

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2013

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ
խմբագրական խորհուրդ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱՆԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՍԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Ս. ՍԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԹՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ՍԵՂՈՎՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА А. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address — 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL <http://ellb.sci.ame-mail: rnas@sci.am>

©НАН РА. Президиум. 2013

©Издательство "Гитумюн"
НАН РА. 2013

ԲՈՎԱՆՂԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Լ. Զ. Գևորգյան – Սպեկտրալ լիդ և նորմալ լիդ օպերատորների բնութագրումը 231

Լ. Ղ. Պողոսյան – Քվադր-պարբերական ինտերպոլացիայի L_2 - զուգամիտության մասին 240

Ս. Հ. Բաբայան, Ս. Ս. Զաքարյան – Դիրիլյեի խնդիրը չորրորդ կարգի մեկ ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար 248

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ս. Հովհաննիսյան – Համասեռ կոնսոլային ձողի լայնական տատանումների ժամանակ մաքուր ծոման և ծոման առաձգական ալիքների տարածման խնդրի դրվածքը 259

Ք. Ս. Ժամակոչյան – Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպլյար առաձգական բարակ հեծանների մաթեմատիկական մոդելի կառուցման համար ... ՖԻԶԻԿԱ 268

Ռ. Ա. Ալանալյան – Երկու անգամ լիցքավորված բոզոնների ծնումը ֆոտոնի հետ ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ 276

Մ. Ա. Հովհաննիսյան, Ռ. Ռ. Անդրեասյան, Գ. Մ. Պարոնյան, Հ. Վ. Աբրահամյան – Կոմպակտ $z > 1$ ռադիոաղբյուրների ուսումնասիրություն. հեռավոր քվազարների թեկնածուներ 281

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

Տ. Ս. Խաչատրյան, Վ. Օ. Թովուգյան – Հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության փոփոխման առանձնահատկությունները երկու ամսական առնետների արյան մեջ հիփոթիրեոզի ժամանակ, քոլինի էսթեր N-(2-մեթոքսիբենզոիլ)-Օ- իզոպրոպիլ- α , β -դեհիդրոթիրոզինի ազդեցությունից առաջ և հետո..... 290

Հ. Խ. Ավագյան, Ն. Խ. Ալշուքյան, Ն. Հ. Մովսեսյան, Գ. Գ. Մինասյան – L-արգինինի նյութափոխանակության պատկերը մկների գլխուղեղում Էրլիխի ասցիտային կարցինոմայի ժամանակ և հակաուռուցքային բուժման ազդեցությունը *Escherichia coli*-ի ոչ ախտածին շտամների օգտագործմամբ. Արգինազ: Հաղորդում 1..... 295

Ա. Ա. Աղաբաբովա, Ն. Օ. Մովսիսյան, Ա. Մ. Հակոբյան, Օ. Ա. Ավագյան – Էրլիխի ասցիտային կարցինոմայի ժամանակ մորֆոնիստոքիմիական փոփոխություններ աղիքային ցուպիկի ազդեցության ներքո 303

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ն. Ա. Հարությունյան – Պրոբիոտիկների ազդեցությունը պարբերական հիվանդությամբ հիվանդների աղիքային միկրոֆլորայի *E. coli* անջատուկների հակաբիոտիկակայունության վրա 311

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ժ. Հ. Վարդանյան, Վ. Վ. Ղազարյան, Զ. Մ. Պառավյան – Բողբոջների ձմեռային պահպանվածությունը որպես ծառային ինտրոդուցենտների հարմարվողականության ցուցանիշ 316

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Л. З. Геворгян</i> – Характеристика спектралоидных и нормалоидных операторов	231
<i>Л. Д. Погосян</i> – Об L_2 -сходимости квазипериодической интерполяции	240
<i>А. О. Бабаян, А. А. Закарян</i> – Задача Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка	248

МЕХАНИКА

<i>С. М. Оганесян</i> – Постановка задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня ...	259
<i>К. А. Жамакочян</i> – Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок	268

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – Рождение дважды заряженных бозонов с фотоном	276
--	-----

АСТРОФИЗИКА

<i>М. А. Оганнисян, Р. Р. Андреасян, Г. М. Паронян, А. В. Абрамян</i> – Исследование компактных радиоисточников с $z > 1$: кандидатов в далекие квазары	281
--	-----

БИОХИМИЯ

<i>Т. С. Хачатрян, В. О. Топузян</i> – Особенности изменения концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови двухмесячных крыс при гипотиреозе до и после действия холиновых эфиров N-замещённых- α , β дегидроаминокислот	290
<i>О. Х. Авагян, Н. Х. Алчуджян, Н. О. Мовсесян, Г. Г. Минасян</i> – Метаболический профиль L-аргинина в головном мозге мышей при асцитной карциноме Эрлиха и влияние противопухолевой терапии авирулентными штаммами <i>Escherichia coli</i> : аргиназа. Сообщение 1	295
<i>А. А. Агабабова, Н. О. Мовсесян, А. М. Акопян, О. А. Авакян</i> – Морфогистохимические изменения при асцитной карциноме Эрлиха на фоне воздействия кишечной палочки	303

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>Н. А. Арутюнян</i> – Влияние пробиотиков на антибиотикорезистентность комменсальных <i>E. coli</i> изолятов, выделенных из кишечной микрофлоры больных периодической болезнью	311
--	-----

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

<i>Ж. А. Варданян, В. В. Казарян, З. М. Паравян</i> – Энергетический уровень почек и их зимняя сохранность как показатель приспособления древесных интродуцентов	316
--	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>L. Z. Gevorgyan</i> – Characterization of Spectraloid and Normaloid Operators.....	231
<i>L. D. Poghosyan</i> – On L_2 -convergence of the quasi-periodic interpolation.....	240
<i>A. H. Babayan, A. A. Zaqaryan</i> – The Dirichlet Problem for the Fourth Order Improperly Elliptic Equation.....	248

MECHANICS

<i>S. M. Hovhannisyan</i> – Formulation of the Problem of Propagation of Elastic Waves of a Pure to Bending and a Bending at Roll Oscillation of Homogeneous Cantilever Beam	259
<i>K. A. Zhamakochyan</i> – Application of the Method of Power Series for the Construction of the Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Bars	268

PHYSICS

<i>R. A. Alanakyan</i> – On the Doubly Charged Bosons Production with Photon.....	276
---	-----

ASTROPHYSICS

<i>M. A. Hovhannisyan, R. R. Andreasyan, G. M. Paronyan, H. V. Abrahamyan</i> – The Investigation of Compact Radio Sources with $Z>1$: Candidates of Distant Quasars	281
---	-----

BIOCHEMISTRY

<i>T. S. Khachatryan, V. O. Topuzyan</i> – Features of Changes in Concentration of Pituitary Thyroid Hormone and Thyroid Hormones in the Blood of Two-Month Rats with Experimental Hypothyroidism before and after Operations with N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl- α , β -Dehydrothyroline Choline Ester	290
<i>H. Kh. Avagyan, N. Kh. Alchujyan, N. H. Movsesyan, G. G. Minasyan</i> – L-arginine metabolic profile in the mice brain at Ehrlich ascites carcinoma and effects of anticancer therapy with avirulent strains of <i>Escherichia coli</i> : arginase. Report 1	295
<i>A. A. Agababova, N. O. Movsesyan, A. M. Hkopyan, O. A. Avakyan</i> – Morphohistochemical Changes in Ehrlich Ascites Carcinoma Arising in the Background of the Impact of <i>E. coli</i>	303

MICROBIOLOGY

<i>N. A. Harutyunyan</i> – Effects of Probiotics on Antibiotic Resistance of Commensal <i>E. coli</i> , Isolated From Intestinal Microflora of Periodic Disease Patients	311
--	-----

PLANT PHYSIOLOGY

<i>Zh. H. Vardanyan, V. V. Kazaryan, Z. M. Paravyan</i> – Winter Persistence of Buds as an Indicator of Adaptation of Alien Tree Species	316
--	-----

УДК 517.984

L. Z. Gevorgyan

Characterization of Spectraloid and Normaloid Operators

(Submitted by academician V. S. Zakaryan 4/II 2013)

Keywords: *spectraloid operator, normaloid operator, numerical radius, norm inequalities.*

0. Let $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a Hilbert space and A be a bounded linear operator, acting in H . Denote by SpA the spectrum of A . Recall that $\lambda \in \mathbb{C}$ is said to be a reducing (normal) eigenvalue of A if there exists a nonzero element x such that $Ax = \lambda x$, $A^*x = \bar{\lambda}x$ and λ belongs to the approximate point spectrum $\pi(A)$ of A if there exists a sequence of unit vectors $\{x_n\} \subset H$ such that

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0. \quad (1)$$

We say that λ is an approximate normal eigenvalue if

$$\|(A - \lambda I)x_n\| + \|(A - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0. \quad (2)$$

Denote by $W(A)$ the numerical range of A , i.e. $W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$ and let $r(A) = \sup_{\lambda \in SpA} |\lambda|$ be the spectral radius of A , $w(A) = \sup_{\lambda \in W(A)} |\lambda|$ be the

numerical radius of A . As it is well known [9],[10] $r(A) \leq w(A)$, the numerical radius is an operator norm, equivalent to the usual one, i.e.

$w(A) \leq \|A\| \leq 2w(A)$, so $1 \leq \frac{\|A\|}{w(A)} \leq 2$. The extremal values of this ratio are

investigated in [3]. The operator, satisfying $r(A) = w(A)$ is said to be spectraloid and if $w(A) = \|A\|$ (equivalent condition $r(A) = \|A\|$), then A is said to be normaloid, so any normaloid operator is spectraloid.

The operator A satisfies the Daugavet equality [2] if $\|A + I\| = \|A\| + 1$. We introduce a slightly more general notion and say that A satisfies the Daugavet equality at λ if

$$\|A + \lambda I\| = \|A\| + |\lambda|. \quad (3)$$

1. We start by describing an elementary necessary and sufficient condition for an operator to be spectraloid or normaloid.

Lemma 1. *A Hilbert space operator A is*

- i) *normaloid if and only if there exists a complex number λ such that $|\lambda| = \|A\|$ and $\lambda \in SpA$;*
- ii) *spectraloid if and only if there exists a complex number λ such that $|\lambda| = w(A)$ and $\lambda \in SpA$.*

Note that the mentioned above conditions imply that in both cases $\lambda \in \partial W(A) \cap \partial SpA$, where ∂M is the topological boundary of the set M .

Corollary. Properties of operators to be spectraloid or normaloid are translation-invariant at least in one direction.

Proof. For any $\mu \in \mathbb{C}$ one has $Sp(A + \mu I) = SpA + \mu$, $W(A + \mu I) = W(A) + \mu$ and if $\arg \lambda = \arg \mu$, then $r(A + \mu I) = r(A) + |\mu|$, $w(A + \mu I) = w(A) + |\mu|$. Thus for spectraloid operator $r(A + \mu I) = w(A + \mu I)$ and for normaloid operator

$$\|A\| + |\mu| = w(A) + |\mu| = w(A + \mu I) \leq \|A + \mu I\| \leq \|A\| + |\mu|. \quad (4)$$

Proposition 1. The operator A is normaloid if and only if there exists a number λ , $|\lambda| = \|A\|$, which is an approximate normal eigenvalue of A .

Proof. The sufficiency of this condition is evident. Passing to the necessity, note that the boundary of the spectrum is contained in the approximate point spectrum ([10], Problem 63), so the condition (1) is satisfied. Denote $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n \rangle$. From the inequality

$$|\langle Ax_n, x_n \rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|$$

one gets $\lambda_n \rightarrow \lambda$, hence

$$\|(A - \lambda I)^* x_n\|^2 = \|A^* x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda \bar{\lambda}_n + |\lambda|^2 \leq 2(\|A\|^2 - \operatorname{Re} \lambda \bar{\lambda}_n) \rightarrow 0.$$

Note that conditions $|\lambda| = \|A\|$ and (1) imply (2).

Orland proved [14] that $\lambda \in \overline{W(A)}$ (the upper bar on the set denotes the closure of the corresponding set) and $|\lambda| = \|A\|$ imply $\lambda \in SpA$.

For the particular case the conclusion may be formulated more precisely.

Lemma 2. *Let $\lambda \in W(A)$ and $|\lambda| = \|A\|$. Then λ is a reducing eigenvalue of A .*

Proof. Let $\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x \rangle|$, where $\|x\| = 1$. Then

$$\|A\| = |\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|,$$

meaning that the Schwartz inequality becomes an equality, hence $Ax = \lambda x$. By the same way $A^*x = \bar{\lambda}x$.

This lemma is a generalization of a result by Laursen ([13], Lemma 1.10.)

Denote $D(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\}$ the circle of the radius r on the complex plane.

Example. Let S be the operator of the simple unilateral shift, realized, e.g. as the operator of the multiplication by the independent variable $(Sf)(z) = zf(z)$ in the Hardy space $H^2(D)$ in the unit circle and

$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Denote by A the operator $0.5 \cdot S \oplus J_2$. Evidently $W(A) = D(0, 1/2)$. Any complex number $\mu, |\mu| = 1/2$ satisfies

$$\mu \in W(A), |\mu| = w(A) = r(A),$$

but A has no normal eigenvalues. This example shows that Lemma 2, in general, is not true for spectraloid operators.

Lemma 3. Let $\lambda \in \pi(A), \bar{\mu} \in \pi(A^*), \lambda \neq \mu$ and

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0, \|(A - \mu I)^* y_n\| \rightarrow 0, \|x_n\| = \|y_n\| = 1.$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0$.

Proof. As $(\mu - \lambda) \langle x_n, y_n \rangle = \langle (A - \lambda I)x_n, y_n \rangle - \langle x_n, (A - \mu I)^* y_n \rangle$, we get

$$|\langle x_n, y_n \rangle| \leq \frac{1}{|\mu - \lambda|} (\|(A - \lambda I)x_n\| + \|(A - \mu I)^* y_n\|) \rightarrow 0.$$

Proposition 2. Let $\lambda \in \partial W(A)$. Then $\lambda \in SpA$ if and only if λ is an approximate normal eigenvalue.

Proof. The sufficiency of this condition is obvious. Let now $\lambda \in \partial W(A) \cap SpA$. As the numerical range is convex, we may trace a support line l to $W(A)$, passing through λ . Let P be the perpendicular to l at λ , directed outward to $W(A)$. Take a point $\mu \in P$. As $SpA \subset \bar{W}(A)$, then $\mu \notin SpA$. According to well-known result of Stone [15] for the resolvent $R_\mu(A) = (A - \mu I)^{-1}$ the following inequality is satisfied $\|R_\mu(A)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\mu, W(A))}$, where $\text{dist}(\mu, W(A))$ is the distance from μ to $W(A)$. By choice of μ one

has $\text{dist}(\mu, W(A)) = |\lambda - \mu|$ and $\|R_\mu(A)\| \leq |\lambda - \mu|^{-1}$. According to the spectral mapping theorem $\lambda \in \text{Sp}A$ implies $(\lambda - \mu)^{-1} \in \text{Sp}R_\mu(A)$. As for any operator its norm is not less than the spectral radius $\|R_\mu(A)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(\mu, \text{Sp}A)} = |\lambda - \mu|^{-1}$, finally $\|R_\mu(A)\| = |\lambda - \mu|^{-1}$. Recalling Proposition 1, we get

$$\left\| \left(R_\mu(A) - \frac{1}{\lambda - \mu} I \right) x_n \right\| + \left\| \left(R_\mu(A) - \frac{1}{\lambda - \mu} I \right)^* x_n \right\| \rightarrow 0.$$

As

$$A - \lambda I = (\mu - \lambda)(A - \mu I) \left(R_\mu(A) - \frac{I}{\lambda - \mu} \right)$$

and

$$(A - \lambda I)^* = (\bar{\mu} - \bar{\lambda})(A - \mu I)^* \left(R_\mu(A) - \frac{I}{\lambda - \mu} \right)^*,$$

finally we have $\|(A - \lambda I)x_n\| + \|(A - \lambda I)^* x_n\| \rightarrow 0$.

This is the infinite dimensional analogue of Theorem 1.6.6 from [11]. As simple consequence we get the following (known)

Corollary. Any eigenvalue, belonging to the boundary of the numerical range is a normal eigenvalue.

Note that conditions $|\lambda| = w(A)$ and (1) imply (2).

Combining Lemma 1 and Proposition 2, we get the following result.

Proposition 3. The operator A is spectraloid if and only if there exists a number $\lambda, |\lambda| = w(A)$ which is an approximate normal eigenvalue of A .

Lemma 4. Let $\lambda, \mu \in \pi(A) \cap \partial W(A), \lambda \neq \mu$ and

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0, \|(A - \mu I)y_n\| \rightarrow 0, \|x_n\| = \|y_n\| = 1.$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0$.

Proof. By Proposition 2 $\|(A - \mu I)y_n\| \rightarrow 0$ implies $\|(A - \mu I)^* y_n\| \rightarrow 0$.

The proof is completed, recalling Lemma 3.

Lemma 5. Let $\lambda \in \partial W(A) \cap \text{Sp}A$. Then λ is either a normal eigenvalue of A or there exists a sequence $\{x_n\} \subset H$ of unit vectors, converging weakly to the neutral element and satisfying (2).

Proof. Let $\{x_n\}$ be a sequence of unit vectors satisfying (1). As the unit sphere in the Hilbert space is sequentially weak compact there exists a subsequence (denoted again by the same letter) such that $x_n \xrightarrow{w} x$. Let $\mathcal{E}$ be a

positive number. Choosing a subsequence, we may assume that $\|(A - \lambda I)x_n\| < \varepsilon/2, n \in \mathbb{N}$. According to Mazur's theorem ([12], Chapter V, 1, Theorem 2) if $x_n \xrightarrow{w} x$, then for any ε there exist a convex combination $\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n$ ($\alpha_n > 0, \sum_{n=1}^N \alpha_n = 1$) such that $\|x - \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n\| < \varepsilon$. Choosing N from the condition $\|x - \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n\| < \varepsilon/2 \|A - \lambda I\|$, we get

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x\| &< \left\| (A - \lambda I) \left(x - \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n \right) \right\| + \left\| (A - \lambda I) \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \|(A - \lambda I)x_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \sum_{n=1}^N \alpha_n = \varepsilon. \end{aligned}$$

If $x \neq \theta$, then x is an eigenelement of A .

A similar result, attributed to Putnam and Schechter, may be found in ([5], Theorem (3.3)).

Returning to Proposition 3, note that as $\lambda \in \partial W(A)$, for the first case λ is a normal eigenvalue. Evidently, in the finite dimensional space only this case may be realized. This remark permits to give a complete description ([11], pp. 45, 60) of spectraloid and normaloid operators in finite dimensional unitary space. In the second case λ belongs ([3], Theorem (5.1), Corollary) to the essential numerical range $W_e(A)$, hence $\bar{\lambda} \in W_e(A^*)$. Finally, we arrive at the following

Proposition 4. Let $|\lambda| = w(A)$ and $\lambda \in SpA$. Then λ is either a normal eigenvalue or $\lambda \in W_e(A)$ and $\bar{\lambda} \in W_e(A^*)$.

2. We intend to give another necessary and sufficient condition for an operator to be normaloid.

Proposition 5. The operator A is normaloid if and only if it satisfies the Daugavet equality at a nonzero complex λ .

Proof. Let first $\|A + \lambda I\| = \|A\| + |\lambda|, \lambda \neq 0$. According to a theorem of Barraa and Boumazgour [1] for any two Hilbert space operators A and B conditions $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$ and $\|A\|\|B\| \in \overline{W(B^*A)}$ are equivalent. Taking $B = \lambda I$, we get $|\lambda|\|A\| \in \bar{\lambda} \cdot \overline{W(A)}$ or $\|A\|e^{i \arg \lambda} \in \overline{W(A)}$. This inclusion implies $w(A) = \|A\|$. The necessity follows from relations (4).

The example of the two-dimensional Jordan block J_2 , for which despite the equality $w(J_2 + \mu I) = w(J_2) + |\mu|, \forall \mu \in \mathbb{C}$ we have $w(J_2) = 1/2, r(J_2) = 0$ shows that the last equality is only necessary for an operator to be spectraloid.

Remark 1. It is easy to see that the equality (3) implies $\|A + \mu I\| = \|A\| + |\mu|$ for any $\mu, \arg \mu = \arg \lambda$.

Remark 2. As the numerical range in a finite dimensional space is always closed, the equality (3) in this case is equivalent to $\|A\|e^{i \arg \lambda} \in W(A)$.

According to Lemma 2 the equality (3) in finite dimensional space may be fulfilled only in a finite number (not exceeding the dimension of the underlying space) of directions.

As $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$ for any self-adjoint operator A , the Daugavet equality for self adjoint operators is satisfied on the real axis in positive or in negative (or in both) direction. In the direction of the imaginary axis the Vidav equality $\|I + itA\| = 1 + o(t), t \in \mathbb{R}, t \rightarrow 0$ holds [16], excluding the Daugavet equality.

For the Fourier transform operator F , which is unitary in $L^2(\mathbb{R})$ with eigenvalues $\{\pm 1, \pm i\}$ the Daugavet equality is satisfied along the coordinate axes in both directions.

Remark 3. In [4] it has been shown that $w(A) = \|A\|$ is equivalent to the equality $\max_{|t|=1} \|I + tA\| = 1 + \|A\|$.

Proposition 6. Conditions $\|A + \lambda I\| = \|A\| + |\lambda|$ for any $\lambda \in \mathbb{C}$ and $\overline{W(A)} = D(0, \|A\|)$ are equivalent.

Proof. The sufficiency follows from the result of Barraa and Boumazgour. The second part may be proved, recalling [6] the equality

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \arg \lambda = \varphi}} (|\lambda| - \|A - \lambda I\|) = \inf_{\varphi \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re}(e^{i\varphi} A).$$

According to Remark 2, the condition of the last Proposition cannot be fulfilled in a finite dimensional space. For the operator of the simple unilateral shift S

$$\|S + \lambda I\| = \sup_{|z| \leq 1} |z + \lambda| = 1 + |\lambda|,$$

meaning that the Daugavet equality is satisfied for any $\lambda \in \mathbb{C}$.

Another upper bound for the norm of the translated operator (non trivial if $w(A) < \|A\|$ and more accurate for large values of $|\lambda|$) is proved in [7]

$$\|A + \lambda I\| \leq w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}.$$

In general this estimate can not be sharpened. According to Proposition 2 from [7] if $A^2 = 0$ then for any c the equality $\|A + \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}$ is satisfied. This equality implies $\|A\| = 2w(A)$.

Proposition 7. The equality $w(A) = |\lambda|, \lambda \in \overline{W(A)}$ is satisfied if and only if $w(A) + |z| \leq \|A + zI\|$ for all $z, \arg z = \arg \lambda$.

Proof. The condition of this proposition means that $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (\|A + \lambda I\| - |\lambda|) = w(A)$. As the function $f(x) = \|A + xI\| - x, x \geq 0$ is decreasing, we get $\|A + \lambda I\| \leq w(A) + |\lambda|$.

Proposition 8. The equality $\|A\| = 2w(A)$ is satisfied if and only if $\|A + \lambda I\| \leq \|A\|/2 + \sqrt{\|A\|^2/4 + |\lambda|^2}$ for any $\|A + \lambda I\| \leq \|A\|/2 + \sqrt{\|A\|^2/4 + |\lambda|^2}$.

Proof. The necessity of the inequality is obvious. Let now the inequality be satisfied. Then taking $\lambda = |\lambda| \exp(i\varphi)$, we have

$$f(\varphi) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (|\lambda| - \|A - \lambda I\|) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left(|\lambda| - \frac{\|A\|}{2} - \sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} \right) = -\frac{\|A\|}{2}$$

and $w(A) = -\sup_{\varphi \in [0; 2\pi)} f(\varphi)$, implying $w(A) \leq \|A\|/2$.

The inverse inequality being valid for any operator, finally we get $w(A) = \|A\|/2$.

By [8], Corollary of Proposition 3 the last condition is satisfied if and only if

$$\bar{W}(A) = D(0, \|A\|/2).$$

Example. Let

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As it is well known that for any matrix $\|A\| = \max \{ \operatorname{eig}(A^* A) \}$, where eig is the set of eigenvalues of the matrix. It is easy to check that

$$\|D + \lambda I\| = \max \left\{ \sqrt{1 + |\lambda|^2} + 2\operatorname{Re} \lambda, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\lambda|^2} \right\}.$$

These expressions are equal on the right branch of the hyperbola, defined by the equation

$$9 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - 3y^2 = 1. \text{ If } \lambda \text{ is a positive number, then } \|D + \lambda I\| = 1 + \lambda = \|D\| + \lambda,$$

i.e. the Daugavet equality is satisfied on the real positive semi-axis. Beyond the inner domain, bounded by the right branch of the hyperbola

$$\|D + \lambda I\| = \|D\|/2 + \sqrt{\|D\|^2/4 + |\lambda|^2}.$$

Note that on the ray $z = re^{i\phi}, 0 < r < \infty, \frac{\pi}{3} < \phi < \frac{\pi}{2}$ at small values of r one has the first equality, then the second.

L. Z. Gevorgyan

Characterization of Spectraloid and Normaloid Operators

The spectraloid and normaloid operators are characterized in infinite dimensional Hilbert space. It is shown how this description may be modified to settle the finite dimensional case. The ratio between the norm and the numerical radius of a square matrix was a subject of recent investigations. We consider this problem for bounded operators and show that one extremal value is connected with the Daugavet equality and the second is equivalent to an inequality. Possible shapes of the numerical ranges of extremal operators are described.

Л. З. Геворгян

Характеристика спектралоидных и нормалоидных операторов

Характеризируются спектралоидные и нормалоидные операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Показано, как данное описание может быть приспособлено для конечномерного случая. Частное нормы и числового радиуса для квадратной матрицы рассматривалось в недавних исследованиях. Данная проблема изучена для ограниченных операторов; показано, что одно экстремальное значение связано с равенством Даугавета, а другое эквивалентно некоторому неравенству. Описаны возможные формы числовых образов экстремальных операторов.

Լ. Չ. Գևորգյան

Մաթեմատիկական և տրամաբանական օպերատորների բնութագրումը

Բնութագրվում են անվերջ չափանի հիլբերտյան տարածությունում գործող սպեկտրալոիդ և նորմալոիդ օպերատորները: Ցույց է տրվում, թե ինչպես այդ նկարագրությունը կարող է ձևափոխվել, որպեսզի ծառայի նաև վերջավոր չափանի դեպքում: Քառակուսի մատրիցի նորմի և թվային շառավղի քանորդը հետազոտվել է վերջերս կատարված ուսումնասիրություններում: Այստեղ քննարկվում է այդ խնդիրը սահմանափակ օպերատորների համար և ցույց է տրվում, որ մի էքստրեմալ արժեքը կապված է Դաուգավետի հավասարության հետ, իսկ մյուսը համարժեք է որոշակի անհավասարության: Նկարագրված են էքստրեմալ օպերատորների թվային պատկերների հնարավոր տեսքերը:

References

1. Barraa M., Boumazgour M. - Proc. Amer. Math. Soc. V. 130 2002. P. 471-476.
2. Daugavet K. - Uspekhi Mat. Nauk. 1963. V. 18. N. 5 157-158 (Russian).
3. Du K. - Inter. J. Comp. and Math. Sci. 2010. V. 4. N. 8. P. 384-387.
4. Duncan J., McGregor C. M., Pryce J. D., White A. J. - J. London Math. Soc. 1970. N2. P. 481-488.

5. *Fillmore P. A., Stampfli J. G., Williams J. P.* - Acta. Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33 P. 179-192.
6. *Gevorgyan L.* - On some geometric characteristics of the numerical range of an operator. <http://zhurnal.apelarn/articles/2002/053.pdf>.
7. *Gevorgyan L.* - Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA. 2008. V. 43. N. 2. P.79-84,
8. *Gevorgyan L.* - Operators and Matrices. 2010. V.4. N. 1 . P.119-125.
9. *Gustafson K. E., Rao D. K. M.* - Numerical range. The field of values of linear operators and matrices. Springer. 1997.
10. *Halmos P. R.* - A Hilbert space problem book. D. Van Nostrand Co. Inc. 1967.
11. *Horn R., Johnson C.* Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press. 1991.
12. *Iosida K.* Functional Analysis. Springer. 1965.
13. *Laursen K. B.* - Pacific J. Math. 1992. V. 152. N. 2 . P. 323-336.
14. *Orland G. H.* - Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15 P. 75-79.
15. *Stone M. H.* - Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1932.
16. *Vidav* - Math. Zeit. 1956. V. 66. P. 121-128.

УДК 517.518.85, 517.518.4, 519.652

L. D. Poghosyan
On L_2 -Convergence of the Quasi-periodic Interpolation

(Submitted by academician A. B. Nersessian 8 /IV 2013)

Keywords: *Trigonometric interpolation, quasi-periodic interpolation, asymptotic estimates.*

1. In this paper we consider the problem of function reconstruction by its values on the equidistant grid.

It is well known (see [1]) that for a rather smooth on $[-1,1]$ function f with smooth 2-periodic extension on the real line the classical trigonometric interpolation

$$I_N(f, x) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{i\pi n x},$$

$$f_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{2k}{2N+1}\right) e^{-\frac{2i\pi n k}{2N+1}} \quad (1)$$

effectively solves the problem. Otherwise, if 2-periodic extension of a smooth on $[-1,1]$ f function on the real line after extension is discontinuous then the quality of interpolation near the endpoints is degraded by the Gibbs phenomenon (see[2]).

An approach which is not eliminating the Gibbs phenomenon but mitigates its effect is suggested in [3] where the "quasi-periodic" interpolation $I_{N,m}(f, x)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ is introduced. This interpolation is exact on the segment $[-1,1]$ for quasi-periodic functions

$$\left\{ e^{i\pi n a} \right\}_{n=-N}^N, \quad a = \frac{2N}{2N+m+1}, \quad (2)$$

with the period $2/\alpha$. Therefore, when $N \rightarrow \infty$ then $\alpha \rightarrow 1$. Interesting feature of such interpolations is the possibility to interpolate functions on the grid

$$x_k = \frac{k}{N}, \quad k = -N, K, N \quad (3)$$

which includes also the endpoints $x = \pm 1$ of the interval. Such interpolations are known as the "full-interpolations" ([3]).

We introduce explicit formula for the quasi-periodic interpolation for all $m \geq 0$ and investigate its convergence properties on the entire interval $[-1, 1]$ of interpolation in the L_2 norm. Exact constants of the asymptotic errors are obtained. The results of numerical experiments confirm theoretical estimates. Some results of this research were presented in [4] and [5].

2. In this section we derive an explicit form of the quasi-periodic interpolation for all $m \geq 0$. The cases $m = 0$ and $m = 1$ are presented in [3].

Consider the following formula

$$I_{N,m}(f, x) = \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k}{N}\right) a_k(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (4)$$

with unknowns $a_k(x)$. We get the following system of equations for determination of the unknowns as we assumed that (4) is exact for the system (2)

$$e^{\frac{2i\pi l N x}{2N+m+1}} = \sum_{k=-N}^N e^{\frac{2i\pi l k}{2N+m+1}} a_k(x), \quad |l| \leq N. \quad (5)$$

For solution of (5) we add some new unknowns and equations getting the new system

$$e^{\frac{2i\pi l N x}{2N+m+1}} = \sum_{k=-N}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l k}{2N+m+1}} a_k^*(x) + \varepsilon_l(x), \quad l = -N, K, N+m, \quad (6)$$

where

$$a_k^*(x) = a_k(x) \quad \text{if } |k| \leq N, \quad \text{and} \quad a_k^*(x) = 0 \quad \text{if } k = N+1, K, N+m \quad (7)$$

and

$$\varepsilon_l(x) = 0, \quad |l| \leq N.$$

We multiply the both sides of equation (6) by $e^{-\frac{2i\pi l s}{2N+m+1}}$ and sum over l

$$\sum_{l=-N}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l(Nx-s)}{2N+m+1}} = \sum_{l=-N}^{N+m} \sum_{k=-N}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l(k-s)}{2N+m+1}} a_k^*(x) + \sum_{l=N+1}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l s}{2N+m+1}} \varepsilon_l(x).$$

By application of the DFT we get

$$a_k^*(x) = \frac{1}{2N+m+1} \left(\sum_{l=-N}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l(Nx-s)}{2N+m+1}} - \sum_{l=N+1}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l s}{2N+m+1}} \varepsilon_l(x) \right) \quad (8)$$

Using conditions (7) we derive the following system with the Vandermonde matrix for determination of $\varepsilon_l(x)$

$$\sum_{l=N+1}^{N+m} e^{-\frac{2i\pi l s}{2N+m+1}} \left(\varepsilon_l(x) - e^{\frac{2i\pi l x}{2N+m+1}} \right) = \sum_{t=-N}^N e^{\frac{2i\pi t(Nx-s)}{2N+m+1}}, \quad s = N+1, K, N+m \quad (9)$$

After some transformations we obtain

$$\sum_{l=1}^m v_{s+1,l} \mathcal{E}_l(x) = \sum_{t=-N}^N e^{\frac{2i\pi tNx}{2N+m+1}} e^{\frac{2i\pi t(s-N-m)}{2N+m+1}}, \quad s=0, K, m-1$$

where

$$\mathcal{E}_l(x) = e^{-\frac{2i\pi(l+N)(N+m)}{2N+m+1}} \left(\mathcal{E}_{l+N}(x) - e^{\frac{2i\pi(l+N)Nx}{2N+m+1}} \right),$$

and

$$v_{s,l} = a_l^{s-1}, \quad a_l = e^{\frac{2i\pi(l+N)}{2N+m+1}}.$$

Following [6] (see also [7]), where the explicit form of the inverse of the Vandermonde matrix was constructed, we derive

$$v_{l,s}^{-1} = -\frac{1}{\alpha_l^s \prod_{j=1, j \neq l}^m (\alpha_l - \alpha_j)} = \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_j \alpha_l^i, \quad l, s=1, K, m,$$

where γ_j are the coefficients of the polynomial

$$\prod_{i=1}^m (x - \alpha_i) = \sum_{i=0}^m \gamma_i x^i.$$

Hence the solution of (9) can be written explicitly

$$\mathcal{E}_l(x) = e^{\frac{2i\pi lNx}{2N+m+1}} + e^{\frac{2i\pi l(N+m)}{2N+m+1}} \sum_{s=0}^{m-1} v_{l-N,s+1}^{-1} \sum_{t=-N}^N e^{\frac{2i\pi tNx}{2N+m+1}} e^{\frac{2i\pi t(s-N-m)}{2N+m+1}},$$

$$l = N+1, K, N+m.$$

Substituting $\mathcal{E}_l(x)$ into (8) we get

$$a_k(x) = \frac{1}{2N+m+1} \left(\sum_{l=-N}^N e^{\frac{2i\pi lNx}{2N+m+1}} e^{-\frac{2i\pi lk}{2N+m+1}} - \sum_{l=N+1}^{N+m} e^{\frac{2i\pi l(N+m)}{2N+m+1}} e^{-\frac{2i\pi lk}{2N+m+1}} \right. \\ \left. \times \sum_{s=0}^{m-1} v_{l-N,s+1}^{-1} \sum_{t=-N}^N e^{\frac{2i\pi tNx}{2N+m+1}} e^{\frac{2i\pi t(s-N-m)}{2N+m+1}} \right), \quad k = -N, K, N$$

Substituting this into (4) we get the explicit form of the quasi-periodic interpolation

$$I_{N,m}(f, x) = \sum_{n=-N}^N F_{n,m} e^{\frac{2i\pi nNx}{2N+m+1}}, \quad (10)$$

$$F_{n,m}(f, x) = f_{n,m} - \sum_{l=1}^m \theta_{n,l}(m) f_{l+N,m}, \quad (11)$$

$$f_{n,m} = \frac{1}{2N+m+1} \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi nk}{2N+m+1}}$$

and

$$\theta_{n,l}(m) = e^{\frac{2i\pi(l+N)(N+m)}{2N+m+1}} \sum_{s=0}^{m-1} v_{l,s+1}^{-1} e^{\frac{2i\pi n(s-N-m)}{2N+m+1}}$$

By $R_{N,m}(f, x)$ we denote the error of interpolation

$$R_{N,m}(f, x) = f(x) - I_{N,m}(f, x). \quad (12)$$

3. In this section we investigate the convergence of the quasi-periodic interpolation on the entire interval in the L_2 norm.

First we need some lemmas. Let $f \in C^{(q+p)}[-1,1]$ and

$$f^*(x) = \begin{cases} l(x), & x \in \left[-1, -\frac{2N}{2N+m+1}\right] \\ f\left(\frac{2N+m+1}{2N}x\right), & x \in \left[-\frac{2N}{2N+m+1}, \frac{2N}{2N+m+1}\right] \\ r(x), & x \in \left[\frac{2N}{2N+m+1}, 1\right] \end{cases} \quad (13)$$

where

$$l(x) = \sum_{j=0}^{q+p} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!} \left(\frac{2N+m+1}{2N}x+1\right)^j, \\ r(x) = \sum_{j=0}^{q+p} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!} \left(\frac{2N+m+1}{2N}x-1\right)^j.$$

By f_n we denote the n -th Fourier coefficient of f

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx.$$

Also we denote

$$A_{kl}(f) = f^{(l)}(1) - (-1)^{l-k} f^{(l)}(-1), \quad k, l = 0, K, q$$

Lemma 1. Let $f^{(q)} \in AC[-1,1]$ for some $q \geq 0$ and

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, K, q-1. \quad (14)$$

Then the following estimate holds as $N \rightarrow \infty$ and $|n| > N$

$$f_n^* = \frac{(-1)^{n+1}}{(2N+m+1)N^q} \mu_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) + o(n^{-q-1}), \quad (15)$$

where

$$\mu_{q,m}(x) = \sum_{k=0}^q \frac{A_{kq}(f)(m+1)^{q-k}}{2^{q-k} (i\pi)^{k+1} (q-k)! x^{k+1}}. \quad (16)$$

Lemma 2. Let $f^{(q+m)} \in AC[-1,1]$ for some $q, m \geq 0$, $q+m \neq 0$ and

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, K, q-1. \quad (17)$$

Then the following estimate holds as $|n| \leq N$ and $N \rightarrow \infty$

$$F_{n,m} - f_n^* = \frac{(-1)^{n+1}}{(2N+m+1)N^q} \nu_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) + o(N^{-q-1}), \quad (18)$$

where

$$v_{q,m}(x) = \sum_{k=0}^q \frac{A_{kq}(f)(m+1)^{q-k}}{2^{q-k} (i\pi)^{k+1} (q-k)!} \left(\sum_{r \neq 0} \frac{(-1)^r (m+1)}{(2r+x)^{k+1}} - e^{-\frac{i\pi(m-1)}{2}x} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \Phi_{k,m}^{(j)}(-1) (e^{i\pi x} + 1)^j \right) \quad (19)$$

and

$$\Phi_{k,m}(e^{i\pi x}) = e^{\frac{i\pi(m-1)}{2}x} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r (m+1)}{(2r+x)^{k+1}}. \quad (20)$$

Now we prove the main theorem of this paper.

Theorem 1. Let $f^{(q+m)} \in AC[-1,1]$ for some $q, m \geq 0$, $q+m \neq 0$ and

$$f^{(k)} = f^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, K, q-1$$

Then the following estimate holds

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \|R_{N,m}(f, x)\|_{L_2(-1,1)}^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v_{q,m}(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x|>1} |\mu_{q,m}(x)|^2 dx - \frac{m+1}{2} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 v_{q,m}(h) e^{\frac{i\pi(m+1)hx}{2}} dh - \int_{|h|>1} \mu_{q,m}(h) e^{\frac{i\pi(m+1)hx}{2}} dh \right|^2 dx$$

where functions $v_{q,m}(x)$ and $\mu_{q,m}(x)$ are defined in Lemmas 1 and 2.

Proof. We divide $R_{N,m}(f, x)$ into three parts

$$\begin{aligned} & \|R_{N,m}(f, x)\|_{L_2(-1,1)}^2 = \int_{-1}^1 |R_{N,m}(f, x)|^2 dx = \\ & = \frac{2N+m+1}{2N} \int_{-\frac{2N}{2N+m+1}}^{\frac{2N}{2N+m+1}} \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x\right) \right|^2 dx = \\ & = \frac{2N+m+1}{2N} \int_{-1}^1 \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x\right) \right|^2 dx - \\ & - \frac{2N+m+1}{2N} \int_{-\frac{2N}{2N+m+1}}^{\frac{2N}{2N+m+1}} \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x\right) \right|^2 dx = \\ & - \frac{2N+m+1}{2N} \int_{-1}^{\frac{2N}{2N+m+1}} \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x\right) \right|^2 dx = I_1 - I_2 - I_3. \end{aligned}$$

where

$$I_1 = \frac{2N+m+1}{2N} \int_{-1}^1 \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x\right) \right|^2 dx,$$

$$I_2 = \frac{m+1}{2N} \int_0^1 \left| R_{N,m}\left(f, \frac{2N+m+1}{2N}x - \frac{m+1}{2N}\right) \right|^2 dx$$

and

$$I_3 = \frac{m+1}{2N} \int_0^1 \left| R_{N,m} \left(f, \frac{m+1}{2N} x - \frac{2N+m+1}{2N} \right) \right|^2 dx.$$

First we estimate I_1 . We have

$$R_{N,m}(f, x) = \sum_{n=-N}^N (f_n^* - F_{n,m}) e^{\frac{i\pi n}{2N+m+1} x} + \sum_{|n|>N} f_n^* e^{\frac{i\pi n}{2N+m+1} x}. \quad (21)$$

Therefore

$$I_1 = \frac{2N+m+1}{N} \sum_{n=-N}^N |f_n^* - F_{n,m}|^2 + \frac{2N+m+1}{N} \sum_{|n|>N} |f_n^*|^2$$

In view of Lemmas 1 and 2 we obtain

$$I_1 = \frac{1}{(2N+m+1)N^{2q+1}} \sum_{n=-N}^N \left| v_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) \right|^2 + \frac{1}{(2N+m+1)N^{2q+1}} \sum_{|n|>N} \left| \mu_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) \right|^2 + o(N^{2q-1}), \quad N \rightarrow \infty$$

Tending N to infinity and replacing the sums by the corresponding integrals we get

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v_{q,m}(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x|>1} |\mu_{q,m}(x)|^2 dx$$

Now we estimate L_2 . From (21) we get

$$R_{N,m} \left(f, \frac{2N+m+1}{2N} - \frac{m+1}{2N} x \right) = \sum_{n=-N}^N (-1)^n (f_n^* - F_{n,m}) e^{-\frac{i\pi x(m+1)n}{2N+m+1}} + \sum_{|n|>N} (-1)^n f_n^* e^{-\frac{i\pi x(m+1)n}{2N+m+1}}$$

According to Lemmas 1 and 2 we derive

$$\begin{aligned} R_{N,m} \left(f, \frac{2N+m+1}{2N} - \frac{m+1}{2N} x \right) &= \\ &= \frac{1}{(2N+m+1)N^q} \sum_{n=-N}^N v_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) e^{-\frac{i\pi x(m+1)n}{2N+m+1}} \\ &\quad - \frac{1}{(2N+m+1)N^q} \sum_{|n|>N} \mu_{q,m} \left(\frac{2n}{2N+m+1} \right) e^{-\frac{i\pi x(m+1)n}{2N+m+1}} + o(N^{-q}) \end{aligned}$$

Tending N to infinity and replacing the sums by the corresponding integrals we derive

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N^q R_{N,m} \left(f, \frac{2N+m+1}{2N} - \frac{m+1}{2N} x \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_{q,m}(h) e^{-\frac{i\pi(m+1)xh}{2}} - \frac{1}{2} \int_{|h|>1} \mu_{q,m}(h) e^{-\frac{i\pi(m+1)xh}{2}} dh \end{aligned}$$

Hence

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} I_2 = \frac{m+1}{8} \int_0^1 \left| \int_{-1}^1 v_{q,m}(h) e^{\frac{-i\pi(m+1)xh}{2}} dh - \int_{|h|>1} \mu_{q,m}(h) e^{\frac{-i\pi(m+1)xh}{2}} dh \right|^2 dx .$$

Similarly

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} I_3 = \frac{m+1}{8} \int_0^1 \left| \int_{-1}^1 v_{q,m}(h) e^{\frac{i\pi(m+1)xh}{2}} dh - \int_{|h|>1} \mu_{q,m}(h) e^{\frac{i\pi(m+1)xh}{2}} dh \right|^2 dx ,$$

which completes the proof.

Remark 1. Lemma 2 and Theorem 1 are valid also in the case $q + m = 0$ with more strict condition $f' \in L_2[-1, 1]$.

4. Consider the following function

$$f(x) = \sin(x-1)$$

Let's denote

$$c_{N,m}(f) = N^{1/2} \|R_{N,m}(f, x)\|_{L_2(-1,1)}$$

and

$$c_m(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1/2} \|R_{N,m}(f, x)\|_{L_2(-1,1)} .$$

Table 1 presents the values of $c_{N,m}(f)$ for different m and moderate values of N . For comparison the last column presents the values of $c_m(f)$. We see that numerical results (however for this specific example) confirm theoretical estimates of Theorem 1.

Table1
Numerical values of $c_{N,m}(f)$ and $c_m(f)$ for different values of N and m while interpolating the function $f(x) = \sin(x-1)$ by the quasi-periodic interpolation

	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$c_m(f)$
$m = 0$	0.174552	0.172947	0.172117	0.171695	0.171268
$m = 1$	0.034082	0.03315	0.03275	0.032568	0.032399
$m = 2$	0.01044	0.010017	0.009836	0.009754	0.009678
$m = 3$	0.003763	0.003545	0.003455	0.003415	0.003379
$m = 4$	0.00148	0.001364	0.001318	0.001298	0.00128
$m = 5$	0.000617	0.000554	0.000529	0.000519	0.00051
$m = 6$	0.000268	0.000233	0.00022	0.000215	0.000211
$m = 7$	0.00012	0.000101	0.000094	0.000091	0.000089

L. D. Poghosyan

On L_2 - Convergence of the Quasi-Periodic Interpolation

We discuss the problem of function reconstruction via pointwise values on uniform grid and in that context consider the quasi-periodic interpolation. The latest is exact for quasi-exponential functions which allow inclusion the endpoints of the interval into the grid. We derive explicit formulae for the corresponding interpolations and investigate their convergence. Exact asymptotic estimate of the L_2 error is obtained for smooth functions. Comparison with the classical trigonometric interpolation is performed.

Լ. Դ. Պողոսյան

**Քվադր-պարբերական ինտերպոլիացիայի
 L_2 - զուգամիտության մասին**

Քննարկվում է ֆունկցիայի վերականգնման խնդիրը հավասարաչափ ցանցի վրա հայտնի արժեքներով, և այդ համատեքստում դիտարկվում է քվադր-պարբերական ինտերպոլիացիան: Հնարավորություն է առաջանում ցանցում ներառելու նաև հատվածի ծայրակետերը, քանի որ ինտերպոլիացիան ճշգրիտ է քվադր-պարբերական էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների համար: Ստացվել են համապատասխան ինտերպոլիացիաների բացահայտ բանաձևեր, ուսումնասիրվել է նրանց զուգամիտությունը: Ողորկ ֆունկցիաների համար ներկայացվել է L_2 սխալի ասիմպտոտական ճշգրիտ գնահատական: Կատարվել է համեմատություն դասական եռանկյունաչափական ինտերպոլիացիայի հետ:

Л. Д. Погосян

Об L_2 -сходимости квазипериодической интерполяции

Обсуждается проблема восстановления функции по известным значениям на равномерной сети и в этом контексте рассматривается квазипериодическая интерполяция. Точность интерполяции для квазипериодических экспоненциальных функций позволяет включение в сеть также концов отрезка. Получены явные формулы для соответствующих интерполяций и изучена их сходимость. Получены точные асимптотические оценки L_2 ошибки для гладких функций. Проведен сравнительный анализ с классической тригонометрической интерполяцией.

References

1. Zygmund A. Trigonometric Series. V. 2. Cambridge Univ. Press. 1959.
2. Helemberg G. - Journal of Approximation Theory. 1994. V. 78. P. 41-63.
3. Nersessian A. Hovhannesian N. Reports of NAS RA. 2006. Vol. 101 N 2. P. 1-6.
4. Poghosyan L. Presentation in The International Workshop on Functional Analysis. October 12-14, 2012. Timisoara, Romania.
5. Poghosyan L. On a convergence of the quasi-periodic interpolation. Book of abstracts III International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, Georgia. September 2-9, 2012.
6. Parker, F. Amer. Math. Monthly. 1964. V. 71. P. 410-411.
7. Gohberg I. Olshevsky V. - J. of Complexity. 1997 V. 13. N2. P. 208-234.

УДК 517.946

А. О. Бабаян, А. А. Закарян

Задача Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка

(Представлено академиком В. С. Захаряном 18/IV 2013)

Ключевые слова: дефектные числа, неправильно эллиптическое уравнение, задача Дирихле, некорректная граничная задача.

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что если λ_j ($j=1, 2, 3, 4$) – корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^4 A_k \lambda^{4-k} = 0, \quad (2)$$

то количество корней с положительной мнимой частью не совпадает с количеством корней с отрицательной мнимой частью, т. е. уравнение (1) является неправильно эллиптическим. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$ и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ (здесь и далее $z = x + iy = re^{i\varphi}$).

Как было показано в [1], для неправильно эллиптических уравнений классические краевые задачи, и в частности задача Дирихле, не являются

корректными. В [2] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости однородной задачи Дирихле (при $f \equiv g \equiv 0$) для уравнения четвертого порядка общего вида посвящена работа [3]. В [4] получены условия разрешимости граничных задач для неоднородного полианалитического уравнения. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка изучена в [5]. В [6], используя представление общего решения уравнения (1), полученное в [5], исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (3) при некотором расположении корней характеристического уравнения.

В настоящей работе изучается случай, когда корни уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_j \neq i, \quad \Im \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = -i. \quad (4)$$

В этом случае исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (3). В частности, доказывается, что однородная задача Дирихле или не имеет ненулевых решений, или имеет одно линейно независимое решение.

Для точной формулировки полученных результатов введем некоторые определения. Используя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

представим уравнение (1) в комплексной форме. При условии (4) уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y) = 0, \quad (5)$$

где $\mu_1 = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}$, $\mu_2 = \frac{i - \lambda_3}{i + \lambda_3}$. Из условий (4) следует, что

$$\mu_1 \neq \mu_2, \quad |\mu_j| < 1, \quad j = 1, 2; \quad \mu_1 \mu_2 \neq 0. \quad (6)$$

Представим граничные условия (3) в эквивалентной форме

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|_{\Gamma} = F(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\Gamma} = G(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad u(1, 0) = f(1, 0). \quad (7)$$

Здесь функции F и G , принадлежащие пространству $C^{(\alpha)}(\Gamma)$, определяются соотношениями

$$F(x, y) = \frac{z}{2} \left(g(x, y) + i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad G(x, y) = \frac{\bar{z}}{2} \left(g(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad (8)$$

$$z = re^{i\varphi} \in \Gamma.$$

Определим также класс граничных функций, который будет необходим для дальнейшего.

Определение 1. Обозначим $B^{(m, \alpha)}(\delta)$ класс функций, аналитических в кольце $R = \{z : \delta < |z| < 1\}$, которые вместе с производными до порядка m

принадлежат пространству $C^{(\alpha)}(\bar{R})$ (т. е. удовлетворяют условию Гельдера в замыкании области R).

В этих обозначениях результаты, полученные в работе, можно сформулировать так:

Теорема 1. Рассмотрим однородную задачу (5), (3) и обозначим $z = \mu_2 \mu_1^{-1}$.

1. Если выполняются условия

$$P_{k-2}(z) \equiv \sum_{j=0}^{k-2} (k-1-j)z^j \neq 0, \quad k=3,4,\dots, \quad (9)$$

то однородная задача (5), (3) не имеет нетривиальных решений.

2. Если условия (9) не выполняются, то $P_{k_0-2}(z) = 0$ только при одном значении $k_0 > 2$. При этом однородная задача (5), (3) имеет одно линейно независимое решение, которое является многочленом порядка $k_0 + 1$.

Теорема 2. Пусть граничные функции из (7) F и G принадлежат множеству $B^{(1,\alpha)}(r)$, где $r = \max(|\mu_1|, |\mu_2|)$. Тогда, если выполняются условия (9), то неоднородная задача (5), (3) имеет решение. При нарушении условий (9) для разрешимости задачи (5), (3) необходимо и достаточно, чтобы граничные функции F и G удовлетворяли одному линейно независимому условию.

Далее, в третьем параграфе, рассматривается задача (1), (3) в случае другого расположения корней характеристического уравнения.

2. Доказательство теорем 1 и 2. Доказательство теоремы 1. Общее решение уравнения (5) представляется в виде ([5])

$$u(x, y) = \Phi_0(z + \mu_1 \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \Phi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \Psi(\bar{z}), \quad (10)$$

где Φ_j ($j=0,1$) и Φ_2 — функции, аналитические в областях $D_1 = \{z + \mu_1 \bar{z} | z \in D\}$ и $D_2 = \{z + \mu_2 \bar{z} | z \in D\}$ соответственно, а также аналитическую в круге D функцию Ψ необходимо определить. Подставим функцию (10) в граничные равенства (7). Используя операторное тождество ([5])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \frac{\partial^l}{\partial \varphi^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + (k-m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

получим

$$\begin{aligned} \Psi'(\bar{z}) + \mu_1 \Phi'_0(z + \mu_1 \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - iI \right) \mu_1 \Phi'_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_2 \Phi'_2(z + \mu_2 \bar{z}) &= F(z), \quad z \in \Gamma, \\ \Phi'_0(z + \mu_1 \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + iI \right) \Phi'_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \Phi'_2(z + \mu_2 \bar{z}) &= G(z), \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Нам понадобится представление функции $\Phi(z + \mu \bar{z})$, где Φ аналитична в области $D_1 = \{z + \mu \bar{z} : z \in D\}$, в окрестности Γ с помощью аналити-

ческой в D функции. В [7] доказано, что при $|z|=1$ функция $\Phi(z + \mu\bar{z})$ допускает представление

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad (12)$$

где ω – аналитическая в единичном круге функция. Если известна функция ω , то Φ определяется по формуле

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega\left(\frac{z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu}}{2}\right) + \omega\left(\frac{z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu}}{2}\right), \quad (13)$$

где $|z| < 1$. В этих формулах выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Используем (12) для представления функций Φ'_j на окружности Γ

$$\begin{aligned} \Psi'(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \bar{z}^k, \quad \Phi'_2(z + \mu_2\bar{z}) = \sigma_2(z) + \sigma_2(\mu_2\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} \mu_2^k \bar{z}^k, \\ \Phi'_j(z + \mu_1\bar{z}) &= \sigma_j(z) + \sigma_j(\mu_1\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} \mu_1^k \bar{z}^k, \quad j = 0, 1, \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как подлежащие определению функции σ_j и Ψ' аналитичны в круге D , то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_k и B_{kj} . Для определения этих коэффициентов подставим разложения (14) в граничные условия (5)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} A_k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu_1 z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu_1^{k+1} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i \mu_1 (k-1) z^k - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i (k+1) \mu_1^{k+1} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} \mu_2 z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} \mu_2^{k+1} \bar{z}^k = F(z), |z|=1, \\ &\sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu_1^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i (k+1) z^k - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i (k-1) \mu_1^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2} \mu_2^k \bar{z}^k = G(z), |z|=1. \end{aligned} \quad (15)$$

Разложим функции F и G на окружности Γ в ряд Фурье

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} \bar{z}^k \equiv F_+(z) + F_-(z), \\ G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} \bar{z}^k \equiv G_+(z) + G_-(z) \end{aligned} \quad (16)$$

и приравняем в (15) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_k и B_{kj} . При $k=0$ имеем

$$2A_0 + 2\mu_1 B_{00} - 2i\mu_1 B_{01} + 2\mu_2 B_{02} = F_0, \quad 2B_{00} + 2iB_{01} + 2B_{02} = G_0. \quad (17)$$

При $k \geq 1$ получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных A_k и B_{kj} :

$$\begin{aligned} A_k + \mu_1^{k+1} B_{k0} - i(k+1)\mu_1^{k+1} B_{k1} + \mu_2^{k+1} B_{k2} &= F_{-k} \\ \mu_1^k B_{k0} - i(k-1)\mu_1^k B_{k1} + \mu_2^k B_{k2} &= G_{-k}, \\ \mu_1 B_{k0} + i(k-1)\mu_1 B_{k1} + \mu_2 B_{k2} &= F_k, \\ B_{k0} + i(k+1)B_{k1} + B_{k2} &= G_k, \end{aligned} \quad (18)$$

Определитель основной матрицы системы (18) имеет вид

$$\Omega_k = \det \Omega_k^0 \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & \mu_1^{k+1} & -i(k+1)\mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} \\ 0 & \mu_1^k & -i(k-1)\mu_1^k & \mu_2^k \\ 0 & \mu_1 & i(k-1)\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 1 & i(k+1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Преобразуя этот определитель и используя обозначения теоремы 1, получим

$$\Omega_k = 2i\mu_1^{k+1}(1-z)^2 P_{k-2}(z). \quad (20)$$

При условиях теоремы 1 $\mu_1 \neq 0$ и $1-z \neq 0$, так как $\mu_1 \neq \mu_2$. Поэтому однородная (при $F_k = G_k \equiv 0$) система (18) имеет ненулевое решение при $k > 2$ тогда и только тогда, когда $P_{k-2}(z) = 0$ (отметим, что $\Omega_2 \neq 0$, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными коэффициентами). Например, при $k = 3$ $P_{k-2}(z) = z + 2$, следовательно, при $z = -2$ или $\mu_2 = -2\mu_1$ однородная система (18) имеет ненулевое решение A_3, B_{3j} , $j = 0, 1, 2$. По этим ненулевым коэффициентам по формулам (14), (13), (10) определяем нетривиальное решение однородной задачи (5), (3), которое в этом случае является многочленом четвертого порядка $(1-z\bar{z})^2$. Аналогично, если однородная система (18) имеет ненулевое решение при некотором $k_0 > 2$, то по нему получаем решение однородной задачи (5), (3), которое является ненулевым многочленом порядка $k_0 + 1$. Предположим, что выполнены условия (9). Тогда при $k \geq 2$ $\Omega_k \neq 0$, следовательно, однородная система (18) однозначно разрешима, т. е. $A_k = B_{jk} = 0$ при $j = 0, 1, 2$ и $k \geq 2$. Поэтому ненулевым решением однородной задачи может быть только многочлен степени не выше двух. Но из однородных граничных условий (3) следует, что если этот многочлен ненулевой, то он должен делиться на $(1-z\bar{z})^2$ (см. [8], т. 5.1, с. 84), т. е. должен иметь степень не ниже четырех. Таким образом, в этом случае однородная задача (5), (3) не имеет нетривиальных решений. Первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 1 рассмотрим многочлен $P_{k-2}(z)$. Докажем следующее предложение.

Лемма 1. Пусть для некоторого k_0 имеем $P_{k_0-2}(z_0) = 0$. Тогда для любого $k \neq k_0$ необходимо $P_{k-2}(z_0) \neq 0$, т. е. при $k \neq j$ многочлены P_{k-2} и P_{j-2} не имеют общих нулей.

Доказательство леммы 1. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. для некоторого z_0 существуют натуральные числа k и j такие, что $k > 2$, $j > 0$, для которых $P_{k-2}(z_0) = P_{k+j-2}(z_0) = 0$. Тогда то же число z_0 является корнем многочлена $P_{k+j-2} - z^j P_{k-2}$. Поэтому получим, что z_0 является корнем двух полиномов

$$P_{k-2}(z) = \sum_{i=0}^{k-2} (k-1-i)z^i, \quad Q_{j-1}(z) = \sum_{i=0}^{j-1} (k+j-1-i)z^i. \quad (21)$$

Теперь воспользуемся одним следствием из теоремы Энестрема–Какейя об оценке корней многочленов (см. [9], отдел 3, гл. 1, §3, задача 23). Если все коэффициенты $p_0, \dots, p_n$ полинома $\sum_{i=0}^n p_i z^i$ положительны, то нули его лежат в круговом кольце

$$\min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{p_k}{p_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{p_k}{p_{k+1}}. \quad (22)$$

Используя оценку (22), получим, что корни многочленов P_{k-2} и Q_{j-1} лежат соответственно в кольцах

$$\frac{k-1}{k-2} \leq |z| \leq 2, \quad \frac{k+j-1}{k+j-2} \leq |z| \leq \frac{k+1}{k}.$$

Однако эти кольца не имеют общих точек, что противоречит предположению, что $P_{k-2}(z_0) = Q_{j-1}(z_0) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2 позволяет заключить, что условия (9) могут нарушаться только при одном $k > 2$. Таким образом, при нарушении условий (9) только при одном k система (18) имеет ненулевое решение. Так как ненулевому решению системы (18) соответствует ненулевое решение однородной задачи (5), (3), получаем второе утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим неоднородную задачу (5), (3) при условиях (9). Система (17) всегда имеет решение, а система (18) при $k > 1$ однозначно разрешима, так как определитель Ω_k при $k > 1$ отличен от нуля. Рассмотрим систему (18) при $k = 1$. В этом случае левые части второго и третьего уравнений (18) совпадают. Из (8) следует, что

$$F_1 = G_{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi,$$

т. е. второе и третье уравнения в (18) совпадают. Непосредственно проверяется, что ранг матрицы $\tilde{\Omega}_1$ равен трем, следовательно, система (18) при

$k=1$ также имеет решение. Перейдем к исследованию системы (18) при $k > 1$. Сначала преобразуем ее к следующей форме:

$$\begin{aligned} A_k + \mu_1^{k+1} B_{k0} - i(k+1) \mu_1^{k+1} B_{k1} + \mu_2^{k+1} B_{k2} &= F_{-k}, \\ B_{k0} + i(k+1) B_{k1} + B_{k2} &= G_k, \\ B_{k1} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2i\mu_1} B_{k2} &= \frac{G_k}{2i} - \frac{F_k}{2i\mu_1}, \\ \frac{\Omega_k}{2i\mu_1} B_{k2} &= \mu_1^k G_k (1-k) + \mu_1^{k-1} k F_k - G_{-k}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь Ω_k определяется по формуле (19). Далее, найдем решение этой системы. Имеем

$$\begin{aligned} A_k &= (\mu_2^{k+1} - \mu_1^{k+1} - (k+1)\mu_1^k(\mu_1 - \mu_2))B_{2k} + (k+1)(G_k - \mu_1^{-1}F_k) + F_{-k} - \mu_1^{k+1}G_k, \\ B_{k2} &= 2i\Omega_k^{-1}(G_{-k} + \mu_1^k(k-1)G_k - k\mu_1^{k-1}F_k), \quad B_{k1} = 0.5i(\mu_1^{-1}(\mu_1 - \mu_2)B_{2k} - G_k + F_k\mu_1^{-1}), \\ B_{k0} &= \frac{1-k}{2}G_k + \frac{k+1}{2\mu_1}F_k + \frac{(k+1)(\mu_1 - \mu_2) - 2\mu_1}{2\mu_1}B_{2k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как предполагается, что функции F и G принадлежат классу $B^{(1,\alpha)}(r)$, то коэффициенты Фурье этих функций, G_{-k} , G_k , F_{-k} , F_k должны достаточно быстро убывать при $k \rightarrow \infty$. Используя оценки из [10] (с. 210), получаем, что

$$G_{-k}: r^k k^{-1-\alpha}, \quad G_k: k^{-1-\alpha} \quad \alpha \in (0,1), \quad r = \max(|\mu_1|, |\mu_2|). \quad (25)$$

Аналогичные оценки имеют место для F_{-k} , F_k . Из (20) имеем также, что $\Omega_k: r^k$. Используя эти оценки, а также формулу (24) для коэффициентов A_k и B_{jk} , получим, что при $k \rightarrow \infty$

$$A_k: k^{-\alpha}, \quad B_{0k}: k^{-\alpha}, \quad B_{1k}: k^{-1-\alpha}, \quad B_{2k}: k^{-\alpha}.$$

Эти оценки показывают, что функции Ψ , $\Phi_0(z + \mu_1 \bar{z})$, $\Phi_2(z + \mu_2 \bar{z})$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ вместе с производными первого порядка удовлетворяют условию Гельдера в $D \cup \Gamma$ и, следовательно, задача (5), (3) имеет решение в $C^{(1,\alpha)}(\bar{D})$.

При нарушении условий (9), как было показано при доказательстве 1, только при одном значении $k_0 > 2$ $\Omega_{k_0} = 0$. Из последнего уравнения (23) при этом следует необходимое условие разрешимости, которому должны удовлетворять граничные функции

$$\mu_1^{k_0} G_{k_0} (1 - k_0) + \mu_1^{k_0-1} k_0 F_{k_0} - G_{-k_0} = 0.$$

Далее, аналогично доказательству первой части доказываем, что последнее условие является также и достаточным условием разрешимости задачи (5), (3). Теорема 1 доказана.

3. Случай двукратных корней характеристического уравнения.

В этом пункте предположим, что корни характеристического уравнения удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4, \quad \lambda_j \neq i, \quad \Im \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (26)$$

В этом случае будем использовать рассуждения, аналогичные предыдущим. Сначала представим уравнение (1) в комплексной форме, используя операторы комплексного дифференцирования. Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nu \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u(x, y) = 0. \quad (27)$$

Здесь $\mu = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}$, $\nu = \frac{i - \lambda_3}{i + \lambda_3}$. Из условий (4) следует, что

$$\mu \neq \nu, \quad |\mu| < 1, \quad |\nu| < 1, \quad \mu \nu \neq 0. \quad (28)$$

Общее решение уравнения (27) представляется в виде

$$u(x, y) = \Phi_0(z + \mu \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_1(z + \mu \bar{z}) + \Psi_0(z + \nu \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_1(z + \nu \bar{z}), \quad (29)$$

где Φ_j и Ψ_j ($j = 0, 1$) — функции аналитические в областях $D_1 = \{z + \mu \bar{z} \mid z \in D\}$ и $D_2 = \{z + \nu \bar{z} \mid z \in D\}$ соответственно. Подставим функцию (29) в граничные равенства (7). Получим

$$\begin{aligned} & \mu \Phi'_0(z + \mu \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - iI \right) \mu \Phi'_1(z + \mu \bar{z}) + \nu \Psi'_0(z + \nu \bar{z}) + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - iI \right) \nu \Psi'_1(z + \nu \bar{z}) = F(z), \quad z \in \Gamma, \\ & \Phi'_0(z + \mu \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + iI \right) \Phi'_1(z + \mu \bar{z}) + \Psi'_0(z + \nu \bar{z}) + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + iI \right) \Psi'_1(z + \nu \bar{z}) = G(z), \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

Используем (12) для представления функций Φ'_j , Ψ'_j на окружности Γ

$$\begin{aligned} \Phi'_j(z + \mu \bar{z}) &= \sigma_j(z) + \sigma_j(\mu \bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj} \mu^k \bar{z}^k, \\ \Psi'_j(z + \nu \bar{z}) &= \psi_j(z) + \psi_j(\nu \bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} \nu^k \bar{z}^k, \quad j = 0, 1, \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как подлежащие определению функции σ_j и ψ_j аналитичны в круге D , то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{kj} и B_{kj} . Для определения этих коэффициентов подставим разложения (31) в граничные условия (30):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu^{k+1} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} i \mu (k-1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} i (k+1) \mu^{k+1} \bar{z}^k + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu^{k+1} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i \nu (k-1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i (k+1) \nu^{k+1} \bar{z}^k = F(z), \\ & \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} i (k+1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} i (k-1) \mu^k \bar{z}^k + \end{aligned}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} v^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k+1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k-1) v^k \bar{z}^k = G(z), |z|=1. \quad (32)$$

Используем разложения (16) функций F и G на окружности Γ и приравняем в (32) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kj} и B_{kj} . При $k=0$ имеем

$$2\mu A_{00} - 2i\mu A_{01} + 2vB_{00} - 2ivB_{01} = F_0, \quad 2A_{00} + 2iA_{01} + 2B_{00} + 2iB_{01} = G_0. \quad (33)$$

При $k > 1$ получим:

$$\begin{aligned} A_{k0} + i(k+1)A_{k1} + B_{k0} + i(k+1)B_{k1} &= G_k, \\ \mu A_{k0} + i(k-1)\mu A_{k1} + vB_{k0} + i(k-1)vB_{k1} &= F_k, \\ \mu^k A_{k0} - i(k-1)\mu^k A_{k1} + v^k B_{k0} - i(k-1)v^k B_{k1} &= G_{-k}, \\ \mu^{k+1} A_{k0} - i(k+1)\mu^{k+1} A_{k1} + v^{k+1} B_{k0} - i(k+1)v^{k+1} B_{k1} &= F_{-k}. \end{aligned} \quad (34)$$

Определитель основной матрицы системы (34) имеет вид:

$$\Omega_k = \det \Omega_k^0 \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & 1 & i(k+1) \\ \mu & i(k-1)\mu & v & i(k-1)v \\ \mu^k & -i(k-1)\mu^k & v^k & -i(k-1)v^k \\ \mu^{k+1} & -i(k+1)\mu^{k+1} & v^{k+1} & -i(k+1)v^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Предположим для определенности, что $|v| \leq |\mu|$ и положим $z = v\mu^{-1}$ (отметим, что из условий следует, что $|z| \leq 1$ и $z \neq 1$). Тогда определитель Ω_k можно представить в виде

$$\Omega_k = -4\mu^{2k+2} z(1-z)^2 \left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j \right)^2 - k^2 z^{k-1} \right) \equiv -4\mu^{2k+2} z(1-z)^2 \Theta_{2k-2}(z). \quad (36)$$

Функцию Θ_{2k-2} можно также представить в виде

$$\Theta_{2k-2}(z) = (1-z)^2 \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)z^j (1+z+z^2+\dots+z^{k-j-2})^2 \equiv (1-z)^2 S_{2k-4}(z).$$

Учитывая, что при условиях (26) имеем $\mu z(1-z) \neq 0$, получаем, что разрешимость системы (34) определяется многочленом S_{2k-4} :

$$S_{2k-4}(z) = \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^j + C_{k+1}^3 z^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^{2k-j-4}, \quad k=3,4,\dots \quad (37)$$

Здесь C_m^3 – биномиальный коэффициент. Рассмотрим определитель Ω_k . При $|z| < 1$ из (36) следует, что

$$\Theta_{2k-2}(z) : (1-z)^{-2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

а при $z = e^{i\tau}$ имеем

$$|\Theta_{2k-2}(z)| = \left| \left(\frac{\sin 0.5k\tau}{\sin 0.5\tau} \right)^2 - k^2 \right|.$$

Из этих соотношений следует, что при больших k определитель Ω_k отличен от нуля. Поэтому однородная задача (27), (3) имеет конечное число линейно независимых решений. Учитывая, что при больших k

$|\Omega_k|:|\mu|^{2k+2}$, аналогично второму пункту, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Однородная задача (27), (3) имеет конечное число линейно независимых решений. Это число определяется формулой

$$K = \sum_{k=3}^{\infty} (4 - \text{rank } \mathcal{L}_k^0).$$

Если функции из (7), F и G принадлежат множеству $B^{(1,\alpha)}(r)$, где $r = \max(|\mu|, |\nu|)$, то неоднородная задача (27), (3) имеет решение тогда и только тогда, когда функции F и G удовлетворяют K линейно независимым условиям.

Замечание 1. При $k=3$ многочлен (37) S_2 имеет вид $S_2(z) = z^2 + 4z + 1$ и, следовательно, имеет корень $z = \sqrt{3} - 2$, который по модулю меньше единицы. Поэтому при $\nu = (\sqrt{3} - 2)\mu$ однородная задача (27), (3) имеет нетривиальное решение (в данном случае это функция $(1 - z\bar{z})^2$). Таким образом, дефектное число K может быть отлично от нуля. Можно предположить, что так же как и в теореме 1, в этом случае число K равно единице, однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Государственный инженерный университет Армении

А. О. Бабаян, А. А. Закарян

Задача Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка

Рассматривается задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка в единичном круге. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы вместе с производными первого порядка. Указан класс граничных функций, для которого эта задача нормально разрешима; определены дефектные числа. Условия разрешимости рассматриваемой задачи и решение однородной и неоднородной задач определяются в явном виде.

Ա. Ն. Բաբայան, Ա. Ա. Զաքարյան

Դիրիխլեի խնդիրը չորրորդ կարգի մեկ ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը հաստատուն գործակիցներով չորրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար միավոր շրջանում: Լուծումը փնտրվում է առաջին կարգի ածանցյալների հետ միասին ընդհուպ մինչև եզրը Հյուդերի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասում: Որոշվել է եզրային ֆունկցիաների դաս, որի համար այս խնդիրը նորմալ լուծելի է և գտնվել են դեֆեկտային թվերը: Դիտարկվող խնդրի լուծելիության պայմանները և համաստեռ ու անհամաստեռ խնդիրների լուծումները ստացվել են բացահայտ տեսքով:

A. H. Babayan, A. A. Zaqaryan
The Dirichlet Problem for the Fourth Order Improperly
Elliptic Equation

The Dirichlet problem for the fourth order improperly elliptic equation with constant coefficients in the unit disc is considered. The solution must be found in the class of functions Hölder continuous with first order derivatives up to the boundary. The defect numbers and the class of boundary functions, for which the problem is normally solvable, are obtained. The solvability conditions and the solutions of homogeneous and inhomogeneous problems are obtained in explicit form.

Литература

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966. 204 с.
2. Товмасын Н. Е. – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. №6. С.497-521.
3. Буряченко Е. А. В кн.: Нелинейные граничные задачи. Донецк. 2000. Т. 10. С. 44-49.
4. Begehr H., Kumar A. - Analysis. 2005. V. 25. P. 55-71.
5. Бабаян А. О. – Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. №6. С.39-48.
6. Бабаян А. О. В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск. 2007. С.56-69.
7. Tovmasyan N. E. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore. 1998. 235 p.
8. Axler S., Bourdon P., Ramey W. Harmonic Function Theory. Springer-Verlag. New York, Inc. 2001. 270 p.
9. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч.1. М. Наука. 1978. 392 с.
10. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. ФМЛ. 1961. 936 с.

УДК 534.11

Член-корреспондент НАН РА С. М. Оганесян

Постановка задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня

(Представлено 21/XI 2012)

Ключевые слова: консольная балка, волна чистого изгиба и изгиба, стержень, сосредоточенные массы.

1. Введение. Проблема актуализации карт сейсмического районирования и микрорайонирования. Исследования, проведенные после Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г. и Великого японского землетрясения 11 марта 2011 г., показали [1-7], что одной из основных проблем инженерной сейсмологии, сейсмического районирования (СР) и микрорайонирования (СМР), сейсмостойкого строительства остается вопрос повышения на картах СР и СМР исходных величин сейсмических ускорений (ВСУ) до $0.7 \div 0.8 \div 1.0 \text{ g}$ (g – ускорение свободного падения) для средних грунтов. Увеличение ВСУ для средних грунтов до $0.7 \div 0.8 \div 1.0 \text{ g}$ на картах СР и СМР приводит к увеличению в два раза инерционных сейсмических сил, действующих при землетрясении на здания и сооружения. Как следствие этого при проектировании повышаются расчетные силы, что в конечном счете приводит к резкому повышению стоимости возводимых зданий и сооружений. Поэтому возникает необходимость разработки таких расчетных схем колебаний зданий и сооружений (новой теории сейсмостойкости), в которых учитываются огромные величины сейсмических ускорений, наблюдаемые в действительности. Впервые этот вопрос поднимается в последней статье акад. А.Г. Назарова [8].

2. Известно [9,10], что в теории сейсмостойкости колебание невесомого стержня, закрепленного в основании, с одной или n сосредоточенными массами рассматривается как исходная расчетная схема. Направим ось x по направлению стержня так, чтобы начало оси x совпало с основанием стержня. Дополним расчетную схему фиксированными реперами, нанесенные в виде отрезков на массах $m_i, i = \overline{1, n}$. Направление реперов в недеформируемом состоянии стержня совпадает с

направлением его оси. При помощи реперов определяются углы поворотов $\varphi_i(t)$ масс $m_i, i = \overline{1, n}$, при деформации изгиба стержня.

Обозначим через $\overline{l}_i, i = \overline{2, n}$, расстояние между массами m_i и m_{i-1} , а $\overline{l}_1$ – массой m_1 и основанием стержня.

При помощи предельного перехода в системе дифференциальных уравнений (5) впервые получена новая система дифференциальных уравнений в частных производных для описания распространения упругой волны чистого изгиба и изгиба в консольном однородном стержне постоянного поперечного сечения S .

3. Расчетную схему колебания невесомого стержня с n сосредоточенными массами $m_i, i = \overline{1, n}$, заделанного в основании, называют также одномерной линейной цепочкой (ОЛЦ).

В работе [11] при $n = 1$, т.е. линейному осциллятору (ЛО), введены следующие определения.

Определение 1. *Переменная точка относительно которой масса m ЛО совершает "кажущееся" вращательное движение при колебании, назовем мгновенным центром вращения (МЦВ).*

Определение 2. *Момент инерции массы m при колебании ЛО относительно МЦВ назовем мгновенным $I_{\text{ми}}$ (ММИ).*

Показано [11], что расстояние $l_{\text{ми}}$ между МЦВ и сосредоточенной массой m при колебании ЛО остается постоянной величиной.

Следуя работе А.Назарова [9], введем

Определение 3. *Постоянное расстояние $l_{\text{ми}}$ и мгновенный момент инерции $I_{\text{ми}}$ при колебании ЛО назовем приведенными, т.е. $l_{\text{пр}} = l_{\text{ми}}$ и $I_{\text{пр}} = I_{\text{ми}}$.*

Уравнение вынужденных колебаний ЛО при внешнем воздействии в виде момента силы имеет вид [11]

$$I_{\text{пр}} \ddot{\varphi} + \bar{k} \varphi = M(t), \quad (1)$$

где $I_{\text{пр}} = m l_{\text{пр}}^2$, $\bar{k}$ – жесткость стержня в углах изгиба φ ,

$$\frac{\bar{k}}{I_{\text{пр}}} = \omega_0^2. \quad (2)$$

Однородное уравнение, соответствующее равенству (1), имеет вид

$$I_{\text{пр}} \ddot{\varphi} + \bar{k} \varphi = 0. \quad (3)$$

Известно, что система уравнений свободных колебаний ОЛЦ с n сосредоточенными массами $m_i, i = \overline{1, n}$, в перемещениях имеет вид [9,10]

$$\begin{cases} x_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \bar{\delta}_{11} - m_2 \ddot{x}_2 \bar{\delta}_{12} - \dots - m_n \ddot{x}_n \bar{\delta}_{1n}, \\ x_2 = -m_1 \ddot{x}_1 \bar{\delta}_{21} - m_2 \ddot{x}_2 \bar{\delta}_{22} - \dots - m_n \ddot{x}_n \bar{\delta}_{2n}, \\ \dots, \\ x_i = -m_1 \ddot{x}_1 \bar{\delta}_{i1} - m_2 \ddot{x}_2 \bar{\delta}_{i2} - \dots - m_n \ddot{x}_n \bar{\delta}_{in}, \\ \dots, \\ x_n = -m_1 \ddot{x}_1 \bar{\delta}_{n1} - m_2 \ddot{x}_2 \bar{\delta}_{n2} - \dots - m_n \ddot{x}_n \bar{\delta}_{nn}, \end{cases} \quad (4)$$

где $x_i, i = \overline{1, n}$ – горизонтальные перемещения массы m от положения равновесия, $\bar{\delta}_{ij}$ – перемещение в точке i от единичной силы, приложенной к точке j (коэффициент влияния или податливости).

Понятия МЦВ, ММИ и приведенной длины аналогично определениям 1-3 распространим на каждую массу $m_i, i = \overline{1, n}$, ОЛЦ.

По аналогии с уравнением (1) моменты силы инерции, развиваемые массами m_i , будут - $I_i \ddot{\varphi}_i = -m_i l_i^2 \ddot{\varphi}_i$, где l_i – i -я приведенная длина для массы m_i , которая является постоянной величиной.

Система уравнений колебаний ОЛЦ в углах изгиба имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1 = -I_1 \ddot{\varphi}_1 \delta_{11} - I_2 \ddot{\varphi}_2 \delta_{12} - \dots - I_n \ddot{\varphi}_n \delta_{1n}, \\ \varphi_2 = -I_1 \ddot{\varphi}_1 \delta_{21} - I_2 \ddot{\varphi}_2 \delta_{22} - \dots - I_n \ddot{\varphi}_n \delta_{2n}, \\ \dots, \\ \varphi_i = -I_1 \ddot{\varphi}_1 \delta_{i1} - I_2 \ddot{\varphi}_2 \delta_{i2} - \dots - I_n \ddot{\varphi}_n \delta_{in}, \\ \dots, \\ \varphi_n = -I_1 \ddot{\varphi}_1 \delta_{n1} - I_2 \ddot{\varphi}_2 \delta_{n2} - \dots - I_n \ddot{\varphi}_n \delta_{nn}, \end{cases} \quad (5)$$

где δ_{ik} – угол изгиба в точке i , вызванный единичным моментом силы, приложенной к точке k .

Приведенные длины $l_i, i = \overline{1, n}$, выбираются таким образом, чтобы частоты собственных колебаний системы уравнений (5) совпадали с частотами собственных колебаний системы (4). Значения $l_i, i = \overline{1, n}$, определяются единственным образом, так как задача Коши для системы уравнений (5) имеет единственное решение.

Если в системе дифференциальных уравнений (5) для единичных углов изгиба δ_{ik} (коэффициент податливости) принять, что

$$\begin{cases} \delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{13} = \dots = \delta_{1n}, \\ \delta_{22} = \delta_{23} = \dots = \delta_{2n}, \\ \dots, \\ \delta_{n-1n} = \delta_{nn}, \end{cases} \quad (6)$$

то она при помощи преобразований [10] сведется к системе уравнений

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + a_1 \varphi_1 - a_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + a_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - a_3 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ I_i \ddot{\varphi}_i + a_i (\varphi_i - \varphi_{i-1}) - a_{i+1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + a_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) - a_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0, \\ I_n \ddot{\varphi}_n + a_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$ – коэффициенты жесткости в узле i , когда относительный поворот углов $\varphi_i - \varphi_{i-1} = 1$.

Замечание 1. Дополнительное условие (6) выполняется с высокой точностью, если отношение максимума расстояния между массами $\overline{l}_i, i = \overline{1, n}$, к длине всего стержня l во много раз меньше 1. Действительно, для однородного консольного стержня постоянного сечения при приложении в любой точке $0 \leq x_0 \leq 1$ постоянного момента силы M для точек $x_0 < x < 1$ углы поворота φ равны [12].

Система уравнений (7) позволяет при помощи предельного перехода получить уравнения распространения упругой волны изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня длины l с постоянным поперечным сечением площадью S .

4. Постановка задач. Осуществим предельный переход в системе уравнений (7) для $\overline{l}_i = \overline{l}, m_i = m, a_i = a, i = \overline{1, n}$, так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ расстояние между массами $\overline{l} \rightarrow 0$, а общая длина стержня l оставалась постоянной. При осуществлении предельного перехода основным является вопрос, к каким предельным значениям стремятся приведенные длины $\overline{l}_i, i = \overline{1, n}$, при колебании консольного стержня? Очевидно, что приведенные длины для элементарной площадки Δx в точке x однородного консольного стержня также постоянны.

Обобщение многолетнего опыта решения поставленной в работе задачи в Институте геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Назарова НАН РА [13-19] привело к выводу, что особо важное значение имеют рассмотрение задачи кинематического возбуждения консольного стержня в точке $x = 0$ по закону $\varphi(0, t) = \varphi_1(t)$ в момент времени $t = 0 + 0$ и замечание 1 при $x_0 \rightarrow 0$, так как из них следует, что значения приведенных длин $l_{np}(x)$ для элемента Δx в точке x равны значению x , т.е. $l_{np}(x) = x, 0 \leq x \leq 1$.

Осуществив предельный переход в системе уравнений (7), получим дифференциальное уравнение смешанного типа [11]

$$\rho S x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где ρ – плотность стержня, S – площадь поперечного сечения стержня, I – момент инерции стержня относительно его нейтральной оси.

Из уравнения (8) следует, что в системе уравнений (5) приведенные длины $l_i, i = \overline{1, n}$, удовлетворяют неравенствам

$$l_1 < l_2 < l_3 < \dots < l_{n-1} < l_n. \quad (9)$$

В уравнении (8) не учтены инерция вращения элемента Δx стержня в точке x вокруг нейтральной линии и поперечные силы $Q(x, t)$, возникающие в сечении стержня в точке x . Если в уравнении (8) учтем только инерцию вращения элемента Δx стержня в точке x вокруг нейтральной линии, то получим систему дифференциальных уравнений распространения упругой волны чистого изгиба при поперечном колебании однородного консольного стержня длины l

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(I + Sx^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

при начальных и граничных условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \psi_1(x), \quad \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x). \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = \bar{\varphi}(x, t), \\ u(0, t) = 0, \end{array} \right. \quad (13)$$

где $\bar{\varphi}(x, t)$ – решение задачи (10), (11), $U(x, t)$ – перемещение нейтральной линии относительно недеформированного положения оси, $0 \leq x \leq l$.

Если в уравнении (8) принять во внимание не только инерцию вращения но также прогибы, вызываемые сдвигом (поперечную силу $Q(x, t)$), то получим систему дифференциальных уравнений распространения упругой волны изгиба при поперечном колебании однородного консольного стержня. Известно [12], что перемещение нейтральной линии $U(x, t)$ и угол наклона касательной к кривой изгиба $\varphi(x, t)$ зависят не только от поворота поперечного сечения стержня, но также от сдвига. Обозначим через U_1 и φ_1 соответственно перемещение и угол наклона касательной к кривой изгиба при пренебрежении сдвигом и U_2 и φ_2 – дополнительное перемещение и угол, возникающий при учете сдвига у нейтральной оси в том же поперечном сечении. Тогда полное перемещение $U = U_1 + U_2$, а полный угол наклона $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Из [12] известно, что при изгибе поперечная сила $Q(x, t)$ определяется по формуле

$$Q(x, t) = kGS\varphi_2(x, t) = kGS \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial x}, \quad (14)$$

где k – численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня, G – модуль сдвига Юнга, S – площадь поперечного сечения.

Дифференциальное уравнение вращательного движения элемента в точке x имеет вид Δx

$$\rho(I + Sx^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - Q - EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0. \quad (15)$$

Так как перемещение $U_1, (\varphi_1)$ создает только инерционный момент силы, которая учтена в уравнении (15), то дифференциальное уравнение поступательного движения того же элемента Δx будет

$$\rho S \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Как видно из уравнений (14)-(16), переменные U_1 и U_2 (φ_1 и φ_2) разделяются, вследствие чего задача распространения упругой волны изгиба при поперечном колебании однородного консольного стержня подразделяется на две подзадачи – I и II.

Замечание 2. Впервые предположение, что не все смещение $U(x, t)$ принимает участие в создании силы инерции, выдвинуто в [14].

В подзадаче I нахождение $U_2(x, t)$ и $Q(x, t)$ сводится к следующему волновому уравнению:

$$\rho S \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - kGS \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

при начальных и граничных условиях

$$U_2(0, t) = \frac{\partial U_2(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_2(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial U_2(x, 0)}{\partial t} = W(x), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial t} = W_1(x). \quad (19)$$

Задача (17)-(19) имеет единственное решение, так как она совпадает с единственным решением следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - kGS \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0, \\ \text{при начальных и граничных услови́ях} \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\varphi_2(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2(l, t)}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(x, 0) = W(x), \quad \frac{\partial^2 \varphi_2(x, t)}{\partial t^2} = W_1(x) \end{array} \right. \quad (22)$$

и

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \bar{\varphi}_2(x, t), \quad (23)$$

$$U_2(0, t) = 0, \quad (24)$$

где $\bar{\varphi}_2(x, t)$ решение задачи (20)-(21).

Замечание 3. Дифференциальное уравнение (20) получается дифференцированием уравнения (17) по переменной x .

Решение подзадачи I ((17)-(19)) обозначим через $\bar{U}_2(x, t)$. При помощи формулы (29) найдем $\bar{Q}(x, t) = kGS \frac{\partial \bar{U}_2(x, t)}{\partial x}$.

Подставив найденное значение $\bar{Q}(x, t)$ в уравнение (15), получим постановку подзадачи II для определения сначала $\bar{\varphi}_1(x, t)$, а потом и самого смещения $\bar{U}_1(x, t)$:

$$\rho(I + Sx^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \bar{Q}, \quad (25)$$

при начальных и граничных условиях

$$\varphi_1(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad (26)$$

$$\varphi_1(x, 0) = \psi_1(x), \quad \frac{\partial \varphi_1(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x) \quad (27)$$

и

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \bar{\varphi}_1(x, t), \quad (28)$$

$$u_1(0, t) = 0, \quad (29)$$

где $\bar{\varphi}_1(x, t)$ решение задачи (25)-(27)

Полное перемещение нейтральной линии представим в виде $U(x, t) = \bar{U}_1(x, t) + \bar{U}_2(x, t)$, где $\bar{U}_2$ – решение уравнения (17)-(19), $\bar{U}_1$ – решение задачи II, а $\bar{\varphi}(x, t) = \bar{\varphi}_1(x, t) + \bar{\varphi}_2(x, t)$.

Полученные системы уравнений могут значительно изменить наши взгляды на основы теории сейсмостойкости и разработку моделей распространения сейсмической волны при землетрясениях [13,20].

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
им. А. Назарова НАН РА

Член-корреспондент НАН РА С. М. Оганесян

Постановка задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня

Получена новая система дифференциальных уравнений в частных производных для описания распространения упругих волн чистого изгиба и изгиба в однородном консольном стержне постоянного поперечного сечения.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Հովհաննիսյան

**Համասեռ կոնսոլային ձողի լայնական տատանումների ժամանակ
մաքուր ծոման և ծոման առաձգական ալիքների տարածման խնդրի
դրվածքը**

Հաստատուն լայնական կտրվածքով համասեռ կոնսոլային ձողում ստացվել է
մաքուր ծոման և ծոման առաձգական ալիքների տարածման համար նոր մասնակի
ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:

Corresponding member of NAS RA S. M. Hovhannisyan

**Formulation of the Problem of Propagation of Elastic Waves of a Pure
Bending and a Bending at Roll Oscillation of Homogeneous Cantilever
Beam**

The new system of the differential equations in particular derivatives for the
description of propagation of the elastic waves of a pure bending and a bending in a
homogeneous cantilever beam of constant transversal section is obtained in the work.

Литература

1. *Хачиян Э.* Прикладная сейсмология Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2008. 491 с.
2. *Оганесян С. М., Оганесян А. О., Геодакян Э. Г., Григорян В. Г., Гаспарян Г. С.* - Проблемы сейсмологии в Узбекистане. 2010. Т. 1. N 7. С. 244-249.
3. *Аптикаев Ф. Ф.* - Вулканология и сейсмология. 1999. N 4-5. С. 23-28.
4. *Гусев А. А.* - Изв. РАН. Физика Земли. 2002. N 12. С. 56-70.
5. *Карапетян Дж. К.* В кн.: Сб. научных трудов конференции, посвященной 50-летию основания ИГИС НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2011. С. 344-362 (на арм.яз.).
6. *Уломов В. И.* - Вопросы инженерной сейсмологии. 2012. Т. 39. №1. С. 5-38.
7. *Оганесян С. М., Аветисян А. М., Геодакян Э. Г., Григорян В. Г., Варданян К. С., Карапетян С. С., Минасян Дж. О., Оганесян А. О., Симонян А. О., Тамразян А. А., Чилингарян А. З., Фиданян Ф. М.* – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2004. Т. 57. N 1. С. 41-48.
8. *Назаров А. Г.* В кн: Методы количественной оценки сейсмических воздействий. Тбилиси. Мецниереба. 1983. С. 5-16.
9. *Назаров А. Г.* Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван. Изд. АН АрмССР. 1959. 278 с.
10. *Хачиян Э.Е.* Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ереван. Айаста. 1973. 328 с.
11. *Оганесян С. М.* В кн.: Сб. научных трудов конференции, посвященной 50-летию основания ИГИС НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2011. С. 473-485.

12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М. Машиностроение. 1986. 472 с.
13. Оганесян С. М. - В кн.: Сб. научных трудов конференции, посвященной 100-летию со дня рождения основателя ИГИС НАН РА акад. А.Г.Назарова. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2008. С. 211-216.
14. Оганесян С. М. В кн.: Юбилейная научная конф., посвященная 35-летию основания ИГИС НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 1996. С. 107-109.
15. Оганесян С. М., Мурадян А. Р., Оганесян А. С. В кн.: Сб научных трудов конференции, посвященной 40-летию основания ИГИС им А.Назарова НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С. 380-385.
16. Оганесян С. М. В кн.: Сб научных трудов конференции, посвященной 60-летию основания НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2004. С. 277-290.
17. Хачатрян С. О. В кн.: Сб научных трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения основателя ИГИС НАН РА акад. А.Г.Назарова. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 1998. С. 155-156.
18. Мкртчян К. Ш. – ПММ. 1999. Т. 63. №6. С. 1055-1058.
19. Манукян Л. А. В кн.: Сб. научных трудов конференции, посвященной 60-летию основания НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2004. С. 262-265.
20. Гедакян Э. Г. В кн.: Сб научных трудов конференции, посвященной 60-летию основания НАН РА. Гюмри. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2004. С. 64-78.

УДК 539.3

К. А. Жамакочян

Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок

(Представлено чл.-кор. НАН РА С.О. Саркисяном 5 /IV 2013)

Ключевые слова: *степенные ряды, метод, построение, модель, микрополярный, балка.*

Введение. Решение проблемы сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек осуществляется тремя основными методами: (а) методом гипотез [1-3]; (в) методом разложений по толщине в степенные ряды [4]; (с) асимптотическим методом [5-8]. Проблема о сведении трехмерных уравнений микрополярной теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек на основе метода гипотез впервые поставлена в монографии [9]. В [10-13] построено асимптотическое решение трехмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, а в [14-16] на основе качественных сторон асимптотического решения сформулированы адекватные гипотезы и построены прикладные теории динамики микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В данной работе развивается метод разложений по толщине в степенные ряды для построения модели прикладной-одномерной динамической модели микрополярных упругих балок и проведено сравнение с аналогичной моделью балок, построенной в [18], на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины $2h_1$. Координатную плоскость x_1x_3 разместим в срединной плоскости параллелепипеда, которая разделит толщину $2h_1$ на две равные части. Ось x_3 направим по высоте параллелепипеда, ось x_1 – по длине параллелепипеда так, чтобы она делила высоту $2h$ пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_2 (по направлению толщины $2h_1$) осуществляется обобщенное плоское напряженное состояние и задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к краевой задаче в срединной плоскости

параллелепипеда x_1x_3 , т. е. к изучению задачи в прямоугольнике ($0 \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_3 \leq h$). Для дальнейшего рассмотрения примем, что $2h_1 = 1$. Будем исходить из основных уравнений динамической задачи обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [17]:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения движения} \\ & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} - (\sigma_{13} - \sigma_{31}) = J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{физические соотношения упругости} \\ & \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11} + \nu\gamma_{33}), \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{33} + \nu\gamma_{11}), \\ & \sigma_{13} = (\mu + \alpha)\gamma_{13} + (\mu - \alpha)\gamma_{31}, \quad \sigma_{31} = (\mu - \alpha)\gamma_{13} + (\mu + \alpha)\gamma_{31}, \\ & \mu_{12} = B\chi_{12}, \quad \mu_{32} = B\chi_{32}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \text{геометрические соотношения} \\ & \gamma_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \quad \gamma_{13} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2, \\ & \gamma_{31} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \omega_2, \quad \chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь σ_{11} , σ_{33} , σ_{31} , σ_{13} – силовые напряжения; μ_{12} , μ_{32} – моментные напряжения; γ_{11} , γ_{33} , γ_{13} , γ_{31} – деформации; χ_{12} , χ_{32} – изгибы кручения; V_1 , V_3 – перемещения, ω_2 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_2 ; E, ν, α, B – упругие постоянные микрополярного тела.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (далее будем рассматривать задачу изгиба)

$$\sigma_{31} = p_1, \quad \sigma_{33} = \pm p_3, \quad \mu_{32} = \pm m_2, \quad \text{при } x_3 = \pm h \quad (1.4)$$

Граничные условия на кромках прямоугольника ($x_1 = 0, x_1 = a$), в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

Будем считать, что $2h \ll a$ (т.е. рассматриваемый прямоугольник тонкий).

2. Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), то получим, что силовые и моментные напряжения будут выражаться через перемещения V_1 , V_3 и поворот ω_2 . Для построения одномерной модели применяем метод приведения [4]. Аппроксимируем V_1 , V_3 и ω_2 степенными рядами относительно x_3 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1,n} x_3^n, \quad V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3,n} x_3^n, \quad \omega_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2,n} x_3^n. \quad (2.1)$$

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения и граничные условия (приведенные выше) плоской задачи микрополярной теории упругости, имеющие место в тонком прямоугольнике, получаем рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты частичных сумм (полиномов) (2.1) любой степени, причем число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов.

На самом деле, на основании формул (1.2), (1.3), с учетом (2.1), для силовых напряжений σ_{33} , σ_{31} и моментного напряжения μ_{32} получим

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)V_{3,n+1} + \nu \frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1} \right] x_3^n, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{31} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha)(n+1)V_{1,n+1} - 2\alpha\omega_{2,n} \right] x_3^n, \quad (2.3)$$

$$\mu_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} B(n+1)\omega_{2,n+1} x_3^n. \quad (2.4)$$

Используя формулы (2.2)-(2.4) и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$, после некоторых преобразований приходим к следующим шести равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha)(2k+1)V_{1,2k+1} - 2\alpha\omega_{2,2k} \right] h^{2k} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha)(2k+2)V_{1,2k+2} - 2\alpha\omega_{2,2k+1} \right] h^{2k+1} = \frac{p_1^+ + p_1^-}{2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1)V_{3,2k+1} + \nu \frac{\partial V_{1,2k}}{\partial x_1} \right] h^{2k} = \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}, \quad (2.7)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+2)V_{3,2k+2} + \nu \frac{\partial V_{1,2k+1}}{\partial x_1} \right] h^{2k+1} = \frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[B(2k+1)\omega_{2,2k+1} \right] h^{2k} = \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}, \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[B(2k+2)\omega_{2,2k+1} \right] h^{2k+1} = \frac{m_2^+ + m_2^-}{2}. \quad (2.10)$$

Далее, после подстановки (1.3) в формулы обобщенного закона Гука (1.2), силовые напряжения σ_{11} , σ_{13} и моментное напряжение μ_{12} будут выражаться через перемещения V_1 , V_3 и свободный поворот ω_2 . Имея в виду разложение (2.1), и подставляя полученные таким образом формулы для σ_{11} , σ_{13} и μ_{12} в уравнения движения (1.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial x_1^2} + \nu(n+1) \frac{\partial V_{3,n+1}}{\partial x_1} \right] + (\mu - \alpha)(n+1) \frac{\partial V_{3,n+1}}{\partial x_1} + \\ & + (\mu + \alpha)(n+2)(n+1) V_{1,n+2} - 2\alpha(n+1) \omega_{2,n+1} = \rho \frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1-\nu^2} \left[(n+2)(n+1) V_{3,n+2} + \nu(n+1) \frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1} \right] + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial x_1^2} + \\ & + (\mu - \alpha)(n+1) \frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial^2 \omega_{2,n}}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$B \frac{\partial^2 \omega_{2,n}}{\partial x_1^2} + B(n+2)(n+1) \omega_{2,2n+2} - 2\alpha \left[\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1} - (n+1) V_{1,n+1} + 2\omega_{2,n} \right] = J \frac{\partial^2 \omega_{2,n}}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

Отметим, что уравнения (2.11)-(2.13) и условия (2.5)-(2.10) распадаются на две части: симметричную относительно x_3 (соответствующую продольным колебаниям) и обратно-симметричную (соответствующую поперечным колебаниям).

Поперечные колебания микрополярного тонкого прямоугольника (балки), на основании перечисленных выше уравнений и условий в исходном приближении метода степенных рядов описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} & (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) V_{1,1} - 2\alpha \omega_{2,0} + \\ & + \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} + 3(\mu + \alpha) V_{1,3} - 2\alpha \omega_{2,2} \right] h^2 = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \\ & \frac{E}{1-\nu^2} \left[2V_{3,2} + \nu \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} \right] h = \frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \\ & 2B\omega_{2,2}h = \frac{m_2^+ + m_2^-}{2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + 2\nu \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right] + 2(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} + 6(\mu + \alpha) V_{1,3} - 4\alpha \omega_{2,2} = \rho \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}, \\ & \frac{E}{1-\nu^2} \left[2V_{3,2} + \nu \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} \right] + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}, \\ & B \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} + 2B\omega_{2,2} - 2\alpha \left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - V_{1,1} + 2\omega_{2,0} \right] = J \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $V_{3,2}$ и $\omega_{2,2}$ из второго и третьего уравнения (2.14) в пятое и шестое уравнения, получим

$$(\mu + \alpha) \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} - \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \quad (2.15)$$

$$B \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} + 2\alpha V_{1,1} - 2\alpha \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - 4\alpha \omega_{2,0} = J \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial t^2} - \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}. \quad (2.16)$$

Подставив (2.1) в (1.2), для σ_{11} получим

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\nu(n+1)V_{3,n+1} + \frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1} \right] x_3^n. \quad (2.17)$$

откуда для случае изгиба в исходном приближении будем иметь

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[2\nu V_{3,2} + \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} \right] x_3. \quad (2.18)$$

Для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31}^0 = (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) V_{1,1} - 2\alpha \omega_{2,0}. \quad (2.19)$$

Подставив выражение σ_{11} из (2.18) в первое уравнение равновесия (1.1), проинтегрировав по x_3 , получим

$$\tilde{\sigma}_{31} = \frac{x_3^2}{2} \left(\rho \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right) + \bar{\sigma}_{31}(x_1, t), \quad (2.20)$$

где $\bar{\sigma}_{31}(x_1, t)$ – постоянная интегрирования. Для определения этой величины потребуем, чтобы усредненная по высоте прямоугольника величина $\tilde{\sigma}_{31}$ была равна нулю:

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{31} dx_3 = 0. \quad (2.21)$$

Подставив выражение (2.20) в (2.21), получим

$$\bar{\sigma}_{31}(x_1, t) = \frac{h^2}{6} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} \right). \quad (2.22)$$

Таким образом, подставив (2.22) в (2.20), для $\tilde{\sigma}_{31}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\sigma}_{31} = \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right). \quad (2.23)$$

Итак, будем иметь

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^0 + \tilde{\sigma}_{31}. \quad (2.24)$$

Подставив (2.19) и (2.23) в (2.24), получим окончательную формулу для σ_{31} :

$$\begin{aligned} \sigma_{31} = & (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) V_{1,1} - 2\alpha \omega_{2,0} + \\ & + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $V_{3,2}$ выражается с помощью $V_{1,1}$ $\left(V_{3,2} = \frac{1-\nu^2}{2E} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} \right)$.

При помощи формул (2.25) удовлетворяя соответствующему граничному условию из (1.4), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) V_{1,1} - 2\alpha \omega_{2,0} - \frac{h^2}{3} E \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = \\
= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \rho \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Объединив (2.15), (2.16) и (2.26) окончательным образом приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{3,0}$, $V_{1,1}$, $\omega_{2,0}$:

$$\begin{aligned}
(\mu - \alpha) \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) V_{1,1} - 2\alpha \omega_{2,0} - \frac{h^2}{3} E \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \\
- \nu \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \rho \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}, \\
(\mu + \alpha) \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} - \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \\
B \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2} + 2\alpha V_{1,1} - 2\alpha \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - 4\alpha \omega_{2,0} = J \frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial t^2} - \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}.
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Система уравнений (2.27) представляет собой математическую модель динамики микрополярных упругих тонких балок при изгибной деформации. Это система дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа шестого порядка. К системе (2.27) следует присоединить граничные условия на концах балки ($x_1 = 0$, $x_1 = a$) [18] и начальные условия для $V_{3,0}$, $V_{1,1}$, $\omega_{2,0}$, $\frac{\partial V_{3,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{1,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial t}$.

Теперь сравним полученную модель динамики микрополярной упругой тонкой балки с аналогической моделью [18], построенной на основе метода гипотез, имеющей асимптотическое подтверждение:

уравнения движения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 2h\tilde{p}_1, \\
\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_2;
\end{aligned} \quad (2.28)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
N_{13} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}], \quad N_{31} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}], \\
M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{12} = 2Bhk_{12};
\end{aligned} \quad (2.29)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \\
K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}.
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Если (2.30) подставить в соотношения упругости (2.29) и последние в уравнения движения (2.28), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели микрополярных упругих балок работы [18]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (2.27) на основе метода степенных рядов ($V_{3,0} = w$, $V_{1,1} = \psi_1$, $\omega_{2,0} = \Omega_2$), легко убедиться, что разница только в подчеркнутом члене в (2.27). Но эта величина результат того, что в физическом уравнении для γ_{ii} ($i = 1, 2$) было удержано силовое напряжение σ_{33} , которым, как известно, в теории балок принято пренебрегать. Таким образом, модель динамики микрополярных упругих тонких балок, которая построена в [18] на основе метода гипотез, являющаяся асимптотически точной моделью [12], теперь обосновывается также методом степенного разложения.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

К. А. Жамакочян

Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок

Рассматриваются уравнения граничных и начальных условий динамики плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонком прямоугольнике. Принимая метод разложений по толщине прямоугольника в степенные ряды, на основе исходного приближения построена прикладная-одномерная модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок. Показывается, что построенная модель полностью совпадает с аналогичной моделью микрополярных балок построенной на основе асимптотически обоснованного метода гипотез.

Ք. Ա. Ժամակոչյան

Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների մաթեմատիկական մոդելի կառուցման համար

Դիտարկվում են տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության հարթ լարվածային վիճակի դինամիկայի հավասարումները, եզրային և նախնական պայմանները բարակ ուղղանկյուն տիրույթում: Կիրառելով ըստ ուղղանկյան հաստության աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը՝ կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների ծոման դեֆորմացիայի դինամիկայի կիրառական-միաչափ մաթեմատիկական մոդելը: Ցույց է տրվում, որ կառուցված մոդելը լիովին համընկնում է միկրոպոլյար հեծանների անալոգ մոդելի հետ, որը կառուցված է ասիմպտոտիկ հիմնավորմամբ վարկածների մեթոդի հիման վրա:

K. A. Zhamakochyan

**Application of the Method of Power Series for the Construction of the
Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Bars**

Equations of boundary and initial conditions of the dynamics of plane stress state of the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations are considered in a thin rectangle. Using the method of expansion to power series along the thickness of rectangle and based on the initial approximation, an applied one dimensional model of dynamic bending of micropolar elastic thin bars is constructed. It is shown that the constructed model coincides with the analogical model of micropolar bars, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1967. 266 с.
2. *Reissner E.* – J. Math. and Phys. 1944. V. 23. P.184-191.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
4. *Селезов И. Т.* – Прикладна механіка. 1960. Т. 6. Вып. 5. С. 319-327.
5. *Ворович И. И.* – В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 51-149.
6. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В.* – Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1990. № 6. С. 124-138.
7. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
8. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 260 с.
9. *Амбарцумян С. А.* Микрополяная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
10. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып.1. С.129-147.
11. *Саркисян С. О.* –Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
12. *Саркисян С. О.* – Изв. высш. учеб. заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 5. С. 31-37.
13. *Саркисян С. О.* – Учен. зап. Гюмрийского гос. пед. ин-та. 2013. Серия А. № 1.
14. *Саркисян С. О.* – Докл. РАН. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
15. *Саркисян С.О., Саркисян А. А.* – Акустический журн. 2011. Т. 57. № 4. С. 461-469.
16. *Саркисян С. О., Саркисян А. А.* – Акустический журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 170-181.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 862 с.
18. *Саркисян А. А.* – ДНАН Армении. 2011. Т. 11. N 4. С. 342-351.

ров, которые имеют красное смещение больше единицы, с целью выяснения тех основных физических и структурных характеристик, которые могут служить фундаментом для разработки основных принципов нахождения новых далеких ($z > 1$) квазаров.

2. Выбор источников. Для исключения наблюдательной селекции изучаемые радиоисточники были выбраны по следующим принципам. Выбраны объекты, имеющие хотя один мерцающий компонент, угловой размер которого не превышает одной угловой секунды. Затем из них выбраны радиоисточники, которые в обзоре FIRST [7] имеют четко выраженный дискретный радиокомпонент (в области с угловым размером $5' \times 5'$, на частоте 1400 МГц). Далее проведено оптическое отождествление по таблице SDSS [8] и выбраны только те объекты, у которых известны красные смещения [5]. После этого из имеющихся в первоначальном списке 289 радиоисточников осталось всего 68 объектов, из них 42 являются квазарами (у 30 красное смещение больше единицы, у 12 меньше единицы), а 26 – радиогалактиками (у 11 красное смещение больше единицы, а у 15 меньше единицы).

В настоящей работе проводится радиооптическое изучение этих 30 квазаров.

3. Накопление данных и их анализ. С целью накопления наблюдательных данных для вышеупомянутых 30 квазаров использованы вся доступная литература (около 100 работ) и астрономические сайты в интернете. Были собраны данные по всем диапазонам электромагнитных волн начиная с радиодиапазона до гамма-лучей. Поскольку основная часть собранных наблюдательных данных относится к радиооптическому диапазону, следовательно, наше исследование и выводы в основном применимы для этих диапазонов.

Обработка полученных данных показала, что 17 из этих источников на частоте 1400 МГц имеют только один очень компактный радиокомпонент, а 13 имеют протяженные компоненты или состоят из более чем одного компонента.

Из этих 13 объектов 4 имеют угловые размеры меньше, чем диаграмма VLA, что приводит к слиянию радиоисточников, из-за чего их (на первый взгляд) можно принять за компактные радиоисточники. Более детальная обработка данных показала, что эти 4 объекта состоят из нескольких радиоисточников или имеют протяженные радиокомпоненты, а 9 имеют хорошо заметные протяженные радиокомпоненты. Один из этих 9 объектов имеет вид классической радиогалактики, что довольно странно, учитывая его большое красное смещение (его угловой размер больше 2 угловых минут).

В оптическом диапазоне все 30 источников являются звездоподобными объектами. Были получены спектры всех 30 объектов в оптическом диапазоне. Обработка спектров дала возможность отождествлять многочисленные линии атомов и их серий, с помощью которых оценены красные смещения.

Построен график (рис.1), изображающий зависимость найденных элементов от числа объектов. На этом графике хорошо видно множество отождествленных элементов. В средней части графика виден максимум, причиной которого является красное смещение. Линии этих элементов, по всей вероятности, являются характерными для квазаров.

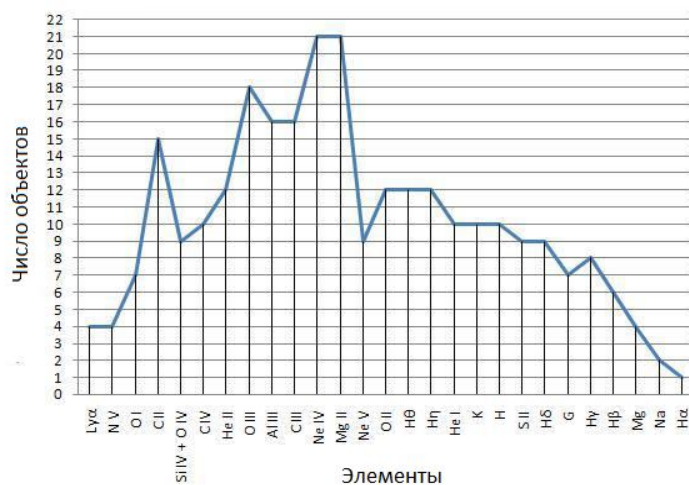
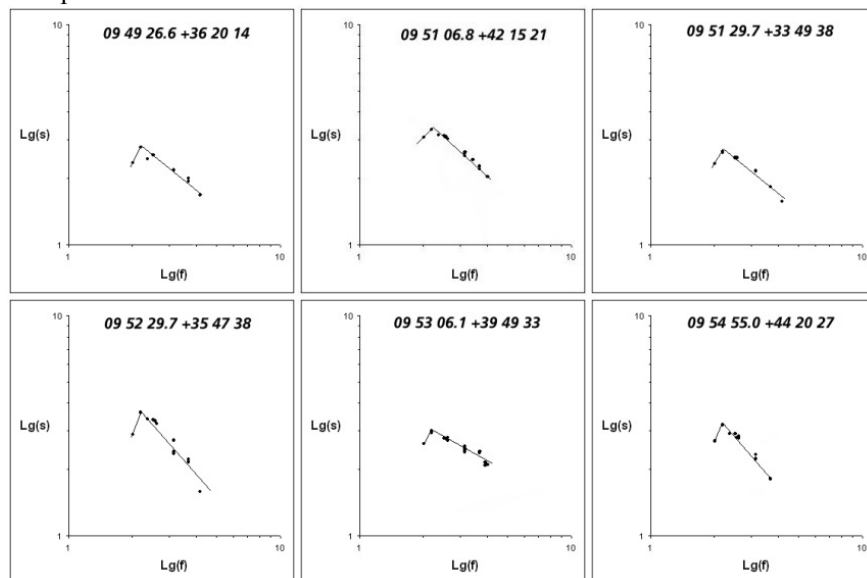
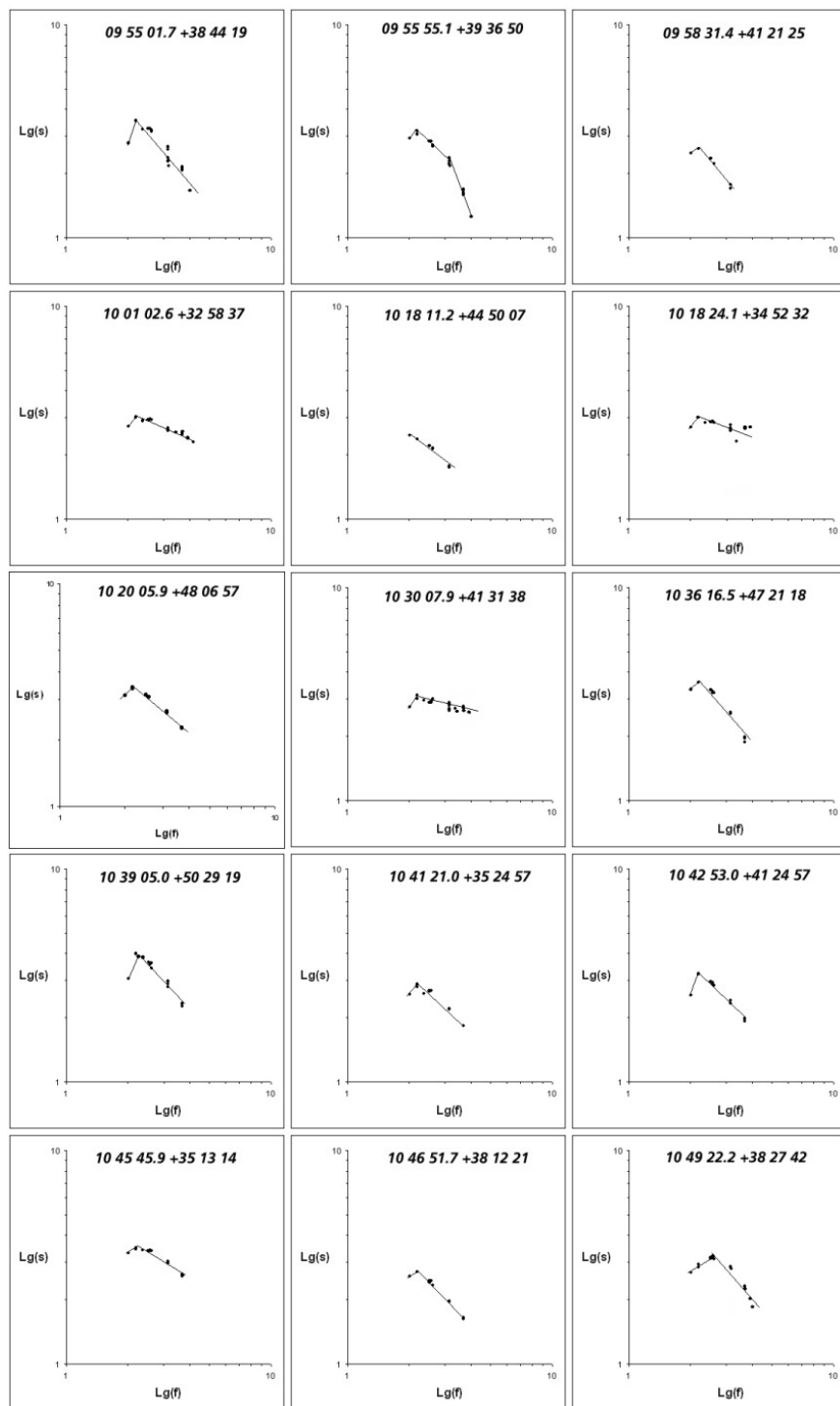


Рис. 1. Число объектов с соответствующими спектральными линиями.

На рис. 2 приводятся построенные нами радиоспектры для этих 30 квазаров.





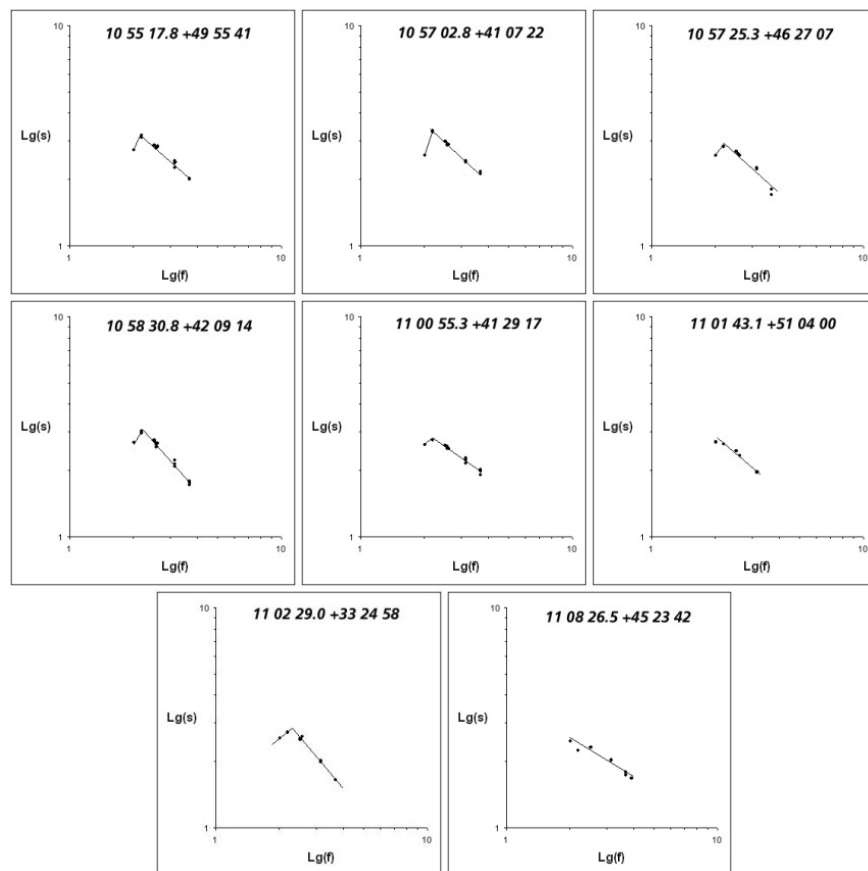


Рис. 2. Радиоспектры для 30 квазаров.

Анализ полученных радиоспектров показывает, что почти все источники (кроме трех: 1018+4450, 1101+5104, 1108+4523) на частоте 102 МГц имеют завал спектра, который, по всей вероятности, можно объяснить синхротронным самопоглощением. У одного объекта (0955+3936) наблюдается нарушение линейности радиоспектра, которое можно объяснить тем, что на разных частотах наблюдаются разные области того же объекта, в которых могут быть разные физические условия, связанные с флуктуациями сильных магнитных полей [9].

По этим спектрам оценены средние значения спектральных индексов ($\alpha = 0.66 \pm 0.25$).

Были вычислены также средние значения для абсолютных звездных величин ($M = -26.51 \pm 0.25$), красных смещений ($z = 1.65 \pm 0.01$) и радиосветимостей ($L = 2.20 \pm 1.47 \cdot 10^{45}$ эрг/с).

Для нахождения упомянутых абсолютных звездных величин внегалактических объектов была использована следующая формула (см. [10]):

$$M = m + 5 - 5Lg(R) + K_z + A_R, \quad (1)$$

где M и m – соответственно абсолютные и видимые звездные величины, R – расстояние между источником и наблюдателем [11], A_R – параметр космического поглощения [12], K_z – K -поправка [10].

Радиосветимость внегалактических радиоисточников определялась по формуле (см. [13])

$$L_R = 4\pi R^2 S_{\nu_0} \nu_0^\alpha \int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu^{-\alpha} d\nu, \quad (2)$$

где S_{ν_0} – плотность потока источника на частоте ν_0 , α – спектральный индекс, $(\nu_2 - \nu_1)$ – частотный интервал радионаблюдений.

При всех расчетах для постоянной Хаббла была использована величина $H=72$ (км/сек*Мпс), для параметра замедления $q_0 = -0.565$.

23 объекта из использованных 30 (с красными смещениями $z>1$) имеют плотность потока больше, чем 100 мДж на частоте 1400 МГц, тогда как из 129 радиоисточников, обнаруженных в той же области, только 48 (включая и 30 объектов нашего списка) имеют такую высокую плотность потока.

Наблюдательные данные и результаты расчетов этих 30 объектов приведены в таблице. В первых двух столбцах таблицы приведены координаты источника, в третьем – красные смещения, в четвертом и пятом – соответственно видимые и абсолютные звездные величины, в шестом – радиосветимости, в седьмом – плотность потока на частоте 1400 МГц, в восьмом – спектральные индексы.

4. Заключение. Анализируя данные, приведенные на рис. 2, можно утверждать, что все 30 объектов нашего списка обладают основными качествами, характерными для квазаров: компактностью, плоскими радиоспектрами и высокой радиосветимостью. Приведенные оценки линейных размеров мерцающих радиоисточников показывают, что компактные радиоисточники, полученные методом мерцаний, возможно, находятся внутри квазара.

Обобщая результаты, полученные в настоящей работе, можно утверждать следующее. Объекты, которые в таблице FIRST (на частоте 1400 МГц) обнаружены как дискретные радиоисточники, а также отождествлены с радиоисточниками, найденными методом межпланетных мерцаний (на частоте 102 МГц), и имеют размеры меньше одной угловой секунды, являются квазарами с вероятностью свыше 60%.

В настоящей работе мы использовали наблюдения, полученные методом мерцания на межпланетной плазме на 102 МГц для того, чтобы доказать, что свыше 60% компактных и изолированных радиоисточников из каталога FIRST являются квазарами. Таким образом, мы предлагаем простой метод для нахождения кандидатов в квазары, используя лишь только каталог FIRST на 1400 МГц.

Параметры квазаров

α_{1950}	δ_{1950}	Z	m_R (mag)	M_R (mag)	L (erg/s* 10^{45})	$S_{1.4\text{GHz}}$ (mJy)	α_{int}
09 49 26.6	+36 20 14	2.050	17.99	-29.45	1.14	94.64	0.500
09 51 06.8	+42 15 21	1.783	20.5	-26.44	2.31	371.13	0.710
09 51 29.7	+33 49 35	1.414	20.4	-25.73	0.56	131.83	0.560
09 52 49.2	+35 47 38	1.241	18.7	-26.98	1.44	227.82	0.970
09 53 06.1	+39 49 33	1.179	18.73	-26.78	0.51	246.02	0.412
09 54 55.0	+44 20 27	2.183	19.17	-28.50	4.21	148.82	0.889
09 55 01.7	+38 44 19	1.405	20.2	-25.90	1.8	195.55	0.982
09 55 55.1	+39 36 50	2.941	21.2	-27.60	12.33	138.27	1.007
09 58 31.4	+41 21 25	1.294	19.51	-26.31	0.29	42.35	0.953
10 01 02.6	+32 58 37	1.682	19.14	-27.58	2.04	403.9	0.347
10 18 11.2	+44 50 07	1.750	19.54	-27.32	0.49	51.34	0.651
10 18 24.1	+34 52 32	1.400	17.26	-28.82	0.75	332.11	0.174
10 20 14.6	+40 03 30	1.254	17.66	-28.05	1.77	838.94	0.325
10 30 07.9	+41 31 38	1.120	18.32	-27.02	0.6	407.61	0.296
10 36 16.5	+47 21 18	2.360	19.82	-28.14	18.52	354.97	1.089
10 39 05.0	+50 29 19	1.278	18.7	-27.07	4.48	470.15	1.140
10 41 21.0	+35 24 57	2.228	19.49	-28.25	3.21	158.78	0.669
10 42 53.0	+41 24 57	1.760	18.68	-28.20	2.39	177.36	0.835
10 45 45.9	+35 13 14	1.604	20.8	-25.75	7.27	1037.4	0.622
10 46 51.7	+38 12 21	1.987	19.25	-28.07	1.12	73.65	0.705
10 49 22.2	+38 27 42	1.018	20.6	-24.43	1.98	692.35	0.826
10 55 17.8	+49 55 41	2.399	19.38	-28.65	6.24	215.57	0.743
10 57 02.8	+41 07 22	1.746	17.64	-29.21	1.2	106.44	0.752
10 57 25.3	+46 27 07	1.662	19.55	-27.13	1.44	176.02	0.653
10 58 30.8	+42 09 14	1.398	19.42	-26.66	0.73	109.15	0.814
11 00 55.3	+41 29 17	2.465	19.78	-28.34	3.72	174.42	0.522
11 01 43.1	+51 04 00	2.185	19.8	-27.87	1.71	87.29	0.686
11 02 29.0	+33 24 58	1.383	19.53	-26.51	0.55	95.01	0.753
11 08 26.5	+45 23 42	1.492	19.18	-27.12	0.4	102.77	0.406
11 01 21.0	+50 57 01	1.507	22.9	-29.61	0.32	71.62	1.008

Заметим, что только 8-10% всех известных квазаров имеют сильное радиоизлучение. Следовательно, наш метод пригоден только для нахождения кандидатов в далекие радиоквазары.

Acknowledgement. Funding for SDSS-III has been provided by the Alfred P. Sloan Foundation, the Participating Institutions, the National Science Foundation, and

the U.S. Department of Energy Office of Science. The SDSS-III web site is <http://www.sdss3.org/>.

SDSS-III is managed by the Astrophysical Research Consortium for the Participating Institutions of the SDSS-III Collaboration including the University of Arizona, the Brazilian Participation Group, Brookhaven National Laboratory, University of Cambridge, Carnegie Mellon University, University of Florida, the French Participation Group, the German Participation Group, Harvard University, the Instituto de Astrofísica de Canarias, the Michigan State/Notre Dame/JINA Participation Group, Johns Hopkins University, Lawrence Berkeley National Laboratory, Max Planck Institute for Astrophysics, Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics, New Mexico State University, New York University, Ohio State University, Pennsylvania State University, University of Portsmouth, Princeton University, the Spanish Participation Group, University of Tokyo, University of Utah, Vanderbilt University, University of Virginia, University of Washington, and Yale University.

¹Институт прикладных проблем физики НАН РА

²Бюраканская астрофизическая обсерватория

им. В.А.Амбарцумяна НАН РА

E-mail: martik@bao.sci.am

**М. А. Оганнисян, Р. Р. Андреасян,
Г. М. Паронян, А. В. Абрамян**

**Исследование компактных радиоисточников с $z > 1$ –
кандидатов в далекие квазары**

Проведено радиооптическое исследование 30 квазаров из второй области (0.097 стерадиан) Кембриджского 7C списка с целью изучения основных физических и морфологических характеристик далеких квазаров. Все они имеют угловые размеры меньше одной секунды на частоте 102 МГц. Вычислены средние значения их абсолютных звездных величин и спектральных индексов ($M = -26.51 \pm 0.25$, $\alpha = 0.66 \pm 0.25$). Показано, что свыше 60% компактных радиоисточников из каталога FIRST (1400 МГц) являются кандидатами в далекие квазары.

**Մ. Ա. Հովհաննիսյան, Ռ. Ռ. Անդրեասյան,
Գ. Մ. Պարոնյան, Հ. Վ. Աբրահամյան**

**Կոմպակտ $z > 1$ ռադիոաղբյուրների ուսումնասիրություն.
հեռավոր քվազարների թեկնածուներ**

Հեռավոր քվազարների ֆիզիկական և կառուցվածքային առանձնահատկությունները պարզաբանելու նպատակով կատարվել է Քեմբրիջյան 7C ցուցակի երկրորդ տիրույթի (0.097 քառակուսի ռադիան) 30 քվազարների ռադիոօպտիկական հետազոտություն: Դրանք բոլորը 102 ՄՀց հաճախությունում ունեն մեկ վայրկյանից փոքր անկյունային չափեր: Հաշված են բացարձակ աստղային մեծությունների և ռադիոսպեկտրալ ինդեքսների միջին արժեքները ($M = -26.51 \pm 0.25$, $\alpha = 0.66 \pm 0.25$): Ցույց է

տրվել, որ FIRST աղբյուրների ցուցակի կոմպակտ ռադիոաղբյուրների 60%-ը հեռավոր քվազարների թեկնածուներ են:

**M. A. Hovhannisyan, R. R. Andreasyan,
G. M. Paronyan, H. V. Abrahamyan**

**The Investigation of Compact Radio Sources with $z > 1$:
Candidates of Distant Quasars**

A radio-optical investigation of 30 quasars from the second area (0.097 radian squares) of Cambridge 7C catalogue was carried out to study the physical and morphological characteristics of distant quasars. All of these objects have angular sizes less than a second on the 102 MHz. It have been calculated average values of absolute magnitudes and spectral indexes ($M = -26.51 \pm 0.25$, $\alpha = 0.66 \pm 0.25$) for them. It was shown that 60% of compact radio sources from the FIRST catalogue (1400 MHz) are candidates of distant quasars.

Литература

1. *Artyukh V.S., Tyul'bashev S.A.* - Astron. Rep. 1996. V. 40. P. 601-607.
2. *Artyukh V.S., Tyul'bashev S.A., Isaev E.A.* - Astron. Rep. 1998. V. 42. P. 283-292.
3. *Artyukh V.S., Tyul'bashev S.A.* - Astron. Rep. 1998. V. 42. P. 576-586.
4. *Artyukh V.S., Kopylov A.I., Kopylova F.G.* - Astron. Astrophys. 2003. V. 403. P. 555-560.
5. *Kopylov A.I., Artyukh V.S., Kopylova F.G.* - Astron. Astrophys. 2004. V. 421. P. 455-459.
6. *Visser A.E., Riley J.M., Roettgering H.J.A., Waldram E.M.* - Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1995. V. 110. P. 419-439.
7. *Becker R.H., Helfand D.J., White R.L., Gregg M.D., Laurent-Muehleisen S.A.* - The FIRST Survey Catalog: Version 2012Feb16, 2012.(VizieR On-line Data Catalog: VIII/90)
8. *Ahn C.P., Alexandroff R., Allende Prieto C., Anderson S.F. et al.* - The SDSS Data Release 9 (DR9, <http://www.sdss3.org>), 2012.
9. *Artyukh V. S.* - JENAM 2007. Yerevan, Armenia. (Abstract book, p. 47-47)
10. *Wisotzki L.* - Astron. Astrophys. 2000 V. 353. P. 861-866.
11. *Veron-Cetty M.-P., Veron P.* - Astron. Astrophys. 2003. V. 412 P. 399-403.
12. *Willott C. J. et al.* - MNRAS. 1998. V. 300. P. 625-648.
13. *Lang K. R.* Astrophysical formulae: A compendium for the physicist and astrophysicist. New York, Springer-Verlag, Inc. 1974. 760 p.

УДК 612. 83: 612. 014. 42; 612. 434. 14; 616.072

Т. С. Хачатрян ¹, В. О. Топузян ²

**Особенности изменения концентрации тиреотропного
гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови
двухмесячных крыс при гипотиреозе до и после
действия холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-О-
изопропил- α , β -дегидротирозина**

(Представлено академиком К. Г. Карагезяном 25/VIII 2012)

Ключевые слова: *тиреоидные гормоны, гипотиреоз, тиреотропный гормон гипофиза, холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-О-изопропил- α , β -дегидротирозина, ацетилхолин.*

Дисфункция щитовидной железы (ЩЖ) – гипотиреоз (ГПТ) – клинический синдром, вызванный длительным, стойким недостатком в организме тиреоидных гормонов (ТГ) и сопровождающийся снижением их биологического эффекта на тканевом уровне, может привести к тяжёлым осложнениям, таким как кретинизм, сердечная недостаточность, выпот в серозные полости, вторичная аденома гипофиза. Наиболее часто ГПТ развивается в исходе аутоиммунного тиреоидита, реже – после резекции ЩЖ и терапии радиоактивным ¹³¹I. Большую редкость представляют ГПТ, развившиеся в исходе подострого и фиброзирующего тиреоидитов, а также стойкие ГПТ в результате лечения диффузного токсического зоба тиреостатиками. Можно выделить врождённые и приобретённые формы ГПТ. Причиной врождённых ГПТ, встречающихся с частотой 1 случай на 4 – 5 тысяч новорожденных, являются: аплазия и дисплазия ЩЖ, эндемический зоб, врождённый дефицит тиреотропного гормона гипофиза (ТТГ), синдром периферической резистентности к ТГ – казуистика [1, 2]. Заболевания ЩЖ могут протекать с нарушением её структуры и функции (с изменением гормонального фона). Изменения структуры ткани ЩЖ встречаются гораздо чаще, чем нарушения её функции. ЩЖ может быть увеличена в размерах, а в 15% случаев увеличивается не полностью, а участками, что приводит к образованию узлов. Причиной этого может быть ограничение

или, наоборот, чрезмерное поступление йода в организм, например, с некоторыми медикаментами. Нарушение функции ЩЖ означает снижение (ГПТ) или повышение (тиреотоксикоз, гипертиреоз) выработки ТГ – тироксина (Т4) и трийодтиронина (Т3) [3]. Особый интерес в связи с этим представляет выяснение возрастных особенностей регуляции функции ЩЖ при ГПТ. Всестороннее изучение этого вопроса открывает перспективы для разработки новых подходов к лечению осложнений ГПТ у разных возрастных групп больных. Систему нейроэндокринной регуляции клетки помимо ТГ и стероидных гормонов составляют также нейромедиаторы (НМ), в частности ацетилхолин (АХ), являющийся одним из эфиров холина [4]. В корригировании соматических и нейрогенных нарушений невторостепенна роль эфиров и амидов холина, заслуживающих существенного внимания с точки зрения особенностей их синтеза и биологической активности [5]. Вместе с тем не имеется сведений относительно действия эфиров и амидов холина на изменения при ГПТ показателей ТТГ, общего Т3 и Т4 в крови крыс различных возрастных групп.

Анализ новейших исследований нейропротекторных агентов, антиоксидантов, стволовых клеток, вакцин, различных хирургических техник позволяет заключить, что нужны новые эффективные средства для лечения экспериментальной патологии ЩЖ типа ГПТ [6 – 8]. Попытки терапии специфического заболевания ЩЖ типа ГПТ, как правило, приводящего к тяжелой инвалидизации, в настоящее время фактически безуспешны. С учётом мультифакторной и мультифазной модели развития патологий ЩЖ, таких как ГПТ, эффективной может стать нейропротекторная стратегия терапии холиновыми эфирами N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот типа холинового эфира N-(2-метоксibenзоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭД) [9, 10].

Целью настоящего исследования было изучение действия ХЭД относящегося к холиновым эфирам N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот, на изменение показателей ТТГ, общего Т3 и Т4 в крови у двухмесячных крыс при ГПТ.

Исследования проведены на 50 двухмесячных крысах-самцах (линии Вистар), так как они удобны для массовых экспериментов и у них по сравнению с собаками, кошками, кроликами отмечается большая интенсивность физиологических показателей, протекающих в значительно более короткие промежутки времени, что весьма приемлемо для ближайших и в особенности отдалённых наблюдений, связанных с изучением состояния восстановительных процессов. ГПТ вызывался путём проведения тиреоидэктомии по следующему алгоритму. Для проведения операции крысы под эфирным наркозом фиксировались в положении на спине. Доступ к ЩЖ осуществлялся через разрез кожи в области шеи длиной около 3,5 – 4 см. Затем обнажалась ЩЖ, производилась отпрепаровка 2/3 её части с сохранением параситовидных желёз.

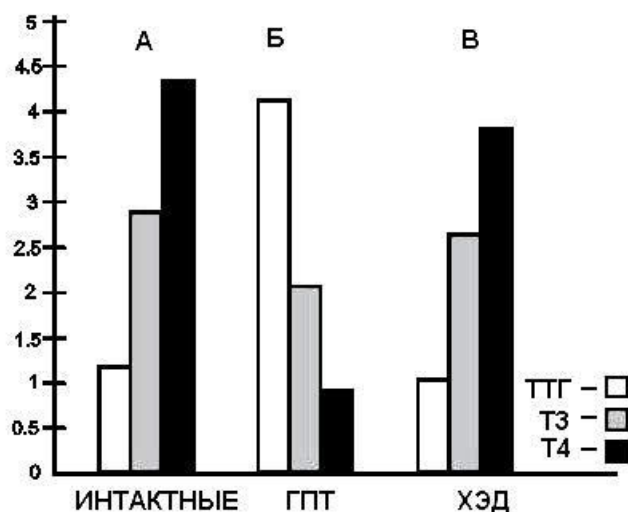


Рис. 1. Диаграммы изменения концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови у двухмесячных крыс в норме (А), при гипотиреозе (Б) и после действия холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-О-изопропил- α , β -дегидротирозина (В). Концентрация тиреотропного гормона гипофиза выражена в мМЕ/мл, трийодтиронина – в нг/мл, тироксина – в мкг/мл.

С помощью острых ножниц доли отсекались, после чего под каждую из них подводились лигатуры. Раны послойно зашивались. Животные хорошо переносили операцию и спустя 0.5 – 1 ч после операции подходили к корму и воде. Тиреоидэктомия в данных сериях экспериментальных исследований была проведена у 40 крыс. Животные были разделены на 3 подопытные группы: 1) интактные животные, 10 экземпляров; 2) животные с ГПТ, не получавшие каждодневных инъекций ХЭД, 20 экземпляров; 3) животные с ГПТ, получавшие ХЭД в дозе по 200 мкг/кг массы тела индивидуально в течение 14 дней, 20 экземпляров; После тиреоидэктомии и окончания дачи препаратов у всех 50 крыс были проведены декапитация и сбор крови. В сыворотке с помощью иммуноферментного метода определялись концентрация ТТГ, общего Т3 и Т4.

Полученные данные подвергались статистической обработке в системе «Statistica for Windows», с применением распределения Пуассона и критерия Пирсона. Тиреоидэктомия у крыс 2-й подопытной группы приводила к возникновению характерных сдвигов в содержании ТТГ и ТГ в крови, которые отражали возникновение у них состояния ГПТ. Как видно на рис. 1, Б, тиреоидэктомия приводила к значительному повышению содержания ТТГ (на 35.8 %) в сыворотке крови у крыс данной подопытной группы; содержание общего Т3 понижалось на 72.4 % по сравнению с интактными животными (рис. 1, А); содержание же общего Т4 понижалось на 18.1%, соответственно. После введения ХЭД в дозе 200 мкг/кг массы тела в течение 14 дней у крыс 3-й подопытной группы были отмечены следующие показатели: содержание ТТГ в крови составило 91.6 % по срав-

нению с нормой, принятой за 100 % (рис. 1, А); содержание общего Т3 составило 89.6 %; содержание общего Т4 составило 86.3 % (рис. 1, В). Как видно из рисунка, применение ХЭД способствует восстановлению показателей ТТГ и ТГ в крови двухмесячных крыс.

Полученные данные свидетельствуют о роли холиновых эфиров N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот в изменении концентрации ТТГ, общего Т3 и Т4 при экспериментальном ГПТ у крыс с возрастом, что подтверждает результаты наших предыдущих исследований.

¹Институт прикладных проблем физики НАН РА

²Научно-технологический центр органической
и фармацевтической химии НАН РА

Т. С. Хачатрян, В. О. Топузян

**Особенности изменения концентрации тиреотропного гормона
гипофиза и тиреоидных гормонов в крови двухмесячных крыс при
гипотиреозе до и после действия холиновых эфиров
N-замещённых- α , β -дегидротирозина**

Рассмотрены особенности концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови у крыс с экспериментальным гипотиреозом до и после действия инъекций холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина. Установлено, что у двухмесячных крыс при гипотиреозе происходило резкое повышение уровня тиреотропного гормона гипофиза и резкое понижение уровня тиреоидных гормонов в крови. При действии холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина в крови крыс происходило понижение концентрации тиреотропного гормона гипофиза и повышение уровня тиреоидных гормонов и достигало их значений у интактных животных.

Տ. Ս. Խաչատրյան, Վ. Օ. Թոփուզյան

**Հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության
փոփոխման առանձնահատկությունները երկու ամսական առնետների
արյան մեջ հիփոթիրեոզի ժամանակ, քոլինի էսթեր N-(2-մեթոքսիբենզոիլ)-O-
իզոպրոպիլ- α , β -դեհիդրոթիրոզինի ազդեցությունից առաջ և հետո**

Սույն ուսումնասիրության նպատակն էր՝ հետազոտել հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության աստիճանը երկու ամսական առնետների արյան մեջ, փորձարարական հիփոթիրեոզի պայմաններում, քոլինի էսթեր N-(2-մեթոքսիբենզոիլ)-O-իզոպրոպիլ- α , β -դեհիդրոթիրոզինի օգտագործելուց առաջ և հետո: Ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ երկու ամսական առնետների մոտ փորձարարական հիփոթիրեոզի պայմաններում կենդանիների արյան մեջ տեղի էր ունենում հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի բաղադրության կտրուկ աճ և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության կտրուկ նվազում: Քոլինի էսթեր N-(2-մեթոքսիբենզոիլ)-O-իզոպրոպիլ- α , β -դեհիդրոթիրոզինի ազդեցության տակ կենդանիների արյան մեջ տեղի էր ունենում հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի բաղադրության կտրուկ նվա-

զուգում և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության կտրուկ աճ, որը բնորոշ է նորմալ կենդանիներին:

T. S. Khachatryan, V. O. Topuzyan

Features of Changes in Concentration of Pituitary Thyroid Hormone and Thyroid Hormones in the Blood of Two-Month Rats with Experimental Hypothyroidism before and after Operations with N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl- α , β -Dehydrothyroline Choline Ester

The features of pituitary thyroid hormone concentration and thyroid hormones in the blood of rats with experimental hypothyroidism before and after injections of N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl- α , β -dehydrothyroline choline ester were investigated. A sharp increase of pituitary thyroid hormone level and a sharp decrease of the level of thyroid hormones in the blood of two-month rats with hypothyroidism have been established. Under the action of N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl- α , β -dehydrothyroline choline ester the decrease of pituitary thyroid hormone concentration and the increase of thyroid hormones level in the rats' blood have been observed and reached their values in intact animals.

Литература

1. *Jorde R.* - Tidsskr. Nor. Lageforen. 2002, V. 9. № 122. P. 938-940.
2. *Monzani F., Dardano A., Caraccio N.* - J. Treat Endocrinol. 2006. V. 5. № 2. P. 65-81.
3. *Матинян Л. А., Аветисян А. А.* В сб.: II съезд Армянского физиологического общества. 1974. Ереван. Изд. АН Арм ССР. С. 46-52.
4. *Cabadak H., Cuadra A. E., El-Fakahany E. E., Kan B.* - Recept. Signal. Transduct. Res. 2009. V. 1. № 29. P. 63-66.
5. *Киприян Т. К., Топузян В. О., Карапетян И. Р., Хачатрян Т. С.* В сб.: Международная научная конференция «Актуальные проблемы интегративной деятельности и пластичности нервной системы», посвящ. 80-летию со дня рождения академика НАН РА и чл.-кор. РАН В. В. Фанарджяна. Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2009. С. 154 – 158.
6. *Хачатрян Т. С., Киприян Т. К.* - Информационные технологии и управление. 2006. № 3-4. С. 46-51.
7. *Матинян Л. А., Нагапетян Х. О., Хачатрян Т. С.* - В сб.: Международная научная конференция «Актуальные проблемы интегративной деятельности и пластичности нервной системы», посвящ. 80-летию со дня рождения академика НАН РА и чл.-кор. РАН В. В. Фанарджяна. Ереван. Изд. «Гитутюн». НАН РА. 2009. С. 175-178.
8. *Матинян Л. А., Бабаханян М. А., Киприян Т. К., Хачатрян Т. С., Марченко З. И.* - Вестник МАНЭБ. 2006. Т. 11. № 8. С. 221-223.
9. *Мнджоян О. Л., Топузян В. О.* - Успехи химии. Т. 50. N162 .1981. С. 2198-2211.
10. *Zollinger M., Sayer C., Dannecker R., Schuler W., Sedrani R.* - Drug. Metab. Dispos. 2008. V. 8. № 36. P. 1457 – 1460.

L-аргинина не только в очаге развития опухоли, но и в центральной нервной системе представляет определенный интерес, поскольку между кишечником (включая микробиоту) и мозгом существует двунаправленная связь, регулируемая на нейрональном, гормональном, иммунологическом уровнях, которая вносит свой вклад в поддержание гомеостаза [10]. В представленной работе впервые изучена картина субклеточных превращений L-аргинина с вовлечением изоформ аргиназы в тканях головного мозга мышей при АКЭ и после *E. coli*-терапии.

Материал и методы. Опыты проводили с соблюдением правил содержания и обращения с животными, изложенных в Директивах Европейского Сообщества (86/609/ЕС) и одобренных Комитетом по биомедицинской этике при Институте биохимии им. Г.Х. Бунятына НАН РА. Двухмесячные беспородные белые мыши-самцы массой 20-22 г были разделены на группы (n=18/группу): контрольная – здоровые мыши и две опытные – животные с АКЭ; мыши с АКЭ, подвергнутые обработке клетками *E. coli* (медицинский центр «Арменикум»).

Формирование асцитной карциномы Эрлиха у мышей осуществляли суспензией клеток АКЭ, отбираемой у белых беспородных мышей-опухоленосителей (НТЦ органической фармацевтической химии НАН РА). Трансплантацию клеток АКЭ осуществляли введением асцитной жидкости в объеме 0.5мл (1×10^7 кл/мл) в брюшную полость мышей, которых декапитировали на 11-е сутки развития АКЭ (конец лог-фазы – начало терминального периода роста опухоли) [11].

Бактериальная обработка. Через 2 дня после трансплантации АКЭ глаза мышей одной из опытных групп однократно асептически обрабатывали ватными тампонами, пропитанными взвесью живых необработанных бактерий *E. coli* (1×10^9 клеток/мл); параллельная опытная группа мышей-опухоленосителей служила контролем для оценки влияния бактерий.

Противоопухолевый эффект. Влияние бактериальной терапии оценивали по массе тела, объему асцитной жидкости, среднему времени выживания (СВВ) и проценту продления СВВ (ПСВВ), которые контролировали в каждой опытной группе путем ежедневной регистрации смертности и рассчитывали по уравнениям: $СВВ = (\text{день первого случая смерти} + \text{день последнего случая смерти})/2$; процент ПСВВ $= [(СВВ \text{ группы АКЭ-} E. coli / СВВ \text{ группы АКЭ}) - 1] \times 100$ [12].

Выделение митохондриальной и цитоплазматических фракций головного мозга. Мышей декапитировали, извлекали головной мозг, гомогенизировали в гомогенизаторе Поттера (тефлон – стекло) (1500 об/мин) в течение 3 мин в 10-кратном объеме 20 мМ HEPES буфера, содержащего 0.25 М сахарозу, pH 7.4. Для выделения клеточных компартментов применяли метод дифференциального центрифугирования [13]. Гомогенат центрифугировали на центрифуге К-24 (Герм.) при 3000 об/мин 10 мин при 4°C с осаждением ядерной фракции, и из полученной надосадочной жидкости центрифугированием при 15000 об/мин 20 мин при 4°C получали в супернатанте цитоплазматическую фракцию, в осадке – митохондриальную.

Активность аргиназы определяли по образованию орнитина в реакционной смеси [14]. Пробы инкубировали в течение 1 ч при 37°C в 0.05 М NaOH-глициновом буфере pH 9.5 и/или 20 мМ HEPES буфере, pH 7.4, с добавлением в соответствующие буферы 0.1 М L-аргинина и 0.05 М $\text{MnCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. Параллельно в контрольных экспериментах для подтверждения аргиназной активности пробы инкубировали в присутствии 60 мМ L-валина, неконкурентного ингибитора аргиназы. Реакцию останавливали 10%-ной трихлоруксусной кислотой (в пропорции 1:2 по объему) и белки осаждали центрифугированием при 15000 об/мин 3 мин при комнатной температуре. Супернатанты депротеинизированных проб смешивали с 4.5 %-ным нингидрином (в соотношении 1:2 по объему), нагревали в водяной бане 30 мин при 90–95°C и после охлаждения содержание L-орнитина определяли спектрофотометрически при длине волны 505 нм. Активность аргиназы выражали в мкмоль L-орнитина мг^{-1} белка ч^{-1} .

Определение содержания L-аргинина. Пробы депротеинизировали 0.5 N NaOH и 10%-ным ZnSO_4 (в пропорции 1:1:1 по объему), центрифугировали при 15000 об/мин 3 мин и в супернатантах определяли содержание аргинина [15]. Супернатанты проб последовательно смешивали с рабочим раствором (смесь растворов: 0.02 % 8-оксихинолина в 96%-ном этиловом спирте, 2.5% сульфосалицилата натрия в 0.01 М растворе глицина и 2.5% NaOH, в пропорции 1:1:1 по объему) и 1%-ным гипобромитом натрия в соотношении 3:1:0.2 (по объему) и спустя 15 мин оценивали содержание L-аргинина спектрофотометрически при длине волны 525 нм, которое выражали в мкмоль L-аргинина мг^{-1} белка.

Содержание белка определяли методом Лоури и сотр. [16] с использованием бычьего сывороточного альбумина в качестве стандарта. Спектральные измерения проводили на спектрофотометре Specol 211 (Герм.).

Статистика. Достоверность различий оценивали с использованием параметрического однофакторного дисперсионного анализа (one-way Anova) с последующим постдисперсионным анализом Холм-Сидака (пакет программ SigmaStat 3.5 for Windows). В качестве критерия достоверности принимали $p < 0.05$.

Результаты и обсуждение. На сегодняшний день обе изоформы аргиназы обнаружены во многих органах и тканях, включая центральную нервную систему и желудочно-кишечный тракт [17]. Аргиназа расщепляет аргинин на орнитин и мочевину, и в наших экспериментах аргиназная активность определялась по аккумуляции орнитина в реакционной смеси после часовой инкубации (см. *Материалы и методы*). Как видно из рис. 1, в условиях *in vitro* общая активность аргиназы и ее изоформ зависит от кислотности инкубационной среды: у контрольных мышей при повышении pH от физиологических значений (pH 7.4) до оптимальных для аргиназы (pH 9.5) активность фермента возрастает в гомогенатах головного мозга в 1.9, цитоплазме – 1.6, митохондриях – 15 раз. И несмотря на то, что основные значения обеспечивают максимальное проявление аргиназной активности, по всей вероятности, значения последней, определяемые при нейтральных pH, точнее отражают картину *in vivo* в нормальных

физиологических условиях, хотя в клетке возможны локальные колебания кислотности среды. В контрольной группе при pH 7.4 значения активности A1 в цитоплазме сходны с общей, определяемой в гомогенате, и примерно в 8.5 раза выше активности A2 в митохондриях. При pH 9.5 эти различия нивелируются, а именно в гомогенате, цитоплазме и митохондриях детектируются примерно сходные значения аргиназной активности.

При АКЭ в тканях головного мозга происходит интрацеллюлярное перераспределение аргиназной активности: при pH 7.4 в гомогенатах общая активность увеличивается в 2.5 раза, активность A2 в митохондриях – в 30 раз, тогда как в цитоплазме активность A1 падает в 17.4 раза, по сравнению с контролем. Любопытно, что при этом стимулирующее влияние на активность аргиназы основной среды (pH 9.5) сохраняется лишь в гомогенатах и не проявляется в отношении обеих изоформ аргиназы. Это указывает на АКЭ-индуцированные изменения микроусловий внутри клеточных компартментов тканей мозга, влияющих на проявление активности изоформ аргиназы.

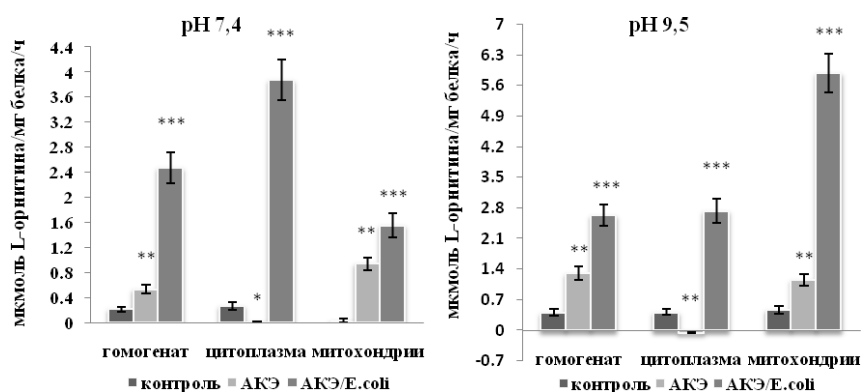


Рис. 1. Аргиназная активность в головном мозге мышей при асцитной карциноме Эрлиха АКЭ и *E. coli*-терапии. Результаты представлены в виде $M \pm SEM$, $n=18$. Здесь и далее достоверность параметров (p), оцениваемых при АКЭ, определялась по сравнению с контрольными значениями, а после *E. coli*-терапии – по сравнению данными, полученными одновременно в отношении нелеченых животных с АКЭ. Достоверность на графиках представлена следующими обозначениями: # $p>0.05$, * $p<0.05$, ** $p<0.01$, *** $p<0.001$.

Экспрессия аргиназы в клеточных линиях опухолевых клеток, первичных очагах развития рака человека и мышей связана с ее участием в синтезе полиаминов, промотирующих рост опухоли, а также с подавлением аргиназой NO-опосредуемой цитотоксичности в отношении опухоли [18, 19]. Тем не менее генетическая абляция изоформы A2 в мышинной модели рака простаты приводит к более агрессивному росту и развитию опухоли, что указывает на существование альтернативных путей синтеза или захвата полиаминов, которые активируются в раковых клетках в случае подавления экспрессии A2 [6]. Нами выявлены высокая аргиназная активность в опухолевых клетках и стимулирование обеих изоформ аргиназы в

перитонеальных лейкоцитах мышей с АКЭ, тогда как в мозге обнаружены полное подавление A1, активность которой в норме доминирует внутри клетки, и одновременное активирование A2, которая, лимитируя содержание аргинина, будет препятствовать гиперпродукции оксида азота индуцибельной NOS, которая может активироваться в мозге в рамках естественного иммунного ответа [20]. Отметим, что мышинные макрофаги костномозгового происхождения экспрессируют исключительно A2, которая оказывает провоспалительный эффект, стимулируя продукцию активных форм кислорода в митохондриях [21].

Как известно, в состав клеточных стенок *Escherichia coli* как грамотрицательной бактерии входит липополисахарид (ЛПС), который активирует макрофаги мышей-опухоленосителей, стимулирует приток CD4(+) Т-клеток, вызывая селективный лизис опухолевых клеток и подавление их роста [22]. Обработка мышей с АКЭ фаго- и термолизатами *E. coli* в комплексе с противоопухолевыми препаратами почти полностью подавляет рост опухоли, а у некоторых мышей вызывает полное ее исчезновение [23]. Поскольку живые бактерии эффективнее подавляют канцерогенез, чем ослабленные или убитые [22], в наших экспериментах обработка мышей с АКЭ осуществлялась цельными клетками непатогенных штаммов *E. coli*, причем однократно, при этом на 75% увеличивается среднее время выживаемости животных, в четыре раза снижается объем асцитной жидкости, почти нормализуется вес тела [9]. При этом *E. coli*-терапия существенно стимулирует подавленную при АКЭ активность A1, которая после бактериальной обработки почти в 15 раз превышает контрольный уровень при pH 7.4 и в 6.6 раза при pH 9.5. Возрастание общей активности фермента наблюдается в гомогенатах. Одновременно возрастает активность A2: при pH 7.4 в 1.7 раза, а при pH 9.5 в 5 раз по сравнению с нелечеными мышами-опухоленосителями, что свидетельствует о восстановлении стимулирующего влияния основной среды на активность A2 и опосредованно указывает на изменения внутри митохондрий.

Таким образом, *E. coli*-обработка мышей с АКЭ вызывает активирование обеих изоформ аргиназы, при этом отменяется АКЭ-индуцированное подавление активности A1 и стимулируется A2, которая практически не проявляется в норме. Разнонаправленное изменение активности изоформ аргиназы в клетках мозга при АКЭ и стимулирующее влияние на них бактериальной терапии должно отражаться на сопряженных обменных путях в соответствующих клеточных компартментах.

При АКЭ в тканях головного мозга детектировались сдвиги субклеточного содержания аргинина и орнитина (рис. 2). Причем уровень аргинина возрастает в 6.7, 5.1 и 4 раза, а орнитина – в 1.9, 9.5 и 2.7 раза в гомогенате, цитоплазме и митохондриях, соответственно. Концентрация орнитина в наибольшей степени возрастает в цитоплазме, и, по-видимому, подавляет A1 изоформу аргиназы, т. е. имеет место ингибирование конечным продуктом по принципу отрицательной обратной связи. В то же время повышение уровня орнитина не предотвращает повышение активности A2, что связано со спецификой его влияния на эту изоформу подоб-

но тому, как возрастание концентрации орнитина не подавляет аргиназную активность в культурах клеток [24].

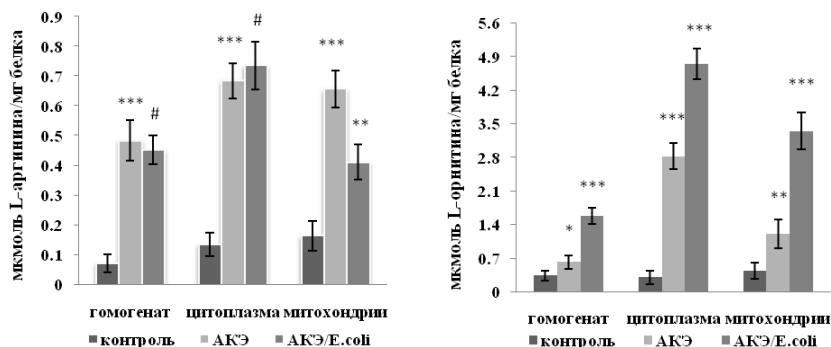


Рис. 2. Содержание L-аргинина и L-орнитина в головном мозге мышей при АКЭ и *E. coli*-терапии. Результаты представлены в виде $M \pm SEM$, $n=18$.

Особый интерес представляют данные о повышении содержания аргинина в цитоплазме при АКЭ, что может быть обусловлено подавлением активности не только A1, но и других аргинин-метаболизирующих систем. Отметим, что L-аргинин является прекурсором агматина, путресцина и полиаминов, участвующих в иммунитете и стрессовом ответе организма [25]. Причем в отличие от аргинина и агматина, которые легко преодолевают гематоэнцефалический барьер, у путресцина, спермина и спермидина этот процесс затруднен, и поэтому они синтезируются непосредственно в мозге из орнитина, который образуется при расщеплении аргинина аргиназой. В то же время АКЭ-стимулирование A2 не предотвратило возрастание аргинина в митохондриях, что может быть связано с одновременным активированием ферментов, участвующих в синтезе аргинина из орнитина. Отметим, что митохондриальная изоформа карбамоилфосфатсинтетазы I поставляет карбамоилфосфат для синтеза цитруллина из орнитина орнитин-карбамоилтрансферазой, тогда как цитоплазматическая карбамоилфосфатсинтетаза II вовлечена в синтез пиримидинов [26, 27]. Вдобавок прекурсором аргинина является цитруллин: рециклизацию цитруллина в аргинин осуществляют аргининосукцинатсинтаза и аргининосукцинатлиаза, которые представлены практически во всех органах, в том числе и в мозге, и могут обеспечивать автономное снабжение аргинина [26]. Активность этих ферментов в известной мере определяет баланс в соотношении аргинина и цитруллина в клеточных компартментах и может вносить свой вклад в наблюдаемые сдвиги в уровне аминокислот при АКЭ и *E. coli*-терапии.

Таким образом, нами впервые выявлены разнонаправленные сдвиги в активности изоформ аргиназы в тканях головного мозга и влияние на них бактериальной терапии при АКЭ. Как это будет отражаться на связанных метаболических путях и взаимовлиянии мозг – кишечник, покажут даль-

нейшие исследования.

¹Институт биохимии им. Г.Х. Бунятына НАН РА

²Научно-технологический центр органической
и фармацевтической химии НАН РА

О. Х. Авагян, Н. Х. Алчуджян, Н. О. Мовсесян, Г. Г. Минасян

**Метаболический профиль L-аргинина в головном мозге мышей при
асцитной карциноме Эрлиха и влияние противоопухолевой терапии
авирулентными штаммами *Escherichia coli*: аргиназа. Сообщение 1**

Асцитная карцинома Эрлиха на 11-е сутки развития сопровождается разнонаправленными сдвигами активности разных изоформ аргиназы и одновременным повышением содержания L-аргинина и продукта аргиназной реакции L-орнитина в цитоплазме и митохондриях тканей головного мозга мышей. Противоопухолевая терапия авирулентными клиническими штаммами *Escherichia coli* оказывает стимулирующее воздействие на обе изоформы аргиназы, влияет на уровень L-аргинина и L-орнитина в исследуемых клеточных компартментах.

Հ. Խ. Ավագյան, Ն. Խ. Ալչուջյան, Ն. Օ. Մովսեսյան, Գ. Գ. Մինասյան

**L-արգինինի նյութափոխանակության պատկերը մկների գլխուղեղում Էրլիխի
ասցիտային կարցինոմայի ժամանակ և հակառնուցքային բուժման
ազդեցությունը *Escherichia coli*-ի ոչ ախտածին շտամների
օգտագործմամբ. արգինազ: Հաղորդում 1**

Չարագսման 11-րդ օրը Էրլիխի ասցիտային կարցինոման ուղեկցվում է արգինազի տարբեր իզոմերների ակտիվության հակառակ ուղղված փոփոխություններով ու միաժամանակ L-արգինինի և արգինազային ռեակցիայի արգասիք L-օրնիտինի քանակի աճով մկների գլխուղեղի հյուսվածքների բջջապլազմայում և միտոքոնդրիումներում: Արգինազի իզոմերները խթանվում են, և փոփոխվում է L-արգինինի ու L-օրնիտինի մակարդակը հետազոտվող բջջային բաղադրամասերում հակառնուցքային բուժման ժամանակ *Escherichia coli*-ի ոչ ախտածին կլինիկական շտամների օգտագործմամբ:

**H. Kh. Avagyan, N. Kh. Alchujyan, N. H. Movsesyan,
G. G. Minasyan**

**L-arginine Metabolic Profile in the Mice brain at Ehrlich Ascites
Carcinoma and Effects of Anticancer Therapy with Avirulent Strains of
Escherichia coli: Arginase. Report 1**

Ehrlich ascites carcinoma on 11th day of development is accompanied by opposite changes in the activity of different arginase isoforms, and a simultaneous increase in the levels of L-arginine and L-ornithine which is produced in arginase reaction in the cytoplasm and mitochondria of the mice brain tissues. Arginase isoforms are stimulated and associated changes in the L-arginine and L-ornithine content are observed in the studied cellular compartments following cancer therapy with avirulent clinical strains of *Escherichia coli*.

Литература

1. Якубовская П. И. - Рус. биотерапевт. журн. 2002. Т. 1. N 3. С. 5–14.
2. Patyar S., Joshi R., Byrav P., Prakash A., Medhi B., Das B. K. - J. Biomed. Sci. 2010. V. 17. P. 21–34.
3. Bronte V., Zanovello P. - Nat. Rev. Immunol. 2005. V. 5. P. 641–654.
4. Burke A.J., Sullivan F.J., Giles F.J., Glynn S.A. - Carcinogenesis. 2013. V. 34. N 3. P. 503–512.
5. Raber P., Ochoa A.C., Rodríguez P.C. - Immunol. Invest. 2012. V. 41. N 6-7. P. 614–634.
6. Mumenthaler S.M., Yu H., Tze S., Cederbaum S.D., Pegg A.E., Seligson D.B., Grody W.W. - Int. J. Oncol. 2008. V. 32. N 2. P. 357–365.
7. Munder M. Br. - J. Pharmacol. 2009. V. 158. P. 638–651.
8. Singh R., Pervin S., Karimi A., Cederbaum S., Chaudhuri G. Cancer Res., 2000, v.60, p. 3305–3312.
9. Авагян О.Х., Алчуджян Н.Х., Мовсесян Н.О. и др. - Мед. наука Армении. 2013. Т. 53. N 2. С. 22–33.
10. Grenham S., Clarke G., Cryan J. F., Dinan T. G. - Front. Physiol. 2011. V. 2. P. 1–15.
11. Практикум по экспериментальной онкологии на примере асцитной карциномы Эрлиха. Метод. Разработка. Сост. Е.В. Инжеваткин. Красноярский гос. ун-т. 2004. 10 с.
12. Mazumder U.K., Gupta M., Maiti S., Mukherjee M. - Indian J. Exp. Biol. 1997. V. 35. P. 473–477.
13. Bustamante J., Czerniczyniec A., Lores-Arnaiz S. - Front. Biosci. 2007. V. 12. P. 1034–1040.
14. Iyamu E.W., Asakura T., Woods G.W. - Anal. Biochem. 2008. V. 383. N 2. P. 332–334.
15. Akamatsy S., Watanabe T.J. - J. Biochem. 1961. V. 77. N 3. P. 484.
16. Lowry O.H., Rosebrough N.J., Farr A.L., Randall R.J. - J. Biol. Chem. 1951. V. 193. P. 265–275.
17. Morris S.M. Jr. - J. Nutr. 2007. V. 137. 1602S–1609S.
18. Tate D.J. Jr., Patterson J.R., Velasco-Gonzalez C., Carrol E.N., Trinh J. - Int. J. Biol. Sci. 2012. V. 8. N 8. P. 1109–1120.
19. Tate D.J.Jr., Vonderhaar D.J., Caldas Y.A., Metoyer T., Patterson J.R., Aviles D. H., Zea A.H. - J. Hematol. Oncol. 2008. V. 1. P. 14–19.
20. Esh T., Stefano G.B., Fricchione G.L., Benson H. - Med. Sci. Monit. 2002. V. 8. N 6. P. 103–118.
21. Ming X-F., Rajapakse A.G., Yepuri G., et al.. - Am. Heart Assoc. 2012. V. 1. N 4. P. 12–18.
22. Carswell E.A., Old L.J., Kassel R.L., Green S., Fiore N., Williamson B. - Proc. Natl. Acad. Sci. 1975. V. 72. P. 3666–3670.
23. Gambashidze K., Khorava P., Azaladze T., Kalandarishvili K., Jaiani E., Lasareishvil B., Azaladze A., Tediashvili M. - Exp. Oncol. 2012. V. 34. N 2. P. 107–111.
24. Wheatley D.N., Philip R., Campbell E. - Mol. Cell Biochem. 2003. V. 244. N 1-2. P. 177–185.
25. Casero R.A., Pegg A.E. - Biochem. J. 2009. V. 421. P. 323–338.
26. Wu G., Jaeger L.A., Bazer F.W., Rhoads J.M. - J. Nutr. Biochem. 2004. V. 15. N 8. P. 442–451.
27. Wu G., Morris S. M. - Biochem. J. 1998. V. 336. P. 1–17.

УДК 619:616-981.48-07:636.4

А. А. Агабабова, Н. О. Мовсесян, А. М. Акопян, О. А. Авакян

**Морфогистохимические изменения при асцитной
карциноме Эрлиха на фоне воздействия
кишечной палочки**

(Представлено академиком М.А. Давтяном 16/IV 2013)

Ключевые слова: *опухоль, микроорганизм, морфологические изменения, печень, мозг.*

Проблема канцерогенеза является одной из важнейших в современной медицине. Возникает вопрос: почему сопутствующие инфекции способны вызвать регрессию опухоли и в какой степени этот феномен обусловлен действием липополисахаридов (ЛПС), цитокинов либо других факторов. Патогенез ЛПС включает активацию бактериальными молекулами гуморальных и клеточных мишеней, высвобождение медиаторов, в том числе цитокинов, синтез биологически активных молекул, осуществляющих токсическую функцию в отношении инфекционного агента, а также ЛПС, способных вызвать выраженные метаболические изменения, апоптоз, воспалительный и иммунный ответ. Проникновение бактериальных ЛПС в системный кровоток наблюдается не только при острых и хронических инфекциях, но и при нарушениях функций интестинального барьера, при поражениях печени, травмах, ожогах, оперативных вмешательствах, стрессовых ситуациях, сопровождающихся транслокацией микроорганизмов из кишечника в кровоток [1]. Более того, если эпителий кишечника воспален и изъязвлен, то микроорганизмы и тем более продукты их жизнедеятельности беспрепятственно пересекают эпителиальный барьер и достигают лимфоцитов и, наконец, брыжеечных лимфоузлов. Дальнейшая их судьба зависит от состояния иммунитета. В здоровом организме моментально включается иммунновоспалительный механизм, нацеленный на быструю элиминацию проникших патогенов при развитии фазы острого воспаления с последующей столь же быстрой коррекцией воспаления – противовоспалением.

Как и почему развиваются воспалительные заболевания? С одной стороны – генетическая предрасположенность, нарушение иммунновоспалительной толерантности, несбалансированный ответ на собственные мик-

робные антигены, с другой – нарушение энергообеспечения нормальных функций, в том числе и барьерной.

Неповрежденная слизистая толстой кишки является достаточно надежным барьером, предотвращающим попадание эндотоксина в кровоток в больших количествах. Во всяком случае, в эксперименте чистый эндотоксин через кишечный эпителий не проникает. На сегодняшний день ясно, что практически у всех здоровых лиц эндотоксин можно обнаружить при помощи иммуноферментной реакции в тонких мазках крови на поверхности 3-4 % полиморфноядерных лейкоцитов [2]. Следовательно, хоть и в небольших количествах, зато постоянно эндотоксин проникает в кровоток.

Начиная с 2007 г. нами с комплексных позиций – бактериологических, биохимических, электронномикроскопических, гистохимических изучались транслокация некоторых микробов, их поведение при опухолевом процессе, в частности при аденокарциноме сигмовидной кишки, при острых лейкозах *in vivo* и *in vitro* [3, 4]. Согласно полученным данным у макроорганизма при аденокарциноме сигмовидной кишки наблюдались активация процесса транслокации фекальной флоры, в частности *E.coli*, из кишечника и выход ее в кровь соответственно инфицированию внутренних органов и опухоли. Полученные электронномикроскопические данные показали, что если кишечник, где происходили изменения с микробом, иногда необратимые (образование бесструктурных протопластов), является наименее благоприятной средой для *E.coli*, то кровь и тем более опухоль – наиболее благоприятные условия для ее существования [3, 4]. Если до настоящего времени нас интересовали поведение кишечной палочки при разных опухолевых процессах и ее активная транслокация, то в данном исследовании мы пытаемся проследить ее влияние на асцитную карциному Эрлиха. На данный момент первой и единственной бактерией, этиологическая роль которой неоспорима, является *Helicobacter pylori* [5]. Эта бактерия ответственна за более чем 60 % случаев рака желудка, что составляет около 5.5% всех случаев рака желудка в мире [5]. Что касается *E.coli*, то энтеропатогенная *E.coli* способна прикрепляться к кишечному эпителию, в дальнейшем инвазируя и вызывая воспаление, болезнь Крона и колоректальный рак [5]. Кроме того *E.coli* обладает некоторыми онкогенными токсинами: цитотоксическим некротизирующим фактором 1 и фактором ингибирования клеточного цикла.

Позитивную роль микрофлоры кишечника трудно недооценить: регуляция газового состава кишечника и других полостей организма; морфокинетические действия (у безмикробных животных снижена митотическая активность энтероцитов, скорость их миграции по микроворсинкам); продукция энзимов, участвующих в метаболизме белков, углеводов, липидов, нуклеиновых кислот, продукции биологически активных соединений (витамины, антибиотики, гормоны и др.); участие в водно-солевом обмене, в рециркуляции желчных кислот, холестерина и других макромолекул (микроорганизмы кишечника не только способны разрушать, модифицировать молекулу холестерина, но могут синтезировать данный стерин, а

также вызвать деструкцию и трансформацию желчных кислот, стероидных гормонов); мутагенная/антимутагенная роль; детоксикация экзогенных и эндогенных субстратов и метаболитов (процесс детоксикации идет по нескольким путям: биотрансформация с образованием нетоксичных конечных продуктов, микробная трансформация, сопровождающаяся образованием метаболитов, подвергшихся быстрой деструкции в печени; изменения полярности соединений, приводящие к изменению скорости их экскреции в окружающую среду или транслокации из кишечника в кровяное русло); обеспечение колонизационной резистентности и участие в неспецифической стимуляции иммунокомпетентных клеток и тканей (адьювантно-активные соединения, имеющие в качестве действующего начала ЛПС, мурамилдипептид), образуются из нормальной микрофлоры кишечника человека и животных под воздействием лизоцима и других литических агентов, постоянно присутствующих в просвете кишечника [2].

Целью настоящей статьи явилось исследование влияния ярко выраженного биологического фактора – кишечной палочки на опухолевый процесс. Нами использовались клинические штаммы *E.coli* как самые активные и легко транслоцируемые.

Исходной опухолью при асцитной карциноме Эрлиха послужил спонтанный рак молочной железы. По гистологическому строению это – недифференцированная опухоль, утратившая эпителиальный характер. При внутрибрюшинной прививке образуется асцит, богатый взвешенными в нем опухолевыми клетками. Прививается во всех без исключения случаях, не подвергается спонтанному рассасыванию. Латентный период после прививки длится 4-6 дней. Мыши, привитые внутрибрюшинно, живут в среднем 10-16 дней. Инфицирование кишечной палочкой делалось в течение недели начиная с первого дня после введения асцитной жидкости подопытным мышам. Инфицированные кишечной палочкой мыши были сравнительно активнее и жили в среднем на 2-3 дня дольше.

Морфогистохимические исследования были проделаны в динамике; после инфицирования на 7-й и 12-18-й день в зависимости от того, сколько мыши жили, прямо перед гибелью. Сравнение проводилось между мышами с асцитной карциномой Эрлиха и мышами с асцитной карциномой Эрлиха, инфицированными кишечной палочкой.

Материалом для патоморфологического исследования служили кусочки ткани печени и мозга размером около 0.6x0.6x0.4 см, взятые у экспериментальных мышей. У этих же животных из брюшной полости бралась асцитическая жидкость (1 мл), к которой добавлялось несколько капель гепарина для предотвращения свертываемости. Потом жидкость помещали в центрифужную пробирку, центрифугировали 10 мин при 1500 об/мин, сливали надосадочную жидкость и из центрифугата готовили мазки, которые окрашивали методом Паппенгейма. Морфологические исследования материала проводились по общепринятой методике с последующей окраской препаратов гематоксилин-эозином. Обзорная характеристика гистогрaмм и цитогрaмм изучалась при увеличении микроскопа с окуляром E-PL-10 и объективом A-plan 10/0.25, 20/0.25 и 100/0.25.

У мышей 1-й серии исследований при изучении препаратов печени отмечалась сохранность структурных элементов, хотя местами наблюдалась некоторая размытость в архитектонике долек. Гепатоциты варьируют в размерах, в части клеток присутствуют дистрофические изменения. Основная часть клеток увеличена в размерах, ядро небольшой величины, цитоплазма широкая, светлая. В некоторых клетках пикноз и кариолизис. Часть клеток с укрупненным ядром с глыбчатым грубым хроматином. В капиллярах застой крови и краевое стояние эритроцитов (адгезия эритроцитов по периферии сосуда) (рис.1). В мозговой ткани наблюдались очаговая пролиферация нейроцитов и мелкие очаги межучного отека (рис. 2).

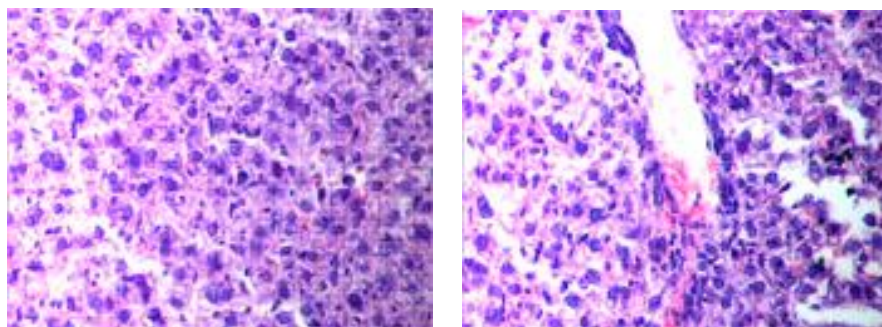


Рис. 1. Нарушение в структурном строении печеночных долек. Расширенные сосуды с краевым стоянием эритроцитов у мышей 1-й группы. Окраска гематоксилин-эозином. x100.

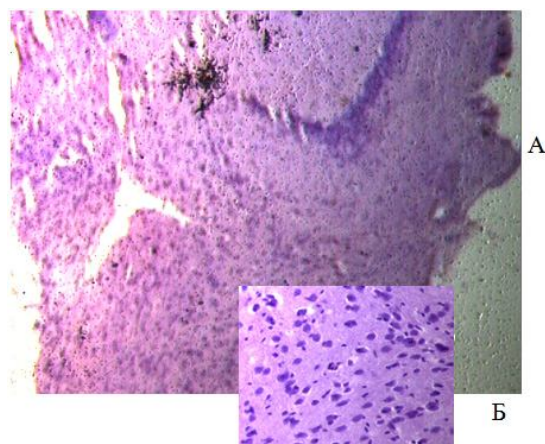


Рис. 2. Изменения в мозговой ткани в виде пролиферации клеток глии и развитие межучного отека. Окраска гематоксилин-эозином. А – x100, Б – x200.

У мышей 2-й серии исследований цитограмма асцитической жидкости выявила значительное количество лимфоидных элементов, редкие клетки мезотелия и разрозненно лежащие гепатоциты с признаками умеренно выраженной анаплазии (клетки печени увеличены в размерах, ядра

крупные деформированные с грубыми зернами хроматина и несколькими ядрышками, часть клеток с обильной цитоплазмой) (рис. 3).

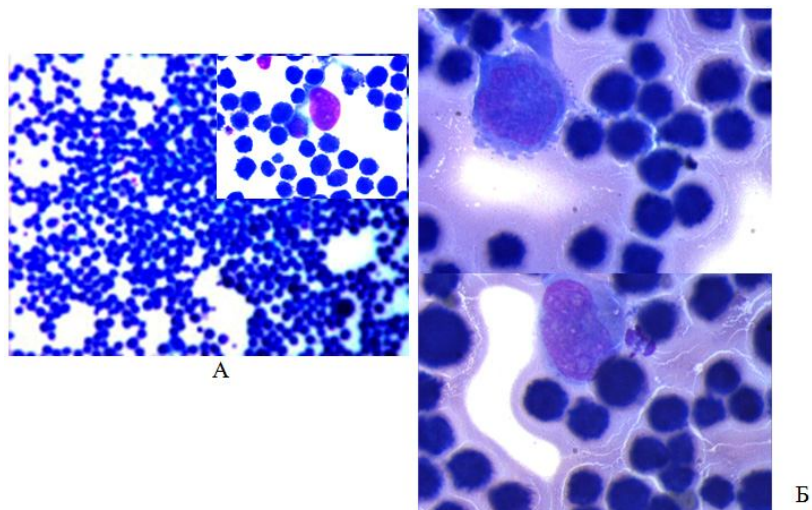


Рис. 3. Редкие гепатоциты с признаками умеренно выраженной анаплазии. Окраска по Паппенгейму. А – $\times 200$, Б – $\times 1000$.

При гистологическом исследовании препаратов печени обращало на себя внимание появление по периферии части долек участков некробиоза. Кроме того, наблюдались очаги разряжения в печеночной ткани, чередующиеся с участками уплотненного расположения гепатоцитов. Структура долек нарушена, отмечается трабекулярный тип роста клеток.

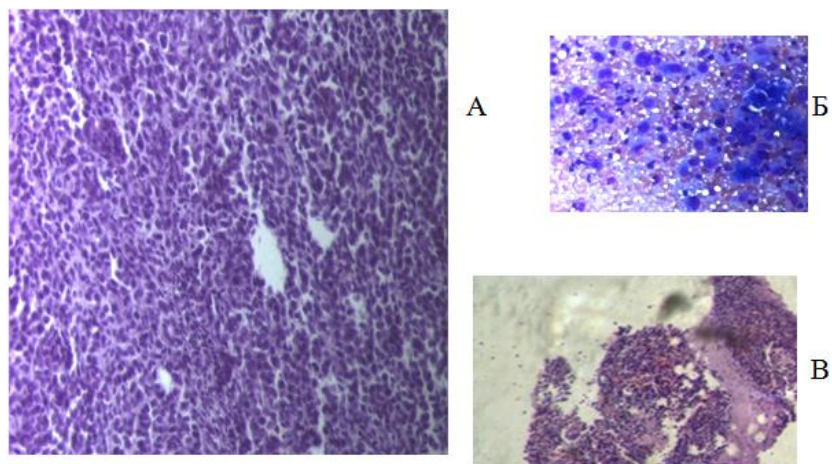


Рис. 4. Изменение архитектоники печеночной ткани, кровоизлияния, отек, очаги опухолевого роста. Окраска гематоксилин-эозином. А – $\times 100$, Б – $\times 200$, В – $\times 50$.

Имеются мелкие очаги кровоизлияний. Сами клетки с признаками слабо выраженной анаплазии (рис. 4).

У мышей этой группы в мозговой ткани явления пролиферации нейроцитов носили более выраженный характер, в межуточной субстанции глии они располагаются в виде тонких лент (рис. 5).

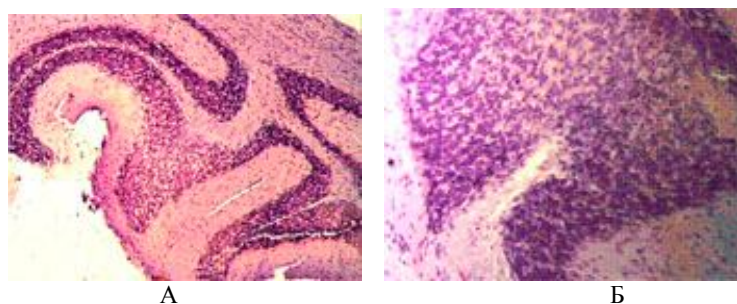


Рис. 5. Проплиферация клеточных элементов ткани головного мозга. Окраска гематоксилин-эозином. А – $\times 100$, Б – $\times 200$.

При цитологическом изучении асцитической жидкости у мышей этой группы было обнаружено, что на фоне оксифильной субстанции и значительной лимфоидной инфильтрации располагается значительное количество разрозненно лежащих и мелких групп клеток печени с явлениями выраженной анаплазии (рис. 6).

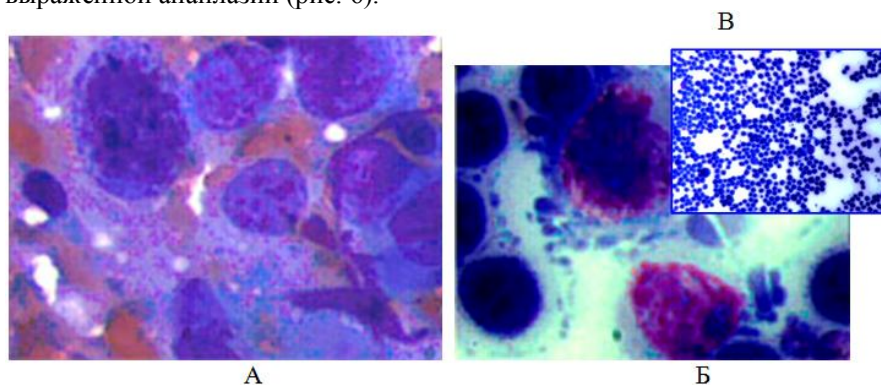


Рис. 6. Гепатоциты с признаками анаплазии в асцитической жидкости. Окраска по Паппенгейму. А – $\times 1000$, Б – $\times 1000$, В – $\times 200$.

Гистологическое исследование подтвердило наличие у этой группы мышей диффузной солидной гепатоцеллюлярной карциномы печени умеренной и низкой степени дифференциации: клетки крупные, ядра разной формы, имеются ядрышки, много патологических митозов. Присутствуют светлые уродливые клетки (рис. 7).

Таким образом, исследования показали, что мыши экспериментальных групп страдают гепатоцеллюлярной карциномой с наличием метастатических очагов в брюшной полости и с развитием асцита. У мышей 1-й экспериментальной группы изменения в печени носят, в основном, дегенеративно-дистрофический характер, хотя и отмечаются участки с признаками клеточной дисплазии. В печеночной ткани мышей 2-й эксперименталь-

ной группы наблюдаются анапластические процессы слабой степени дифференциации. Обращают на себя внимание изменения в мозговой ткани.

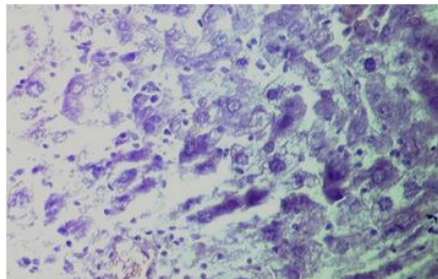


Рис. 7. Гепатоцеллюлярная карцинома низкой степени дифференциации. Окраска гематоксилин-эозином. х 100.

Так, отмечается значительная пролиферация клеточных элементов глии мозга, основная функция которых трофическая и опорная, причем у мышей 2-й группы эти изменения выражены значительно сильнее. Нужно отметить, что везде в поле зрения наблюдалась кишечная палочка, которая, возможно, и замедляла процессы дедифференцировки опухолевых клеток, таким образом продлевая мышам жизнь.

Институт биохимии им. Г.Х. Бунятына НАН РА

А. А. Агабабова, Н. О. Мовсесян, А. М. Акопян, О. А. Авакян

Морфогистохимические изменения при асцитной карциноме Эрлиха на фоне воздействия кишечной палочки

Сравнительный анализ гистологического исследования тканей печени, мозга и асцитной жидкости у экспериментальных животных показал развитие гепатоцеллюлярной карциномы с метастазированием в брюшную полость. Также наблюдалась более выраженная воспалительная реакция в брюшной полости, которая возникала на фоне введения *E.coli*, что, возможно, замедляло процессы дедифференциации опухолевых клеток.

Ա. Ա. Աղաբաբովա, Ն. Օ. Մովսիսյան, Ա. Մ. Հակոբյան, Օ. Ա. Ավագյան

Էրլիխի ասցիտային կարցինոմայի ժամանակ մորֆոհիստոքիմիական փոփոխություններ աղիքային ցուպիկի ազդեցության ներքո

Գլխուղեղի, լյարդի և ասցիտային հեղուկի հիստոլոգիական հետազոտության համեմատական անալիզը էքսպերիմենտալ կենդանիների երկու խմբերում էլ ցույց տվեց հեպատոցելյուլյար կարցինոմայի զարգացում՝ մետաստազներով որովայնի խոռոչում: Որովայնի խոռոչում դիտվում է ավելի արտահայտված բորբոքային ռեակցիա, որը ի հայտ է գալիս *E.coli* ներարկման ֆոնի վրա, որը հնարավոր է՝ դանդաղեցնում է ուռուցքային բջիջների դեդիֆերենցիացիայի պրոցեսները:

**A. A. Agababova, N. O. Movsesyan, A. M. Hkopyan, O. A. Avakyan
B.**

**Morphohistochemical Changes in Ehrlich Ascites Carcinoma
Arising in the Background of the Impact of *E. coli***

Morphohistochemical changes in Ehrlich ascites carcinoma arising in the background of the impact of *E. coli*. Comparative analysis of histological examination of liver tissue, brain, and ascites in experimental animals in both groups showed the development of hepatocellular carcinoma with metastasis to the abdomen. Also, there was a more expressed inflammatory reaction in the abdomen, which occurred on the background of *E. coli*, which can slow down processes of dedifferentiation of tumor cells.

Литература

1. Бондаренко В.М., Лиходеев В.Г. - ЖМЭИ. 2008. № 5. С. 23-29.
2. Рябиченко Е.В., Бондаренко В.М. - ЖМЭИ. 2005. № 5. С. 76-81.
3. Агабабова А.А., Авакян Л.А. - ДНАН РА. 2009. № 3. С. 250-254.
4. Авакян Л.А., Агабабова А.А. - ДНАН РА. 2008. № 3. С. 262-269.
5. Бухарин О.В., Перунова Н.Б. - ЖМЭИ. 2011. № 4. С. 56-61.

УДК 577.21:51.31

Н. А. Арутюнян

**Влияние пробиотиков на антибиотикорезистентность
комменсальных *E. coli* изолятов, выделенных из
кишечной микрофлоры больных периодической
болезнью**

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.А. Трчуняном 18/ IV 2013)

Ключевые слова: *периодическая болезнь, комменсальная микрофлора, пробиотик, E. coli, антибиотикорезистентность.*

Следствием широкого и зачастую бесконтрольного применения антибиотиков явилось то, что в настоящее время многие представители микрофлоры желудочно-кишечного тракта приобрели устойчивость к различным антибиотикам и достаточно легко обмениваются генами, кодирующими эту устойчивость [1].

В последние десятилетия рост распространения антибиотикорезистентных микроорганизмов считается одной из глобальных проблем здравоохранения. Большой интерес представляют антибиотикорезистентные комменсальные бактерии *E. coli*, которые играют важную роль в распространении антибиотикорезистентности в человеческих популяциях [2, 3] путем передачи плазмидных ДНК [4, 5].

Исходя из актуальности изучения периодической болезни (ПБ) в Республике Армения и наличия различных дисбиотических нарушений в кишечной микрофлоре больных ПБ исследованы и проанализированы распространённость антибиотикорезистентных комменсальных *E. coli* изолятов в кишечной микрофлоре этих больных до и после применения пробиотиков.

Материалы и методика. С целью оценки антибиотикочувствительности комменсальной микрофлоры была исследована распространённость антибиотикорезистентных комменсальных бактерий *E. coli* в кишечной микрофлоре 45 больных ПБ.

Исследуемые не принимали антибиотиков, гормонов, радиотерапевтических и иммуномодулирующих препаратов за 2-3 месяца до исследо-

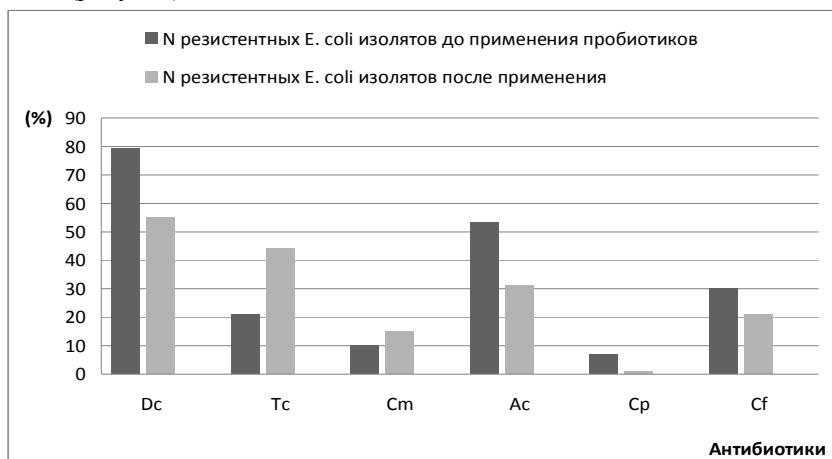
вания. Для первичной идентификации бактерий свежий фекальный образец (1 г) растворяли в 9 мл физиологического раствора и выдерживали 2 мин. Осадок удаляли с помощью центрифугирования на низкой скорости, а надосадок постепенно разбавляли в физиологическом растворе. Разбавленный раствор высевали на агаре Мак Конки, после чего проводили дальнейший анализ с использованием селективных сред и биохимических тестовых сред [6, 7].

Чувствительность бактерий к антибиотикам определялась диск-диффузным методом Кирби – Бауера и методом оценки роста бактерий на средах с соответствующей концентрацией антибиотиков. Бактерии инкубировались в аэробных условиях 18 ч при 37 °С.

Была определена антибиотикочувствительность 6 *E. coli* изолятов, выделенных из кишечной микрофлоры каждого исследуемого до и после применения плацебо и пробиотических штаммов *Lactobacillus acidophilus* INMIA Er 317/402, входящих в состав наринэ, и штаммов *Escherichia coli* М 17, входящих в состав колибактерона, к группе антибиотиков: тетрациклину (Тс – 15мкг/мл), доксициклину (Дс – 15 мкг/мл), амоксициллину (Ас – 25 мкг/мл), цефазолину (Сф – 24 мкг/мл), ципринолу (Ср – 20 мкг/мл), хлорамфениколу (См – 30 мкг/мл).

Результаты и обсуждение. Количество резистентных изолятов по отношению к Дс (принадлежащему к Тс ряду) до применения пробиотиков составляло 79%, а после применения пробиотиков – 55%, в то время как процентное соотношение устойчивых изолятов к Тс после применения пробиотиков увеличилось почти вдвое, доходя от 21% до 44%. Динамика роста после применения пробиотиков наблюдается также в случае См (9.6%-15%).

По полученным результатам, в отличие от остальных исследованных антибиотиков, после пробиотикотерапии устойчивость по отношению к Ас, Ср и Сф значительно понизилась, составляя соответственно 53-31, 7.4-1, 30-21% (рисунок).



Изменения резистентности *E. coli* изолятов к различным антибиотикам до и после применения пробиотиков.

Низкие показатели устойчивости наблюдались в общем у выделенных изолятов по отношению к Ср и См. С целью лечения См редко назначается из-за побочных эффектов и патогенности, и, скорее всего, это свойство было приобретено во время терапии другими лекарствами [8]. Ограниченное назначение Ср ПБ больным связано с вероятностью развития побочных эффектов со стороны суставов и/или окружающих тканей [9].

Результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют, что количество чувствительных штаммов в несколько раз увеличилось после применения обоих пробиотиков, в том числе и после применения плацебо (таблица).

Пропорции чувствительных, резистентных и мультирезистентных комменсальных *E. coli* изолятов в кишечной микрофлоре больных ПБ до и после принятия пробиотиков (%)

Штаммы	Группа больных, принимающих плацебо		Группа больных, принимающих наринэ		Группа больных, принимающих колибактерон	
	до	после*	до	после*	до	после*
Чувствительные	10	38	12	34	4	21
Мультирезистентные **	51	21	41	22	65	65
Резистентные к одной группе антибиотиков	35	39	46	43	29	11

* $P < 0.05$ (CHITEST).

** Резистентные по крайней мере к двум группам антибиотиков: наринэ – штамм *Lactobacillus acidophilus* INMIA Ег 317/402, колибактерон – штамм *Escherichia coli* М 17.

Концентрация штаммов к одной группе антибиотиков почти в 2.5 раза понизилась в группе больных, принимавших колибактерон (29-11%). Динамика уменьшения наблюдалась и после применения наринэ (от 46 до 43%). У больных группы плацебо процентное соотношение штаммов, резистентных к одной группе антибиотиков, наоборот, повысилось.

Особый интерес представляют результаты по количеству мультирезистентных штаммов, где в группе больных, принимающих наринэ и плацебо, наблюдалось резкое снижение их процентного соотношения от 41 до 22% и от 51 до 21% соответственно. Удивительно, однако, что такого эффекта не наблюдалось в случае колибактерона, где до и после применения пробиотиков у больных изменения в концентрации мультирезистентных штаммов *E. coli* отсутствовали. Необходимо учесть тот факт, что мультирезистентность штаммов была представлена по отношению к нескольким антибиотикам и в случае колибактерона наблюдалась динамика уменьшения в группах антибиотиков.

Таким образом, по результатам анализов применение пробиотиков наринэ и колибактерона способствует уменьшению распространения антибиотикорезистентности к большинству исследуемых антибиотиков. Наилучший результат получения чувствительных бактерий *E. coli* наблюдался после применения больными колибактерона.

В ряде случаев положительные результаты, полученные одними исследователями, не подтверждаются или даже опровергаются другими. Это вполне объяснимо, поскольку на взаимодействие пробиотика с организмом хозяина влияет так много факторов, что невозможно создать совершенно идентичные условия проведения подобных экспериментов или клинических испытаний в разных исследовательских группах.

Национальный аграрный университет Армении

Н. А. Арутюнян

Влияние пробиотиков на антибиотикорезистентность комменсальных *E. coli* изолятов, выделенных из кишечной микрофлоры больных периодической болезнью

Исследованы и проанализированы распространенность антибиотикорезистентных комменсальных *E. coli* изолятов в кишечной микрофлоре больных периодической болезнью до и после применения пробиотиков. Установлено, что применение пробиотиков наринэ и колибактерона способствует уменьшению распространения антибиотикорезистентности к большинству исследуемых антибиотиков. Наилучший результат получения чувствительных бактерий *E. coli* наблюдался после применения больными колибактерона.

Ն. Ա. Հարությունյան

Պրոբիոտիկների ազդեցությունը պարբերական հիվանդությամբ հիվանդների աղիքային միկրոֆլորայի *E. coli* անջատուկների հակաբիոտիկակայունության վրա

Ուսումնասիրվել և վերլուծվել է հակաբիոտիկակայուն կոմենսալ *E. coli* անջատուկների տարածվածությունը պարբերական հիվանդությամբ հիվանդների աղիքային միկրոֆլորայում պրոբիոտիկաթերապիայից առաջ և հետո: Պարզվել է, որ նարինե և կոլիբակտերոն պրոբիոտիկների օգտագործումը նպաստում է հակաբիոտիկակայունության նվազմանը ուսումնասիրված մի շարք հակաբիոտիկների նկատմամբ: Ցույց է տրվել, որ հակաբիոտիկազգայուն *E. coli* անջատուկների քանակական հարաբերությունն ավելի բարձր է եղել կոլիբակտերոնի օգտագործումից հետո:

N. A. Harutyunyan

Effects of Probiotics on Antibiotic Resistance of Commensal *E. coli*, Isolated from Intestinal Microflora of Periodic Disease Patients

The research has been carried, and the spreading of antibiotic resistant *E. coli* isolates has been analyzed, and the existence of different disbiotic malfunction in intestinal microflora of periodic disease patients, before and after probiotic usage. According to the analyses, the usage of probiotic Narine and Colibacteron decrease the spreading of antibiotic resistance of gut commensal *E. coli* among the studied antibiotics. The best result of getting the sensitive *E. coli* has been found after the patients' usage of Colibacteron.

Литература

1. *Bennet P.* - Br. J Pharmacol. 2008. V. 153. N 1. P. 347-357.
2. *May T., Ito A., Okabe S.* - Antimicrob. Agents and Chemother. 2009. V. 53. N 11. P. 4628-4639.
3. *Maynard C., Bekal S., Sanschagrin F., Levesque R., Brousseau R., Masson L., Lariviere S., Harel J.* - J. Clin. Microbiol. 2004. V. 42. N 12. P. 5444-5452.
4. *Alekshun M., Levy S.* - Cell. 2007. V. 128. N 6. P. 1037-1050.
5. *Kang H., Jeong Y., Oh J., Tae S., Choi C., Moon D., Lee W., Lee Y., Seol S., Cho D.* - J. Antimicrob. Chemother. 2005. V. 55. N 5. P. 639-644.
6. *Holt J. G., Krieg N. R., A. Smeath P. H., Staley J. T., Williams S. T. (ed.).* Berge's manual of determinative bacteriology. 9th ed. 1994.
7. *Murray P., Baron E., Pfaller M., Tenover P., Tenover R. (eds)* Manual of Clinical Microbiology. 6th ed. American Society for Microbiology, Washington DC. 1995. P. 341-348.
8. *Hart C., Kariuki S.* - Br. Med. J. 1998. V. 317(7159). P. 647-650.
9. *Катицунг. Б. Г.* Базисная и клиническая фармакология. Т. 2. 2008. М. Бином. 784 с.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

УДК 581.112

**Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян,
В. В. Казарян, З. М. Паравян**

**Энергетический уровень почек и их зимняя
сохранность как показатель приспособления
древесных интродуцентов**

(Представлено 15/X 2012)

Ключевые слова: *интродуценты, адаптация, зимняя сохранность
почек*

При интродукции в новые условия существования биология и экология растений, как правило, изучаются очень подробно, начиная от прорастания семян и заканчивая гибелью растения. Так, у древесных интродуцентов прослеживаются развитие всходов, особенности образования и ветвления корней и стволов, сезонный рост и фенология развития, отношение к экологическим факторам, генеративное развитие и т. п. Изучение особенностей роста иноземных древесных растений имеет важное значение при определении степени адаптации интродуцентов к новым условиям существования. Динамика роста растений обусловлена как их фитогеографическим происхождением, так и почвенно-климатическими факторами [1].

Наши исследования по зимней сохранности почек проводились в Ереванском и Севанском ботанических садах. Изучалось поведение интродуцентов в разных условиях. В Севане растения более умеренного климата оказались менее устойчивыми, что является следствием воздействия на них комплекса неблагоприятных факторов, обусловленных высотой пункта интродукции – 1900 м над ур. м. В сравнении с Ереваном таковыми являются: короткий вегетационный период (на 3 месяца короче), вдвое меньшая сумма активных температур при сильной разнице в сумме температур ниже 0° (Ереван –227, Севан – 803), более ранние осенние и более поздние весенние заморозки, обилие ультрафиолетовых лучей, сильные иссушающие ветры зимой. От морозов и зимнего иссушения в первую очередь страдают однолетние побеги, несущие вегетативные и генеративные почки, что в свою очередь сильно отражается на текущем приросте будущего года. Поэтому ритм и темп роста, а также физиологические проявления в

периоде зимнего покоя древесных растений различного происхождения, экологически сильно отличающихся друг от друга, весьма своеобразны как в Ереване, так и в Севане. Причем от характера роста побегов, корней, образования метамеров зависят жизнеспособность и возможность произрастания древесных растений в тех или иных экологических условиях [1]. Осенне-зимний покой растений является не только способом успешной перезимовки, но и необходимым условием для прохождения в них физиологических процессов, обеспечивающих растениям дальнейший рост и жизнеспособность [2]. С этой точки зрения переход к состоянию покоя и перезимовка древесных растений является весьма ответственным периодом в их жизни. Этот процесс начинается при закладывании почек и завершается в конце вегетации, когда ассимиляты активно перемещаются в запасающие органы, в том числе почки [3, 4].

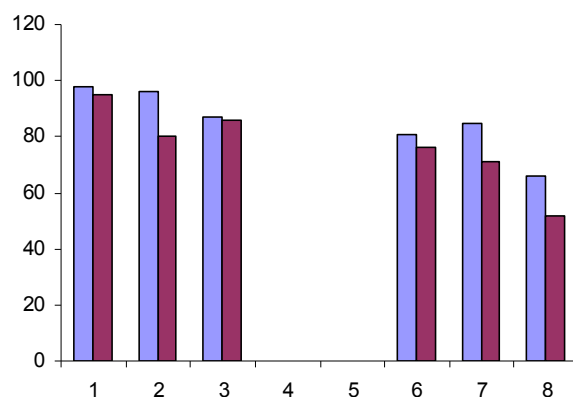
В зимний период снижается интенсивность физиологических процессов, и при этом накопленные в тканях растений, в частности в почках, пластические вещества играют защитную роль, определяя степень зимостойкости и успешность будущей вегетации [5]. В связи с этим сохранность зимующих почек и их биохимический состав у древесных интродуцентов в различных экологических условиях является важным показателем степени их приспособления.

Материал и методика. Объектами исследования служили древесные растения кавказского – 1. липа кавказская (*Tilia caucasica* Rupr.), 2. дуб крупнопильниковый (*Quercus macranthera* Fisch et Mey.), 3. береза Литвинова (*Betula Litwinowii* Doluch.) и европейского – 4. вяз гладкий (*Ulmus laevis* Pall), 5. дуб летний (*Quercus robur* L.), 6. клен татарский (*Acer tataricum* L.) происхождения.

Исследования проводились в 2010-2012 гг. в третьей декаде февраля методом О. А. Вальтера и др. [6] изучалась зимняя сохранность почек. Одновременно в зафиксированном материале (почках) проводились анализы по содержанию в них сахаров, белкового азота [7] и аденозинтрифосфорной кислоты (АТФ) люциферин-люциферазным методом [8]. Повторность анализов 4-х кратная.

Результаты и обсуждение. Известно, что физиологическая регуляция покоя, которая обеспечивает координацию между внешним воздействием и соответствующей функцией, приспособлена к условиям существования растений [9]. Это наглядно видно на примере продолжительности распускания почек представителей древесных кавказского и европейского происхождения. Ритм морфо-физиологических процессов и сезонность вегетации у первых совпадают, а у интродуцированных они сдвинуты.

Исследования показали, что в лабораторных условиях распускание почек кавказских видов, произрастающих в условиях Ереванского ботанического сада наступало на 8–12-й день, а в Севанском ботаническом саду – на 2-3 дня позже. Этот процесс у интродуцированных европейских видов в ботанических садах длился дольше, соответственно, на 3-4 и 3-5 дней (рисунк).



Зимняя сохранность почек (%) древесных интродуцентов (1, 2, 3, 4, 5, 6) в различных условиях произрастания. Темные столбики – Ереван, светлые – Севан.

Как видно из рисунка, зимняя сохранность почек у растений кавказского происхождения в Ереванском ботаническом саду колеблется от 87 до 98%, тогда как в Севанском – от 80 до 95%. У европейских видов в указанных местах произрастания эти цифры соответственно составляли 60-85% и 52-76%. При этом наименее устойчивым к условиям исследованных пунктов оказался клен татарский, тогда как вяз гладкий и дуб летний среагировали на условия произрастания почти одинаково.

Содержание пластических веществ в почках древесных интродуцентов в различных условиях произрастания в зимнее время (декабрь, январь, февраль; мг/г сухого в-ва)

Растение	Сахара		Белковый азот		АТФ	
	Ереван	Севан	Ереван	Севан	Ереван	Севан
Кавказ						
Липа кавказская	8.18	8.89	8.14	8.92	8.27	9.49
Дуб крупнопольниковый	9.24	10.67	9.32	9.06	8.51	10.07
Береза Литвинова	9.32	9.84	8.75	9.54	8.72	10.52
Европа						
Дуб летний	7.97	8.26	8.21	9.04	7.18	8.25
Вяз гладкий	6.72	7.24	7.73	8.34	6.94	6.81
Клен татарский	5.75	6.17	6.62	7.01	5.75	6.29
Средние данные						
Кавказ						
	8.91	9.80	8.74	9.17	8.50	10.15
Европа						
	6.81	7.22	7.52	8.13	6.62	7.12

Эти различия в поведении растений обусловлены физиолого-биохимическими изменениями, происходящими в почках. В этих процессах существенную роль играют энергетические вещества – углеводы, белки, макроэргические соединения [10, 11]. Наши исследования показали, что количественные изменения этих соединений зависят как от происхождения растений, так и места их произрастания.

Поскольку различия между кавказскими видами и интродуцентами, с одной стороны, и ереванскими и севанскими представителями, с другой, проявлялись с одинаковой закономерностью, то для большей наглядности нами представлены усредненные данные содержания пластических веществ (таблица).

Анализ полученных данных показал, что, как правило, в Севанском ботаническом саду в почках кавказских видов сахаров на 30.8, белкового азота на 16.2 и АТФ на 28.4% больше, чем у европейских, а в Ереванском, соответственно, на 35.7; 12.8 и 42.6%. Эти показатели свидетельствуют о низкой адаптивности европейских видов к климатическим условиям армянских ботанических садов.

При сравнении показателей пластических веществ в почках в условиях Еревана и Севана наблюдается превалирование их количества в высокогорье. А с точки зрения происхождения древесных количество пластических веществ в почках европейских видов уступает таковым у кавказских. Очевидно, у последних выработался механизм противостояния неблагоприятным, с коротким периодом вегетации условиям, заключающийся в более интенсивном синтезе и расходовании энергетических, защитных веществ [12, 13].

Таким образом, успех интродукции и надежность следующей вегетации зависят от целенаправленного расходования энергетических соединений, обеспечивающего сохранность почек.

Институт ботаники НАН РА

**Член-корреспондент Ж. А. Варданян, В. В. Казарян,
З. М. Паравян**

Зимняя сохранность почек как показатель приспособления древесных интродуцентов

В Ереванском и высокогорном Севанском ботанических садах проводились сравнительные исследования зимней сохранности почек древесных растений кавказского и европейского происхождений. В исследованных пунктах зимняя сохранность почек кавказских видов оказались выше, чем у европейских. Одновременно наблюдалось количественное превалирование энергетических соединений в почках в условиях высокогорья. Содержание пластических веществ в почках европейских растений уступало таковым у кавказских. Установлено, что успех интродукции и надежность следующей вегетации зависят от целенаправленного расходования энергетических соединений, обеспечивающих зимнюю сохранность почек.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Հ. Վարդանյան, Վ. Վ. Դազարյան,
Զ. Մ. Պարավյան**

**Բողբոջների ձմեռային պահպանվածությունը որպես ծառային
ինտրոդուցենտների հարմարվողականության ցուցանիշ**

Կովկասյան և եվրոպական ծագման ծառային բույսերի բողբոջների ձմեռային պահպանվածության համեմատական ուսումնասիրություններ են տարվել Երևանի և Սևանի բարձրլեռնային բուսաբանական այգիներում: Պարզված է, որ ուսումնասիրվող պունկտերում կովկասյան տեսակների բողբոջների ձմեռային պահպանվածությունը բարձր է, քան եվրոպականներինը: Միաժամանակ բողբոջներում էներգետիկ միացությունների քանակական գերակշռություն է նկատվել բարձրլեռնային պայմաններում: Եվրոպական բույսերի բողբոջներում պլաստիկ նյութերի քանակությունը զիջել է կովկասյաններին: Հաստատվել է, որ ինտրոդուկցիայի հաջողությունը և հաջորդ վեգետացիայի հուսալիությունը կախված են բողբոջների ձմեռային պահպանվածությունը ապահովող էներգետիկ միացությունների նպատակաուղղված ծախսից:

**Corresponding member of NAS RA Zh. H. Vardanyan,
V. V. Kazaryan, Z. M. Paravyan**

**Winter Persistence of Buds as an Indicator of Adaptation of Alien Tree
Species**

In Yerevan and Alpine Sevan botanical gardens there were conducted comparative investigations of winter safety arboreal plants' buds of Caucasus and European origins. It is determined that in investigated points the winter safety of the Caucasian type of buds was higher than of the European ones. Simultaneously it was observed the quantitative predominance of energetic junctions in buds in highlands. The content of plastic substances in the buds of the European plants was lower than of the Caucasian ones. It is included that the success of the introduction and reliability of the next vegetation depend on a purposeful expenditure of the energetic junctions, providing winter safety of buds.

Литература

1. *Варданын Ж. А.* Научные основы интродукции древесных растений в Армении. Ереван. 2012. 430 с.
2. *Казарян В. В.* Морфо-физиологические аспекты адаптации в ходе онтогенеза и интродукции растений. Автореф. докт. дис. Ереван. 1992. 43 с.
3. *Казарян В. В.* - ДНАН Армении. 1993. Т. 94. N 4. С. 249-252.
4. *Казарян В. В., Давтян В. А., Симонян Р. К.* В кн.: Материалы междунар. научн. конф. „Вопросы общей ботаники: традиции и перспективы”. Казань. 2006. С. 151-153.
5. *Асатрян Н. Г.* - Автореф. канд. дис. Ереван. 2009. 23 с.
6. *Вальтер О. А., Пиневиц Л. М., Варасова Н. Р.* Практикум по физиологии растений с основами биохимии. М. Л. Сельхозгиз. 1957. 341 с.
7. *Белозерский А. И., Проскуряков Н. И.* Практическое руководство по биохимии растений М. Сов. наука, 1951. 388 с.
8. *Ладыгина М. Е., Рубин А. Б.* В кн.: Биофизические методы в физиологии растений. М. Наука. 1971. С. 72-75.

9. *Леопольд А.* Рост и развитие растений М. Мир. 1968. 404 с.
10. *Марутян С. А.* Физиология растений. 1962. Т. 9. В. 2. С. 247-249.
11. *Погосян К. С., Оганесян Р. О., Мелян Г. Г.* Агробиологические особенности зимостойкости сортов винограда в условиях Араратской равнины и предгорной зоны Армении. Ереван. 2010. 118 с.
12. *Казарян В. В.* - ДАН АрмССР. 1984. Т. 28. N4. С. 74-77.
13. *Бирюкова З. П.* В кн.: Тезисы докл. всесоюзн. конф. „Проблемы физиологии и биохимии древесных растений”, Красноярск. 1982. С. 78.