1} B_n(t) \quad (25)$$

с начальными условиями

$$B_n(0) = 1, \quad B_{n+1}(0) = 0$$

$$\text{(здесь } B_n(t) \equiv B_n^{\frac{n, \frac{1}{2}}}(t), \quad B_{n+1}(t) \equiv B_{n+1}^{\frac{n, \frac{1}{2}}}(t)). \quad (26)$$

Решая систему уравнений (25) с начальными условиями (26), получим

$$B_n(t) = -\frac{1}{2\Omega_{n+1}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \left\{ e^{i\frac{\Omega_{n+1}}{2}t} [(\omega_0 - \omega) - \Omega_{n+1}] - e^{-i\frac{\Omega_{n+1}}{2}t} [(\omega_0 - \omega) + \Omega_{n+1}] \right\}, \quad (27)$$

$$B_{n+1}(t) = -\frac{2i}{\Omega_{n+1}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \sqrt{n+1} \beta \sin \frac{\Omega_{n+1}t}{2}.$$

Формула для среднего числа фотонов (17) и (18) в этом случае примет вид:

$$\bar{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!} [n |B_n(t)|^2 + (n+1) |B_{n+1}(t)|^2]. \quad (28)$$

Подставляя сюда выражения для $B_n(t)$ и $B_{n+1}(t)$ из формул (27), окончательно для числа фотонов получим:

$$\bar{n}(t) = \bar{n} + 4|\beta|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!} \frac{1}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2 \frac{\Omega_{n+1}t}{2}. \quad (29)$$

В резонансе, когда $\omega_0 = \omega$, $\Omega_{n+1} = 2\sqrt{n+1}|\beta|$, получим*

$$\bar{n}(t) = \bar{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!} \sin^2 \sqrt{n+1} |\beta| t. \quad (30)$$

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну и В. М. Арутюняну за ценные советы и обсуждения результатов.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета
и Академии наук Армянской ССР

* Как любезно сообщил В. М. Арутюнян формула (30) получена иным методом также в недавно появившейся работе (6).

ԿՈՆԵՐԵՆՏ ԾԱՌԱԳԱՅՐԺԱՆ ՓՈԽԱԳԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՌՈՄՆԵՐԻ ԻՆՏ

Աշխատանքում դիտարկված է կոհերենտ ճառագայթման փոխադրեցությունը երկմակարդականի ատոմների սխեմայի հետ: Ցույց է տրված, որ ֆոտոնների միջին թիվը է մոմենտում հավասար է:

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 \rho_n(t),$$

որտեղ $\rho_n(t)$ ֆոտոնների թիվն է է մոմենտում, եթե սկզբնական $t=0$ մոմենտում ունեցել ենք n ֆոտոններ: $|A_n|^2$ իրենից ներկայացնում է ֆոտոնների թվի բաշխումը սկզբնականից, որը լրիվ կոհերենտ ճառագայթման դեպքում տրվում է Պուասոնի բաշխման ֆունկցիայով: Ստացված է դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա երկմակարդականի ատոմների և կոհերենտ ճառագայթման դաշտի փոխադրեցության համար: Վերջում դիտարկված են մի ատոմի երկու մասնավոր դեպքերը. առաջին, երբ կոհերենտ ֆոտոնների փունջը ընկնում է ատոմի վրա, որը գտնվում է հիմնական վիճակում. երկրորդ, երբ կոհերենտ ֆոտոնների փունջը ընկնում է գրգռված ատոմի վրա: Ստացված են բանաձևեր է մոմենտում ֆոտոնների միջին թվի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

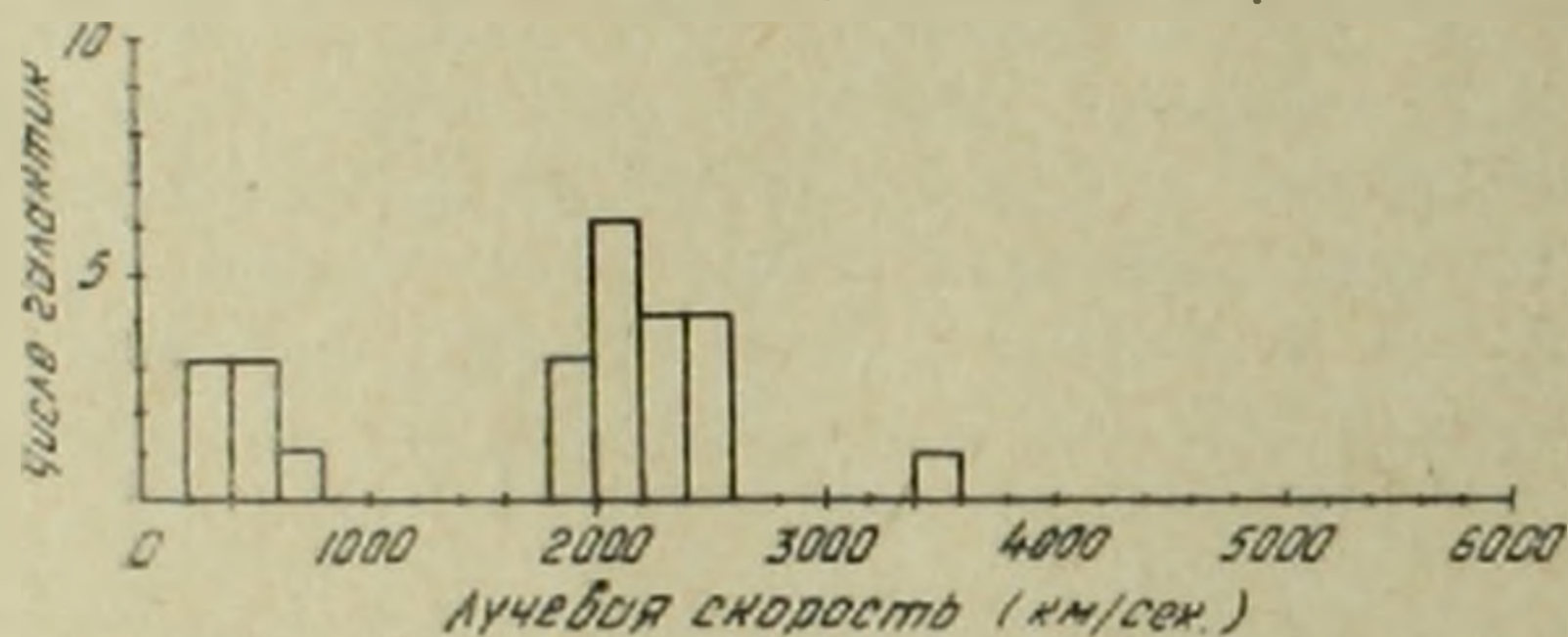
¹ А. И. Алексеев, Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, 46, 320, 1964.
² А. И. Алексеев, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, 47, 1893, 1964. ³ В. М. Арутюнян, Известия АН АрмССР, физика, т. 1, № 2 (1966). ⁴ М. Л. Тер-Микаелян, А. Л. Микаелян, Вестник ЕрГУ, серия физическая, 1965. ⁵ К. Л. Метта и Э. Сударишан, Phys. Rev. 138, В274, 1965. ⁶ Ф. В. Каммингс, Phys. Rev. 140, А1031, 1965.

И. Д. Караченцев

Рассеянная группа галактик

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 11/X 1965)

В области близкого скопления карликовых галактик, изученного Ван ден Бергом (¹), наблюдается большое число галактик с лучевыми скоростями около $2000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Для иллюстрации на фиг. 1 изображено распределение галактик по лучевым скоростям V_r на площади

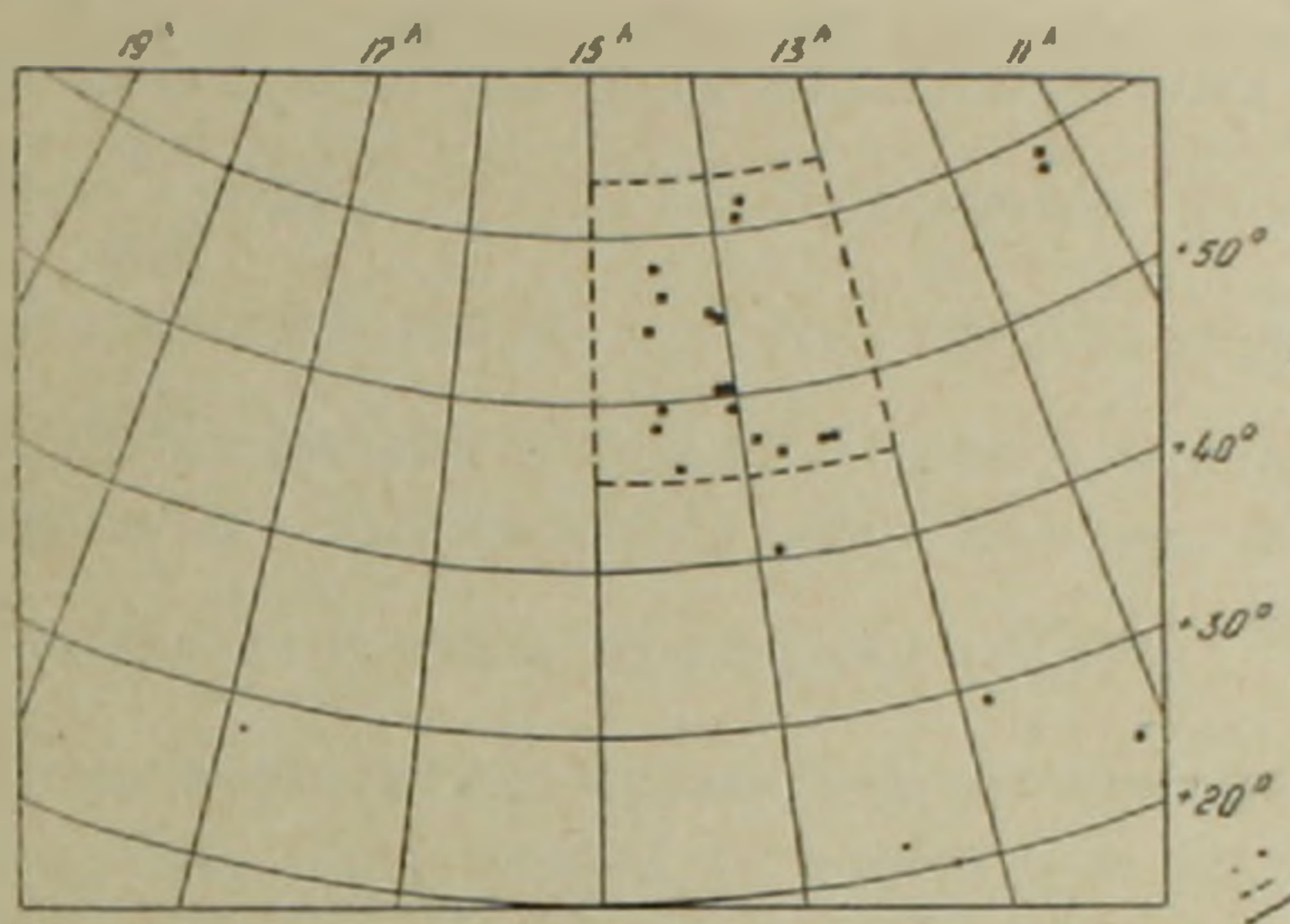


Фиг. 1.

между $13''$ и $15''$ по α и $+45^\circ - +63^\circ$ по δ . Из 25 галактик с известными лучевыми скоростями 7 попадают в интервал $200 \div 800 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ (скопление Ван ден Берга); из остальных все, кроме одной, имеют лучевые скорости между $1800 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ и $2600 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Изолированность этой совокупности галактик на шкале V_r довольно очевидна. Чтобы судить о характере распределения в картинной плоскости, на карту атласа Бечвара (фиг. 2) нанесены все галактики с $V_r = 1800 \div 2600 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Анализ приведенного распределения позволяет предположить, что эти галактики в указанной выше области неба действительно образуют обособленную группу. Вероятность случайного скучивания 17 галактик в обведенной пунктиром площадке меньше, чем 10^{-10} .

Номера 17 галактик группы по каталогу NGC, лучевые скорости, звездные величины и морфологические типы приведены в табл. 1. Данные взяты из каталогов (^{2,3}). Средняя лучевая скорость группы равна $+2212 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ с дисперсией $\langle \Delta V_r^2 \rangle^{1/2} = 220 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$.

Для выяснения различных характеристик группы область, обведенная на фиг. 2 пунктиром, просматривалась на картах Паломарского атласа. Подсчеты галактик с угловыми диаметрами более $1'$ показали, что в группе нет четко выраженного сосредоточения галактик к центру, группа очень рассеяна и слабо выделяется на общем метagalактическом фоне. После исключения фона в группе остается около двух десятков членов $11^m - 13^m$. Галактики слабее 14^m в группе как будто отсутствуют. Интегральная фотографическая свети-



Фиг. 2.

мость членов группы составляет $3,1 \cdot 10^{11} L_{\odot}$ (при $h = 75 \frac{\text{км}}{\text{сек. мпс}}$ и

$m_{\odot} = 5^m 37$). Зная „эффективный“ радиус группы $\bar{R} = 3,7$ мпс, можно вычислить для нее вириальное отношение массы к светимости $f_{\text{вир}}$.

Таблица 1

NGC	V_r	m_{ph}	Тип	NGC	V_r	m_{ph}	Тип
5173	+2506	$13^m 8$	E0	5481	+2157	$13^m 2$	E4
5198	+2590	13.0	E1	5485	+2136	12.6	S0
5301	+1813	13.0	Sc	5631	+2144	12.6	S0
5308	+2206	12.2	S0	5633	+2457	12.9	Sb
5322	+2063	11.0	E4	5676	+2394	11.7	Sc
5377	+1951	12.0	Sa	5678	+2474	12.1	Sc
5448	+2102	12.2	Sa	5687	+2286	12.8	E3
5473	+2127	12.4	SB0	5689	+2354	12.9	S0
5480	+1853	12.1	Sc				

Расчет дал значение $f_{\text{вир}} = 1534 f_{\odot}$, что на два порядка выше обычных значений f . Из этого можно заключить, что гравитационные силы между членами группы чрезвычайно малы и система не находится в стационарном состоянии.

Если группа распадается, то ее экспансионный возраст, определяемый по формуле $t = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{R} \langle \Delta V_r^2 \rangle^{-1/2}}$, равен $1,4 \cdot 10^{10}$ лет. Это несколько больше экспансионного возраста Метагалактики $T(t_0) \leq h^{-1}$,

зависящего от величины параметра торможения q_0 ; при наиболее вероятном значении $q_0 = +1$ [1] $T = 7,5 \cdot 10^9$ лет. Поскольку полученный результат может иметь определенное космологическое значение, рассмотрим дополнительно следующий вопрос. На группу проектируются галактики близкого скопления, в том числе M51 и M101. Не может ли повышенный интерес к определению лучевых скоростей галактик в окрестности этих близких привести к тому, что такая селекция создаст эффект кажущейся группировки среди далеких галактик с известными скоростями? Чтобы ответить на вопрос, вычислим ожидаемое количество галактик на площади радиусом $\bar{R} = 3,7$ мпс и со скоростями в интервале $(\Delta V_r^2)^{1/2} = \pm 220 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Соответствующая толщина сферического слоя, где может располагаться интересующая нас галактика, составляет 5,9 мпс. В объеме $\pi \bar{R}^2 2 (\Delta V_r^2)^{1/2} h^{-1} = 250 \text{ мпс}^3$ при средней метагалактической плотности $n = 1,95 \times 10^{-2} \frac{\text{галактик}}{\text{мпс}}$ (3) будет находиться всего 5 галактик. Следовательно, если бы в области группы измерялась лучевая скорость у каждой галактики фона, то в интервал дисперсии скоростей группы попало бы только 5 галактик, а не 17.

Дополнительным указанием на реальность группы может служить то обстоятельство, что из 17 ее членов 10 принадлежат к типам E, S0, SB0. По Сэндейджу (4) средняя распространенность этих типов в Метагалактике составляет всего 28,3%. Близкая величина (24%) получилась при классификации галактик на Паломарских картах в окрестности группы. Поэтому вероятность случайно встретить среди 17 галактик 10 эллиптических равна 0,03 от максимальной вероятности.

По очевидным причинам обнаруживать рассеянные системы такого типа трудно. Может быть, подобную группу образуют галактики NGC 5394, 5533, 5544, 5545, 5557, 5614, 5653 и 5672. Средняя лучевая скорость их равна $+3594 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ с дисперсией $261 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Эта предполагаемая группа во многом сходна с вышеописанной. Возможно, что рассеянные системы составляют довольно обширный класс среди групп галактик.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ի. Դ. ԿԱՐԱՉԵՆՑԵՎ

Գալակտիկաների ցրված խումբ

Քերված են տվյալներ, որոնք ցույց են տալիս գալակտիկաների մի խիստ ցրված խմբի գոյությունը: Խումբը պարունակում է չափավոր տեսագծային արագություններով 17 գալակտիկա:

Խմբի նկատմամբ Վիրիալի թեորեմի կիրառումից կարելի է եզրակացնել, որ խումբը ջր-
վում է, ըստ որում խմբի ընդարձակման տարիքը մի փոքր գերազանցում է Մետազալակտիկայի
ընդարձակման տարիքին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ С. Ван ден Берг, Ар. Ј., 131, 3, 42, 1960. ² М. Л. Хьюмсон, Н. У. Мэйолл, А. Р. Сэндейдж, А. Ј., 61, 3, 97, 1956. ³ Б. А. Воронцов-Вельяминов, А. А. Красногорская, Морфологический каталог галактик, ч. I, Изд. МГУ, 1962. ⁴ А. Р. Сэндейдж, Ар. Ј., 133, 2, 355, 1961. ⁵ Н. Д. Караченцев, ДАН СССР, 158, 4, 815 (1964).

МИНЕРАЛОГИЯ

Մ. Ա. Տառն, Ջ. Օ. Տեփանյան և Գ. Մ. Մկրտչյան

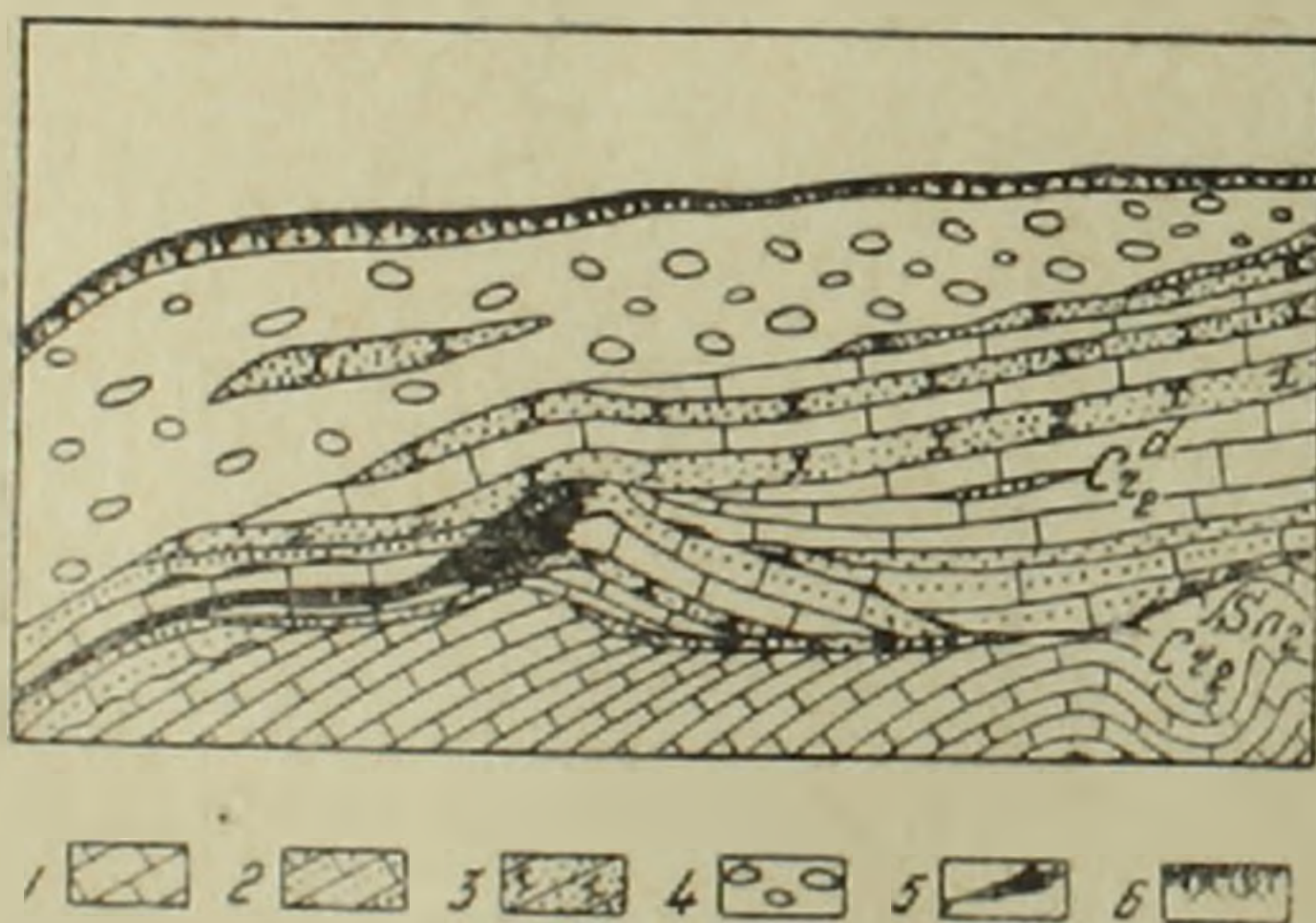
О целестине и стронцианите из отложений дания-палеоцена у сел. Двин

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. С. Мкртчяном 24/1 1966)

Обнаружение в осадочных толщах республики скоплений минералов стронция—явление пока что исключительно редкое (¹).

Целестин и стронцианит в виде линзочек, прожилок и жеод установлены во флишеидной терригенно-карбонатной толще дания-палеоцена, к СВ от сел. Двин (г. Еранос). Подробная петрографо-минералогическая характеристика этих отложений и фацально-палеогеографические условия их накопления рассматриваются в работах (²⁻⁴).

Скопления минералов стронция в основании толщи, представляющие наибольший минералогический интерес, в целом приурочены к контакту отложений дания и верхнего сенона или же вблизи его (фиг. 1), образуя мелкие линзовидные тела и прожилки, участками метасоматически замещая слои известняков и известковистых песчаников.



Фиг. 1. Зарисовка одного из обнажений пород дания-палеоцена, вмещающих минералы стронция. 1— известняки; 2— песчано-алевритистые известняки; 3— песчаники и алевролиты известковистые; 4— конгломераты; 5— целестин и стронцианит; 6— почва.

В шлифах устанавливается, что стронцианит выполняет интерстиции в агрегате зерен целестина, сечет целестиновые поля тонкими прожилками, развивается вдоль спайности кристаллов целестина.

Такое взаимоотношение, характерное для участков преимущественно целестиновых скоплений, указывает со всей определенностью, что

стронцианит является более поздним по отношению к целестину. Наряду с этим, периферия крупной линзы и нередко мелкие другие линзочки представлены преимущественно стронцианитом, который, видимо, образуется за счет перехода целестина в стронцианит.

Кристаллы целестина имеют сахаристо-белый цвет, стронцианита — кремовый, желтовато-водянисто-белый. Для них характерно большое разнообразие форм кристаллов: призматические, шестоватые, удлиненнопластинчатые для стронцианита, преимущественно таблитчатые для целестина. Размер зерен от 0,2 мм до 1 см и более.

Диагностика минералов стронция проведена оптическим, химическим, спектральным, рентгено-структурным методами (табл. 1,2).

В иммерсии и на федоровском столике установлены следующие константы:

- а) для целестина: $N_g=1,631$, $N_m=1,624$, $N_p=1,622$,
 $N_g-N_p=0,009$, $2V=53^\circ$.
- б) для стронцианита; $N_g=1,666$, $N_m=1,664$, $N_p=1,516$,
 $N_g=N_p=0,150$, $2V=8^\circ$.

Рентгенограмма двинского стронцианита имеет большое сходство с рентгенограммой стронцианита из Гумбейки (табл. 2). Рентгенограмма чисто отобранного стронцианита не обнаруживает примеси кальцита. Полученное химическим анализом содержание в стронцианите окиси кальция до 3,0%, как показал иммерсионный контроль этого порошка, обязано примеси в нем до 5% (весовых) мелких зерен кальцита.

Таблица 1
Химический состав целестина и стронцианита

Компоненты	1	2	3	4
SiO ₂	0,18	—	0,36	0,06
CaO	3,00	2,702	4,74	3,02
SrO	65,00	66,312	63,28	55,62
BaO	0,16	0,166	—	0,84
CO ₂	31,94	30,355	30,80	5,00
SO ₃	1,44	—	0,33	36,16
Сумма	101,72	99,535	99,51	100,70

- 1. Стронцианит. Сел. Двин. Армянская ССР, аналитик Т. Т. Авакян ИГН.
- 2. Стронцианит. Стронциан, Шотландия, по В. В. Буркову и Е. К. Подпориной, 1962.
- 3. Стронцианит крупнокристаллический. Кара-Оба. Казахская ССР. по Л. П. Ермиловой и Л. М. Сендеровой, 1959 (из работы Буркова и Подпориной).
- 4. Целестин. Сел. Двин. Армянская ССР, аналитик Т. Т. Авакян.

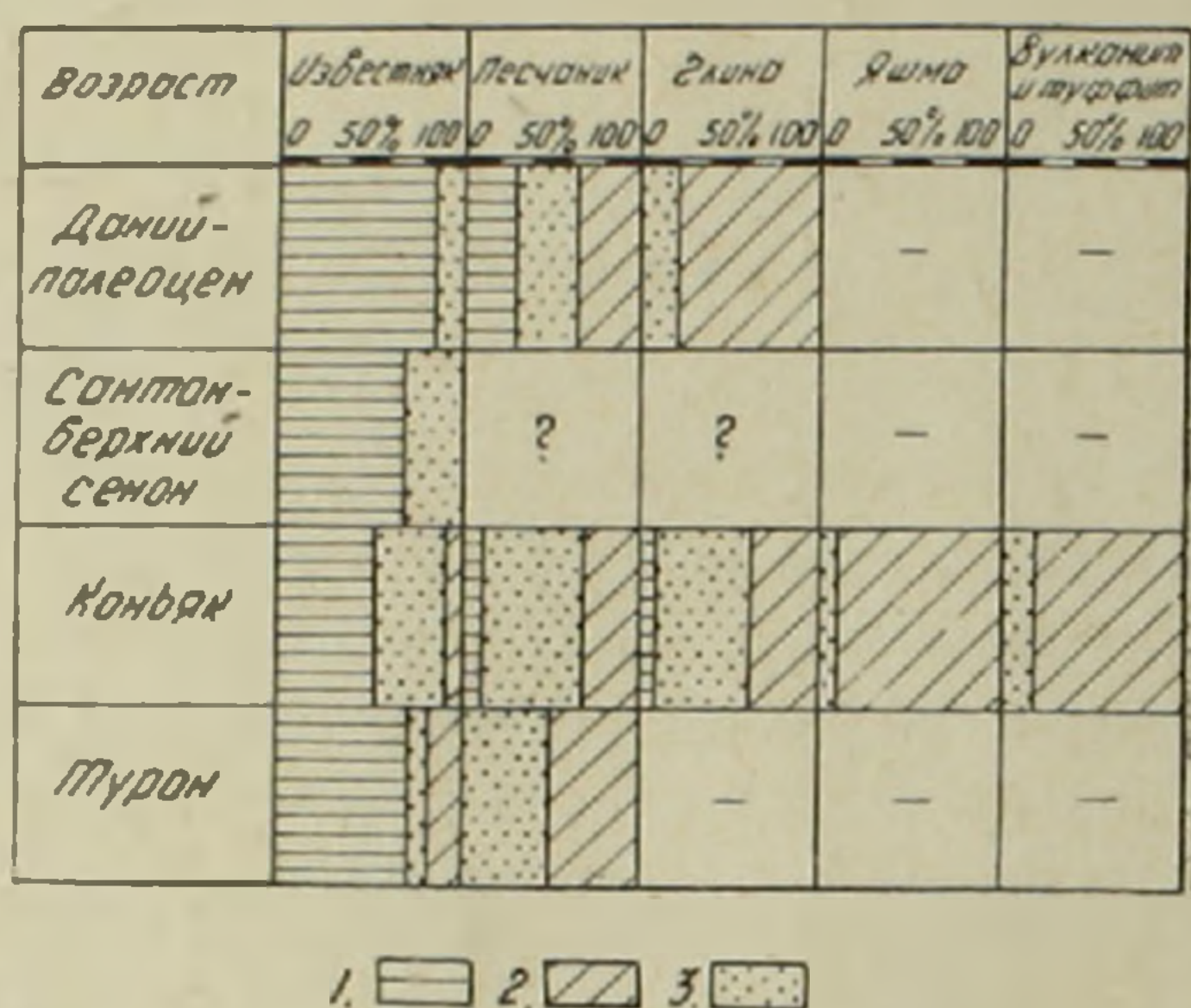
В химически проанализированном порошке целестина иммерсионным методом определена примесь до 5% стронцианита и единичных зерен кальцита.

Изучение литологии вмещающих целестин и стронцианит отложений на двинском участке, также и в более широком масштабе, на площади Еревано-Вединского прогиба, наряду с вышеприведенными данны-

ми позволяют кратко рассмотреть условия, при которых возможно было образование скоплений целестина и стронцианита.

Несомненно, что осаждение сульфата и карбоната стронция происходило после накопления вмещающих осадков, что следует из их морфологии, соотношения со вмещающими породами. Вопрос в том—диагенетического или эпигенетического характера эти скопления. Известно также, что эпигенетические подобные концентрации нередко являются внутриформационными.

В этой связи отметим следующие исходные положения. Во-первых, весьма примечательный факт регионально повышенного содержания стронция во флишских отложениях дания-палеоцена Еревано-Вединского прогиба (фиг. 2).



Фиг. 2. Схема распределения стронция в породах верхнего мела-палеоцена Еревано-Вединского прогиба. 1—содержание 0,1—0,3‰; 2—0,03—0,1‰; 3—<0,03‰. Данные полуколичественного спектрального анализа. Число проб: известняки—167; песчаники—67; глины—29; яшмы—14; вулканы и туффы—64.

Во-вторых, отложения эти на широкой площади содержат рассеянный целестин, нередко до 20—50% тяжелой фракции нерастворимых остатков пород. Целестин иногда ассоциирует с флюоритом, ангидритом, гипсом. Известняки дания-палеоцена отличаются от верхнесенонских известняков сравнительно повышенным содержанием магния, сравнительно низкое в них содержание $S_{орг.}$, в среднем не более 0,66% (5).

Таким образом, имеется ряд признаков повышенной минерализации вод датско-палеоценового реликтового морского залива, обусловившей при диагенезе осадков формирование рассеянного целестина. Дальнейшая концентрация стронция представляется в связи с циркуляцией нагретых вод вдоль зон нарушений и связанных с ними системой полостей и пор в породах.

Такие зоны, благоприятные для циркуляции подземных вод, как показывают результаты бурения скв. № 1—Чатма, существовали на этом

1		2		1		2	
<i>I</i>	<i>d</i>	<i>I</i>	<i>d</i>	<i>I</i>	<i>d</i>	<i>I</i>	<i>d</i>
1	3,82	1	3,84	5	1,303	2	1,295
—	—	1	3,72	6	1,273	5	1,267
10	3,47	10	3,47	—	—	1	1,247
3	3,38	4	3,38	—	—	1	1,233
—	—	1	3,00	2	1,218	2	1,214
3	2,77	2	2,79	3	1,188	2	1,186
3	(2,71)	—	—	2	1,167	—	—
—	—	1	2,67	2	1,154	1	1,141
—	—	1	2,56	—	—	1	1,121
1	2,51	1	2,51	3p	1,068	1	1,063
—	—	3	2,450	—	—	1	1,044
7	2,42	5	2,416	4p	1,038	3p	1,034
3	2,238	1	2,232	—	—	2p	1,016
3	2,159	—	—	—	—	1	0,994
—	—	2	2,149	—	—	1	0,986
—	—	1	2,069	—	—	1	0,963
9	2,026	7	2,022	—	—	3p	0,957
3	1,959	3	1,951	—	—	2	0,922
4	1,923	3	1,921				
7	1,879	5	1,876				
8	1,799	7	1,794				
—	—	1	1,742				
5	1,595	3	1,588				
2	1,557	2	1,545				
2	1,533	3	1,524				
1	(1,445)	—	—				
2	(1,408)	—	—				
—	—	1	1,462				
—	—	2	1,438				
—	—	2	1,408				

1. Стронцианит. Сел. Двин. Армянская ССР, λ_{Fe} , 2=R57,3 м.м, аналитик Э. Хуршудян, ИГН.

2. Стронцианит. Гумбейка, СССР (по Коржинскому, из работы Буркова и Подпорной) λ_{Sn} , 2R=57,3 м.м

участке в верхнем мелу. Здесь вырисовывается нарушение субширотного простирания, проходящее вдоль южного крыла Ераносской антиклинали.

Не останавливаясь в настоящем сообщении на подробностях описания этой структуры, отметим, что резкое различие по северному и южному крыльям нарушения в мощностях и литофациях отложений верхнего мела становится менее четким для отложений дания-палеоцена. Тем самым имеются основания полагать, что происходило запечатывание этого разлома.

С другой стороны, здесь отложения дания-палеоцена несут признаки слабого изменения: ожелезнение, осветление пород, проявляемое в виде небольших пятен и полос; наблюдались в этих отложениях также редкие линзочки травертиноподобных образований.

Эти данные указывают, что на этом участке шла разгрузка нагретых вод. При уплотнении отлагавшихся осадков отжатые поровые воды смешивались с циркулирующими подземными водами и тем самым обогащали их стронцием. Сложный баланс стронция в подземных водах складывался, помимо того, по-видимому, за счет выщелачивания стронция из уже литифицированных осадков дания-палеоцена и более древ-

них: отложений метаморфического комплекса и турона?-сенона. Однако, важно отметить, что отложения дания-палеоцена на этом участке включают в себя наибольшие мощности (следовательно, и объемы) органично-детритовых, наиболее богатых стронцием известняков, по суммарной мощности (300—500 м) отложения дания-палеоцена не уступают, если не превосходят мощности отложений пелитоморфно-карбонатной толщи сантона-верхнего сенона (до 200 м) и нижнего сенона (200 м) (в участках, где не проявился вулканизм). Там же, где мощности нижнего сенона резко увеличиваются за счет вулканогенно-осадочных типов отложений коньяка (скв. № 1 Чатма), мы сталкиваемся с фактом низких в этих породах содержаний стронция (фиг. 2), сосредоточенного в алюмосиликатах, т. е. труднее выщелачиваемого, чем в карбонатных породах. Следовательно, отложения дания-палеоцена выходят на первое место по объемам пород, по повышенному содержанию стронция в главных типах пород, в региональном плане—и по повышенному содержанию сульфата, видимо, и карбоната стронция, рассеянных в породах, т. е. это главные объекты выщелачивания стронция подземными водами.

Основные выводы. 1. Скопления минералов стронция представлены целестином и стронцианитом. Соотношение их в агрегатах резко колеблется при преимущественном преобладании целестина. Последовательность выделения: целестин, далее стронцианит.

2. Скопления двинского целестина и стронцианита имеют в широком смысле эпигенетический характер, представляя одну из распространенных форм концентрации стронция в осадочных породах (6), однако время образования этих скоплений, видимо, в целом не выходит за возрастные границы накопления всей колонны осадков вмещающей толщи дания-палеоцена.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ՍԱԹՅԱՆ, Ժ. Հ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ և Գ. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԴՎԻՆ գյուղի դանիական-պալեոցենյան նստվածքների ցելեստինի և ստրոնցիանիտի մասին

Ցելեստինի և ստրոնցիանիտի կուտակումները, որոնք հայտնաբերված են Դվին գյուղի դանիական-պալեոցենյան ֆլիշանման նստվածքներում, ներկայացված են մանր ոսպնյակներով, երակիկներով և ժեղներով:

Բերված են այդ միներալների բիմիական, սպեկտրալ, ռենտգենա-ստրուկտուրային և օպտիկական ուսումնասիրությունների արդյունքները:

Հաստատված է նրանց առաջացման հաջորդականությունը՝ ցելեստին-ստրոնցիանիտ և այնուհետև, ավելի ուշ ստրոնցիանիտ, որն առաջացնում է պսևդոմորֆոզներ ըստ ցելեստինի:

Ստրոնցիումի կուտակումների առաջացումը միջֆորմացիոն է, էպիգենետիկ, որը կապված է տաքացած ջրերի ազդեցությամբ ապառների տարալվացման և բարենպաստ ստրուկտուրաներում նրանց վերանստեղծման հետ:

¹ И. Г. Гаспарян, „Известия АН АрмССР“, сер. геол. и географ. наук, т. XVI, № 4—5 (1963). ² В. В. Егоян, Верхнемеловые отложения юго-западной части АрмССР, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1955. ³ А. А. Садоян, „Известия АН АрмССР“, сер. науки о Земле, т. XVIII, № 1 (1965). ⁴ М. А. Сатян, Ж. О. Степанян, „Известия АН АрмССР“, сер. науки о Земле, т. XIX, № 1—2 (1966). ⁵ В. В. Паиразян, Закономерности распределения органического вещества в третичных отложениях Ереванской и Араратской впадин и перспективы нефтегазоносности, Автореферат канд. диссерт. М., 1964. ⁶ В. В. Бурков, Е. К. Подпорина, Стронций, Тр. Ин-та минералогии, геохимии и кристаллохимии редких элементов, вып. 12, М., 1962.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян

О влиянии мощности корневой системы на фотосинтетическую
активность листьев и накопление хлорофилла

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 3/11 1966)

С давних пор известно, что при удалении надземных органов (при формировке или обрезке) растений ускоряется восстановление утраченных частей. Эта особенность наиболее ярко проявляется у лесных пород. При срубке ствола за 2—3 вегетационных сезона формирующаяся поросль достигает размеров, преобладающих по общей вегетативной мощности одновозрастные семенные экземпляры в несколько десятков раз. Целым рядом работ показано, что эти фитотехнические приемы приводят к улучшению водного режима растений (¹), повышению фотосинтетической активности листьев (²⁻³), увеличению листовой массы (⁴) и др. Причины подобной интенсификации жизнедеятельности связаны с тем, что указанные фитотехнические приемы вызывают изменение в корне-листовом соотношении в пользу первых. Корни же, будучи метаболическими органами, направляют к надземным частям разнообразные аминокислоты (⁵⁻⁶), органические формы азота (⁶) и фосфора (⁷), даже нуклеиновые кислоты (⁸). Активация общей жизнедеятельности листьев при обрезке и формировке, как нам кажется, связана именно с этим обстоятельством. Отсюда логически следует, что при чрезмерном стимулировании роста корней и, следовательно, усилении метаболической деятельности последних должна повыситься как фотосинтетическая активность, так и содержание хлорофилла в листьях.

Для экспериментального подтверждения этих положений нами в вегетационном сезоне 1965 года в Лаборатории физиологии растений Ботанического института АН Армянской ССР был проведен ряд исследований с оранжерейным травянистым растением *Hypoestes phyllostoches*.

В качестве контроля служили вегетирующие растения, выращенные в небольших глиняных вазонах. Опытным вариантом явились укорененные листья, носящие массу всасывающих корней, приводящих к существенному изменению корне-листового соотношения по сравнению с контрольными растениями (табл. I).

Как следует из таблицы на единицу площади листа у контрольных растений приходится примерно в 10 раз меньше рабочей поглотитель-

Таблица 1

Показатели вегетативной мощности корней и листьев у подопытных растений

Варианты	Число	Л и с т ь я			К о р н и			Соотношение по- верхностей ко- рень/лист
		сухой вес в г	поверхность в см ²		сухой вес в г	поглотительная поверхн. в кв. м		
			всех листьев	одного листа		общая	рабочая	
Контроль	158	2,39	1326	8,4	0,98	10,20	4,96	7,84
Укорененный лист	1	0,13	22	22,0	0,16	0,89	0,77	404,5

ной корневой поверхности, чем у укорененных листьев. В результате укорененный лист обеспечивается гораздо лучше водой, минеральными веществами и корневыми метаболитами. Следовательно, должны быть гораздо активнее процессы жизнедеятельности у укорененных листьев по сравнению с листьями контрольных растений.

Для иллюстрации этого положения в следующем опыте произвели определение количества хлорофилла и интенсивность фотосинтеза в листьях подопытных растений (табл. 2).

Таблица 2

Содержание хлорофилла *а* и *б* и активность фотосинтеза в листьях подопытных растений

Варианты	Хлорофилл <i>а</i> и <i>б</i> в % на сухой вес				Активность фотосинтеза в мг СО ₂ д.м ² час
	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>а + б</i>	<i>а/б</i>	
Контроль	0,25	0,18	0,43	1,38	11,25
Укорен. лист	0,58	0,19	0,77	3,05	33,4

У укорененных листьев, как мы видим из таблицы, больше как хлорофилла *а* и *б*, так и интенсивность фотосинтеза. В данном случае увеличение мощности корней способствует как синтезу хлорофилла *а* и *б* в листьях, так и усилению фотосинтеза. Как известно из экспериментальных данных Б. А. Рубина и сотрудников (9-11), синтез хлорофилла в подземных органах связан с метаболической деятельностью корневой системы растений: в данном случае большое количество хлорофилла в указанном листе связано, с одной стороны, с мощностью корневой системы, с другой—с повышенной ее метаболической деятельностью.

Весьма интересно еще и то обстоятельство, что увеличение хлорофилла в укорененных листьях осуществлялось в основном за счет его пигментов *а*. Соотношение *а* и *б* у укорененного листа оказалось примерно в 3 раза больше. Во столько же раз была больше и фотосинтетическая активность этих листьев. Этот факт показывает, что наблюдается параллелизм между увеличением количества хлорофилла *а* и интенсивностью фотосинтеза.

В следующих анализах мы ставили цель определить метаболическую активность корней подопытных растений, чтобы можно было объяснить столь усиленное повышение фотосинтетической деятельности укорененных листьев. Кроме того, мы предполагали, что в связи с усиленным фотосинтезом укорененных листьев, а также тратой фотосинтетических продуктов лишь на корни должна повышаться метаболическая деятельность корней. С этой целью были определены различные формы азота по методу Кьельдаля ⁽¹²⁾ и фосфора по Лопесу и Лоури ⁽¹³⁾, а также аминокислотный состав корней по методу бумажной хроматографии ⁽¹⁴⁾. Полученные данные сведены в табл. 3.

Таблица 3

Содержание разных форм азота в корнях (в мг на 1 г сухого вещества)

Варианты	Общий	Белковый	Небелковый
Контроль	16,05	8,25	7,80
Укорененный лист	27,00	13,92	13,08

Как следует из приведенных цифр, корни изолированных листьев показывают как повышенную поглотительную, так и метаболическую активность в отношении азота. Так, например, как поглотительная, так и метаболическая активность у корней изолированного листа на 68,7% больше, по сравнению с таковыми у корней контрольных растений.

О повышенной метаболической активности корней укорененных листьев свидетельствуют также данные по содержанию различных форм фосфора в корнях подопытных растений (табл. 4).

Таблица 4

Содержание разных форм фосфора в корнях
(в мг на 1 г сухого вещества)

Варианты	Общий	Органический	Неорганический
Контроль	0,38	0,20	0,18
Укорененный лист	0,48	0,26	0,22

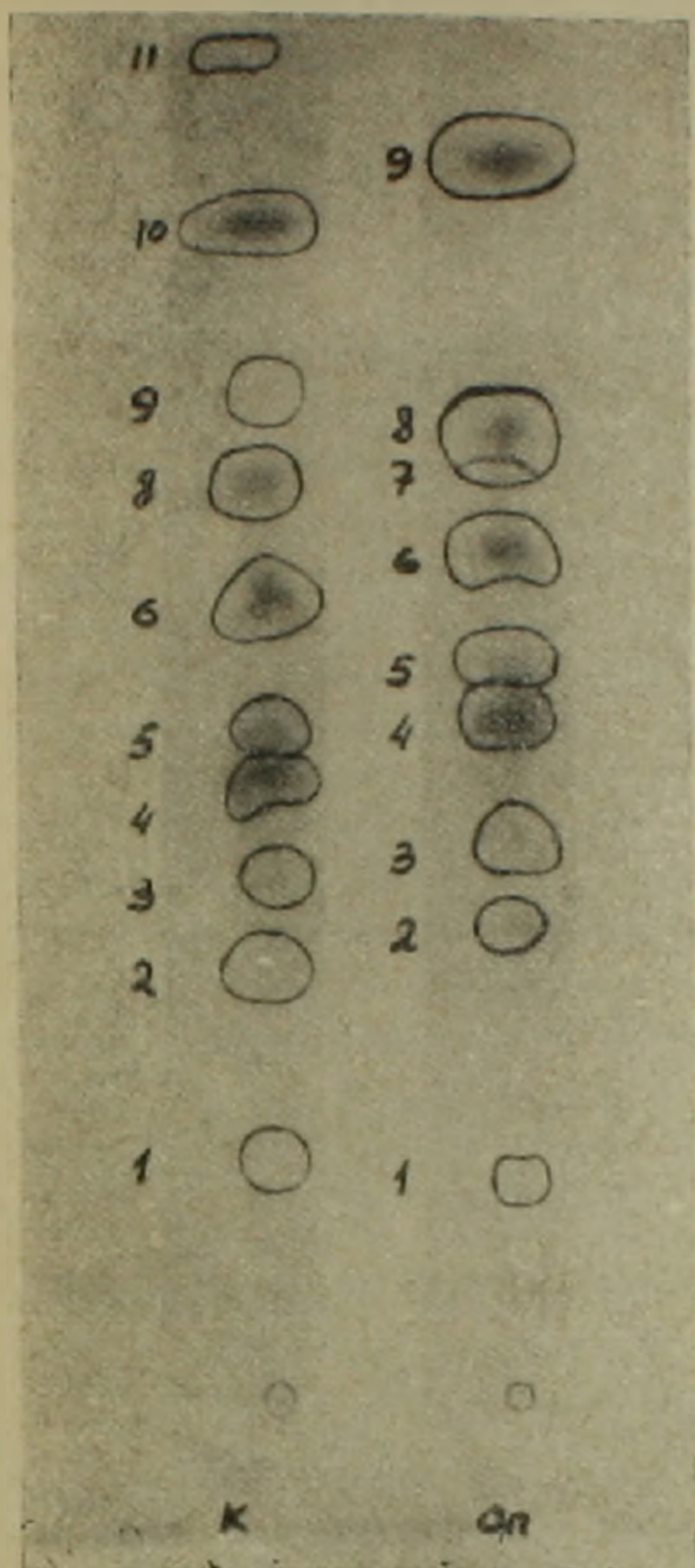
Так же, как и в предыдущей таблице, в данном случае опять-таки явились факты повышенной метаболической деятельности корней изолированных листьев в отношении фосфора. Как мы видим, разница между содержанием органической формы фосфора в корнях обоих вариантов составляет 30%, что и характеризует синтетическую активность корней.

В отношении же содержания аминокислот получены сравнительно новые данные (фиг. 1). В корнях опытных растений оказалось на одну аминокислоту больше, что, по-видимому, было связано с их усиленным ростом и в связи с этим синтезом белков. Кроме того, у корней изоли-

рованных листьев взамен треонина идентифицированы валин и фенил-аланин. Уменьшение количества аминокислот у опытного варианта, по-видимому, связано с усиленным ростом корней и в результате этого синтезом белков. Следует иметь в

виду, что на каждый изолированный лист приходится гораздо больше корневой массы, чем на каждый лист у контрольных растений.

Повышенная метаболическая активность корней изолированных листьев несомненно обусловлена обильным их снабжением сахарами. Ведь у них единственным растущим органом является корневая система, в то время как у контрольных растений непрерывно формируются также и новые листья и побеги, на которые тратится значительная доля синтезирующихся ассимилятов. Следует также иметь в виду повышение фотосинтетической активности изолированных листьев, что направлено исключительно на питание кор-



Фиг. 1. Аминокислотный состав корней контрольного (К) растения и изолированного листа (On). Аминокислоты: 1—лизин; 2—аспарагин, 3—аспарагиновая кислота; 4—серин + глицин; 5—триптофан; 6—глутаминовая кислота; 7—треонин; 8—аланин; 9—метионин; 10—валин; 11—фенилаланин.

Корни изолированных листьев, как наглядно видно из приведенных цифр, на 57,1% содержат больше сахара. Такое обильное питание корней сахарами приводит к усилению общей их жизнедеятельности, в первую очередь роста и метаболической активности.

Результаты всех этих экспериментальных данных приводят нас к следующим основным выводам.

1. Увеличение мощности рабочей поглотительной поверхности корней приводит к повышению фотосинтетической активности листьев и увеличению количества хлорофилла.

Таблица 5

Содержание разных форм сахаров в корнях (в мг на 1 г сухого вещества)

Варианты опыта	Редуцирующие сахара	Сахара	Мальтоза	Сумма
Контроль	1,95	4,70	1,71	8,36
Укорененный лист	1,70	8,20	3,28	13,13

ней. Для иллюстрации этого положения мы в следующем опыте определили количество сахаров в корнях исследуемых растений (табл. 5).

2. Обнаруживается параллелизм между повышенной метаболической активностью корней, с одной стороны, и фотосинтетической активностью, а также содержанием хлорофилла в листьях, с другой.

За помощь и консультацию при выполнении настоящей работы автор выражает искреннюю признательность В. А. Давтяну.

Ботанический институт
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՏԵՐԵՆԵՐԻ ԿԵՆՍԱԳՈՐԺՈՒՆԵՐՈՒՄԻ ՎՐԱ ԱՐՄԱՏԱՅԻՆ ՈՒՍԿԵՐԻ ԿԳՈՐՈՒՄԻ ԱՊԿԵՑՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Դեռ շատ վաղուց հայտնի է, որ բույսերի խուզման և կտրման հետևանքով զգալի չափով ուժեղանում է տերեւների կենսագործունեությունը: Այդ փաստը հավանաբար բացատրվում է նրանով, որ նշված ֆիտոտեխնիկական եղանակները փոխում են արմատատերեւային մասսաների փոխհարաբերությունը ի օգուտ արմատներին: Այդ ենթադրությունը էքսպերիմենտալ եղանակով հաստատելու, ինչպես և տերեւների կենսագործունեության ակտիվացման ներքին պատճառները ի հայտ բերելու նպատակով մեր կողմից 1964 թ. և 1965 թ. վեգետացիոն սեզոնում զրվել են մի շարք փորձեր:

Որպես փորձի սբյեկտ վերցվել են չեթմոցային բույսերից *Hypoestes phyllostoches*. Կոնտրոլ վարիանտի բույսերը աճեցվել են Թաղարների մեջ, իսկ որպես փորձնական վարիանտ վերցված են այդ բույսի մեկուսացված և արմատակալիցված տերեւները: Այս եղանակով հնարավոր է տերեւակոթուների վրա առաջացնել մեծ քանակությամբ արմատներ՝ զրանով իսկ փոխել արմատների բանվորական կլանող և տերեւի մակերեսների հարաբերությունը ջանկացած չափով:

Փորձի ենթակա վարիանտների մոտ ուսումնասիրվել է արմատային և տերեւային մակերեսների ֆոտոսինթեզի ակտիվությունը, բլորոֆիլի ու նրա պիգմենտների քանակը, ինչպես և արմատների նյութափոխանակային ֆունկցիայի ակտիվությունը:

Կատարված բոլոր փորձերի և բիրոմիական անալիզների արդյունքները հեղինակին բերել են հետևյալ հիմնական եզրակացությունների՝

1. Կլանող արմատների մակերեսային զգալի ավելացումը նպաստում է ֆոտոսինթեզի ուժեղացմանը ինչպես և բլորոֆիլի քանակի մեծացմանը տերեւներում:

2. Ուղղակի կապ է հայտնաբերված մի կողմից արմատների մետաբոլիկ գործունեության, մյուս կողմից ֆոտոսինթետիկ ակտիվության և տերեւներում բլորոֆիլի կուտակման միջև:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. К. Коломиец, „Сад и огород“, № 1, 1946. ² И. Л. Коссович, „Лесное хозяйство и лесозаготовка“, № 10, 1936. ³ В. О. Казарян, Физиологические основы онтогенеза растений, 1959. ⁴ П. П. Шумт, Биологические основы агротехники плодового сада, М., 1952. ⁵ А. Л. Курсанов, Взаимосвязь физиологических процессов в растениях, Тимирязевские чтения, 1960. ⁶ В. А. Кретович, З. Г. Евстигнеева, К. Б. Асеева и Н. Г. Савкина, Физиология растений, 1, 1, 1954. ⁷ Д. А. Сабинин, О значении корневой системы в жизнедеятельности растений, Тимирязевские чтения, 1949. ⁸ Б. А. Рубин и Б. Ф. Германова, ДАН СССР, 107, 5, 1956. ⁹ Б. А. Рубин и Б. Ф. Германова, Успехи современной биологии, 43, 3, 1956. ¹⁰ Б. А. Рубин, И. А. Чернавина, А. Н. Николаева, ДАН СССР, 114, 5, 1957. ¹¹ А. Н. Белозерский и Н. И. Проскуряков, Практическое руководство по биохимии растений, М., 1951. ¹² О. Лоури и Дж. Лорес, The Journal of Biological chemistry, 162, 3, 1946. ¹³ Ж. В. Успенская и В. А. Кретович, Количественное определение аминокислот при помощи хроматографии на бумаге, 1962.

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Два новых вида жесткокрылых из Армянской ССР
 (*Insecta, Coleoptera*)

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 5/XI 1965)

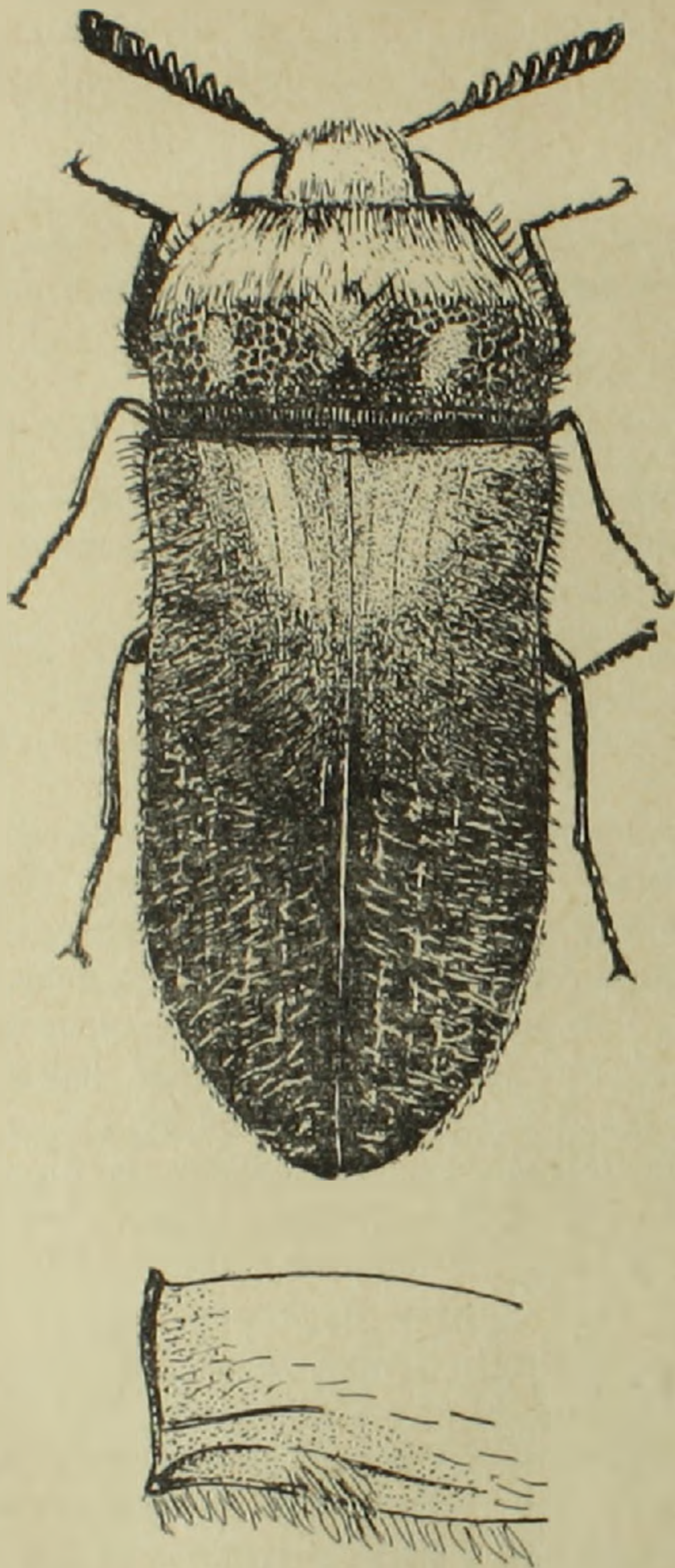
Статья содержит описание двух новых видов жесткокрылых из Армянской ССР. Типы хранятся в коллекциях Зоологического института Академии наук Армянской ССР.

1. *Acmaeodera cyrta* Iablokoff-Khnzorian, sp. nov. (*Buprestidae*)
 АрмССР: Айгрич, у озера, на цветах, 22/V 1952. Голотип. Темно-бурый, усики черные, чешуйки ярко-белые или золотисто-бурые. Длина 6,3 мм (фиг. 1).

Лоб широкий, вдавленный, с поперечной бороздкой, ячеистый на шагреневанном фоне, спереди покрыт густыми белыми чешуйками. Усики широкопильчатые начиная с четвертого членика. Переднеспинка выпуклая, слегка шире надкрылий, с срединной бороздкой, сзади кончающейся широким плоским вдавлением, два других вдавления имеются по бокам в ее задней половине. Боковой край переднеспинки спереди заметно закруглен, сзади выпрямлен. Точечность диска грубая, неравномерная, в передней части очень рассеянная, по бокам и вдоль основания густая, вдавления гладкие. Вдоль середины имеется поперечный ряд густых точек и длинных торчащих щетинок, сбоку белых, к середине золотистых, образующих поперечный гребень. Вдоль бокового края — густая щетка белых щетинок, торчащих кнаружи. Кроме этого, там и здесь имеются разбросанные, более или менее прилегающие волоски. Основание голое, с обычной продольной штриховкой. Щиток маленький, плоский, поперечный, голый, густо точечно шагреневанный. Надкрылья с правильными рядами точек и очень густой мелкоточечной шагреневкой, придающей покровам матовый блеск. На диске чешуйки негустые, сгущены по бокам и к вершине, в основном зачесаны перпендикулярно к шву, нигде не расположены рядами, вдоль каймы надкрылий образуют бахрому, особенно густую у плеч. За плечами надкрылья вдавленные, но без боковой вырезки, вдавление гладкое, сзади с густым пучком широких белых чешуек, окрашено и шагреневано так же, как окружающие ее покровы, сверху это вдавление окаймлено плоским кантом (фиг. 1).

Низ густо покрыт белыми чешуйками, более крупными и сгущенными на заднегруди и по бокам брюшка.

Этот вид принадлежит к группе *A. boryi* (переднеспинка с поперечным гребнем щетинок), но щетинки шире и крупнее, чем у родственных форм (приспособление к аридной среде). От прочих видов этой группы его можно отличить с помощью следующей таблицы (составленной после осмотра типов *A. subcyanea* Reitt. и *obscura* Reitt.):



Фиг. 1. *Acmaeodera cyrta* Klnz. Сверху — общий вид ($\times 15$); снизу — плечо сбоку ($\times 20$).

1(6) Надкрылья синие, их щетинки торчащие и расположены правильными рядами, особенно вдоль боков. За плечами имеется глубокое, гладкое черное вдавление, по скульптуре и окраске резко отличное от окружающих покровов. Это вдавление сверху окаймлено узким килем.

2(5) Основная половина переднеспинки густо точечная, с тремя маленькими гладкими зеркальцами на гладком фоне. Тело уже. Надкрылья блестящие, шагренированные.

3(4) Низ (в том числе бока гладких эпимер заднегруди) и ноги черные. Передняя часть переднеспинки в мелких негустых точках. Надкрылья сбоку у основания с двойным килем.

1. *A. boryi* Gory.

4(3) Низ (с эпимерами заднегруди) и ноги синие. Передняя часть переднеспинки в рассеянных грубых точках. Надкрылья сбоку у плеч лишь с одним тонким килем.

2. *A. cyaniventris* Reitt.

5(2) Переднеспинка и надкрылья матовые, густо шагреневанные. Тело короче. У самца усиковые членики шире, гребневидные. Надкрылья за плечом с двойным килем.

3. *A. subcyanea* Reitt.

6(1) Надкрылья темно-бронзовые, чешуйки на них прилегающие, разбросаны беспорядочно, не образуют рядов. Вдавление за плечом по скульптуре и окраске не отличается от окружающих покровов, сверху отграничено тупым кантом. По скульптуре переднеспинки сходен с *boryi*, по скульптуре надкрылий — с *subcyanea*. Низ черный.

4. *A. cyrta* Khnz.

К этой группе близок также *A. obscura* Reitt., но у этого вида переднеспинка без гребня, в основной трети равномерно морщинисто точечная, в передней трети покрыта сглаженными зернами. Основная ямка переднеспинки маленькая и плоская. Вдавление за плечом сверху окаймлено тонким килем. Брюшко рассеянно коротко волосистое с пучками белых щетинок вдоль бокового края.

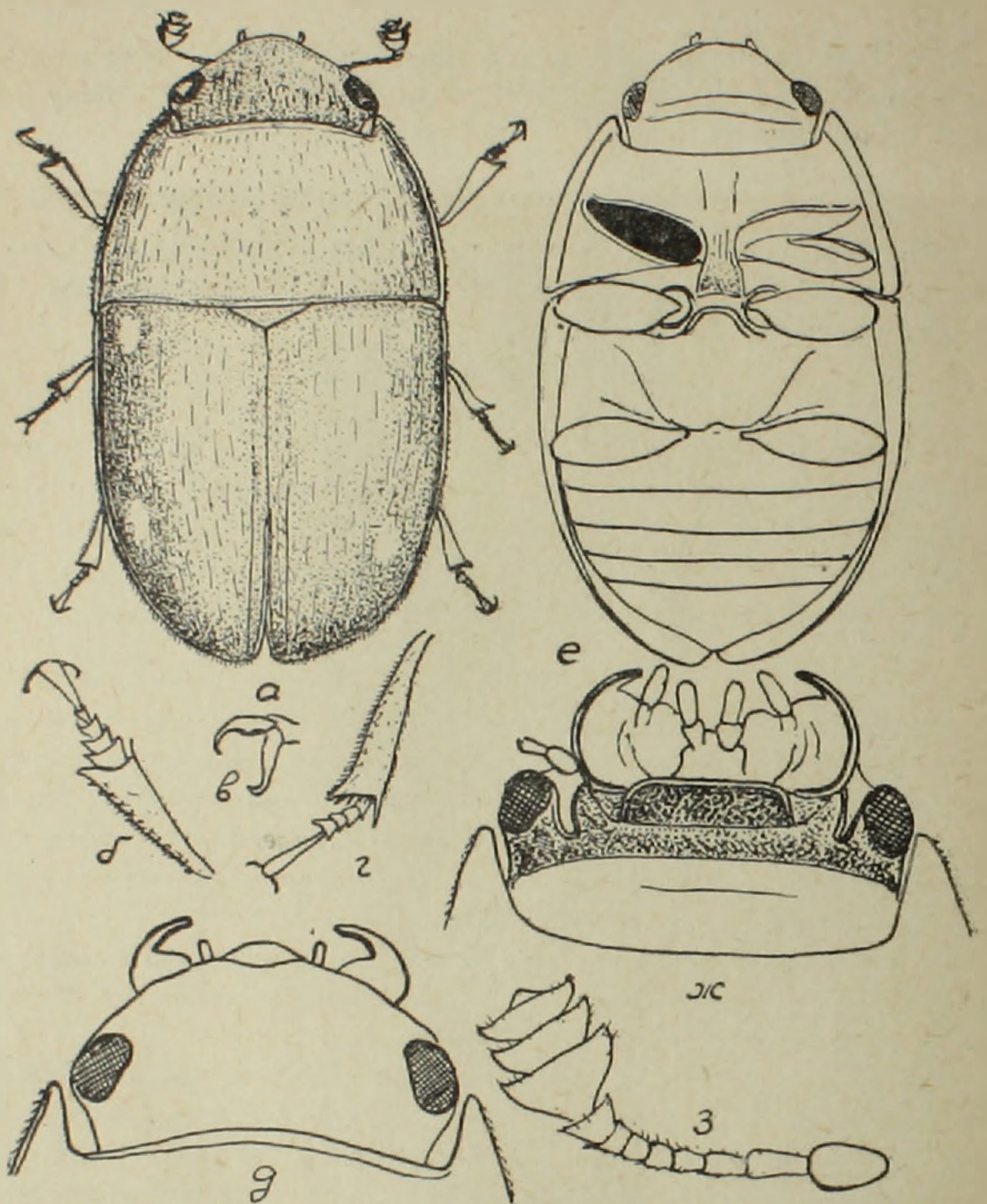
Этот вид, принадлежащий к очень широко распространенному роду, развивается, вероятно, в корнях каких-то многолетников; он обогащает и без того богатую фауну златок Армении.

2. *Cryptarcha incognita* Iablokoff-Khnzorian sp. nov. (*Nitidulidae*). АрмССР: ущелье Джрвеж (окр. Еревана), просеиванием подстилки под карагачем, во влажном месте, голотип (вероятно, самка), 7/VI 1964.

Тело красно-бурое, на надкрыльях по два расплывчатых желтых пятнышка вдоль бокового края. Конечности желтые. Волоски на теле желтоватые. Длина 3,5 мм (фиг. 2).

Голова широкая, глаза цельные, спереди окаймлены краем щек, лоб выпуклый, без вдавлений, густо и равномерно точечный и рассеянно волосистый на гладком фоне, расстояние между точками едва больше их диаметра. Верхняя губа четко отделена от наличника тонкой каймой. Верхние челюсти кончаются узким простым зубцом, вершина которого обрублена, без следа расщепления. Усики характерной для этого рода формы, их три первых членика удлиненные, убывающей длины и ширины, шестой-восьмой — поперечные, булава большая (фиг. 2, з). Переднеспинка в два раза шире длины, выпуклая, наибольшей ширины

у основания, кпереди сужена постепенно, ее боковой край с цельной каймой, заггибающейся равномерно, покрыт очень мелкими, почти прилегающими ресничками. Снутри кайма отграничена глубоким вдавлением. Диск выпуклый, покрыт такой же точечностью и волосистостью.



Фиг. 2. *Cryptarcha incognita* Khnz. а — вид сверху $\times 20$; б — левая передняя нога сверху ($\times 40$); в — коготок левой задней ноги косо сбоку ($\times 70$); г — левая задняя нога сверху ($\times 40$); д — голова сверху ($\times 40$); е — тело снизу (полусхематично) ($\times 20$); ж — голова снизу ($\times 40$); левый усик снизу ($\times 70$).

как лоб, но на шагреневанном фоне. У середины имеется след двух вдавлений (фиг. 2, а). Передние углы очень острые, задние острые, слегка обхватывают плечи. Передний край глубоко вырезан за передними углами, затем извилистый, с цельной каймой. Основание слабо изогнуто за задними углами, затем образует плоскую и плавную дугу с очень слабым изгибом вдоль щитка. Оно окаймлено по всей длине, с густым

рядом точек снаружи от каймы у самого края. Щиток голый, очень широко треугольный. Надкрылья выпуклые, овальные, полностью прикрывают брюшко, с почти отвесным боковым скатом; их эпиплевры густоточечные и волосистые, у основания широкие, постепенно сужены кзади и исчезают у вершинного края надкрылий (фиг. 2, е). Снутри эпиплевры скаймлены и несут густую бахрому ресничек, кайма обеих эпиплевр видна сверху одновременно, кнутри от нее имеется вдавление, глубокое в основной трети и затухающее к вершине. Вершинный край надкрылий слабо изогнут, кончается закругленной лопастью (по-видимому, половой признак самок, как у прочих видов рода). Передний край надкрылий с отвесным скатом, в который упирается переднеспинка, сзади этот скат окаймлен цельным острым кантом, который нормально полностью скрыт краем переднеспинки. Диск надкрылий густо точечный и волосистый, точечность такая же густая, как на переднеспинке, но немного мельче, а шагренировка фона более грубая, никаких следов точечных бороздок не имеется. В задней половине надкрылий заметна пришовная бороздка и толстая пришовная кайма. Низ головы, в том числе усиковые впадины, нижняя губа и глотка, а также грудь и брюшко такого же строения, как у *Cryptarcha strigata* F., лишь на заднегруди заметны более четкие боковые вдавления (фиг. 2, е). Ноги обычного для этого рода строения (фиг. 2, б, г), кили бокового края голеней сильно сближены, коготки у основания расширены и с тупым зубцом (фиг. 2, в).

Этот вид принадлежит к роду *Cryptarcha* Shuckard и близок к *Cryptarcha s. str.*, но должен быть выделен в особый подрод — *Cryptarchina* Iablokoff-Khnzorian, диагноз которого следующий.

Верхняя губа отделена от наличника четкой каймой (примитивный признак). Верхние челюсти нерасщепленные. Основной край переднеспинки без изгибов. Отросток переднегруди кзади треугольно расширен и слегка вырезан у вершины (так же, как у *Cryptarcha s. str.*). Основание надкрылий со сглаженным скатом, окаймленным сзади цельным кантом, нормально прикрытым переднеспинкой.

На первый взгляд приведенный диагноз настолько характерен, что мог бы послужить родовым. Однако строение ротовых частей, в особенности нижней губы и глотки, усиков и их впадин, настолько сходно с таковым у типа рода (*C. strigata* F.), что такое решение вряд ли правильно. Прибавим, что хотя триба *Cryptarchini* характеризуется главным образом отсутствием видимой верхней губы, к этой трибе принадлежит австралийский род *Paromia* Westw., верхняя губа которого заметна сверху. На примере нашего вида хорошо видно, что у рода *Cryptarcha* верхняя губа не спрятана под наличник, а спаяна с ним, так что лишь этот род может остаться в данной трибе; остальные же роды следует выделить в новую, которую можно характеризовать следующим образом.

Наличник вытянут в треугольную лопасть, прикрывающую верхнюю губу, но не прикрывающий первого членика усиков, который виден сверху, по крайней мере частично. Тело удлиненное, сверху голое. Лоб отде-

лен от шейки вдавленным (без бороздки). Щеки не обхватывают переднюю часть глаза.

Glischrochilini tr. nov.

Этот очень своеобразный вид принадлежит к лесному роду, широко распространенному в Палеарктике. Вероятный реликт древней лесной фауны Армении.

Зоологический институт
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ի. ՅԱՐԼՈԿՈՎ-ԿՆԶՈՐՅԱՆ

Կարճալուծիկների երկու նոր սեռակ Հայաստանից
(Insecta, Coleoptera)

Հողվածը Եվիրված է Հայկական ՍՍՌ-ից կարծրաթեղափորների հրկու նոր տեսակի և կարա-
գրությանը:

ԴՐԱՆՔ ԵՆ

1. *Acmaeodera cyrta* Khnz., sp. nov. (Buprestidae)

Ակապատային ոսկերգեց է, գիտնվել է Այդր յձի մոտ, պատկանում է յատ լայն տարածված
սեռի: Հավանաբար զարգանում է բազմամյա բույսերի արմատների վրա: Այս տեսակի հայտնա-
բերումը Դարստացնում է Հայաստանի ոսկերգեցեցների առանց այն էլ հարուստ ֆաունան:

2. *Cryptarcha incognita* Khnz., sp. nov. (Nitidulidae)

Շատ յուրահատուկ տեսակ է. գտնվել է Ջրվեժի ձորում, Պատկանում է անտառային մի փոքրիկ հին սեռի, որը լայն տարածված է պալեարկտիկայում։ Հաճանաբար Հայաստանի անտառային ֆաունայի հնագույն մնացորդ է։

Մարեմահիկա

Ի. Ս. Իոխվիդով — յ-չգզող ոպերատորների կոտորակագծային ձևափոխություններ	3
Ի. Լ. Շահրազյան — Ինտեգրալ հավասարումները կիսատարածությունում	9
Է. Մ. Քենեյան — Միավոր շրջանում տրված անսահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին	65
Վ. Խ. Մուսոյան — Դիրիխլեի բազմանդամներով մոտարկելի ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակման մասին	73
Ի. Ս. Սարգսյան — Թեորեմ Դիրակի ընդհանրացրած սիստեմի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին	77
Ի. Ս. Սարգսյան — Դիրակի միաչափ ոչ ստացիոնար սիստեմի համար Կոշու խնդրի լուծման մասին	129
Ֆ. Գ. Հաուսդորֆ — Հաարի սիստեմով շարքերի մասին	134
Ի. Վ. Համբարձումյան — Ստացիոնար կետային պրոցեսների համար մի հավասարման վերաբերյալ	141
Ի. Ս. Սարգսյան — Դիրակի միաչափ սիստեմի սպեկտրալ մատրիցի ածանցյալների ընդհանրացրած գումարումը	193
Վ. Ի. Մացաեվ և Ֆու. Ա. Պալանտ — Բազմանդամային օպերատոր փնջի սպեկտրի բաշխման մասին	257
Ի. Ս. Սարգսյան — Թեորեմ ըստ Դիրակի միաչափ սիստեմի սեփական ֆունկցիաների դիֆերենցիված վերլուծությունների հավասարահանրագումարելիության մասին	262
Ի. Ս. Իոխվիդով — P_1 -դասի իրական հաջորդականություններ	268
Ե. Գ. Սոլովյով — Երևք գնդային մակերևույթների թիբրեմը հարմոնիկ ֆունկցիաների համար	274

Շինարարական մեխանիկա

Ս. Ա. Շահինյան — Մոդելացման նպատակով շինարարական նյութերի դեֆորմացիոն հատկությունների ուսումնասիրությունը	83
Ի. Հ. Համառյան — Ստատիստիկական աուումով մոդելացման նյութերի ընտրության հարցի շուրջը	279

Առանցականություն հետաքյուհ

Գ. Պ. Դեոնյան — Զուգահեռանիստի կաշկանդված ոլորումը	148
--	-----

Սուլֆի հետաքյուհ

Կ. Ս. Կաբալետյան — Անիշոտրոպիայի ադդեցությունը բետոնի սողքի վրա կախված լցիչի չափսերից	91
---	----

Ֆիզիկա

Խ. Պ. Բաբայան և Ն. Ա. Մաբուրյան — Կոսմիկական ճառագայթման միջուկների կենտրոնական բախումները էմուլսիայի ծանր միջուկների հետ	97
Վ. Ի. Հավունջյան և Պ. Հ. Բեգիրզադյան — Թենտգենյան դիֆրակցիոն պատկերի օգնությամբ պլեզոէլիկտրական տատանումների ուղղության որոշումը	284
Ս. Գ. Իսախանյան — Կոհերենտ ճառագայթման փոխադդեցությունը առումների հետ	288

Տեղական ֆիզիկա

Վ. Հ. Զրբայան — Էլեկտրամագնիսական տեսությունում պահպանման օրենքների մասին	101
---	-----

Առերոֆիզիկա

Ի. Գ. Կաբալետյան — Գալակտիկաների ջրված խումբ	294
--	-----

Ֆիզիկական օպտիկա

Գ. Ա. Գուրզադյան, Հայկական ՍՍՌ ԴԱ թղթակից-անգամ, և Վ. Մ. Նովիկով — Ալ-Կալիական մետաղներից պատրաստված լուսադիտիչներ՝ սպեկտրի կարճալիք մասի համար	15
---	----

Պոլիմերների ֆիզիկա

Ն. Մ. Քոչարյան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ թղթակից-անդամ, Խ. Բ. Փաթաջյան, Ն. Ա. Նալ-
յանդյան և Ն. Մ. Դիվանյան — Ձգված պոլիմերի մեթակրիլատի թերմոառաձգական հատ-
կությունները 154

Բիոֆիզիկա

Վ. Մ. Ասլանյան, Ա. Գ. Գաբրիելյան, Մ. Ա. Նովոսելև և Է. Գ. Խովմատյան — Հու-
ծույթի իսկական ուժի ազդեցությունը ԴՆԲ-ի ջերմային ղեկառնությունների վրա 198

Բիոնիկա

Բ. Ս. Սոսսկով, ՍՍՏՄ ԳԱ թղթակից-անդամ, Լ. Ս. Ղամբարյան և Ս. Հ. Մկրտչյան —
Ուղեղի հուսալիության հարցի շուրջը 205

Օդերևութաբանություն

Գ. Գ. Զուբյան — Զերմաստիճանի նշանակալի տատանումների մոդուլներ ստրատոս-
ֆերայում Հայաստանի վրա 159

Անօդաչուական ֆիզիկա

Վ. Մ. Թառայան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ թղթակից-անդամ, Լ. Գ. Մուսելյան և Մ. Գ.
Հեֆիմյան — Պերոննատի և ոռոգանիդի փոխազդեցության ունակության վրա երկարժեք
պղնձի իոնների կատալիտիկ ազդեցության ուսումնասիրումը 19

Օրգանական ֆիզիկա

Ա. Թ. Բարայան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ թղթակից-անդամ, Կ. Մ. Թանմազյան և Գ. Խ.
Բարայան — Արոմատիկ օդակի առաջացում պենտեն-4-ին-2-իլի հետ մեկտեղ նաև ալի-
լային տիպի խումբ պարունակող ամոնիակային աղերի ջրահիմնային ճեղքման ժամանակ 23

Բիոֆիզիկա

Ա. Ա. Սիմոնյան — Հավի էմբրիոնի լյարդից անջատված լիպոլիդո-սպիտակուցային
ֆրակցիայի ազդեցությունը միտոքոնդրիանների օքսիդացիոն ֆոսֆորիլացման վրա 26

Է. Յու. Բաբինա — Մոնոէթանոլամինի ազդեցությունը օքսիդացման պրոցեսների փո-
փոխության վրա ճառագայթված կենդանիների մոտ 31

Ս. Մ. Մինասյան և Մ. Յ. Մառտիրոսյան — Միկրոէլեմենտների պարունակությունը
պտղատու ծառերի սաղարթի տարրեր մասերում 166

Ա. Ա. Կալոյան և Ժ. Է. Արելյան — Նեյրոհիպոֆիզի ջրալուծ սպիտակուցները 170

Ա. Ա. Կալոյան և Ս. Մ. Սրապիոնյան — Հիպոթալամուսից անջատված պսակաձև
անոթները յայնացնող սպիտակուցի մաքրման մասին 210

Գեոֆիզիկա

Վ. Վ. Պալազյան — Հոկտեմբերյանի շերտախմբի ապառներից էքստրակցված բի-
սումոնիդների խրոմատոգրաֆիական ֆրակցիաների ինֆրակարմիր սպեկտրները 214

Ներքաբանություն

Հ. Ա. Դադարյան և Ջ. Հ. Չիրուխյան — Նոր տվյալներ Փոքր Կովկասի պլագիոգրա-
նիտային կոմպլեքսի մի քանի ինտրուզիաների բացարձակ հասակի վերաբերյալ 36

Հ. Գ. Մալոյան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ ակադեմիկոս — Հայկական լեռնաշխարհը կեն-
տրոնական միջերկրածովային սիստեմում 219

Հանքաբանություն

Ս. Ս. Արուսյան — Խիզկուղիտը Շիրձալի պերիդոտիտային դանդաժից (Հայկական
ՍՍՏ)

Մ. Ա. Սարյան, Ժ. Հ. Ստեփանյան և Գ. Մ. Մկրտչյան — Դվին գյուղի դանիական-
պալեոցենյան նստվածքների ցեխստինի և ստրոնցիանիտի մասին 298

Ցեկսոնիկա

Ս. Ա. Փիրուզյան — Այսպես կոչված բնդհանուր ցեղումների կամ միաժամանակ տեղի
ունեցող երկրաշարժային պատճառների մասին 41

Գեոմորֆոլոգիա

Հ. Կ. Դարբինյան — Հայկական ՍՍՏ ղեկային դարավանդների առաջացման հար-
ցի շուրջը 224

Օգտակար համաձուլներ

- Հ. Գ. Ղազարյան և Հ. Ա. Ղազարյան — Հայկական ՍՍՌ Շամլուղի հանքային դաշտի հանքայնացման և մետասոմատիտների հասակային տարրերության մասին 227

Սերամիզոսֆիա

- Գ. Մ. Հակոբյան — Նորագույն տվյալներ Մարալ-սար լեռան շրջակայքի և Խաչ-աղբյուր գետի կիրճի հրաբխային նստվածքների հասակի մասին 233

Քույրերի ֆիզիոլոգիա

- Ա. Գ. Գասպարյան — Ածխաջրերի օրական դինամիկան սառը լեռնային պայմաններում աճող մի քանի ալպիական բույսերի տերևների մեջ 47

- Վ. Հ. Ղազարյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Վ. Ա. Իսախանյան — Բույսերի արմատների նյութափոխանակային ակտիվության և տերևային մակերեսի մեծության միջև եղած կորելյացիայի մասին 112

- Մ. Գ. Գյուլալյան — Բույսերից շանջատված տերևների ջրային ռեժիմի լարվածության և նրա ուսումնասիրության նոր մեթոդի մասին 236

- Վ. Հ. Ղազարյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, Կ. Ա. Կաբալետյան և Ի. Ա. Ղազարյան — Նգիպտացորենի արմատային ակտիվության վրա ֆոտոպերիոդիկ ազդեցության մասին 241

- Վ. Վ. Ղազարյան — Տերևների կենսագործունեության վրա արմատային սիստեմի հզորության ազդեցության մասին 304

Միջառաքանություն

- Ա. Մ. Յարյուկով-Խնձուրյան — Կարծրաթևավորների-ստաֆիլինների բարձրագույն լեռնային երկու նոր տեսակներ Արագածից (Coleoptera, Staphylinidae) 174

- Ա. Մ. Յարյուկով-Խնձուրյան — Կարծրաթևավորների երկու նոր տեսակ Հայաստանից (Insecta, Coleoptera) 309

Ֆիսոհելմինտոլոգիա

- Հ. Ե. Պողոսյան — Նեմատոդի նոր սեռ և նոր տեսակ Հայկական ՍՍՌ-ից (Nematoda, Heteroderidae) 117

- Հ. Ե. Պողոսյան — Բույսերի պարազիտ հեմատոդների նոր հայտնաբերումներ Հայկական ՍՍՌ-ում, *Anguina* Scopoli, 1777 և *Paranguina* Kirjanova, 1955 սեռերից 177

Ռեզկուքյուն

- Կ. Ա. Քյանդարյան և Զ. Լ. Դուրաջյան — Բալխատոկարդիոգրաֆիական ուսումնասիրություն էրշտեյնի հիվանդության ժամանակ 185

- Ա. Լ. Միխայելյան — Սրտի մկանների բիոլոգիան կենդանության ժամանակ 159

Դեղագործություն

- Ա. Հ. Միրզոյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Վ. Պ. Հակոբյան — -ամինոկարազաթիվի ազդեցությունը ուղեղային արյան շրջանառության վրա 53

Ֆիզիոլոգիա

- Ա. Հ. Միրզոյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Ի. Ա. Գրիգորյան — Զերմուկ հանքային ջրի կուրսային օգտագործման էֆեկտը լյարդի հյուսվածքի գլիկոգենի և բաղադրատարրերի պարունակության վրա 60

- Թ. Կ. Կիսլիցյան — Հիպոթալամուսի ազդեցությունը սենսոր աֆֆերենտ փոխանցման վրա ողնուղեղում 124

- Կ. Ա. Աստաբադյան և Վ. Վ. Ֆանաբջյան — Կատվի ուղեղիկի ատամնավոր կորիզի նեյրոնների էլեկտրական ակտիվության միկրոէլեկտրոդային հետազոտությունը 246

- Ա. Հ. Միրզոյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Ի. Ա. Գրիգորյան — Ստամոքսի խոցի առաջացման կանխումը Զերմուկ հանքային ջրով և նրա արդյունավետ հյուսվածքի հիստամինուպեկսիկ հատկության փոփոխության հետ 252

СОДЕРЖАНИЕ XLII ТОМА

Стр.

Математика

<i>И. С. Иохвидов</i> — Дробнолинейные преобразования J -нерастягивающих операторов	3
<i>Р. Л. Шахбагян</i> — Интегральные уравнения в полупространстве	9
<i>Э. М. Кегелян</i> — О граничном поведении неограниченных аналитических функций, заданных в круге	65
<i>В. Х. Мусоян</i> — об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле	73
<i>И. С. Саргсян</i> — Теорема о полноте собственных функций обобщенной системы Дирака	77
<i>И. С. Саргсян</i> — О решении задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака	129
<i>Ф. Г. Арутюнян</i> — О рядах по системе Хаара	134
<i>Р. В. Амбарцумян</i> — Об одном уравнении для стационарных точечных процессов	141
<i>И. С. Саргсян</i> — Суммирование производных спектральной матрицы одномерной системы Дирака	193
<i>В. И. Мацаев и Ю. А. Палант</i> — О распределении спектра полиномиального операторного пучка	257
<i>И. С. Саргсян</i> — Теорема о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака	262
<i>И. С. Иохвидов</i> — Вещественные последовательности класса P	268
<i>Е. Д. Соломенцев</i> — Теорема о трех сферах для гармонических функций	274

Строительная механика

<i>С. А. Шагинян</i> — Исследование деформационных свойств строительных материалов для целей моделирования	83
<i>Р. О. Амасян</i> — К подбору модельных материалов по подобию в статистическом смысле	279

Теория упругости

<i>Г. П. Геонджян</i> — Стесненное кручение параллелепипеда	148
---	-----

Теория ползучести

<i>К. С. Карапетян</i> — Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от размеров заполнителя	91
---	----

Физика

<i>Х. П. Бабаян и Н. А. Марутян</i> — Центральные столкновения ядер космического излучения с тяжелыми ядрами эмульсии	97
<i>В. И. Авунджян и Л. А. Безирганян</i> — Определение направления пьезоэлектрических колебаний с помощью рентгеновской дифракционной картины	281
<i>А. Д. Газазян</i> — Взаимодействие когерентного излучения с атомами	288

Теоретическая физика

<i>В. А. Джрбашян</i> — О законах сохранения в электромагнитной теории	101
--	-----

Астрофизика

<i>И. Д. Караченцев</i> — Рассеянная группа галактик	294
--	-----

Физическая оптика

<i>Г. А. Гурзадян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и В. М. Новиков</i> — Светофильтры для ультрафиолетовой области спектра из тонких слоев щелочных металлов	15
--	----

Физика полимеров

- Н. М. Кочарян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, *Х. Б. Пачаджян*, *Н. А. Нал-сандян* и *Н. М. Диванян* — Термоупругие свойства растянутого полиметилмета-крилата 154

Биофизика

- В. М. Асланян*, *А. Г. Габриелян*, *М. А. Новоселер* и *Э. Г. Товмасын* — Влия-ние ионной силы раствора на тепловую денатурацию ДНК 198

Бионика

- Б. С. Сотсков*, чл.-корр. АН СССР, *Л. С. Гамбарян* и *С. О. Мкртчян* — К вопросу надежности мозга 205

Метеорология

- Г. Д. Зубян* — Импульсы значительных колебаний температуры в стратосфе-ре над Арменией 159

Неорганическая химия

- В. М. Тараян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, *Л. Г. Мушегян* и *М. Г. Экимян* — Исследование каталитического влияния ионов двухвалентной меди на реакцию взаимодействия перрената с роданидом 19

Органическая химия

- А. Т. Бабаян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, *К. Ц. Тагмазян* и *Г. Т. Бабаян* — Внутримолекулярно протекающая реакция диенового синтеза при воднощелоч-ном расщеплении аммониевых солей 23

Биохимия

- А. А. Симонян* — Влияние липидо-белковой фракции, выделенной из печени куриного эмбриона на окислительное фосфорилирование митохондрий 25
- Э. Я. Бабина* — Изменения окислительных процессов в тканях облученных животных под действием моноэтаноламина 31
- С. М. Минасян* и *М. Я. Мартиросян* — Содержание микроэлементов в раз-личных частях кроны дерева 166
- А. А. Галоян* и *Ж. Г. Абелян* — Водорастворимые белки нейрогипофиза 173
- А. А. Галоян* и *Р. М. Срапцонян* — Об очистке коронарорасширяющего белка, выделенного из гипоталамуса 219

Геохимия

- В. В. Пайразян* — Инфракрасные спектры хроматографических фракций би-тумоидов, экстрагированных из пород октемберянской толщи 214

Геология

- Г. А. Казарян* и *З. О. Чибухчян* — Новые данные об абсолютном возрасте некоторых интрузивов плагиогранитного комплекса Малого Кавказа 36
- И. Г. Магакьян*, академик АН Армянской ССР — Армения в системе Цент-рального Средиземноморья 219

Минералогия

- С. Б. Абовян* — Хизлевудит из Шоржинского перидотитового массива (Ар-мянская ССР) 106
- М. А. Сатян*, *Ж. О. Степанян* и *Г. М. Мкртчян* — О целестине и стронциани-те из отложений данния-палеоцена у сел. Двин 298

Тектоника

- С. А. Пирузян* — О причинах так называемых общих сотрясений или одно-временных землетрясений 41

Геоморфология

- Г. К. Габриелян — К вопросу образования речных террас в Армянской ССР 224

Полезные ископаемые

- А. Г. Казарян и Г. А. Казарян — О возрастном разрыве между образованием метасоматитов и оруденением в Шамлугском рудном поле Армянской ССР 227

Стратиграфия

- Г. М. Аколян — Новые данные о возрасте вулканогенных отложений района г. Марал-сар и ущелья р. Хач-ахпюр 233

Физиология растений

- А. Г. Гаспарян — Суточная динамика углеводов в листьях некоторых альпийских растений, произрастающих в различных условиях 47

- В. О. Казарян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и В. А. Давтян — О корреляции между метаболической активностью корней и величиной листовой площади растений 112

- М. Г. Гезалян — О напряженности водного режима неизолдированных листьев и новом методе его исследования 236

- В. О. Казарян, чл.-корр. АН Армянской ССР, К. А. Карапетян и И. А. Казарян — О влиянии фотопериодического режима на корневую активность кукурузы 241

- В. В. Казарян — О влиянии мощности корневой системы на фотосинтетическую активность листьев и накопление хлорофилла 304

Энтомология

- С. М. Яблоков-Хизорян — Два новых высокогорных вида жесткокрылых стафилинов с Арагаца (Coleoptera, Staphylinidae) 174

- С. М. Яблоков-Хизорян — Два новых вида жесткокрылых из Армянской ССР (Insecta, Coleoptera) 309

Фитогельминтология

- Э. Г. Погосян — Новый род и вид нематоды семейства Heteroderidae из Армянской ССР (Nematoda) 117

- Э. Е. Погосян — Новые находки паразитических нематод из родов *Anquina* Scopoli, 1777, и *Paranguina* Kirjanova, 1955, в Армянской ССР 177

Медицина

- К. А. Кяндарян и З. Л. Долабчян — Баллистокардиографическое исследование больных аномалией Эбштейна 185

- А. Л. Микаелян — Прижизненная биопсия мышцы сердца 189

Фармакология

- С. А. Мирзоян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и В. П. Аколян — Влияние γ-аминомасляной кислоты на мозговое кровообращение 53

Физиология

- С. А. Мирзоян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и Р. А. Григорян — Эффекты курсового применения джермукской минеральной воды на содержание гликогена и минеральных компонентов печеночной ткани 60

- Т. К. Киприян — Гипоталамическое влияние на сенсорную афферентную передачу в спинном мозге 124

- К. А. Астабатьян и В. В. Фанарджян — Микроэлектродное исследование электрической активности нейронов зубчатого ядра мозжечка кошки 246

- С. А. Мирзоян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и Р. А. Григорян — Предупреждение возникновений экспериментальных язв желудка джермукской минеральной водой и некоторая зависимость наблюдаемых эффектов от изменения гистаминопексической способности тканей 252