2U3UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

# **ЭБЧПРЗЗЪБР** ДОКЛАДЫ **RЕРОКТЅ**

≺uumnp ToM Volume

122 Nº 2

Ереван

Երևաև

Yerevan

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈͰԹՅԱՆ ԳԻՏՈͰԹՅՈͰՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

## ՉԵԿՈͰՅՑՆԵՐ

Nº 2

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

## ДОКЛАДЫ REPORTS

TOM 122 VOLUME

<u>№</u> 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА ЕРЕВАН 2022

## Зիմնադրվել է 1944 р.: Lnıju է ипьийпій ипшрһй 4 шйаший Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год Founded in 1944. Published quarterly

#### **Գլխավոր խմբագիր`** ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ. Ս. ՁԱՔԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ጓጓ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ռ. Մ. ՅԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱՁԱՐՅԱՆ, ጓጓ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Յու. ጓ. ՇՈՒՔՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Մ. ՍՈՒՎԱՐՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

#### Главный редактор академик Р. М. МАРТИРОСЯН

Редакционная коллегия: чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик В. С. ЗАХАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Ю. М. СУВАРЯН, академик Л. А. ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

#### Editor-in-chief academician R. M. MARTIROSYAN

Editorial Board: corresponding member of NAS RA R. M. AROUTIOUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician Yu. M. SUVARYAN, academician L. A. TAVADYAN, academician V. S. ZAKARYAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

*ыбршарпьрјшй hшидեй* 0019, Եрьший 19, Ишргшլ Ршղршијши шпл. 24а *Адрес редакции:* 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г *Communication links:* address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:http://elib.sci.am e-mail: rnas@sci.am

© НАН РА. Президиум. 2022 © Издательство "Гитутюн" НАН РА. 2022 Հայաստանի ԳԱԱ Զեկույցներ

Հատոր 122, N 2, 2022

Հրատ. պատվեր N 1170

Խմբագրումը և սրբագրումը՝ *Ա.Ապիյան, Ա. Սահակյան* 

Համակարգչային էջադրումը՝ Վ.Պապյանի

Ստորագրված է տպագրության 15.06.2022

<u>Ծավալը` 4.5 տպ. մամուլ։ Տպաքանակը` 150։ Գինը` պայմանագրային։</u> Հ Հ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24

## *ԲՈՎԱՆԴԱԿՈͰԹՅՈͰՆ*

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Գ. Տ. Մնացականյան</i> – Մալմքուիստ – Տակենակայի շարքի	
համարյա ամենուրեք զուգամիտության մասին	103
Վ. Կ. Լեոնտև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան –	
Դիզյունկտիվ կապուղիներ	110
ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ	
<i>Ա. Ա. Չուբարյան, Հ. Ս. Ազիզյան</i> – Ասույթային հաշվի երկու հա-	
մակարգերում բալանսավորված բանաձևերի արտածումների բար-	
ոությունների վերաբերյայ	118
<i>L. Ա. Ափինյան, Ա. Ա. Չուբարյան</i> – Ասույթային հաշվի մի շարթ	
համակարգերում բանաձևերի որոշ ընտանիքների գծային և ծառա-	
տիպ արտածումների երկարությունների համեմատություն	125
ՄԵԽԱՆԻԿԱ	
<i>Մ. Գ. Արգումանյան</i> – Դրուկեր – Պրագերի <sup>՝</sup> ձևափոխված	
գլխարկաձև մոդելի հիմնավորումը	133
ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ	
<i>Ս. Ա. Ավետիսյան –</i> Ստրինգերների համագիծ համակարգի և	
էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ շերտի կոնտակտային փոխազ-	
դեցության մասին	141
<i>Վ. Տ. Յափուջյան</i> – Կույոնյան շփման հաշվառումով անիզոտրոպ	
շերտի ստիաորանան տատանումների մասին	153
	150
ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	
<i>Ա. Թ. Մանուհասն</i> – Գերևարձ հմարսապին Էլեկտրոնասին ձա-	
ուսություն աների հայտություն հետությունը հայտությունը հայտությունը։	
anılı iliinnni popolitinnil	161
Aurali amlulur Eslisaaluura	101

## СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	
Г. Т. Мнацаканян – О почти везде сходимости ряда Малмквиста –	
Такенаки 103	5
В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян –	
Дизъюнктивные каналы 110	)
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА <i>А. А. Чубарян, А. С. Азизян</i> – О сложностях выводов баланси- рованных формул в двух пропозициональных системах выводов 118 <i>Л. А. Апинян, А. А. Чубарян</i> – Сравнение длин линейных и древо- видных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчис- ления высказываний 125	5
МЕХАНИКА <i>М. Г. Арзуманян</i> – Обоснование модифицированной модели теку- чести Друкера – Прагера для порошковых материалов	5
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ       С. А. Аветисян – О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой	
МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ <i>А. Т. Манукян</i> – Активация репарационных путей ДНК в клетках человека при ультракоротком импульсном электронном облучении 161	L

### CONTENTS

MATHEMATICS	
G. T. Mnatsakanyan – On Almost-Everywhere Convergence of Malm-	
quist–Takenaka Series	103
V. K. Leontiev, G. L. Movsisyan, Zh. G. Margaryan – Disjunctive chan-	
nels	110
APPLIED MATHEMATICS	
A. A. Chubaryan, H. S. Azizyan - On Proof Complexities of Balanced	
Formulas in Two Propositional Proof Systems	118
L. A. Apinyan, A. A. Chubaryan – Linear and Tree-Like Proofs Sizes	
Comparison for Any Formulae Families in Some Systems of Propositional	
Calculus	125
MECHANICS	
M. G. Arzumanyan – Justification of Modified Drucker – Prager Cap	
Model	133
ELASTICITY THEORY	
S. A. Avetisvan – On Contact Interaction of Collinear System of	
Stringers with Elastic Inhomogeneous by Exponential Law Strip	141
V. T. Yapuivan – About the Forced Oscillations of the Anisotropic Laver	
Considering Coulomb Friction	153
MOLECULAR BIOLOGY	
A. T. Manukvan – The Activation of DNA Repair Pathways after Ultra-	
Short Pulsed Electron Beam Irradiation in Human Cells	161

 2 Ц В Ц U S Ц Ъ Р
 9 Р S П Р Ø B П Р Ъ Ъ Ե Г Р
 Ц 2 9 Ц В Р Ъ Ц Ч Ц Э Е Ф Г Р И

 Н А Ц И О Н А Л Б Н А Я
 А К А Д Е М И Я
 Н А У К
 А Р М Е Н И И

 N А Т I О N A L
 А С А D Е М У
 О Г
 S C I E N C E S
 О Г
 A R M E N I A

 Д О К Л А Д Ы
 2022
 2022
 № 2

Tom 122 2022 № 2 Volume **MATHEMATICS** 

2020. *Mathematics Subject Classification*. Primary 42A20. 425020. УДК 517 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-103

#### G. T. Mnatsakanyan

## On Almost-Everywhere Convergence of Malmquist – Takenaka Series

(Submitted by academician G. G. Gevorkyan 28/II 2022)

**Keywords:** Takenaka basis, phase unwinding, time-frequency analysis, Carleson's theorem.

**Introduction.** Let F be a holom function in a neighborhood of the closed unit disc. We consider the holomorphic function  $F_1$  defined on the same neighborhood by

$$F(z) = F(0) + z F_1(z).$$

Iterating this process, one obtains the Fourier series on the unit circle. We can consider a more general iterative process where we replace the factor z by a different Mobius transform of the unit disc vanishing at point  $a_n$ ,

$$F_n(z) = F_n(a_n) + \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n z}} F_{n+1}(z).$$

Consider a sequence of points  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  inside the unit disk such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |a_n| = +\infty.$$

The associated Blaschke products and Malmquist – Takenaka (MT) basis are defined as  $B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$ ,  $\varphi_n(z) = B_n(z) \frac{\sqrt{1-|a_{n+1}|^2}}{1-\overline{a_{n+1}}z}$ .

Unlike the case of Fourier series,  $B_n$ 's are not orthonormal, but  $\varphi_n$ 's are due to the normalization (see Lemma 3 in [1]).

It was shown by Coifman and Peyriere [1] that  $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$  is a basis in the Hardy spaces  $H^p(\mathbf{T})$ , 1 , in the following sense. With the inner product defined for two functions <math>f, g on the unit circle  $\mathbf{T}$  as

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta,$$

we have that the MT series converges in  $H^p$ , i.e.

$$\sum_{n=0}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \xrightarrow{N \to \infty} f.$$
(1)

The non-linear phase unwinding. There is a natural connection between the MT series and the non-linear phase unwinding decomposition introduced in the dissertation of Nahon [2]. For a function F in  $H^p(T)$  one can consider the Blaschke factorization

$$F(z) - F(0) = B(z)F_1(z),$$

where B is a Blaschke product and  $F_1$  is in  $H^p(\mathbf{T})$  and does not have zeros in the unit disc. Iterating the procedure, one obtains the formal unwinding series

 $F = F(0)B + F_1(0)BB_1 + \dots + F_n(0)BB_1 \dots B_n + \dots$ 

Numerical simulations from [2] suggest that the right-hand side of the above equation converges back to the function and generally this happens at exponential rate. The result of Coifman and Peyri/'ere implies convergence in  $H^{p}(\mathbf{T})$ . The case p = 2 was previously obtained by Qian [3], who had developed a similar theory to phase unwinding independently of Nahon in [4]. Coifman and Steinerberger [5] proved convergence in several different contexts including convergence in fractional Sobolev spaces  $H^s$ ,  $s > -\frac{1}{2}$ , if the initial function *F* is in  $H^{s+\frac{1}{2}}$ .

If at each step of the unwinding decomposition the Blaschke product  $B_n$ has finitely many zeros, for example if F is holomorphic in an  $\varepsilon$ -neighborhood of the unit disk, we can consider the sequence of all zeros  $oB_1, B_1, \dots$  The associated MT series will then reproduce the unwinding decomposition. Intuitively, making the zeros adapted to the function should accelerate the convergence. For this reason, the MT series is also called the Adaptive Fourier Transform.

For an overview of these constructions, we refer to the recent paper [6]. For some further results and intuition on the unwinding decomposition we refer to [7, 8].

Results.We are interested in almost everywhere convergence of the MT series (1). By standard techniques, almost everywhere convergence can be deduced from estimates of the maximal partial sum operator. Denote

$$Tf(e^{ix}) \coloneqq T^{(a_n)}f(e^{ix}) \coloneqq \sup_{N \to 0} \sup_{n=0} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n(e^{ix}) |.$$

In fact, we show that up to a Hilbert transform and a maximal function, the operator T is equal to

$$T^{(a_n)}f(e^{ix}) \coloneqq \sup_N |\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{iy})B_n(e^{iy})^{-1} \frac{dy}{\sin\frac{x-y}{2}}|.$$

$$\tag{2}$$

**Question:** Is the maximal operator (8) bounded on  $L^p$ ?

If  $a_n \equiv 0$ , then the MT series reduces to the classical Fourier series and the operator (2) reduces to the Carleson operator. In this case the positive answer to the above question is given by the Carleson – Hunt theorem [9, 10].

We give two partial answers to this question in this paper. First, if the points are in a compact disc inside the open unit disc, the problem becomes a more benign perturbation of the Carleson - Hunt theorem. In this case, we quantify the  $L^p$  norm of the maximal partial sum operator depending on the distance of the compact disc from the unit circle.

**Theorem 1.** Let 0 < r < 1 and let  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  be an arbitrary sequence such that  $|a_n| \leq r$  for all n. Then, for 1 ,

$$\|T^{(a_n)}\|_{L^p(T) \to L^p(T)} \le C(p) \log \frac{1}{1-r}.$$
 (3)

*For*  $2 \le p < \infty$ *, we have the better estimate* 

$$||T^{(a_n)}||_{L^p(T) \to L^p(T)} \le C(p) \sqrt{\log \frac{1}{1-r}}.$$
 (4)

Furthermore, for 1 , we have a lower bound in the sense, that forevery 0 < r < 1 there exists a sequence  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  with  $|a_n| \le r$  such that

$$\left\| T^{(a_n)} \right\|_{L^p(T) \to L^p(T)} > C(p) \sqrt{\log \frac{1}{1-r}}.$$
(5)

In particular, the bounds (4) and (5) are sharp for p = 2.

There is a conformally invariant version of Theorem 1 for p = 2 and arbitrary compact sets inside the disc. In that case, the quantity  $\log \frac{1}{1-r}$  is replaced by the hyperbolic diameter of the compact set. Let us denote by  $m_b(z) \coloneqq \frac{z-b}{1-\bar{h}z}$ the Mobius transform taking *b* to 0.

**Proposition.** Let  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  and b be points in the unit disk, then  $\|T^{(a_n)}\|_{L^2(T) \to L^2(T)} = \|T^{(m_{-b}(a_n))}\|_{L^2(T) \to L^2(T)}.$ Furthermore, if  $1 < q < p < \infty$ , then  $\|T^{(m_{-b}(a_n))}\|_{L^p(T)\to L^p(T)} \le \delta(q,p) \|T^{(a_n)}\|_{L^q(T)\to L^q(T)'}$ (6)

where  $\delta(q, p) > 0$  are some constants that blow up as *q* and *p* get closer.

For the inequality (6), sparse domination bounds for Carleson-like operators from [11] are used. They allow to pass from the boundedness of  $T^{(a_n)}$ for one  $p_0$  to the boundedness for all  $p \ge p_0$ . Thus, (6) implies a symmetric qualitative statement:  $T^{(a_n)}$  is bounded on  $L^p$  for all p > r if and only if  $T^{(m_{-b}(a_n))}$  is bounded on  $L^p$  for all p > r. Ideally, one might expect also the symmetric quantitative result

$$\left\|T^{(m_{-b}(a_n))}\right\|_{L^p(T)\to L^p(T)} \sim \left\|T^{(a_n)}\right\|_{L^q(T)\to L^q(T)},$$

however, we do not know how to prove or disprove it.

In Theorem 1, we first obtain the logarithmic dependence (3) for all exponents. We prove a bound independent of r for small scales by the techniques of the polynomial Carleson theorem, discussed in the next subsection, and we apply a triangle inequality for the large scales. Then, for p = 2 we are able to improve the estimate for the large scales by using a TT\*argument and the analyticity of Blaschke products. The bound (4) for p > 2 follows by blackboxing sparse domination results for Carleson-type opeators such as Theorems 9.1 and 9.2 in [11]. Whether (3) and (4) are sharp we do not know.

We turn to the second partial answer, the case when the points are in a nontangential approach region to the boundary.

**Theorem 2.** Let  $a_n$  be inside the triangle with vertices  $(1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  and  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  for all n, then

$$\left\|T\right\|_{L^2(T)\to L^2(T)} \le C.$$

Theorem 2 is true for similar non-tangential approach regions to other points on the circle. Furthermore, if one takes the union of k approach regions for k distinct points at once, then it is possible to prove along the lines of Theorem 2 that the  $L^2(T)$  norm of the operator (2) is bounded by k. If the boundary points for the approach regions are chosen to be equidistant, then the construction giving (5) also provides the lower bound  $\sqrt{\log k}$ . The sharp bound for this configuration is again unknown to us. It could also be interesting to consider approach regions to countably many points for various configurations.

**Connection to polynomial Carleson theorem.** Theorem 1 and Theorem 2 turn out to be closely related to the polynomial Carleson theorem. Let us recall a special case of the polynomial Carleson operator [12,13,14]

$$C_d f(x) \coloneqq \sup_Q \sup_{0 < \varepsilon < N} \left| \int_{\varepsilon < |x-y| < N} f(y) e^{iQ(y)} \frac{dy}{x-y} \right|,$$

where the first supremum is taken over polynomials of degree at most d. The case d = 1 is the classical Carleson operator. Its weak  $L^2$  bounds were implicit in Carleson's paper [8] on almost everywhere convergence of the Fourier series, Hunt improved this to  $L^p$  bounds,  $1 . Alternative approaches appeared in Fefferman [15], Lacey and Thiele [16]. On the other hand, Stein and Wainger [17] proved the case <math>d \ge 2$  but restricted to polynomials without the linear term. Lie combined the two techniques in [12,13] to prove the general  $L^p$  bounds for  $C_d$ . Finally, Zorin – Kranich generalized the argument to higher dimensions and non-convolution Calderon – Zygmund kernels in [14]. For a gentle introduction to Carleson's theorem and a discussion of the different approaches we refer to Demeter's paper [18].

We reformulate the polynomial Carleson theorem as Theorem 3 describing the general necessary conditions on the set of the phase functions. Then, Theorem 1 and Theorem 2 are proved by showing that the Blaschke phases satisfy these conditions and applying Theorem 3.

Let *K* be a translation-invariant Calderon–Zygmund kernel on **R** with the associated operator bounded on  $L^2(\mathbf{R})$ . We assume that there exists an  $\varepsilon > 0$  such that supp *K* lies in  $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ . Let **Q** be a countable subset of  $C^2(\mathbf{R})$ . For each interval *I* and *P*,  $Q \in \mathbf{Q}$  we define

 $d_I(P,Q) \coloneqq \sup_{x,y \in I} |(P-Q)(x) - (P-Q)(y)|,$ 

and assume that  $d_I$  is a metric on **Q**.

We impose the following conditions on **Q**. Assume that there exists a constant C > 0 such that

A. (the analog of Lemma 2.6 in [14]) for any intervals J, I with J lying in I and  $|I| \le \varepsilon$ , and for  $P, Q \in \mathbf{Q}$  we have

$$d_I(P,Q) \leq C \frac{|I|}{|J|} d_J(P,Q), \qquad d_J(P,Q) \leq C \frac{|J|}{|I|} d_I(P,Q);$$

- **B.** (John-Ellipsoid Property) for any  $\gamma > 1$  and interval *I* with  $|I| \le \varepsilon$ , any  $(\gamma, d_I)$ -ball can be covered by  $C\gamma$  number of  $(1, d_I)$ -balls;
- C. (the analog of Lemma A.1 in [14], oscillatory integral estimate) for any measurable function  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ , interval *J* with supp (g) lying in *J* and  $|J| \le \varepsilon$ , and any  $P, Q \in \mathbf{Q}$  we have

$$|\int_{J} e^{i(P-Q)(x)}g(x)dx|$$

$$\leq C \sup_{|y| < (1+d_J(P,Q))^{-1}|J|} \int_R |g(x) - g(x-y)| dx.$$

**Theorem 3.** Assume conditions A,B and C hold for the set **Q**. We define the operator  $T: L^1_{loc}(\mathbf{R}) \to L^0(\mathbf{R})$  as

$$Tf(x) \coloneqq \sup_{Q \in \mathbf{Q}} \sup_{0 < \varepsilon < N} \left| \int_{\varepsilon < |x-y| < N} f(y) e^{iQ(y)} K(x-y) dy \right|.$$

Further, let  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  and  $0 < \mu < \rho < \infty$ . Let F, G be measurable subsets of  $\mathbf{R}$  and  $\tilde{F} := \{M\mathbf{1}_F > \mu\}$ ,  $\tilde{G} := \{M\mathbf{1}_G > \rho\}$ . Then the following inequalities hold(with the implicit constants depend on C and  $\alpha$ , but are independent of  $\varepsilon$ )

$$\begin{split} \|T\|_{L^{2}(T) \to L^{2}(T)} &\leq 1, \\ \left\|\mathbf{1}_{G}T\mathbf{1}_{R\setminus\tilde{G}}\right\|_{L^{2}(T) \to L^{2}(T)} &\leq \mu^{\alpha}, \\ \left\|\mathbf{1}_{R\setminus\tilde{F}}T\mathbf{1}_{F}\right\|_{L^{2}(T) \to L^{2}(T)} &\leq \rho^{\alpha}. \end{split}$$

Theorem 3 is a version on Zorin – Kranich's Theorem 1.5 in [14]. Lemma B.1 in the latter establishes  $L^p$  boundedness of T, for 1 , from the last two inequalities.

Institute of Mathematics of NAS RA e-mail: mnatsakanyan\_g@yahoo.com

#### G. T. Mnatsakanyan

#### On Almost-Everywhere Convergence of Malmquist-Takenaka Series

We prove  $L^p$  bounds for the maximal partial sum operator of the Malmquist-Takenaka series under additional assumptions on the zeros of the Mobius transforms. We locate the problem in the time-frequency setting and, in particular, we connect it to the polynomial Carleson theorem.

#### Գ. Տ. Մնացականյան

#### Մալմքուիստ – Տակենակայի շարքի համարյա ամենուրեք զուգամիտության մասին

Մալմքուիստ – Տակենակայի համակարգի մասնակի գումարների մաքսիմալ օպերատորի համար ապացուցված են *L<sup>p</sup>* գնահատականներ Մոբյուսի ձևափոխության զրոների վրա լրացուցիչ պայմանների դեպքում։ Խնդիրը տեղակալված է տարածահաձախային վերլուծման համատեքստում և մասնավորապես կապվում է Կարլեսոնի բազմանդամային թեորեմի հետ։

#### Г. Т. Мнацаканян

#### О почти везде сходимости ряда Малмквиста – Такенаки

Доказаны L<sup>p</sup> оценки для максимального оператора частичных сумм ряда Малмквиста – Такенаки при дополнительных предположениях о нулях преобразований Мёбиуса. Проблема рассмотрена в частотно-временной постановке и, в частности, связана с полиномиальной теоремой Карлесона.

#### References

- Coifman R., Peyriere J. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2019. V. 25.
- 2. *Nahon M.* Phase evaluation and segmentation, Ph.D. thesis, Yale University, 2000.
- 3. *Tao Qian.* International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2014. V. 12.
- Tao Qian. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2009. V. 33. P. 880–891.
- Coifman R., Steinerberger S. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2019. V. 25. P. 684-695.
- 6. Ronald R., Coifman R., Peyriere J. Multiscale decompositions of Hardy spaces, 2021.
- 7. Steinerberger S., Hau-Tieng Wu. 2019. arXiv:1807.05587.
- 8. Coifman R., Steinerberger S., Hau-Tieng Wu. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2017. V. 49. P. 4838-4864.
- 9. Carleson L. Acta Mathematica. 1966. V. 116. P. 135–157.
- Hunt R. In: Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967). 1968. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale III. P. 235–255.
- Karagulyan G. Transactions of the American Mathematical Society. 2016. V. 372. P. 4761-4803.
- 12. Lie V. Geometric and Functional Analysis. 2007. V. 19. P. 457-497.
- 13. Lie V. Annals of Mathematics. 2011.V. 192. P. 47-163.

- 14. Zorin-Kranich P. 2017. arXiv:1711.03524v5.
- 15. Fefferman C. Annals of Mathematics. 1973. V. 98. N 3. P. 551–571.
- 16. Lacey M., Thiele C. Mathematical Research Letters. 2000.V. 7. P. 361–370.
- 17. Stein E., Wainger S. Mathematical Research Letters. 2001. V. 8. P. 789-800.
- 18. Demeter C. Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2012. V. 45.

Zшилпр Том 122 Volume

2022

<u>№</u> 2

МАТЕМАТИКА

УДК 621.391.15 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-110

## В. К. Леонтьев<sup>1</sup>, Г. Л. Мовсисян<sup>2</sup>, Ж. Г. Маргарян<sup>3</sup>

## Дизьюнктивные каналы

(Представлено академиком С. К. Шукуряном 24/V 20022)

**Ключевые слова**: каналы связи, словарные функции, алгебраические каналы, дизъюнктивные каналы, коды.

**Введение.** Точная постановка задачи борьбы с помехами, происходящими в канале связи, принадлежит К. Шеннону и состоит в следующем: на входе канала известно некоторое множество слов, которое содержит все потенциально возможные сообщения, годные для передачи. Проблема кодирования состоит в выборе такого семейства сообщений, чтобы при получении на выходе канала сообщения было возможно однозначно восстановить (декодировать) переданное сообщение.

В предыдущих работах [1-3] мы рассматривали алгебраические каналы, в частности аддитивные и матричные каналы.

В данной работе изучается следующий класс комбинаторных неалгебраических каналов – дизъюнктивные каналы, которые по форме напоминают аддитивные каналы, но существенно отличаются от них.

Каналы связи и словарные функции. Пусть  $B = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$  – конечный алфавит и  $B^*$  – множество всех слов конечной длины над алфавитом *B*. Словарная функция – произвольное частичное отображение  $\psi$ следующего вида:

$$B^* \xrightarrow{\psi} B^*.$$

Мы будем рассматривать канал как преобразователь информации. Если принять тезис о том, что в любом канале связи происходит преобразование одних слов в другие, то достаточно общий канал можно описать следующим образом.

Заданы некоторое множество

 $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_m\}$ частичных словарных функций

$$B^* \xrightarrow{\phi_i} B^*, \qquad i = \overline{0, m}$$
110

и многозначное отображение

$$f(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)),$$

где  $x \in W \subseteq B^*$ . Множество всех обратимых отображений  $\{\psi_i\}, \psi_i(a) \subseteq W$  обозначим через Т. При этом все суперпозиции  $\psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_k}$  функций  $\psi_{i_j}$  из множества  $\Psi$  определены на W.

**Определение** [1]. Комбинаторным каналом связи  $K(\Psi)$  называется многозначное отображение

$$f(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)).$$
(1)

Формулу (1) следует понимать следующим образом. На вход канала подается слово v. На выходе получается ровно одно из значений  $\psi_0(v), \psi_1(v), \dots, \psi_m(v)$ .

**Определение** [1]. Алгебраическим каналом связи *К*(Ψ) называется многозначное отображение

$$f(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)),$$

где Ψ⊆Т, и если

 $\psi_i^{-1} \in \Psi, \ \psi_i \in \Psi. \tag{2}$ 

Условие (2) требует, чтобы любое «преобразованное» слово могло быть возвращено к исходному виду путем тех же самых трансформаций.

Отметим, что любой аддитивный канал удовлетворяет условию (2) и является алгебраическим [2]. Однако не все матричные каналы являются алгебраическими, например, матричный канал с выпадением символов [3, 4].

В дальнейшем мы всегда будем считать, что  $\psi_0(x) = x$ , что можно интерпретировать как возможность безошибочной передачи слова по этому каналу,  $W = B^n \subseteq B^*$ .

#### Коды, исправляющие ошибки.

**Определение** [2]. Множество  $V \subseteq B^n$  называется кодом, исправляющим ошибки канала  $K(\Psi)$ , если выполнено условие

$$\psi_i(u) \neq \psi_i(v) \tag{3}$$

для всех i и j и для всех слов  $u, v \in V$ .

Условие (3) означает, что последствия действий канала  $K(\Psi)$  на кодовые слова различны и поэтому ошибки могут быть обнаружены и исправлены.

В дальнейшем обозначим через  $V(\Psi)$  код, исправляющий ошибки канала  $K(\Psi)$ . В терминах, введенных выше, основная задача при заданном канале состоит в построении кода  $V(\Psi)$  максимальной мощности –  $\overline{V}(\Psi)$ .

Итак, пусть опять  $\Psi(0) = \{y_0, y_1, ..., y_m\} \subseteq B^n$  и канал  $K(\Psi)$  действует на слово  $x \subseteq B^n$  следующим образом:

$$z = x \mathbf{V} y_i$$
,  $i = \overline{0, m}$ ,

и знак «v» – словарная функция, определяемая стандартным образом: если  $z = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n), x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n), y = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n),$  то

$$\gamma_i = \alpha_i \mathbf{V} \beta_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, преобразование слов в дизъюнктивном канале – дизъюнкция соответствующих слов, а не сумма по mod 2, как в аддитивном канале.

Пример 1. Если  $\Psi(0) = \{y_0 = (000), y_1 = (100), y_2 = (011), y_3 = (111)\}$ , то при x = (001) на выходе дизъюнктивного канала  $K(\Psi)$  получается одно из следующих слов:  $z_0=(001), z_1=(101), z_2=(011), z_3=(111)$ . Если же x=(110), то  $z_0=(110), z_1=(101), z_2=(111), z_3=(111)$ .

По аналогии с аддитивным каналом дизъюнктивный канал  $K(\Psi)$ , порождаемый множеством  $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$ , соответствует таблице декодирования  $D(\Psi)$  при заданном коде  $V = \{v_0, v_1, ..., v_N\}$ 

$v_0$	$v_1$	 $v_N$
$v_0 v y_0$	$v_1 v y_0$	$v_N v y_0$
$v_0 v y_1$	$v_1 v y_1$	$v_N v y_1$
$v_0 v y_m$	$v_1 v y_1$	$v_N v y_m$

Определение кода  $V = \{v_0, v_1, ..., v_N\}$ , исправляющего ошибки дизьюнктивного канала  $K(\Psi)$  с порождающим множеством  $\Psi(0) = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ , копирует предыдущие определения аддитивного канала и состоит в следующем:

$$v_i \mathbf{V} y_r \neq v_j \mathbf{V} y_s$$

В «физическом» смысле дизьюнктивный канал  $K(\Psi)$  действует следующим образом: букву «1» он не меняет, а букву «0» может перевести в 0 или 1.

В стандартных терминах дизъюнктивный канал действует на букву «несимметричным» образом.

Замечание. Множество  $B^n$  с бинарной операцией *дизъюнкция* образует моноид с нейтральным элементом «0». Эта структура гораздо более бедная, чем группа ( $B^n$ ,+), и потому многие из свойств аддитивных каналов не выполняются для дизъюнктивных каналов. Так, если для аддитивного канала в каждом столбце таблицы декодирования  $D(\Psi)$  содержится одно и то же число элементов, то для дизъюнктивного канала это вовсе не так.

Пример 2. Пусть  $\Psi(0) = \{y_0 = (000), y_1 = (011), y_2 = (001)\}, V = \{v_0 = (000), v_1 = (100), v_2 = (010)\}.$ 

Тогда таблица декодирования  $D(\Psi)$  дизъюнктивного канала  $K(\Psi)$  имеет следующую форму:

000	100	010
000	100	010
011	111	011
001	101	011

Очевидно, что для канала  $K(\Psi)$  и кода V условия (4) не выполняются.

**Пример 3.** Если в дизъюнктивном канале  $K(\Psi)$  происходит не более одного «искажения», то формальная запись канала состоит в следующем:  $\Psi(0) = \{e_0 = (00 ... 0), e_1 = (10, ... 0), ... e_n = (00 ... 01)\}.$ 

Если  $V = \{v_0, v_1, ..., v_N\}$ , то таблица декодирования выглядит так:

v <sub>0</sub>	$v_1$	 $v_N$
$v_0 V e_0$	$v_1 V e_0$	$v_N V e_0$
$v_0 V e_1$	$v_1 V e_1$	$v_N V e_1$
$v_0 V e_n$	$v_1 V e_n$	$v_N V e_n$

Рассмотрим *k*-й столбец таблицы декодирования  $D(\Psi)$ . Если ={ $l_1, l_2, ..., l_r$ } – номера нулей у слова  $v_k$ , то все элементы столбца – слова, отличающиеся от  $v_k$  в разрядах с номерами { $l_1, l_2, ..., l_r$ }. Поэтому общее число различных слов в столбце с учетом самого  $v_k$  равно r+1= $n - ||v_k||$  +1.

В общем виде, если  $D_1, D_2, ..., D_N$  столбцы таблицы декодирования

 $D(\Psi)$ , то справедлива следующая верхняя граница.

Утверждение 1. Имеет место неравенство

$$\left|D_{k}\right| \leq \min\left\{2^{n-\left\|v_{k}\right\|}, m\right\}.$$

Доказательство. Если  $\{l_1, l_2, ..., l_r\}$  – номера нулей у слова  $v_k$ , то к новым словам приводят изменения  $v_k$  в позициях  $\{l_1, l_2, ..., l_r\}$  и их общее количество равно  $2^{n-\|v_k\|}$ .

С другой стороны, по определению, общее число различных слов в *D*<sup>*k*</sup> не превосходит *m*.

В качестве содержательного примера, завершающего этот параграф, рассмотрим канал из примера 3, в котором происходит не более одного искаженного символа в слове  $x = (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n)$ .

Следующее утверждение содержит верхнюю границу для мощности кода *V*, исправляющего ошибки приведенного выше канала.

Утверждение 2. Справедливо неравенство

$$|V| \leq \frac{\min}{\lambda} \left\{ \sum_{k \leq \lambda} \binom{n}{k} + \frac{2^n}{n - \lambda + 1} \right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$V_1 = \{x \in V; ||x|| \le \lambda\}, \quad V_2 = \{x \in V; ||x|| > \lambda\}.$$

Тогда

$$V = V_1 \bigcup V_2$$
,  $V = V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и

$$|V_1| \leq \sum_{k \leq \lambda} {n \choose k}, \qquad |V_2| \leq \frac{2^n}{n-\lambda+1}.$$

Первое неравенство следует из того, что общее число точек  $x \in V$  с  $||x|| \leq \lambda$  не превосходит общего числа точек из  $B^n$  со свойством  $||x|| \leq \lambda$ , т.е.

$$\left|V_{1}\right| \leq \sum_{k \leq \lambda} \binom{n}{k}.$$
(5)

Если  $x \in V_2$ , то в силу примера 3

$$\left|V_{2}\right| \leq \frac{2^{n}}{n - \lambda + 1},\tag{6}$$

так как число элементов в любом столбце таблицы декодирования для  $V_2$  не превосходит правой части (6).

Утверждение 3. Справедливо неравенство

$$|V| \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}.$$

Доказательство. Так как [5]

$$\binom{n}{\lambda}$$
  $\sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(2\lambda-n)^2}{2n}}$ 

то при  $\lambda = \frac{n}{2} - \omega \sqrt{n}$ ,  $\omega(n) = o(\sqrt{n})$  имеем

$$\left(\frac{n}{\frac{n}{2}-\omega\sqrt{n}}\right)_{=} 0\left(\frac{2n}{\sqrt{n}}e^{-2\omega^{2}}\right)_{-}$$

Выбрав  $\omega = \sqrt{lnn}$ , мы получим оценку

$$\left|V^{1}\right| \lesssim 0\left(\frac{2^{n}}{n^{2}\sqrt{n}}\right)$$

Следовательно, с учетом (5) и (6)

$$\left|V\right| \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$$

Исправление ошибок в дизъюнктивном канале. Если в дизъюнктивном канале происходит не более одного искажения, то для исправления ошибки можно использовать обычный код Хэмминга. Однако, используя специфику этого канала, можно предложить более эффективные способы борьбы с помехами. Одним из таких способов является использование кода Варшамова – Тененгольца [6].

Рассмотрим сравнения

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots n\alpha_n \equiv 0 \pmod{(n+1)}, \tag{7}$$

где  $x = (a_1 a_2 ... a_n) \in B^n$ .

Множество решений сравнений (7) обозначим через S<sup>n</sup>.

**Утверждение 4.** Код S<sup>n</sup> исправляет все одиночные искажения канала.

Доказательство. Пусть  $x = (a_1 a_2 ... a_n) \in S^n$  и ошибка произошла в *r*разряде слова *x*. По определению кода  $S^n$ , если на выходе мы получаем слово

$$z = \left( \begin{array}{c} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \end{array} \right), \text{ to}$$
$$l(z) = \sum_{i=1}^n i \gamma_i = \sum_{i=1}^n i \alpha_i + r \,. \tag{8}$$

Из (8) получимм

$$l(z)(\text{mod}(n+1)) = (\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i + r)(\text{mod}(n+1)).$$
(9)

Из (9) получим  $l(z) \pmod{(n+1)} = r$ .

Таким образом, мы получаем номер разряда, в котором произошла ошибка.

Изменив значение этого разряда, мы исправляем искомую ошибку. **Пример 4.** Если *n*=4, то исходное сравнение имеет вид

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Слово x=(1001) принадлежит  $S^4$ . Если ошибка произошла в 3-м разряде, то

$$z=(1011) \text{ M } l(z)=l(1011)=1+3+4=8$$

Далее  $l(z) \equiv 3 \pmod{5}$  и номер ошибочного разряда определен.

Отметим, что множество коэффициентов линейной формы  $L(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots n\alpha_n$  – кольцо классов вычетов по mod(n+1), т.е. множество  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

Это обстоятельство играет определенную роль при исследовании множества решений сравнения

$$L(x) \equiv 0 \pmod{(n+1)}.$$

Рассмотрим сравнения

$$c(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i \equiv 0 \pmod{d} \quad . \tag{10}$$

Здесь все параметры  $d_i, d$  – натуральные числа и  $x = (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n) \in B^n$ . Обозначим через  $t_d(d_1 d_2 ... d_n)$  число решений сравнения (10).

Утверждение 5. Справедливо соотношение

$$t_d(d_1d_2...d_n) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} \prod_{r=1}^n (1 + e^{\frac{2\pi i}{d}sd_r}).$$
(11)

Доказательство. Используем известное соотношение, выражающее свойства делимости

$$\frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} e^{2\pi i \frac{x}{d}s} = \begin{cases} 1, ec\pi u & d/x \\ 0, ec\pi u & d/x \end{cases}.$$
(12)

Если вместо x в формулу (12) подставить функцию с ( $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ ), то после некоторых стандартных манипуляций получим

$$t_d(d_1d_2...d_n) = \frac{1}{d} \sum_{(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)} \sum_{s=0}^{d-1} e^{2\pi i c(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)\frac{s}{d}} = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} (1 + e^{\frac{2\pi i}{d}sd_1})$$

...  $(1 + e^{-d^{sd_n}})$ , что и доказывает (11).

Выделив в формуле (11) слагаемое, соответствующее s = 0, получим

$$t_d(d_1d_2...d_n) = \frac{2^n}{d} + \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d-1} (1 + e^{\frac{2\pi i}{d}sd_1}) \dots (1 + e^{\frac{2\pi i}{d}sd_n}),$$
 отсюда, используя

известные арифметические функции, имеем

$$|S_n| = t_{n+1}(1,2,...,n) \gtrsim \frac{2^{n+1}}{n}$$
.

<sup>1</sup>ФИЦ ИУ РАН

<sup>2</sup>Группа Бит, Москва

<sup>3</sup>Ереванский государственный университет

e-mails: vkleontiev@yandex.ru, garib@hkzap.ru, j.margaryan@ysu.am

#### В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян

#### Дизъюнктивные каналы

Введено понятие дизъюнктивного канала связи, являющегося неалгебраическим комбинаторным каналом, по форме напоминающим аддитивный канал, а по существу отличающимся от него. Предложен способ исправления всех одиночных искажений, происходящих в данном канале связи.

#### Վ. Կ. Լեոնտև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ.Գ. Մարգարյան

### Դիզյունկտիվ կապուղիներ

Ներմուծված են դիզյունկտիվ կապուղիներ, որոնք կոմբինատոր ոչ հանրահաշվական են։ Դիզյունկտիվ կապուղիները ձևով նման են ադդիտիվ կապուղիներին, բայց էապես տարբերվում են նրանցից: Բերված է այդպիսի կապուղիներում բոլոր սխալներն ուղղելու եղանակ:

#### V. K. Leontiev, G. L. Movsisyan, Zh. G. Margaryan

#### **Disjunctive Channels**

The article introduces the concept of a disjunctive communication channel, which is a non-algebra combinatorial channel, though resembling an additive channel by its form, but different from it by its essence. A method for correcting all single distortions occurring in a given communication channel is proposed.

#### Литература

- 1. Leontiev V. K., Movsisyan G. L. In: The First International. Algebra and Geometry Conference 16-20 may 2007, Yerevan, Armenia. P. 16-20.
- 2. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л.* Доклады НАН РА. 2004. Т. 104. № 1. С. 23-27.
- 4. Левенштейн В. И. ДАН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 845-848.
- 5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. М. Наука. 1977. 368 с.
- 6. Варшамов Р. Р., Тененгольц Г. М. Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 2. С. 288-292.

Zшилпр Том 122 Volume

2022

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<u>№</u> 2

#### УДК 510.64 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-118

## А. А. Чубарян<sup>1</sup>, А. С. Азизян<sup>2</sup>

## О сложностях выводов балансированных формул в двух пропозициональных системах выводов

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 10/IV 2022)

**Ключевые слова:** балансированные формулы, дерево расщеплений, определяющий конъюнкт, сложности выводов.

1. Введение. Балансированные формулы играют важную роль в теории сложности выводов. В [1] доказано, что если сложности выводов балансированных формул будут полиномиально ограничены в системах Фреге, то сложности выводов всех тавтологий будут также полиномиально ограничены, что, в свою очередь, будет доказательтвом совпадения класса задач NP со своим дополнением [2]. Данная работа посвящена изучению количества шагов и длин выводов одного класса балансированных формул в некоторых системах пропозициональных выводов. Исследованы выводы балансированных формул

 $QHQ_n = V_{0 \le i \le n} \Lambda_{1 \le j \le n} [V_{1 \le k \le i} \overline{q}_{i,j,k} \lor V_{i < k \le n} q_{k,j,i+1}],$ 

т.е. формул, в которых каждая переменная имеет ровно одно положительное и одно отрицательное вхождения. Выводы этих формул рассматриваются в системе **OP**, основанной на определяющей дизъюнктивной нормальной форме [4]. Относительно второй системы в [4] доказана ее полиномиальная эквивалентность с системой резолюций и секвенциальной системой без правила сечения, следовательно, в них могут быть экстраполированы оценки сложностных характеристик выводов в системе **E**. Место же системы **OP** в известной иерархии пропозициональных систем (см., например, [2]) пока не уточнено, более того, в [5] рассмотрены два класса формул, для одного из которых оценки и количества шагов, и длин выводов в **OP** сушественно лучше, чем в системах Фреге, а для другого класса – наоборот. В силу вышесказанного исследование сложностных характеристик формул  $QHQ_n$  в системе **OP** представляет особый интерес. В настоящей статье для всех четырех исследуемых величин получены одинаковые по порядку (по логарифмической шкале) верхние и нижние оценки.

**2.** Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [3, 4]. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного *n*-мерного булева куба В<sup>n</sup>, пропозициональной формулы, тавтологии и системы доказательства классического исчисления высказываний.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные, логические связки ¬, &, V, ⊃ и пару скобок (,). Длина формулы  $\varphi$ , определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через  $|\varphi|$ . Очевидно, что линейной функцией от  $|\varphi|$  оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

Следуя общепринятой терминологии, *литералом* считается переменная или ее отрицание. Конъюнкт *К* может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы у следующие тривиальные эквивалентности называются *правилами замещения*:

$0 \& \psi = 0$ ,	$\psi \& 0 = 0$ ,	$1 \& \psi = \psi$ ,	$\psi \& 1 = \psi$ ,
$0 \lor \psi = \psi$ ,	$\psi \lor 0 = \psi$ ,	$1 \lor \psi = 1$ ,	$\psi$ v 1 = 1,
$0 \supset \psi = 1$ ,	$\psi  o 0 = ar{\psi}$ ,	$1 \supset \psi = \psi$ ,	$\psi \supset 1 = 1$ ,
$\overline{0} = 1$ ,	$\overline{1}=0$ ,	$ar{ar{\psi}}=~\psi$ ,	

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью. Отметим также, что функция  $p^{\delta}$  определяется общепринятым образом:  $p^{0}$  есть  $\neg p$ , а  $p^{1}$  есть р.

Пусть  $\varphi$  – пропозициональная формула,  $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$  –множество всех ее переменных, а  $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_m}\}$   $(1 \le m \le n)$  – некоторое подмножество P.

**Определение 2.1.** Для некоторого  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\} \in B^m$  конъюнкт  $K^{\sigma} = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, ..., p_{i_m}^{\sigma_m}\}$  называется  $\varphi$ -определяющим, если, подставляя в  $\varphi$  вместо каждой переменной  $p_{i_i}$  значение  $\sigma_j$   $(1 \le j \le m)$  и последова-

тельно применяя правила замещения, получаем значение формулы  $\varphi$  (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

**Определение 2.2.** Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)  $D = \{K_l, K_2, ..., K_r\}$  называется  $\varphi$ -определяющей для формулы  $\varphi$ , если каждый конъюнкт из D является  $\varphi$ -1-определяющим и  $\varphi = D$ .

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

**2.1. Описания рассматриваемых систем.** В [4] была описана следующая система доказательств **Е.** Аксиомы системы **Е** не фиксируются. Для каждой формулы  $\varphi$  в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. Элиминационное правило вывода (э-правило) выводит конъюнкт  $K' \cup K''$  из конъюнктов  $K' \cup \{p\}$  и  $K'' \cup \{\neg p\}$  для произвольной пропозициональной переменной p.

*E*-выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдуших по э-правилу. Очевидно, что ДНФ  $D = \{K_1, K_2, ..., K_l\}$  является тавтологией, если, применяя э-правило, мо-

жно вывести пустой конъюнкт ( $\emptyset$ ) из аксиом { $K_1, K_2, ..., K_l$ }.

Система обобщенных расщеплений **ОР** была введена в [3]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле  $\varphi$  сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула  $\varphi$ , конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v, которому приписана некоторая формула  $\varphi_v$ , приписаны результаты расщепления  $\varphi_v$  по некоторой переменной p, входящей в  $\varphi_v$  следующим образом:

1) при расщеплении тавтологии  $\varphi$  по литералу  $\alpha$  делаем пометку  $\alpha$  на ребре, ведущем от узла с пометкой  $\varphi$  к узлу с пометкой  $\varphi[\alpha]$ ,

2) сама формула  $\varphi[\alpha]$  строится по  $\varphi$  следующим образом: если  $\alpha = p(\alpha = \bar{p})$ , то всюду в  $\varphi$  вместо переменной p подставляем значение 1(0) и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы.

Естественно, что, меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы.

Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомойтавтологией – 1 и одним правилом вывода  $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$ , обозначена через **ОР.** 

**2.2.** Сложностные характеристики выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: *t*-сложность, определяемая как количество различных формул в выводе, и *l*-сложность, определяемая как сумма длин всех различных формул в выводе [2]. Пусть ф является некоторой системой выводов, а  $\varphi$  – некоторая тавтология. Через  $t^{\phi}(\varphi)(l^{\phi}(\varphi))$  обозначается минимально возможное значение *t*-сложности (*l*-сложности) всевозможных выводов тавтологии  $\varphi$  в системе  $\phi$ . В даль-

нейшем *t*-сложности (*l-сложности*) формул QHQ<sub>n</sub> в системах **OP** и **E** будем обозначать через  $t^{OP}(n)(l^{OP}(n))$  и  $t^{E}(n)(l^{E}(n))$  соответственно и будут использованы следующие общепринятые обозначения:

если  $\exists c_1 \tau. ч. для \forall x | f(x) | \ge c_1 | g(x) |$ , то будем писать  $f(x) = \Omega(g(x))$ , если  $\exists c_2 \tau. ч. для \forall x | f(x) | \le c_2 | g(x) |$ , то будем писать f(x) = O(g(x)). При выполнении этих обоих условий будем писать  $f(x) = \theta(g(x))$ 

3. Оценка сложностей выводов формул QHQ<sub>n</sub> в системе OP. Для описания алгоритма вывода QHQ<sub>n</sub> в системе OP введем ряд обозначений. Для данного *n* и всех  $0 \le i \le n$  и  $1 \le j \le n$  определим формулы  $Q_{i,j} = \bigvee_{1\le k\le i} \bar{q}_{i,j,k} \lor \bigvee_{i< k\le n} q_{k,j,i+1}$ , и тогда QHQ<sub>n</sub> =  $\bigvee_{0\le i\le n} (Q_{i1} \land Q_{i2} \land ... \land Q_{ij} \land$ ...  $\land Q_{i(n-1)} \land Q_{in})$ , и, наконец, введя обозначение  $(Q_{i1} \land Q_{i2} \land ... \land Q_{ij} \land$  $Q_{in}) = H_i$ , получим QHQ<sub>n</sub> =  $H_0 \lor H_1 \lor ... \lor H_n$ . Поскольку каждую из формул  $Q_{i,j}$  всего за шаг можно перевести в единицу, то за п шагов можно перевести одну из формул  $H_i$  в единицу, тем самым получив единицу на одной из ветвей д.р. QHQ<sub>n</sub>. На рис. 1 приводится пример д.р. для QHQ<sub>3</sub>.

Отметим, что в этом д.р. только из одной вершины с плюсом продолжено расщепление и дальнейшее д.р. содержит одно поддерево (в большом треугольнике) для QHQ<sub>2</sub>, в котором содержатся два поддерева (в малых треугольниках) для QHQ<sub>1</sub>. Исследуя д.р. этого примера, нетрудно убедиться, что в общем случае до первого перехода в единицу производится *n* расщеплений по логическим переменным, т.е. на момент первого перехода в единицу мы имеем всего  $\sum_{i=0}^{n} 2^{i}$  формул, две из которых являются единицами, т.е. ( $\sum_{i=0}^{n} 2^{i}$ ) – 2 различных формул, не считая единиц. Каждая из неединичных (с плюсом) формул, получившихся на *n*ом уровне сверху, в сути своей имеет одинаковую длину и «строение» и при дальнейшем расщеплении через (*n*-2) шага может быть представлена в виде д.р. для случая (*n*-1), а таких формул всего  $2^{n} - 2$ , таким образом для  $t^{OP}(n)$  получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathbf{t}^{OP}(n) \leq (2^n - 2)\mathbf{t}^{OP}(n - 1) + 4 + n2^n$$
,

из которого после ряда преобразований получается  $t^{OP}(n) \leq 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$ .



Рис. 1.

Для получения нижней оценки величины  $t^{OP}(n)$  с учетом «одинаковости» вхождения различных переменных в формулу QHQ<sub>n</sub>, а значит, неважности порядка выбора переменных для последовательных расщеплений, нетрудно убедиться, что только количество формул с плюсом во всем д.р. будет не меньше  $(2^n - 2)(2^{n-1} - 2) \dots (2^3 - 2)(2^2 - 2)$ , и, учитывая  $(2^n - 2) \ge 2^{n-1}$ , для  $n \ge 2$  получим  $t^{OP}(n) \ge 2^{n-1}2^{n-2} \dots 2^1 \ge 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$ .

Для получения оценок длин выводов учтем тривиальные неравенства  $t^{\phi}(\phi) \leq l^{\phi}(\phi) \leq t^{\phi}(\phi) |A|$ , где A – самая длинная формула в выводе. В

силу того, что  $|QHQ_n| = \frac{3n^2(n+1)}{2} - 1$ , получим  $\boldsymbol{l}^{OP}(n) \le 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} \frac{3n^2(n+1)}{2}$  и  $\boldsymbol{l}^{OP}(n) \ge 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$ .

4. Оценка сложностей выводов формул QHQ<sub>n</sub> в системе Е. Опишем тривиальный алгоритм преобразования произвольного д.р. любой формулы  $\varphi$  в вывод той же формулы в системе Е. Заметим, что множество литералов любой ветви д.р., ведущей от корня д.р., которому приписана формула  $\varphi$ , к вершине, которой приписана 1, является  $\varphi$ -определяющим конъюнктом, а множество всех таких конъюнктов будет оДНФ для формулы  $\varphi$ . Поскольку в исследуемой нами балансированной формуле каждая переменная имеет ровно одно положительное и одно отрицательное вхождения, то все вышеописанным образом составленные  $\varphi$ -определяющие конъюнкты попарно различны. Отметим также, что количество ребер в самой длинной ветви д.р. формулы QHQ<sub>n</sub>, равно  $n^2$ , а значит, длина самого длинного QHQ<sub>n</sub>-определяющиего конъюнкта, в котором быть может только отрицание переменных, не превышает  $2n^2$  -1. Учитывая эти замечания и вышеполученые оценки для системы **ОР**, получим

$$t^{\mathrm{E}}(n) \leq 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$
 и  $t^{\mathrm{E}}(n) \geq 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$ , а также  
 $l^{\mathrm{E}}(n) \leq 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$  (2n<sup>2</sup>-1) и  $l^{\mathrm{E}}(n) \geq 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$ .

**5.** Основной результат. Обобщая все вышеполученные оценки для достаточно больших *n*, получим для последовательности формул QHQ<sub>n</sub>  $\log_2 t^{OP}(n) = \Omega$  (n<sup>2</sup>) и  $\log_2 t^{OP}(n) = O(n^2)$ ,  $\log_2 t^E(n) = \Omega$  (n<sup>2</sup>) и $\log_2 t^E(n) = O(n^2)$ ,  $\log_2 l^E(n) = \Omega$  (n<sup>2</sup>) и  $\log_2 l^E(n) = O(n^2)$ ,  $\log_2 l^E(n) = \Omega$  (n<sup>2</sup>) и  $\log_2 l^E(n) = O(n^2)$ , откуда следует

**Теорема.** Для достаточно больших n для минимального количества шагов и минимальной длины выводов последовательности формул QHQ<sub>n</sub> в пропозициональных системах OP и E имеет место

 $\log_2 \mathbf{t}^{\text{OP}}(n) = \theta$  ( $n^2$ ),  $\log_2 \mathbf{l}^{\text{OP}}(n) = \theta$  ( $n^2$ ) и  $\log_2 \mathbf{t}^{\text{E}}(n) = \theta$  ( $n^2$ ),  $\log_2 \mathbf{l}^{\text{E}}(n) = \theta$  ( $n^2$ ).

<sup>1</sup>Ереванский государственный университет

<sup>2</sup>Российско-Армянский университет

e-mails: achubaryan@ysu.am, haykazizyan077@gmail.com

#### А. А. Чубарян, А. С. Азизян

#### О сложностях выводов балансированных формул в двух пропозициональных системах выводов

Для одного класса балансированных формул исследованы минимальные значения количества шагов и длины выводов в двух пропозициональных системах: системе **OP**, основанной на обобщённом методе расщепления, и системе **E**, основанной на определяющей дизъюнктивной нормальной форме. Для всех четырех исследуемых величин получены одинаковые по порядку (по логарифмической шкале) верхние и нижние оценки.

#### Ա. Ա. Չուբարյան, Հ. Ս. Ազիզյան

#### Ասույթային հաշվի երկու համակարգերում բալանսավորված բանաձների արտածումների բարդությունների վերաբերյալ

Ասույթային հաշվի երկու՝ ընդհանրացված տրոհման մեթոդի վրա հիմնված **OP** և որոշիչ դիզյունկտիվ ձևի վրա հիմնված **E** համակարգերում ուսումնասիրվել են բալանսավորված բանաձևերի մի դասի համար արտածումների քայլերի քանակի և երկարության նվազագույն արժեքները։ Բոլոր չորս ուսումնասիրված մեծությունների համար ստացվել են լոգարիթմական սանդղակով միևնույն կարգի վերին և ստորին գնահատականներ։

#### A. A. Chubaryan, H. S. Azizyan

#### On Proof Complexities of Balanced Formulas in Two Propositional Proof Systems

In this paper the minimal number of proof steps and proof sizes for some class of balanced formulas are investigated in two propositional proof systems: system OP, based on the generalization of splitting method, and system E, based on the determinative disjunctive normal form. The same by order (according logarithmic scale) the upper and lower bounds are obtained for all four investigated quantities.

#### Литература

- Sraßburger L. Annals of Pure and Applied Logic. 2012. V. 163. P. 1995-2007.
- 2. Cook S. A., Reckhow A. R. Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
- Чубарян Ан. А., Чубарян Арм. А. Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени, НАУ, часть 10, 2(7). 2015. С.11-14.
- 4. *Chubaryan An.* Proceedings of NAS RA. 2002. V. 37. N 5. and Journal of CMA (AAS). 2002. V. 37. N 5. P. 71-84.
- Chubaryan An., Hovhannisyan S., Gasparyan H. ASL, ESM, Logic Colloquium–2021, Poznan, Book of abstracts, 166, https://lc2021.pl/confdata/LC2020/files/LC21\_book\_of\_abstracts.pdf

 2 U 8 U U 8 U U 5 Q 5 A 5 A 5 A 6 8 A 7 5 C 1

Zuunnp Том 122 Volume

2022

<u>№</u> 2

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-125

## Л. А. Апинян<sup>1</sup>, А. А. Чубарян<sup>2</sup>

## Сравнение длин линейных и древовидных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчисления высказываний

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 5/V 2022)

**Ключевые слова:** разновидности секвенциальных систем исчисления высказываний; система обобщенных расщеплений; количество шагов и длина вывода; экспоненциальное ускорение.

1. Введение. Бурное развитие теории сложностей пропозициональных выводов было вызвано известным результатом Кука и Рекхау о равенстве множеств NP и соNP в том и только том случае, если существует полиномиально ограниченная система выводов классических тавтологий [1]. За годы интенсивных исследований получено множество интересных оценок длины и количества шагов выводов в различных известных системах классического исчисления высказываний, а также определение новых систем. Одной из наиболее интересных является рассматривающая пропозициональные формулы с кванторами секвенциальная система, которая в настоящее время расположена на верхнем уровне известной иерархии пропозициональнх систем выводов. Некоторые из систем этой иерархии условно определены как «слабые» системы – системы, в которых для отдельных классов формул получены нижние экспоненциальные оценки длин выводов (например, секвенциальная система без правила сечения **PK**<sup>-</sup> и монотонная секвенциальная система Pmon), а те системы, в которых ни для какого класса таковых оценок пока не найдено, считаются «сильными» (например, секвенциальная система с правилом сечения РК, та же система с добавлением правила подстановки SPK, а также та же система с добавлением кванторов **QPK**).

Особый интерес к изучению системы **QPK** вызвали результаты работы [2], в которой для одного из рассмотренных семейств формул выявлено отличительное свойство системы **QPK**, а именно доказано экспоненциальное ускорение шагов древовидного вывода по отношению к системам **SPK** и **PK**, которые в свою очередь имеют экспоненциальное ускорение по отношению к системе **PK**<sup>-</sup>. Та же задача для *линейных* выводов (выводов, в которых формулы не повторяются) решена в [3], где показано отсутствие такого приоритета системы **QPK**.

В настоящей работе исследованы *длины* как *линейных*, так и *древовидных* выводов для тех же систем, которые рассмотрены в [2, 3], а также для системы обобщенных расщеплений. Сравнение полученных результатов с ранее полученными оценками для *шагов* тех же разновидностей выводов тех же формул и в тех же системах указывает на определенную значимость именно длины вывода как основной сложностной характеристики выводов.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения. Мы пользуемся общепринятыми определениями пропозициональной формулы, пропозициональной формулы с кванторами, свободной переменной в формуле с кванторами, секвенции, секвенциальных систем без сечения, секвенциальных систем с правилом подстановки, секвенциальных систем с кванторами, сложностей выводов [1-4].

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные, логические связки  $\neg$ , &, V,  $\supset$  и пару скобок (,). В некоторых системах будут использованы также знаки T «истина» и  $\bot$  «ложь».

**Длина формулы**  $\varphi$ , определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через  $|\varphi|$ . Очевидно, что линейной функцией от  $|\varphi|$  оценивается и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

**2.1. Описание рассматриваемых систем.** Секвенцией называется выражение  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  (антецедент) и  $\Delta$  (сукцедент) являются конечной (может быть пустой) последовательностью пропозициональных формул. Следуя [2], определим следующие системы.

Схемой аксиом для классической системы **РК** является секвенция  $p \rightarrow p$ ,  $\rightarrow$  T, где p – произвольная пропозициональная переменная.

Для произвольных формул *А*, *В* и последовательностей формул Г и логическими правилами вывода являются:

$$\begin{array}{c} \supset \rightarrow \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \ A \quad B, \ \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \ \Gamma \rightarrow \Delta} & \rightarrow \supset \frac{A, \ \Gamma \rightarrow B, \ \Delta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Delta} \\ \vee \rightarrow \frac{A, \ \Gamma \rightarrow \Delta \ \mu B, \ \Gamma \rightarrow \Delta}{A \lor B, \ \Gamma \rightarrow \Delta} & \rightarrow \vee \frac{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \pi \mu \ \Gamma \rightarrow B, \ \Delta}{\Gamma \rightarrow A \lor B, \Delta} \\ \& \rightarrow \frac{A, \ \Gamma \rightarrow \Delta \ \mu \pi \mu \ B, \ \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \ \Gamma \rightarrow \Delta} & \rightarrow \otimes \frac{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow B, \Delta} \\ \rightarrow \otimes \frac{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow B, \Delta} \\ \rightarrow \otimes \frac{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A, \ \Delta \ \mu \Gamma \rightarrow A, \ \Delta} \end{array}$$

Структурное правило

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}, \Gamma' \supseteq \Gamma, \Delta' \supseteq \Delta.$$

Правило сечения

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Lambda}.$$

Система РК<sup>-</sup> получается из системы РК удалением правила сечения.

Система SPK получается из системы PK добавлением правила подстановки

$$S_p^{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}(p), \Gamma \to \Delta, A(p)}{\mathrm{C}(\mathrm{B}), \Gamma \to \Delta, A(\mathrm{B})},$$

где переменная p не присутствует ни в  $\Gamma$ , ни в  $\Delta$ , В – формула, подставляемая вместо всех вхождений переменной p.

Система QPK получается из системы PK добавлением правил

$$\frac{A(q), \Gamma \to \Delta}{(\exists p)A(p), \Gamma \to \Delta} (\exists \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(B)}{\Gamma \to \Delta, (\exists p)A(p)} (\to \exists) \\
\frac{A(B)\Gamma \to \Delta}{(\forall p)A(p), \Gamma \to \Delta} (\forall \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(q)}{\Gamma \to \Delta, (\forall p)A(p)} (\to \forall),$$

где В – любая пропозициональная формула, быть может, с кванторами, а также выполнены следующие условия: в нижних секвенциях правил  $(\exists \rightarrow) u (\rightarrow \forall)$  не должно быть свободных переменных, которые не свободны в верхних, и все вхождения переменной q в A(q) должны быть заменены переменной p, а в правилах ( $\rightarrow \exists$ ) и ( $\forall \rightarrow$ ) формула В не должна содержать переменные, находящиеся в области действия каких-либо кванторов.

В системе **Pmon** и в антецедентах и в сукцедентах используются только монотонные функции, а потому нет правил введения и удаления импликации и отрицания.

**2.2.** Для описания системы **ОР** напомним следующие понятия. Для произвольной пропозициональной формулы  $\psi$  следующие тривиальные эквивалентности назовем правилами замещения:

$0 \& \psi = 0$ ,	$\psi \& 0 = 0$ ,	$1 \& \psi = \psi$ ,	$\psi \& 1 = \psi$ ,
$0 \lor \psi = \psi$ ,	$\psi \lor 0 = \psi$ ,	$1 \lor \psi = 1$ ,	$\psi \lor 1 = 1$ ,
$0 \supset \psi = 1$ ,	$\psi \supset 0 = \overline{\psi}$ ,	$1 \supset \psi = \psi$ ,	$\psi \supset 1 = 1$ ,
$\overline{0} = 1$ ,	$\overline{1}=0$ ,	$ar{ar{\psi}}=\psi$ ,	
$0 \equiv \psi = \overline{\psi}$ ,	$\psi\equiv 0=ar{\psi}$ ,	$1\equiv\psi=\psi$ ,	$\psi \equiv 1 = \psi.$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью.

Система обобщенных расщеплений **ОР** была введена в [4]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле  $\varphi$  сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которо-

го приписана сама формула  $\varphi$ , конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v, которому приписана некоторая формула  $\varphi_v$ , приписаны результаты расщепления  $\varphi_v$  по некоторой переменной p, входящей в  $\varphi_v$  следующим образом:

1) при расщеплении тавтологии  $\varphi$  по литералу  $\alpha$  делаем пометку  $\alpha$  на ребре, ведущем от узла с пометкой  $\varphi$  к узлу с пометкой  $\varphi[\alpha]$ ,

2) сама формула  $\varphi[\alpha]$  строится по  $\varphi$  следующим образом: если  $\alpha =$  $p(\alpha = \bar{p})$ , то всюду в  $\varphi$  вместо переменной p подставляем значение 1(0) и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы.

Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомойтавтологией – 1 и одним правилом вывода  $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$ , обозначена через ОР.

2.3. Некоторые характеристики тавтологий и систем выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: t-сложность, определяемая как количество всех формул (секвенций) в выводе, и *l*-сложность, определяемая как сумма длин всех формул (секвенций) в выводе [1]. Пусть  $\phi$  является некоторой системой выводов, а  $\varphi$  – некоторая тавтология. Через  $t^{\phi}(\varphi)(l^{\phi}(\varphi))$  обозначается минимально возможное значение *t*-сложности (*l-сложности*) всевозможных выводов тавтологии  $\varphi$ (секвенции  $\rightarrow \phi$ ) в системе  $\phi$ . Если для двух систем  $\phi_1$  и  $\phi_2$  для одних и тех же последовательностей секвенций  $\rightarrow \varphi_n$  для достаточно больших nимеет место  $t^{\phi_1}(\varphi_n) = \Omega(2^{t^{\phi_2}(\varphi_n)})$ , то считают, что для последовательности секвенций  $\rightarrow \varphi_n$  система  $\phi_2$  имеет экспоненциальное ускорение по отношению к системе  $\phi_1$ .

2.4. Результаты предыдущих работ. В [2] дано определение некоторого класса тавтологий длины  $O(2^{2^n})$ , для которых исследовано количество шагов выводов в виде дерева в ряде вышеперечисленных секвенциальных систем.

Для пропозициональной переменной p формула  $p^m$  определяется по индукции следующим образом:  $p^0 \equiv p$  и  $p^{i+1} \equiv (p^i \& p^i)$  для  $i \ge 0$ . Нетрудно проверить, что формула  $p^m$  содержит ровно  $2^m - 1$  вхождений логических связок.

Для упрощения дальнейших записей введем следующие обозначения. Для сложностных характеристик древовидных выводов будем использовать индекс «д», а для линейных – индекс «л». Пусть Ф – некоторая секвенциальная система выводов, тогда *t*-сложность ((*l-сложность*) древовидного вывода секвенции  $p \to p^m$  обозначим через  $t_{\rm d} \phi(m)(l_{\rm d} \phi(m))$ , а соответственно для линейного вывода через  $t_{\Lambda^{\phi}}(m)(l_{\Lambda^{\phi}}(m))$ .

Теорема [2]. Для достаточно больших п и последовательности секвенций  $p \to p^{2^n}$ 

 $\boldsymbol{t}_{\mathcal{A}}^{\mathbf{QPK}}(2^{n}) = O(n); \, \boldsymbol{t}_{\mathcal{A}}^{\mathbf{SPK}}(2^{n}) = \Omega(2^{n}); \, \boldsymbol{t}_{\mathcal{A}}^{\mathbf{PK}}(2^{n}) = \Omega(2^{n}); \, \boldsymbol{t}_{\mathcal{A}}^{\mathbf{PK}-}(2^{n}) = \Omega(2^{2^{n}}).$ 128

Как видим, здесь очевидное преимущество системы QPK.

В [3] для количества шагов той же последовательности секвенций доказана.

**Теорема** [3]. Для достаточно больших n и последовательности секвенций  $p \to p^{2^n}$ 

 $t_{\pi}^{\text{QPK}}(2^n) = O(n); t_{\pi}^{\text{SPK}}(2^n) = O(n); t_{\pi}^{\text{PK}}(2^n) = \theta(2^n); t_{\pi}^{\text{PK}}(2^n) = \theta(2^n).$ 

Эти результаты показывают, что при рассмотрении линейных (более используемых) форм выводов квантифицированные системы не имеют преимущества перед системой с правилом подстановки, которая имеет уже известное экспоненциальное ускорение по отношению к системам без правила подстановки, впервые установленное в [5].

3. Основные результаты. 3.1. Здесь оценены *l-сложности* линейных выводов семейства секвенций  $p \to p^{2^n}$  в вышеопределенных секвенциальных системах.

**Теорема 1.** Для достаточно больших *n* и последовательности секвениий  $p \to p^{2^n}$ 

$$l\pi^{\mathbf{QPK}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}}); \quad l\pi^{\mathbf{SPK}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}});$$
  
 $l\pi^{\mathbf{PK}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}}); \quad l\pi^{\mathbf{PK}-}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}})$  и  $l\pi^{\mathbf{Pmon}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}})$ 

Для доказательства нужно оценить длину линейного вывода  $p \to p^{2^n}$  во всех указанных системах. Отметим, что  $|p^{2^n}| = 2^{2^n} - 1$ , а значит, нижняя оценка  $\Omega(2^{2^n})$ , для всех систем очевидна, так как хотя бы один раз в выводе присутствует сама формула. Для получения верхних оценок будут построены некоторые линейные выводы в указанных системах.

Линейный вывод в QPK

Нам полезен древовидный вывод секвенции  $\rightarrow p \supset p^{2^n}$  в системе **QPK** с количеством шагов O(n).

Сначала рассматривается вывод секвеции  $\forall q(q \supset q^k) \rightarrow \forall q(q \supset q^{2k})$ , где k – произвольное натуральное число и  $q^{2k} = (q^k)^k$ . Вывод этой секвенции не зависит от k и может быть получен за конечное число шагов следующим образом (справа выписаны соответствующие длины):  $n \rightarrow n$   $n^k \rightarrow n^k$ 

$p \rightarrow p  p  \rightarrow p$	2 +2
$\overline{p \supset p^k, p \rightarrow p^k}$	$2^{k+2}+2$
$\forall q(q \supset q^k), p \rightarrow p^k  p^{2k} \rightarrow p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+5$
$\forall q(q \supset q^k), p^k \supset p^{2k}, p \rightarrow p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+5$
$\overline{\forall q(q \supset q^k), p^k \supset p^{2k} \rightarrow p \supset p^{2k}}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+6$
$\forall q(q \supset q^k), \forall q(q \supset q^k) \rightarrow p \supset p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+1}+8$
$\overline{\forall q (q \supset q^k) \rightarrow p \supset p^{2k}}$	$2^{k+1}+2^{2k+1}+5$
$\forall q(q \supset q^k) \rightarrow \forall q(q \supset q^{2k})$	$2^{k+1}+2^{2k+1}+7$

Следует отметить, что в этом выводе нет повторяющихся секвенций, а значит, этот вывод линейный. Повторяя этот вывод n раз, можно получить вывод секвенции

$$\forall q(q \supset q^2) \rightarrow \forall q(q \supset q^{2^n}),$$

а так как  $\forall q(q \supset q^2)$  выводится за конечное число шагов, то  $\forall q(q \supset q^{2^n})$ , а следовательно,  $u \rightarrow p \supset p^{2^n}$ , выводится за O(n) шагов.

В выписанном отрезке вывода количество всех вхождений логических символов равно  $7*2^{k+2} + 9 * 2^{2k+1} + 40$ , но так как эти шаги повторяются *n* раз со значениями  $k = 2^i$ , где i = 0, 1, 2, ..., n, то общая длина вывода не будет превышать  $2^{2^{n+7}}$ , а значит, верхняя оценка будет  $O(2^{2^n})$ . Следовательно,  $l \pi^{\mathbf{QPK}}(2^n) = \theta(2^{2^n})$ .

Линейный вывод в SPK

1	$p^0 \rightarrow p^0$ acc.	0
2	$p^0 \rightarrow p^1 ~(\rightarrow \&)$	2 <sup>1</sup> - 1
3	$p^1  ightarrow p^2$ подст.	$2^1 - 1 + 2^2 - 1$
4	$p^0 \rightarrow p^2$ сечение	$2^2 - 1$
•••		
2n + 1	$p^{2^{n-1}} \rightarrow p^{2^n}$ подст.	$2^{2^{n-1}} - 1 + 2^{2^n} - 1$
2n + 2	$p^0 \rightarrow p^{2^n}$ сечение	$2^{2^n} - 1$

Нетрудно убедиться, что общее количество символов не будет превышать  $2^{2^{n}+3}$ . Значит, верхняя оценка будет  $O(2^{2^{n}})$ . Следовательно, можем дать длине линейного вывода в **SPK** оценку, которая будет  $\theta(2^{2^{n}})$ .

Линейный вывод в РК

1	$p^0  ightarrow p^0$	0
2	$p^0 \rightarrow p^1 ~(\rightarrow \&)$	2 <sup>1</sup> - 1
3	$p^0 \rightarrow p^2 ~(\rightarrow \&)$	$2^2 - 1$
2 <sup>n</sup>	$p^0 \rightarrow p^{2^n-1} (\rightarrow \&)$	$2^{2^{n-1}}-1$
$2^{n+1}$	$p^0 \rightarrow p^{2^n}  (\rightarrow \&)$	$2^{2^n} - 1$
		- n

Длина линейного вывода не будет превышать  $\sum_{i=0}^{2^n} 2^i \leq 2^{2^{n+1}}$ , т.е. верхняя оценка будет  $O(2^{2^n})$ , а значит,  $l \pi^{PK}(2^n) = \theta(2^{2^n})$ . В **РК**<sup>-</sup> (**Ртоп**) всё аналогично **РК**, так как выше не было применено правило сечения (было применено только правило ( $\rightarrow$  &)), а значит,  $l \pi^{PK-}(2^n) = \theta(2^{2^n})$  и  $l \pi^{Pmon}(2^n) = \theta(2^{2^n})$ .

Теорема 1 полностью доказана. Получается, что, действительно, ни в какой из систем не наблюдается экспоненциального ускорения длин выводов по отношению к другим.

**3.2**. Здесь оценены *l-сложности древовидных* выводов семейства секвенций  $p \to p^{2^n}$  в вышеопределенных секвенциальных системах

**Теорема 2.** Для достаточно больших n и последовательности секвенций  $p \to p^{2^n}$ 

$$l_{\Pi}^{\mathbf{QPK}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}}); \quad l_{\Pi}^{\mathbf{SPK}}(2^{n}) = \theta(2^{2^{n}});$$
$\log_2(l\pi^{\mathbf{PK}}(2^n)) = \theta(2^n); \ \log_2(l\pi^{\mathbf{PK}-}(2^n)) = \theta(2^n)$  и  $\log_2(l\pi^{\mathbf{Pmon}}(2^n)) = \theta(2^n).$ 

Для доказательства во всех вышеперечисленных системах линейные выводы преобразуются в древовидные повторением выводов формул, используемых дважды. Здесь оценки хоть и разнятся, совпадая по логарифмической шкале, однако ни в какой из систем не наблюдается экспоненциального ускорения по отношению к другим.

#### Длина линейного и древовидного вывода в ОР.

**Теорема 3.** Для достаточно больших n и последовательности формул  $p \supset p^{2^n}$ 

$$t\pi^{\text{OP}}(2^n) = \theta(1); \ t\pi^{\text{OP}}(2^n) = \theta(1); \ l\pi^{\text{OP}}(2^n) = \theta(2^{2^n}); \ l\pi^{\text{OP}}(2^n) = \theta(2^{2^n}).$$

Доказательство очевидно в силу того, что формула  $p \supseteq p^{2^n}$  содержит лишь одну переменную, а значит, только по ней и производится единственное расщепление.

Замечание. Анализ всех результатов указывает на важность именно *l*сложности и линейности выводов.

<sup>1</sup>Российско-Армянский университет <sup>2</sup>Ереванский государственный университет e-mails: apinlev00@gmail.com, achubaryan@ysu.am

## Л. А. Апинян, А. А. Чубарян

# Сравнение длин линейных и древовидных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчисления высказываний

Для некоторых семейств формул исследованы длины как линейных, так и древовидных выводов в ряде систем исчисления высказываний: в разновидностях секвенциальных систем (с кванторами, с правилом подстановки, с правилом сечения, без правила сечения, монотонных), а также в системе обобщенных расщеплений. Сравнение полученных результатов с ранее полученными оценками для шагов тех же разновидностей выводов тех же формул и в тех же системах указывает на определенную значимость именно длины вывода как основной сложностной характеристики выводов.

#### Լ. Ա. Ափինյան, Ա. Ա. Չուբարյան

# Ասույթային հաշվի մի շարք համակարգերում բանաձևերի որոշ ընտանիքների գծային և ծառատիպ արտածումների երկարությունների համեմատություն

Բանաձևերի որոշ ընտանիքների համար ուսումնասիրված են գծային և ծառատիպ արտածումների երկարությունները ասույթային հաշվի մի քանի համակարգերում՝ սեկվենցիալ համակարգերի տարատեսակներում (ծավալիչներով, տեղադրման կանոնով, հատույթի կանոնով, առանց հատույթի կանոնի, մոնոտոն), ինչպես նաև ընհանրացված տրոհումների համակարգում։ Աշխատանքում ստացված արդյունքների համեմատությունը նախկինում ստացված նույն բանաձների նշված համակարգերում արտածումների քայլերի համար ստացված արդյունքների հետ փաստում է արտածումների երկարության՝ որպես բարդության բնութագրիչի արժևորումը։

## L. A. Apinyan, A. A. Chubaryan

## Linear and Tree-Like Proofs Sizes Comparison for Any Formulae Families in Some Systems of Propositional Calculus

The sizes of linear and tree-like proofs for any formulae families are investigated in some systems of propositional calculus: in different sequent systems (with quantifier rules, with substitution rule, with cut rule, without cut rule, monotone) and in the generalization splitting system. The comparison of obtained here results with the bounds, wich are obtained for the steps of proofs for the same formulas in the mentioned systems former, shows the importance of the size of proof as complexities characteristic.

#### Литература

- 1. Cook S. A., Reckhow A. R. Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
- 2. Carbone A. Studia Logica. 2000. V. 64. P. 315-321.
- 3. Тамазян Акоп А., Чубарян Анаит А. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. 2020. Т. 54. Р. 138-146.
- 4. *Чубарян Ан. А., Чубарян Арм. А.* Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени, НАУ, часть 10, 2(7). 2015. С.11-14.
- 5. Цейтин Г., Чубарян Ан. ДАН Арм. ССР. 1972. Т. 55. №1. С. 10-12.

 2 U 8 U U 8 U U 5 Ф 5 П Р 0 8 П Р 0 16 Г Р
 U 2 9 U 8 P 0 E 10 P U

 Н А Ц И О Н А Л Ь Н А Я
 А К А Д Е М И Я Н А УК А Р М Е Н И И

 N A T I O N A L
 A C A D E M Y O F S C I E N C E S O F A R M E N I A

 Д О К Л А Д Ы
 2 5 4 П Р 8 3 0 E Г

Zuunnp Том 122 Volume

2022

№ 2 МЕХАНИКА

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-133

## М. Г. Арзуманян

# Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 18/IV 2022)

**Ключевые слова:** неспечённый порошковый материал; модифицированная модель текучести Друкера — Прагера; угол внутреннего трения и коэффициент сцепления между частицами порошка.

Введение. В порошковой металлургии одним из основных технологических процессов является холодное формование неспеченных заготовок. В [1] теоретически разработана составная модель металлического порошкового материала, состоящая из двух ветвей (с прямолинейным и изогнутым участков). Получены уравнения теории пластичности металлического порошкового материала для прямолинейного участка и для изогнутой части. В [2], основываясь на окружности Мора в системе осей компонентов касательных и нормальных напряжений наклонных плоскостей и на график (прямая линия условия Мора – Кулона), изображающий касательную к окружности, были обоснованы условия пластичности Мора – Кулона.

В [3] выполнен подробный анализ модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов, состоящей из трех участков: прямолинейного - поверхность текучести при сдвиге, шляпкообразного, пересекающего ось среднего напряжения, и переходного участка. В [3, 4] рассмотрены параметры, необходимые для определения модифицированной модели текучести Друкера – Прагера. В [5-7] модифицированная модель текучести Друкера – Прагера рассматривается через две следующие поверхность: поверхность текучести при сдвиге порошковых частиц и поверхность осаживания (шляпкообразный участок).

Отметим, что в [3-7] отсутствуют формулы связи между деформациями и напряжениями, с помощью которых можно решать довольно сложные и сравнительно мало изученные технологические задачи неспечённых порошковых заготовок. Цель настоящей работы – на основе формул теории пластичности получить простые формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера, что позволит определить не только компоненты напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и текущую пористость материала.

Известно, что модифицированная модель текучести Друкера – Прагера состоит из трех участков [3, 4] (рис. 1).



Рис. 1. Типичная модифицированная модель текучести Друкера – Прагера [4].

**1. Поверхность (АВ) текучести при сдвиге** порошковых частиц, которая в основном обеспечивает течение, обусловленное сдвигом, приводится в следующем виде:

$$f_{AB} = F_S = q - p \, tg \,\beta - d, \tag{1}$$

где *p* – среднее напряжение, а *q* – квадратный корень второго инварианта девиатора напряжения.

Здесь *p* и *q*, выраженные через главные напряжения, имеют следующий вид:

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3,$$
 (2)

$$q = \sqrt{\frac{1}{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$
(3)

2 Шляпкообразная поверхность (CD), обеспечивающая механизм осаживания порошковых частиц, для представления пластичного уплотнения записывается в виде

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[\frac{Rq}{1 + \alpha - \alpha/\cos\rho}\right]^2} - R(d + p_a tg\beta) = 0, \quad (4)$$

где *R* — параметр, характеризующий свойство материала, который управляет формой «шляпы»,  $\alpha$  — небольшое число (обычно в диапазоне от 0.01

до 0.05), используемое для определения плавной переходной поверхности,  $p_a$  — эволюционный параметр, обусловленный прочностью или хрупкостью материала и представляющий собой объемную пластичную деформацию.

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера – Прагера служит в основном двум целям [4]:

- связывает поверхность текучести с гидростатическим давлением, обеспечивая механизм упрочнения, для представления пластичного уплотнения;
- помогает управлять объемным расширением (дилатансию), когда материал сдвигается, обеспечивая хрупкость как результат увеличения неупругой объемной функции. Последнее получается в результате сдвига материала по участкам текучести и плавного перехода [3].

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера —Прагера упрочняет материал или делает его хрупким как результат объемной функци пластической деформации. При пластическом объемном уплотнении (материал сдвигается по шляпкообразной поверхности) порошковый материал упрочняется, а при объемной пластической дилатансии (материал сдвигается по поверхности текучести) материал становится хрупким [3].

Связь между эволюционным параметром  $p_a$  и напряжением упрочнения  $p_b$  имеет следующий вид [3-5]:

$$p_a = \frac{p_b - Rd}{1 + Rtg\beta}.$$
(5)

**3.Участок плавного перехода (ВС)** между указанными двумя участками задается в виде [3, 4]:

$$f_{BC} = F_t = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[q - \left(1 - \frac{\alpha}{\cos\beta}\right)(d + p_a tg\beta)\right]} - \alpha(d + p_a tg\beta).$$
(6)

Таким образом, согласно [3, 4] для определения модифицированной модели текучести Друкера – Прагера необходимо иметь шесть параметров:  $\beta$ , d,  $p_a$ , R,  $p_b$  и  $\alpha$ . Угол внутреннего трения между частицами металлических порошков  $\beta$  и коэффициент их сцепления d необходимы для определения поверхности текучести при сдвиге Друкера – Прагера, эволюционный параметр  $p_a$  и параметр эксцентриситета R – для определения шляпкообразной поверхности, параметр  $p_b$  как функция объемной пластической деформации – для определения закона упрочнения, а  $\alpha$  – для формирования переходной поверхности. Отметим также, что только на участке «шляпки» применим закон текучести, связанный с условием пластичности, с помощью которого можно получить формулы теории пластичности, однако в [3-7] они отсутствуют.

При проведении теоретических исследований задачи для шляпкообразной и переходной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера не имеют конечного решения и решаются только численными методами. Чтобы избежать трудностей, сначала рассмотрим модифицированную модель текучести Друкера – Прагера без переходного участка [5-7]

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + (Rq)^2} - R(d + p_a tg\beta) = 0.$$
(7)

Несмотря на то что в (7) шляпкообразная поверхность представляется в упрощенном виде по сравнению с (4), конечного решения также не существует. Поэтому целесообразно шляпкообразную поверхность представлять в виде прямой линии (рис 2).

Известно, что в системе координат ХОУ уравнение прямой имеет следующий вид:

$$y = kx + d, \tag{8}$$

где k – угловой коэффициент, т.е. тангенс угла наклона прямой к оси ОХ, а d – величина отрезка, который отсекает прямая на оси ОҮ, считая от начала координат.

Обозначив 
$$y = q, x = p$$
, уравнение (8) приведем к виду  
 $q = kp + d.$  (9)

Учитывая, что  $k = tg\phi$  (рис. 2), для прямой BD имеем  $q = tg\phi p + d.$  (10)

Использовав граничное условие  $q = 0, p = p_b$ , имеем  $0 = tg\varphi p_b + d,$  $d = -tg\varphi p_b.$  (11)

$$= -tg\varphi p_b. \tag{11}$$

Подставлив (11) в (10), имеем

 $q = tg\varphi p - tg\varphi p_b.$  (12) Из треугольника BDL (рис. 2) имеем  $90 - \gamma = 180 - \varphi$  или  $\varphi = 90 + \gamma$ , а

$$tg\varphi = tg(90 + \gamma) = -ctg\gamma.$$

Из треугольника BDL (рис. 2) имеем

f

$$ctg\gamma = \frac{LB}{LD} = \frac{d + p_a tg\rho}{R(d + p_a tg\rho)} = \frac{1}{R}$$

или

$$tg\varphi = -ctg\gamma = -\frac{1}{R}.$$
 (13)

Подставлив (13) в (12), получим уравнение для прямой BD

$$F_{BD} = F_L = qR + p - p_b . \tag{14}$$

Это и есть простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Условие пластичности (14), выраженное через главные напряжения, будет иметь вид



Рис. 2. Упрощенный вид типичной модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Для получения связей между компонентами приращения главных пластических деформаций и компонентами главных напряжений используются условие пластичности (15) и связанный с ним закон текучести [8]:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F_{c_{ij}}}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad (16)$$

где  $d\lambda$  – положительная величина пропорциональности:

$$d\varepsilon_{1} = d\lambda \left[ \frac{1}{2q} (\sigma_{1} + p)R - \frac{1}{3} \right],$$
  

$$d\varepsilon_{2} = d\lambda \left[ \frac{1}{2q} (\sigma_{2} + p)R - \frac{1}{3} \right],$$
  

$$d\varepsilon_{1} = d\lambda \left[ \frac{1}{2q} (\sigma_{3} + p)R - \frac{1}{3} \right].$$
  
(17)

Используя понятие интенсивности приращений пластических деформаций, получим [8]

$$d\overline{\varepsilon}_{l} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(d\varepsilon_{1} - d\varepsilon_{2})^{2} + (d\varepsilon_{2} - d\varepsilon_{3})^{2} + (d\varepsilon_{3} - d\varepsilon_{1})^{2}}.$$
 (18)

Из уравнения (17) определяются значения слагаемых  $d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2$ ,  $d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3$ ,  $d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1$ :

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = d\lambda \Big[ \frac{1}{2q} (\sigma_1 - \sigma_2) R \Big],$$
137

$$d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 = d\lambda \Big[ \frac{1}{2q} (\sigma_2 - \sigma_3) R \Big],$$
(19)  
$$d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1 = d\lambda \Big[ \frac{1}{2q} (\sigma_3 - \sigma_1) R \Big].$$

Подставив выражение (19) в (18), получим

$$d\overline{\varepsilon_{i}} = d\lambda R \frac{3\sqrt{2}}{4},$$
$$d\lambda = \frac{4\overline{d\varepsilon_{i}}}{3\sqrt{2}R}.$$
(20)

откуда следует

Следовательно, из (22) получим

$$d\varepsilon_{1} = d\overline{\varepsilon}_{l} \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_{1}+p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right],$$
  

$$d\varepsilon_{2} = d\overline{\varepsilon}_{l} \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_{2}+p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right],$$
  

$$d\varepsilon_{3} = d\overline{\varepsilon}_{l} \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_{3}+p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right].$$
  
(21)

Уравнение приращения объемной пластической деформации  $d\varepsilon_V^p$  представляется в виде [8]

$$d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3. \tag{22}$$

Используя (21), из (22) получим приращения объемной пластической деформации

$$d\varepsilon_V^p = -d\overline{\varepsilon_l} \frac{2\sqrt{2}}{3R}.$$
 (23)

Для определения плотности  $\rho$  или пористости v при текущей степени деформации порошкового материала используем закон сохранения массы [1, 9]

$$\frac{d\rho}{\rho} = -d\varepsilon_V^p. \tag{24}$$

Приняв во внимание формулу связи между текущей пористостью ν и относительной плотностью ρ порошкового материала [9]

$$\rho = 1 - \nu, \tag{25}$$

представим (24) в следующем виде:

$$\frac{d(1-v)}{1-v} = -d\varepsilon_V^p . \tag{26}$$

Подставив (26) в (23), получим

$$\frac{d(1-\nu)}{1-\nu} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{R} d\overline{\varepsilon}_l.$$
(27)

Интегрируя (27), получим приращения текущей пористости или относительной плотности заготовок из порошкового материала.

Заключение. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

Военно-авиационный университет им. Арменака Ханперянца МО РА e-mail: arzmartin@rambler.ru

## М. Г. Арзуманян

### Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера

Получены формулы пластического деформирования порошкового материала на основе теории пластичности для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера. Показано, что полученные уравнения дают возможность определять не только компонент напряженно-деформированного состояния заготовок из порошкового материала в технологических процессах, но и их текущую пористость.

## Մ. Գ. Արզումանյան

# Դրուկեր – Պրագերի՝ ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի հիմնավորումը

Հիմնվելով պլաստիկության տեսության բանաձևերի վրա՝ Դրուկեր – Պրագերի՝ ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի գլխարկի մակերևույթի համար ստացվել են փոշենյութի պլաստիկ դեֆորմացման տեսական բանաձևերը։ Ցույց է տրվել, որ ստացված հավասարումները հնարավորություն կտան որոշելու ոչ միայն տեխնոլոգիական գործընթացներում փոշենյութից նախապատրաստվածքների լարվածադեֆորմացիոն վիձակի բաղադրիչները, այլև դրանց ընթացիկ ծակոտկենությունը։

#### M. G. Arzumanyan

#### Justification of Modified Drucker - Prager Cap Model

On the basis of the equation of the theory of plasticity theoretical formulas for the plastic deformation of a powder material were obtained for the cap surface of the modified Drucker – Prager cap model. It is shown that the obtained equations make it possible not only to determine the components of the stress-strain state of powder blanks in technological processes but also their current porosity.

## Литература

- 1. Petrosyan G., Kraft T. Proceedings of Engineering academy of Armenia. 2005. V. 2. № 4. P. 538-543.
- 2. *Арзуманян М. Г.* Исследование напряженно-деформированного состояния процессов уплотнения металлических порошковых заготовок. Канд. дис. Ереван. 2015. 102 с.
- **3.** ABAQUS, 2006. Theory Manual. ABAQUS Inc.
- 4. *Han L. H., Elliott J. A., Bentham A. C. et al.* International Journal of Solids and Structures. 2008. V. 45. P. 3088–3106.
- Rottman G. Mechanisches Verhalten beim Trockenpressen Triaxialversuche an SiC and Stahlpulver zur Untersuchung von Werkstoffmodellen. Dokt. dis. Fraunhofer IWM, Germany, Mai, 2001. 102 p.
- 6. Goube O., Riedel H. Powder Metallurgy. 2000. V. 43. № 2. P. 123-131.
- 7. Doremus P., Toussaint F., Alvain O. Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes. IOS Press. 2001. P. 29-41.
- 8. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М. Машиностроение, 1975. 399 с.
- 9. *Петросян Г. Л.* Пластическое деформирование порошковых материалов. М. Металлургия. 1988. 153 с.

2 U S U U S U U FΦ F S Π F Ø S Π F Ø S Π F O T F UH A U O H A J B H A SA K A J E M U SH A U O H A J B H A SA K A J E M U SN A T I O N A LA C A D E M SJ O K J A J BØ F S C I E N C E SØ F J A J BØ F S C I E N C E SN A T A J BØ F S C I E N C E SO K J A J BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A T A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E SN A D BØ F S C I E N C E S<tr/<td>Ø F S C I

<sup>Հшилпр</sup> Том 122 Volume

2022

<u>№</u> 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

#### УДК 539.3 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-141

## С. А. Аветисян

# О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. М. Мхитаряном 10/IV 2022)

**Ключевые слова:** экспоненциально неоднородная упругая полоса, касательные контактные напряжения, антиплоская деформация, интегральное уравнение.

Введение. Задачи контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными упругими телами различных геометрических форм представляют развитие и обобщение классических контактных задач теории упругости. Они будучи связаны с важными для инженерной практики вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов к массивным деформируемым телам встречаются в строительной механике, в авиастроении при проектировании летательных апаратов, в тензоизмерении, в машиностроении и в других областях прикладной механики и инженерной практики. Первые исследования по задачам контактного взаимодействия между стрингерами и упругими телами восходят к известной работе Мелана [1]. В дальнейшем существенный прогресс в этом направлении был достигнут в [2-4]. Основные достижения в этой области теории упругости, полученные до 1976 г., подытоженны в коллективной монографии [5]. По обсуждаемой тематике укажем также на монографии [6-9].

В настоящей статье в модифицированной постановке [10], когда вместо задания действующих на стрингеры силовых факторов предварительно задаются горизонтальные упругие перемещения их точек, рассматривается задача о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной полосой при антиплоской деформации, модуль сдвига которой по глубине изменяется по экспоненциальному закону. В такой постановке задачи представляют теоретический и практический интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры – упругие основания. Решение поставленной задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром, представимым суммой сингулярного ядра Коши и регулярного ядра. Решение определяющего СИУ строится известным численно-аналитическим методом [11, 12], основанным на применении квадратурных формул Гауса для вычисления интегралов. После определения касательных контактных напряженийи под стрингерами остальные силовые факторы, действующие на стрингеры и обеспечивающие предварительно заданный режим их упругих перемещений, определяются из дифференциального уравнения деформирования стрингеров. Рассмотрены частные случаи.

**Постановка задачи и вывод основных уравнений.** Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат  $O_{XY}$  упругий слой  $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; 0 \le y \le H\}$  имеет высоту H и обладает модулем сдвига G, изменяющимся по глубине слоя по экспоненциальному закону  $G = G_0 e^{ay} (\alpha = const, 0 \le y \le H)$ . Пусть далее нижняя грань y = 0 слоя жестко защемлена, а на верхней грани y = H слой по системе отрезков  $L = \bigcup_{k=1}^{n} L_k (L_k = a_k \le x \le b_k)$  усилен коллинеарной системой стрингеров в виде упругих полос  $\omega_k = \{a_k \le x \le b_k; 0 \le y \le h_k; -\infty < z < \infty\} (k = \overline{1, n})$ , с модулями сдвига  $G_k$  и высот  $h_k$ . Предположим, что на верхней грани  $y = h_k$  полосы  $\omega_k$  в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по оси Oz касательные силы интенсивности  $T_k(x)$ , т.е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_k} = T_k(x) \quad \left(a_k < x < b_k \ ; \ k = \overline{1,n}\right),$$

где  $\tau_{yz}$  – компонента касательных напряжений. Кроме того будем считать, что в граничных сечениях  $x = a_k$  и  $x = b_k$  полосы  $\omega_k$   $\left(k = \overline{1, n}\right)$  в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по этой оси касательные сосредоточенные силы  $S_k^{(1)}$  и  $S_k^{(2)}$ ,  $\left(k = \overline{1, n}\right)$  соответственно.

Примем, что под воздействием этих силовых факторов система стрингеры – упругий слой находится в состоянии антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой полосой  $\Omega_0 = \{-\infty < x < \infty; 0 \le y \le H\}$ . Описанную задачу о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой экспоненциально неоднородной полосой рассмотрим в модифицированной постановке, считая, что предварительно задан режим упругих перемещений точек стрингеров в направлении оси Oz, т. е. на верхной грани y = H полосы  $\Omega_0$  на системе отрезков  $L = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ 

заданы перемещения  $u_z|_{y=H} = w(x,y)|_{y=H} = f(x)$   $(x \in L)$ , а на остальной части этой грани заданы нулевые касательные напряжения, т.е.  $\tau_{yz}|_{y=H} = 0$   $x \in R \setminus L$ . Здесь f(x)-дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f(x) \in C^2(L)$ . В силу условия контакта  $w(x, y)|_{y=H} = w_s(x)$   $(x \in L)$ , где  $w_s(x)$  – упругие перемещения точек стрингеров в направлении оси Oz, функцией f(x) даются упругие перемещения точек стрингеров.

Требуется определить касательные контактные напряжения  $\tau_k(x) \left(a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}\right)$  под k-тым стрингером и действующие на стрингеры силовые факторы  $T_k(x)$ ,  $S_k^{(1)}$  и  $S_k^{(2)} \left(k = \overline{1, n}\right)$ , обеспечивающие заранее заданный режим их упругих перемещений в виде функции f(x).

Кроме того будем считать, что заданы равнодействующие  $T_k$  касательных контактных напряжений  $\tau_k(x)$  под k -тым, стрингером:

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau_k(s) ds = T_k \quad \left(k = \overline{1, n}\right). \tag{1}$$

Считая, что нижняя грань y = 0 полосы  $\Omega_0$  жестко защемлена, выведем основные уравнения поставленной задачи. С этой целью воспользуемся выражением упругих перемещений граничных точек полосы  $\Omega_0$ от действующих на ее грани y = H касательных сил интенсивности  $\tau(x)$ , направленных по оси Oz [13]:

$$w(x,H) = \frac{2e^{-\alpha H}}{\pi G_0} \int_{-\infty}^{\infty} L(|x-s|)\tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$
(2)

$$L(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{sh(\mu H/2)\cos(\lambda x)d\lambda}{\mu ch(\mu H/2) - \alpha sh(\mu H/2)}; \quad \mu = \sqrt{\alpha^{2} + 4\lambda^{2}}$$

Исходя из (2) реализуем условие контакта

$$w(x,H) = w_s(x)f(x) \quad (x \in L),$$

в результате чего придем к следующему определяющему интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k}}^{b_{k}} L(|x-s|) \tau_{k}(s) ds = \frac{G_{0}}{2} e^{\alpha H} f(x) \quad (x \in L).$$
(3)

После решения уравнения (3) можно определить действующие на стрингеры силовые факторы, обеспечивающие заданный режим их упругих перемещений. А именно, запишем дифференциальное уравнение деформирования k-того стрингера по модели одноосного напряженного состояния [14]:

$$h_k G_k \frac{d^2 w_s}{dx^2} = \tau_k (x) - T_k (x) \quad (a_k < x < b_k ; k = \overline{1, n}).$$
(4)

Отсюда вследствие условия контакта находим

$$T_k(x) = \tau_k(x) - h_k G_k f^H(x) \quad \left(a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}\right).$$

Далее введем в рассмотрение касательные усилия  $S_k(x) = h_k \tau_{zx}$  в сечении k-того стрингера. По закону Гука  $\tau_{zx}(x) = G_k \frac{dw_s}{dx}$ , и, следовательно, для определения  $S_k(x)$  согласно (3) получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dS_{k}}{dx} = \tau_{k}(x) - T_{k}(x); \ a_{k} < x < b_{k}; \ k = \overline{1, n}; \\ S_{k}(x)|_{x=a_{k}} = S_{k}^{(1)}, \ S_{k}(x)|_{x=b_{k}} = S_{k}^{(2)} \ (k = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Отсюда интегрированием находим

$$S_{k}(x) = \int_{a_{k}}^{x} \left[\tau_{k}(s) - T_{k}(s)\right] ds + S_{k}^{(1)} \quad a_{k} \leq x \leq b_{k} \quad \left(k = \overline{1, n}\right).$$
(5)

Уравнение (5) дает

$$S_{k}(a_{k}) = S_{k}^{(1)} = h_{k}G_{k}f'(a_{k}); \quad S_{k}(b_{k}) = S_{k}^{(2)} = h_{k}G_{k}f'(b_{k}) \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$
(6)

Таким образом, после того как построено решение интегрального уравнения (2)-(1), действующие на стрингеры силы определяются формулами (5)-(6).

Продифференцировав обе части уравнения (3) по x, придем к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{L} M(s-x)\tau(s) ds = \frac{G_0}{2} e^{\alpha H} f'(x) \quad (x \in L)$$

$$M(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda th(\mu H/2)\sin(\lambda x) d\lambda}{\mu - \alpha th(\mu H/2)}.$$
(7)

Введем безразмерные величины

$$\xi = x/a , \eta = s/a ; \alpha_k = a_k/a , \beta_k = b_k/a \quad \left(k = \overline{1, n}\right); \quad L_0 = \bigcup_{k=1}^n \left[\alpha_k, \beta_k\right]; \omega = \lambda a ;$$
144

$$\begin{aligned} \tau_{0}(\xi) &= \tau(a\xi)/G_{0}; \ \tau_{k}^{(0)}(\xi) = \tau_{k}(a\xi)/G_{0} \ (\alpha_{k} < \xi < \beta_{k}); \ f_{0}(\xi) = e^{\alpha_{0}H_{0}}f'(a\xi); \\ H_{0} &= H/a; \ \alpha_{0} = \alpha a; \ \alpha H = \alpha_{0}H_{0}; \ \mu_{0} = \sqrt{\alpha_{0}^{2} + 4\omega^{2}}, \end{aligned}$$

где a – некоторый линейный размер, например  $a = a_1$ , если  $a_1 \neq 0$ , и в интеграле Фурье функции M(x) из (7) выделим ее главную сингулярную часть. В результате простых преобразований придем к определяющему СИУ рассматриваемой задачи

$$\frac{1}{\pi} \int_{L} \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\pi \alpha_{0}}{4} \operatorname{sign}(\eta - \xi) + M_{0}(\eta - \xi) \right] \tau_{0}(\eta) = f_{0}(\xi) \quad (\xi \in L), \quad (8)$$
$$M_{0}(\xi) = \int_{0}^{\infty} G(\omega) \sin(\omega\xi) d\xi ;$$
$$G(\omega) = \frac{(\alpha_{0} + 2\omega) \left[ 2\omega th(\mu_{0}H_{0}/2) - \mu_{0} \right] + \alpha_{0}^{2} th(\mu_{0}H_{0}/2)}{2\omega \left[ \mu_{0} - \alpha_{0} th(\mu_{0}H_{0}/2) \right]},$$
$$G(\omega) \sim -\frac{\alpha_{0}}{2\omega} \quad (\omega \to 0); \quad G(\omega) \sim \frac{\alpha_{0}^{2}}{8\omega^{2}} \quad (\omega \to \infty).$$

При этом условие равновесия k -того стрингера (6) принимает вид

$$\int_{\alpha_{k}}^{\beta_{k}} \tau_{0}(\eta) d\eta = T_{k}^{(0)} \left( T_{k}^{(0)} = T_{k} / aG_{0} ; k = \overline{1, n} \right).$$
(9)

Эти же безразмерные величины введем также в формулы (5)-(6). Будем иметь

$$S_{k}^{(0)}(\xi) = \int_{\alpha_{k}}^{\xi} \left[ \tau_{k}^{(0)}(\eta) - T_{k}^{(0)}(\eta) \right] d\eta + T_{k}^{(1)} \quad \alpha_{k} \leq \xi \leq \beta_{k} \; ; \; k = \overline{1, n} \; ;$$
  

$$T_{k}^{(1)} = \lambda_{k} f_{0}'(\alpha_{k}) \; ; \; T_{k}^{(2)} = \lambda_{k} f_{0}'(\beta_{k}) \; ; \; T_{k}^{(0)}(\xi) = T_{k} (a\xi) / G_{0} \; ;$$
  

$$\lambda_{k} = h_{k} G_{k} / a G_{0} \; ; \; S_{k}^{(0)}(\xi) = S_{k} (a\xi) / a G_{0} \; ; \; T_{k}^{(j)} = S_{k}^{(j)} / a G_{0} \; .$$

Решение определяющего СИУ (8)-(9). Сначала все интервалы  $(\alpha_k, \beta_k)$  преобразуем в стандартный интервал (-1,1), полагая  $\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}; \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} (-1 < t, u < 1; k = \overline{1, n}; \beta_k > \alpha_k).$ 

Обратив эти формулы, имеем

$$t = \frac{2\xi - \beta_k - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} ; u = \frac{2\eta - \beta_k - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} .$$

Пусть  $\xi \in (\alpha_k, \beta_k)$   $(k = \overline{1, n})$  и  $\eta \in (\alpha_m, \beta_m)$   $(m = \overline{1, n})$ . Последовательно преобразуем:  $\beta_m - \alpha_m$  ...

$$1)\frac{d\eta}{\eta-\xi} = \frac{\frac{\beta_m - \alpha_m}{2}du}{\frac{\beta_m - \alpha_m}{2}u + \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} - \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t - \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}} = \frac{du}{u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}t + \frac{\beta_m + \alpha_m - \beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}}.$$

Отсюда, если k = m,  $dn \qquad du$ 

$$\frac{d\eta}{\eta-\xi}=\frac{du}{u-t}\;.$$

2) 
$$sign(\eta - \xi) = sign\left(u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}t + \frac{\beta_m + \alpha_m - \beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}\right);$$
  
3)  $M_0(\eta - \xi) = M_0\left(\frac{\beta_m - \alpha_m}{2}\left(u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}t + \frac{\beta_m + \alpha_m - \beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}\right)\right)$ 

Далее введем обозначения

$$\gamma_{km} = \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} ; \ \delta_{km} = \frac{\beta_m + \alpha_m - \beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} ;$$
$$Q_{km} = M_0 \left( \frac{\beta_m - \alpha_m}{2} \left( u - \gamma_{km} t + \delta_{km} \right) \right) ; \ \tau_m \left( u \right) = \tau_0 \left( \frac{\beta_m - \alpha_m}{2} u + \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right)$$

В результате определяющее СИУ (8) запишется в виде  

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{1}{u-t} + \frac{\pi \alpha_{0}}{4} sign(u-t) + Q_{kk}(t,u) \right] \tau_{k}(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \ (m\neq k)}}^{n} \int_{-1}^{1} L_{km}(t,u) \tau_{m}(u) du = f_{k}(t) \quad (k = \overline{1,n}) \quad (10)$$

$$L_{km}(u) = \frac{1}{u - \gamma_{km}t + \delta_{km}} + \frac{\pi \alpha_{0}}{u} sign(u - \gamma_{km}t + \delta_{km}) + Q_{km}(t,u)$$

$$(k \neq m; -1 < t, u < 1),$$

$$f_{k}(t) = f_{0} \left( \frac{\beta_{k} - \alpha_{k}}{2} t + \frac{\beta_{k} + \alpha_{k}}{2} \right);$$

а условия (9) – в виде

$$\int_{-1}^{1} \tau_k(u) du = \frac{2}{\beta_k - \alpha_k} T_k^{(0)} \quad \left(k = \overline{1, n}\right).$$

$$(11)$$

Положим

$$\tau_k(t) = \frac{\Omega_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad \left(-1 < t < 1 ; k = \overline{1, n}\right) ,$$

где  $\Omega_k(t)$  – гельдеровские функции на отрезке  $-1 \le t \le 1$ . Тогда по известной процедуре [11, 12] СИУ (10)-(11) сведем к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений (ССЛАУ):

$$\begin{split} \sum_{p=1}^{N} R_{rp}^{(km)} X_{p}^{(m)} &= c_{r}^{(k)} \left(r = \overline{1, N} ; k = \overline{1, n} ; m = \overline{1, n}\right) & (12) \\ R_{rp}^{(km)} &= \begin{cases} M_{rp}^{(km)} \left(p = \overline{1, N} ; r = \overline{1, N-1} ; k, m = \overline{1, n}\right); \\ \frac{\pi}{N} & p = \overline{1, N}; \left(r = N ; k, m = \overline{1, n}\right); \\ c_{r}^{(k)} &= \begin{cases} a_{r}^{(k)} \left(r = \overline{1, N-1} ; k = \overline{1, n}\right); \\ \frac{2}{\beta_{k} - \alpha_{k}} & T_{k}^{(0)} \left(r = N; k = \overline{1, n}\right); \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} L_{km}(t_{r}, u_{p}) X_{m}^{(p)} & (m \neq k); \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} L_{km}(t_{r}, u_{p}) X_{m}^{(p)} & (m \neq k); \\ a_{r}^{(k)} &= f_{k}(t_{r}) \left(r = \overline{1, N-1}\right); X_{p}^{(m)} = \Omega_{m}(u_{p}); \\ u_{p} &= \cos\left(\frac{(2p-1)\pi}{2N}\right) \left(p = \overline{1, N}\right); t_{r} = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) \left(r = \overline{1, N-1}\right). \end{split}$$

Здесь N – любое натуральное число, а  $u_p$  и  $t_r$  – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого  $T_N(u)$  и второго  $U_{N-1}(t)$  рода соответственно.

Таким образом, исходное определяющее СИУ (8)-(9) или (10)-(11) относительно  $\tau_k(t)$  нескольких интервалов свелось к решению ССЛАУ (12).

*Частные случаи.* Рассмотрим два частных случая, когда ССЛАУ принимает более простой вид.

Пусть I.  $n = 1, a_1 = -a, b_1 = a \ (a > 0)$ . В этом случае  $\alpha_1 = -1, \beta_1 = 1; L_0 = [-1,1]$  и, следовательно, СИУ (8) принимает вид  $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\pi \alpha_0}{4} sign(\eta - \xi) + M_0(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta = f_0(\xi) \ (-1 < \xi < 1),$  (13)

а условие (9) – вид

$$\int_{-1}^{1} \tau_0(\eta) d\eta = T_1^{(0)} .$$
(14)

Далее, полагая

$$au_{_{0}}(\eta) = rac{\Omega_{_{0}}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^{^{2}}}} \quad \left(-1 < \eta < 1\right),$$

где  $\Omega_0(\eta)$  – опять гельдеровская функция на отрезке [-1,1], как выше, СИУ (13)-(14) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{m=1}^{N} K_{rm} X_m = a_r \quad \left(r = \overline{1, N}\right) \tag{15}$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \frac{\pi \alpha_0}{4} sign(\eta_m - \xi_r) + M_0(\eta_m - \xi_r) \right] & (m = \overline{1, N} ; r = \overline{1, N - 1}) \\ \frac{\pi}{N} & (m = \overline{1, N} ; r = N); \end{cases}$$
$$a_r = \begin{cases} f_0(\xi_r) & (r = \overline{1, N - 1}); & \eta_m = \cos\left(\frac{(2m - 1)}{2N}\right); \\ T_1^{(0)} & (r = N); & \xi_r = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) & (m = \overline{1, N} ; r = 1, N - 1) \end{cases}$$

Отметим, что СЛАУ (15) намного проще ССЛАУ (12).

II. n = 2;  $a_1 = -a$ ,  $b_1 = -b$ ;  $b_2 = a$  (b < a). В этом случае в безразмерных величинах

$$\alpha_1 = -1$$
,  $\beta_1 = -\rho$ ,  $\alpha_2 = \rho$ ,  $\beta_2 = 1$  ( $\rho = b/a$ ,  $0 < \rho < 1$ )

и, следовательно,

$$\beta_{1} - \alpha_{1} = 1 - \rho; \ \beta_{1} + \alpha_{1} = -1 - \rho; \ \beta_{2} - \alpha_{2} = 1 - \rho; \ \beta_{2} + \alpha_{2} = 1 + \rho; \ \gamma_{km} = 1 \ (k, m = 1, 2);$$

$$\delta_{11} = \frac{\beta_1 + \alpha_1 - \beta_1 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} = 0; \quad \delta_{12} = \frac{\beta_2 + \alpha_2 - \beta_1 - \alpha_1}{\beta_2 - \alpha_2} = \frac{2(1+\rho)}{1-\rho};$$
  
$$\delta_{21} = \frac{\beta_1 + \alpha_1 - \beta_2 - \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{2(1+\rho)}{1-\rho}; \quad \delta_{22} = \frac{\beta_2 + \alpha_2 - \beta_2 - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} = 0.$$

В результате в данном случае определяющее СИУ (10) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{1}{u-t} + \frac{\pi\alpha_{0}}{4} sign(u-t) + Q_{kk}(t,u) \right] \tau_{k}(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} L_{km}(t,u) \tau_{m}(u) du = f_{k}(t) \quad (k = 1,2; \ k \neq m);$$

$$L_{km}(t,u) = \frac{1}{u-t+\delta_{km}} + \frac{\pi\alpha_{0}}{4} sign(u-t+\delta_{km}) + Q_{km}(t,u) \quad (m = 1,2; \ k \neq m); \quad (16)$$

$$f_{k}(t) = f_{0} \left( \frac{1-\rho}{2}t + (-1)^{k} \frac{1+\rho}{2} \right) \quad (k = 1,2); \quad Q_{km} = M_{0} \left( \frac{1-\rho}{2}(u-t+\delta_{km}) \right),$$

$$\tau_{k}(u) = \tau_{0} \left( \frac{1-\rho}{2}u + (-1)^{k} \left( \frac{1+\rho}{2} \right) \right) \quad (k = 1,2); \quad (k = 1,2);$$

а условие (11) запишется в виде

$$\int_{-1}^{1} \tau_{k}(u) du = \frac{2}{\beta_{k} - \alpha_{k}} T_{k}^{(0)} \quad (k = 1, 2) \quad .$$
(17)

Далее, опять полагая

$$\tau_m(u) = \frac{\Omega_m(u)}{\sqrt{1-u^2}} \quad (-1 < u < 1) ,$$

СИУ (16)-(17) сведем к ССЛАУ:  

$$\sum_{p=1}^{N} K_{rp}^{(km)} X_{p}^{(m)} = c_{r}^{(k)} \quad (k, m = 1, 2)$$

$$K_{rp}^{(km)} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{u_{p} - t_{r}} + \frac{\pi \alpha_{0}}{4} sign(u_{p} - t_{r}) + Q_{kk}(t_{r}, u_{p}) \right] \quad (p = \overline{1, N}; r = \overline{1, N - 1}; m = k); \\ \frac{1}{N} L_{km}(t_{r}, u_{p}) \quad (p = \overline{1, N}; r = \overline{1, N - 1}; m \neq k); \\ \frac{\pi}{N} \quad p = \overline{1, N}; r = N; (k, m = 1, 2); \end{cases}$$

$$c_{r}^{(k)} = \begin{cases} a_{r}^{(k)} \quad (r = \overline{1, N - 1}; k = 1, 2); \quad X_{p}^{(m)} = \Omega_{m}^{(u_{p})}; \\ \frac{2}{\beta_{k} - \alpha_{k}} T_{k}^{(0)}; \quad a_{r}^{(k)} = f_{k}(t_{r}) \quad (r = \overline{1, N - 1}). \end{cases}$$

В обсуждаемом случае вычислим коэффициент концентрации (КК) касательных контактных напряжений в ближних концах стрингеров:

$$\begin{split} K_{b} &= \lim_{x \to b+0} \left[ \sqrt{x-b} \,\tau\left(x\right) \right] = \lim_{\xi \to \rho+0} \left[ \sqrt{a\xi-b} \,\frac{\tau\left(a\xi\right)}{G_{0}} \right] G_{0} = \\ &= G_{0} \sqrt{a} \lim_{\xi \to \rho+0} \left[ \sqrt{\xi-\rho} \,\tau_{0}\left(\xi\right) \right] = G_{0} \sqrt{a} \lim_{t \to -1+0} \left[ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}t + \frac{1+\rho}{2}} - \rho \,\tau_{0}\left(\xi\right) \right] = \\ &= G_{0} \sqrt{a} \lim_{t \to -1+0} \left[ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}\left(t+1\right)} \,\tau_{0}\left(\frac{1-\rho}{2}t + \frac{1+\rho}{2}\right) \right] = G_{0} \sqrt{a} \,\frac{1-\rho}{2} \lim_{t \to -1+0} \left[ \sqrt{1+t} \,\tau_{2}\left(t\right) \right] = \\ &= G_{0} \sqrt{a} \,\frac{1-\rho}{2} \lim_{t \to -1+0} \left[ \sqrt{1+t} \,\frac{\Omega_{2}\left(t\right)}{\sqrt{1-t^{2}}} \right] = \frac{G_{0} \sqrt{a}}{2} \sqrt{1-\rho} \,\Omega_{2}\left(-1\right) \,\cdot \end{split}$$

Отсюда для безразмерного КК

 $K_0 = \sqrt{1-\rho} \ \Omega_2(-1); \quad K_0 = 2K_b / G_0 \sqrt{a}$ 

или, воспользовавшись интерполяционным многочленом Лагранжа [15], окончательно получим

$$K_{0} = \frac{\sqrt{1-\rho}}{N} \sum_{p=1}^{N} \left(-1\right)^{p+N} tg\left(\frac{(2p-1)\pi}{4N}\right) X_{p}^{(2)} \cdot$$

Отметим, что в другом частном случае, когда полоса заменяется полуплоскостью, основные расчетные формулы для характеристик задачи еще более упрощаются.

Заключение. Обе постановки задач контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами взаимосвязаны и имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты исследования таких задач в обычной постановке, когда заданы действующие на стрингеры и упругие основания силовые факторы и требуется определить контактные напряжения под стрингерами и осевые напряжения в их сечениях, представляют интерес для изучения закономерностей изменения прочностных характеристик конструкций типа стрингеры – упругие основания. А в модифицированной постановке таких задач, когда заранее задаются упругие перемещения точек стрингеров и требуется определить действующие на них силовые факторы, обеспечивающие заданный режим перемещений, полученные результаты представляют интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры – упругие основания.

Национальный университет архитектуры и строительства Армении e-mail: siranushav@gmail.com

# С. А. Аветисян

#### О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой

В модифицированной постановке рассматривается задача о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой полосой (слоем), когда модуль сдвига по ее глубине изменяется по экспоненциальному закону, при антиплоской деформации. Решение задачи относительно неизвестных контактных касательных напряжений под стрингерами сведено к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром, представимым суммой ядра Коши и регулярного ядра, которое в свою очередь известным численно-аналитическим методом, основанным на квадратурных формулах Гаусса для вычисления интегралов, сведено к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. В модифицированной постановке задачи о контакте стрингеров с массивными упругими телами представляют теоретический и практический интерес для ислледований жесткости систем стрингеры – упругие основания.

#### Ս. Ա. Ավետիսյան

## Ստրինգերների համագիծ համակարգի և էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ ջերտի կոնտակտային փոխազդեցության մասին

Ստրինգերների համագիծ համակարգի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը հկահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, երբ շերտի սահքի մոդուլը ըստ խորության փոփոխվում է ըստ էքսպոնենցիալ օրենքի, դիտարկվում է մոդիֆիկացված դրվածքով։ Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման, որի կորիզը ներկայացվում է Կոշիի կորիզի և ռեգուլյար կորիզի գումարի տեսքով։ Որոշիչ ինտեգրալ հավասարման լուծումն իր հերթին հայտնի թվային վերլուծական մեթոդով՝ հիմնված ինտեգրալների հաշվման Գաուսի քառակուսացման բանաձների վրա, բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի լուծման։ Ստրինգերների և առաձգական հոծ մարմինների կոնտակտային խնդիրների մոդիֆիկացված դրվածքը տեսականորեն և գործնականորեն հետաքրքիր է ստրինգերներ – առաձգական հիմքեր համակարգերի կարծրության ուսումնասիրությունների համար։

#### S. A. Avetisyan

## On Contact Interaction of Collinear System of Stringers with Elastic Inhomogeneous by Exponential Law Strip

The problem on contact interaction between the collinear system of stringers with elastic strip (layer), when the shear module by its depth changes by exponential law with anti-plane deformation is considered. The problem solutions are brought to the solution SIE with kernel, represented by Cauchy kernel sum and regular kernel. The solution of the determining SIE in its turn well known by numerical-analytical method,

based on quadratic Gauss formulae for the integrals calculation, is brought to the solution of final SLAE. In modified setting, the problems on the contact of the stringers with massive elastic bodies have theoretical and practical interest in the investigations on the questions of rigidity systems of stringers – elastic bases.

#### Литература

- 1. Melan E. Ing. Arch. 3, 1932. № 2. P. 123–129.
- 2. Koiter W. J. T. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. № 2. P. 164-178.
- 3. *Muki R., Sternberg E.* J. of Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E. 1967. № 3. P. 233-242.
- 4. Bufler H. Ing. Arch. 1964. № 3-4. P. 284–292.
- 5. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
- 6. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М. Наука. 1983. 296 с.
- 7. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. Машиностроение. 1980. 415 с
- 8. *Акопян В. Н.* Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Гитутюн. 2014. 322 с.
- 9. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
- 10. Mkhitaryan S. M., Kanetsyan E. G., Mkrtchyan M. S. In: Construction Technologies and Architecture. V. 2. P. 19-30.
- 11. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Leyden. Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368–425.
- 12. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Quart. Appl Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173–185.
- 13. Аветисян С. А. В кн.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Тр. IV междунар. конф., 21-26 сент. 2015, Цахкадзор, Армения. Ереван. 2015. С. 15-19.
- 14. *Мхитарян С. М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1993. С. 129–143.
- 15. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976, 443 с.

Zuunnp Том 122 Volume

2022

<u>№</u> 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

#### УДК 539.3 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-153

# В. Т. Япуджян

# О вынужденных колебаниях анизотропной полосы с учетом кулонова трения

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 10/IV 2022)

**Ключевые слова:** плоская деформация, упругая симметрия, кулоново трение, вынужденные колебания.

Введение. При решении статических и динамических задач теории упругости для тонких тел успешно используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Метод оказался особенно эффективным для решения смешанных краевых задач тонких тел. Установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения [1]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [2], где приведены решения отдельных классов статических и динамических задач. В данной работе получено решение задачи о вынужденных колебаниях анизотропной полосы, которая обладает общей анизотропией в своей плоскости.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются вынужденные колебания находящейся в условиях плоской деформации анизотропной полосы  $D = \{(x, y) : 0 \le x \le l, -h \le y \le h, h << l\}$  (рис. 1).



Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке и верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое изменяется во времени гармонически. Учитывается кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием. Требуется найти решение уравнений движения плоской деформации анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$
 (1)

При соотношениях упругости [3, 4]:

$$\varepsilon_{xx} = \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy} + \beta_{16}\sigma_{xy}; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\varepsilon_{yy} = \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy} + \beta_{26}\sigma_{xy}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\varepsilon_{xy} = \beta_{16}\sigma_{xx} + \beta_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
(2)

где  $\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}};$  *i*, *j* = 1,2,6,  $a_{ij}$  – постоянные упругости, и при

граничных условиях:

$$v(y = h) = -V^{+}(x) \exp(i\Omega t); \quad \sigma_{xy}(y = h) = 0;$$
  

$$v(y = -h) = 0; \quad \sigma_{xy}(y = -h) = f \sigma_{yy}(y = -h).$$
(3)

Граничные условия при x = 0, l не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, что можно рассматривать отдельно [2].

Асимптотическое решение задачи будем искать в виде

$$\sigma_{xx}(x, y, t) = \sigma_{11}(x, y) \exp(i\Omega t); \quad (x, y: 1, 2);$$
  

$$\sigma_{xy}(x, y, t) = \sigma_{12}(x, y) \exp(i\Omega t);$$
  

$$u(x, y, t) = u_x(x, y) \exp(i\Omega t); \quad v(x, y, t) = u_y(x, y) \exp(i\Omega t).$$
(4)

Подставив (4) в уравнения (1) и (2) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям:  $x = l\xi$ ;  $y = h\zeta$ ;  $U = \frac{u_x}{l}$ ;  $V = \frac{u_y}{l}$ , получим систему

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U = 0, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2, \quad \varepsilon = \frac{h}{l};$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \beta_{11} \sigma_{11} + \beta_{12} \sigma_{22} + \beta_{16} \sigma_{12}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{11} + \beta_{22} \sigma_{22} + \beta_{26} \sigma_{12};$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \beta_{16} \sigma_{11} + \beta_{26} \sigma_{22} + \beta_{66} \sigma_{12}.$$
(5)

Решение сингулярно возмущенной системы (5) складывается из решений внешней задачи  $(I^{out})$  и пограничного слоя  $(I^b)$  (в русскоязычных публикациях вместо  $(I^{out})$  принимается  $(I^{int})$ , т.е. подчеркивается, что решение справедливо во внутренней области полосы)

$$I = I^{out} + I_b. ag{6}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде [2]

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i + s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N},$$
<sup>(7)</sup>

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, q_i = 0$  для U, V,  $s = \overline{0, N}$  означает, что в (7) по немому (повторяющемуся) индексу *s* происходит суммирование по целочисленным значениям *s* от нуля до числа приближений *N*. Подставив (7) в систему (5) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты, при  $\varepsilon$  получим новую систему, откуда напряжения можно выразить через перемещения  $U^{(s)}$  и  $V^{(s)}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_1 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_2 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_1^{(s-1)}}{\Delta}; \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_3 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_4 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_2^{(s-1)}}{\Delta}; \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_5 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_3 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_3^{(s-1)}}{\Delta}; \quad \Delta = \beta_{12} \alpha_2 + \beta_{26} \alpha_3 + \beta_{22} \alpha_4; \\ \alpha_1 &= (\beta_{12} \beta_{26} - \beta_{16} \beta_{22}); \quad \alpha_2 = (\beta_{16} \beta_{26} - \beta_{12} \beta_{66}); \quad \alpha_3 = (\beta_{12} \beta_{16} - \beta_{11} \beta_{26}); \\ \alpha_4 &= (\beta_{11} \beta_{66} - \beta_{16}^2); \quad \alpha_5 = (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2); \\ \gamma_1^{(s-1)} &= (\beta_{22} \beta_{66} - \beta_{26}^2) \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_1 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}; \quad \gamma_2^{(s-1)} = \alpha_2 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_3 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}; \\ \gamma_3^{(s-1)} &= \alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

а для определения  $U^{(s)}, V^{(s)}$  получим уравнения:

$$\alpha_{5} \frac{\partial^{2} U^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \alpha_{3} \frac{\partial^{2} V^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \Omega_{*}^{2} \Delta U^{(s)} = \gamma_{11}^{(s-1)}; \quad \gamma_{11}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_{3}^{(s-1)}}{\partial \zeta};$$
  
$$\alpha_{3} \frac{\partial^{2} U^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \alpha_{4} \frac{\partial^{2} V^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \Omega_{*}^{2} \Delta V^{(s)} = \gamma_{22}^{(s-1)}; \quad \gamma_{22}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_{2}^{(s-1)}}{\partial \zeta}.$$
 (9)

Для ортотропной полосы, учитывая, что  $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$ , имеем  $\alpha_3 = 0$ . В результате уравнения для  $U^{(s)}$  и  $V^{(s)}$  разделяются и им соответствуют сдвиговые и продольные колебания, которые при s = 0 независимы. В случае общей анизотропии, как следует из (9), такого разделения нет. Из системы (9) после некоторых преобразований  $V^{(s)}$  можно выразить через  $U^{(s)}$  по формуле

$$V^{(s)} = \frac{b}{\alpha_{3}a} \frac{\partial^{2} U^{(s)}}{\partial \zeta^{2}} + \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{3}} U^{(s)} + \frac{1}{a} \gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{3}a} \gamma_{11}^{(s-1)};$$

$$a = \Omega_{*}^{2} \Delta; \quad b = (\alpha_{4}\alpha_{5} - \alpha_{3}^{2}),$$
(10)

а для определения U<sup>(s)</sup> получим уравнение

$$\frac{\partial^{4}U^{(s)}}{\partial\zeta^{4}} + \frac{ac}{b}\frac{\partial^{2}U^{(s)}}{\partial\zeta^{2}} + \frac{a^{2}}{b}U^{(s)} = \gamma^{(s-1)};$$

$$c = (\alpha_{4} + \alpha_{5}); \quad \gamma^{(s-1)} = \frac{(\alpha_{4} - \alpha_{3})}{b}\frac{\partial^{2}\gamma_{11}^{(s-1)}}{\partial\zeta^{2}} + \frac{a}{b}\gamma_{11}^{(s-1)}.$$
(11)

Решением уравнения (11) будет

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(\xi, \zeta) + U_u^{(s-1)}(\xi, \zeta), \tag{12}$$

где  $U_0^{(s)}$  – решение однородного, а  $U_u^{(s-1)}$  – частное решение неоднородного уравнения (11).

Согласно формулам (8), (10), (11) a > 0, c > 0, и при b > 0 имеем a)  $U_0^{(s)} = D_{11}^{(s)}(\xi) \cos \delta_1 \zeta + D_{21}^{(s)}(\xi) \sin \delta_1 \zeta + D_{31}^{(s)}(\xi) \cos \delta_2 \zeta + D_{41}^{(s)}(\xi) \sin \delta_2 \zeta$ ;

$$\delta_{1} = \sqrt{\frac{a}{2b} \left( c - \sqrt{c^{2} - 4b} \right)}; \quad \delta_{2} = \sqrt{\frac{a}{2b} \left( c + \sqrt{c^{2} - 4b} \right)}; \quad \delta_{1}, \delta_{2} > 0,$$
(13)

а при 
$$b < 0$$
  
б)  $U_0^{(s)} = D_{12}^{(s)} \cos \delta_1 \zeta + D_{22}^{(s)} \sin \delta_1 \zeta + D_{32}^{(s)} ch \delta_3 \zeta + D_{42}^{(s)} sh \delta_3 \zeta;$   
 $\delta_3 = \sqrt{\frac{a}{2b} \left(-c - \sqrt{c^2 - 4b}\right)}, \quad \delta_3 > 0.$  (14)

Подставив значение U<sup>(s)</sup> в (10), получим:

a) 
$$V^{(s)} = M_{\nu} D_{11}^{(s)} \cos \delta_1 \zeta + M_{\nu} D_{21}^{(s)} \sin \delta_1 \zeta + N_{\nu 1} D_{31}^{(s)} \cos \delta_2 \zeta + N_{\nu 1} D_{41}^{(s)} \sin \delta_2 \zeta + \gamma_{\nu 1}^{(s-1)};$$

$$M_{\nu} = \frac{\alpha_4 a - \delta_1^2 b}{\alpha_3 a}; \quad N_{\nu 1} = \frac{\alpha_4 a - \delta_2^2 b}{\alpha_3 a}; \tag{15}$$

$$\gamma_{\nu 1}^{(s-1)} = \frac{b}{\alpha_{3}a} \frac{\partial^{2} U_{q}^{(s-1)}}{\partial \zeta^{2}} + \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{3}} U_{q}^{(s-1)} + \frac{1}{a} \gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{3}a} \gamma_{11}^{(s-1)},$$
  

$$\delta V^{(s)} = M_{\nu} D_{12}^{(s)} \cos \delta_{1} \zeta + M_{\nu} D_{22}^{(s)} \sin \delta_{1} \zeta + N_{\nu 2} D_{32}^{(s)} ch \delta_{3} \zeta + N_{\nu 2} D_{42}^{(s)} sh \delta_{3} \zeta + \gamma_{\nu 2}^{(s-1)};$$
  

$$N_{\nu 2} = \frac{\alpha_{4}a + \delta_{3}^{2}b}{\alpha_{3}a}.$$
(16)

Подставив значения  $U^{(s)}$ ,  $V^{(s)}$  в формулы (9), определим  $\sigma_{11}^{(s)}$ ,  $\sigma_{22}^{(s)}$ ,  $\sigma_{12}^{(s)}$ . Граничные условия (3) приобретают вид

$$V^{(s)}(\xi,1) = -V^{+(s)}, \quad V^{+(0)} = \frac{V^{+}}{l}, \quad V^{+(s)} = 0, \ s \neq 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,1) = 0; \quad (17)$$
$$V^{(s)}(\xi,-1) = 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,-1) = f \sigma_{22}^{(s)}(\xi,-1).$$

Используя (8), (15) и удовлетворив условиям (17), для случая а) получим систему алгебраических уравнений, решив которую по формуле Крамера, определим неизвестные  $D_{j1}^{(s)}$ :

$$D_{j1}^{(s)} = \frac{\Delta_{j1}^{(s)}}{\Delta_1}; \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} M_{v} \cos \delta_{1} & M_{v} \sin \delta_{1} & N_{v1} \cos \delta_{2} & N_{v1} \sin \delta_{2} \\ M_{3} \sin \delta_{1} & -M_{3} \cos \delta_{1} & N_{31} \sin \delta_{2} & -N_{31} \cos \delta_{2} \\ M_{v} \cos \delta_{1} & -M_{v} \sin \delta_{1} & N_{v1} \cos \delta_{2} & -N_{v1} \sin \delta_{2} \\ M_{f1} \sin \delta_{1} & M_{f1} \cos \delta_{1} & N_{f1} \sin \delta_{2} & N_{f1} \cos \delta_{2} \end{vmatrix}; \quad P_{1}^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(s)} \\ P_{21}^{(s)} \\ P_{41}^{(s)} \end{vmatrix}; \\ M_{f1} = (M_{3} - fM_{2}); \quad N_{f1} = (N_{31} - fN_{21}); \quad P_{11}^{(s)} = (-V^{+(s)} - \gamma_{v1}^{(s-1)})_{(\zeta=1)}, \quad (18) \\ P_{21}^{(s)} = \left( \alpha_{5} \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \alpha_{3} \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{3}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=1)}; \quad P_{31}^{(s)} = -\gamma_{v1}^{(s-1)} - f\gamma_{2}^{(s-1)} \\ P_{41}^{(s)} = -\left( (\alpha_{5} - f\alpha_{3}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{3} - f\alpha_{4}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{3}^{(s-1)} - f\gamma_{2}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{3}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{3} - f\alpha_{4}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{3}^{(s-1)} - f\gamma_{2}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{5}^{(s-1)} - f\gamma_{5}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{5}^{(s-1)} - f\gamma_{5}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{5}^{(s-1)} - f\gamma_{5}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{5}^{(s-1)} - f\gamma_{5}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_{5}^{(s-1)} - f\gamma_{5}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)}, \quad (18) \\ P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_{5} - f\alpha_{5}) \frac{\partial U_{u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_{5} - f\alpha_{5})$$

где  $\Delta_{j1}^{(s)}$  получается от  $\Delta_1$  заменой j-того столбца столбцом  $P_1^{(s)}$  из свободных членов. Таким же образом определяются  $D_{j2}^{(s)}$  для случая б).

После определения  $D_{j1}^{(s)}, D_{j2}^{(s)}$  по формулам (8), (13)-(16) определятся все компоненты вектора перемещения и тензора напряжений.

О математически точном решении во внешней задаче. Если функция  $V^+(\xi)$  является многочленом, итерация обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче. Для иллюстрации: пусть  $V^+(\xi) = l(a_1 + a_2\xi)$ .

Согласно формулам (8), (12), (13), (15), (18) имеем: а) при *s* = 0

$$D_{j1}^{(0)} = \frac{\Delta_{j1}^{(0)}}{\Delta_{1}}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad P_{1}^{(0)} = \begin{vmatrix} -(a_{1} + a_{2}\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$
(19)  
$$\Delta_{11}^{(0)} = -(a_{1} + a_{2}\xi)M_{1}^{1}; \quad \Delta_{21}^{(0)} = (a_{1} + a_{2}\xi)M_{2}^{1}; \Delta_{31}^{(0)} = -(a_{1} + a_{2}\xi)M_{3}^{1}; \quad \Delta_{41}^{(0)} = (a_{1} + a_{2}\xi)M_{4}^{1},$$

 $\Delta_{31}^{\vee} = -(a_1 + a_2\zeta) M_3^{\vee}; \quad \Delta_{41}^{\vee} = (a_1 + a_2\zeta) M_4^{\vee},$ где  $M_i^j$  является минором элемента, стоящего на пересечении i-того столбца и j-той строки определителя  $\Delta_1$ .

Для неизвестных  $D_{j1}^{(0)}$ , входящих в  $U_0^{(0)}$ , имеем

$$D_{11}^{(0)} = -\frac{\left(a_{1} + a_{2}\xi\right)}{\Delta_{1}}M_{1}^{1}; \quad D_{21}^{(0)} = \frac{\left(a_{1} + a_{2}\xi\right)}{\Delta_{1}}M_{2}^{1};$$
$$D_{31}^{(0)} = -\frac{\left(a_{1} + a_{2}\xi\right)}{\Delta_{1}}M_{3}^{1}; \quad D_{41}^{(0)} = \frac{\left(a_{1} + a_{2}\xi\right)}{\Delta_{1}}M_{4}^{1}, \tag{20}$$

при s=1  $U^{(1)} = U^{(1)}_0 + U^{(0)}_u$ .

Из формул (18) согласно (13) имеем

$$U_{0}^{(1)} = D_{11}^{(1)}(\xi) \cos \delta_{1}\zeta + D_{21}^{(1)}(\xi) \sin \delta_{1}\zeta + D_{31}^{(1)}(\xi) \cos \delta_{2}\zeta + D_{41}^{(1)}(\xi) \sin \delta_{2}\zeta;$$

$$D_{j1}^{(1)} = \frac{\Delta_{j1}^{(1)}}{\Delta_{1}}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad P_{1}^{(1)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} \\ P_{41}^{(1)} \end{vmatrix}; \quad P_{11}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} = -\gamma_{\nu 1}^{(0)}{}_{(\zeta=1)};;$$
$$P_{21}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} = \left(\alpha_{5} \frac{\partial U_{q}^{(0)}}{\partial \zeta} + \alpha_{3} \frac{\partial \gamma_{\nu 1}^{(0)}}{\partial \zeta} + \gamma_{3}^{(0)} \right)_{(\zeta=1)}; \quad P_{31}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} = -\gamma_{\nu 1}^{(0)}{}_{(\zeta=-1)};$$

$$P_{41}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} = -\left[ \left( \alpha_{5} - f \alpha_{3} \right) \frac{\partial U_{q}^{(0)}}{\partial \zeta} + \left( \alpha_{3} - f \alpha_{4} \right) \frac{\partial \gamma_{\nu 1}^{(0)}}{\partial \zeta} + \gamma_{3}^{(0)} - f \gamma_{2}^{(0)} \right]_{(\zeta=-1)}; \quad (21)$$

$$\Delta_{11}^{(1)} = P_{11}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{1}^{1} - P_{21}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{1}^{2} + P_{31}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{1}^{3} - P_{41}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{1}^{4}; \\ \Delta_{21}^{(1)} = P_{11}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{2}^{1} - P_{21}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{2}^{2} + P_{31}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{2}^{3} - P_{41}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{2}^{4}; \\ \Delta_{31}^{(1)} = P_{11}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{3}^{1} - P_{21}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{3}^{2} + P_{31}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{3}^{3} - P_{41}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{3}^{4}; \\ \Delta_{41}^{(1)} = P_{11}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{4}^{1} - P_{21}^{(1)}{}_{(\zeta=1)} M_{4}^{2} + P_{31}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{4}^{3} - P_{41}^{(1)}{}_{(\zeta=-1)} M_{4}^{4}. \\ U_{q}^{(0)} = B_{1} \cos \delta_{1} \zeta + B_{2} \sin \delta_{1} \zeta + B_{3} \cos \delta_{2} \zeta + B_{4} \sin \delta_{2} \zeta, \quad (22)$$

где  $B_j$  несложно вычислить, подставив (22) в (11) и приравняв соответствующие коэффициенты при  $\cos \delta_i$ ,  $\sin \delta_j$ .

Окончательно имеем

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$u_x = l \left( U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} \right); \quad u_y = l \left( V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)} \right).$$
(23)

Аналогичным образом можно записать математически точное решение для случая б).

Заключение. Найдено асимптотическое решение внешней задачи анизотропной полосы при наличии общей анизотропии в своей плоскости. Полоса опирается на абсолютно жесткое основание, и верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое во времени изменяется гармонически. Показано, что колебания не являются чисто сдвиговыми или продольными.

Институт механики НАН РА e-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

#### В. Т. Япуджян

## О вынужденных колебаниях анизотропной полосы с учетом кулонова трения

Рассмотрена динамическая смешанная краевая задача анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. Учитывается кулоново трение между полосой и жестким основанием. Верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое во времени изменяется гармонически. Определено асимптотическое решение внешней задачи. Показано, что колебания не распадаются на сдвиговые и продольные.

# Վ. Տ. Յափուջյան

## Կուլոնյան շփման հաշվառումով անիզոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումների մասին

Դիտարկված է առաձգական համաչափության հարթություն ունեցող անիզոտրոպ մարմնի դինամիկական խառը եզրային խնդիրը։ Հաշվի է առնված կուլոնյան շփումը շերտի և կոշտ հենարանի միջև, շերտի վերին նիստին հաղորդված է բնականոն տեղափոխություն, որը, ըստ ժամանակի, փոփոխվում է հարմոնիկ։ Որոշված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը։ Ցույց է տրված, որ տատանումները չեն տրոհվում սահքայինի և երկայնականի։

## V. T. Yapujyan

## About the Forced Oscillations of the Anisotropic Layer Considering Coulomb Friction

The dynamic mixed boundary problem of anisotropic body with a plane of elastic symmetry is considered. Coulomb friction between the strip and the rigid base is taken into account, normal displacement is transmitted to the upper edge of the strip which changes harmonically in time. The asymptotic solution of the external problem is determined. It is shown that the vibrations are not disintegrated into shear and longitudinal vibrations.

#### Литература

- 1. *Агаловян Л. А.* В кн.: Механика. Межвуз. сб. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С. 7-12.
- 2. Aghalovyan L. A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore – London. World Scientific. 2015. 376 р. (Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.)
- 3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. 1977. М. Наука. 416 с.
- 4. Агаловян Л. А Доклады НАН РА. 2021. Т. 121. №. 1. С. 54-60.

<sup>Հшилпр</sup> Том 122 Volume

2022

<u>№</u> 2

**MOLECULAR BIOLOGY** 

УДК 577 DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-161

### A. T. Manukyan

# The Activation of DNA Repair Pathways after Ultra-Short Pulsed Electron Beam Irradiation in Human Cells

(Submitted by corresponding member of NAS RA R. M. Aroutiounian 2/V 2022)

**Keywords:** *irradiation; accelerators; ultrashort pulsed electron beam; DNA repair; K-562 cell line.* 

**Introduction.** A new generation of accelerators is actively developing in contemporary radiotherapy. Laser-generated accelerators produce ultra-short electron beam pulses, which provide a unique opportunity to generate new molecular genetics effects [1-3]. Due to the high-frequency laser source, the AREAL (Advanced Research Electron Accelerator Laboratory, Armenia) accelerator gives ultra-short and high-speed electron flux producing ultra-short pulsed electron beam (USPEB) radiation [4]. The study of the genetic effects of laser-generated USPEB radiation is the relevant direction in radiobiology.

It was shown that USPEB radiation-induced DNA DSBs are characterized by slow elimination kinetics. The low level of micronuclei frequency and apoptosis was evident in human lung fibroblasts irradiated by USPEB [5]. An assessment of the dependence of the radiation effect on sex showed that females PBMCs had higher sensitivity to irradiation, as the DNA damage level was 4 times higher compared to the control, while in males the increase was less than 1.5 times [6]. Ionizing radiation (IR) mainly induces single-strand breaks (SSBs), double-strand breaks (DSBs), modified bases, mismatches, and basic sites [7]. The DNA repair can have alternative mechanisms. The homologous recombinational repair (HRR) works by exchanging similar but non-identical DNA between homologous chromosomes. Non-homologous end joining (NHEJ) works by inserting or deleting genes from a broken site, besides it is faster, but also is an error-prone mechanism [8]. DNA-dependent protein kinase (DNA-PKcs) is one of the significant components of the NHEJ repair pathway, and is a catalytic subunit of DNA-PKcs promoting synapsis of broken DNA ends, with further stages of end-processing and ligation [9]. On the contrary, the HR repair pathway is slower but with fewer errors in repaired strands. The

MRE11 nuclease plays a crucial role in the HR repair pathway, initiating double-strand breaks (DSB) resection [10]. On the other hand, the accumulation of single-strand breaks (SSBs) also brings to DSBs formation, and the main repair pathway of SSBs is Base Excision Repair (BER). The APEX endonuclease is a DNA repair enzyme with apurinic/apyrimidinic (AP) activity in the DNA BER pathway [11].

This study aimed to evaluate the USPEB irradiation-induced DNA DSBs and SSBs repair mechanisms in human K-562 (chronic myelogenous leukemia) cells.

**Materials and Methods.** *Cell culture.* The K-562 (human chronic myeloid leukemia) cell line was maintained in RPMI-1640 (Sigma Aldrich, Germany), supplemented with 10% Fetal Bovine Serum (HyClone, UK), 2 mM L-gluta-mine (Sigma Aldrich, Germany), 100 IU/ml penicillin (Sigma Aldrich, Germany) and 100  $\mu$ g/ml streptomycin (Sigma Aldrich, Germany) at 37°C, 5%CO<sub>2</sub>. Prior to irradiation, 2 ml of cells seeded in Eppendorf tubes (Sigma Aldrich, Germany) at a density of  $0.5 \times 10^5$  cells/ml.

*Irradiation.* Radiation treatment was carried out using an electron beam generated by a laser-driven radiofrequency gun-based linear AREAL accelerator. For cell irradiation, each sample was placed in a sample holder facing towards the horizontal beam coming from the direction of the vacuum window. Cell samples were placed horizontally at the center of a 1 cm  $\times$  1 cm area at 1 cm from the beam exit point of the accelerator. Cells were irradiated with doses of 0.5, 4 and 8Gy, non-irradiated cell cultures were used as a control.

Enzyme-Linked Immunosorbent Assay (ELISA Indirect). The DNA repair pathways activation was analyzed using Colorimetric Cell-Based ELISA kits (Assay Biotech, USA) following the manufacturer instructions. After irradiation, the cells were seeded into 96 well plate and incubated overnight at 370C, 5%CO2. Cells were washed with 200 µl of 1x TBS (Tris-buffered saline) twice, fixed with 100 µl of Fixing Solution, and set for 20 minutes at room temperature. After incubation, 100 µl Quenching Buffer was added and set for 20 minutes at room temperature. After 200 µl of Blocking Buffer was added and incubated for 1 hour at room temperature. Then 50 µl of 1x primary antibodies were added to the corresponding wells and incubated overnight at 4°C. After, added 50  $\mu$ l of 1x secondary antibodies were added to corresponding wells and incubated for 1.5 hours at room temperature. The 50 µl of Ready-To-Use Substrate was added to each well and incubated for 30minutes at room temperature in the dark, and 50 µl of Stop Solution was added to each well and the OD was measured at 450nm using ELISA plate reader HumaReader HS (Human, Germany).

**Statistical analysis.** Statistical analyses of the data were conducted using the Statistica 8.0 software (StatSoft, Tulsa, OK, USA). The results are presented as the means of three independent experiments  $\pm$  standard error. The non-parametric Mann–Whitney test was used for statistical analysis and P<0.05 was considered to indicate a statistically significant value.

Results and discussion. The activation kinetics of DNA DSBs and SSBs

repair pathways after ultrashort pulsed electron beam irradiation was studied in the K562 cell line. Radiation doses were considered as non-lethal at the dose of 0.5Gy (cell survival after 24h was 90%), sub-lethal at the dose of 4Gy (cell survival after 24h was 50%), and lethal at the dose of 8Gy (cell survival after 24h was 10-20%). The DNA repair kinetics of irradiated samples was assessed at 0h, 30min, 1h, and 4h time points after irradiation. The activation of HR, NHEJ and BER DNA repair pathways was detected. The 0h time-point was selected to assess the primary or background DNA damage reparation machinery activation.

In case of irradiation at the non-lethal dose (0.5Gy) the level of repair proteins DNA-PK, MRE11, and APEX1, responsible for appropriate repair pathways, was estimated immediately after irradiation (at the 0h time point), and the expression of MRE11 was more pronounced (Fig. 1). At the 30min time point after irradiation the level of DNA-PK and MRE11 proteins increased significantly, while the level of BER protein remained unchanged. At the 1h and 4h time point after irradiation the increase of the BER protein expression was observed, while the level of DNA-PK and MRE11 proteins decreased and eventually all proteins reached the same level at the 4h time point.

In the case of irradiation at the sub-lethal dose (4Gy), the level of DNA-PK, MRE11, and APEX1 proteins was assessed at the 0h time point where the expression DNA-PK was more enunciated (Fig. 2). At the 30min time point after irradiation, the level of DNA-PK and MRE11 proteins increased noticeably, while the level of APEX1 protein reduced. At the 1h time point after irradiation, the levels of proteins were nearly the same as in 30min. At the 4h time point after irradiation, all 3 protein expressions were increased, and the DNA-PK, MRE11, and APEX1 proteins reached the peck level.

After the irradiation at the lethal dose (8Gy), the level of repair proteins DNA-PK, MRE11, and APEX1, at the 0h time point was the same (Fig. 3). At the 30min time point after irradiation, the level of DNA-PK, MRE11, and APEX1 proteins increased, reaching a peak level. At the 1h and 4h time points after irradiation, the decrease of the expression of the protein was observed, which reduced up to the control level.

It can be assumed, that cancer cells recognize the level of DNA damages (non-lethal, sub-lethal, and lethal) and initiate the different repair pathway machinery. In case of non-lethal level of damages, cancer cells effectively repair DNA DSBs, and the error-prone NHEJ pathway prevails in this case, while SSBs reparation remains postponed. It can be explained by the nature of cancerous cells, which tend to accumulate minor damages to maintain the genome instability. However, at the higher doses of irradiation cancer cells activate the whole pull of repair capacity ensures their viability.

**Conclusion.** It was shown that ultrashort pulsed electron irradiation simultaneously activates HR and NHEJ repair systems in K-562 cells 30 minutes after irradiation, including BER at the 8Gy of irradiation dose. After 1h and 4h of irradiation, the level of expression of repair systems decreases at 0.5Gy and 8Gy doses of radiation, except the activity of BER system, which

remains high at 4h after irradiation at the dose of 0.5Gy. At the irradiation dose of 4Gy, the dynamics of an increase in the activity of all three repair systems was observed up to 4h after irradiation. Thus, the dynamics of changes in repair activity depend on the radiation dose.



Fig. 1. The level of DNA-PK, MRE11, APEX1 repair proteins, after USPEB irradiation at the 0.5Gy dose.\*P<0.05.



Fig. 2. The level of DNA-PK, MRE11, APEX1 repair proteins, after USPEB irradiation at the 4Gy dose. \*P<0.05.



Fig. 3. The level of DNA-PK, MRE11, APEX1 repair proteins, after USPEB irradiation at the 8Gy dose. \*P<0.05.

This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project №21AA-1F034 and №16YR-1F052.

Yerevan State University e-mail: alisa.manukyan1@ysu.am

## A. T. Manukyan

## The Activation of DNA Repair Pathways after Ultra-Short Pulsed Electron Beam Irradiation in Human Cells

The aim of this work was to estimate the differences in activation of DNA repair pathways of DNA double-strand and single-strand breaks induced by ultrashort pulse electron beam irradiation in human K-562 cells. The activation of HR, NHEJ and BER DNA repair pathways was studied at non-lethal, sub-lethal and lethal doses of irradiation. Our results indicate that the activation of the specific repair pathways and repair kinetics depend on the irradiation dose.

### Ա. Թ. Մանուկյան

# Գերկարձ իմպուլսային Էլեկտրոնային ձառագայթմամբ Խթանված ԴՆԹ ռեպարացիոն ուղիների ակտիվացումը մարդու բջիջներում

Գնահատական է տրվել գերկարձ իմպուլսային էլեկտրոնային ձառագայթմամբ մակածված ԴՆԹ-ի միաշղթա և երկշղթա վնասվածքների ռեպարացիոն ուղիների ակտիվացման օրինաչափությանը մարդու K-562 բջիջներում։ Ուսումնասիրվել է ԴՆԹի հոմոլոգիական, ոչ հոմոլոգ ծայրերի միացման և հիմքի էքսցիզիոն ռեպարացիոն ուղիների ակտիվացումը ձառագայթման ոչ լետալ, սուբ-լետալ և լետալ չափաբաժիններով ձառագայթման պայմաններում։ Ըստ ստացված արդյունքների՝ ռեպարացիոն որոշակի ուղու ակտիվացումը և վերականգնման կինետիկան կախված են ձառագայթման չափաբաժնից։

# А. Т. Манукян

### Активация репарационных путей ДНК в клетках человека при ультракоротком импульсном электронном облучении

Дана оценка активации репарационных путей ДНК при двуцепочечных и одноцепочечных разрывах, индуцированных ультракоротким импульсным электронным облучением в К-562 клетках. Исследованы репарационные пути гомологичной рекомбинации, негомологичного соединения концов и эксцизионной репарации оснований при нелетальной, сублетальной и летальной дозах облучения. Показано, что активация специфического пути репарации и кинетика репарации зависят от дозы облучения.

#### References

- 1. Andreassi M., Borghini A., Pulignani S. et al. Radiat. Res. 2016. V. 186. P. 245-253.
- 2. Fuchs T., Szymanowski H., Oelfke U. et al. Phys. Med. Biol. 2009. V. 54. P. 3315-3328.
- 3. Esarey E., Labate L., Schroeder C. et al. SPIE. 2013. V. 8779. P.104-110.
- Tsakanov V., Aroutiounian R., Amatuni G. et al. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A Accel. Spectrometers Detect. Assoc. Equip. 2016. V. 829. P. 248-253.
- Babayan N. Grigoryan B. Khondkaryan L. et al. Int J Mol Sci. V. 2019, Oct. 20(20): 5140.
- 6. Babayan N., Grigoryan B., Hovhannisyan G. et al. International Journal of Radiology & Radiation Therapy. 2018. V. 5. № 2. P. 85-86.
- 7. Zhao L., Bao C., Shang Y. et al. BioMed Res. Int. 2020. P.1–12.
- 8. Ceccaldi R., Rondinelli B., D'Andrea A. Trends Cell Biol. 2016. V. 26. P. 52–64.
- Qian W., Shikang L., Takashi O. et al. Progress in Biophysics and Molecular Biology. 2019. V.147 P.26-32.
- 10. Shimizu N., Akagawa R., Takeda S. et al. Genome Instability & Disease. 2020. V. 1. P. 184–196.
- 11. Scully R., Panday A., Elango R. et al. Nature Reviews Molecular Cell Biology. 2019. V. 20. № 11. P. 698–714.
## Կանոններ հեղինակների համար

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Զեկույցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չհրապարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ։

2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն։ Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով։

3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն լեզվով։ Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ։

4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ <u>mas@sci.am</u>) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ։ Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ)։ Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5։ Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով։

## Правила для авторов

1. "Доклады Национальной академии наук Армении" выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.

2. Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.

3. Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.

4.Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: rnas@sci.am) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

## Сокращенное название журнала ДНАН РА

## **Guidelines** for Authors

1."The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.

2. Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.

3.Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.

4.It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: rnas@sci.am) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

The abbreviated name of the journal is RNAS RA