

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XLII, № 2

1966

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ.
ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ
(պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Ս. Ս.
ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ.
ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ.
խմբագիր), Ս. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ
քղրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А.
МИРЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР,
А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР
(отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН,
чл.-корресп. АН АрмССР, А. А. ТАЛА-
ЛЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, М. Л.
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корресп. АН Арм
ССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մաթեմատիկա

- Է. Մ. Քենեյան — Միավոր շրջանում տրված անսահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին 65
- Վ. Խ. Մուսոյան — Դիրիխլեի բազմանդամներով մոտարկելի ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակման մասին 73
- Ի. Ս. Սարգսյան — Թեորեմ Դիրակի ընդհանրացրած սիստեմի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին 77

Շինարարական մեխանիկա

- Ս. Ա. Շահինյան — Մոդելացման նպատակով շինարարական նյութերի դեֆորմացիոն հատկությունների ուսումնասիրությունը 81

Սողի սեսուքյուն

- Կ. Ս. Կարապետյան — Անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բետոնի սողի վրա կախված լցիչի չափսերից 91

Ֆիզիկա

- Խ. Պ. Բաբայան և Ն. Ա. Մարուրյան — Կոսմիկական ճառագայթման միջուկների կինտրոնական բախումները Լմուխիայի ծանր միջուկների հետ 97

Ցեռակայն ֆիզիկա

- Վ. Հ. Զրբաչյան — Էլեկտրամագնիսական տեսությունում պահպանման օրենքների մասին 101

Համաբաժնություն

- Ս. Բ. Աբովյան — Խիզելվուդիտը Շորժայի պերիդոտիտային զանգվածից (Հայկական ՍՍՌ) 106

Բուլյոների ֆիզիոլոգիա

- Վ. Հ. Ղազարյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Վ. Ա. Դավթյան — Բուլյոների արմատների նյութափոխանակային ակտիվության և տերևային մակերևույթի մեծության միջև եղած կորելացիայի մասին 112

Ֆեոհելմինոցիոգիա

- Հ. Ն. Պողոսյան — Նեմատոդի նոր սեռ և նոր տեսակ Հայկական ՍՍՌ-ից (Nematoda Heteroderidae) 117

Ֆիզիոլոգիա

- Խ. Կ. Կիպրիյան — Հիպոթալամուսի ազդեցությունը սենսոր աֆֆերենտ փոխանցման վրա ողնուղեղում 124

С о д е р ж а н и е

	Стр.
Математика	
Э. М. Кегелян — О граничном поведении неограниченных аналитических функций, заданных в круге	65
В. Х. Мусоян — Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле	73
И. С. Саргсян — Теорема о полноте собственных функций обобщенной системы Дирака	77
Строительная механика	
С. А. Шагинян — Исследование деформационных свойств строительных материалов для целей моделирования	83
Теория ползучести	
К. С. Карапетян — Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от размеров заполнителя	91
Физика	
Х. П. Бабаян и Н. А. Марутян — Центральные столкновения ядер космического излучения с тяжелыми ядрами эмульсии	97
Теоретическая физика	
В. А. Джрбашян — О законах сохранения в электромагнитной теории	101
Минералогия	
С. Б. Абовян — Хизлевудит из Шоржинского перидотитового массива (Армянская ССР)	106
Физиология растений	
В. О. Казарян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и В. А. Давтян — О корреляции между метаболической активностью корней и величиной листовой площади растений	112
Фитогельминтология	
Э. Г. Погосян — Новый род и вид нематоды семейства Heteroderidae из Армянской ССР (Nematoda)	117
Физиология	
Т. К. Киприян — Гипоталамическое влияние на сенсорную афферентную передачу в спинном мозге	124

МАТЕМАТИКА

Э. М. Кегеян

О граничном поведении неограниченных аналитических функций,
заданных в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 29/VI 1965)

1°. Пусть D и S — соответственно единичный круг и единичная окружность в комплексной плоскости z .

В работе (1) Лехто доказал, что для каждой измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ существует аналитическая в D функция, радиальные граничные значения которой совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S .

Пусть $\mu(r)$ — заданная функция в промежутке $0 \leq r < 1$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \mu(0) > 0, \mu'(r) > 0 \quad \text{при } 0 \leq r < 1 \\ \lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = +\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через $H(\mu, D)$ — класс аналитических в D функций $f(z)$, удовлетворяющих в D неравенству

$$|f(z)| \leq \mu(|z|).$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего предложения.

Теорема. Для каждой заданной и измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ можно найти функцию $\Phi(z)$ из класса $H(\mu, D)$, радиальные граничные значения которой совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S .

2°. Сначала докажем следующее предложение.

Для каждого положительного числа $\eta > 0$ в любом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $\Phi_\eta(z)$ такую, что

1) радиальные граничные значения $\operatorname{Re} \Phi_\eta(re^{i\theta})$ были бы равны $+\infty$ почти всюду на S ;

2) на некотором множестве $U \subset [0, 2\pi]$, с мерой больше $2\pi - \eta$,

$$\inf_{0 < r < 1} \operatorname{Re} \Phi_\eta(re^{i\theta}) \geq 0.$$

Действительно, для каждого k построим на S нигде не плотное замкнутое множество E_k , такое, что

$$\operatorname{mes} E_k > 2\pi - \frac{\eta}{2^k}. \quad (3)$$



Далее обозначим через

$$\mu_k(r) = \frac{\mu(r)}{2^k}. \quad (4)$$

Рассмотрим круг $|z| \leq 1 - \frac{1}{2^k}$ и присоединим к нему все отрезки вида

$$\begin{aligned} \theta &\in E_k \\ 1 - \frac{1}{2^k} &\leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Полученное замкнутое подмножество круга $\bar{D}$ обозначим T_k и на нем определим функцию $\varphi_k(z)$ следующим образом

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \frac{\mu_k(0)}{2} & \text{при } |z| \leq 1 - \frac{1}{2^k} \\ \frac{\mu_k(0)}{2} + 2^k \left(r - 1 + \frac{1}{2^k} \right) \left(1 - \frac{\mu_k(0)}{2} \right) & \text{при } 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

и $z \in T_k$

Так как замкнутое множество T_k не разделяет плоскость и функция $\varphi_k(z)$ непрерывна на нем и аналитическая во внутренних его точках, то по теореме С. Н. Мергеляна ⁽²⁾ существует полином $P_k(z)$, такой, что

$$|\varphi_k(z) - P_k(z)| < \frac{\mu_k(0)}{4} \quad \text{при } z \in T_k. \quad (6)$$

Теперь возьмем натуральное число m_k настолько большим, чтобы в каждой точке z круга D выполнялось неравенство

$$|P_k(z^{m_k})| \leq \mu_k(|z|). \quad (7)$$

Введем обозначение

$$Q_k(z) = P_k(z^{m_k}).$$

Если обозначить образ множества E_k при отображении $w = z^{m_k}$ — через U_k , то из (3), (5), (6) и (7) будет видно, что полином $Q_k(z)$ и замкнутое нигде не плотное множество U_k удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{mes } U_k &> 2\pi - \frac{\eta}{2^k} \\ 2. \quad \text{Re } Q_k(e^{i\theta}) &> 1 - \frac{\mu_k(0)}{4} \quad \text{при } \theta \in U_k \\ 3. \quad |Q_k(z)| &\leq \mu_k(|z|) \quad \text{при } z \in D \\ 4. \quad \text{Re } Q_k(re^{i\theta}) &> 0 \quad \text{при } \theta \in U_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим функцию $\Phi_\eta(z)$ как сумму полиномов $Q_k(z)$:

$$\Phi_{\eta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z). \quad (9)$$

Из (8) и (4) следует, что этот ряд равномерно сходится внутри круга D . Следовательно, его сумма — $\Phi_{\eta}(z)$ — будет аналитической в D функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\Phi_{\eta}(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(|z|) = \mu(|z|). \quad (10)$$

Допустим

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Очевидно

$$\text{mes } R = 2\pi.$$

Если $\theta_0 \in R$, то, начиная с некоторого номера — $k > n_0$, $\theta_0 \in U_k$. Обозначим

$$M = \min_{0 < r < 1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0-1} \text{Re} Q_k(re^{i\theta_0}) \right\}$$

и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а N — целое число больше $\ln \frac{1}{\varepsilon} - M$.

Учитывая (8) и (9), получим

$$\text{Re } \Phi_{\eta}(re^{i\theta_0}) > \sum_{k=1}^{n_0-1} \text{Re} Q_k(re^{i\theta_0}) + \sum_{k=n_0}^{n_0+2N} \text{Re} Q_k(re^{i\theta_0}).$$

Правая часть этого неравенства при $r=1$ больше, чем $M + 2N \left(1 - \frac{\mu_{n_0}(0)}{4}\right) > M + N > \ln \frac{1}{\varepsilon}$, следовательно, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $1 - \delta < r < 1$

$$\text{Re } \Phi_{\eta}(re^{i\theta_0}) < \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (11)$$

т. е. радиальные граничные значения функции $\text{Re } \Phi_{\eta}(z)$ п. в. на S равны $+\infty$.

Наконец, обозначим

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Из (8) имеем

$$\text{Re } \Phi_{\eta}(re^{i\theta}) > 0 \quad \text{при } \theta \in U$$

и

$$\text{mes } U > 2\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} = 2\pi - \eta.$$

3°. Покажем что

Для каждого положительного числа $\eta > 0$ в любом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $\Psi_\eta(z)$, радиальные граничные значения которой равны 1 почти везде на S , и такую, что на некотором множестве $F \subset [0, 2\pi]$ с мерой больше, чем $2\pi - \eta$,

$$\sup_{0 < r < 1} |\Psi_\eta(re^{i\theta})| \leq 2.$$

На самом деле, пусть r_1 — наименьшее из тех r , для которых $\mu(r) < 2$. Определим функцию $\mu^*(r)$, удовлетворяющую условиям (1), и такую, что

$$\mu^*(r) < \frac{\mu(r)}{e^2} \quad \text{при } r < r_1 \quad (12)$$

$$\mu^*(r) > \frac{\ln \mu(r)}{e^2} \quad \text{при } r \geq r_1.$$

Согласно 2°, для $\eta > 0$ можно найти функцию $\Phi_\eta(z)$ из класса $H(\mu^*, D)$, удовлетворяющую условию 2.2.

Функция

$$\Psi_\eta(z) = 1 - \exp\{-\Phi_\eta(z)\}$$

и является требуемой. Действительно, так как

$$\begin{aligned} |\Psi_\eta(z)| &= \left| 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Phi_\eta(z)|^n}{n!} \right| < |\Phi_\eta(z)| \exp\{|\Phi_\eta(z)|\} < \\ &< \mu^*(r) \exp\{\mu^*(r)\} < \mu(r), \end{aligned}$$

то $\Psi_\eta(z) \in H(\mu, D)$. Легко проверяются и остальные свойства функции $\Psi_\eta(z)$.

4° Пусть $\varphi(\xi)$ — произвольная измеримая на S функция. Для всех пар чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ в каждом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $G(z)$, такую, что

1. Радиальные граничные значения $G(z)$ существуют почти всюду на S . Обозначим их через $g(\xi)$.

2. На некотором множестве T с мерой, большей $2\pi - \delta$,

$$\text{а) } |\varphi(\xi) - g(\xi)| < \varepsilon;$$

$$\text{б) } \sup_{0 < r < 1} |G(re^{i\theta})| < 2(|\varphi(\xi)| + \varepsilon).$$

Действительно, по теореме Лехто (1) можно найти аналитическую в D функцию $F(z)$, радиальные граничные значения которой почти во всех точках S совпадают с $\varphi(\xi)$.

Берем $\gamma > 0$ настолько малое, что

$$|F[(1 - \gamma)e^{i\theta}] - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$$

на некотором замкнутом множестве T_1 с мерой, большей $2\pi - \frac{\delta}{2}$.

Функция $F[(1-\gamma)re^{i\theta}]$ непрерывна на $\bar{D}$. Следовательно, существует $0 < r_1 < 1$, такое, что

$$|F[(1-\gamma)re^{i\theta}] - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$$

при $\theta \in T_1$ и $r_1 \leq r < 1$.

Пусть

$$M = \max_{z \in \bar{D}} |F[(1-\gamma)z]|,$$

Для $\eta = \frac{\delta}{2}$, согласно 3°, можно найти функцию $\Psi_{\frac{\delta}{2}}(z)$ из клас-

са $H\left(\frac{\mu(r)}{M}; D\right)$, такую, чтобы

1. Ее радиальные граничные значения существовали бы на некотором множестве T_2 полной меры: $\text{mes } T_2 = 2\pi$.

2. На некотором множестве T_3 с мерой, большей $2\pi - \frac{\delta}{2}$,

$$\sup_{0 < r < 1} |\Psi_{\frac{\delta}{2}}(re^{i\theta})| \leq 2.$$

Обозначим $G(z) = F[(1-\gamma)z] \Psi_{\frac{\delta}{2}}(z)$. Нетрудно видеть, что она удовлетворяет всем вышеупомянутым требованиям, если взять $T = T_1 \times \times T_2 \cdot T_3$.

5°. Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы. С этой целью возьмем последовательности чисел $\{\varepsilon_k > 0\}$ и $\{\delta_k > 0\}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty. \quad (13)$$

Согласно 4°, для функции $\varphi(\xi)$ и для пар чисел ε_1 и δ_1 в классе $H\left(\frac{\mu(r)}{2}; D\right)$ можно найти функцию $G_1(z)$, имеющую почти всюду на S конечные радиальные граничные значения. Обозначим их $g_1(\xi)$. При этом существует некоторое множество $T_1 \subset S$ с мерой, большей, чем $2\pi - \delta_1$, на котором выполняются следующие условия:

$$\text{а) } |\varphi(\xi) - g_1(\xi)| < \varepsilon_1;$$

$$\text{б) } \sup_{0 < r < 1} |G_1(re^{i\theta})| < 2(|\varphi(\xi)| + \varepsilon_1). \quad \text{при } \xi \in T_1.$$

Пусть $g_1^*(\xi) = g_1(\xi)$ для тех точек $\xi \in S$, где радиальные граничные значения $G_1(z)$ существуют и конечны. Остальные точки окружности S обозначим A_1 , принимая на нем $g_1^*(\xi) = 0$. Имеем $\text{mes } A_1 = 0$.

Функция $\varphi(\xi) - g_1^*(\xi)$ определена и измерима на S . Аналогично вышесказанному для функции $|\varphi(\xi) - g_1^*(\xi)|$ и для чисел ε_2 и δ_2 построим функции $G_2(z)$ из класса $H\left(\frac{\mu(r)}{2^2}; D\right)$ и $g_2^*(z)$, а также множества T_2 и A_2 .

Пусть уже определена функция $g_{n-1}^*(\xi)$. Для функции $|\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g_k^*(\xi)|$ и для пар чисел ε_n и δ_n мы, согласно 4° найдем функцию

$G_n(z)$ из класса $H\left(\frac{\mu(r)}{2^n}; D\right)$, имеющую конечные радиальные граничные значения почти всюду на S .

Обозначим их $g_n(\xi)$. При этом существует некоторое множество $T_n \subset S$ с мерой, большей, чем $2\pi - \delta_n$:

$$\text{mes } T_n > 2\pi - \delta_n, \quad (14)$$

на котором выполняются следующие условия:

$$\text{а) } |\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g_k^*(\xi) - g_n(\xi)| < \varepsilon_n; \quad (15)$$

$$\text{б) } \sup_{0 < r < 1} |G_n(r\xi)| < 2(|\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g_k^*(\xi)| + \varepsilon_n).$$

Пусть $g_n^*(\xi) = g_n(\xi)$ для тех точек $\xi \in S$, где радиальные граничные значения $G_n(z)$ существуют и конечны. Множество остальных точек окружности S обозначим A_n , принимая на нем $g_n^*(\xi) = 0$. Имеем

$$\text{mes } A_n = 0. \quad (16)$$

Так как $G_n(z) \in H\left(\frac{\mu(r)}{2^n}; D\right)$, то ряд с членами $G_n(z)$ сходится равномерно внутри D и его сумма

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)$$

принадлежит классу $H(\mu, D)$.

Нам остается доказать, что радиальные граничные значения $G(z)$ почти всюду на S совпадают с $\varphi(\xi)$.

С этой целью рассмотрим множество

$$R = (S - \sum_{k=1}^{\infty} A_k) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} T_m.$$

Из (13), (14) и (16) следует, что

$$\text{mes } R = 2\pi. \quad (18)$$

При $\xi_0 \in R$, $g_n^*(\xi_0) = g_n(\xi_0)$ для всех n . И, кроме того, $\xi_0 \in T_n$, начиная с некоторого номера n_0 . Значит, при $n > n_0$ отсюда и из (15а) следует, что

$$|g_n(\xi_0)| < \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n, \quad (19)$$

а из (15б) — что

$$\sup_{0 < r < 1} |G_n(r\xi_0)| < 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n. \quad (20)$$

Так что, если $\varepsilon > 0$ произвольное число, то из (13) можно взять $m_0 > n_0$ настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (21)$$

Тогда из (17) и (20) будем иметь

$$\sup_{0 < r < 1} |G(r\xi_0) - \sum_{n=1}^{m_0} G_n(n\xi_0)| < \sum_{n=m_0+1}^{\infty} 3\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (22)$$

И так как для всех n

$$\lim_{r \rightarrow 1} G_n(r\xi_0) = g_n(\xi_0),$$

то можно найти $\eta > 0$ такое, чтобы при $1 - r < \eta$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r\xi_0) - g_n(\xi_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (23)$$

Из (15а) при $\xi = \xi_0$, а также из (22), (23) и (21) окончательно получим

$$|G(r\xi_0) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε этим и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Вышеприведенные рассуждения позволяют распространить утверждение теоремы на тот случай, когда $\varphi(\xi)$ задана и измерима на некотором множестве $E \in S$, а на остальной части, т. е. на $C_s E$ $\varphi(\xi) = \infty$.

Как применение вышедодказанной теоремы формулируем следующий результат.

Для каждой измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ (она может равняться ∞ на множестве положительной меры). Существует аналитическая функция $\Phi(z)$ такая, что

$$1. \iint_D |\Phi(z)|^2 d\sigma < \infty \quad (\text{где } d\sigma - \text{элемент площади}).$$

2. радиальные граничные значения $\Phi(z)$ совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S .

Ереванский государственный
университет

**Միավոր օրջանում սրված անսահմանափակ անայիսիկ ֆունկցիաների
եզրային վարքի մասին**

Թող D -ն և S -ը լինեն համապատասխանաբար միավոր շրջանը և նրա եզրագիծը, իսկ $\mu(r)$ -ը՝ $(0,1)$ միջակայքում տրված իրական, դրական և մոնոտոն աճելով ∞ -ի ձգտող ֆունկցիա: Նշանակենք $H(\mu, D)$ -ով D -ում տրված անսահմանափակ ֆունկցիաների դասը, որոնք մոգուլով չեն գերազանցում $\mu(r)$ -ին:

Ներկա հոդվածը հիմնականում ապացուցում է.

Թեորեմ. S -ի վրա տրված ցանկացած չափելի $\varphi(\xi)$ ֆունկցիայի համար ամեն մի $H(\mu, D)$ դասում կարելի է գտնել մի ֆունկցիա, որի շառավիղային սահմանային արժեքները համընկնում են $\varphi(\xi)$ -ի հետ համարյա ամենուրեք S -ի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ *Лехмо.* On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit circle. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1, 210 (1955), 1—26. ² *С. Н. Мерзелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (1952).

МАТЕМАТИКА

В. Х. Мусоян

Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых
полиномами Дирихле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/VIII 1965)

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \dots$ — последовательность комплексных чисел,
 $m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots$ — последовательность целых положительных чисел.
Рассмотрим систему функций

$$e^{\lambda_\nu z}, ze^{\lambda_\nu z}, \dots, z^{m_\nu-1} e^{\lambda_\nu z}; \nu = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Предположим, что она неполна в метрике C на отрезке мнимой оси
 $[-qi, qi]$ ($0 < q < \infty$). Образует последовательность

$$F_n(z) = \sum_{\nu=1}^{q_n} P_{n\nu}(z) e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

конечных линейных комбинаций функций системы (1).

Л. Шварц в работе ⁽¹⁾ показал, что если все λ_ν — действительные числа, $m_\nu = 1$, последовательность (2) равномерно сходится на $[-qi, qi]$ и ее предельная функция $F(z)$ регулярна на отрезке $[-qi, qi]$, то тогда $F(z)$ регулярна на всей мнимой оси. Если λ_ν — комплексные, то без дополнительных условий на последовательность (2) нельзя утверждать, что $F(z)$ будет регулярной на всей оси.

А. Ф. Леонтьев в работе ⁽²⁾ доказал следующую теорему.

Пусть последовательность (2) равномерно сходится на любом конечном интервале мнимой оси. Если предельная функция $F(z)$ регулярна на отрезке $[-qi, qi]$, то функция $F(z)$ является аналитической в некоторой вертикальной полосе.

Следуя рассуждениям А. Ф. Леонтьева, можно было бы получить и следующий результат. Пусть последовательность (2) равномерно сходится внутри конечного интервала мнимой оси (ai, bi) . $a < -q$, $b > q$. Если предельная функция $F(z)$ регулярна на $[-qi, qi]$, то она регулярна и на интервале $(ai + qi, bi - qi)$.

В настоящей заметке отмечается, что в указанных условиях функция $F(z)$ будет на самом деле регулярной не только в интервале $(ai + qi, bi - qi)$, но и в интервале (ai, bi) .

Для доказательства этого факта пришлось обобщить один результат Л. Шварца ⁽¹⁾.

1. Пусть $\{\mu_k\}$ — последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной кратности, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} |\arg \mu_k| &\leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \\ \sum \frac{1}{|\mu_k|} &< \infty \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$b(z) = \frac{B(z+1)}{(2+z)^2},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке для правой полуплоскости:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{\mu_k + 1}}{1 + \frac{z}{\mu_k + 1}},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} b(z) e^{zt} dz,$$

$$\omega(\mu, f) = - \int_0^{\infty} \psi(t) \left[\int_0^t f(t-\eta) e^{-\mu\eta} d\eta \right] dt,$$

где $f(x) \in L(0, \infty)$. Функция $\omega(\mu, f)$ регулярна в правой полуплоскости.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\varphi(z) = z^p e^{-\mu_k z}$, где p — целое число меньше кратности μ_k . Вычет функции

$$\frac{\omega(\mu, \varphi)}{b(\mu)} e^{-\mu z},$$

как функции переменного μ , равен нулю во всех нулях $b(\mu)$, отличных от μ_k , и равен $z^p e^{-\mu_k z}$ в точке $\mu = \mu_k$.

Через $\overset{+}{P}(z)$ обозначим конечный линейный агрегат функций $\{z^p e^{-\mu_k z}\}$ ($k = 1, 2, \dots$; $p = 0, 1, \dots, l_k - 1$), где l_k — кратность числа μ_k .

Используя лемму 1 и оценку снизу для произведения Бляшке (см. ⁽²⁾, стр. 115), получаем следующее интегральное представление

$$\overset{+}{P}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\mu, \overset{+}{P})}{b(\mu)} e^{-\mu z} d\mu, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \quad (4)$$

где φ_1 — сколь угодно близкое к φ_0 , $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, а L — бесконечный контур, идущий из бесконечности по лучу $\arg \mu = \varphi_1$. До точки нуль, затем по лучу $\arg \mu = -\varphi_1$ до бесконечности.

Исходя из интегрального представления (4) доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть последовательность комплексных чисел удовлетворяет условиям (3) и пусть последовательность конечных линейных агрегатов $\{P_n(z)\}$ сходится в метрике $L(A, \infty)$, $-\infty < A < \infty$. Тогда она в угле $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любые, сходится равномерно.

2. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{\mu_k\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, среди которых могут появляться и числа конечной кратности, причем числа с положительными индексами лежат в угле $|\arg \mu| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, а числа с отрицательными индексами — в угле $|\arg(-\mu)| < \varphi_0$.

Введем следующие обозначения:

$$P(z) = \sum_{k \neq 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z},$$

$$P^+(z) = \sum_{k > 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z}, \quad \bar{P}(z) = \sum_{k < 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z},$$

где $Q_k(z)$ — полином степени не выше $l_k - 1$ (l_k — кратность числа μ_k), причем $Q_k(z) \equiv 0$ для больших по модулю k .

По схеме Л. Шварца, приведенной в работе (1), доказывается следующая

Лемма 3. Пусть $\sum_{k \neq 0} 1/|\mu_k| < \infty$. Тогда имеют место следующие неравенства

$$\|P^+\|_{L(A, \infty)} \leq C \|P\|_{L(A, B)}, \quad \|\bar{P}\|_{L(-\infty, B)} \leq C \|P\|_{L(A, B)},$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от последовательности $\{\mu_k\}$ и интервала $[A, B]$ — $-\infty < A < B < \infty$.

При доказательстве используются интегральное представление (4), лемма 2 и некоторые результаты из (4).

Комбинируя лемму 2 с леммой 3, получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть последовательность комплексных чисел $\{\mu_k\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, среди которых могут появляться и числа конечной кратности, удовлетворяет условиям:

$$|\arg \mu_k| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \text{ при } k > 0$$

$$|\arg(-\mu_k)| \leq \varphi_0 \text{ при } k < 0$$

$$\sum_{k \neq 0} 1/|\mu_k| < \infty$$

Если последовательность $\{P_n(z)\}$ конечных линейных комбинаций функций системы $\{z^p e^{-\mu_k z}\}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots; p = 0, 1, \dots, l_k - 1, l_k$ — кратность числа μ_k) сходится в метрике $L(A, B)$, $-\infty < A < B < \infty$, то тогда последовательности $\{P_n^+(z)\}$ и $\{P_n^-(z)\}$ сходятся равномерно соответственно в углах $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$ и $|\arg(-z + B + \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Теорема 1 в случае действительных и простых (не кратных) $\{\mu_k\}$ была установлена Л. Шварцем ⁽¹⁾.

Используя некоторые результаты А. Ф. Леонтьева из работы ⁽²⁾ и теорему 1, уже можно доказать отмеченное в начале заметки утверждение, которое мы формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть система $\{z^p e^{-\lambda_\nu z}\}$, $\nu = 1, 2, \dots; p = 0, 1, \dots, m_\nu - 1$, не полна в $C[-qi, qi]$, $0 < q < \infty$, где λ_ν — комплексные числа, а m_ν — целые положительные числа. Предположим, что последовательность (2) конечных линейных комбинаций функций из этой системы равномерно сходится на интервале (ai, bi) , $a < -q, b > q$. Если предельная функция $F(z)$ этой последовательности регулярна на отрезке $[-qi, qi]$, то она регулярна и на интервале (ai, bi) .

Само доказательство ввиду его громоздкости не приводим.

В заключение выражаю благодарность А. Ф. Леонтьеву за постановку задачи и ряд ценных указаний.

Математический институт им В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

**Դիրիխլեի բազմանդամներով մոտարկելի ֆունկցիաների
անալիտիկ շարունակման մասին**

Դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \dots$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն է, իսկ $m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots$ ամբողջ դրական թվերի հաջորդականություն: Դիտարկվում է ինտերվալի վրա ոչ լրիվ ֆունկցիաների (1) սխեման: Բերվում են երկու թեորեմներ այդ սխեմայի ֆունկցիաների դժային կոմբինացիաների միջոցով մոտարկելի ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակման վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ L. Schwartz Etude des sommes d'exponentielles 1959, Actualites Scientifiques et Industrielles. ² А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, серия матем., 29 (1965), 269—328. ³ R. P. Jr. Boas, Entire Functions, New York, 1954. ⁴ А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXIX, 1951.

И. С. Саргсян

Теорема о полноте собственных функций обобщенной системы Дирака

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мержеляном 20/IX 1965)

1. Пусть L означает матричный оператор

$$L \equiv \begin{pmatrix} P(x), & I \frac{d}{dx} \\ -I \frac{d}{dx}, & Q(x) \end{pmatrix},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ заданные квадратные симметричные матрицы порядка k :

$$P(x) \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x), & p_{12}(x), & \dots, & p_{1k}(x) \\ p_{21}(x), & p_{22}(x), & \dots, & p_{2k}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1}(x), & p_{k2}(x), & \dots, & p_{kk}(x) \end{pmatrix},$$

$$Q(x) \equiv \begin{pmatrix} q_{11}(x), & q_{12}(x), & \dots, & q_{1k}(x) \\ q_{21}(x), & q_{22}(x), & \dots, & q_{2k}(x) \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ q_{k1}(x), & q_{k2}(x), & \dots, & q_{kk}(x) \end{pmatrix},$$

а I — единичная матрица того же порядка, т. е.

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}_k$$

Далее, пусть $y(x)$ означает двухкомпонентную вектор-функцию порядка k от вещественной переменной x . Функцию $y(x)$ можно представить в матричной форме:

$$y(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), \dots, y_1^{(k)}(x) \\ y_2^{(1)}(x), y_2^{(2)}(x), \dots, y_2^{(k)}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (λ -параметр)

$$(L - \lambda I) y = 0$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2^{(i)}}{dx} + p_{11}(x) y_1^{(1)}(x) + p_{12}(x) y_1^{(2)}(x) + \dots + p_{1k}(x) y_1^{(k)}(x) &= \lambda y_1^{(i)}(x) \\ - \frac{dy_1^{(i)}}{dx} + q_{11}(x) y_2^{(1)}(x) + q_{12}(x) y_2^{(2)}(x) + \dots + q_{1k}(x) y_2^{(k)}(x) &= \lambda y_2^{(i)}(x) \end{aligned} \right\} \\ i = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Предположим, что матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны, вещественны и определены на интервале $[0, \pi]$. Непрерывность матриц $P(x)$ и $Q(x)$ означает непрерывность их элементов, т. е. функций $p_{ij}(x)$ и $q_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Присоединим к системе (1) граничные условия:

$$y_2(0) - y_1(0) h = 0, \quad (2)$$

$$y_2(\pi) - y_1(\pi) H = 0, \quad (3)$$

где h и H квадратные симметричные числовые матрицы порядка k :

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kk} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k1} & H_{k2} & \dots & H_{kk} \end{pmatrix}$$

и $\text{Det} h \neq 0$, $\text{Det} H \neq 0$, так что обратные матрицы h^{-1} и H^{-1} существуют.

2. В настоящей заметке изучается вопрос полноты собственных вектор-функций задачи (1) + (2) + (3) в классе интегрируемых с квадратом вектор-функций $f(x) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \pi)$, т. е. функций, для которых

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^k \{|f_1^{(i)}(x)|^2 + |f_2^{(i)}(x)|^2\} dx < +\infty.$$

Аналогичный вопрос для задачи (1) + (2) + (3) при $k = 1$, т. е. для задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + p(x) y_1 &= \lambda y_1 \\ - \frac{dy_1}{dx} + q(x) y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$y_2(0) \sin \alpha + y_1(0) \cos \alpha = 0, \quad (5)$$

$$y_2(\pi) \sin \beta + y_1(\pi) \cos \beta = 0, \quad (6)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции, α, β — произвольные действительные числа, рассмотрен Э. Ч. Титчмаршем ⁽¹⁾. Им рассмотрен

случай и бесконечного интервала $(0, \infty)$ (²). Наш метод отличается от метода Титчмарша и аналогичен методу Б. М. Левитана (см. (³), приложение 1).

3. Пусть вектор-функции $y_1(x) = \{y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), \dots, y_1^{(k)}(x)\}$ и $y_2(x) = \{y_2^{(1)}(x), y_2^{(2)}(x), \dots, y_2^{(k)}(x)\}$ являются решениями системы (1) и удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$y_1^{(i)}(0) = 1, \quad y_2^{(i)}(0) = \sum_{j=1}^k h_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (7)$$

Очевидно, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условию (2).

Обозначим через n произвольное натуральное число и пусть $\Delta = \frac{\pi}{n}$. Далее, положим $x_v = v\Delta$, $p_{ij}^{(v)} = p_{ij}(v\Delta)$, $q_{ij}^{(v)} = q_{ij}(v\Delta)$ и пусть $y_{1,v}^{(i)}$ и $y_{2,v}^{(i)}$, ($v = 0, 1, \dots, n-1$), компоненты векторов, которые будут определены ниже. Заменяем производные функций $y_1^{(i)}(x)$ и $y_2^{(i)}(x)$ разностными отношениями, т. е. положим (в точке $x = x_v$)

$$\frac{d}{dx} y_1^{(i)}(x) \sim \frac{y_{1,v}^{(i)} - y_{1,v-1}^{(i)}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} y_2^{(i)}(x) \sim \frac{y_{2,v+1}^{(i)} - y_{2,v}^{(i)}}{\Delta}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9)$$

Так как по предположению вектор-функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями системы (1), то заменив в этих уравнениях производные выражениями (8) и (9), мы получим следующую систему в конечных разностях

$$\frac{y_{2,v+1}^{(i)} - y_{2,v}^{(i)}}{\Delta} + p_{i1}^{(v)} y_{1,v}^{(1)} + p_{i2}^{(v)} y_{1,v}^{(2)} + \dots + p_{ik}^{(v)} y_{1,v}^{(k)} - \lambda y_{1,v}^{(i)} = 0, \quad (10)$$

$$- \frac{y_{1,v}^{(i)} - y_{1,v-1}^{(i)}}{\Delta} + q_{i1}^{(v)} y_{2,v}^{(1)} + q_{i2}^{(v)} y_{2,v}^{(2)} + \dots + q_{ik}^{(v)} y_{2,v}^{(k)} - \lambda y_{2,v}^{(i)} = 0, \quad (11)$$

где $v = 0, 1, \dots, n-1$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Положим

$$y_{1,-1}^{(i)} = 1, \quad y_{2,0}^{(i)} = \sum_{j=1}^k h_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (12)$$

Из системы (10)–(11) и условий (12) можно последовательно определить $y_{1,0}^{(i)}$, $y_{1,1}^{(i)}$, $\dots$, $y_{1,n-1}^{(i)}$ и $y_{2,1}^{(i)}$, $y_{2,2}^{(i)}$, $\dots$, $y_{2,n}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, k$). Далее, нетрудно показать (см., например, (⁴), стр. 12), что при $n \rightarrow \infty$ и $v\Delta \rightarrow x$ векторы $\{y_{1,v}^{(1)}, y_{1,v}^{(2)}, \dots, y_{1,v}^{(k)}\}$ и $\{y_{2,v}^{(1)}, y_{2,v}^{(2)}, \dots, y_{2,v}^{(k)}\}$ стремятся к решениям задачи (1) + (7) и притом равномерно в каждой области $(0 \leq x \leq \pi; 0 \leq |\lambda| \leq R < \infty)$.

Присоединим к задаче (10) + (11) + (12) граничное условие

$$y_{2,n}^{(i)} - \sum_{i=1}^k H_{ij} y_{1,n-1}^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (13)$$

которое получается из граничного условия (3). Полученная задача для системы в конечных разностях, очевидно, представляет собой алгебраическую задачу на собственные значения в nk -мерном векторном пространстве.

Скалярное произведение векторов $y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(k)} \\ y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \dots, y_2^{(k)} \end{pmatrix}$ и $z = \begin{pmatrix} z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_1^{(k)} \\ z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_2^{(k)} \end{pmatrix}$ определим с помощью равенства

$$(y, z) = \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{i=1}^k (y_{1,v}^{(i)} z_{1,v}^{(i)} + y_{2,v}^{(i)} z_{2,v}^{(i)}) \Delta. \quad (14)$$

Лемма 1. Собственные векторы задачи (10) + (11) + (12) + (13), соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. если собственному значению λ соответствует собственный вектор y , а собственному значению μ — собственный вектор z и $\lambda \neq \mu$, $(y, z) = 0$.

Лемма 2. Собственные значения задачи (10) + (11) + (12) + (13) вещественны.

Обозначим собственные значения задачи (10) + (11) + (12) + (13) в порядке их роста через $\lambda_m^{(\Delta)}$, ($m = 1, 2, \dots, n$) и соответствующие собственные векторы через

$y_m^{(\Delta)} = \{y_{1,0}^{(i)m}, y_{1,1}^{(i)m}, \dots, y_{1,n-1}^{(i)m}; y_{2,0}^{(i)m}, y_{2,1}^{(i)m}, \dots, y_{2,n-1}^{(i)m}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
Далее, обозначим через $\alpha_{m,\Delta}^2$, квадрат нормы вектора $y_m^{(\Delta)}$

$$\alpha_{m,\Delta}^2 = \|y_m^{(\Delta)}\|^2 = (y_m^{(\Delta)}, y_m^{(\Delta)}) = \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{i=1}^k \{|y_{1,v}^{(i)m}|^2 + |y_{2,v}^{(i)m}|^2\} \Delta. \quad (15)$$

Векторы $y_1^{(\Delta)}, y_2^{(\Delta)}, \dots, y_n^{(\Delta)}$ образуют в n -мерном пространстве двух-компонентных k -мерных векторов ортогональный базис. Поэтому для произвольного вектора $f = \{f_{1,0}^{(i)}, f_{1,1}^{(i)}, \dots, f_{1,n-1}^{(i)}; f_{2,0}^{(i)}, f_{2,1}^{(i)}, \dots, f_{2,n-1}^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеет место равенство Парсеваля

$$(f, f) = \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{i=1}^k \{|f_{1,v}^{(i)}|^2 + |f_{2,v}^{(i)}|^2\} \Delta = \sum_{m=1}^n \frac{1}{\alpha_{m,\Delta}^2} (f, y_m^{(\Delta)})^2. \quad (16)$$

Обозначим через $y_v(\lambda) = \begin{pmatrix} y_{1,v}(\lambda) \\ y_{2,v}(\lambda) \end{pmatrix}$ решение системы (10) — (11), удовлетворяющее условиям (12), а через $y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям (7). Если $\Delta \rightarrow 0$ и $v\Delta \rightarrow x$, то $y_v(\lambda) \rightarrow y(x, \lambda)$ равномерно в каждой конечной области плоскости λ .

Поэтому равенство Парсеваля для задачи (1) + (2) + (3) можно получить из равенства (16), полагая $\Delta \rightarrow 0$, т. е. справедлива

Теорема 1. Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \pi)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_0^\pi \sum_{l=1}^k \{|f_1^{(l)}(x)|^2 + |f_2^{(l)}(x)|^2\} dx = \\ = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\alpha_m^2} \left\{ \sum_{l=1}^k \int_0^\pi |f_1^{(l)}(x) y_1^{(l)}(x, \lambda_m) + f_2^{(l)}(x) y_2^{(l)}(x, \lambda_m)| dx \right\}^2,$$

или, более компактно, т. е. в векторной форме записи,

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \sum_{m=1}^\infty \frac{c_m^2}{\alpha_m^2},$$

где $(m = 1, 2, 3, \dots)$

$$y(x, \lambda_m) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x, \lambda_m), y_1^{(2)}(x, \lambda_m), \dots, y_1^{(k)}(x, \lambda_m) \\ y_2^{(1)}(x, \lambda_m), y_2^{(2)}(x, \lambda_m), \dots, y_2^{(k)}(x, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

собственные вектор-функции задачи (1) + (2) + (3),

$$\alpha_m^2 = \sum_{l=1}^k \int_0^\pi \{|y_1^{(l)}(x, \lambda_m)|^2 + |y_2^{(l)}(x, \lambda_m)|^2\} dx,$$

$$f^2(x) = \sum_{l=1}^k \{|f_1^{(l)}(x)|^2 + |f_2^{(l)}(x)|^2\},$$

$$c_m = \sum_{l=1}^k \int_0^\pi \{f_1^{(l)}(x) y_1^{(l)}(x, \lambda_m) + f_2^{(l)}(x) y_2^{(l)}(x, \lambda_m)\} dx.$$

4. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала. Пусть коэффициенты системы (1), т. е. функции $p_{ij}(x)$ и $q_{ij}(x)$, определены на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемы в каждом конечном интервале. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$,

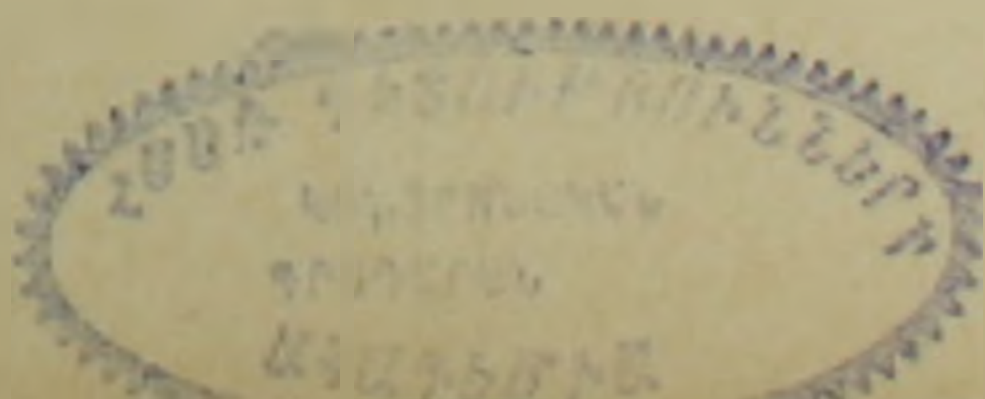
$$u_i(x) = \begin{pmatrix} u_{1i}(x) \\ u_{2i}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1i}^{(1)}(x), u_{1i}^{(2)}(x), \dots, u_{1i}^{(k)}(x) \\ u_{2i}^{(1)}(x), u_{2i}^{(2)}(x), \dots, u_{2i}^{(k)}(x) \end{pmatrix} \equiv u_i(x, \lambda),$$

решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_{1i}^{(j)}(0) = 1, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k), \quad u_{2i}^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k),$$

а вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^\infty \sum_{l=1}^k \{|f_1^{(l)}(x)|^2 + |f_2^{(l)}(x)|^2\} dx < +\infty.$$



Тогда существует симметричная матричная функция распределения

$$\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}(\lambda)\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$$

такая, что формулы

$$F_l(\lambda) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^k \{f_1^{(l)}(x) u_{1i}^{(l)}(x, \lambda) + f_2^{(l)}(x) u_{2i}^{(l)}(x, \lambda)\} dx, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(l)}(x) &= \int_{-\infty}^\infty \sum_{i,j=1}^k \{F_i(\lambda) u_{ij}^{(l)}(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \\ f_2^{(l)}(x) &= \int_{-\infty}^\infty \sum_{i,j=1}^k F_i(\lambda) u_{2j}^{(l)}(x, \lambda) d\sigma_{ij}(\lambda) \end{aligned} \right\}, \quad (l=1, 2, \dots, k), \quad (18)$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения пространства $L^2(0, \infty)$ на пространство $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}$ на L^2 соответственно, при этом интегралы в формулах (17) и (18) сходятся в смысле метрики в $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}$ и L^2 соответственно и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^k \{|f_1^{(l)}(x)|^2 + |f_2^{(l)}(x)|^2\} dx = \int_{-\infty}^\infty \sum_{i,j=1}^k F_i(\lambda) F_j(\lambda) d\sigma_{ij}(\lambda).$$

В заключение искренне благодарю Б. М. Левитана за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍԻԱՆ

ԹԵՄԱԴԻՐ ԴԻՐԱԿԻ ԲԵՂԻԱՆԳԱՅԳՈՒԾ ՍԻՍԿԵԻՐԻ ՍԵՓԻԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՐՔԱՆ ԻՄԱՍԻՆ

Ցույց է տրվում, որ (1) + (2) + (3) խնդրի (տես հիմնական տեքստում) սեփական ֆունկցիաների սխտեմը լրիվ է $L^2(0, \pi)$ դասում: Հոդվածում բերված է այդ թեորեմի առաջին թեորեմը նաև $L^2(0, \infty)$ դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. Ч. Титчмарш, Quart. Journ. Math. 13 (1942), 1—10. ² Э. Ч. Титчмарш, Proc. London Math. Soc. (3), 11 (1961), 159—168. ³ Б. М. Левитан, Приложение 1 к книге Э. Ч. Титчмарша—Разложение по собственным функциям, т. 1. Изд. ИЛ, М., 1960. ⁴ Э. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Шагинян

Исследование деформационных свойств строительных
 материалов для целей моделирования

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 1/XI 1965)

Согласно теории А. Г. Назарова о механическом подобии твердых деформируемых тел ⁽¹⁾ множители подобия должны быть равными

$$\beta = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (1); \quad \gamma = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (2); \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{E'}{E} \quad (3),$$

где σ' , σ — напряжения; ε' , ε — относительные деформации; E' , E — модули упругости (соответственно для модели и оригинала).

Из (1—2) следует, что β и γ могут быть приняты любые только с обязательным условием выполнения (3). Это требование относительно легко выполнимо в случаях, когда материал модели и оригинала идеально упругие, иначе говоря, когда их индикаторные диаграммы σ , ε прямолинейны. Однако преобладающее большинство строительных материалов, являясь упругопластичными материалами, имеют криволинейные индикаторные диаграммы. Такое положение обязывает исследователей, прежде чем заняться испытанием строительных конструкций с помощью моделей, проводить специальные исследования для разработки практической методики моделирования конструкций из реальных и доступных материалов.

Решение этой задачи связано прежде всего с исследованием деформационных свойств материалов и определением связи между σ и ε .

Изучением деформационных свойств бетонов и других строительных материалов начали заниматься относительно давно. В частности, аппроксимацией индикаторных диаграмм бетонов и кладки занимались: Бах, Шреер, Я. М. Столяров, Л. И. Онищик, Г. Д. Цискрели, С. А. Семенцов и другие ⁽²⁻⁵⁾. Особо следует отметить работу В. И. Мурашева⁽⁶⁾, в которой рассмотрен бетон как упругопластичный материал и предложена для определения деформаций следующая формула:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} = \frac{\sigma}{E_0(1 - \lambda)}, \quad (4)$$

где $E_1 = E_0(1 - \lambda)$ — модуль деформаций; E_0 — модуль упругости;

$\lambda = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}$ — коэффициент пластичности; ε_n — пластические деформации;

ε_y — упругие деформации; $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_n$ — общая деформация.

Как видно из (4), для аппроксимации индикаторной диаграммы необходимо с помощью опытных данных определить два параметра E_0 и λ . Из этих двух величин наиболее изучен модуль упругости E_0 . Что касается второго параметра, то на сегодня можно сказать, что величина λ качественно зависит от ряда факторов: вида материала, его прочности, величины напряжения, вида напряженного состояния, условий хранения, скорости и длительности загрузки и др. Теоретически λ может меняться в пределах $0 \leq \lambda \leq 1$. При $\lambda = 0$ материал идеально упругий, а при $\lambda = 1$ — идеально пластичный. На основании теоретических соображений, а также анализа результатов экспериментов автор предложения сузил указанный интервал и установил вероятные пределы только для обычного тяжелого бетона при сухом хранении $0,5 \leq \lambda \leq 0,8$.

Рассматриваемое предложение выгодно отличается от всех предыдущих и обладает следующими преимуществами: зависимость (4), установленная на основе физических свойств материала, включает в себя только такие параметры, которые имеют физическое истолкование. Эта формула применима для различных напряженных состояний (сжатие, растяжение, изгиб и т. д.) и для разных материалов как при кратковременной, так и длительной нагрузках (¹). Они имеют весьма простой вид и удобны для применения при решении широкого круга задач. Однако остается еще не исследованным важный участок рассматриваемого предложения, касающегося зависимости λ от указанных выше факторов для различных материалов.

На основании анализа результатов наших экспериментов, связанных с опытно-теоретическим исследованием жесткости легкого железобетона, мы заметили, что величину коэффициента пластичности λ можно принять прямо пропорциональной напряжению σ и обратно пропорциональной призмочной прочности $R_{пр}$. Имея в виду это положение, можем описать аналитическую связь коэффициента пластичности λ с относительным напряжением $\frac{\sigma}{R_{пр}}$ простой линейной зависимостью:

$$\lambda = \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}} \quad (5)$$

Принимая (5) и имея в виду (4), получим:

$$\text{коэффициент упругости } \nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} = \frac{E_1}{E_0} = 1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}}, \quad (6)$$

$$\text{модуль пластичности } E_n = E_0 \lambda = E_0 - E_1 = E_0 \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}} = C_{пр} \sigma, \quad (7)$$

модуль деформаций (по хорде)

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E_0 \nu = E_0 \left(1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}}\right) = E_0 - C_{пр} \sigma, \quad (8)$$

модуль деформаций (по касательной)

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 \left(1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}}\right)^2 = E_1 \nu = E_0 \nu^2. \quad (9)$$

Следовательно, для аппроксимации индикаторной диаграммы будем иметь из (8) следующее выражение:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 \left(1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}}\right)} = \frac{\sigma}{E_0 - C_{пр} \sigma}, \quad (10)$$

или в относительных координатах:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\sigma}{R_{пр}}}{C_y \left(1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{пр}}\right)} = \frac{\frac{\sigma}{R_{пр}}}{C_y - C_{пр} \frac{\sigma}{R_{пр}}}. \quad (11)$$

Тот же самый результат можно получить с помощью интеграла

$$\varepsilon = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{E}, \text{ где } E \text{ берется по (9).}$$

В выражениях (5—11) приняты следующие обозначения: $R_{пр}$ — переменная прочность; $C_y = \frac{E_0}{R_{пр}}$ — относительный модуль упругости;

$C_{пр} = \frac{E_{пр}}{R_{пр}} = \frac{E_0 \lambda_p}{R_{пр}} = C_y \lambda_p$ — относительный модуль пластичности при разрушении; λ_p — коэффициент пластичности при разрушении, который равен $\lambda_p = \frac{C_{пр} R_{пр}}{E_0} = \frac{C_{пр}}{C_y}$.

Как видно из (10) и (11), два параметра, а именно: $C_{пр}$ и E_0 или $C_{пр}$ и C_y определяются по данным эксперимента. Наиболее близкую аппроксимацию индикаторной диаграммы можно получить с помощью способа наименьших квадратов.

Для проверки наших предложений нами были подвергнуты обработке результаты испытаний 242 образцов из различных строительных материалов.

Наряду с результатами наших экспериментов мы подвергли обработке данные опытов других авторов. При этом аппроксимировались как результаты испытаний отдельных образцов, так и средние данные по пробам, состоящим из нескольких образцов-близнецов. Результаты этой обработки показали полное соответствие величин модулей деформаций, а также самих деформаций, полученных из опытов и

по формулам (8, 10, 11). Среднеквадратичное отклонение для всех 242 опытов в целом составляет 3,3% (табл. 1).

Анализ полученных нами результатов показывает, что величина коэффициента пластичности при разрушении λ_p зависит от вида материала, условий хранения, вида напряженного состояния и не зависит от прочности материала. Обобщая данные табл. 1, можно рекомендовать в случае центрального сжатия и сухого хранения следующие округленные величины λ_p : легкий бетон на естественных заполнителях — 0,4; обычный тяжелый бетон и легкий бетон на искусственных заполнителях — 0,6; каменная кладка из естественных и искусственных камней — 0,6. В случае центрального растяжения λ_p примерно в три раза меньше, чем при центральном сжатии. В случае растяжения при изгибе величина λ_p приближается к 0,5. Влажное хранение уменьшает величину λ_p около двух раз.

Попытаемся теперь, на основе результатов наших исследований деформационных свойств строительных материалов, высказать некоторые соображения по поводу моделирования конструкций из упругопластичных материалов.

Предположим, что криволинейные индикаторные диаграммы материалов модели и оригинала построены в относительных координатах $\frac{\sigma'}{R_{np}}$, ϵ' и $\frac{\sigma}{R_{np}}$, ϵ . Рассмотрим эти две кривые по точкам с одинаковыми относительными напряжениями

$$\frac{\sigma'}{R_{np}} = \frac{\sigma}{R_{np}}. \quad (12)$$

На основании (8 и 12) можем записать:

$$E'_1 = E'_0 \left(1 - \lambda'_p \frac{\sigma}{R_{np}} \right); \quad E_1 = E_0 \left(1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{np}} \right). \quad (13)$$

Заменяя в (3) E' , E модулями деформаций E'_1 , E_1 получим:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{E'_0}{E_0} \cdot \frac{1 - \lambda'_p \frac{\sigma}{R_{np}}}{1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{np}}}. \quad (14)$$

Из (12 и 1) следует, что

$$\beta = \frac{R'_{np}}{R_{np}}. \quad (15)$$

Подставляя последнее значение β в (14), получим:

$$\gamma = \frac{C_y}{C_y'} m, \quad (16)$$

где

$$C_y = \frac{E_0}{R_{np}}; \quad C_y' = \frac{E'_0}{R'_{np}}; \quad m = \frac{1 - \lambda_p \frac{\sigma}{R_{np}}}{1 - \lambda'_p \frac{\sigma}{R_{np}}}. \quad (17)$$

Подставляя значения C_y , C_y^* в (16) и имея в виду (15), получим:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{E_0'}{mE_0}. \quad (18)$$

Итак для моделирования упругопластичных материалов имеем:

$$\beta = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{R_{np}^*}{R_{np}} \quad (19); \quad \gamma = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{C_y}{C_y^*} m; \quad (20) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{E_0'}{mE_0}, \quad (21)$$

где C_y , C_y^* — относительные модули упругости, m — коэффициент, учитывающий пластические свойства материалов модели и оригинала, величины которых можно найти с помощью (17).

Анализируя полученные зависимости, можно отметить, что при решении практических задач моделирования будем иметь следующие случаи.

Случай 1. Когда модель и оригинал осуществлены из упругопластичных материалов, имеющие одинаковые пластические свойства. Иначе говоря, когда численные значения $\lambda_p' = \lambda_p$ и, следовательно,

$$m = 1 \text{ и } \gamma = \frac{C_y}{C_y^*}. \quad (22)$$

В этом случае с помощью множителя подобия (22) индикаторную кривую деформаций оригинала, во всем интервале напряжений от 0 до R_{np} , можно с абсолютной точностью преобразовать индикаторную кривую модели, и наоборот.

Случай 2. Материалы модели и оригинала упругопластичны и обладают разными пластическими свойствами: $\lambda_p' \neq \lambda_p$. Наряду с этим ставится требование рассмотреть индикаторные кривые в целом или их определенные части.

Как видно из (17), при $\lambda_p' \neq \lambda_p$ величина m переменная, с колебанием от $m = 1$ при $\frac{\sigma}{R_{np}} = 0$, до $m = \frac{1 - \lambda_p}{1 - \lambda_p'}$ при $\frac{\sigma}{R_{np}} = 1$. Следова-

тельно в этом случае точное преобразование индикаторной кривой деформации модели в кривую оригинала не удастся. Для этого случая мы предлагаем следующий способ приближенного моделирования.

Рассмотрим индикаторные кривые модели и оригинала в интервале относительных напряжений $0 \leq \frac{\sigma}{R_{np}} \leq \left(\frac{\sigma}{R_{np}}\right)$.

Согласно (17) для крайних значений относительных напряжений будем иметь:

$$\bar{m}_0 = 1 \quad \text{и} \quad \bar{m}_1 = \frac{1 - \lambda_p \left(\frac{\sigma}{R_{np}}\right)}{1 - \lambda_p' \left(\frac{\sigma}{R_{np}}\right)}.$$

Таблица 1

№№ п.п.	Вид материала*	Вид испытаний	Размеры об- разцов в см	Количество		Источник эксперимен- тальных данных	λ_p	Среднеквад- ратичное от- клонение в %
				проб.	образ- цов			
1	Тяжелый бетон на гравии	Центральное сжатие	10×10×32	6	14	Автора	0,60	3,3
2	Легкий бетон на туфе		12×12×60	6	16	"	0,42	3,0
3	Легкий бетон на литондной пемзе		10×10×40	6	18	Худовердяна**	0,44	2,7
4	То же, при влажном хранении		10×10×40	6	18	"	0,22	
5	Легкий бетон на керамзите		15×15×45	4	4	Симонова (°)	0,60	4,7
6	Тяжелый бетон		—	14	42	Мерша, Баха, Залигера, Семенцова, Котова (°)	0,62	3,0
7	Шлакобетон	растяжение	—	7	21	Семенцова (°)	0,63	3,8
8	Кладка мидис		50×70×125	8	25	Автора	0,70	5,1
9	Каменная кладка		—	9	46	Немецкие, американские, ЦНИИСК (°)	0,67	4,8
10	Легкий бетон на туфе		10×10×60	5	23	Автора	0,55	2,9
11	Дюралюминий		8×0,9×25	1	3	***	0,16	0,6
12	Легкий бетон на туфе	Растяжение при изгибе	16×25×240	6	12	Автора	0,50	3,0
Всего				78	242		Среднее	3,3

* Все образцы, за исключением п. 4 таблицы, хранились в воздушно сухих условиях.

** Данные опытов взяты из отчета АИСМ „Определение модуля упругости бетона на литондной пемзе“, Ереван, 1957

*** Опыты проведены в ИГИС В. Л. Мнацаканяном,

Среднее значение величины m будет:

$$m = \frac{1 - 0,5 \left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right) (\lambda'_p + \lambda_p)}{1 - \lambda'_p \left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right)}, \quad (23)$$

где $\left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right) \leq 1$ верхний предел участка рассматриваемых кривых.

Если проставить в (23) условия 1 случая ($\lambda'_p = \lambda_p$), то получим $m = 1$. Тот же результат будем иметь и в случае, когда материалы модели и оригинала упругие ($\lambda'_p = \lambda_p = 0$). Следовательно, при определении m можно пользоваться (23) в любом случае.

Изложенное выше дает нам основание рекомендовать для пользования при моделировании конструкций следующие зависимости:

$$\beta = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{R'_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}}}; \quad \gamma = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{C'_y}{C_y} m; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{E'_0}{m E_0},$$

где

$$m = \frac{1 - 0,5 \left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right) (\lambda'_p + \lambda_p)}{1 - \lambda'_p \frac{\sigma}{R_{\text{пр}}}}.$$

Последние являются общими и позволяют моделировать любые материалы и в любой комбинации пары материалов.

Как показали пробные подсчеты, приближенное моделирование строительных конструкций с применением доступных материалов имеет достаточную точность для решения практических задач. Например, при моделировании обычного тяжелого бетона ($\lambda_p = 0,6$), легким бетоном на естественных заполнителях ($\lambda'_p = 0,4$), ошибки составляют в среднем 4% при $\left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right) = 0,6$ и 10% при $\left(\frac{\sigma}{R_{\text{пр}}} \right) = 1$.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

И. А. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Մոդելացման նպատակով շինարարական նյութերի դեֆորմացիոն հասկարյունների ուսումնասիրությունը

Հեղինակի կողմից առաջարկված է շինարարական նյութերի ինդիկատորային դիագրամների մոտարկման մեթոդիկա, հաշվի առնելով նրանց առաձգական և պլաստիկ հատկությունները: Ստացված է մի շարք նյութերի պլաստիկ գործակցի կոնկրետ արժեքներ 242 նմուշների փորձարկման արդյունքների մշակումը ցույց տվեց փորձի և տեսականորեն ստացված դեֆորմացիաների լրիվ համընկնում: Ստացված արդյունքների հիման վրա առաջարկվում է ցանկացած նյութերից մոդելացման նոր ձև:

- ¹ А. Г. Назаров, О механическом подобии твердых деформируемых тел (к теории моделирования). Ереван, 1965.
- ² Я. М. Столяров, Теория железобетона на экспериментальной основе, М., 1934.
- ³ Л. И. Онищик, Прочность и устойчивость каменных конструкций, М., 1937.
- ⁴ Г. Д. Цискрели, Исследование деформативных свойств на сжатие обычных и легких бетонов. Труды Тбилисского института жел. дор. транспорта, вып. 22, Тбилиси, 1950.
- ⁵ С. А. Семенов, О методе подбора логарифмической зависимости между напряжением и деформациями по экспериментальным данным, Прочность и устойчивость крупнопанельных конструкций, М., 1962.
- ⁶ В. И. Мурашев, Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона, М., 1950.
- ⁷ С. А. Шагинян, Опыт-но-теоретическое исследование жесткости легкого железобетона, Душанбе, 1958.
- ⁸ М. З. Симонов, Бетон и железобетон на пористых заполнителях, М., 1955.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Карапетян

Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от размеров заполнителя

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 12/VII 1965)

В работе приводятся результаты исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от размеров заполнителя бетона.

Исследования были выполнены над тремя составами шлакобетонов с крупностью заполнителя до 5, 15 и 30 мм. Заполнители были получены путем дробления вулканического шлака Аванского месторождения (г. Ереван). В качестве вяжущего был применен портландцемент Ара-ратского завода, активностью $R_{ц}=560\text{кг/см}^2$. Составы бетонов приведе-ны в табл. 1.

Таблица 1

Составы бетонов

№ составов	Наибольшая крупность заполнителя в мм	Состав бе- тона по весу	Расход материалов на 1 м³ бетона в кг				$\frac{В}{Ц}$	γ_b в т/м³
			цемент	песок	щебень	вода		
1	5	1:3,97	317	1261	—	396	1,25	1,974
2	15	1:2,37:2,81	268	635	760	323	1,20	1,986
3	30	1:2,38:3,14	261	621	820	309	1,18	2,011

Опыты были поставлены на призматических образцах и восьмерках, изготовленных в вертикальных и горизонтальных формах (1-7). Призмы и восьмерки имели сечение 10X10 см. Высота призм составляла 40 и 60 см, а восьмерок 60 см.

Всего из всех составов бетонов были изготовлены 55 призм и 55 восьмерок, включающих равное количество образцов для испытания перпендикулярно и параллельно слоям укладки бетона. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на виброплощадке при продолжительности вибрации 30 секунд.

Для исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от размеров заполнителя под дли-тельную нагрузку, в возрасте 28 дней, были установлены 17 призм и 17 восьмерок. Из каждого состава бетона образцы загружались как пер-

пендикулярно, так и параллельно слоям укладки бетона. Напряжение для всех призм составляло 30 кг/см^2 , а для восьмерок— 4 кг/см^2 . Параллельно на аналогичных 36 образцах-близнецах определялись усадочные деформации бетонов.

В процессе длительных опытов образцы находились в помещении, где температура $T = 18 \pm 4^\circ\text{C}$, а относительная влажность $P = 68 \pm 10\%$.

Результаты испытания кубиков размерами $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$ и призм $10 \times 10 \times 40 \text{ см}$ в 28-дневном возрасте приведены в табл. 2.

Таблица 2

Влияние анизотропии на прочность бетона при сжатии в зависимости от размеров заполнителя

№ составов	Наибольшая крупность заполнителя в мм	Прочностные характеристики бетонов, когда направление сжимающей силы по отношению к слоям бетона						$\frac{R_{\text{пр.}}'}{R_{\text{пр.}}}$
		перпендикулярно			параллельно			
		R в кг/см ²	$R_{\text{пр.}}$ в кг/см ²	$\frac{R_{\text{пр.}}}{R}$	R' в кг/см ²	$R_{\text{пр.}}'$ в кг/см ²	$\frac{R_{\text{пр.}}'}{R'}$	
1	5	84	87	1,04	95	85	0,90	0,97
2	15	140	99	0,71	143	115	0,80	1,16
3	30	150	119	0,79	151	106	0,70	0,90

В табл. 2 обращают на себя внимание низкие показатели кубиковых и призмных прочностей мелкозернистого бетона (состав № 1). Несмотря на большой расход цемента (на 20%), прочностные показатели получились заметно меньше, чем в случае бетонов остальных двух составов.

Как видно из табл. 2, с увеличением крупности заполнителя кубиковые и призмные прочности увеличиваются. Исключение составляет только призмная прочность бетона состава № 3 по испытаниям образцов параллельно слоям, которая по неизвестным причинам получилась меньше, чем это должно было быть, исходя из общей закономерности зависимости прочности от крупности заполнителя и анизотропии бетона. Поэтому, если не принять во внимание эти данные, можно заметить, что с увеличением крупности заполнителя отношение $\frac{R'_{\text{пр.}}}{R_{\text{пр.}}}$ возрастает. Последнее означает, что с увеличением размеров заполнителя влияние анизотропии на призмную прочность увеличивается.

На фиг. 1 представлены кривые ползучести трех исследуемых составов бетонов при сжатии, где во всех случаях кривые ползучести призм, нагруженных перпендикулярно слоям, расположились выше кривых ползучести призм, нагруженных параллельно слоям. Эти опыты еще раз показывают, какое большое влияние оказывает анизотропия на ползучесть бетона при сжатии.

Для того чтобы составить более ясное представление о влиянии анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от крупности заполнителя, обратимся к табл. 3.

Рассматривая данные табл. 3, необходимо обратить внимание на существенное уменьшение ползучести с увеличением крупности заполнителя. Отношение ползучести бетона состава № 1 к ползучести бетона состава № 2 по испытаниям призм перпендикулярно слоям составляет 1,85, а по испытаниям призм параллельно слоям—2,2. Однако дальней-

Таблица 3
Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии в зависимости от крупности заполнителя

№ составов	Наибольший размер заполнителя в мм	Ползучесть при $t=180$ дней, когда направление сжимающей силы по отношению к слоям бетона		$\frac{\epsilon_{\text{п}}}{\epsilon_{\text{п}}'}$
		перпенд. ($\epsilon_{\text{п}} \times 10^5$)	парал. ($\epsilon_{\text{п}}' \times 10^5$)	
1	5	161	132	1,22
2	15	87	60	1,45
3	30	85	70	1,21

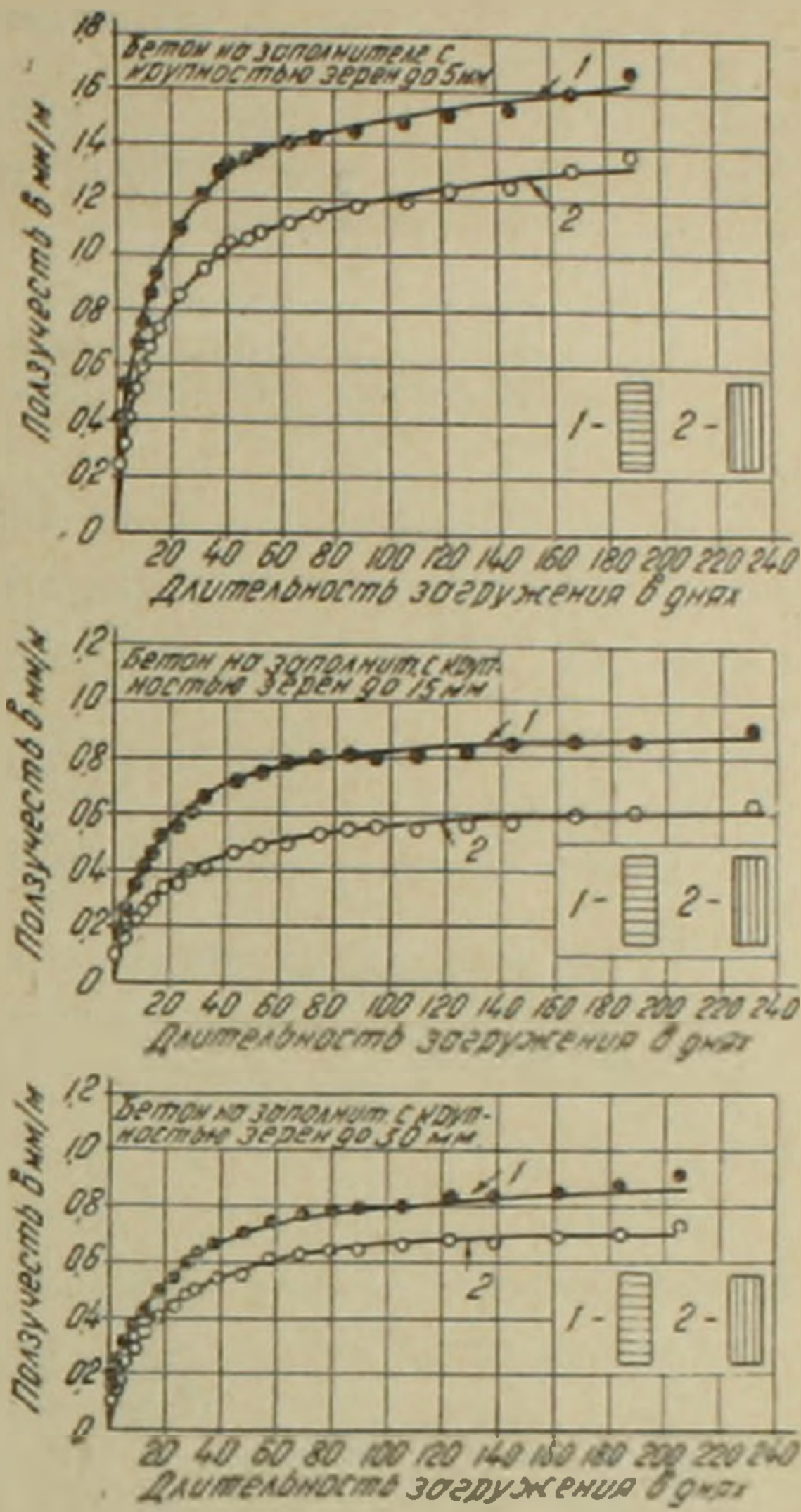
шее увеличение крупности заполнителя как будто уже не играет существенной роли в уменьшении ползучести бетона.

В табл. 3 наблюдается несоответствие ползучести призм из бетона состава № 3, испытанных параллельно слоям, общей закономерности влияния размеров заполнителя на ползучесть. Ползучесть этих призм, несомненно, должна была быть меньше ползучести аналогичных призм из бетона состава № 2, где наибольшая крупность заполнителя составляла 15 мм. Фактически по неизвестным причинам наблюдается обратное явление. Весьма возможно, что это является следствием того, что дальнейшее увеличение крупности заполнителя (свыше 15 мм) уже практически не влияет на ползучесть бетона.

Если исходить из данных, относящихся к первым двум составам бетонов, то можно отметить, что с увеличением крупности заполнителя до определенных размеров влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии увеличивается.

В табл. 4 приведены прочностные показатели бетонов при растяжении.

Данные табл. 4 показывают, что с увеличением крупности заполнителя предел прочности бетона на растяжение по испытаниям образцов как перпендикулярно, так и параллельно слоям увеличивается.



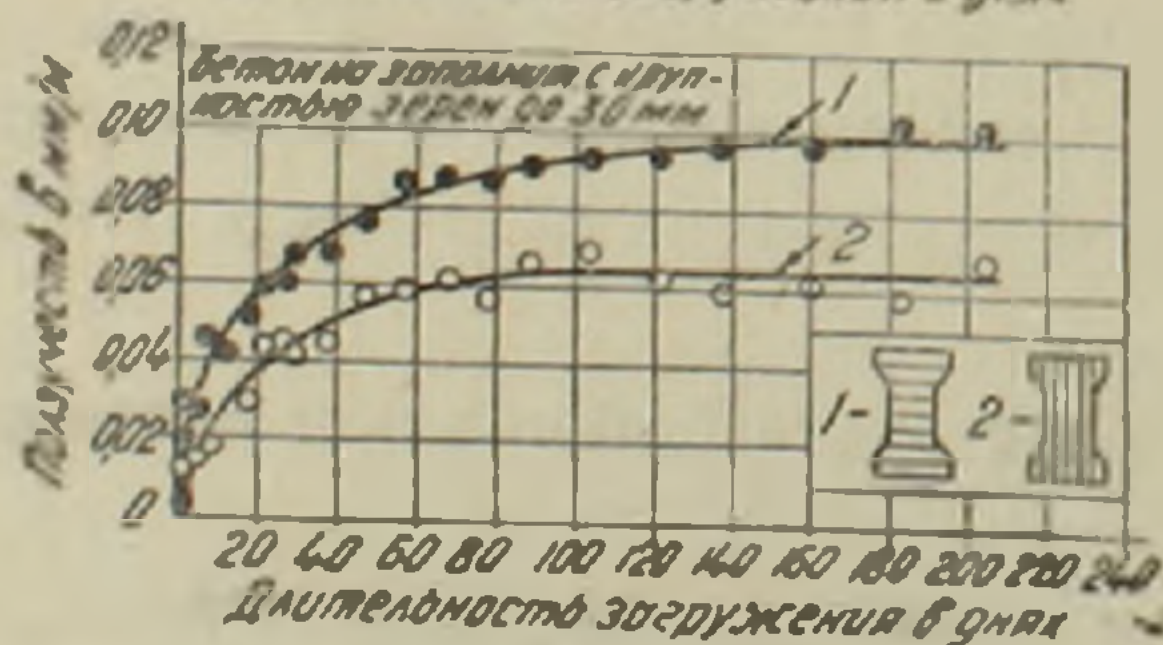
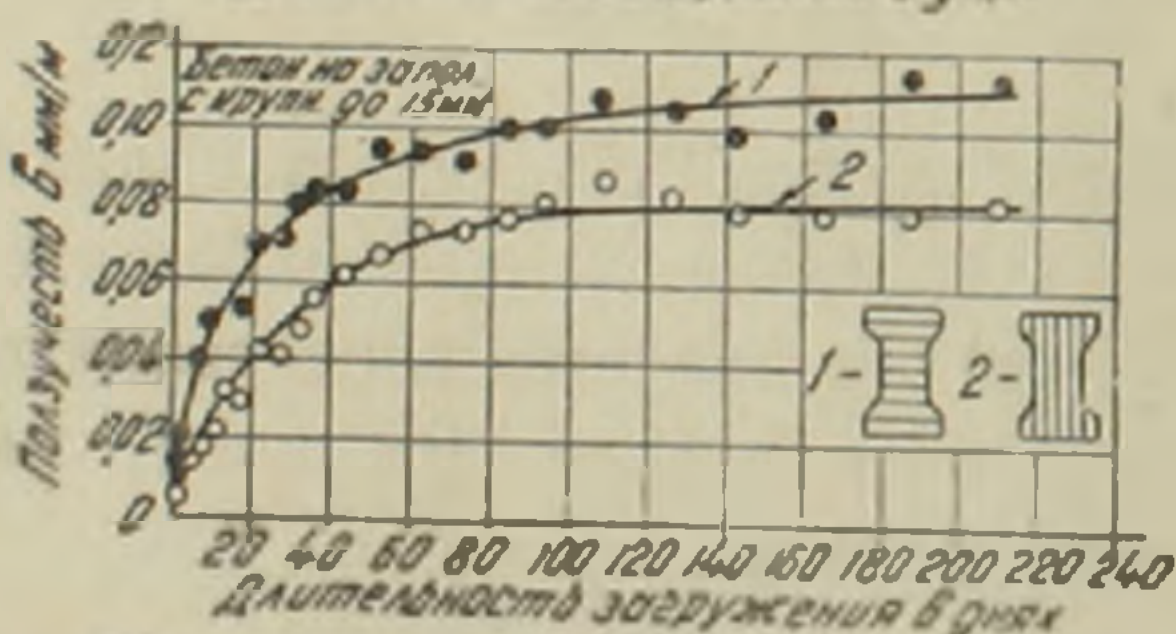
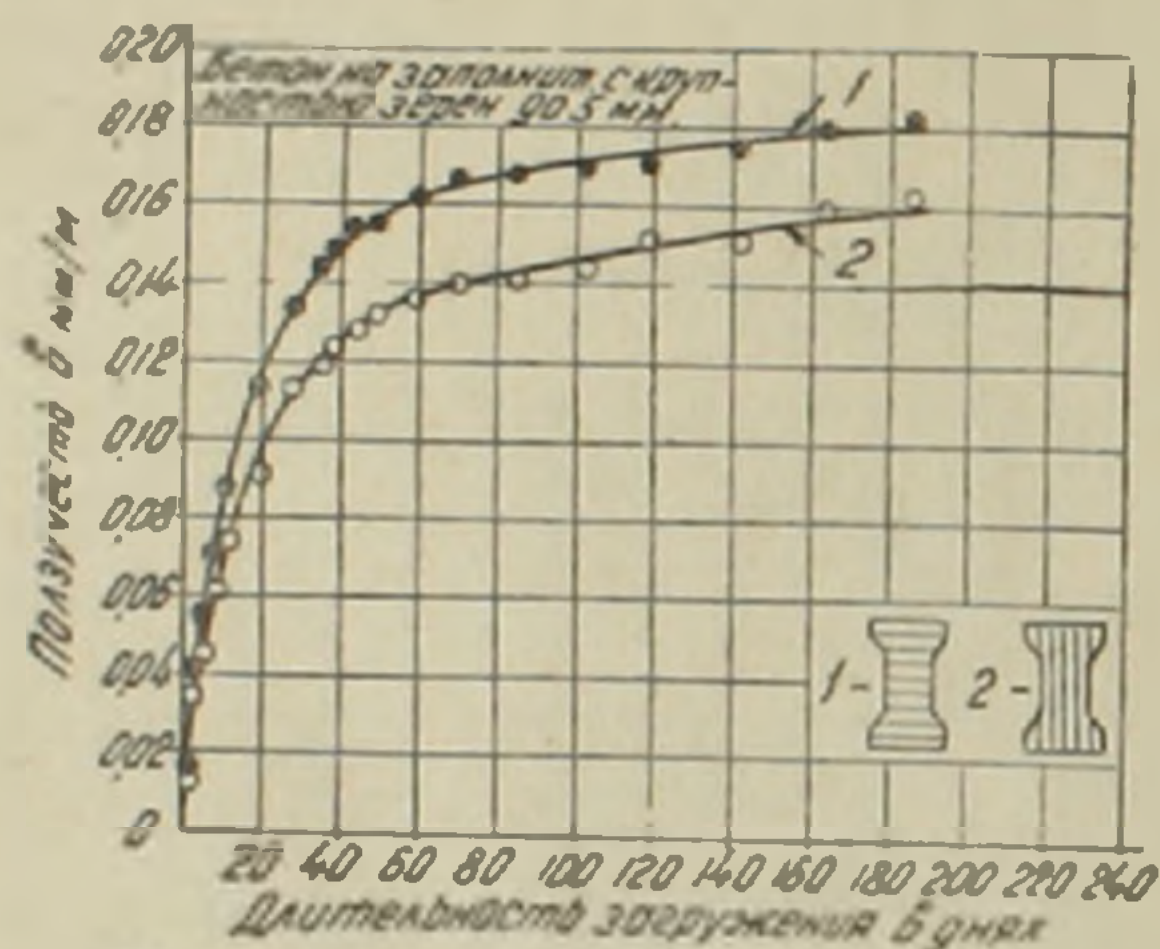
Фиг. 1.

Влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении в зависимости от крупности заполнителя

№ составов	Наибольшая крупность заполнителя в мм	Прочностные характеристики бетонов, когда направление растягивающей силы по отношению к слоям бетона						$\frac{R_p'}{R_p}$
		перпендикулярно			параллельно			
		R в кг/см ²	R_p в кг/см ²	$\frac{R_p}{R}$	R' в кг/см ²	R_p' в кг/см ²	$\frac{R_p'}{R'}$	
1	5	84	8,7	0,104	95	9,8	0,103	1,13
2	15	140	9,0	0,064	143	10,9	0,076	1,21
3	30	150	9,5	0,063	151	11,5	0,077	1,21

Как видно из табл. 4, во всех случаях прочность бетона на растяжение по испытаниям образцов параллельно слоям больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям. Причем их отношение $\left(\frac{R'_p}{R_p}\right)$ с увеличением крупности заполнителя увеличивается.

Таким образом, на основании этих опытов можно заключить, что



Фиг. 2.

влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении с увеличением размеров заполнителя увеличивается.

На фиг. 2 приведены кривые ползучести исследуемых составов бетонов при растяжении по испытаниям образцов перпендикулярно и параллельно слоям. Здесь также мы наблюдаем существенное уменьшение ползучести с увеличением размеров заполнителя. Однако и в этом случае влияние размеров заполнителя на ползучесть чувствительно до определенного размера заполнителя (до 15 мм).

На фиг. 2 все кривые ползучести образцов, испытанных перпендикулярно слоям, расположились выше кривых ползучести образцов, испытанных параллельно слоям. Причем нетрудно заметить, что с увеличением крупности заполнителя расходимость кривых ползучести образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям, увеличивается.

Таким образом, на основании этих опытов с увеличением размеров

заполнителя влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении, так же как при сжатии, увеличивается.

Более наглядное представление о влиянии анизотропии на ползучесть бетона при растяжении, в зависимости от размеров заполнителя, можно получить из данных табл. 5.

В работах (1-2) автором на основании первых исследований была предложена гипотеза, согласно которой анизотропия бетона является следствием внутреннего расслаивания, которое имеет место при его укладке и уплотнении. Справедливость данной гипотезы подтвердилась в многочисленных дальнейших исследованиях (3-7).

При укладке и уплотнении бетона излишняя вода отжимается наверх, часть которой по пути задерживается под частицами заполнителя, образуя множество водных прослоек. В дальнейшем по мере твердения бетона, особенно когда это происходит в условиях невысокой влажности, вода из указанных прослоек испаряется. Степень отрицательного влияния образовавшихся пустот зависит от их расположения. Если внешняя нагрузка направлена перпендикулярно слоям укладки бетона, отрицательное влияние получается наибольшее, так как в этом случае сечение бетонного элемента ослабляется больше. Именно по этой причине призмочная прочность и прочность бетона на растяжение по испытаниям образцов перпендикулярно слоям получается меньше, а деформации больше, чем по испытаниям образцов параллельно слоям.

Исходя из этой гипотезы, можно было заранее предсказать, что с увеличением размеров заполнителя влияние анизотропии должно увеличиваться, так как чем больше размеры заполнителя, тем больше размеры тех дефектов, которые образуются в бетоне под частицами заполнителя благодаря внутреннему расслаиванию.

Таким образом, полученные результаты еще раз подтверждают справедливость указанной гипотезы.

На основании проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы:

1. Анизотропия бетона оказывает существенное влияние на призмочную прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении.
2. Влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении в большой мере зависит от размеров заполнителя бетона. Чем больше размеры заполнителя, тем больше влияние анизотропии.

Таблица 5
Влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении в зависимости от размеров заполнителя

№ составов	Наибольшая крупность запол- нителя в мм	Ползучесть при $t=180$ дней, когда направление растягивающей силы по отношению к слоям бетона		$\frac{\epsilon_{\text{п}}}{\epsilon_{\text{п}}'}$
		перпенд. ($\epsilon_{\text{п}} \times 10^5$)	парал. ($\epsilon_{\text{п}}' \times 10^5$)	
1	5	17,9	15,8	1,13
2	15	10,9	8,2	1,33
3	30	9,9	6,5	1,52

3. Увеличение влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона с увеличением размеров заполнителя обусловлено тем, что чем больше размеры заполнителя, тем больше размеры тех дефектов, которые образуются в бетоне под частицами заполнителя благодаря внутреннему расслаиванию.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բետոնի սողի վրա կախված լցիի չափսերից

Հոդվածը նվիրված է բետոնի սողի վրա անիզոտրոպիայի ազդեցության ուսումնասիրությունը կախված լցանյութի չափսերից:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ անիզոտրոպիան մեծապես ազդում է բետոնի ամրության, դեֆորմատիվ հատկությունների և սողի վրա և այդ ազդեցությունը կապես կախված է բետոնի լցանյութի չափսերից: Որքան մեծ են լցիլի չափսերը, այնքան մեծ է անիզոտրոպիայի ազդեցությունը:

Բետոնի լցիլի չափերի մեծացումից կախված անիզոտրոպիայի ազդեցության մեծացումը պայմանավորված է նրանով, որ որքան մեծ են լցիլի չափսերը, այնքան մեծ են այն դեֆեկտների չափսերը, որոնք առաջանում են լցիլի մասնիկների տակ, բետոնի ներքին շերտայնության հետևանքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Կ. Ս. Կարապետյան, ДАН АрмССР, т. XXIV, № 4, (1957). ² Կ. Ս. Կարապետյան, «Известия АН АрмССР» (серия физ.-мат. наук), т. 10, № 6, (1957). ³ Կ. Ս. Կարապետյան, ДАН АрмССР, т. XXXIV, № 1 (1964). ⁴ Կ. Ս. Կարապետյան, «Известия АН АрмССР» (серия физ.-мат. наук), т. 17, № 4 (1964). ⁵ Կ. Ս. Կարապետյան, «Известия АН АрмССР» (серия физ.-мат. наук), т. 18, № 2, (1965). ⁶ Կ. Ս. Կարապետյան, ДАН АрмССР, т. XI, № 4 (1965). ⁷ Կ. Ս. Կարապետյան, ДАН АрмССР, т. XI, № 5 (1965).

ФИЗИКА

Х. П. Бабаян и Н. А. Марутян

Центральные столкновения ядер космического излучения
с тяжелыми ядрами эмульсии

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 13/VII 1965)

За последние годы уделено значительное внимание изучению взаимодействий энергичных многозарядных частиц космического излучения с ядрами эмульсии. Кроме самостоятельного интереса, а именно исследования механизма взаимодействия первичных космических ядер с ядрами вещества, такие события могут быть хорошим источником нуклон-нуклонных взаимодействий при идентичных условиях, если концепция суперпозиции последних проходит. С этой точки зрения центральные ядро-ядро столкновения более пригодны, так как в таких взаимодействиях меньше влияние непроизводящих нуклонов на угловое распределение вторичных, и с большей точностью можно определить число взаимодействующих нуклонов. Обычно центральные взаимодействия интерпретируются по отсутствию среди вторичных релятивистских частиц осколка налетающего ядра с $Z \geq 2$. Однако нам кажется, что этого условия недостаточно. Действительно, если мы рассмотрим экспериментальный материал, собранный в табл. 1, то заметим, что при одинаковых энергиях (γ всех отобранных случаев $10 \pm 2,5$), даже при отсутствии осколка с $Z \geq 2$, средняя кратность на нуклон, n_s/A , (A — число нуклонов в наиболее распространенном изотопе налетающего ядра) сильно флуктуирует. И довольно трудно представить, что при усреднении по 32 и 23 нуклон-нуклонным взаимодействиям (события №№ 9 и 11, табл. 1) можно получить такие заниженные значения, как 2,5 и 1,4 вместо ~ 9 (⁵). Таким образом, надо предположить, что либо не все нуклоны участвуют во взаимодействии, либо взаимодействие ядра с ядром осуществляется другим механизмом.

Однако, считая предположение о суперпозиции нуклон-нуклонных вполне допустимым, мы отобрали для исследования такие взаимодействия, кратность которых ($n_s \geq 100$) обеспечивает участие всех или почти всех налетающих нуклонов.

Отбор материала проведен в части эмульсионной стопки, экспонированной на корабле спутнике. Отобрано всего 6 столкновений. Характе-

Таблица 1

Центральные столкновения энергичных ($\gamma = 11,0 \pm 2,5$) ядер с тяжелыми ядрами эмульсии (Ag, Br.)

№ п/п	Тип взаимодействия	Z	γ	σ	n_s/A	Авторы
1	30+204 B	5	12,1	0,68	18,5	Рибки (1)
2	10+518 Ca	20	12,4	0,57	13,0	"
3	16+201 F	9	12,7	0,59	10,6	Бабаян (2)
4	15+328 Ca	20	12,5	—	8,2	Жданов (3)
5	20+83 B	5	9,8	0,66	7,5	Рибки (1)
6	26+90 N	7	8,7	0,54	6,4	"
7	16+115 Mg	12	10,3	0,68	4,8	Биксо (4)
8	16+36 B	5	12,2	0,61	3,3	Рибки (1)
9	5+80 S	16	10,5	0,62	2,5	"
10	11+27 C	6	12,1	0,50	2,3	"
11	16+32 Na	11	10,9	0,48	1,4	"

ристики этих взаимодействий даны в табл. 2. Заряд первичных частиц определен по счету δ -электронов (6). Энергии первичных частиц в системе центра масс, γ , определялись по методу Кастаньоли (7).

Среднеквадратичные отклонения определены по формуле

$$\sigma = [(\lg \lg \theta_i - \lg \lg \bar{\theta}_i)^2]^{1/2},$$

где θ_i — пространственный угол между i -той частицей и направлением первичной.

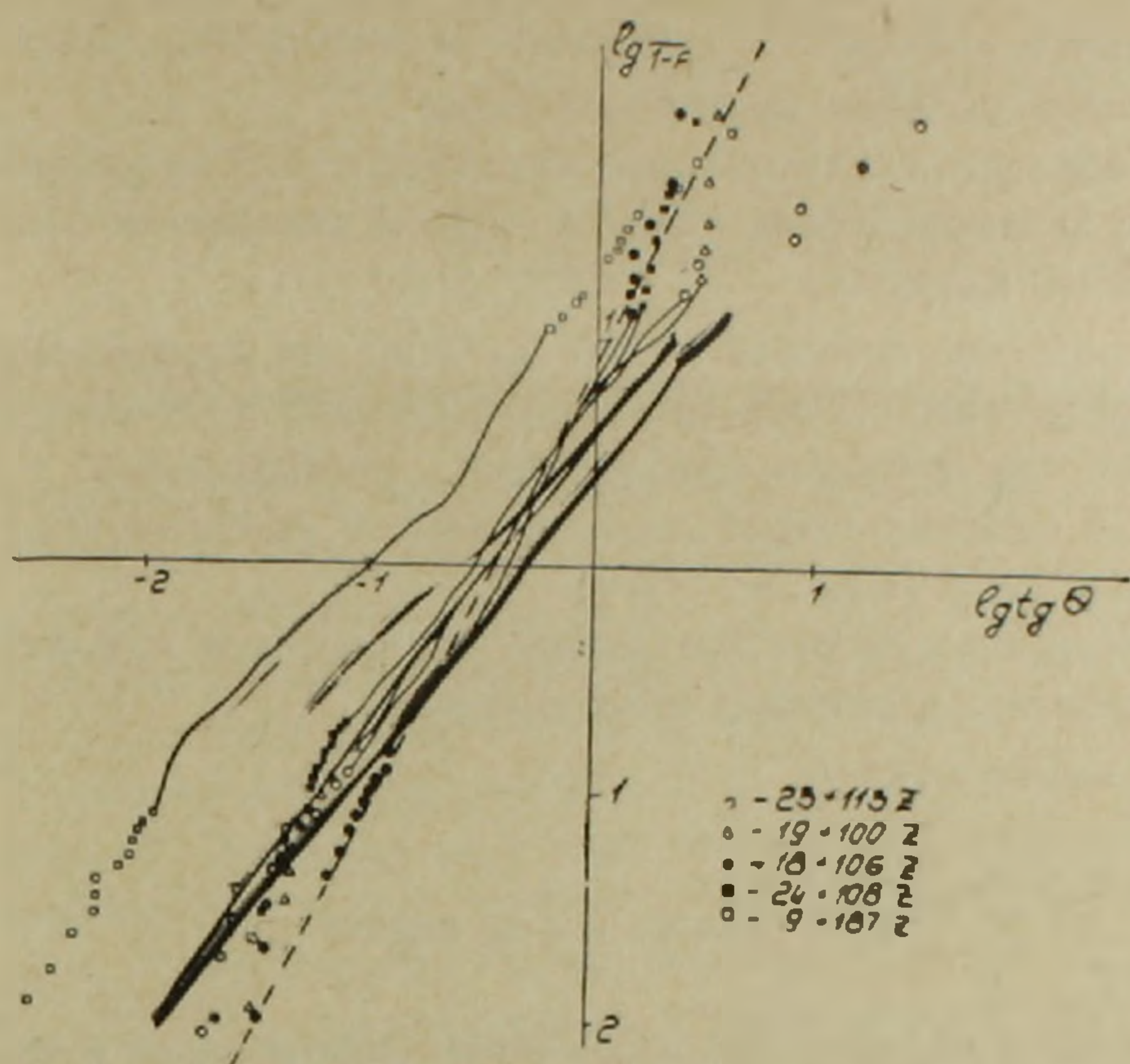
Энергия первичной на нуклон получена по формуле $E = (2\gamma^2 - 1)Mc^2$, где Mc^2 — масса нуклона.

Таблица 2

№ п/п	Тип взаимодействия	Z	γ	σ	n_s/A	E/нуклон (в 10^{10} эв)
1	23+113 Si	14	2,7	0,61	4,0	1,3
2	19+100 P	15	2,3	0,54	3,2	0,9
3	18+106 F	9	2,6	0,39	5,1	1,6
4	24+108 S	16	3,5	0,55	3,4	2,2
5	9+187 Ne	10	9,3	0,65	9,3	16,2
6	16+201 F	9	12,4	0,59	10,6	28,8

Как видно из табл. 2, первые 4 случая относятся к одному и тому же энергетическому интервалу. Средняя энергия этих случаев 15 Бэв/нуклон, а средняя кратность на нуклон ($3,9 \pm 0,7$). Последнее значение хорошо согласуется со значением $\bar{n}_s = 4,4$ для 15 Бэв, n — ядро взаимодействий, полученным при предположении линейной зависи-

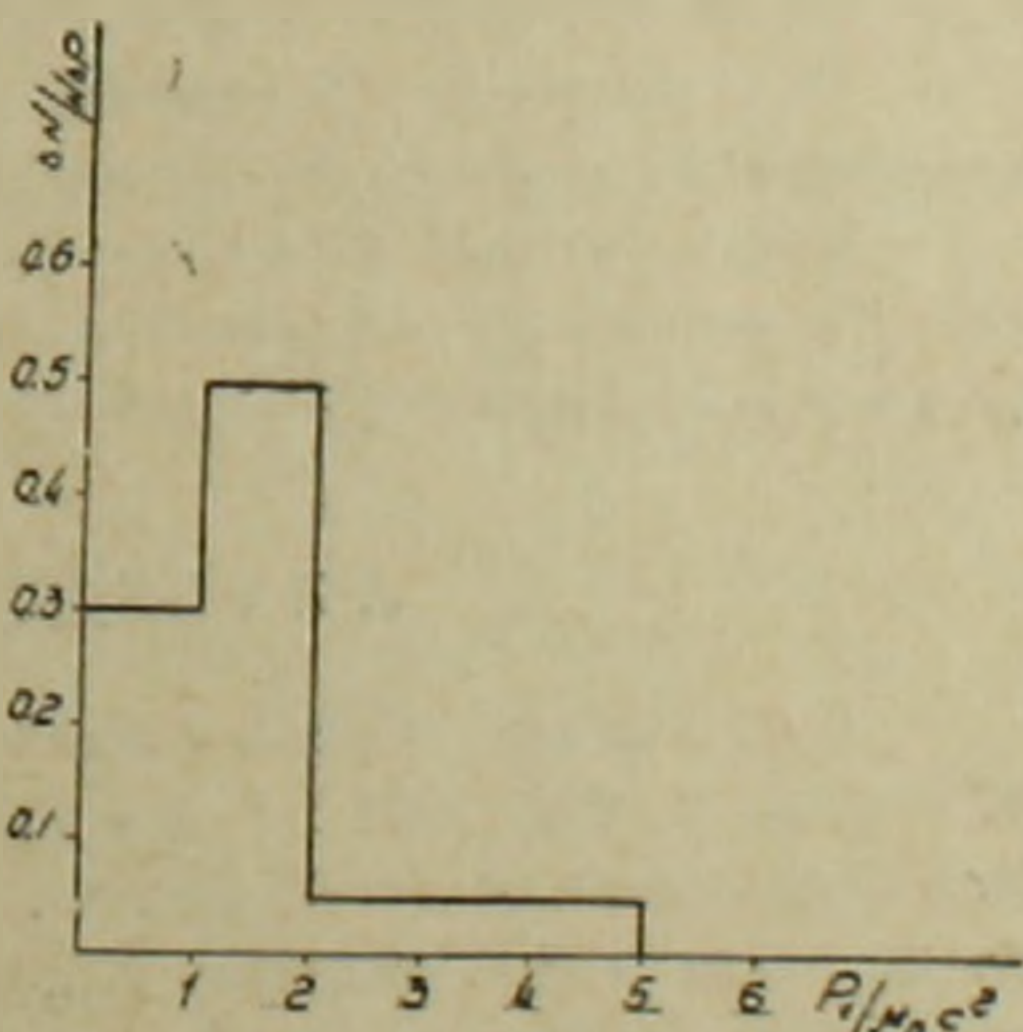
мости n_s от E в области энергий 9—27 Бэв. Среднеквадратичное отклонение изменяется в тех же пределах, что и при n -ядро взаимодействиях.



Фиг. 1. Интегральные угловые распределения исследованных случаев. В центральной части, ввиду большой плотности точек, распределения даны сплошными линиями.

Интегральные угловые распределения этих четырех событий даны на фиг. 1. Как можно видеть, наблюдается совпадение распределений в центральной части с некоторым отклонением в области больших углов. Укажем, что угловое распределение в области малых углов не дает указаний на наличие среди вторичных непронзающих нуклонов. Пунктирная линия соответствует изотропному распределению, экспериментальные распределения близки к нему.

Оценены энергии вторичных частиц, с геометрией следов, позволяющих измерение многократного рассеяния. Определение D_k (второй разности координат, обусловленной кулоновским рассеянием) проведено по отношению вторых и третьих разностей, по формуле $D_k = D [(p_d^2 - p^2)/(p_d^2 - p_k^2)]^{1/2}$ (8), где D — измеренная вторая разность, p_d , p_k и p — отношение третьих разностей ко вторым для ложного, кулоновского и измеренного рассеяний соответственно.



Фиг. 2. Распределение поперечных импульсов.

Для этих частиц определены поперечные импульсы $P_{\perp}$. Среднее значение поперечного импульса оказалось равным 217 Мэв/с, максимальное значение—684 Мэв/с. Распределение $P_{\perp}$ дано на фиг. 2. Наблюдаемое среднее значение $P_{\perp}$ близко к значению, полученному на ускорителе при энергии протонов 9 Бэв.

Таким образом, исследованные характеристики не указывают на то, что процесс взаимодействия ядра с ядром отличен от наложения отдельных нуклон-ядерных.

Последние два события имеют энергии на порядок больше, чем выше рассмотренные. Соответственно, значение n_s/A получены больше. Значения σ в пределах флуктуаций. Интегральное угловое распределение 5 события также дано на фиг. 1 (событие 6 подробно исследовано в работе (³)).

В заключение авторы благодарят сотрудников лаборатории, принимавших участие в осмотре и измерениях.

Физический институт ГКАЭ

Խ. Պ. ԲԱՐԱՅԱՆ Ե Ն. Ա. ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Կոսմիկական ճառագայթման միջուկների կենտրոնական բախումները էմուլսիայի ծանր միջուկների հետ

Ուսումնասիրված են մեծ էներգիա ունեցող միջուկների կենտրոնական բախումները էմուլսիայի ծանր միջուկների հետ: Փորձնական տվյալների (1-ին աղյուսակ) ուսումնասիրության հիման վրա, բացի սովորական ընտրման կրիտերիան կենտրոնական բախումների համար (բախվող միջուկի բեկորի բացակայությունը) անհրաժեշտ ենք համարել փոխադրման մեծ բազմապատիկությունը, n_s :

Ուսումնասիրված են 6 ալյուրի գեպեր ($n_s \geq 100$), որոնց բնորոշումները բերված են 2-րդ աղյուսակում, ընդորոշում չորսը նրանցից ունեն նույն կարգի էներգիա:

Նրանց միջին էներգիան է 15 Бэв/նուկլոն, միջին բազմապատիկությունը մի նուկլոնի համապատասխան հավասար է $3,9 \pm 0,7$: Այս արժեքը համընկնում է $n_s = 4,4$ հետ նուկլոն-միջուկ փոխադրեցության համար: Այդ գեպերի ինտեգրալ անկյունային բաշխումները տրված են նկար 1-ի վրա, նրանք շատ չեն տարբերվում իզոտրոպ բաշխումից:

Գնահատված են 16 երկրորդային մասնիկների էներգիան: Հաշված են նրանց համապատասխանող լայնակի իմպուլսը, բաշխումը տրված է 2-րդ նկարի վրա:

Միջին լայնակի իմպուլսը հավասար է 217 Мэв/с, մաքսիմումը—684 Мэв/с, Ալյուրիսով ուսումնասիրված բնորոշումները չեն ցույց տալիս, որ միջուկ-միջուկ փոխադրման պրոցեսը տարբերվում է նուկլոն-միջուկ փոխադրումների զուգարումից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. Рабики, Nuovo cimento, 28,6, 1437, 1963. ² Х. П. Бабаян, Н. А. Марутян ЖЭТФ 44, 3, 832, 1963. ³ Ден Пхен Су, Г. В. Жданов, М. И. Третьякова, Труды Международной конф. по космическим лучам, т. 1, III, 1960. ⁴ Г. Биксо, Г. Бозока, Ф. Фенивеш и Е. Гомбоши, Nuovo cimento, 20, 4, 662, 1961. ⁵ D. U. Perkins, International conference of theoretical Aspect of very high energy physics phenomena, Geneva, 1961. ⁶ А. А. Локтионов, А. З. Сименос, ПТЭ, 3, 31, 1960. ⁷ К. Кастагнола, Г. Кортини, С. Франчинетти, А. Манфредини, Nuovo cimento, 10, 1539, 1958. ⁸ И. Я. Частников, З. В. Аизон, Ж. С. Такибаев, И. С. Стрельцов, ЖЭТФ, 45, 29, 1963.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. Джрбашян

О законах сохранения в электромагнитной теории

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 2/VII 1965)

В последнее время появились работы (¹⁻³), в которых показывается, что в электромагнитной теории, наряду с законами сохранения энергии, импульса, должны существовать и другие законы сохранения, совместимые с уравнениями Максвелла.

Фельдман (⁴) обобщил результат работы (³) на случай наличия гравитационного поля. Следующий шаг в рассматриваемой области был сделан Ферли (⁵), который показал, что ряд законов сохранения для свободного поля является следствием инвариантности Лагранжиана относительно трансляции. Используя полную группу Лоренца, он же нашел новые законы сохранения.

В настоящей статье для взаимодействующего электромагнитного поля выводятся обусловленные полной неоднородной группой Лоренца все законы сохранения, которые относятся к тензору энергии-импульса.

Оказывается, что эти законы можно выразить с помощью операторов импульса $P_\alpha(u)$ и обобщенного момента $M_{\alpha\beta}\left(z, \frac{\partial}{\partial u}\right)$.

На примере одного класса законов сохранения, с помощью аппарата вторичного квантования, исследуется их физический смысл. Для свободного поля получается, что эти законы эквивалентны постоянству во времени чисел заполнения каждого сорта фотонов.

Рассмотрим выражение для обобщенного тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\nu} A^\sigma(v) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\mu} A^\sigma(v) - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} A^\sigma(v) \right]. \quad (1)$$

Введем обозначение

$$T_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \Lambda x + a; \frac{\partial}{\partial y}, \Sigma y + b\right) = T_{\mu\nu}(\Lambda x + a, \Sigma y + b), \quad (2)$$

из которого следует, что $T_{\mu\nu}(x, x)$ есть обычный тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$. Если под (Λ, a) , (Σ, b) понимать десятипараметрические преобразования, образующие полную неоднородную группу Лоренца, то воспользовавшись уравнениями

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A_\sigma(x) = -j_\sigma(x), \quad (3)$$

вместе с дополнительным условием $g^{\alpha\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu(\Lambda x + a, \Sigma y + b) = -\frac{1}{2} j_\sigma(\Lambda x + a) \frac{\partial}{\partial y^\mu} A^\sigma(\Sigma y + b), \quad (4)$$

откуда, благодаря симметричности T_μ^ν при перестановке аргументов, следует

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_\mu^\nu(\Lambda x + a, \Sigma y + b) = -\frac{1}{2} j_\sigma(\Sigma y + b) \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\sigma(\Lambda x + a). \quad (5)$$

Отметим, что из-за симметричности $T^{\mu\nu}$ относительно μ, ν из выражения (4) следуют также остальные дивергенции при одном фиксированном аргументе.

Теперь напомним явный вид неоднородного преобразования Лоренца

$$x'^\rho = (\Lambda x + a)^\rho = x^\rho + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} (g^{\rho\alpha} x^\beta - g^{\rho\beta} x^\alpha) + a^\rho, \quad (6)$$

где величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ антисимметричны и настолько малы, что их произведениями можно пренебречь.

Если последовательно дифференцировать соотношения (4), (5) по параметрам $\varepsilon^{\alpha\beta}$, a^α , затем, учитывая (6), в окончательном выражении подставить $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_2\alpha_1} = \dots = a_{\alpha_1} = a_{\alpha_2} = \dots = 0$, то в левых частях (4), (5) под дивергенцией получим новые тензоры.

Выполняя аналогичную процедуру также относительно второго аргумента, затем складывая полученные таким образом из (4), (5) соотношения, придем к законам сохранения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[O_{\alpha_1} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\alpha_2} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \dots O_{\alpha_m} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \times \right. \\ & \quad \times O_{\beta_1} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) O_{\beta_2} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \dots \times \\ & \quad \times O_{\beta_n} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) T_\mu^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v \right) \Big]_{z=u=w=v=y=x} = \\ & = -\frac{1}{2} \left\{ O_{\alpha_1} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\alpha_2} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \dots O_{\alpha_m} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\beta_1} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \times \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\times O_{\beta_2} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \cdots O_{\beta_n} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \left[j_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} A^\sigma(v) + \right. \\ \left. + j_\sigma(v) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} A^\sigma(u) \right] \Big|_{z=u=w=v=y=x} \quad (7)$$

Здесь каждый из операторов $O_\alpha \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right)$ может быть оператор импульса $P_\alpha(u) = -i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, или обобщенный оператор момента $M_{\alpha\beta} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) = -i \left(g_{\alpha\rho} z^\rho \frac{\partial}{\partial u^\beta} - g_{\beta\rho} z^\rho \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right)$. Обобщенный тензор $T^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v \right)$ определяется выражением (1). Заметим, что тензор $2i \left[M^{\alpha\beta}(u) T^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \right]_{u=x}$ совпадает с полученным в (5) тензором $T^{\alpha\beta\mu\nu}$.

Наконец, рассмотрим тензор $V_{\mu\nu}(x, y)$, обсуждаемый в работах (1, 2)

$$V_{\mu\nu}(x, y) = F_{\mu\sigma}(x) F^{\sigma}_{\nu}(y) - F^{\sigma}_{\mu}(x) F_{\sigma\nu}(y), \quad (8)$$

где $F^{\star}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ есть дуальный тензора $F_{\mu\nu}$. Используя уравнения Максвелла, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} V^{\mu\nu}(x, y) = -j_\sigma(x) F^{\sigma\mu}(y). \quad (9)$$

Выражения для остальных дивергенций получатся из (9), если учесть симметричность $V^{\mu\nu}(x, y)$ относительно μ, ν и антисимметричность при перестановке x, y . Исходя из (9), придавая x, y приращения a и b и используя примененный выше метод дифференцирования по этим параметрам, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[P_{\alpha_1}(x) P_{\alpha_2}(x) \cdots P_{\alpha_m}(x) P_{\beta_1}(y) P_{\beta_2}(y) \cdots P_{\beta_n}(y) V^{\mu\nu}(x, y) \right]_{y=x} = \\ = \left\{ P_{\alpha_1}(x) P_{\alpha_2}(x) \cdots P_{\alpha_m}(x) P_{\beta_1}(y) P_{\beta_2}(y) \cdots P_{\beta_n}(y) \times \right. \\ \left. \times \left[j_\sigma(y) F^{\sigma\mu}(x) - j_\sigma(x) F^{\sigma\mu}(y) \right] \right\}_{y=x} \quad (10)$$

В случае отсутствия взаимодействия $j_\sigma = 0$ и (10) совпадает с результатом работы (2). Отметим, что законы сохранения, получаемые из рассмотрения моментов $T^{\mu\nu}$ и $V^{\mu\nu}$, ничего нового не дают, поскольку, с учетом симметрии относительно μ, ν , следуют из (7) и (10).

В заключение исследуем физический смысл законов сохранения с помощью аппарата вторичного квантования ⁽⁶⁾ на примере соотношения Моргана для свободного поля¹.

Легко убедиться, что сохраняющаяся величина

$$-i \int \left[P_{a_1}(x) P_{a_1}(x) \cdots P_{a_m}(x) T_{\mu}{}^4(x, y) \right]_{y=x} dr$$

равна

$$\sum_{k, \lambda} k_{a_1} k_{a_2} \cdots k_{a_{m+1}} \frac{1}{2} \left[c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ + (-1)^m c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} \right].$$

Откуда, при четном $m = 2l$, следует

$$\sum_{k, \lambda=1,2} k_{a_1} k_{a_2} \cdots k_{a_{2l+1}} N_{k\lambda} = \text{const.} \quad (11)$$

Из (11) следует, что для свободного поля число фотонов $N_k = N_{k_1} + N_{k_2}$ с четырехмерным волновым вектором k постоянно.

Действительно, пусть в начальном состоянии имелось n сортов фотонов (n — число отличных от нуля N_k). Для простоты рассмотрим первые n уравнений (11), относящихся только к четвертой компоненте: $a_1 = a_2 = \cdots a_{2n-1} = 4$, $k_4 = ik_0$. Энергию фотона k_0 мы обозначим через k , а индексы при k ниже будут означать, что рассматриваются энергии разных фотонов.

$$k_1 N_{k_1} + k_2 N_{k_2} + \cdots + k_n N_{k_n} = \text{const}^{(1)}.$$

$$k_1^3 N_{k_1} + k_2^3 N_{k_2} + \cdots + k_n^3 N_{k_n} = \text{const}^{(2)}. \quad (12)$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$k_1^{2n-1} N_{k_1} + k_2^{2n-1} N_{k_2} + \cdots + k_n^{2n-1} N_{k_n} = \text{const}^{(n)}.$$

Определитель D системы (12) пропорционален определителю Вандермонда

$$D = k_1 k_2 \cdots k_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{2n-2} & k_2^{2n-2} & \cdots & k_n^{2n-2} \end{vmatrix} = k_1 k_2 \cdots k_n \prod_{n>l>m>1} (k_l^2 - k_m^2). \quad (13)$$

Так как для отличных от нуля и друг друга k согласно (13) $D \neq 0$, то система (12) имеет определенное решение. N_k однозначно выражаются через сохраняющиеся величины.

Предположение существования решения N_k влечет за собой совместимость остальных уравнений с рассмотренными в (12).

В заключение автор благодарит А. Ц. Амасуни, И. И. Гольдмана и Р. В. Тевикяна за интерес к работе, обсуждение и полезные советы.

Физический институт ГКАЭ

¹ Частный случай соотношений (7).

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՔԵՄԻՍԻՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Փոխադրող էլեկտրամագնիսական դաշտի համար դուրս են բերված Լորենցի ոչ հա-
մաձև խմբով պայմանավորված բոլոր պահպանման օրենքները, որոնք վերաբերում են
էներգիա-իմպուլսի տենզորին:

Պարզվում է, որ այդ օրենքները կարելի է արտահայտել իմպուլսի $P(u)$ և ընդհան-
րացրած մոմենտի $M_{\alpha\lambda}(z, \frac{\partial}{\partial u})$ օպերատորների միջոցով:

Պահպանման օրենքների մեկ դասի օրինակով, օգտագործելով երկրորդային քվան-
տացման ապարատը, հետազոտվում է նրանց ֆիզիկական իմաստը: Ազատ դաշտի համար
ստացվում է, որ այդ օրենքները համարժեք են ֆոտոնների յուրաքանչյուր տեսակի լրաց-
ման թվերի հաստատունությանը ժամանակի ընթացքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. М. Липкин, Journal of Math. Phys., 5, 696 (1964). ² Т. А. Морган, Journal
of Math. Phys., 5, 1659 (1964). ³ Т. В. Б. Куббл, Imperial College London Preprint,
I. C. T. P. 64/65. ⁴ К. С. Фельдман, Nuovo Cimento, 37, 104, (1965). ⁵ Д. Б. Ферли,
Nuovo Cimento, 37, 897 (1965). ⁶ А. И. Ахиезер. В. Б. Берестецкий, Квантовая элек-
тродинамика, ГИФМЛ, 1959.

С. Б. Абовян

Хизлевудит из Шоржинского перидотитового массива (Армянская ССР)

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 1/VII 1965)

В процессе минералого-геохимического исследования ультраосновных пород СВ побережья оз. Севан на Шоржинском массиве впервые было обнаружено сернистое соединение никеля—хизлевудит Ni_3S_2 (теор. состав $Ni—73,3\%$, $S—26,7\%$). Он встречен среди серпентинизированных дунитов, которые в западной части массива образуют узкие, вытянутые в широтном направлении линзообразные тела, перемежающиеся с полосами перидотитов. В центральной и восточной частях дуниты образуют большие неправильные участки, представляющие шлировые обособления среди перидотитов, слагающих существенную часть массива. Общая площадь массива составляет около 1,5 кв. км. Он внедрен в ядро антиклинальной структуры, сложенной вулканогенно-осадочными породами верхнего сенона и среднего эоцена.

Дуниты, среди которых обнаружен хизлевудит, обнажаются в центральной части массива на обоих бортах так называемой Большой балки. Макроскопически они представляют плотную или мелкозернистую порсду темно-зеленого и черного цвета с ровным изломом. На их гладкой выветрелой поверхности буровато-желтого цвета заметны вкрапленники хромшпинелидов размерами до 1 мм.

Под микроскопом дуниты характеризуются типичной петельчатой микротекстурой замещения оливина серпентином, при этом стенки петель сложены хризотилом, а внутренние части—антигоритом. Рудные минералы представлены зернами метаморфизованного хромшпинелида и более поздними выделениями магнетита, сопровождающего серпентиновые минералы в виде тонко рассеянной пыли.

В искусственных шлихах (протолочках) из описанного дунита среди рудных минералов магнитной фракции, кроме хромшпинелидов и магнетита, были обнаружены пирротин, аварунт* и хизлевудит. В количе-

* Впервые выделения самородного железа, по-видимому, никелистого, из серпентинитов Шоржинского массива были обнаружены в 1932 г. А. Г. Бетехтиным⁽¹⁾.

ственном отношении хизлевудит составляет примерно 0,003% породы, или 30 г/т.

В полированных шлифах видно, что хизлевудит ассоциирует с аварунтом, давая тесные срастания и, по-видимому, часто возникает за счет последнего. В этом случае в полях развития хизлевудита наблюдаются реликтовые включения аварунта (фиг. 1). Реже встречаются и обособленные выделения хизлевудита. Морфологически хизлевудит и аварунт образуют неправильные зерна, иногда крючковатые выделения с обычными размерами в 0,5 мм, реже 1 мм.

Относительный рельеф хизлевудита в шлифах заметно ниже аварунта. Полируется хорошо. Микротвердость, измеренная на приборе РМ-3 (по четырем измерениям), составляет 3,8—4,0. Цвет бледно-желтый, похож на цвет халькопирита, но более светлый. Отражательная способность несколько выше пирита (визуально около 60%). Двуотражение как в воздухе, так и в иммерсии слабо заметно. Анизотропия пятнистая, колеблется от слабой до умеренной с цветным эффектом от темно-серого до светло-кремово-желтого. В тонких шлифах непрозрачен, обладает магнитными свойствами.



Фиг. 1. Хизлевудит в тесных срастаниях с аварунтом—зерно в центре. Светлый—аварунт, серый—хизлевудит. В левом нижнем углу—зерно хромшпинелида. Аншлиф, ув. в 20 раз.

Таблица 1

Элементы	Содержание в %
Si	~ 0,03
Al	0,001—0,003
Mg	~ 0,001
Fe	< 1,0
Mn	~ 0,0003
Ni	> 1,0
Co	~ 0,01
Ti	0,001—0,003
Cu	~ 0,01

Из реактивов дают положительные результаты: HNO_3 (конц.)—дает бурый нестирающийся налет, KOH (конц.)—образует светло-бурый также нестирающийся налет. Отрицательны: HCl (конц.), $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ и царская водка.

Учитывая то обстоятельство, что хизлевудит дает тесные срастания с аварунтом, реже самостоятельные выделения, под биноклем были отобраны их зерна, а затем изготовлены аншлифы, откуда уже более или менее точно выделялся хизлевудит. Отобранные таким путем зерна последнего были сданы на спектральный анализ, а для целей рентгеноструктурного анализа аншлиф был передан Г. В. Басовой, которая любезно согласилась выполнить анализ путем приготовления шарика.

Спектральный анализ (приближенный количественный на 10 зернах), выполненный в лаборатории ИГН АН Армянской ССР аналитиком М. Я. Мартиросяном, приведен в табл. 1. Как видно из таблицы, все же в хизлевудите наблюдается повышенное содержание Fe, что, вероятно, объясняется наличием тесных сростаний с аварунитом. Основу минерала составляет Ni. Наличие Mg и Si в сотых долях процента, очевидно, связано с силикатными частицами, попавшими в пробу. В составе хизлевудита присутствуют также Co и Cu в количестве сотой доли процента, Al и Ti — тысячных долей и Mn — десятитысячных.

К сожалению, из-за трудоемкости процесса отбора не удалось собрать достаточное для химического анализа количество исследуемого минерала. По М. А. Пикоку ⁽¹⁾ состав хизлевудита из Тасмании следующий: Fe — 0,55%, Ni — 72,13%, S — 25,96%, H₂O — 0,59%, сумма — 99,23%, уд. вес — 5,82. При изменении хизлевудит превращается в миллерит, выделяющийся в виде пластинок. Продуктом выветривания хизлевудита в районе р. Хизлевуд является заратит — Ni₃[OH]₂CO₃·4H₂O?

В табл. 2 приведены межплоскостные расстояния исследуемого минерала — графа 1, которые совпадают с данными хизлевудита из Тасмании, по Л. Берри и Р. Томпсону ⁽²⁾ — графа 2 и М. Пикоку ⁽¹⁾ — графа 3. Условия съемки: Fe — излучение; T — 3 ч., камера d — 57,3; d шарика — 0,3 мм. Режим трубки 35 kV, 16 mA.

Приуроченность хизлевудита и аварунита к сильно серпентинизированным разностям дунита, вероятно, указывает на их связь с процессом серпентинизации. А. Г. Бетехтин и Н. В. Альбов ⁽³⁾ считают, что самородное железо в перидотитах возникло за счет вторичного магнетита, образовавшегося в процессе серпентинизации, по-видимому, в результате разложения не только железосодержащих силикатов, но и главным образом сульфидов — пирротина. При этом отмечается невысокая температура образования самородного железа (не выше 300°) путем восстановления магнетита водородом. Источником серы также является ультраосновная магма, в которой содержатся заметные количества сероводорода ^(4,5). Вероятно, сера, необходимая для образования сульфидов никеля (в частности, хизлевудита), переносилась серпентинизирующими растворами.

Искусственно хизлевудит был получен сплавлением 3Ni + 2S при отсутствии воздуха в кварцевой трубке в пламени бунзеновской горелки ^(6,7), а также сплавлением в струе азота ⁽⁸⁾.

Хизлевудит был назван по реке Хизлевуд в Тасмании в 1896 г. В. Ф. Петердом ⁽⁹⁾. В дальнейшем он был исключен из списка минералов как идентичный петландиту, но М. А. Пикок ⁽¹⁾ показал, что он представляет самостоятельный минеральный вид и привел его химсостав. В Тасмании хизлевудит обнаружен на месторождении Трайел-Харбор в серпентините, в котором бобовидные агрегаты серпентина по оливину окружены магнетитом и сульфидами (петландит, хизлевудит, сфалерит, халькопирит и др.), причем хизлевудит здесь выделяется позднее пент-

Таблица 2

1		2		3	
Шоржинский хизлевудит		Хизлевудит из Тасмании			
<i>l</i>	$\frac{da}{n}$	<i>l</i>	$\frac{da}{n}$	<i>l</i>	$\frac{da}{n}$
2	7,31	—	—	—	—
1	5,77	—	—	—	—
3	(4,52)	—	—	—	—
9	4,08	5	4,11	5	4,10
4	(3,15)	—	—	—	—
3	3,02	—	—	—	—
10	2,86	10	2,88	9	2,88
1	(2,62)	—	—	—	—
3	2,53	—	—	—	—
6	2,38	4	2,39	4	2,38
—	—	—	—	1	2,36
1	(2,23)	—	—	—	—
6	2,04	5	2,04	5	2,03
1	2,01	—	—	—	—
1	1,943	—	—	—	—
1	1,925	—	—	—	—
10	1,817	1.0	1,817	10	1,822
3	1,768	—	—	—	—
—	—	—	—	1	1,670
9	1,661	8	1,661	8	1,657
1	1,484	—	—	—	—
—	—	—	—	0,5	1,368
3	1,358	1	1,358	1	1,354
3	1,294	2	1,295	2	1,291
3	1,228	2	1,224	2	1,220
1	1,198	0.5	1,189	0,5	1,186
1	1,175	0.5	1,173	0,5	1,169
2	1,166	—	—	—	—
—	—	—	—	1	1,133
3	1,125	1	1,125	1	1,122
4	1,100	2	1,100	2	1,097
6	1,086	3	1,085	0,5	1,087
—	—	—	—	3	1,081
4	1,018	2	1,018	2	1,015

ландита. П. Рамдор ⁽¹⁰⁾ также отмечает следы минерала, который он считает хизлевудитом в джозефините из Орегоны, а также самостоятельные выделения в Пошиавов Граубюнде (Швейцария) и месторождения Фризах в Каринтии (Австрия). В. С. Пепезик ⁽¹¹⁾ описал хизлевудит в ассоциации с пентландитом на нижнем контакте дайки серпентинизированного перидотита с туфами и известняками близ вершины Майлс-Ридж (Аляска). Наконец, Ж. Кантор ⁽¹²⁾, наблюдал хизлевудит в тесном срастании с аварунтом в Спишско-Гемерских рудных горах (Чехословакия).

В СССР хизлевудит был обнаружен впервые на Украине геологом С. М. Рябоконь среди серпентинизированных ультраосновных пород, а затем А. Д. Генкиным* в образцах А. Г. Бетехтина из серпентинизиро-

* Данные о находке хизлевудита в СССР были любезно сообщены автору А. Д. Генкиным.

ванных дунитов Нижне-Тагильского платиноносного массива. Наша находка является третьим случаем. Судя по работам А. Г. Бетехтина ⁽¹³⁾ и других исследователей ультраосновных пород, хизлевудит из-за отсутствия точных методик определения минералов, по-видимому, раньше принимался просто за сульфид никеля.

Хизлевудит на Шоржинском массиве имеет незначительное распространение, вследствие чего может иметь лишь минералогическое значение. С другой стороны, аварунт и, по-видимому, ассоциирующий с ним хизлевудит на Нижне-Тагильском платиноносном массиве по времени образования относятся к последним моментам процесса серпентинизации, в условиях восстановительной среды, когда имело место также образование богатой медью, железом и никелем вторичной самородной платины (купроферроплатина, никелистая платина).

Практика работ на неплатиноносных массивах Урала (массивы Кража и Халиловский), по данным В. П. Логинова ⁽⁵⁾, показывает, что повышенные содержания платины находятся в ассоциации с сульфидами. При этом следует отметить, что обычные методы поисков платины — шлиховое опробование, обогащение и химические анализы хромитов — приводят почти всегда к отрицательным результатам.

Имеются также указания ⁽¹⁴⁾, что аварунт в Британской Колумбии обнаружен в золотоносных песках, происходящих из гипербазитов, в ассоциации с платиной и осмистым придиом. Наконец, П. Рамдор ⁽¹⁰⁾ считает, что для образования аварунта, кроме восстановительной среды, необходимо также одновременное каталитическое воздействие следов платиноидов.

Приведенные выше данные позволяют предположить, что на Шоржинском массиве должна также существовать ассоциация аварунта и хизлевудита с минералами группы платиноидов. Находка А. Г. Бетехтина в 1932 г. зерен самородной платины с включениями иридийной платины среди сульфидов (никеля) и самородного железа является косвенным указанием на наличие такой ассоциации. Описанный нами хизлевудит в ассоциации с аварунтом позволяет надеяться, что на наиболее серпентинизированных участках дунитов Шоржинского массива должны быть обнаружены минералы группы платины. Дальнейшие работы на платину должны быть направлены именно на изучение таких участков.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Ս. Բ. ԱՐՈՎՅԱՆ

Խիզլեվուդիտը Շորժայի պերիդոտային գանգվածից

(Հայկական ՍՍՀ)

Սեանա լճի հյուսիս-արևելյան ափում, գտնվող Շորժայի գանգվածի ուլտրաբազիտային ապարների միներալոգո-գեոքիմիական ուսումնասիրության ընթացքում, առաջին անգամ հայտնաբերվել է Նիկելի, ծծմբի միացություն՝ խիզլեվուդիտ (Ni_3S_2)։ Այն հայտնվել է սերպենտինիզացիայի շրջանի սկզբնական ֆազիայում, որոնք բնորոշվում են օլիգոկլինի սերպենտինով տեղակալման ցանցային միկրոտեքստուրայով։ Քանակական տեսակետ

սիս խիլիվոլդիտը կազմում է ասպարի $0,003\%$ -ը կամ 30 գ/տո: Այս միներալը և ավառու-
թալը մորֆոլոգիական տեսակետից կազմում են հատիկներ, երբեմն կեռավուն գոյացումներ
0,0—1,0 մմ չափերով և իրար հետ տալիս են սերտ աճումներ (նկ. 1):

Շորժայի զանգվածում խիլիվոլդիտը ունի միներալոգիական նշանակություն, բայց
նրա առաջացումը վերականգնման միջոցներում պլատինայի աննշան քանակության միա-
ժամանակյա արագացնող ազդեցության պայմաններում թույլ է տալիս հույս հայտնել,
որ կհայտնարեցին նաև պլատինայի խմրի միներալներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. А. Пукот, Univ. Toronto Studies. Geol. Series, 1947, 51. ² Л. Г. Берри,
Р. М. Томпсон, Geol. Soc. Am., 1962, Mem. 85. ³ А. Г. Бетехтин, Н. В. Альбов,
Известия АН СССР, сер. геол., № 3, 1940. ⁴ В. Н. Лодочников, Тр. ЦНИГРИ, вып.
38, 1936. ⁵ В. П. Логинов, Тр. ИГН СССР, вып. 41, сер. рудных м-ий (5), 1945.
⁶ Н. Зльзен, Geol. For. Förh., 47, 1925. ⁷ А. Вестгрен, Zs. anorg. Chem., 239, 1938.
⁸ Г. Пейронел, Э. Песилли, Min Abstr., 1949, № 10. ⁹ N. F. Petterd, Catalogue of the
minerals of Tasmania, Launeston, 1896. ¹⁰ П. Рамдор, Рудные минералы и их сроста-
ния, изд. ИЛ, М., 1962. ¹¹ В. С. Пенезик, Am. Min., 1955, 40, № 7—8. ¹² Ж. Кантор,
Geol. sbornik (Bratislava), 1955, 6, № 3—4. ¹³ А. Г. Бетехтин, Цветные металлы,
№ 3, 1932. ¹⁴ Г. Х. Гофман, Am. J. Sci., 1905, 19.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. О. Казарян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и В. А. Давтян

О корреляции между метаболической активностью корней
и величиною листовой площади растений

(Представлено 13/VIII 1965)

Среди множества корреляционных взаимоотношений, определяющих целостность растений, одним из важных является функциональная связь между листьями и корнями, развитие которых протекает сопряженно и взаимообусловленно ⁽¹⁾, что проявляется и в обменных реакциях, происходящих в них ⁽²⁾. Эти положения дают нам основание предполагать, что сокращение или увеличение (путем прививки) общей поверхности одной из указанных систем должно привести к непосредственному изменению функциональной активности противоположно расположенной системы.

Для экспериментального подтверждения этого предположения в вегетационном сезоне 1964 г. были проведены некоторые опыты с томатом сорта Ереван-14. Сущность их заключалась в увеличении с помощью прививки в одном случае площади листьев, в другом — массы корней, а затем в определении некоторых показателей функциональной активности последних. С этой целью по 3 экземпляра рассады было высажено в одну лунку, с таким расчетом, чтобы стебли растений по всей длине тесно соприкасались. Стебли до высадки в грунт очищались от коры в зоне их прививки, затем тесно прикладывались очищенной частью друг к другу и завязывались ниткой, как это делалось другими исследователями ⁽¹⁾. По истечении одного месяца из хорошо привившихся растений подбирались по 20—25 экземпляров, а затем удалением отдельных стеблей или корней были получены следующие группы, по 4—5 экземпляров в каждой.

1) Один стебель с тремя корневыми системами; 2) один стебель с двумя корневыми системами; 3) стебель с собственной корневой системой (контроль); 4) 2 корневые системы с двумя стеблями; 5) одна корневая система с тремя стеблями. Спустя месяц после удаления привитых корней или стеблей были проведены следующие определения и биохимические анализы: площадь листьев методом высечек ⁽³⁾, рабочая поглотительная поверхность корней по И. И. Колосову ⁽⁴⁾, различные формы азота в пасоке по Кьельдалю, аминокислотный состав в пасоке применением бумажной хроматографии ⁽⁵⁾.

Показатели роста листьев и корней у различных растений

Таблица 1

Варианты опыта	Листья		Корни		Соотношение корни — листья	
	сухой вес в г	площ. в д.м ²	сухой вес в г	рабоч. по- глот. по- верх. в м ²	по сух. ве- су	по площади
Один стебель, 3 кор. сист.	9,04	18,32	3,00	187	0,33	10,26
Один стеб., 2 кор. сист.	12,84	20,80	3,29	126	0,25	6,06
Один стеб., 1 кор. сист.	9,88	14,63	1,75	71	0,17	4,82
Одна кор. сист., 2 стеб.	10,93	20,99	3,10	200	0,29	9,52
Одна кор. сист., 3 стеб.	15,18	30,36	4,12	193	0,27	6,35

Как следует из приведенных данных (табл. 1), наиболее мощную надземную и корневую систему имели контрольные растения. Увеличение величины одной из полярных систем путем прививки всегда приводило к нарастанию общей мощности противоположно расположенной системы. Однако удвоение или утроение числа надземной или корневой системы не вызывает соответствующее увеличение мощности противоположной системы. Следует при этом учесть, что вследствие удаления стеблей или корневой системы после сращивания компонентов прививки отмирает некоторая часть противоположно расположенных метамеров, так как нарушается корреляционное соответствие общей площади листьев и корней.

Своеобразные данные были получены в отношении количества выделенной пасоки (табл. 2), которой больше всего получено из корней контрольных растений, хотя содержание сухого веса пасоки оказалось го-

Таблица 2

Количество выделенной пасоки (в мл) за 12 суток у подопытных групп растений

Варианты опыта	Общее ко- лич.	Количество пасоки		Сухой вес 100 мл
		на д.м ² рабочей поверхности кор- ней	на д.м ² листовой поверхности	
Один стеб., 3 кор. сист.	29,96	0,160	1,60	235
Один стеб., 2 кор. сист.	30,05	0,242	1,46	280
Контроль	39,40	0,555	2,70	150
Одна корн. сист., 2 стеб.	29,68	0,128	1,22	300
Одна корн. сист., 3 стеб.	39,09	0,197	1,25	190

раздо ниже у данной группы. Таким образом выяснилось, что меньшему количеству пасоки всегда соответствует большее содержание сухого вещества в ней. В данном случае не обнаруживается прямой зависимости между количеством поглощенной корнями воды и минеральных веществ. Подобная зависимость не наблюдается между количеством выделенной пасоки и величиной листовой площади. Это частично обуславливается и самой прививкой, приводящей к ухудшению корнелистовой свя-

зи, так как в опытных вариантах эта связь осуществляется в основном через ткани сращения одного стебля.

Наиболее характерные данные, показывающие зависимость метаболической активности корней от листовой поверхности, получены при исследовании аминокислотного состава пасоки (табл. 3). По содержанию аминокислот отличаются две последние группы растений, в пасоке которых обнаружено по 8 аминокислот, с суммарным количеством 28,68 и 21,87 мг в 100 мл пасоки соответственно. Поскольку сухой вес корней первой и последних двух групп растений является почти одинаковым, листовая их площадь значительно отличается, остается сделать единственное предположение о прямой зависимости между метаболической активностью корней и массой листьев: метаболическая активность корней повышается по мере увеличения общей фотосинтетической поверхности растений.

Таблица 3

Содержание аминокислот (в мг на 100 мл)

Варианты опыта	Цист(е)ин	Лизин	Аспарагин. кислота	Серин+ глицин	Триптофан	Глютами- нов. кислота	Пролин	Метионин	Валин	Фенилаланин	Лейцин	Сумма	Число аминокислот
1 ст., 3 корн. сист. .	—	—	0,08	0,03	0,07	—	—	0,05	—	0,04	0,02	0,29	6
1 ст., 2 корн. сист. .	—	—	0,38	0,32	—	0,58	сл.	—	1,84	—	0,98	4,10	6
1 ст., 1 корн. сист. .	0,21	0,02	0,03	0,01	—	0,04	сл.	—	—	0,03	0,02	0,36	8
1 кор. сист. 2 ст. .	—	0,58	20,16	0,72	—	3,17	сл.	—	2,02	0,55	1,48	28,68	8
1 корн. сист. 3 ст. .	—	0,43	15,01	0,88	—	2,16	сл.	—	1,66	0,55	1,18	21,87	8

По количественному же составу аминокислот не обнаруживается столь большая разница, за исключением того, что в пасоке последних двух групп растений обнаружены две новые аминокислоты.

О метаболической активности корней, характеризуемой содержанием различных форм азота, можно судить по данным табл. 4. По содержанию белкового азота существенно отличается пасока, выделенная из последних двух групп. Намного меньше указанной формы азота обнаружено в пасоке контрольных растений. В пересчете как на единицу площади листа, так и корневой поверхности у последних двух групп растений содержание белкового азота в пасоке всегда выше. В данном случае опять-таки проявляется положительное влияние мощности листовой поверхности на метаболическую активность корней. Различие в поглотительной и метаболической активности у подопытных групп растений было обусловлено неодинаковой мощностью листового аппарата. Характерно в этом отношении то обстоятельство, что содержание общего азота в пасоке растений с двумя стеблями оказалось ровно в два раза больше по сравнению с пасокой растений с двумя корневыми системами.

Приведенные ниже данные наглядно свидетельствуют о наличии прямой зависимости между поглотительной и метаболической деятельностью корней и общей листовой поверхностью. Указанные полярно расположенные метамерные органы являются теми поверхностями, которые

синтезируют необходимые для роста и жизнедеятельности растений органические соединения. Морфологическое развитие и уровень функционирования каждой из этих полярно расположенных систем определяет-

Таблица 4
Содержание разных форм азота в 100 мл пасоки

Варианты опыта	Общий			Белковый			Небелковый		
	содержание в мг	на дм ² листовой поверхности	на дм ² рабоч. поглотительной поверх. корней	содержание в мг	на дм ² листовой поверхности	на дм ² рабочей поглотительн. поверхности	содержание в мг	на дм ² листовой поверхности	на дм ² рабоч. поглотительной поверхности
1. ст., 3 корн. сист. . .	12,14	0,666	0,065	1,97	0,108	0,011	10,17	0,558	0,051
1 ст., 2 корн. сист. . .	8,99	0,432	0,071	1,11	0,053	0,009	7,88	0,388	0,062
1 ст., 1 корн. сист. . .									
(контроль)	10,13	0,692	0,142	0,84	0,057	0,012	9,29	0,635	0,130
1 корн. сист., 2 ст. . .	17,90	0,853	0,090	9,27	0,422	0,046	8,63	0,411	0,043
1 корн. сист., 3 ст. . .	11,73	0,386	0,061	5,86	0,193	0,030	5,87	0,193	0,031

ся мощностью противоположной системы. Наглядным доказательством этого является вышензложенный опыт, показывающий, что наибольшая метаболическая и поглотительная активность всегда обнаруживается у корней растений, носящих большее число листьев. Таким образом, все эти данные приводят нас к общему выводу о том, что при искусственном нарушении нормального соотношения общей поверхности корней и листьев усиливается поглотительная и метаболическая активность корней тех растений, которые обладают наибольшей листовой поверхностью. В результате энергично восстанавливается нормальное корне-лиственное соотношение.

Ботанический институт
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ Բոտանիկո-անդամ, և Վ. Ա. ԳԱՎԹՅԱՆ

Բույսերի արմատների նյութափոխանակային ակտիվության և սերեվային մակերեսի մեծության միջով եղած կորելացիայի մասին

Բույսերի ամրողչականությունը որոշող բազմաթիվ կորելացված կարևոր փոխհարաբերություններից մեկը հանդիսանում է արմատա-տերևային ֆունկցիոնալ կապը: Վերջինիս ինտենսիվությունը էլ պայմանավորված է նրանց աճման էներգիան: Այս հանգամանքը հիմք է տալիս ենթադրելու, որ այդ երկու բևեռական սրգաններից մեկի մակերեսի ավելացման կամ կրճատման դեպքում կփոխվի մյուսի ֆունկցիոնալ ակտիվությունը:

Այդ հարցի ուսումնասիրման նպատակով 1964 թ. վեգետացիոն սեզոնում մեր կողմից կատարվել են մի շարք փորձեր տոմատի «Ծրեանի-14» սորտի վրա: Փորձերի էությունը կախացել է նրանում, որ պատվաստի եղանակով ավելացվել է մեկ խումբ բույսերի մոտ արմատային սխտեմների, մյուսի մոտ՝ ցողունների թիվը, որից հետո որոշվել է արմատների ֆունկցիոնալ ակտիվությունը, կապված բույսի վրա եղած տերևների ընդհանուր մակերեսի հետ:

Բացի արմատների և տերևների աճման ցուցանիշներից որոշվել է նաև արտահոսող արմատայութի քանակը, վեգետիս մեջ սպոսի տարրեր ձևերը, ամինոթթուների կազմը և պարունակությունը:

Փորձերի արդյունքները հեղինակներին հնարավորություն են տվել հաստատելու, որ արմատային սխտեմի նյութափոխանակային ակտիվությունը անմիջականորեն պայմանավորված է տերևային մակերեսով: Արմատների և տերևների ընդհանուր մակերեսների հարաբերության արհեստական խախտման դեպքում ռուսիս հերթին ուժեղանում է այն բույսերի արմատների կլանող և նյութափոխանակային ֆունկցիան, որոնք ամենաբաց մեծ տերևային մակերես ունեն:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ М. А. Любинский, А. И. Закордонец и К. М. Ситник. Взаємодія надземних и підземних органів рослин, Київ, 1963. ² А. Л. Курсанов, Взаимосвязь физиологических процессов в растениях, Тимирязевск. чтение, XX, 1960. ³ А. А. Ничипорович, Л. Е. Строганова, С. Н. Чмора, М. П. Власова, Фотосинтетическая деятельность растений в посевах, Изд. АН СССР, 1961, ⁴ И. И. Колосов, Поглощительная деятельность корневых систем растений. Изд. АН СССР, 1962. ⁵ В. О. Казарян, Э. С. Авунджян и К. А. Карапетян, ДАН АрмССР, т. 29, № 8 (1959).

ФИТОГЕЛЬМИНТОЛОГИЯ

Э. Е. Погосян

Новый род и вид нематоды семейства *Heteroderidae*
из Армянской ССР (Nematoda).

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 2/VII 1965)

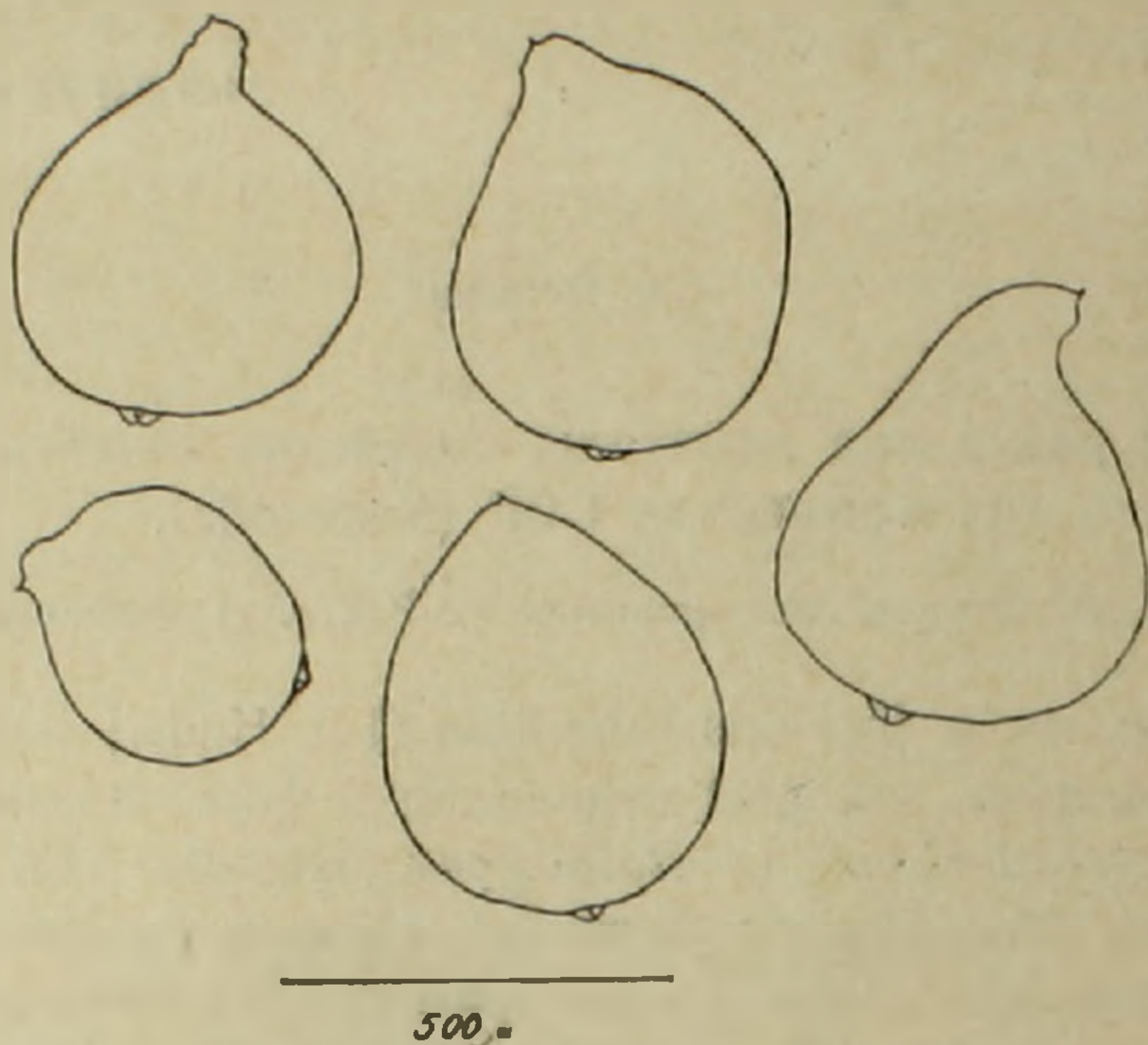
На корнях мяты [*Mentha longifolia* (L.) Huds.] нами обнаружен новый вид нематоды, который совмещает в себе признаки трех родов семейства *Heteroderidae* (*Meloidogyne* Goeldi, 1887, *Heterodera* Schmidt, 1871 и *Meloidodera* Chitwood, Hannon and Esser, 1956), имеет также собственные характерные признаки и является представителем нового рода, который мы называем *Meloidoderita*.

Диагноз рода *Meloidoderita* Poghossian gen. n. Самки не образуют галлов и настоящих цист, они сидят на корнях, целиком покрытые яйцевыми мешками. Имеют характерную форму тела, в большинстве случаев похожую на самок галловых нематод, с более или менее длинной шейкой и широкой задней частью тела. Вульва несколько отодвинута от ануса и расположена на задней части тела на маленьком коническом выступе. Анус субтерминальный и несколько отодвинут от вульвы. Кутикула имеет продольные линии, идущие от передней до задней части тела и в области вульвы образующие характерную структуру, отличную от всех гетеродерид. На кутикуле имеются конические шипики, расположенные по всей поверхности тела, с гналиновой вершиной.

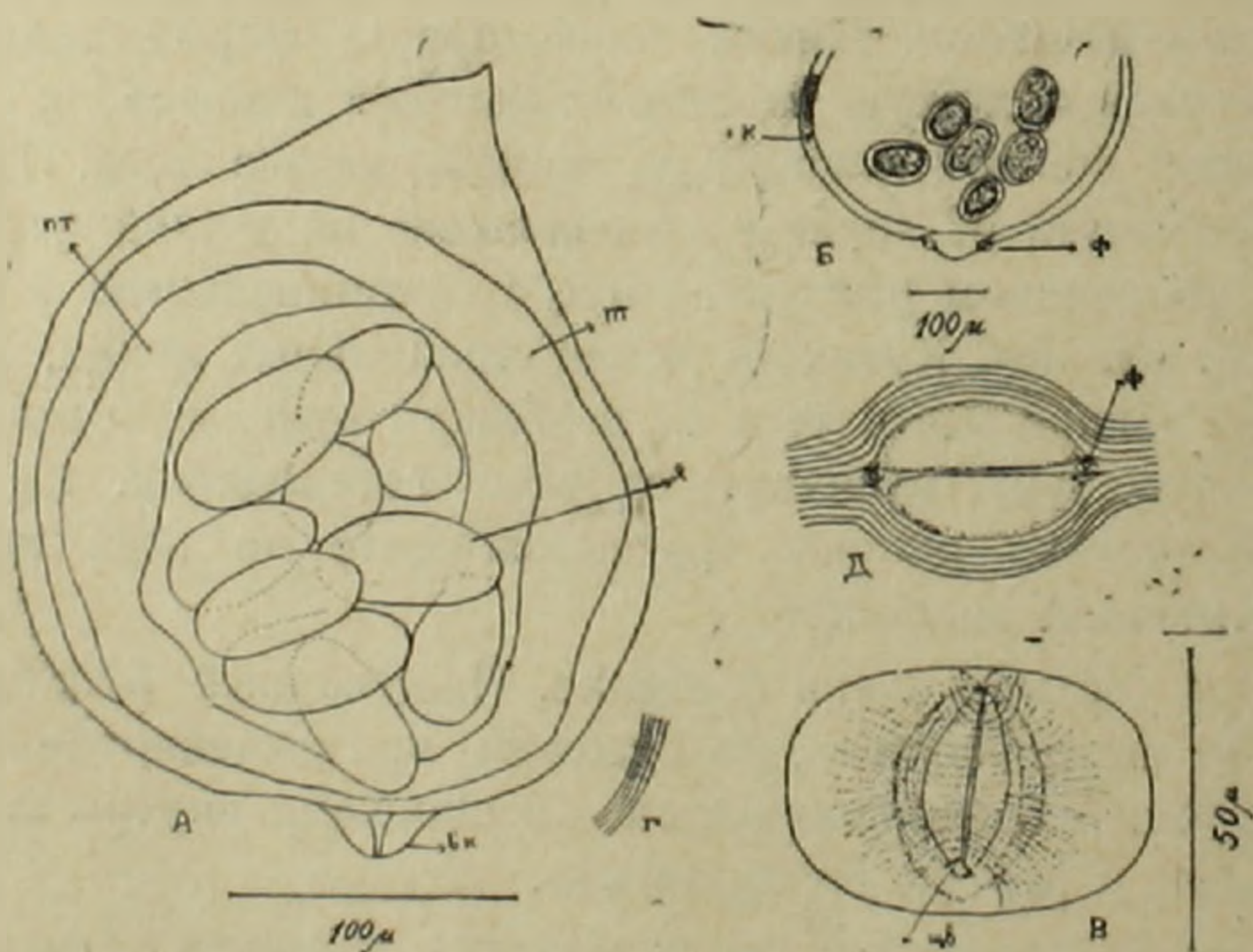
Амфиды у самок очень большие. Пищеводный бульбус у самок весьма слабо хитинизирован, но снабжен чрезвычайно большим просветом (с тремя пластинковидными перепонками внутри клапана, отсутствующими у других гетеродерид).

Яйца почти полностью откладываются в яйцевом мешке, где и развиваются личинки, лишь очень небольшое количество яиц (18 — 25 — 30 шт.) остается в теле самки после ее отмирания, когда она переходит в „цистондную“ стадию желтовато-коричневого цвета, совершенно отличную от цисты *Heterodera*. Оставшиеся в теле самки яйца, кроме обычных оболочек, покрыты также другой, толстой, коричневой оболочкой, с пальцевидными выростами, похожей на протективную (?) оболочку.

Дифференциальный диагноз *Meloidoderita* gen. n. Признаки галловых нематод: светлая кутикула самок, плотный и прочный яйцевой мешок, развитие личинок в основном вне тела самки (в яйцевом мешке) и маленький стилет.



Фиг. 1. Различная форма самок *Meloidoderita kirjanovae* sp. n.

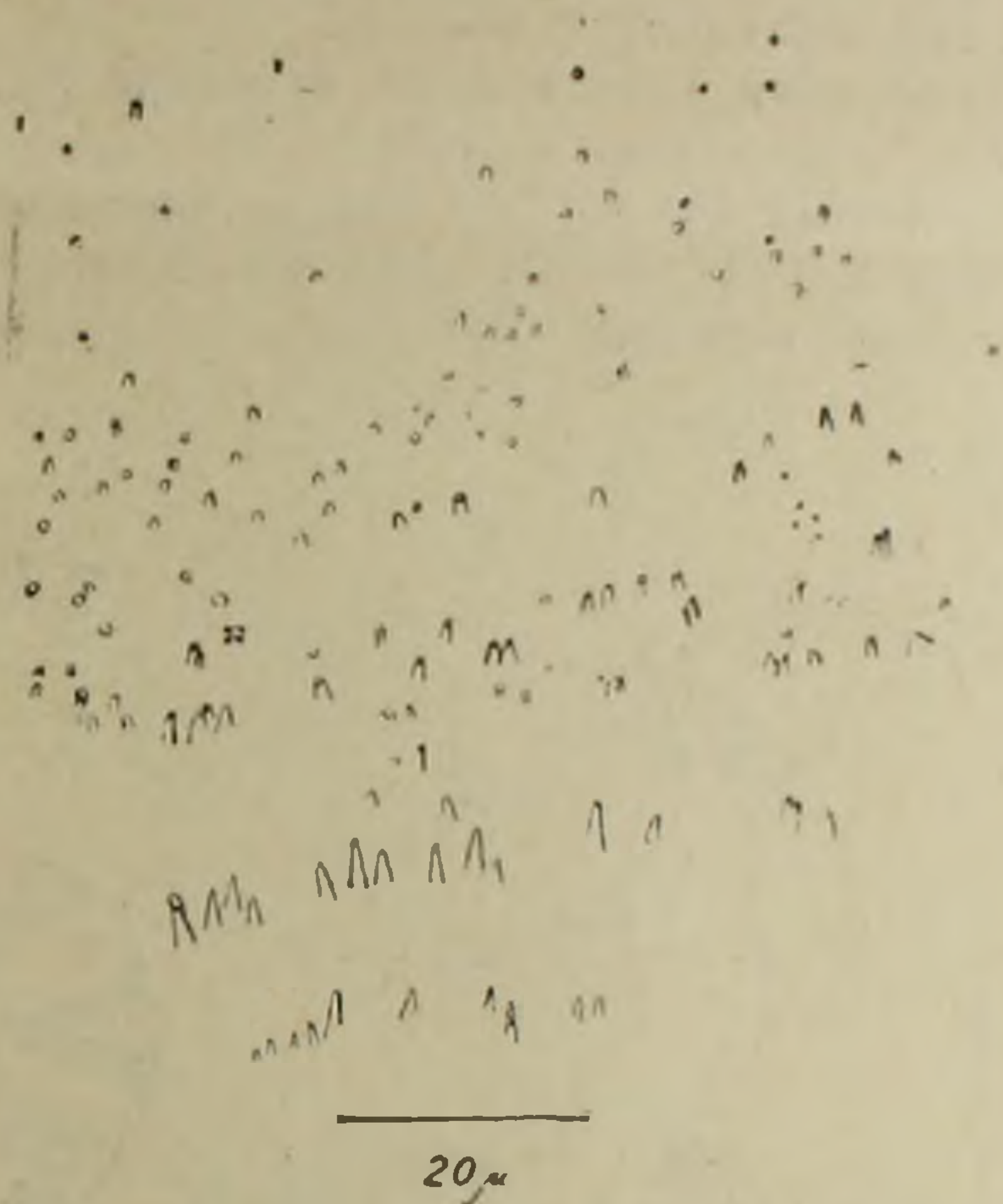


Фиг. 2. А — самка *Meloidoderita kirjanovae* sp. n. Б — задняя часть тела самки; В — вульварная пластинка; Г — продольные линии кутикулы с пунктацией; Д — схема вульварной области (вульварный конус) с линиями. пт — половая трубка; я — яйца; вк — вульварный конус; щв — щель вульвы; ф — фазмид; к — полосатая кутикула.

Признаки цистообразующих нематод: отсутствие галлообразования, более плотная кутикула самок, присутствие конических шипиков

на поверхности кутикулы, форма хвоста личинок и до некоторой степени наличие „цистоидной стадии“.

Признаки мелойдодера: отсутствие галлообразования, продольные прямые линии кутикулы, субтерминальный анус и некоторая отдаленность вульвы от ануса.



Фиг. 3. Конические шипики на поверхности кутикулы у самок *Meloidoderita kirjanovae* sp. n.

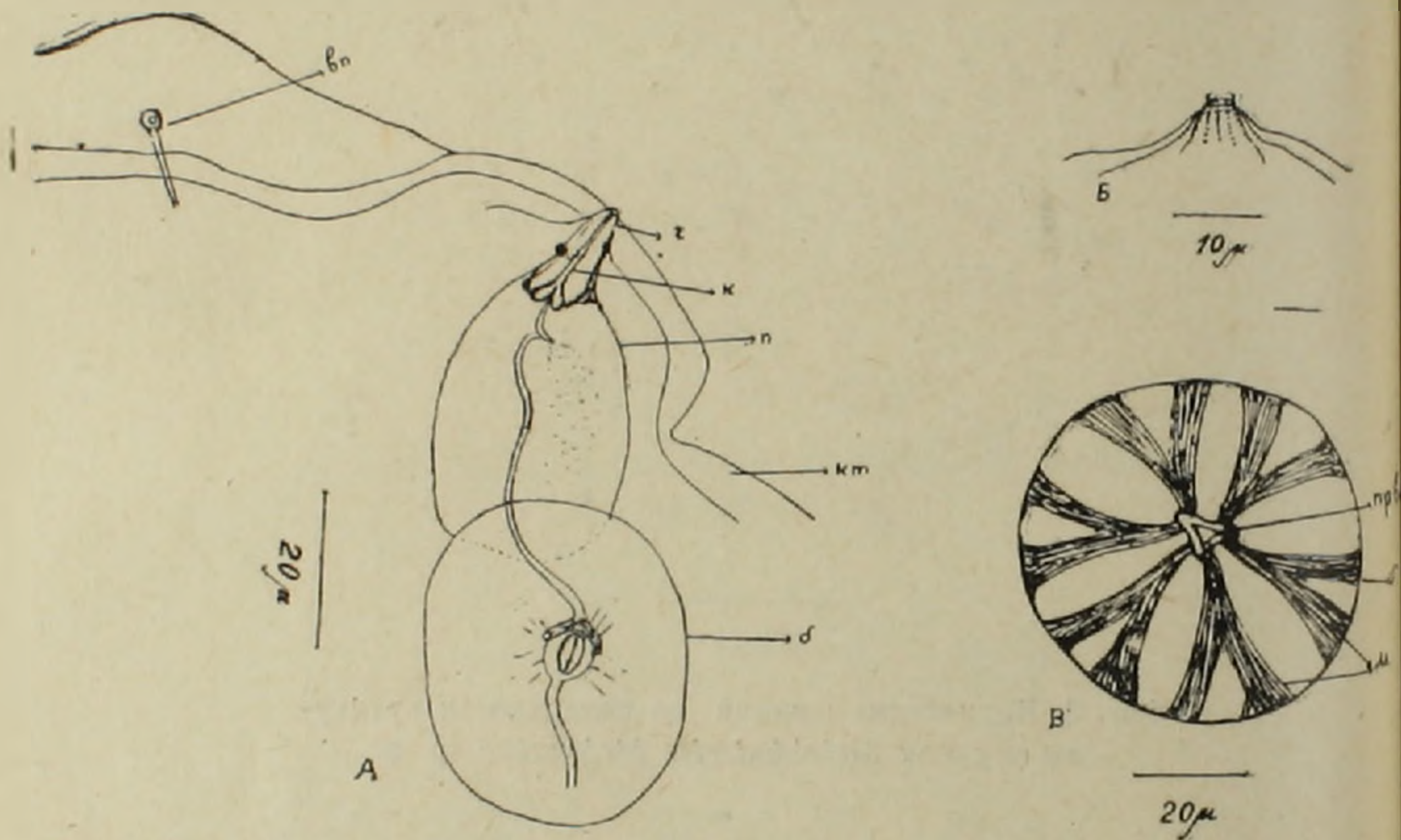
Собственные признаки: форма тела самок, очень большие амфиды, слабо хитинизированный бульбус, который снабжен чрезвычайно большим просветом, с тремя пластинковидными перепонками внутри клапанов. Полосатая кутикула личинок и наличие оболочки, похожей на протеиновую (?) оболочку у яиц в цистоидной стадии.

Описание *Meloidoderita kirjanovae* Poghossian sp. n. Голотип — самка — длина тела 351,7 μ, ширина 292,0 μ. Длина шейки 48,8 μ, копье 15 μ, с довольно хорошо развитым основанием. Число головных колец 3. Паратипы — 40 самок. Длина тела варьирует от 234,5 до 439,6 μ (318,2 μ), ширина от 185,6 до 371,3 μ (265,2 μ). Отношение ширины к длине тела колеблется от 1:1,08 до 1,68 (1:1,32).

Формой тела (фиг. 1, 2) в большинстве случаев похожа на самок галловых нематод, с короткой, но довольно хорошо выраженной шейкой и задней широкой, уплощенной и даже несколько вдавленной частью тела, в центре которой выступает маленький хорошо обособленный вульварный конус. Самки с широкой шейкой, несколько похожи на самок *Heterodera*.

Цвет тела белый, у старых самок желтоватый. Кутикула довольно толстая, 4—7 μ , с продольными линиями, шириной 1,0—1,5 μ . Кольца кутикулы хорошо заметны на голове и иногда на шейке. На кольцах имеется пунктация. На кутикуле имеются конические шипики, 3 μ длиной и 1,5 шириной у основания (с гиалиновой вершиной, расплощенные по всей поверхности тела). Шипики поменьше расположены группами по 2—3 (фиг. 3).

Голова очень узкая (фиг. 4 А, Б), ее высота около 3 μ , а ширина около 4 μ . Число головных колец 3—4, первое имеет форму шапочки. На головных кольцах, а также на продольных линиях кутикулы довольно хорошо заметна пунктация. Длина копы 14—15 μ с основанием. Длина передней части копы 7—8 μ , задней 6—7 μ .

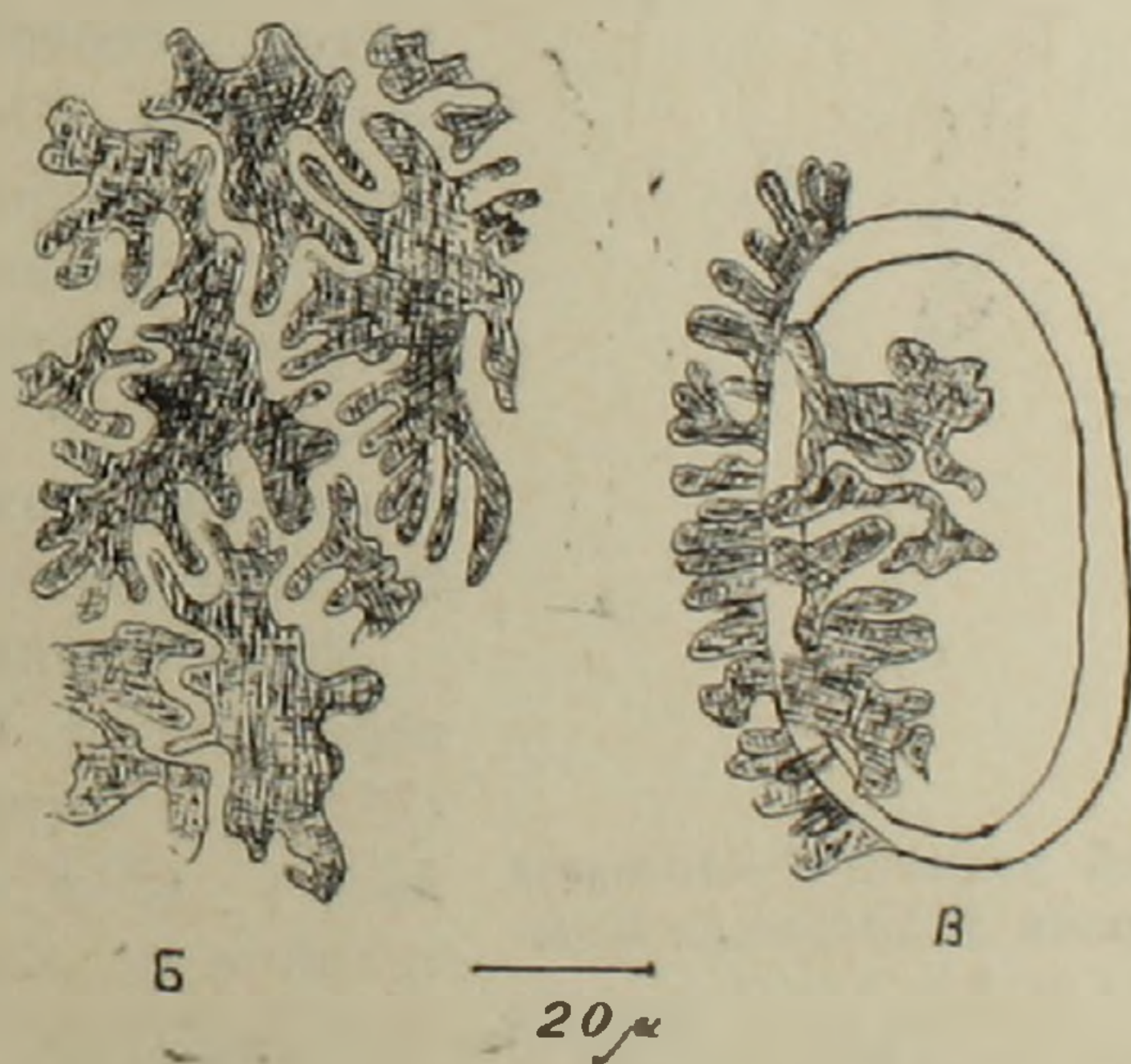
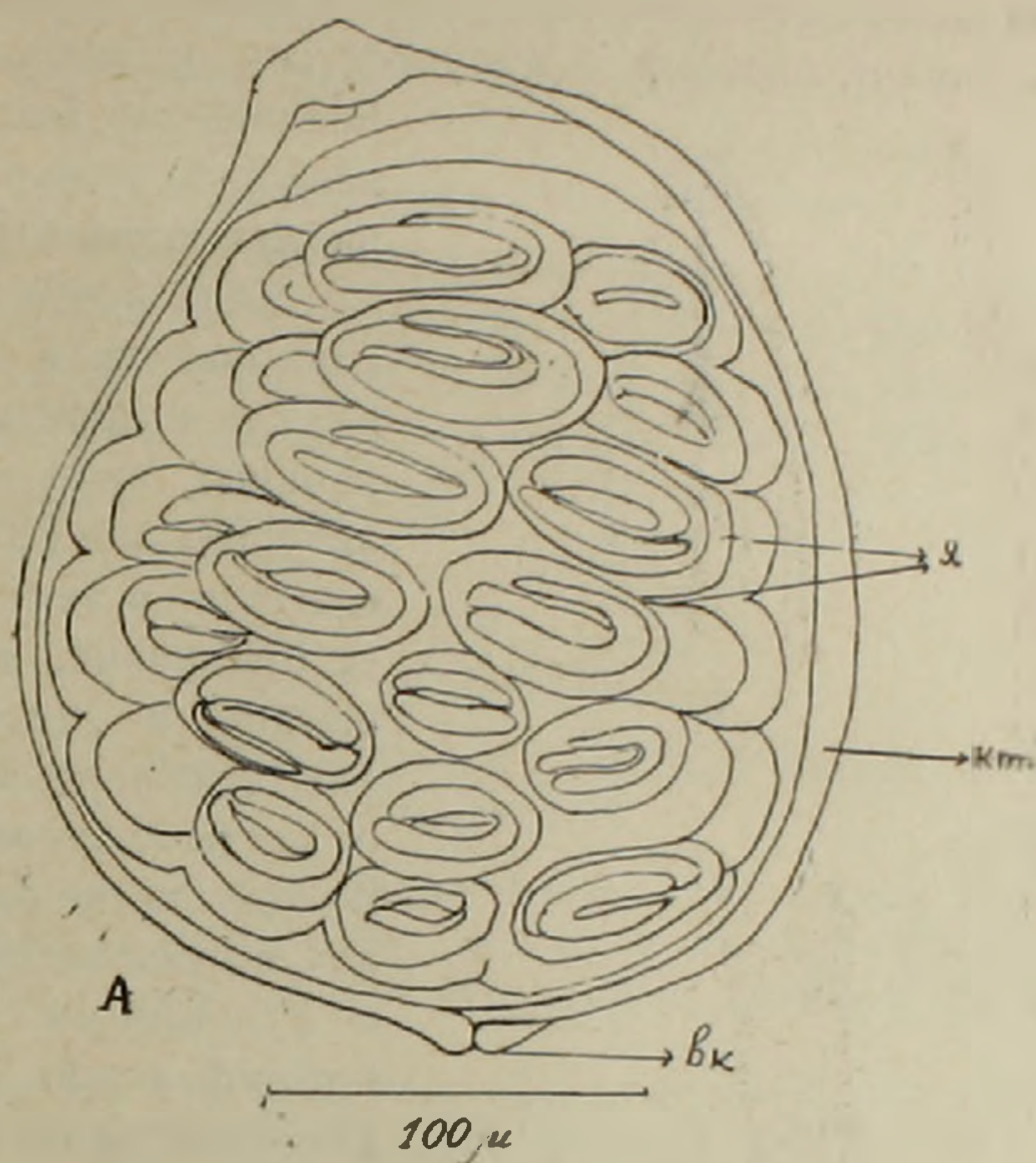


Фиг. 4. А — передний конец тела самки *Meloidoderita klrjanovae* sp. n. Б — головной бульбус пищевода (сильно увеличен).

Длина основания копы 2—3 μ , ширина 4—5 μ . Дорзальная железа пищевода открывается в просвет пищевода на 3—3,5 μ ниже основания копы. Пищеводный бульбус большой (у двух самок был равен 43,8 $\mu \times 31,2 \mu$ и 48,0 $\mu \times 40,8 \mu$), весьма слабо хитинизирован, но снабжен чрезвычайно большим просветом с тремя пластинковидными перепонками внутри клапана (фиг. 4 В). Мышцы бульбуса мощные, сильно развитые.

Половая трубка непарная. Вульва расположена на незначительном расстоянии от середины тела, на его задней части, на конусовидном выступе, длина которого 14—19 μ . Длина щели вульвы у четырех самок колебалась между 30—36 μ . Фазмиды большие, расположены у основания вульварного конуса с двух сторон (фиг. 2, Б, Д).

Анальное отверстие значительно отодвинуто от вульвы и плохо заметно. Расстояние между вульвой и анусом (у 6 самок) колеблется между 47 и 84 μ . Выделительная пора открывается на основании шейки.



Фиг. 5. А — «цистидная стадия» *Meloidoderita kirjanovae* sp. n.; Б — рисунок на поверхности нижележащего коричневого слоя; В — яйца с пальцевидными выростами оболочки. я — яйцо; кт — светлая полосатая кутикула; вк — вульварный конус.

Самки *Meloidoderita kirjanovae* sp. n. галлов не образуют, они высовываются наружу на поверхность корней растений хозяев, шейка

же остается внутри тканей корня; целиком покрыты яйцевыми мешками. После выпадания самок, на корнях остаются небольшие углубления.

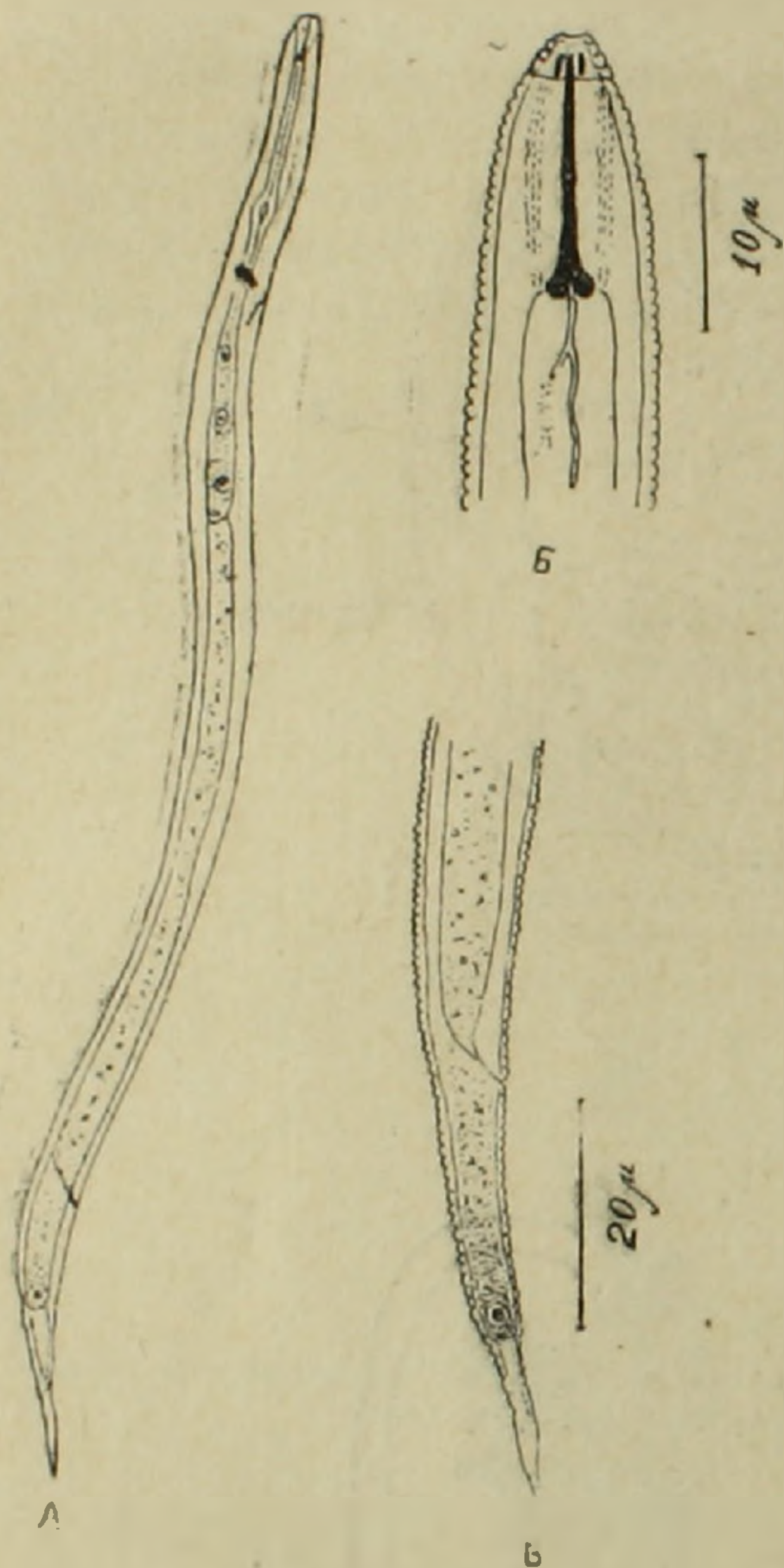
Яйцевой мешок большой (он в два, а иногда и больше раз превышает тело самки), плотный и прочный, как у галловых нематод.

Вначале он желтовато-коричневый, а в дальнейшем принимает черный цвет.

Яйца почти полностью откладываются в яйцевом мешке, где и происходит развитие личинок, лишь небольшое количество яиц (18—25—30 шт.) остается в теле самки после ее отмирания, а она превращается в „цистоидную стадию“, совершенно отличную от цисты *Heterodera* (фиг. 5А). В этой стадии сохраняется белая полосатая кутикула самки с вульварным конусом, под которой лежит желтовато-коричневый слой, на котором (на самой поздней стадии) появляется своеобразный узор (фиг. 5 Б). Оставшиеся внутри тела отмершей самки яйца кроме обыкновенной оболочки покрыты толстой, коричневой оболочкой с пальцевидными выростами, похожей на протеиновую оболочку (фиг. 5 В).

Яйца—длина яиц (100 изм.) варьирует от 60,0 до 91,2 μ (76,3 μ), ширина их 36,0—45,6 μ (39,8 μ). Отношение ширины к длине яиц равно 1 : 1,5—2,4 (1 : 1,9).

Личинки (фиг. 6) очень тонкие, длина их тела (33 изм.) колеблется от 316,8 до 439,2 μ (409,9 μ), ширина 12,0—16,8 μ (13,0 μ). $a = 21,7 - 36,6$ (30,7), $b = 3,0 - 3,4$, $c = 7,2 - 9,9$ (8,2). Длина копы 13—14 μ , длина основания копы 2,0—2,5 μ , а ширина 2,0—3,5 μ . Кутикула кольчатая, ширина колец около 1,0 μ . Кольцо образует продольные полосы. Число головных колец 3—4. Хвост острый, часто кончается шиповидным отростком. Длина прозрачной части его



300 x

Фиг. 6. А — тотальный рисунок; Б — головная часть; В — хвост личинки *Meloidoderita kirjanovae* sp. n.

около 14 — 15 μ . Выделительная пора открывается на 74,4—86,4 μ (79,3 μ) от головного конца.

Самец не обнаружен.

Типичный хозяин — мята [*Mentha longifolia* (L.) Huds.].

Типичное местонахождение — фруктовый сад в с. Мегри (Мегринский район, АрмССР).

Голотип — тотальный препарат самки хранится в нематологических коллекциях Зоологического института АН Армянской ССР. за № 224/М/5, от 6/VI 1961 г. Паратипы — тотальные препараты нескольких самок и деталей частей тела, а также корешки мяты с самками — хранятся там же за № 224/М/1 — 224/М/26 от 6/VI 1961 г.

Зоологический институт Академии наук
Армянской ССР

2. Ե. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Նեմատոդի ցոր սեռ և ցոր տեսակ Հայկական ՍՍՌ-ից (Nematoda, Heteroderidae)

Հոդվածում տրված է դադձի [*Mentha longifolia* (L.) Huds.] արմատների վրա Մեղրիում հայտնաբերված *Heteroderidae* ընտանիքին պատկանող նեմատոդի նոր սեռի *Meloidoderita* gen. n. և նոր տեսակի *Meloidoderita kirjanovae* Poghoslian sp. n. նկարագրությունը:

Հայտնաբերված նոր տեսակն իր մեջ միափոխվում է *Heteroderidae* ընտանիքին պատկանող 3 սեռերի (*Meloidogyne* Goeldi, 1887, *Heterodera* Schmidt, 1871 և *Meloidodera* Chitwood, Hannon and Esser, 1956) և մի շարք այլ համակարգիչներ, որոնք մանրամասն շարադրված են հոդվածում:

Т. К. Киприян

Гипоталамическое влияние на сенсорную афферентную передачу в спинном мозге

(Представлен академиком АН Армянской ССР С. К. Карапетяном 10/VII 1965)

Показано, что переключение афферентных импульсов в синапсах спинного мозга находится под контролирующим действием высших центров. Эти центральные влияния осуществляются или самой ретикулярной формацией ствола мозга (¹⁻³), или активными структурами, находящимися в тесной связи с ретикулярной формацией (^{4, 5}).

За последние несколько лет как у нас, так и за рубежом возрос интерес к изучению функций гипоталамуса в целом и, в частности, его нисходящих влияний (^{6, 7}). В исследованиях предыдущих авторов и в наших работах (^{8, 9}) было обнаружено облегчение моносинаптического рефлекса и подавление полисинаптических рефлексов поясничного отдела спинного мозга при стимуляции ядер медиального, латерального и заднего гипоталамуса. В наших исследованиях, в зависимости от раздражаемых афферентов (мышечный, смешанный, кожный нервы), полисинаптические реакции или подавлялись в большинстве случаев, или оставались неизменными, или же в некоторых случаях облегчались при стимуляции ядер гипоталамуса в то время, как моносинаптическая реакция, как правило, облегчалась. Было сделано предположение, что нисходящие влияния от гипоталамуса на уровне сегментов спинного мозга, вероятно, осуществляются через вставочные нейроны.

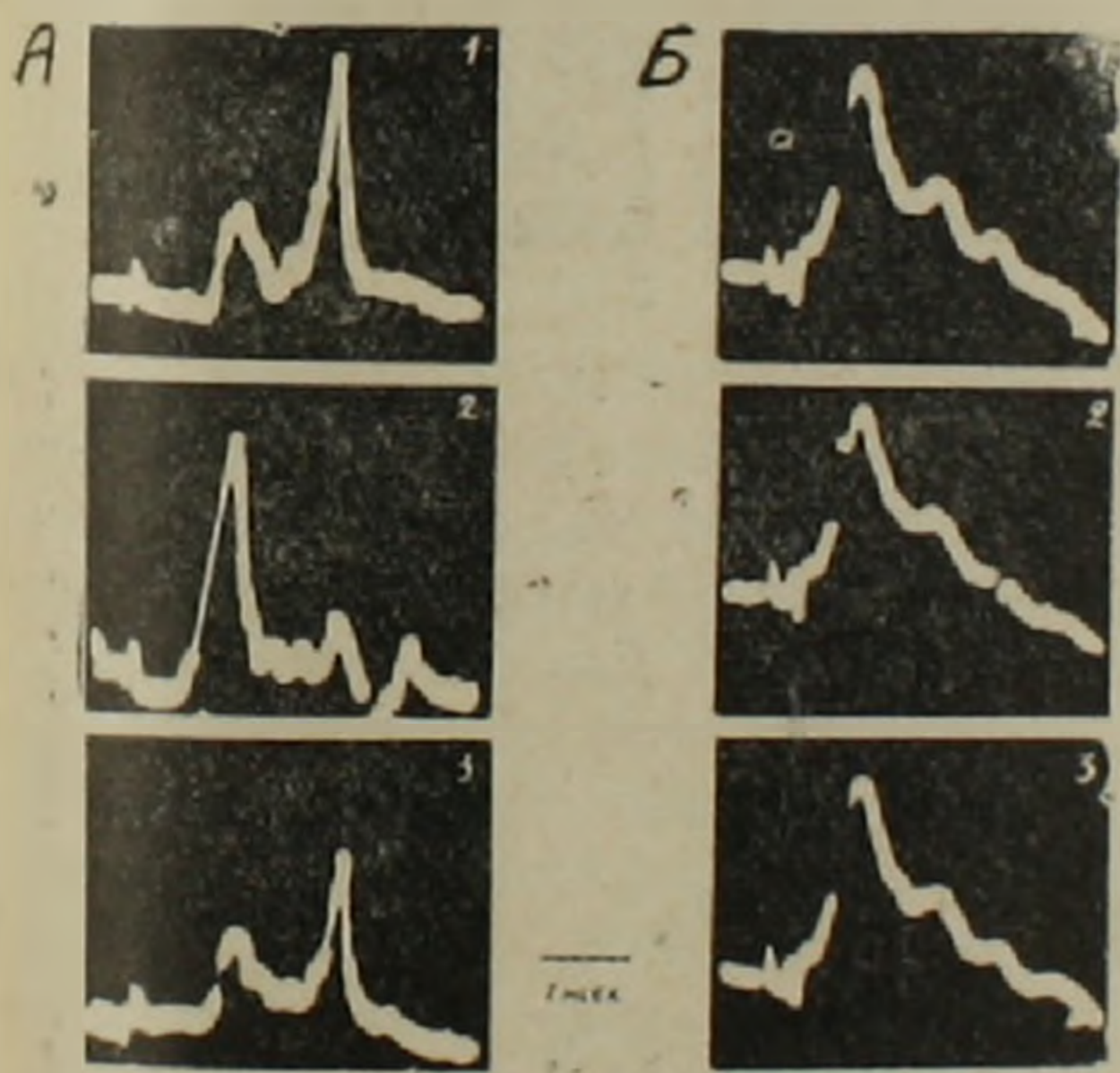
В настоящем сообщении приводятся данные по изучению гипоталамического контроля прихода афферентной волны возбуждения с последующей синаптической активацией вставочных нейронов задних рогов спинного мозга, электрофизиологическим проявлением активности которых являются медленные потенциалы задней поверхности и заднекорешковый рефлекс.

Опыты проводились на неанестезированных, обездвиженных d-тубокурарином кошках. В части опытов животному вводилась хлоралоза внутривенно в дозе 15 мг/кг. Стимуляция ядер гипоталамуса производилась биполярными электродами (межполюсное расстояние 0,25 мм), вводимыми стерилотаксически. Применялась частота 100 в сек, напряже-

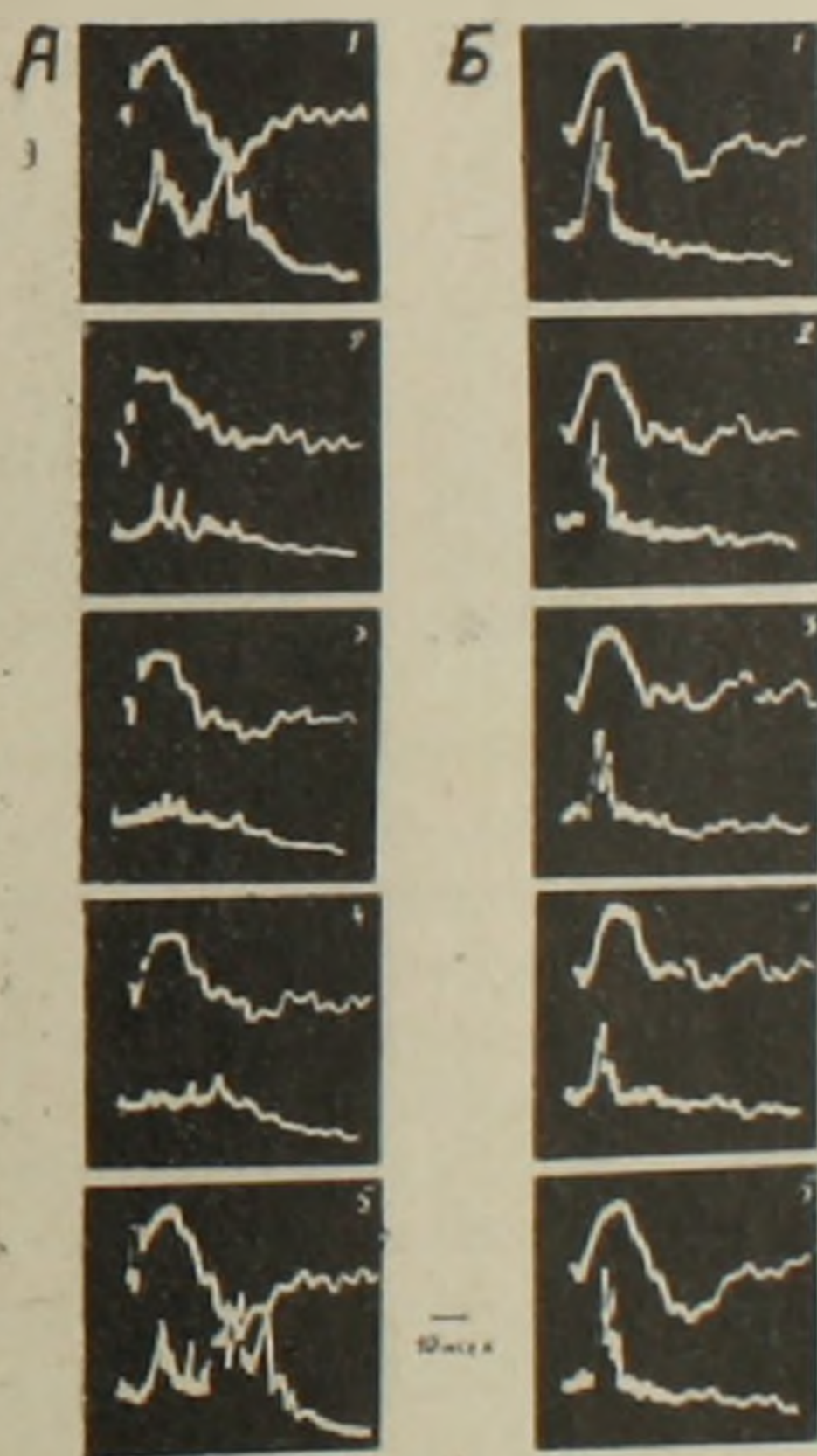
ние 1—5 вольт, длительность каждого импульса 0,1—0,5 мсек. Для перерыва гамма-петли билатерально перерезались передние корешки от L₁ до S₂. Раздражая смешанный и кожный нервы задней конечности (n. tibialis, n. suralis) регистрировались электротонические потенциалы заднего перерезанного корешка, соседнего с тем, по которому входила афферентная волна возбуждения, антидромные разряды в заднекорешковых волокнах и медленный потенциал задней поверхности спинного мозга. Амплитуда медленного потенциала поверхности спинного мозга в среднем равна 500 мкв, заднекорешкового электротонического потенциала—250 мкв, заднекорешковых антидромных разрядов 350—500 мкв.

Отрицательный интермедиарный потенциал, впервые описанный Гассером и Грехемом (¹⁰) и подробно изученный Бернгардом с сотрудниками (¹¹), отводимый с поверхности спинного мозга на раздражение смешанного нерва, при раздражении латерального ядра гипоталамуса, вызывающего облегчение моносинаптической реакции и подавление полисинаптической реакции, претерпевал небольшое (10—15%) угнетение в виде уменьшения N₁ и N₂ отклонений (фиг. 1). Подобный эффект угнетения отрицательного интермедиарного потенциала от активизирующих мотонейрон супраспинальных структур (бульбарная ретикулярная формация, средняя часть задней комиссуры) был получен Остиным (⁴), Клейнтисом, Кондзуми, Бруксом (¹), Линдбломом и Оттоссоном (²).

При введении животному умеренной дозы хлоралозы (15 мг кг) наблюдалась сильная активация спинномозговых вставочных нейро-

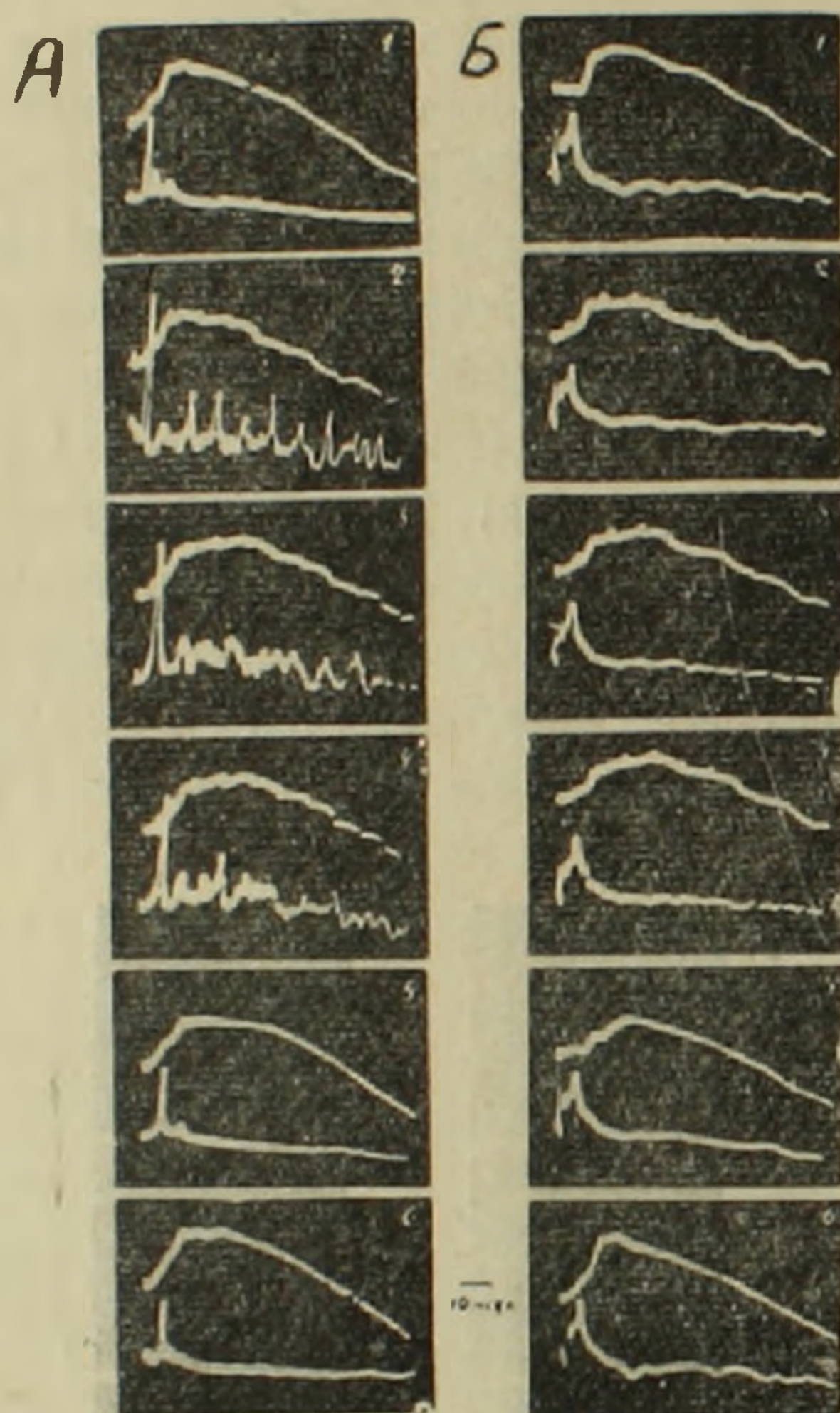


Фиг. 1. Влияние раздражения латерального ядра гипоталамуса на моно- и полисинаптический потенциал (А) и на отрицательный интермедиарный потенциал спинного мозга (Б). 1—до раздражения; 2—во время раздражения гипоталамуса; 3—после раздражения. (Объяснение в тексте).



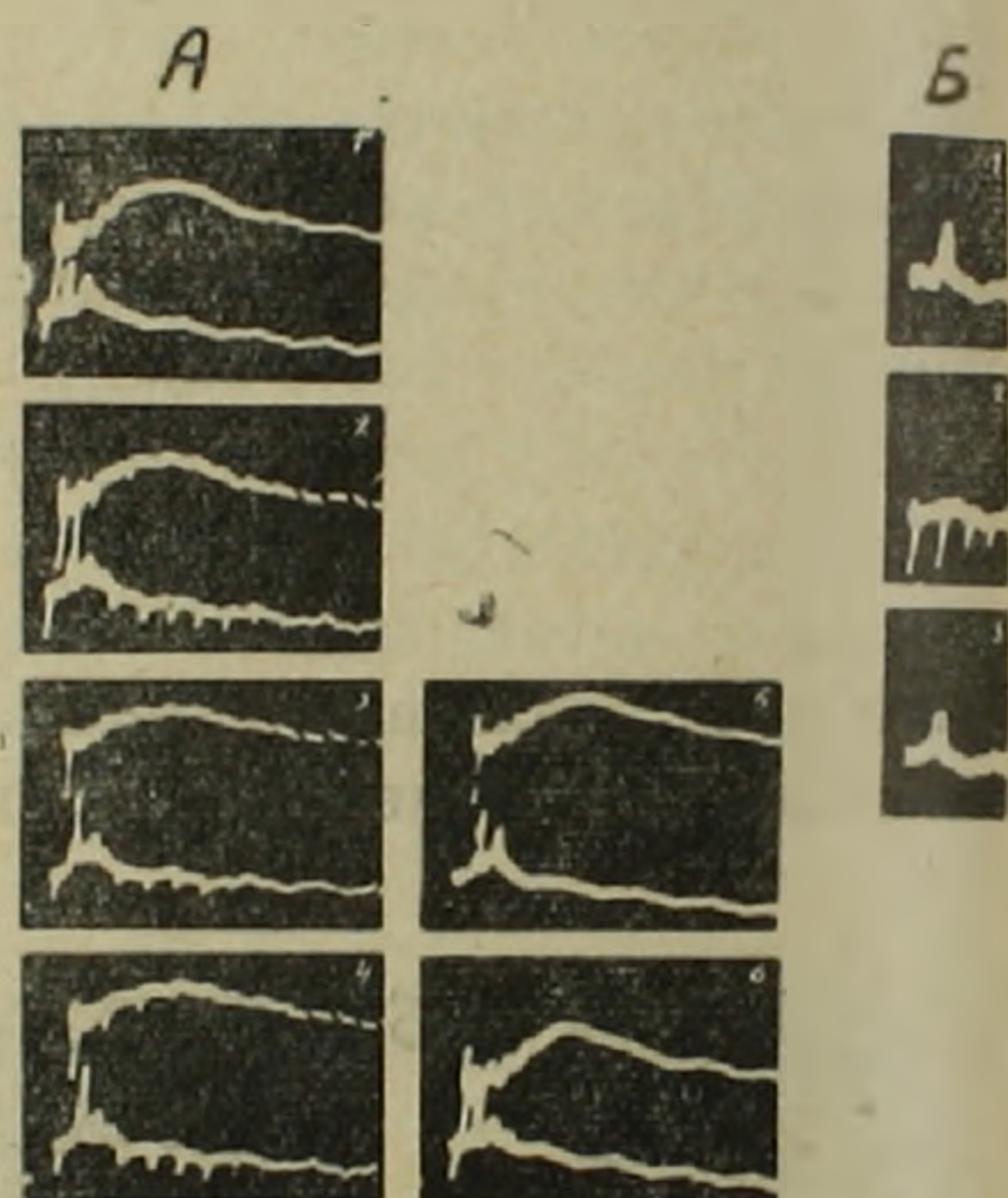
Фиг. 2. Влияние раздражения заднего гипоталамуса на интермедиарный потенциал спинного мозга (верхний луч), на переднекорешковые полисинаптические потенциалы (А—нижний луч) и на заднекорешковые разряды (Б—нижний луч). 1—до раздражения; 2, 3, 4—во время раздражения гипоталамуса; 5—после раздражения. (Объяснение в тексте).

нов. На нижнем луче осциллограммы (фиг. 2А) показаны ранние и поздние полисинаптические разряды от стимуляции смешанного нерва (моносинаптическая реакция отсутствовала в данных условиях эксперимента). На верхнем луче — запись потенциала с поверхности спинного мозга — видны отрицательное и положительное отклонения интермедиарного потенциала. Раздражение задней области гипоталамуса (фиг. 24; 2, 3, 4) приводит к подавлению положительного отклонения одновременно с угнетением полисинаптических разрядов мотонейрона. Результаты приведенных данных дают основание предположить, что активность определенных групп вставочных нейронов поясничного отдела спинного мозга, участвующих в генезе медленного потенциала поверхности мозга, угнетается при стимуляции активирующих областей гипоталамуса.



Фиг. 3. Влияние раздражения заднего гипоталамуса на электротонический заднекорешковый потенциал (А, Б, верхний луч), на переднекорешковые моно- и полисинаптические потенциалы (А, нижний луч) и на интермедиарный потенциал (Б, нижний луч). 1—до раздражения 2, 3, 4—во время раздражения гипоталамуса; 5, 6—после раздражения. (Объяснение в тексте).

ных групп вставочных нейронов поясничного отдела спинного мозга, участвующих в генезе медленного потенциала поверхности мозга, угнетается при стимуляции активирующих областей гипоталамуса.



Фиг. 4. Влияние раздражения заднего гипоталамуса на электротонический заднекорешковый потенциал (А, верхний луч), на переднекорешковый моно- и полисинаптические разряды (А, нижний луч) и на переднекорешковые полисинаптические разряды от кожного афферента (Б). А: 1—до раздражения; 2, 3, 4—во время раздражения гипоталамуса; 5, 6—после раздражения. Б: 1—до раздражения; 2—во время раздражения гипоталамуса; 3—после раздражения. (Объяснение в тексте).

Причем положительное отклонение интермедиарного потенциала более подвержено нисходящему воздействию.

Электротонические потенциалы заднего корешка, выражающие интенсивную деполяризацию концевых частей афферентных волокон

(12-14), также находятся под гипоталамическим контролем. На фиг. 3 показан эффект раздражения заднего гипоталамуса на электротонический заднекорешковый потенциал при стимуляции афферентов смешанного нерва. Угнетающий эффект гипоталамуса на этот потенциал сопровождается небольшим подавлением интермедиарного потенциала (фиг. 3Б, нижний луч), облегчением моносинаптического рефлекса (фиг. 3А, нижний луч), подавлением полисинаптических реакций с одновременным возникновением на переднем корешке спайкоподобных разрядов.

Аналогичный эффект угнетения заднекорешкового электротонического потенциала демонстрируется на фиг. 4А. Пороговое для вызова облегчающего эффекта моносинаптического потенциала раздражение заднего гипоталамуса приводит к угнетению заднекорешкового потенциала. То же раздражение гипоталамуса (фиг. 4Б) вызывает полное исчезновение полисинаптического переднекорешкового разряда, полученного от стимуляции кожного афферента (п. *suralis*). Следует отметить, что, как правило, нисходящие активирующие воздействия от гипоталамуса затормаживали полисинаптические кожные рефлексy.

На высоковозбудимых препаратах и после введения животному небольших доз хлоралозы удавалось зарегистрировать антидромные разряды в заднекорешковых волокнах. На фиг. 2Б (нижний луч) приведен характерный эффект угнетения заднекорешкового рефлекса при активации заднего гипоталамуса. Нисходящее тормозное действие на эти быстрые заднекорешковые потенциалы получено в исследованиях Хагбарда и Керра (5), Клейнтиса, Коидзуми и Брукса (1), Брукса и Коидзуми (3). В недавнем сообщении Т. М. Мамонец (15) было выдвинуто предположение, что в генезе антидромных быстрых заднекорешковых потенциалов участвуют нервные клетки иного типа, чем те, которые генерируют медленные заднекорешковые потенциалы. В наших экспериментах активность и тех и других находилась под ярко выраженным контролем гипоталамуса.

Таким образом, в заключение, можно высказать предположение о том, что сенсорная передача в спинном мозгу находится под влияниями, нисходящими от гипоталамуса и способными изменять синаптическую передачу на уровне вставочных нейронов спинного мозга. Как было показано, эти влияния выражаются в диффузном угнетении медленной и быстрой активности нервных элементов задних рогов спинного мозга. Учитывая тесные анатомические связи гипоталамуса с ретикулярной формацией ствола мозга, можно считать, что гипоталамические нисходящие импульсы передаются по ретикуло-спинальным путям, что, однако, не исключает и более специфического характера воздействия гипоталамуса на спинальную нейронную активность.

Институт физиологии им. акад. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Հիպոթալամուսի ազդեցությունը սենսոր աֆֆերենս փոխանցման վրա ողնուղեղում

Ներկա աշխատանքում բերվում են տվյալներ, որոնք ցույց են տալիս, որ ողնուղեղում սենսոր փոխանցումը գտնվում է հիպոթալամուսի վայրեջ ազդեցության տակ, որոնք ընդունակ են փոփոխելու սինապտիկ փոխանցումը ողնուղեղի միջանկյալ նեյրոնների մակարդակի վրա: Այդ ազդեցությունները արտահայտվում են ողնուղեղի հետին եղջյուրների ներվային էլեմենտների դանդաղ և արագ ակտիվության մարումով:

Հաշվի առնելով հիպոթալամուսի և ողեղի բնի ցանցանման գոյացության անատոմիական էությունը, կարելի է ենթադրել, որ հիպոթալամիկ վայրեջ իմպուլսները փոխանցվում են ցանցանման — ողնուղեղային ուղիով, որը խնայելի չի անտեսում հիպոթալամուսի յուրահատուկ ազդեցության բնույթը ողնուղեղի նեյրոնների ակտիվության բնույթը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Փ. Клейнтис, К. Ковдзуми и Ч. Брукс, Stimulation of suprabulbar Reticular formation. Arch. Neurol. a. Psychiatr. 73, 4, 425—438, 1955. ² У. Ф. Лундблом и Дж. О. Оттоссон, Bulbar influence on spinal cord dorzum potentials and ventral root reflexes. Acta Physiol. Scand., 35, 3—4, 203—214, 1956. ³ Ч. Брукс и К. Ковдзуми, Origin of the dorzal root reflexes. J. Neurophysiol., 19, 1, 61—74, 1956. ⁴ М. Оттин, Suptabulbar mechanisms of facilitation and inhibition of cord reflexes. Res. Publ. Ass. Nerv. Ment. Dis., 30, 196—222, 1952. ⁵ К. Е. Хазбарт и Д. И. Керр, Central influences on spinal afferent condition. J. Neurophysiol., 17, 295—307, 1954. ⁶ III. Фельдман и И. Вагман, Hypothalamic effects on spinal reflexes and their alteration by pentobarbital. Experim. Neurol., 5, 250—268, 1962. ⁷ А. С. Аматауни, ДН АрмССР, т. XXXIX, № 2, 123—128 (1964). ⁸ О. Г. Баклаваджян и Т. К. Киприян. В сб. Центральные и периферические механизмы двигательной деятельности животных и человека. Третий международный симпозиум, 1964. ⁹ Т. К. Киприян. Тезисы научных сообщений, X съезд физиологов, т. II, вып. 2, Ереван, 1964. ¹⁰ Х. С. Гассер и Х. Т. Грехем, Potentials produced in the spinal cord by stimulation of dorzal roots. Am. J. Physiol., 103, 2, 303—320, 1933. ¹¹ И. Г. Бернгард с сотр. (в кн. „In: Honour of S. Raymon J. Cajal“), Acta Physiol. Scand., 29, Suppl. 106, 1953. ¹² Д. Х. Бэррон и Б. Х. Ц. Мэтьюз, The interpretation of potential changes in the spinal cord. J. Physiol., 92, 276—321, 1938. ¹³ И. С. Бериташвили, Общая физиология нервной и мышечной системы. М., 1947, т. 2. ¹⁴ II. Д. Уолл, The origin of a spinal cord slow potential. J. Physiol., 164, 3, 508—526, 1962. ¹⁵ Т. М. Мамонев, Тезисы научн. сообщений к X съезду физиологов, т. II, вып. 2, Ереван, 1964.

