ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

Հատոր
Том
Volume
121 № 1

2021

Ереван Երևան Yerevan

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ՀԱՏՈՐ 121

№ 1

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2021

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ДОКЛАДЫ
REPORTS

ТОМ 121
VOLUME

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА
ЕРЕВАН 2021

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն` 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:http://elib.sci.am e-mail: rnas@sci.am

Հայաստանի ԳԱԱ Զեկույցներ

Հատոր 121, N 1, 2021

Հրատ. պատվեր N 1082

Խմբագրումը և սրբագրումը՝
Ա.Ալիխյան, Ա. Սահակյան

Համակարգչային էջադրումը՝ Վ. Պապյանի

Ստորագրված է տպագրության
21.03. 2021

<u>Ծավալը՝ 4.75 տպ մամուլ: Տպաքանակը՝ 150: Գինը՝ պայմանագրային:</u>
ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

УДК 510.64
MSC2010: 03B45; 03B60; 03F65

H. R. Bolibekyan, A. R. Baghdasaryan

On the Minimal Fragment of S5 Modal Logic

(Submitted by academician Yu. H. Shoukourian 20/XII 2020)

Keywords: *modal logic, minimal logic.*

1. Introduction. In the theory of automated theorem proving systems of constructive logic are of a special interest due to an ability to extract rigorous information from the constructed proof. Minimal logic being part of intuitionistic logic attracts a special interest of a research community. In this paper we construct new propositional systems for minimal fragment of modal logics by introducing modality rules. Intuitionistic modal logics originate from different sources and have different areas of application. They include philosophy (see, e.g., [1]), foundation of mathematics [2], and computer science [3]. One of the considered systems is based on the sequential system of minimal logic introduced earlier in [4]. Two kinds of logical symbols are added to GM : $\Box$ (necessary) and $\Diamond$(possible). Using them the notion of formula is extended as follows: if α is a formula, then $\Box\alpha$ and $\Diamond\alpha$ are also formulas.

New modality rules are:

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \Diamond\alpha}(\to \Diamond) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \perp}{\Diamond\alpha, \Gamma \to \perp}(\Diamond \to)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \perp}{\Box\alpha, \Gamma \to \perp}(\Box \to) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \Box\alpha}(\to \Box)$$

In these rules Γ is a set of formulae as in GM [7]. $\Box\Gamma$ ($\Diamond\Gamma$) means the series of formulae, which is formed by prefixing $\Box$ ($\Diamond$) in front of each formulae of Γ. As a result, a sequential calculus based on GM is constructed, which we call $S5^*_{Min}$.

It is obvious that $\Diamond$ and $\Box$ rules are symmetric in this system. As $\Diamond\alpha$ is $\neg\Box\neg\alpha$ it can be easily verified that the rules of $\Box$ can be derived from the corresponding rules of $\Diamond$ and vice versa.

2. Minimal fragment of S5 modal logic. In this section using notions and concepts from [5-8] the definition of the minimal fragment of the S5 modal logic (further in the text it is denoted as $S5_{Min}$) will be provided.

1. Signs:
   1.1. The constants $\neg$, & ,$\vee$, $\supset$ and $\leftrightarrow$ of propositional logic.
   1.2. The constants $\Box$ and $\Diamond$ of modal logic.
   1.3. Sentence-variables , $b, c, \ldots$.
2. Rules of Formation:
   2.1. A sentence-variable is a formula.
   2.2. A formula preceded by $\neg$, by $\Box$ or by $\Diamond$ is a formula.
   2.3. Two formulae joined by & ,$\vee$, $\supset$ or $\leftrightarrow$ constitute a formula.
3. Axioms:
   3.1. A set of axioms for minimal fragment of propositional logic.
   3.2. $\alpha \supset \Diamond\alpha$ (The axiom of Possibility).
   3.3. $\Diamond(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$ (The axiom of Distribution).
   3.4. $\Diamond\neg\Diamond\alpha \supset \neg\Diamond\alpha$ (The axiom of Reduction).
4. Definition of "necessary":
   The constant $\Box$ we introduce by the definition $\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$.
5. Rules of Transformation:
   5.1. The rules of transformation of minimal fragment of propositional logic.
   5.2. If $f_1 \leftrightarrow f_2$ is provable, then $\Diamond f_1 \leftrightarrow \Diamond f_2$ is also provable. (The rule of Extentionality)
   5.3. If f is provable, then $\Box f$ is also provable. (The rule of Tautology)

Equivalence of the modal systems. In this section we prove the equivalence of the above formulated systems. We follow the notion of systems equivalence as in [7]. The proof of equivalence between $S5_{Min}$ and $S5^*_{Min}$ will be divided into two parts. The first part will show that the axioms and the rules of $S5_{Min}$ system can be derived directly from the axioms and rules of $S5^*_{Min}$ system, while the second one will show that the axioms and rules of $S5^*_{Min}$ system can be derived from axioms and rules of $S5_{Min}$.

Theorem 3.1. *If a sequence $\rightarrow \alpha$ is deducible in $S5^*_{Min}$ then α is deducible in $S5_{Min}$.*

Proof. The theorem may be proved by showing that all the rules described in definition of section 2 are satisfied in $S5^*_{Min}$ system. 1, 2 and 4 parts of the definition are the same for both systems, so one only needs to prove points 3 and 5 of the definition to be satisfied in $S5^*_{Min}$ system.

Axioms of group 3.1 are the same as they are in propositional fragment of minimal logic described in [9].

It is obvious that the axiom 3.2 is provable in $S5^*_{Min}$ system as:

$$\frac{\alpha \to \alpha}{\alpha \to \Diamond\alpha}(\to \Diamond)$$

Now it is necessary to show that Axiom 3.3 can be proved in $S5^{*}_{Min}$. It goes in the following way:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \alpha}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\to\alpha}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \neg\alpha,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \Box\neg\alpha,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\to\bot} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\beta\to\beta}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \beta\to\beta}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \beta\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \beta\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \beta\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \alpha\vee\beta\to\bot}}{\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta,\ \Diamond(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\Diamond(\alpha\vee\beta)\to\ \neg(\Box\neg\alpha\&\Box\neg\beta)}}{\Diamond(\alpha\vee\beta)\to\ \neg\Box\neg\alpha\vee\neg\Box\neg\beta}}{\Diamond(\alpha\vee\beta)\to\ \Diamond\alpha\vee\Diamond\beta}$$

Now the left part of the equivalence needs to be proved.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha\to\ \alpha}{\alpha\to\ \alpha\vee\beta}}{\alpha,\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\alpha,\Box\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\Diamond\alpha,\Box\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\Diamond\alpha\to\ \neg\Box\neg(\alpha\vee\beta)}}{\Diamond\alpha\to\ \Diamond(\alpha\vee\beta)} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\beta\to\beta}{\beta\to\ \alpha\vee\beta}}{\beta,\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\beta,\Box\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\Diamond\beta,\Box\neg(\alpha\vee\beta)\to\bot}}{\Diamond\beta\to\ \neg\Box\neg(\alpha\vee\beta)}}{\Diamond\beta\to\ \neg\Box\neg(\alpha\vee\beta)}}{\Diamond\alpha\vee\Diamond\beta\to\ \Diamond(\alpha\vee\beta)}$$

So, the axiom of distribution is proved.

Axiom 3.4:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha\to\alpha}{\alpha\to\Diamond\alpha}(\to\Diamond)}{\alpha,\ \neg\Diamond\alpha\to\bot}(\neg\to)}{\Diamond\alpha,\ \neg\Diamond\alpha\to\bot}(\Diamond\to)}{\Diamond\alpha,\ \Diamond\neg\Diamond\alpha\to\bot}(\Diamond\to)}{\Diamond\neg\Diamond\alpha\to\neg\Diamond\alpha}(\to\neg)$$

The axiom of reduction is proved.

Axioms of group 5.1 are the same as they are in propositional fragment of minimal logic described in [4].

Axiom 5.2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha, \neg\beta \to \bot}\,(\neg\to)}{\alpha, \Box\neg\beta \to \bot}\,(\Box \to)}{\Diamond\alpha, \Box\neg\beta \to \bot}\,(\Diamond \to)}{\Diamond\alpha \to \neg\Box\neg\beta}\,(\to \neg)}{\Diamond\alpha \to \Diamond\beta}$$

So, it becomes obvious, that formula $\Diamond f_1 \leftrightarrow \Diamond f_2$ is provable in system $S5^*_{Min}$, only if $f_1 \leftrightarrow f_2$ is also provable in that system. The rule of extentionality is proved.

Axiom 5.3:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to \alpha}{\neg\alpha \to \bot}\,(\neg\to)}{\Diamond\neg\alpha \to \bot}\,(\Diamond \to)}{\to \neg\Diamond\neg\alpha}\,(\to \neg)}{\to \Box\alpha}$$

Formula $\Box f$ is provable only if f is provable. The rule of tautology is proved.

Theorem 3.2. *If a formula α is deducible in the $S5_{Min}$ system then a sequence $\to \alpha$ is deducible in the $S5^*_{Min}$ system.*

Proof. The theorem will be proved by showing that the rules $(\to \Diamond)$, $(\Diamond \to)$, $(\to \Box)$, and $(\Box \to)$ can be derived from rules of the system $S5_{Min}$.

Firstly, let's prove that:

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \Diamond\alpha}\,(\to \Diamond)$$

That is:

$$\frac{\alpha,\ \beta \to \gamma}{\alpha,\ \beta \to \Diamond\gamma}\,(\to \Diamond)$$

In other words, we only need to prove that if $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$ then $(\alpha \vee \beta) \to \Diamond\gamma$ in $S5_{Min}$. Suppose that $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$. Using the axiom of Possibility $(\gamma \to \Diamond\gamma)$ and applying the modus ponens rule we get $(\alpha \vee \beta) \to \Diamond\gamma$.

Next the rule $(\to \Box)$ needs to be proved:

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \Box\alpha}\,(\to \Box)$$

So, it needs to be proved that:

$$\frac{\alpha,\ \beta \to \gamma}{\alpha,\ \beta \to \Box\gamma}\,(\to \Box)$$

In other words, we only need to prove that if $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$ then $(\alpha \vee \beta) \to \Box\gamma$.

So, $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$. On the other hand, using rule 5.3 we get $\gamma \to \Box\gamma$. Using modus ponens rule we can conclude that $(\alpha \vee \beta) \to \Box\gamma$ in $S5_{Min}$.

It can be easily verified that the rules $(\Box \to)$, $(\Diamond \to)$ can be derived from the corresponding rules of $(\to \Diamond)$, $(\to \Box)$ as:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \to \bot}{\Gamma \to \neg\alpha}}{\Gamma \to \Diamond\neg\alpha}}{\neg\Diamond\neg\alpha, \Gamma \to \bot}}{\Box\alpha, \Gamma \to \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \to \bot}{\Gamma \to \neg\alpha}}{\Gamma \to \Box\neg\alpha}}{\neg\Box\neg\alpha, \Gamma \to \bot}}{\Diamond\alpha, \Gamma \to \bot}$$

From theorems 2.1 and 2.2, we can conclude the following one.

Theorem 3.3. *A formula α is deducible in $S5_{Min}$ if and only if $\to \alpha$ is deducible in* $S5^{*}_{Min}$.

Conclusion. Two systems of minimal modal logic are introduced and their equivalence is proved. Those systems may serve as a basis for automated provers in minimal systems for modal logic.

Yerevan State University,
Russian-Armenian University
e-mail: bolibekhov@ysu.am, baghdasaryana95@gmail.com

H. R. Bolibekyan, A. R. Baghdasaryan

On the Minimal Fragment of S5 Modal Logic

Two systems of propositional fragment of modal logic are constructed. One of the systems is Herbrand type while the other one is a sequential system. It is proved that every formula deducible in one of them is also provable in the other system.

Հ. Ռ. Բոլիբեկյան, Ա. Ռ. Բաղդասարյան

S5 մոդալ տրամաբանության նվազագույն ֆրագմենտի վերաբերյալ

Սահմանված են մոդալ տրամաբանության երկու ասույթային համակարգեր։ Նրանցից առաջինը հերբրանյան տիպի է, իսկ մյուսը՝ սեկվենսային։ Ապացուցված է այդ համակարգերի համարժեքությունը։

О. Р. Болибекян, А. Р. Багдасарян

О минимальном фрагменте S5 модальной логики

Сформулированы две пропозициональные системы модальной логики: эрбрановского типа и секвенциальная. Доказана формульная равнообъёмность рассмотренных систем.

References

1. *Prior A.* Time and Modality. Oxford. Clarendon Press. 1957. 138 p.
2. *Kuznetsov A. V., Muravitskij A. Yu.* – Studia Logica.1986. V. 45. P. 77-99.
3. *Wijesekera D.* – Ann. Pure Appl. Logic. 1990. V. 50. P. 271-301.
4. *Bolibekyan H. R., Chubaryan A. A.* In: Proceedings of the Logic Colloquium 2003. Helsinki, Finland. P. 56.
5. *Ohnishi Masao, Matsumoto Kazuo* – Osaka Math. J. 1957. V. 9. P. 113-130.
6. *R. Feys.* Modal Logic. Brill. 1965. 219 p.
7. *Kleene S. C.* Introduction to metamathematics. D.Van Nostrand Comp., Inc. New York–Toronto. 1952. 560 p.
8. *Blackburn P., Rijke M. de, Venema Y.* Modal logic. Cambridge University Press. 2014. 576 p.
9. *Bolibekyan H. R., Baghdasaryan A. R.* – Reports of NAS RA. 2019. V. 119. № 2. P. 110-115.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

MATHEMATICS

УДК 510.64

G. V. Petrosyan

On Some Properties of Several Proof Systems for 2-valued Propositional Logic

(Submitted by academician Yu. H. Shoukourian 9/II 2021)

Keywords: *minimal tautology; Frege systems; substitution Frege systems; Sequent proof systems; proof complexity measures; monotonous systems.*

1. Introduction. The minimal tautologies, i.e. tautologies, which are not a substitution of a shorter tautology, play a main role in the proof complexity area. Really all hard propositional formulas, proof complexities of which are investigated in many well-known papers, are minimal tautologies. There is a traditional assumption that minimal tautology must be no harder than any substitution in it. This idea was revised at first by Anikeev in [1]. He had introduced the notion of monotonous proof system and had given two examples of no complete propositional proof systems: monotonous system, in which the proof lines of all minimal tautologies are no more, than the proof lines for results of a substitutions in them, and no monotonous system, the proof lines of substituted formulas in which can be less than the proof lines of corresponding minimal tautologies. We introduce for the propositional proof systems the notions of monotonous by lines and monotonous by sizes of proofs. In [2] it is proved that Frege systems F no monotonous neither by lines nor by size. In this paper we prove that substitution Frege systems SF, the well-known propositional sequent systems PK, PK^{-} and corresponding systems with substitution rule SPK**,** $SPK^{-}$are no monotonous neither by lines nor by size.

This work consists of 4 main sections. After Introduction we give the main notion and notations as well as some auxiliary statements in Preliminaries. The main results are given in the last two sections.

2. **Preliminaries.** We will use the current concepts of a propositional formula, a classical tautology, sequent, Frege proof systems, sequent systems for classical propositional logic and proof complexity [3]. Let us recall some of them.

2.1. The considered systems of 2-valued propositional logic. Following [3] we give the definition of main systems, which are considered in this point.

2.1.1. A Frege system F uses a denumerable set of 2-valued variables, a finite, complete set of propositional connectives; F has a finite set of inference rules defined by a *figure* of the form $\frac{A_1 A_2 \ldots A_m}{B}$(the rules of inference with zero hypotheses are the axioms schemes); F must be sound and complete, i.e. for each rule of inference $\frac{A_1 A_2 \ldots A_m}{B}$every truth-value assignment, satisfying $A_1 A_2 \ldots A_m$, also satisfies B, and F must prove every tautology.

The particular choice of a language for presented propositional formulas is immaterial in this consideration. However, because of some technical reasons we assume that the language contains the propositional variables p, q and p_i ,q_i $(i \geq 1)$, logical connectives $\neg, \supset, \vee, \wedge$ and parentheses (,). Note that some parentheses can be omitted in generally accepted cases. We assume also that Fhas well known inference rule *modus ponens.*

2.1.2 A substitution Frege system SF consists of a Frege system F augmented with the substitution rule with inferences of the form $\frac{A}{A\sigma}$for any substitution $\sigma = \left(\varphi_{i_1}\, \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_s}\, p_{i_1}\, p_{i_2} \ldots p_{i_s}\right)$, s $\geq$ 1, consisting of a mapping from propositional variables to propositional formulas, and $A\sigma$ denotes the result of applying the substitution to formula A, which replaces each variable in A with its image under σ. This definition of substitution rule allows the simultaneous substitution of multiple formulas for multiple variables of A without any restrictions.

2.1.3. PK^{-}system uses the denotation of sequent$\Gamma \rightarrow \Delta$ where Γ is antecedent and Δ is succedent.

The axioms of PK^{-} system are

1) $p \rightarrow p$, 2) $\rightarrow T$,

where p is propositional variable and Tdenotes «truth».

For every formulas A ,B and for any sequence of formulas Γ, Δ the logic rules are.

$$\supset\rightarrow \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A \quad B,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{A\supset B,\ \Gamma\rightarrow\Delta} \qquad\qquad \rightarrow\supset \frac{A,\ \Gamma\rightarrow\Delta,\ B}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A\supset B}$$

$$\vee\rightarrow \frac{A,\ \Gamma\rightarrow\Delta \quad B,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{A\vee B,\ \Gamma\rightarrow\Delta} \qquad\qquad \rightarrow\vee \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A\vee B} \text{ and } \rightarrow\vee \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ B}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A\vee B}$$

$$\wedge\rightarrow \frac{A,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{A\wedge B,\ \Gamma\rightarrow\Delta} \text{ and } \wedge\rightarrow \frac{B,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{A\wedge B,\ \Gamma\rightarrow\Delta} \qquad\qquad \rightarrow\wedge \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A \quad \Gamma\rightarrow\Delta,\ B}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A\wedge B}$$

$$\neg\rightarrow \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ A}{\neg A,\ \Gamma\rightarrow\Delta} \qquad\qquad \rightarrow\neg \frac{A,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \neg A}$$

The only structured inference rule is

$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta}{\Gamma'\rightarrow\Delta'}$ Str.r., where $\Gamma'(\Delta')$ contains $\Gamma(\Delta)$ as a set.

2.1.4. The system PK is PK^{-} augmented with cut-rule

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ A \quad A,\ \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}$$

2.1.5. Substitution sequent calculus $SPK(SPK^-)$ defined by adding to PK **(**PK^-**)** the following rule of substitution

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \quad A\,(p)}{\Gamma \to \Delta, \quad A\,(B)},$$

where simultaneous substitution of the formula $B$is allowed for the variable p, and where p does not appear in Γ, Δ**.**

Note (1). Let $\Gamma \to \Delta$ be some sequent, where Γ is a sequence of formulas $A_1, A_2, \dots, A_l$ $(l \geq 0)$ and $\Delta$is a sequence of formulas $B_1, B_2, \dots, B_m$ $(m \geq 0)$. The formula form of sequent $\Gamma \to \Delta$ is the formula $\varphi_{\Gamma \to \Delta}$, which is defined usually as follows:

1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_l \supset B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m \quad l, m \geq 1$
2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_l \ \supset \perp$ for $l \geq 1$, $m = 0$ $\perp$is false
3) $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$ for $l = 0$ and $m \geq 1$.

2.2. Proof complexity measures. By $|\varphi|$ we denote the size of a formula φ, defined as the number of all logical signs in it. It is obvious that the full size of a formula, which is understood to be the number of all symbols is bounded by some linear function in $|\varphi|$.

In the theory of proof complexity two main characteristics of the proof are: *t*- complexity (length), defined as the number of proof steps, l-complexity (size), defined as sum of sizes for all formulas in proof (size) [3].

Let ϕ be a proof system and φ be a tautology. We denote by $t_\varphi^\phi\left(l_\varphi^\phi\right)$the minimal possible value of *t*-complexity (l-complexity) for all ϕ-proofs of tautology φ.

Definition 2.2.1. A tautology is called ***minimal*** if it is not a substitution of a shorter tautology. We denote by S(φ) the set of all formulas, every of which is result of some substitution in a minimal tautology φ.

Definition 2.2.2. The proof system ϕ is called ***t-monotonous*** **(*l-monotonous*)** if for every minimal tautology φ and for all formulas $\psi \in S(\varphi)$ $t_\varphi^\phi \leq t_\psi^\phi$ $(l_\varphi^\phi \leq l_\psi^\phi)$.

Definition 2.2.3. Sequent $\Gamma \to \Delta$ is called **minimal valid** if its formula form $\varphi_{\Gamma \to \Delta}$ is minimal tautology.

Definition 2.2.4. Sequent proof system Φ is called *t-monotonous* (*l-monotonous*) if for every valid sequent $\Gamma \to \Delta$ and for every sequent $\Gamma_1 \to \Delta_1$ such that $\varphi_{\Gamma_1 \to \Delta_1} \in$ S$(\varphi_{\Gamma \to \Delta})$ $t_{\Gamma \to \Delta}^\phi \leq t_{\Gamma_1 \to \Delta_1}^\phi$ $(l_{\Gamma \to \Delta}^\phi \leq l_{\Gamma_1 \to \Delta_1}^\phi)$.

2.3. Essential subformulas of tautologies

For proving the main results we use the notion of *essential subformulas*, introduced in [4].

Let F be some formula and $Sf(F)$be the set of all non-elementary subformulas of formula F.

For every formula F, for every $\varphi \in Sf(F)$ and for every variable p by F_{φ}^{p} is denoted the result of the replacement of the subformulas φ everywhere in F by the variable p. If $\varphi \notin Sf(F)$, then F_{φ}^{p} is F.

We denote by $Var(F)$ the set of all variables in F.

Definition 2.3.1. Let p be some variable that $p \notin Var(F)$ and $\varphi \in Sf(F)$ for some tautology F. We say that φ is an ***essential subformula*** in F iff F_{φ}^{p} is non-tautology.

The set of essential subformulas in tautology F we denote by *Essf(F)*, the number of essential subformulas by *Nessf(F)* and the sum of sizes of all essential subformulas by *Sessf(F)*.

If F is minimal tautology, then $Essf(F) = Sf(F)$

Definition 2.3.2. The subformula φ is essential for valid sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ if it is essential for its formula form.

In [4] the following statement is proved.

Proposition 1. Let F be a tautology and $\varphi \in Essf(F)$, then

a) in every F-proof of F subformula φ must be essential either at least in some axiom, used in proof or in formula $A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset A_m)\ldots) \supset B$ for some used in proof inference rule $\frac{A_1 A_2 \ldots A_m}{B}$,

b) in every SF-proof of F, where $\frac{A}{A_{\sigma_1}}$, $\frac{A}{A_{\sigma_2}}$, … ,$\frac{A}{A_{\sigma_k}}$ (k≥1) are used substitution rules, subformula φ must be essential either at least in some axiom, used in proof, or in formula $A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset A_m)\ldots) \supset B$ for some used in proof inference rule $\frac{A_1 A_2 \ldots A_m}{B}$, and or must be result of successive substitutions σ_{i_1}, σ_{i_2}, …, σ_{i_r} for $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_r \leq k$ in them.

Note (2) that for every Frege system the number of essential subformulas both in every axiom and in formula $A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset A_m)\ldots) \supset B$ for every inference rule $\frac{A_1 A_2 \ldots A_m}{B}$ is bounded with some constant.

Note (3). It is not difficult to prove that all above statements are true for every formula form of valid sequent and axioms and rules of above mentioned sequent systems.

2.4. Main Formulas. It is known, that in the alphabet, having 3 letters, for every $n > 0$ a word with size n can be constructed such, that neither of its subwords repeats in it twice one after the other [5].

Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ be some of such words in the alphabet $\{a, b, c\}$. In [4] the formulas ψ_n are obtained as follow:

For $n > 0$ let $\psi_{n+1,n} = (p_0 \supset \neg\neg p_0)$. Let the formula $\psi_{i+1,n}$ for the subwords

$\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n (1 \leq i \leq n)$ be constructed then:

1) if $\alpha_i = a$ then $\psi_{i,n} = (p_i \supset p_i) \wedge \psi_{i+1,n}$;

2) if $\alpha_i = b$ then $\psi_{i,n} = (\neg p_i \vee p_i) \supset \psi_{i+1,n}$;

3) if $\alpha_i = c$ then $\psi_{i,n} = (\neg p_i \wedge p_i) \vee \psi_{i+1,n}$;

As formula $\psi_n(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$we take the formula $\psi_{1,n}(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$, for which we have $|\psi_n|= \Theta(n)$ and all subformulas $\psi_{i,n}(1 \leq i \leq n+1)$are essential for ψ_n, therefore *Nessf(ψ_n)* $= \Omega(n)$ and *Sessf(ψ_n)* $= \Omega(n^2)$.

Note (4). As neither of these essential subformulas of formulas $\psi_n$cannot be obtained from other by substitution rule, it is proved in [4] that formulas $\psi_n$require more or equal than n steps and n^2 size both in the Frege systems and substitution Frege systems. It is obvious, that this statement is valid for sequent $\rightarrow \psi_n$ for the all mentioned sequent systems also.

3. Main results. Here we give the main theorem, but at first we must give the following easy proved auxiliary statements.

Lemma 1. *a) The minimal **t-complexity** and l-**complexity** of Frege proofs and thus of substitution Frege proofs for formula $p \supset p$ are bounded by constant.*

*b) For each formulae A and B the minimal **t-complexity** of Frege proofs and thus of substitution Frege proofs for formula $A \supset (\neg A \supset B)$ is bounded by constant, just as its minimal l-complexity is bounded by c·max($|A|$, $|B|$) for some constant c.*

Lemma 2. *a) If F is minimal tautology and p is some variable that $p \notin Var(F)$, then the formula $p \supset F$ is also minimal tautology, and all essential subformulas of formula F are essential for formula $p \supset F$.*

b) If $\rightarrow F$ is minimal valid sequent and p is some variable that $p \notin Var(F)$ then sequent $\rightarrow p \supset F$ is also minimal valid sequent, and all essential subformulas of sequent $\rightarrow F$ are essential for sequent $\rightarrow p \supset F$.

Theorem. *Every Frege system F, substitution Frege system SF, sequent systemsPK, PK^-, SPK, $SPK^-$are neither t-monotonous nor l-**monotonous.***

Proof. Let us consider the tautologies

$\varphi_n = p \supset \psi_n$, $\alpha_n = \neg(p \supset p) \supset \psi_n$ and $\beta_n = (p \supset p) \supset \alpha_n$,

where $\psi_n$are the formulas from previous section and variable p is not belong to *Var(ψ_n)*. Note that **for every *n* formula α_n (sequent $\rightarrow \alpha_n$) belongs to S(φ_n) (S($\rightarrow \varphi_n$)).** According to the statement of Lemma 2. every formula φ_n is minimal tautology and the sequent$\rightarrow \varphi_n$ is minimal valid sequent.

For every *n* the formula α_n can be deduced in every Frege system F as follows: at first we deduce formula $p \supset p$, then $\beta_n = (p \supset p) \supset \alpha_n$and lastly $\alpha_n$by modus ponens. From statement of Lemma 1 we obtain for lengths and sizes of proofs in every Frege system for the set of formulas α_n the bounds $O(1)$ and $O(n)$ accordingly. It is obvious that for more “stronger” substitution systems Frege the bounds are no more.

By statements of Lemma 2 and Note (4) we obtain for lengths and sizes of proofs in every Frege system and substitution systems Frege for the set of formulas $\varphi_n$the bounds $\Omega(n)$ and $\Omega(n^2)$ accordingly.

Now we give deduction of the sequent $\to \neg\ (p \supset p)\ \supset \psi_n$in the system PK^{-}as follows:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{\to (p \supset p)}}{\neg (p \supset p) \to}}{\neg (p \supset p) \to \psi_n}}{\to \neg\ (p \supset p)\ \supset \psi_n}.$$

It is obvious, that the bounds for lengths and sizes of proofs in system $PK^{-}$for the set of sequents $\to \alpha_n$ are $O(1)$ and $O(n)$ accordingly, therefore for more "stronger" systems PK, SPK,SPK^{-} the bounds are no more.

By statements of Lemma 2 and Note (4) we obtain for lengths and sizes of proofs in the systems PK, PK^{-},SPK,SPK^{-} for the set of sequents $\to \varphi_n$the bounds $\Omega(n)$ and $\Omega(n^2)$ accordingly.

Remark. Above results only for Frege systems are parts of publications [6, 7].

I am grateful to my supervisor, professor of YSU AnahitChubaryan for her encouragement and fruitful discussions, and also for helpful suggestions, which improved and expanded the results.

Yerevan State University
e-mail: garik.petrosyan.1@gmail.com

G. V. Petrosyan

**On Some Properties of Several Proof Systems for
2-valued Propositional Logic**

In this work we investigate the relations between the proofs complexities of minimal tautologies and of results of substitutions in them in some systems of 2-valued classical propositional logic. We show that the result of substitution can be proved easier, than corresponding minimal tautology, therefore the systems, which are considered in this paper, are no monotonous neither by lines nor by size.

Գ. Վ. Պետրոսյան

**Երկարժեք ասույթային տրամաբանության որոշակի արտածման
համակարգերի հատկությունները**

Հետազոտված է մինիմալ նույնաբանությունների և նրանցում տեղադրություն-ների արտածման բարդությունների միջև հարաբերությունը որոշակի երկարժեք ասույթային դասական տրամաբանության համակարգերում: Ցույց է տրվել, որ տեղա-դրման արդյունք հանդիսացող բանաձևերը կարող են արտածվել ավելի հեշտ, այդ իսկ պատճառով դիտարկված համակարգերը մոնոտոն չեն:

Г. В. Петросян

О некоторых свойствах нескольких систем доказательства 2-значной логики высказываний

Исследована связь между сложностями доказательств минимальных тавтологий и результатами подстановок в них в некоторых системах 2-значной классической логики высказываний. Показано, что результат подстановки доказывается проще, чем соответствующая минимальная тавтология, поэтому рассматриваемые в статье системы не являются монотонными ни по линиям, ни по размеру.

References

1. *Cook S. A., Reckhow A. R.* – Journal of Symbolic logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
2. *Аникеев А. С.* – Мат. заметки. 1972. Т. 11. Вып. 2. С. 165-174.
3. *Чубарян Ан.* – В сб.: Мат. вопр. кибернетики. Вып. 14. М. Физматлит. 2005. С. 49-56.
4. *Адян С. И.* Проблемы Бернсайда и тождества в группах. М. Наука. 1975. 335 с.
5. *Chubaryan An., Petrosyan G.* – Evolutio. Естественные науки. 2016. Вып. 3. С. 12-14.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О решении двух интегральных уравнений, связанных с контактными задачами для линейно деформируемого основания

(Представлено 1/II 2021)

Ключевые слова: *линейно деформируемое основание, контактная задача, преобразование Фурье, интегральное уравнение.*

Введение. Исходя из потребностей строительной механики было введено понятие линейно деформируемого основания, обобщающее понятие классического основания в виде упругого однородного изотропного полупространства. Это обобщение обусловлено необходимостью разработки более совершенных методов расчета фундаментов зданий и сооружений на деформируемых основаниях, особенно методов расчета характеристик изгиба балок и плит на упругих основаниях, потребностью более полного учета физико-механических свойств оснований (анизотропии, неоднородности и пр.) и их геометрической конфигурации. Первые исследования по контактным задачам для линейно деформирующих оснований восходят к монографиям [1, 2]. В [2] введен важный класс линейно деформируемых оснований, функции влияния которых в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (ось Oz направлена внутрь основания) графически изображаются поверхностями вращения, характеризующимися уравнениями вида

$$K(x-\xi, y-\eta) = K\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right). \tag{0.1}$$

При помощи этих ядер вертикальные перемещения граничных точек линейно деформируемого основания $w(x, y)$ от приложенной в области ω его поверхности распределенной вертикальной нагрузки интенсивности $p(x, y)$ определяется формулой

$$w(x, y) = \iint_{\omega} K(x-\xi, y-\eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{0.2}$$

В [2] приведены явные выражения пяти ядер типа (0.1), которыми, в частности, можно аппроксимировать экспериментально полученные поверхности осадок. Одно из них имеет вид

$$K(x-\xi, y-\eta) = AK_0(\chi R) \quad \left(\chi > 0,\ R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right), \tag{0.3}$$

где A и χ – физические константы, определяемые экспериментальным путем, а $K_0(x)$ – известная функция Макдональда нулевого индекса.

Для другого ядра из [2] типа $K(R) = e^{-\chi R}/R$ в [3] рассмотрены соответствующая осесимметрическая контактная задача с круговой областью контакта и смежная смешанная граничная задача теории диффузии газов и растворов, которая сводится к ИУ Фредгольма первого рода с таким ядром. Последнее, как показано там же, эквивалентно задаче Дирихле для обобщенного потенциала, порожденного этим ядром. Аналогичная граничная задача Дирихле для обобщенного потенциала, порожденного этим ядром (0.3), и связанные с ним ИУ и интегральные соотношения рассмотрены в [4].

Теория контактных задач для линейно деформируемых оснований свое дальнейшее развитие получила во многих работах, в частности в монографии [5]. Укажем также на статьи [6, 7]. Основные результаты этой области теории упругости отражены в [8].

В настоящей работе продолжается исследование решений ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим экспоненциальном ядром, зависящим от разности аргументов, на конечном и полубесконечном интервалах, полученных в [4], где этими ИУ описываются контактные задачи о вдавливании штампов, имеющих в плане форму бесконечной полосы или полуплоскости в линейно деформируемое основание, характеризующееся функцией влияния (0.3).

Постановка задач и вывод определяющих ИУ. Для линейно деформируемого упругого полупространства $z > 0$ с функцией влияния (0.3), отнесенного к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, рассмотрим две контактные задачи. Пусть в первой задаче штамп, имеющий в плане форму бесконечной полосы $\omega_1 = \{-\infty < x < \infty;\ -a < y < a;\ z = 0\}$, под действием вертикальных сил вдавливается в указанное основание. Во второй аналогичной задаче штамп имеет форму полуплоскости $\omega_2 = \{-\infty < x < \infty;\ 0 < y < \infty;\ z = 0\}$. Предполагая, что в контактных областях ω_j $(j = 1,2)$ действуют только нормальные контактные напряжения интенсивности $p(x, y)$, т.е.

$$\sigma_z\big|_{z=+0} = -p(x, y) \quad \left((x, y) \in \omega_j;\ j = 1,2\right),$$

где σ_z – компонента нормальных напряжений, на основании (0.2) и (0.3) для определения неизвестного давления $p(x, y)$ под штампами $p(x, y)$ придем к следующим двумерным определяющим ИУ Фредгольма первого рода:

$$A\iint\limits_{\omega_j} K_0\left(\chi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)p(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y)\ \left((x,y)\in\omega_j;\ j=1,2\right). \tag{1.1}$$

Здесь $f(x,y)$ – заданная функция, характеризующая геометрическую конфигурацию основания штампа, причем $f(x,y)=o(1)$ при $x^2+y^2\to\infty$. Далее ИУ (1.1) запишем в виде

$$\iint\limits_{\omega_j} K_0\left(\chi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)p(\xi,\eta)d\xi d\eta = g(x,y) \tag{1.2}$$
$$g(x,y)=f(x,y)/A; \qquad \left((x,y)\in\omega_j;\ j=1,2\right)$$

и к нему применим интегральное преобразование Фурье по переменной x, полагая

$$\{\overline{p}(\lambda,y);\ \overline{g}(\lambda,y)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{p(x,y);\ g(x,y)\}e^{i\lambda x}dx.$$

В результате двумерные ИУ (1.2) перейдут в следующие одномерные ИУ Фредгольма первого рода с экспоненциальным симметрическим ядром, зависящим от разности аргументов [4]:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int\limits_{l_j} e^{-\gamma|y-\eta|}\overline{p}(\lambda,\eta)d\eta=\overline{g}(\lambda,y)\ \left(y\in l_j,\ j=1,2\right)\ \ l_1=(-a,a);\ \ l_2=(0,\infty);\ \gamma=\sqrt{\lambda^2+\chi^2}. \tag{1.3}$$

Решение определяющих ИУ (1.3). Далее займемся построением решений ИУ (1.3) и исследованием их структур. С этой целью сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Ядро ИУ (1.3)* $L(y,\eta)=\exp\left(-\gamma|y-\eta|\right)\ (-a\le y,\eta\le a)$ *является замкнутым в* $L_2[-a,a]$ *ядром.*

Доказательство. Очевидно, что ядро $L(y,\eta)=\exp\left(-\gamma|y-\eta|\right)\ (-a\le y,\eta\le a)$ – симметрическое квадратично суммируемое ядро. По определению [9] такое ядро называется замкнутым в $L_2[-a,a]$, если каждая функция $\omega(y)\in L_2[-a,a]$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_{-a}^{a}L(y,\eta)\omega(\eta)d\eta=0,$$

равна нулю почти везде в $L_2[-a,a]$. Пусть

$$\omega(y)\in L_2[-a,a]\ \text{и}\ \int\limits_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\omega(\eta)d\eta=0\ \ \left(y\in[-a,a]\right)$$

или

$$e^{-\gamma\eta}\int_{-a}^{y} e^{\gamma\eta}\omega(\eta)d\eta + e^{\gamma\eta}\int_{y}^{a} e^{-\gamma\eta}\omega(\eta)d\eta = 0 \ \ (y \in (-a,a)).$$

Поскольку из $\omega(y)\in L_2[-a,a]$ вытекает, что также $\omega(y)\in L[-a,a]$, то интегралы с верхним и нижним переменными пределами являются абсолютно непрерывными функциями, имеющими почти везде производные, которые равны подынтегральным функциям [10] (с. 234-236). Тогда обе части записанного равенства можем дважды продифференцировать по y. Получим

$$\gamma^2\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\omega(\eta)d\eta - 2\gamma\omega(y) = 0 \ \Rightarrow \ \omega(y) = 0 \ \ (y \in (-a,a)).$$

и в результате $\omega(y)\equiv 0$ на любом отрезке $[-b,b]\subset[-a,a]$, т.е. $\omega(y)$ может быть отлично от нуля только на множестве меры нуль отрезка $[-a,a]$. Теорема 1 доказана.

Выясним структуру решения ИУ (1.3) при $l_1 = [-a,a]$:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\bar{p}(\eta)d\eta = \bar{g}(y) \ \ (\bar{p}(y) = \bar{p}(\lambda,y);\ \bar{g}(y) = \bar{g}(\lambda,y),\ -a \le y \le a).$$

С этой целью сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *В смысле теории обобщенных функций имеют место соотношения*

$$\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta \mp a)d\eta = \frac{1}{2}e^{-\gamma(a\mp y)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Воспользуемся дельта-образной последовательностью [11] $f_N(y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(Ny)}{y}$, причем в смысле теории обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty} f_N(y) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(Ny)}{y}\right] = \delta(y),$$

где $\delta(y)$ – известная дельта-функция Дирака. Очевидно, что общий член этой последовательности можно представить в виде конечного интеграла Фурье

$$f_N(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(Ny)}{y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{isy}ds.$$

Исходя из этого применительно к нашему случаю вычислим интеграл

$$I_N(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta-a))}{\eta-a}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}d\eta\int_{-N}^{N} e^{is(\eta-a)}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}e^{is\eta}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\left[\int_{-a}^{y} e^{-\gamma(y-\eta)}e^{is\eta}d\eta + \int_{y}^{a} e^{-\gamma(\eta-y)}e^{is\eta}d\eta\right] = \frac{e^{-\gamma y}}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{-a}^{y} e^{(\gamma+is)\eta}d\eta + \frac{e^{\gamma y}}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{y}^{a} e^{(is-\gamma)\eta}d\eta.$$

Далее после элементарных преобразований и вычисления простейших интегралов будем иметь

$$I_N(y)=\frac{2\gamma}{\pi}I_N^{(1)}(y)-\frac{e^{-\gamma(y+a)}}{\pi}\left[\gamma I_N^{(2)}(y)-I_N^{(3)}(y)\right]-\frac{\gamma}{\pi}e^{-\gamma(a-y)}I_N^{(4)} \qquad (2.2)$$

$$I_N^{(1)}(y)=\int_0^N\frac{\cos(s(a-y))ds}{s^2+\gamma^2};\quad I_N^{(2)}(y)=I_N^{(2)}=\int_0^N\frac{\cos(2sa)ds}{s^2+\gamma^2};\quad I_N^{(3)}(y)=I_N^{(3)}=\int_0^N\frac{s\sin(2sa)ds}{s^2+\gamma^2};\ I_N^{(4)}=\int_0^N\frac{ds}{s^2+\gamma^2}.$$

Теперь в этих интегралах перейдем к предельному переходу $N\to\infty$. Последовательно будем иметь:

1) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(1)}(y)=\int_0^\infty\frac{\cos(s(a-y))ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2\gamma}e^{-\gamma(a-y)}\quad (y<a);$

2) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(2)}=\int_0^\infty\frac{\cos(2sa)ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2\gamma}e^{-2\gamma a};\qquad$ 3) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(3)}=\int_0^\infty\frac{s\sin(2sa)ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2}e^{-2\gamma a};$

4) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(4)}=\lim\limits_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\gamma}arctg\left(\frac{N}{\gamma}\right)\right]=\frac{\pi}{2\gamma},$

где использованы значения известных пределов из [12] (с.17, ф-ла 1.2.(11) и с.65, ф-ла 2.2.(15)). Далее, приняв во внимание выражения этих интегралов, из (2.2) при помощи предельного перехода $N\to\infty$ получим

$$\lim_{N\to\infty}I_N(y)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta-a))}{\eta-a}d\eta=\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta-a)d\eta=\frac{1}{2}e^{-\gamma(a-y)}.$$

Вполне аналогичным образом

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{I}_N(y)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta+a))}{\eta+a}d\eta=\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta+a)d\eta=\frac{1}{2}e^{-\gamma(a+y)}.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теоремы о структуре решения ИУ (1.3) при $l_1=[-a,a]$.

Теорема 2. *Если* $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$, *то решение ИУ (1.3) в классе обобщенных функций представляется формулой* $(\bar{p}(\lambda,y)=\bar{p}(y);\ \bar{g}(\lambda,y)=\bar{g}(y))$:

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)\right]\delta(y-a)+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)\right]\delta(y+a)\quad(-a\le y\le a). \qquad (2.3)$$

Доказательство. ИУ (1.3) опять представим в форме

$$e^{-\gamma y}\int_{-a}^{y}e^{\gamma\eta}\bar{p}(\eta)d\eta+e^{\gamma y}\int_{y}^{a}e^{-\gamma\eta}\bar{p}(y)dy=\frac{\gamma}{\pi}\bar{g}(y)\quad(-a<y<a). \qquad (2.4)$$

Так как по условию $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$, то левые и правые части этого равенства дважды непрерывно дифференцируемы по y функции. В результате двукратного дифференцирования (2.4) по y получим

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]\ (-a<y<a). \tag{2.5}$$

Чтобы получить решение ИУ (1.3) на отрезке $[-a,a]$, выражение (2.5) подставим в левую часть (1.3) и положим

$$I(y,\gamma)=\frac{e^{-\gamma y}}{2\pi}\int_{-a}^{y}e^{\gamma\eta}\left[\gamma^2\bar{g}(\eta)-\bar{g}''(\eta)\right]d\eta+\frac{e^{\gamma y}}{2\pi}\int_{y}^{a}e^{-\gamma\eta}\left[\gamma^2\bar{g}(\eta)-\bar{g}''(\eta)\right]d\eta\ \ (-a\le y\le a).$$

Далее, чтобы освободиться от второй производной $\bar{g}''(\eta)$, здесь опять произведем интегрирование по частям. После элементарных выкладок находим

$$I(y,\gamma)=\frac{\gamma}{\pi}\bar{g}(y)-\frac{e^{-a\gamma}}{2\pi}\left\{\left[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)\right]e^{\gamma y}\right\}-\frac{e^{-a\gamma}}{2\pi}\left\{\left[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)\right]e^{-\gamma y}\right\}\ \ (-a\le y\le a). \tag{2.6}$$

Очевидно, что ИУ (1.3) будет удовлетворено, если в (2.6) второе и третье слагаемые будут отсутствовать. Этого можно добиться, если согласно лемме к (2.5) прибавить компенсирующие их слагаемые:

$$\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)\right]\delta(y-a);\quad \frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)\right]\delta(y+a).$$

Теорема 2 доказана. По этой теореме решение ИУ (1.3) в концевых точках отрезка $[-a,a]$ имеет характер сосредоточенных элементов и не ограничено. Перейдем к описанию ограниченных решений ИУ (1.3).

Теорема 3. *Для того чтобы при* $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$ *решение ИУ (1.3) на отрезке* $[-a,a]$ *было ограниченным и, следовательно, непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть удовлетворяла условиям*

$$\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)=0;\ \ \gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)=0. \tag{2.7}$$

Тогда единственное его ограниченное решение будет даваться формулой

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]\ (-a\le y\le a). \tag{2.8}$$

Необходимость. Если решение ИУ (1.3) на отрезке $[-a,a]$ ограничено, то из его представления (2.3) вытекает, что правая часть $\bar{g}(y)$ должна удовлетворять условиям (2.7) и тогда решение будет выражаться формулой (2.8). Единственность решения следует из свойства замкнутости ядра $K(y,\eta)=e^{-\gamma|y-\eta|}$ (теорема 1).

Достаточность. Наоборот, если выполняются условия (2.7), то опять из (2.3) вытекает ограниченность решения и его представление (2.8).

Единственное ограниченное на отрезке решение ИУ (1.3) возможно лишь при определенных условиях на правую часть $\bar{g}(y)$. Это решение описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Для того чтобы ИУ (1.3) на отрезке* $[-a,a]$ *обладало единственным ограниченным и, следовательно, непрерывным решением, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть допускала представление*

$$\bar{g}(y)=\bar{h}(y)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\le y\le a)$$
$$A=-\frac{e^{-\gamma a}}{2\gamma}\{\gamma[\bar{h}(a)+\bar{h}(-a)]+\bar{h}'(a)-\bar{h}'(-a)\};\quad B=-\frac{e^{-\gamma a}}{2\gamma}\{\gamma[\bar{h}(a)-\bar{h}(-a)]+\bar{h}'(a)+\bar{h}'(-a)\},\tag{2.9}$$

где $\bar{h}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$. *Тогда это решение будет представлено формулой*

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{h}(y)-\bar{h}''(y)\right]\quad(-a\le y\le a).\tag{2.10}$$

<u>Необходимость.</u> Пусть ИУ (1.3) на отрезке $-a\le y\le a$ имеет единственное ограниченное решение, даваемое формулой (2.10). Положим

$$\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]=\bar{q}(y)\quad(\bar{q}(y)\in C[-a,a]).$$

Это равенство будем рассматривать как неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\bar{g}(y)$. Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения в виде функции $\bar{g}_0(y)=Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)$, где A и B – пока неизвестные постоянные, и из частного решения неоднородного уравнения в виде функции

$$\bar{h}(y)=-\frac{\gamma}{\pi}\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\bar{q}(\eta)d\eta\qquad(-a\le y\le a)\quad(\bar{h}(y)\in C^{(2)}[-a,a]).$$

Следовательно,

$$\bar{g}(y)=\bar{h}(y)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\le y\le a).\tag{2.11}$$

Но функция $\bar{g}(y)$ по теореме 3 должна удовлетворять условиям (2.7). Подчинив функцию из (2.11) этим условиям, для определения постоянных A и B получим простейшую систему уравнений:

$$\begin{cases}A+B=-\dfrac{e^{-\gamma a}}{\gamma}\left[\gamma\bar{h}(a)+\bar{h}'(a)\right]\\[2ex] A-B=-\dfrac{e^{-\gamma a}}{\gamma}\left[\gamma\bar{h}(-a)-\bar{h}'(a)\right].\end{cases}$$

Отсюда для A и B получаются приведенные в (2.9) выражения.

<u>Достаточность.</u> Если имеет место представление (2.9), то легко проверить выполнение условий (2.7). Тогда действительно решение ИУ (1.3) будет иметь вид (2.10).

Вполне аналогичные результаты имеют место для ИУ (1.3) при $l_2 = (0,\infty)$:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int_0^\infty e^{-\gamma|y-\eta|}d\eta = g(y).$$

Теорема 5. *Если* $\bar{g}(y) \in C^{(2)}[0,\infty) \cap L_2(0,\infty)$, *то решение ИУ (1.3) в классе обобщенных функций представляется формулой*

$$\bar{p}(y) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y) - \bar{g}''(y)\right] + \frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(0) - \bar{g}'(0)\right]\delta(y) \quad (0 \le y < \infty). \tag{2.12}$$

Теорема 6. *Для того чтобы при* $\bar{g}(y) \in C^{(2)}[0,\infty) \cap L_2(0,\infty)$ *решение ИУ (1.3) на* $[0,\infty)$ *было единственным и ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть удовлетворяла условию* $\gamma\bar{g}(0) - \bar{g}'(0) = 0$. *Тогда*

$$\bar{p}(y) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y) - \bar{g}''(y)\right] \quad (0 \le y < \infty). \tag{2.13}$$

Теорема 7. *Для того чтобы ИУ (1.3) на* $[0,\infty)$ *обладало единственным ограниченным решением, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть допускала представление*

$$\bar{g}(y) = \bar{h}(y) + Ae^{-\gamma y} \quad (0 \le y < \infty), \qquad A = \frac{1}{2\gamma}\left[h'(0) - \gamma h(0)\right],$$

где $\bar{h}(y) \in C^{(2)}[0,\infty) \cap L_2(0,\infty)$. *Тогда это решение будет представлено формулой*

$$\bar{p}(y) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y) - \bar{g}''(y)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{h}(y) - \bar{h}''(y)\right] \quad (0 \le y < \infty).$$

Отметим, что непрерывные части решений ИУ (1.3), представленные формулами (2.5) и (2.13) на интервалах $-a < y < a$ и $0 < y < \infty$, соответственно, можно построить также методом ортогональных функций. А именно, методом разделения переменных могут быть установлены следующие спектральные соотношения [4]:

$$\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\varphi_k(\eta,\theta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2/a^2}} = \frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta); \quad (k = 1,2,\ldots; -a < y < a;\ \theta = -\gamma^2/4), \tag{2.14}$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma|y-\eta|}e^{-\gamma\eta}\psi_k(\eta)d\eta = \frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y); \quad (k = 0,1,2,\ldots; 0 < y < \infty), \tag{2.15}$$

где $\varphi_k(y,\theta) = Ps_k^1(y/a,\theta)$; $\psi_k(y) = L_k^1(2\gamma y)$. Здесь $Ps_k^1(y,\theta)$ – вытянутые сфероидальные волновые функции [13], а $L_k^1(2\gamma y)$ – многочлены Чебышева–Лагерра. Но эти соотношения легко могут быть установлены также при помощи формулы (2.8). Действительно, полагая

$$\bar{g}_k(\lambda, y) = \psi_k(y) = \sqrt{1-y^2}\,\chi_k(y), \quad \chi_k(y) = Ps_k^1(y,\theta) \quad (k = 1,2,\ldots),$$

по этой формуле можем записать

$$\bar{p}_k(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\psi_k(y) - \psi_k''(y)\right] = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}\left\{\left(1-y^2\right)\chi_k'' - 2y\chi_k' + \left[4\theta\left(1-y^2\right) - \frac{1}{1-y^2}\right]\chi_k\right\} \quad \left(\gamma^2 = -4\theta\right).$$

Приняв во внимание дифференциальное уравнение сфероидальных волновых функций [13] (с. 169, ф-ла (1)), сразу находим

$$\bar{p}_k(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi}\lambda_n^1(\theta)\frac{\chi_k(y)}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1 < y < 1;\ k = 1,2,\ldots).$$

Перейдя к интервалу $(-a, a)$, придем к соотношению (2.14).

Совершенно аналогичным образом по формуле (2.13) получается соотношение (2.15). Эти же соотношения (2.14)-(2.15) на отрезке $-a \le y \le a$ и на $[0,\infty)$ согласно (2.5) и (2.12) имеют, соответственно, вид

$$\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\varphi_k(\eta,\theta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2/a^2}} = \frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta) + \frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Phi_k(a,\theta) + \Phi_k'(a,\theta)\right]\delta(y-a) + \tag{2.16}$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Phi_k(-a,\theta) - \Phi_k'(-a,\theta)\right]\delta(y+a); \quad \left(k = 1,2,\ldots; -a \le y \le a;\ \theta = -\gamma^2/4\right);$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma|y-\eta|}e^{-\gamma\eta}\psi_k(\eta)d\eta = \frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y) + \frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Psi_k(0) + \Psi_k'(0)\right]\delta(y) \quad (k = 0,1,2,\ldots;\ 0 \le y < \infty) \tag{2.17}$$

$$\Phi_k(y,\theta) = \frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta); \qquad \Psi_k(y) = \frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y).$$

Далее непрерывную часть $\bar{p}_0(y)$ решения ИУ (1.3) при l_1 представим в форме бесконечного ряда

$$p_0(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n(y,\theta) \quad (-a < y < a) \tag{2.18}$$

с неизвестными коэффициентами x_n. Этот ряд поставим в ИУ (1.3), поменяем порядок интегрирования и суммирования, а затем воспользуемся соотношением (2.14). Получим

$$2\gamma a^2\sqrt{1-y^2/a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\lambda_n^1(\theta)}\varphi_n(y,\theta) = \bar{g}(y) \quad (-a < y < a).$$

Обе части этого равенства умножим на $\varphi_n(y,\theta)/\sqrt{1-y^2/a^2}$ и воспользуемся условиями ортогональности функций $\varphi_n(y,\theta)$ [13]

$$\int_{-a}^{a}\varphi_n(y,\theta)\varphi_k(y,\theta)dy=\begin{cases} a\dfrac{n(n+1)}{n+1/2} & (k=n); \\ 0 & (k\neq n). \end{cases}$$

В результате находим

$$x_n=\frac{1}{2\gamma a^3}\frac{n+1/2}{n(n+1)}g_n;\quad g_n=\int_{-a}^{a}\frac{\bar{g}(y)\varphi_n(y,\theta)}{\sqrt{1-y^2/a^2}}dy\qquad (n=1,2,\dots). \tag{2.19}$$

На основании (2.18) и (2.3) решение ИУ (1.3) при l_1 можно представить также формулой

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n(y,\theta)+\frac{1}{\pi}[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)]\delta(y-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi}[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(a)]\delta(y+a)\quad(-a\leq y\leq a),$$

где x_n дается формулой (2.19).

Ограниченное на отрезке решение ИУ (1.3) при l_1 согласно теореме 4 будет представлено формулой

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n(y,\theta)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\leq y\leq a),$$

где выражения коэффициентов A и B приведены в (2.9).

Совершенно аналогичным образом при помощи (2.15) и теоремы 7 можно построить неограниченное и ограниченное решения ИУ (1.3) при l_2.

Институт механики НАН РА,
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О решении двух интегральных уравнений, связанных с контактными задачами для линейно деформируемого основания

Строятся решения одномерных интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим экспоненциальным ядром, зависящим от разности аргументов, на конечном и полубесконечном интервалах. Они получаются при помощи интегрального преобразования Фурье из соответствующих двухмерных ИУ Фредгольма первого рода, описывающих контактные задачи о вдавливании штампов в форме бесконечной полосы и полуплоскости в линейно деформируемое основание, функцией влияния которого является функциия Макдональда нулевого индекса. Доказано, что решения этих одномерных уравнений, выражающихся простыми аналитическими формулами, в концевых точках содержат сосредоточенные элементы в виде дельта-функций. При определенных условиях на правые части ИУ существуют также единственные ограниченные решения. Основные структурные свойства решений обсуждаемых одномерных ИУ сформулированы в виде теорем. А их решения, помимо элементарных формул, могут быть представлены также рядами по вытянутым сфероидиальным волновым функциям и по многочленам Чебышева – Лагерра.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Գծային դեֆորմացվող հիմքի համար կոնտակտային խնդիրների հետ կապված երկու ինտեգրալ հավասարումների լուծումների մասին

Վերջավոր և կիսաանվերջ միջակայքերում կառուցվում են արգումենտների տարբերությունից կախված սիմետրիկ էքսպոնենցիալ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի միաչափ երկու ինտեգրալ հավասարումների (ԻՀ) լուծումները: Դրանք ստացվում են Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի համապատասխան երկչափ ԻՀ-ից Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Այդ երկչափ ԻՀ-երով նկարագրվում են Մակդոնալդի զրոյական ինդեքսով ֆունկցիան որպես ազդեցության ֆունկցիա ունեցող գծային դեֆորմացվող հիմքի համար կոնտակտային երկու խնդիրներ, երբ անվերջ շերտի և կիսահարթության տեսքով դրոշմները սեղմվում են այդպիսի հիմքին: Ապացուցվում է, որ միաչափ ԻՀ-երի լուծումները, որոնք արտահայտվում են պարզ անալիտիկ բանաձևերով, միջակայքերի ծայրակետերում պարունակում են դելտա-ֆունկցիաների տեսքով կենտրոնացված տարրեր: ԻՀ-երի աջ մասերի վրա որոշակի պայմանների դեպքում գոյություն ունեն նաև միակ սահմանափակ լուծումներ: Քննարկվող ԻՀ-երի լուծումների կառուցվածքային հատկությունները ձևակերպված են թեորեմներով և, բացի պարզագույն բանաձևերից, ներկայացված են նաև շարքերով՝ ըստ ձգված սֆերոիդալ ալիքային ֆունկցիաների և ըստ Չեբիշև-Լագերի բազմանդամների:

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On the Solution of Two Integral Equations Related to Contact Problems for a Linearly Deformable Foundation

Solutions of one-dimensional Fredholm IEs of the first kind with a symmetric exponential kernel, depending on the difference of arguments, on finite and semi-infinite intervals are constructed. They are obtained using the integral Fourier transform from the corresponding two-dimensional Fredholm IEs of the first kind, describing the contact problems of indentation of stamps in the form of an infinite strip and a half-plane into a linearly deformable foundation. The influence function of the foundation is the Macdonald function of zero index. It is proved that solutions of these one-

dimensional equations, which are expressed by simple analytical formulas, contain concentrated elements in the form of delta functions at the end points.Under certain conditions for the right-hand side of the IEs, there are also unique bounded solutions.The main structural properties of the solutions to the one-dimensional IEs under consideration are formulated in the form of theorems. And their solutions, in addition to elementary formulas, can also be represented by series in prolate spheroidal wave functions and in Chebyshev-Laguerre polynomials.

Литература

1. *Коренев Б. Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М. Гостехиздат. 1954. 232 с.
2. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М. Физматгиз. 1960. 460 с.
3. *Мхитарян С. М.* – ПММ. 2015. Т.79. Вып. 3. С. 434-446.
4. *Мхитарян С. М.* В кн.: Труды IV междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван. 2015. С. 476-480 (на англ. яз.)
5. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев–Одесса. Вища школа. 1982. 167 с.
6. *Степанов Ф. И., Торская Е. В.* – ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 2. С. 256-268.
7. *Punati Venugopala, Sharma Ishan, Waho Pankaj* – Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. V. 24. Month 07. P. 108128651878606.
8. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л. А. Галина. М. Наука. 1976. 493 с.
9. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М. Наука. 1975. 304 с.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. Наука. 1974. 480 с.
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М. Добросвет. 2007. 408 с.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М. Наука. 1969. 344 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М. Наука. 1967. 300 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. С. Григорян[1,2], В. Г. Едоян[2],
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян[1,2]

О взаимодействии концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации

(Представлено 17/II 2021)

Ключевые слова: *кусочно-однородное упругое полупространство, трещина, стрингер, антиплоская деформация, система интегральных уравнений.*

Введение. Во многих областях прикладной механики и инженерной практики, как например, в механике композитов, геомеханике, строительной механике и механике материалов, измерительной технике, часто возникает необходимость исследования вопросов взаимодействия различных типов концентраторов напряжений с массивными деформируемыми телами. Вокруг этих концентраторов напряжений возникают локальные поля высоких напряжений, количественная и качественная оценка которых представляет как теоретический, так и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [1-5]. В монографии [6] рассмотрены различные варианты сочетания трещин и абсолютно жестких тонких включений, взаимодействующих с массивными упругими телами. Основные результаты и работы в этой области теории упругости с достаточной полнотой отражены в [7-9].

В настоящей статье рассматривается вопрос о взаимодействии произвольного конечного числа коллинеарных сквозных ленточных трещин и произвольного конечного числа стрингеров с кусочно-однородным полупространством при антиплоской деформации. При этом кусочно-однородное полупространство состоит из верхнего упругого слоя и нижнего упругого полупространства, изготовленных из разнородных материалов. На линии соединения разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин, а на верхней грани слоя – коллинеарная система стрингеров. При помощи интегрального преобразования Фурье решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ) довольно непростой структуры. Получена формула для разрушающих касательных напряжений вне системы трещин на их линии расположения. Рассмотрен частный случай только одной трещины. Другие важные частные случаи будут рассмотрены в дальнейшем. Результаты исследования поставленной задачи могут быть полезны при проведении расчетов сейсмостойких сооружений и зданий в условиях оползней горных пород или землетрясений, когда сдвиговые деформации почвы превалируют.

Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть кусочно-однородное полупространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, состоит из верхнего упругого слоя $\Pi_+ = \{-\infty < x, z < \infty;\ 0 \le y \le H\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего упругого полупространства $\Pi_- = \{-\infty < x, z < \infty;\ -\infty < y \le 0\}$ с модулем сдвига G_-. Пусть далее на линии стыковки разнородных материалов $y = 0$ расположена система коллинеарных сквозных ленточных трещин бесконечных протяженностей в направлении оси Oz $L = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$, верхние берега которых нагружены касательными силами $\tau_+(x)$, а нижние – касательными силами $\tau_-(x)$. Верхняя грань $y = H$ полосы Π_+ усилена коллинеарной системой ленточных стрингеров $l = \bigcup_{p=1}^{m}(c_p, d_p)$ опять бесконечных протяженностей в направлении оси Oz. Каждый стрингер системы l имеет высоту h и модуль сдвига G_0. Верхние грани стрингеров в отрицательном направлении оси Oz нагружены касательными силами, причем на p-ом стрингере силами интенсивности $\tau_p(x)$. Кроме того на левом конце $x = c_p$ этого стрингера приложены сосредоточенная сила S_p в положительном направлении оси Oz, а на правом конце $x = d_p$ в отрицательном направлении оси Oz – сосредоточенная сила T_p $\left(p = \overline{1, m}\right)$. При указанных силовых факторах кусочно-однородное упругое полупространство с системами трещин и стрингеров будет находиться в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить плотности дислокаций на берегах трещин, раскрытий трещин, коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), разрушающие касательные напряжения вне трещин на оси Ox, касательные контактные напряжения под стрингерами и осевые напряжения в их сечениях.

Приступим к выводу основных уравнений поставленной задачи, откуда будут определяться указанные механические характеристики. С этой целью введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{yz}\big|_{y=\pm 0} = -T_{\pm}(x) = \begin{cases} -\tau_{\pm}(x) & (x \in L), \\ -\tilde{\tau}(x) & (x \in L',\ L' = R \setminus L), \end{cases} \\
&\tau_{yz}\big|_{y=H-0} = \begin{cases} -\tau(x) & (x \in l), \\ 0 & (x \in l',\ l' = R \setminus l), \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений, а $\tau(x)$ – неизвестные пока касательные контактные напряжения под стрингерами. Так как в условиях антиплоской деформации единственная отличная от нуля компонента перемещений $u_z(x, y)$ в соответствующих областях является гармонической функцией, то сначала для упругой полосы $\omega_+ = \{-\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le H\}$ рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_z^+}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z^+}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty;\ 0 < y < H) \\
\tau_{yz}\big|_{y=+0} = G_+ \dfrac{\partial u_z^+}{\partial y}\bigg|_{y=+0} = -T_+(x);\ \ \tau_{yz}\big|_{y=H-0} = G_+ \dfrac{\partial u_z^+}{\partial y}\bigg|_{y=H-0} = -q(x),
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

где $q(x)$ считается известной функцией. Решение задачи (2.2) построим методом интегрального преобразования Фурье, полагая

$$
\left\{\overline{u}_z^+(\lambda, y);\ \overline{T}_+(\lambda);\ \overline{q}(\lambda)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{u_z^+(x, y); T_+(x);\ q(x)\right\} e^{i\lambda x} dx.
$$

Применив к задаче (2.2) преобразование Фурье по переменной x, получим, что двухмерная задача (2.2) в трансформантах Фурье перейдет в следующую одномерную граничную задачу:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2 \overline{u}_z^+}{dy^2} - \lambda^2 \overline{u}_z^+ = 0 \quad (0 < y < H); \\
G_+ \dfrac{d\overline{u}_z^+}{dy}\bigg|_{y=+0} = -\overline{T}_+(\lambda);\ \ G_+ \dfrac{d\overline{u}_z^+}{dy}\bigg\|_{y=H-0} = -q(\lambda).
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

Общее решение граничной задачи (2.3) имеет вид $\overline{u}_z^+(\lambda, y) = Ach(\lambda y) + Bsh(\lambda y)$ $(0 \le y \le H)$. Подчинив это решение граничным условиям из (2.3), находим

$$
\overline{u}_z^+(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_+ sh(\lambda H)} \left[ch(\lambda(y - H))\overline{T}_+(\lambda) - ch(\lambda y)\overline{q}(\lambda)\right] \ (0 \le y \le H). \tag{2.4}
$$

Далее для нижней упругой полуплоскости $\omega_- = \{-\infty < x < \infty;\ -\infty < y \le 0\}$ рассмотрим вспомогательную граничную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_z^-}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z^-}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty;\ y < 0) \\ \tau_{yz}\big|_{y=-0} = G_- \dfrac{\partial u_z^-}{\partial y}\Big|_{y=-0} = -T_-(x)\ (-\infty < x < \infty); \quad grad\, u_z^-(x,y) \to 0 \ \ при\ \ x^2 + y^2 \to \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

В трансформантах Фурье решение граничной задачи (2.5) представляется формулой

$$\overline{u}_z^-(\lambda, y) = -\overline{T}_-(\lambda) e^{|\lambda|/y} \Big/ |\lambda| G_- \quad (-\infty < y \le 0). \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) имеем

$$-i\lambda \overline{u}_z^+(\lambda,+0) = -i\left[ch(\lambda H)\overline{T}_+(\lambda) - \overline{q}(\lambda)\right]/G_+ sh(\lambda H);\ -i\lambda \overline{u}_z^-(\lambda,-0) = isign\lambda \overline{T}_-(\lambda)/G_-. \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_\pm(x) = \frac{1}{2}\left[u_z^+(x,+0) \pm u_z^-(x,-0)\right];\ \ \Omega_\pm(x) = \frac{1}{2}\left[T_+(x) \pm T_-(x)\right]\ \ (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда

$$u_z^\pm(x,\pm 0) = \varphi_+(x) \pm \varphi_-(x);\ \ T_\pm(x) = \Omega_+(x) \pm \Omega_-(x)\ \ (-\infty < x < \infty).$$

Преобразования Фурье этих функций обозначим теми же функциями с черточками наверху. Тогда

$$\overline{u}_z^\pm(\lambda,\pm 0) = \overline{\varphi}_+(\lambda) \pm \overline{\varphi}_-(\lambda);\ \ \overline{T}_\pm(\lambda) = \overline{\Omega}_+(\lambda) \pm \overline{\Omega}_-(\lambda). \tag{2.8}$$

(2.8) подставим в (2.7). После простых преобразований относительно $\overline{\varphi}_+(\lambda)$ и $\overline{\Omega}_+(\lambda)$ получим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} i\lambda\overline{\varphi}_+(\lambda) - \dfrac{i}{G_+} cth(\lambda H)\overline{\Omega}_+(\lambda) = -i\lambda\overline{\varphi}_-(\lambda) + \dfrac{i}{G_+}\left[cth(\lambda H)\overline{\Omega}_-(\lambda) - \dfrac{\overline{q}(\lambda)}{sh(\lambda H)}\right] \\ i\lambda\overline{\varphi}_+(\lambda) + \dfrac{isign\lambda}{G_-}\overline{\Omega}_+(\lambda) = i\lambda\overline{\varphi}_-(\lambda) + \dfrac{isign\lambda}{G_-}\,\overline{\Omega}_-(\lambda). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\overline{\varphi}_+(\lambda) = -\frac{i}{G_+ sign\lambda + G_- cth(\lambda H)}\left\{\left[G_+ sign\lambda - G_- cth(\lambda H)\right]\lambda\overline{\varphi}_-(\lambda) - 2sign\lambda cth(\lambda H)\overline{\Omega}_-(\lambda)\right\}; \tag{2.9}$$

$$\overline{\Omega}_+(\lambda) = -\frac{i}{G_+ sign\lambda + G_- cth(\lambda H)}\left\{2i\lambda G_+ G_- \overline{\varphi}_-(\lambda) + i\left[G_+ sign\lambda - G_- cth(\lambda H)\right]\overline{\Omega}_-(\lambda) + \frac{iG_+\overline{q}(\lambda)}{sh(\lambda H)}\right\}.$$

Далее займемся только вторым уравнением из (2.9) и применим к нему формулу обратного интегрального преобразования Фурье. После элементарных преобразований придем к ключевому уравнению

$$\Omega_+(x)=\frac{1}{2}\left[T_+(x)+T_-(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Omega}_+(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=-\frac{2G_+}{\pi}\int_L K_1(s-x)\varphi'_-(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_L K_2(|s-x|)\Omega_-(s)ds+ \tag{2.10}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_L K_3(|s-x|)q(s)ds \qquad (-\infty<x<\infty);$$

$$K_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa+cth(\lambda H)};\quad K_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{\kappa-cth(\lambda H)}{\kappa+cth(\lambda H)}\cos(\lambda x)d\lambda;\quad K_3(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)d\lambda}{\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H)};\ \kappa=\frac{G_+}{G_-}.$$

Выделим в ядерных функциях $K_j(x)\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ их главные части. Так как

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\kappa+cth(\lambda H)}=\frac{1}{\kappa+1},$$

то функцию $K_1(x)$ преобразуем следующим образом:

$$K_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa+cth(\lambda H)}=\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\sin(\lambda x)d\lambda+\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\kappa+cth(\lambda H)}-\frac{1}{\kappa+1}\right]\sin(\lambda x)d\lambda=$$
$$=\frac{1}{(\kappa+1)x}-\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\frac{1-th(\lambda H)}{1+\kappa th(\lambda H)}\sin(\lambda x)d\lambda=\frac{1}{(\kappa+1)x}-\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}.$$

В результате

$$K_1(x)=\frac{1}{\kappa+1}\left[\frac{1}{x}-L_1(x)\right];\ L_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\sin(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)};\ \Delta(\lambda,H)=\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H) \tag{2.11}$$
$$(-\infty<x<\infty).$$

Вполне аналогичным образом получим

$$K_2(x)=\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\delta(x)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}L_2(x);\ L_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\cos(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)}\quad(-\infty<x<\infty);$$
$$K_3(x)=\frac{2H}{\pi(\kappa+1)(x^2+H^2)}+\frac{\kappa}{\kappa+1}L_3(x);\ L_3(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\lambda H}\cos(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)}. \tag{2.12}$$

Здесь использовано значение известного интеграла из [10] (с. 23, ф-ла 1.4.(1)), а $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака.

Подставляя (2.11)-(2.12) в (2.10), после элементарных выкладок представим ключевое уравнение в форме

$$-\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi'_-(s)ds+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega_-(x)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|x-s|)\Omega_-(s)ds+ \tag{2.13}$$
$$+\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)ds=\frac{1}{2}\left[T_+(x)+T_-(x)\right]\quad(-\infty<x<\infty).$$

Здесь согласно (2.1) учтено, что $q(x)=\begin{cases}\tau(x) & (x\in l);\\ 0 & (x\in R\setminus l)\end{cases}$. Далее ключевое уравнение (2.13) рассмотрим на системе трещин. В результате относительно $\varphi'_-(x)$ и $\tau(x)$ придем к следующему СИУ $(x\in L)$:

$$\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi'_-(s)ds-\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)ds=f(x)$$

$$f(x)=\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left[\tau_+(x)-\tau_-(x)\right]-\frac{\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|s-x|)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds-\frac{1}{2}\left[\tau_+(x)+\tau_-(x)\right]\quad (x\in L).$$

(2.14)

Рассматривая же ключевое уравнение (2.13) вне системы трещин L, для разрушающих касательных напряжений получим

$$\tau_{yz}\big|_{y=0}=-\tilde{\tau}(x)=\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi'_-(s)ds-\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left[\tau_+(x)-\tau_-(x)\right]+ \tag{2.15}$$

$$+\frac{\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|x-s|)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds-\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)ds$$

$(x\in L'=R\setminus L)$.

Перейдем к выводу второго СИУ, описывающего контакт системы стрингеров l с кусочно-однородным упругим основанием. С этой целью сначала из (2.4) определим

$$-i\lambda\bar{u}_z^+(\lambda,H)=-\frac{1}{G_+sh(\lambda H)}\left[\bar{T}_+(\lambda)-ch(\lambda H)\bar{q}(\lambda)\right].$$

Подставим сюда $\bar{T}_+=\bar{\Omega}_+(\lambda)+\bar{\Omega}_-(\lambda)$, где $\bar{\Omega}_+(\lambda)$ дается второй формулой из (2.9). После несложных преобразований имеем $(-\infty<x<\infty)$:

$$-i\lambda\bar{u}_z^+(\lambda,H)=-\frac{i}{G_+}\left\{\frac{2\kappa sign\lambda\bar{\Omega}_-(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}-\frac{[sh(\lambda H)+\kappa sign\lambda ch(\lambda H)]\bar{q}(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}\right\}-\frac{2i\lambda\bar{\varphi}_-(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}.$$

К этому равенству применим формулу обратного преобразования Фурье, а затем в полученных ядерных функциях, как выше, выделим их главные части. Опуская промежуточные выкладки, окончательно имеем

$$\frac{d\bar{u}_z^+(x,H)}{dx}=\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_L\left[\frac{s-x}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\kappa-1}{2}R_1(s-x)\right]\Omega_-(s)ds-$$

$$-\frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_l\left[\frac{\kappa+1}{s-x}+R_2(s-x)\right]\tau(s)ds+\frac{1}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{2H}{(s-x)^2+H^2}+R_3(|x-s|)\right]\varphi'_-(s)ds\ (-\infty<x<\infty);$$

(2.16)

$$R_1(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\sin(\lambda x)d\lambda;\quad R_2(x)=\int_0^\infty\frac{\kappa^2-e^{-\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$R_3(x)=\int_0^\infty\frac{\kappa+1+(\kappa-1)e^{-2\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\cos(\lambda x)d\lambda;\quad \Delta(\lambda,H)=\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H).$$

Здесь были использованы значения известных интегралов из [10] (с.23, ф-ла 1.4.(1) и с.71, ф-ла 2.4.(1)). Обратимся к определению напряженно-деформационных характеристик стрингеров. Дифференциальное уравнение деформирования p-го стрингера согласно модифицированной модели Мелана имеет вид [11]

$$G_0 h \frac{d^2 u_z^{(0)}}{dx^2} = \tau(x) - \tau_p(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right), \tag{2.17}$$

где $u_z^{(0)}(x)$ – перемещения точек стрингеров в направлении оси Oz. При этом в предположении, что касательные напряжения $\tau_{xz}(x)$ в сечении x по высоте стрингера равномерно распределены, будем иметь $S(x) = \tau_{xz}(x)h$, где $S(x)$ – результирующее касательное усилие в сечении x. Оно определяется из граничной задачи

$$\frac{dS}{dx} = \tau(x) - \tau_p(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right), \quad S(c_p) = S_p;\ S(d_p) = T_p. \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.18) находим

$$\frac{du_z^{(0)}}{dx} = \frac{S(x)}{G_0 h} \quad \left(c_p \le x \le d_p\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left\{\int_{c_p}^{d_p} sign(x-s)\left[\tau(s) - \tau_p(s)\right]ds + S_p + T_p\right\} \ \left(p = \overline{1,m}\right). \tag{2.19}$$

Из второго уравнения (2.19) вытекает условие равновесия p-го стрингера:

$$\int_{c_p}^{d_p} \tau(s)ds = Q_p;\ Q_p = T_p - S_p + N_p;\ N_p = \int_{c_p}^{d_p} \tau_p(s)ds \quad \left(p = \overline{1,m}\right). \tag{2.20}$$

Подставляя в условие контакта системы стрингеров с основанием $\dfrac{du_z^{+}(x,H)}{dx} = \dfrac{du_z^{(0)}}{dx}$ $\left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right)$ (2.16) и первое равенство из (2.19), отноительно $\tau(x)$ и $\varphi_-'(x)$ придем ко второму определяющему СИУ:

$$\frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_{c_p}^{d_p}\left[\frac{\kappa+1}{s-x} + R_2(s-x) - \frac{\pi(\kappa+1)G_+}{2G_0 h} sign(s-x)\right]\tau(s)ds + \frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{m}\int_l\left[\frac{\kappa+1}{s-x} + R_2(s-x)\right]\tau(s)ds -$$

$$-\frac{1}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{2H}{(s-x)^2+H^2} + R_3(|x-s|)\right]\varphi_-'(s)ds = g(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right); \tag{2.21}$$

$$g(x) = \frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_L\left[\frac{s-x}{(s-x)^2+H^2} + \frac{\kappa-1}{2}R_1(s-x)\right]\Omega_-(s)ds - \frac{1}{2G_0 h}\left\{S_p + T_p + \int_{c_p}^{d_p} sign(x-s)\tau_p(s)ds\right\}.$$

Таким образом, (2.14) и (2.21) составляют определяющую систему СИУ из двух уравнений поставленной задачи, решение которой должно удовлетворять условиям (2.20) и следующим условиям:

$$\int_{a_j}^{b_j} \varphi'_-(s)ds = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{2.22}$$

выражающим условия непрерывности перемещений в концевых точках трещин.

В (2.14) и (2.21), а также в условиях (2.20) и (2.22) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a;\ H_0 = H/a;\ \tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/G_+;\ \Omega_0(\xi) = \Omega_-(a\xi)/G_+;\ \tau_\pm^{(0)}(\xi) = \tau_\pm(a\xi)/G_+;$$

$$\varphi_0(\xi) = \varphi'_-(a\xi);\ \alpha_j = a_j/a;\ \beta_j = b_j/a;\ L_0 = \bigcup_{j=1}^{n}(\alpha_j, \beta_j);\ \omega(\xi) = \tilde{\tau}(a\xi)/G_+;\ \tau_p^{(0)}(\xi) = \tau_p(a\xi)/G_+;$$

$$\Lambda = aG_+/2G_0h;\ S_p^{(0)} = S_p/aG_+;\ T_p^{(0)} = T_p/aG_+;\ \gamma_p = c_p/a;\ \delta_p = d_p/a\ \left(p = \overline{1,m}\right);\ l_0 = \bigcup_{p=1}^{m}(\gamma_p, \delta_p);$$

$$f_0(\xi) = f(a\xi)/G_+;\ g_0^{(p)}(\xi) = g(a\xi),$$

где a – некоторый линейный параметр, например $a = a_1$, если $a_1 \neq 0$. В результате СИУ (2.14) и (2.21) преобразуются в следующую систему СИУ:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi} - L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta - \frac{2H_0}{\pi}\int_{l_0}\left[\frac{1}{(\eta-\xi)^2+H_0^2} + \frac{\pi\kappa}{2H_0}L_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\tau_0(\eta)d\eta = f_0(\xi)(\xi \in L_0) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma_p}^{\delta_p}\left[\frac{1}{\eta-\xi} + \frac{1}{\kappa+1}R_2^{(0)}(\eta-\xi) - \pi\Lambda sign(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m}\int_{l_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi} + \frac{1}{\kappa+1}R_2^{(0)}(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)d\eta - \\ -\dfrac{1}{\pi(\kappa+1)}\displaystyle\int_{L_0}\left[\frac{2H_0}{(\eta-\xi)^2+H_0^2} + R_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\varphi_0(\eta)d\eta = g_0^{(p)}(\xi)\ \left(\gamma_p < \xi < \delta_p;\ p = \overline{1,m}\right); \end{cases} \tag{2.23}$$

$$f_0(\xi) = (\kappa-1)\Omega_0(\xi) - 2\kappa\int_{L_0}L_2^{(0)}(|\xi-\eta|)\Omega_0(\eta)d\eta - \frac{\kappa+1}{2}\left[\tau_+^{(0)}(\xi) + \tau_-^{(0)}(\xi)\right];\quad \Omega_0(\xi) = \frac{1}{2}\left[\tau_+^{(0)}(\xi) - \tau_-^{(0)}(\xi)\right];$$

$$g_0^{(p)}(\xi) = \frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{L_0}\left[\frac{\eta-\xi}{(\eta-\xi)^2+H_0^2} + \frac{\kappa-1}{2}R_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\Omega_0(\eta)d\eta - \Lambda\left[S_0^{(p)} + T_0^{(p)} + \int_{\gamma_p}^{\delta_p}sign(\eta-\xi)\tau_p^{(0)}(\eta)d\eta\right];$$

$$L_1^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\Delta_0(\alpha, H_0)}\sin(\alpha\xi)d\alpha;\ L_2^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};$$

$$L_3^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha H_0}\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\ R_1^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha H_0}\sin(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\quad R_2^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\left(\kappa^2 - e^{-\alpha H_0}\right)\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};$$

$$R_3^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\left[\kappa+1+(\kappa-1)e^{-2\alpha H_0}\right]\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\ \Delta_0(\alpha, H_0) = \kappa sh(\alpha H_0) + ch(\alpha H_0);$$

а условия (2.20) и (2.22) преобразуются к виду

$$\int_{\gamma_p}^{\delta_p}\tau_0(\eta)d\eta = Q_p^{(0)};\ \left(Q_p^{(0)} = \frac{Q_p}{\alpha G_+}\right);\ \int_{\alpha_j}^{\beta_j}\varphi_0(s)ds = 0 \qquad \left(p = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right). \tag{2.24}$$

В тех же безразмерных величинах (2.15) примет вид

$$\omega(\xi)=-\frac{2}{\pi(\kappa+1)}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi}-L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega_0(\xi)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}\int_{L_0}L_2^{(0)}(|\xi-\eta|)\Omega_0(\eta)d\eta+$$
$$+\frac{2H_0}{\pi(\kappa+1)}\int_{l_0}\left[\frac{1}{(\eta-\xi)^2+H_0^2}+\frac{\pi\kappa}{2H_0}L_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\tau_0(\eta)d\eta \quad (\xi\in R\setminus L_0). \tag{2.25}$$

Таким образом, в безразмерных величинах основными уравнениями поставленной задачи будут система СИУ (2.23), условия (2.24) и формула (2.25).

Частный случай. Рассмотрим простейший частный случай, когда стрингеры отсутствуют и имеется лишь одна трещина $L=(-a,a)$. Тогда система СИУ (2.23) вырождается в одинарное СИУ

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-\xi}-L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta=f_0(\xi)\ \ (-1<\xi<1), \tag{3.1}$$

решение которого согласно второму равенству (2.24) должно удовлетворять условию

$$\int_{-1}^{1}\varphi_0(\eta)d\eta=0. \tag{3.2}$$

Решение СИУ (3.1)-(3.2), полагая

$$\varphi_0(\xi)=\Phi_0(\xi)\Big/\sqrt{1-\xi^2} \qquad (-1<\xi<1),$$

где $\Phi_0(\xi)$ – гельдеровская функция на $[-1,1]$, известным численно-аналитическим методом решения СИУ [12-14] можно свести к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{s=1}^{N}K_{rs}X_s=a_r \quad \left(r=\overline{1,N}\right)$$
$$K_{rs}=\begin{cases}\dfrac{2}{N}\left[\dfrac{1}{\eta_s-\xi_r}-L_1^{(0)}(\eta_s-\xi_r)\right] & \left(r=\overline{1,N-1};\ s=\overline{1,N}\right);\\ 1 & \left(r=N;\ s=\overline{1,N}\right);\end{cases}$$
$$a_r=\begin{cases}f_0(\xi_r) & \left(r=\overline{1,N-1}\right);\\ 0 & (r=N);\end{cases}\qquad \begin{matrix}\xi_r=\cos\left(\dfrac{\pi r}{N}\right) & \left(r=\overline{1,N-1}\right);\\ \eta_s=\cos\left(\dfrac{(2s-1)\pi}{2N}\right) & \left(s=\overline{1,N}\right);\end{matrix}\qquad X_s=f_0(\eta_s), \tag{3.3}$$

где N – любое натуральное число, а ξ_r,η_s – известные чебышевские узловые точки.

После решения СЛАУ (3.2) безразмерное раскрытие трещин можно определить по формуле

$$\Psi_0(\xi)=\frac{\pi}{N}\sum_{s=1}^{N}sign(\eta_s-\xi)X_s \quad \left(\Psi_0(\xi)=\frac{1}{a}\left[u_z^+(x,+0)-u_z^-(x,-0)\right]\right).$$

Перейдем к вычислению КИН. По [15]

$$K_{III}(\pm a) = \mp \lim_{x\to\pm a\pm 0}\left[\sqrt{2\pi(x\mp a)}\tau_{yz}\right], \tag{3.4}$$

но полагая $\varphi'_-(x) \sim \Phi(\pm a)/\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\to\pm a\pm 0)$ и воспользовавшись известным интегралом из [16] (с. 175, ф-ла (21)), (2.15), находим

$$\tau_{yz}\Big|_{y=0} \sim -\frac{2G_+}{\kappa+1}\frac{\Phi(\pm a)}{\sqrt{x^2-a^2}}\, signx \quad (x\to\pm a\pm 0). \tag{3.5}$$

Приняв во внимание (3.5), из (3.4) получим

$$K_{III}(\pm a) = \mp\frac{2G_+G_-}{G_+ + G_-}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Phi(\pm a).$$

Далее введем безразмерный КИН. Тогда

$$K_{III}^{(0)}(\pm a) = \mp\Phi_0(\pm 1);\ K_{III}^{(0)}(\pm a) = \frac{G_+ + G_-}{2G_+G_-}\sqrt{\frac{a}{\pi}}K_{III}(\pm a). \tag{3.6}$$

Входящие в (3.6) значения $\Phi_0(\pm 1)$ после решения СЛАУ (3.3) легко вычисляются по интерполяционному многочлену Лагранжа [14].

В заключение отметим, что СИУ (3.1)-(3.2) можно свести к простейшему гиперсингулярному уравнению и изложенным в [17] методом построить его решение.

[1]Институт механики НАН РА
[2]Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

М. С. Григорян, В. Г. Едоян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О взаимодействии концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации

Рассматривается вопрос о взаимодействии коллинеарной системы из произвольного конечного числа сквозных ленточного типа трещин и коллинеарной системы стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации. Кусочно-однородное полупространство состоит из верхнего слоя и нижнего упругого полупространства, изготовленных из разнородных материалов. На линии стыковки разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин, а на верхней грани слоя – коллинеарная система стрингеров. При помощи интегрального преобразования Фурье решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений, откуда определяются плотности дислокаций на берегах трещин и касательные контактные напряжения под стрингерами. Выведены также уравнения определения разрушаю-

щих касательных напряжений вне системы трещин на линии их расположения и коэффициенты интенсивности напряжений. Рассмотрен частный случай.

Մ. Ս. Գրիգորյան, Վ. Հ. Եդոյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Ճաքերի և ստրինգերների տիպի լարումների կենտրոնացուցիչների ու կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական կիսատարածության փոխազդեցության մասին հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ

Դիտարկված է կամայական վերջավոր թվով միջանցիկ ժապավենային տիպի համագիծ ճաքերի համակարգի և կամայական վերջավոր թվով ստրինգերների նույնատիպ համակարգի ու կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական կիսատարածության փոխազդեցության հարցը: Կտոր առ կտոր համասեռ կիսատարածությունը բաղկացած է տարբեր նյութերից պատրաստված վերին առաձգական շերտից և ստորին առաձգական կիսատարածությունից: Դրանց միացման հարթության վրա տեղավորված են միջանցիկ ճաքերը, իսկ շերտի վերին եզրի վրա՝ ստրինգերը: Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը հանգում է երկու սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներից կազմված համակարգի լուծման, որտեղից որոշվում են ճաքերի ափերի դիսլոկացիաների խտությունը և ստրինգերների տակ գործող շոշափող կոնտակտային լարումները: Արտածվել են նաև ճաքերից դուրս գործող քայքայող շոշափող լարումների և դրանց ուժգնության գործակիցների որոշման բանաձևերը: Դիտարկվել է մասնավոր դեպք:

M. S. Grigoryan, V. H. Yedoyan,
corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On the Interaction of Stress Concentrators Such as Cracks and Stringers with a Piecewise Homogeneous Elastic Half-Space under Antiplane Deformation

The paper deals with the interaction of a collinear system of through-strip-type cracks of an arbitrary finite number and a collinear system of stringers with a piecewise homogeneous elastic half-space under anti-plane deformation. A piecewise homogeneous half-space consists of an upper layer and a lower elastic half-space made of heterogeneous materials. A collinear system of cracks is located on the interface of heterogeneous materials, while a collinear system of stringers is located on the upper face of the layer. Using the integral Fourier transform, solving the problem is reduced to solving a system of two SIEs, from which the dislocation densities on the crack edges and the tangential contact stresses under the stringers are determined. Equations for determining the breaking tangential stresses outside the system of cracks on their lines of location and stress intensity factors are also derived. A special case is considered.

Литература

1. *Greif R., Sanders J. L., Jr.* The effect of a stringer on the stress in a cracked Sheet, Office Naval Res. Tecn. Rept 17, Div. Engang Harvard Univ., June. 1963.
2. *Greif R., Sanders J. L., Jr.* – J. Appl. Mech. Transactions of the ASME, Ser. E. 1965. № 1. 1965. P. 66-74.
3. *Mkhitaryan S. M.* In: The 6th International Conference on Contemporary Problems of Architecture and Construction, June 24-27. 2014. Ostrava. Czech Republic. Advanced Materials Research. V. 1020. P. 253-257. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.253
4. *Григорян М. С., Мхитарян С. М.* – Доклады НАН РА. 2018. Т. 118. № 1. С. 49-59.
5. *Мхитарян С. М., Агаян К. Л.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 3. С. 3-17.
6. *Акопян В. Н.* Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Гитутюн. 2014. 322 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
8. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под ред. Ю. Мураками. М. Мир. 1990. Т. 1, 448 с. Т. 2. 568 с.
9. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М. Физматлит. 2001. 670 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. М. Наука. Т. 1. 1969. 344 с.
11. *Мхитарян С. М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1993. С. 129-143.
12. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* In: Mechanics of Fractures. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden. Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368-425.
13. *Theocaris P. S., Ioakimidi N. I.* – Quart. Appl. Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173-185.
14. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976. 443 с.
15. *Саврук М. П.* Коэффиценты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. Под ред. В. В. Панасюка. 1988. Т. 2. Киев. Наукова думка. 619 с.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. М. Наука. Т. 2. 1970. 328 с.
17. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2020. V. 73. № 1. P. 51-75.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. С. Мкртчян, М. М. Мкртчян

О напряженном состоянии кусочно-однородного слоя с абсолютно жесткими включениями при антиплоской деформации

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. М. Мхитаряном 7/II 2021)

Ключевые слова: *кусочно-однородные слои, антиплоская деформация, включение, сингулярные интегральные уравнения.*

Введение. В механике композитов, при проектировании различных строительных и авиационных конструкций, в тензометрии и во многих других отраслях прикладной механики и инженерной практики весьма важным представляется исследование вопросов взаимодействия концентраторов напряжений типа включений с массивными телами различных геометрических форм. Это объясняется тем, что вокруг этих концентраторов напряжений образуются локальные поля напряжений с большими и интенсивно изменяющимися градиентами, которые существенно снижают уровень прочности инженерных конструкций и их деталей. Поэтому качественное и количественное исследование вопросов концентрации напряжений представляет как теоретический, так и практический интерес. Такие задачи стали предметом исследования многих авторов [1-5].

В настоящей статье рассматривается задача о напряженном состоянии кусочно-однородного слоя при антиплоской деформации, когда крайние грани слоя усилены стрингерами конечных длин, а на линии стыка разнородных материалов расположена коллинеарная система из произвольного конечного числа абсолютно жестких тонких включений. При помощи преобразования Фурье решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) из трех уравнений.

Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ кусочно-однородный упругий слой состоит из верхнего слоя $\omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \le y \le h_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \le y \le 0\}$ с модулем сдвига G_- и в плоскости $y = 0$ содержит систему абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости Oxy составляют систему отрезков

$$L = \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]; \ \left(a_k < b_k; \ k = 1, 2, ..., N; \ b_k < a_{k+1}; \ (k = \overline{1, N-1})\right).$$

Далее грани верхнего $y = h_+$ и нижнего $y = -h_-$ слоя на отрезках $[c_1, d_1]$ и $[c_2, d_2]$ усилены стрингерами в виде полос

$$\omega_1 = \{c_1 \le x \le d_1; h_+ \le y \le h_+ + h_1; -\infty < z < \infty\},$$

$$\omega_2 = \{c_2 \le x \le d_2; -h_- - h_2 \le y \le -h_-; -\infty < z < \infty\}$$

с модулями сдвигов G_1, G_2 и высотами h_1 и h_2 соответственно. Предполагается, что на верхней и нижней гранях $y = h_+ + h_1$, $y = -h_- - h_1$ полос ω_1, ω_2 в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по оси Oz касательные силы интенсивностей $T_1(x)$, $T_2(x)$, т.е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_+ + h_1} = T_1(x) \ (c_1 < x < d_1); \ \tau_{yz}\Big|_{y=-h_- - h_2} = T_2(x) \ (c_2 < x < d_2), \quad (1)$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме того предположим, что на кромках $x = c_1, x = d_1$ и $x = c_2, x = d_2$ стрингеров в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по этой оси касательные сосредоточенные силы F_1, F_2 и Q_1, Q_2 соответственно. А на систему включений L действуют силы с равнодействующими P_k, направленные по оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого слоя в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy.

Требуется определить скачок касательных контактных напряжений на берегах включений и разрушающие напряжения вне системы включений на линии их расположения, а также действующие под стрингерами касательные контактные напряжения. При этом для стрингеров принимается модель Мелана [5, 6].

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу вдоль оси Ox разрежем на верхнюю (ω_+) и нижнюю (ω_-) полосы, а затем для действующих на их гранях $y = \pm 0$ напряжений введем следующие обозначения $(L' = R \setminus L; R = (-\infty, \infty))$:

$$-\tau_{yz}\Big|_{y=+0} = T_+(x) = \begin{cases} \tau_+(x) & (x \in L); \\ \tau(x) & (x \in L'); \end{cases} \quad -\tau_{yz}\Big|_{y=-0} = T_-(x) = \begin{cases} \tau_-(x) & (x \in L); \\ \tau(x) & (x \in L'). \end{cases} \tag{2}$$

На системе включений L смещения постоянны:

$$u_z^+(x,y)\Big|_{y=+0} = u_z^-(x,y)\Big|_{y=-0} = g(x) = \delta_k = \text{const}. \tag{3}$$

На гранях составной полосы имеем

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^+\Big|_{y=h_+} &= G_+ \frac{\partial u_z^+(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=h_+} = -H_+(x) = \begin{cases} -\tau_1(x) & \left(x \in [c_1, d_1]\right); \\ 0 & \left(x \notin [c_1, d_1]\right); \end{cases} \\ \tau_{yz}^-\Big|_{y=h_-} &= G_- \frac{\partial u_z^-(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=-h_-} = -H_-(x) = \begin{cases} -\tau_2(x) & \left(x \in [c_2, d_2]\right); \\ 0 & \left(x \notin [c_2, d_2]\right); \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

где $u_z^{\pm}(x,y)$ – единственные смещения точек составной полосы в направлении оси Oz, а $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ – неизвестные пока касательные контактные напряжения под стрингерами. Функции $u_z^{\pm}(x,y)$ в областях $\omega_+^{(0)} = \{-\infty < x < \infty; 0 < y < h_+\}$, $\omega_-^{(0)} = \{-\infty < x < \infty; -h_- < y < 0\}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u_z^{\pm}(x,y) = \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Omega_+(x) = \frac{T_+(x) + T_-(x)}{2}; \quad \Phi_{\pm}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{du_z^+(x,+0)}{dx} \pm \frac{du_z^-(x,-0)}{dx} \right) \tag{6}$$

$$\Omega_-(x) = \frac{T_+(x) - T_-(x)}{2} = \begin{cases} \psi(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in L'). \end{cases}$$

С помощью преобразования Фурье по переменной x из уравнения (5) и граничных условий (2)-(4) в соответствии с обозначениями (6) придем к ключевым уравнениям задачи:

$$\begin{aligned} \Omega_+(x) = {} & \frac{G_+ - G_-}{G_+ + G_-}\Omega_-(x) + \frac{2G_+G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_L R(x-s)\Omega_-(s)\,ds + \frac{G_-}{\pi}\int_{c_1}^{d_1} Q_1(x-s)\tau_1(s)\,ds + \\ & + \frac{G_+}{\pi}\int_{c_2}^{d_2} Q_2(x-s)\tau_2(s)\,ds \qquad (x \in R) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Phi_+(x)=\frac{2}{\pi(G_++G_-)}\int_L\frac{\Omega_-(s)ds}{x-s}+\frac{2}{\pi(G_++G_-)}\int_L K_1(x-s)\Omega_-(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{d_1}Q_{10}(x-s)\tau_1(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_{c_2}^{d_2}Q_{20}(x-s)\tau_2(s)ds;\quad (x\in R) \tag{8}$$

$$K(x)=\int_0^\infty\frac{G_+th(\lambda h_+)[th(\lambda h_-)-1]+G_-th(\lambda h_-)[th(\lambda h_+)-1]}{G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)}\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$K_1(x)=\int_0^\infty\frac{G_+[1-th(\lambda h_+)]+G_-[1-th(\lambda h_-)]}{G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)}\sin(\lambda x)d\lambda;\ R(x)=$$

$$\int_0^\infty\frac{th(\lambda h_+)-th(\lambda h_-)}{G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)}\cos(\lambda x)d\lambda;$$

$$Q_1(x)=\int_0^\infty\frac{th(\lambda h_-)}{ch(\lambda h_+)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\cos(\lambda x)d\lambda;$$

$$Q_{10}(x)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda h_+)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$Q_2(x)=\int_0^\infty\frac{th(\lambda h_+)}{ch(\lambda h_-)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\cos(\lambda x)d\lambda;$$

$$Q_{20}(x)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda h_-)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\sin(\lambda x)d\lambda.$$

Для производных смещений на гранях полос $y=\pm h_\pm$ имеем

$$\frac{du_z^+(x,h_+)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_L R_1(x-s)\Omega_-(s)ds-\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1}\frac{\tau_1(s)ds}{s-x}+\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1}M_1(x-s)\tau_1(s)ds-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{c_2}^{d_2}M_2(x-s)\tau_2(s)ds;\ (x\in R) \tag{9}$$

$$\frac{du_z^-(x,-h_-)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_L R_2(x-s)\Omega_-(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{d_1}M_2(x-s)\tau_1(s)ds+\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1}\frac{\tau_1(s)ds}{s-x}+ \tag{10}$$
$$+\frac{1}{\pi G_-}\int_{c_2}^{d_2}M_3(x-s)\tau_2(s)ds.\ (x\in R)$$

$$R_1(x)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda h_+)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$R_2(x)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda h_-)\left[G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)\right]}\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$M_1(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(1-th(\lambda h_+)\right)\left(G_+-G_-th(\lambda h_-)\right)}{G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)}\sin\left(\lambda x\right)d\lambda;$$

$$M_3(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(1-th(\lambda h_-)\right)\left(G_+th(\lambda h_+)-G_-\right)}{G_+th(\lambda h_+)+G_-th(\lambda h_-)}\sin\left(\lambda x\right)d\lambda;$$

$$M_2(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\lambda h_+\right)\mathrm{ch}\left(\lambda h_-\right)\left[G_+\mathrm{th}(\lambda h_+)+G_-\mathrm{th}(\lambda h_-)\right]}\sin\left(\lambda x\right)d\lambda.$$

Приняв во внимание (1) для верхних и нижних стрингеров, воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования стрингера по модели Мелана при антиплоской деформации [6]

$$h_1G_1\frac{d^2w_1}{dx^2}=\tau_1\left(x\right)-T_1\left(x\right)\ \left(c_1<x<d_1\right);$$

$$h_2G_2\frac{d^2w_2}{dx^2}=-\tau_2\left(x\right)+T_2\left(x\right)\ \left(c_2<x<d_2\right), \tag{11}$$

где $w_1=w_1\left(x\right)$ и $w_2=w_2\left(x\right)$ – компоненты смещений точек стрингеров в направлении оси Oz. При этом условия равновесия этих стрингеров имеют вид

$$\int\limits_{c_1}^{d_1}\tau_1\left(x\right)dx=F_2-F_1+\int\limits_{c_1}^{d_1}T_1\left(x\right)dx;\quad \int\limits_{c_2}^{d_2}\tau_2\left(x\right)dx=Q_2-Q_1+\int\limits_{c_2}^{d_2}T_2\left(x\right)dx. \tag{12}$$

Интегрированием (11) легко находим

$$\begin{aligned}h_1G_1\frac{dw_1}{dx}&=\frac{1}{2}\left(F_1+F_2\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{c_1}^{d_1}\mathrm{sign}\left(x-s\right)\left[\tau_1\left(s\right)-T_1\left(s\right)\right]ds;\\ h_2G_2\frac{dw_2}{dx}&=-\frac{1}{2}\left(Q_1+Q_2\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{c_2}^{d_2}\mathrm{sign}\left(x-s\right)\left[\tau_2\left(s\right)-T_2\left(s\right)\right]ds.\end{aligned} \tag{13}$$

В условие контакта упругих полос и стрингеров

$$u_z^+\left(x,h_+\right)=w_1\left(x\right)\ \text{или}\ \frac{du_z^+\left(x,h_+\right)}{dx}=\frac{dw_1\left(x\right)}{dx}\quad\left(c_1<x<d_1\right);$$

$$u_z^-\left(x,-h_-\right)=w_2\left(x\right)\ \text{или}\ \frac{du_z^-\left(x,-h_-\right)}{dx}=\frac{dw_2\left(x\right)}{dx}\quad\left(c_2<x<d_2\right)$$

подставим выражения из (9), (10) и (13). После простых преобразований относительно неизвестных контактных напряжений придем к интегральным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{c_2}^{d_2} R_1(x-s)\Omega_-(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1}\frac{\tau_1(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1} M_1(x-s)\tau_1(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2h_1G_1}\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)\tau_1(s)\,ds-\frac{1}{\pi}\int_{c_2}^{d_2} M_2(x-s)\tau_2(s)\,ds=\\
&=\frac{1}{2h_1G_1}\left[F_1+F_2\right]-\frac{1}{2h_1G_1}\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)T_1(s)\,ds;\qquad \left(x\in(c_1,d_1)\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int_{c_2}^{d_2} R_2(x-s)\Omega_-(s)\,ds-\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{d_1} M_2(x-s)\tau_1(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_-}\int_{c_2}^{d_2}\frac{\tau_2(s)\,ds}{s-x}-\\
&-\frac{1}{\pi G_-}\int_{c_2}^{d_2} M_3(x-s)\tau_2(s)\,ds-\frac{1}{2h_2G_2}\int_{c_2}^{d_2}\operatorname{sign}(x-s)\tau_2(s)\,ds=\\
&=\frac{1}{2h_2G_2}\left[Q_1+Q_2\right]-\frac{1}{2h_2G_2}\int_{c_2}^{d_2}\operatorname{sign}(x-s)T_2(s)\,ds.\qquad \left(x\in(c_2,d_2)\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Рассматривая уравнение (8) на L, а также уравнения (14) и (15), придем к определяющей системе СИУ поставленной задачи

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\pi(G_++G_-)}\displaystyle\int_L\frac{\psi(s)ds}{s-x}-\frac{2}{\pi(G_++G_-)}\int_L K(s-x)\psi(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{d_1} Q_{10}(s-x)\tau_1(s)\,ds-\\
\qquad\qquad -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{c_2}^{d_2} Q_{20}(s-x)\tau_2(s)\,ds=0;\qquad (x\in L)\\
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L R_1(x-s)\psi(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1}\frac{\tau_1(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi G_+}\int_{c_1}^{d_1} M_1(x-s)\tau_1(s)\,ds-\frac{1}{2h_1G_1}\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)\tau_1(s)\,ds\\
-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{c_2}^{d_2} M_1(x-s)\tau_2(s)\,ds=\frac{1}{2h_1G_1}\left[P_1+P_2\right]-\frac{1}{2h_1G_1}\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)T_1(s)\,ds;\qquad \left(x\in(c_1,d_1)\right)\\
-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L R_2(x-s)\psi(s)\,ds-\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{d_1} M_2(x-s)\tau_1(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_-}\int_{c_2}^{d_2}\frac{\tau_2(s)\,ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_-}\int_{c_2}^{d_2} M_3(x-s)\tau_2(s)\,ds\\
-\dfrac{1}{2h_2G_2}\displaystyle\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)\tau_2(s)\,ds=\frac{1}{2h_2G_2}\left[Q_1+Q_2\right]-\frac{1}{2h_2G_2}\int_{c_1}^{d_1}\operatorname{sign}(x-s)T_2(s)\,ds;\ \left(x\in(c_2,d_2)\right)
\end{cases}
\tag{16}
$$

Первое уравнение системы (16) должно рассматриваться при условиях

$$
\int_{a_k}^{b_k}\psi(x)dx=P_k,\qquad (k=\overline{1,N}),
\tag{17}
$$

выражающих условия равновесия k-го включения, а второе и третье уравнения должны рассматриваться при условиях равновесия стрингеров (12).

Рассматривая же уравнение системы (7) на линии спая полос вне включений, имеем:

$$
\tau(x)=\frac{2G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_L R(x-s)\psi(s)\,ds+\frac{G_-}{\pi}\int_{c_1}^{d_1} Q_1(x-s)\tau_1(s)\,ds+\frac{G_+}{\pi}\int_{c_2}^{d_2} Q_2(x-s)\tau_2(s)\,ds.\ (x\in L')
\tag{18}
$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругой полосы с трещинами и стрингерами сводится к решению системы (16) при условиях (17). После решения (16), (17) напряжение на линии спая вне включения определяется формулой (18).

Решение определяющей СИУ. Для решения определяющей СИУ (16), (17) сначала введем безразмерные координаты и величины:

$$\xi=\frac{x}{|a_1|},\ \eta=\frac{s}{|a_1|};\ \bar{h}_+=\frac{h_+}{|a_1|},\ \bar{h}_-=\frac{h_-}{|a_1|};\ \bar{h}_1=\frac{h_1}{|a_1|},\ \bar{h}_2=\frac{h_2}{|a_1|};\ \alpha_k=\frac{a_k}{|a_1|},\ \beta_k=\frac{b_k}{|a_1|};\ (k=\overline{1,N})$$

$$\gamma_k=\frac{c_k}{|a_1|},\ \delta_k=\frac{c_k}{|a_1|};\ (k=\overline{1,2}),\ \mu=G_+/G_-;\ \mu_1=G_1/G_+;\ \mu_2=G_2/G_-;\ L_0=\bigcup_{k=1}^{N}(\alpha_k;\beta_k);$$

$$\psi_0(\xi)=\frac{\psi(|a_1|\xi)}{G_++G_-};\ \tau_1^{(0)}(\xi)=\frac{\tau_1(|a_1|\xi)}{G_1};\ \tau_2^{(0)}(\xi)=\frac{\tau_2(|a_1|\xi)}{G_2};\ P_1^{(0)}=\frac{P_1}{|a_1|G_1};P_2^{(0)}=\frac{P_2}{|a_1|G_2};$$

$$Q_1^{(0)}=\frac{Q_1}{|a_1|G_1};\ Q_2^{(0)}=\frac{Q_2}{|a_1|G_2};\ T_1^{(0)}(\xi)=\frac{T_1(|a_1|\xi)}{G_1};\ T_2^{(0)}(\xi)=\frac{T_2(|a_1|\xi)}{G_2};$$

после чего (16) преобразуется в СИУ

$$\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}\frac{\psi_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+\frac{2}{\pi}\int_{L_0}K_0(\eta-\xi)\psi_0(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}\bar{Q}_{10}(\eta-\xi)\tau_1^{(0)}(\eta)d\eta-\\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma_2}^{\delta_2}\bar{Q}_{20}(\eta-\xi)\tau_2^{(0)}(\eta)d\eta=0; \qquad (\xi\in L_0)\\ \dfrac{4(\mu+1)}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}R_{10}(\eta-\xi)\psi_0(\eta)d\eta-\frac{\mu_1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}\frac{\tau_1^{(0)}(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}\left[\mu_1M_{10}(\eta-\xi)-\frac{\pi}{2\bar{h}_1}\operatorname{sign}(\eta-\xi)\right]\tau_1^{(0)}(\eta)d\eta\\ +\dfrac{\mu_1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma_2}^{\delta_2}M_{20}(\eta-\xi)\tau_2^{(0)}(\eta)d\eta=F_1(\xi), \qquad (\xi\in(\gamma_1,\delta_1))\\ -\dfrac{4(\mu+1)}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}R_{20}(\eta-\xi)\psi_0(\eta)d\eta+\frac{\mu\mu_1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}M_{20}(\eta-\xi)\tau_1^{(0)}(\eta)d\eta-\frac{\mu_2}{\pi}\int_{\gamma_2}^{\delta_2}\frac{\tau_2^{(0)}(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\\ +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma_2}^{\delta_2}\left[\mu_2M_{30}(\eta-\xi)+\frac{\pi}{2\bar{h}_2}\operatorname{sign}(\eta-\xi)\right]\tau_2^{(0)}(\eta)d\eta=F_2(\xi), \qquad (\xi\in(\gamma_2,\delta_2))\end{cases} \tag{19}$$

$$K_0(\xi)=-\int_0^\infty\frac{\mu[th(\lambda\bar{h}_+)-1]+1-th(\lambda\bar{h}_-)}{\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)}\sin(\lambda\xi)d\lambda;\quad R_0(\xi)=\int_0^\infty\frac{th(\lambda\bar{h}_+)-th(\lambda\bar{h}_-)}{\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)}\cos(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$R_{10}(\xi)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda\bar{h}_+)\left[\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;R_{20}(\xi)=\int_0^\infty\frac{1}{ch(\lambda\bar{h}_-)\left[\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$M_{10}(\xi)=-\int_0^\infty\frac{\left(1-th(\lambda\bar{h}_+)\right)\left(\mu-th(\lambda\bar{h}_-)\right)}{\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)}\sin(\lambda\xi)d\lambda;M_{30}(\xi)=-\int_0^\infty\frac{\left(1-th(\lambda\bar{h}_-)\right)\left(\mu th(\lambda\bar{h}_-)-1\right)}{\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$M_{20}(\xi)=\int_0^\infty \frac{1}{ch(\lambda\bar{h}_+)ch(\lambda\bar{h}_-\left[\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$\bar{Q}_{10}(\xi)=\int_0^\infty \frac{\mu+1}{ch(\lambda\bar{h}_+)\left[\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;\bar{Q}_{20}(\xi)=\int_0^\infty \frac{\mu+1}{ch(\lambda\bar{h}_-)\left[\mu th(\lambda\bar{h}_+)+th(\lambda\bar{h}_-)\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$F_1(\xi)=\frac{1}{2\bar{h}_1}\left[P_1^{(0)}+\frac{\mu_2}{\mu\mu_1}P_2^{(0)}\right]+\frac{1}{2\bar{h}_1}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}\operatorname{sign}(\eta-\xi)T_1^{(0)}(\eta)d\eta;\quad \left(\xi\in(\gamma_1,\delta_1)\right)$$

$$F_2(\xi)=\frac{1}{2\bar{h}_2}\left[\frac{\mu\mu_1}{\mu_2}Q_1^{(0)}+Q_2^{(0)}\right]+\frac{1}{2\bar{h}_2}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}\operatorname{sign}(\eta-\xi)T_2^{(0)}(\eta)d\eta;\quad \left(\xi\in(\gamma_2,\delta_2)\right)$$

а условия (17) – в условия

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\psi_0(\xi)d\xi=\frac{P_k}{|a_1|(G_++G_-)};\ \left(k=\overline{1,N}\right). \tag{20}$$

Каждый интервал $(\alpha_k,\beta_k),(\gamma_k,\delta_k)$ системы СИУ (19) преобразуем в интервал (-1,1), полагая

$$\xi=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2},\ \eta=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\ (k=\overline{1,N}),\ (-1<t,u<1),$$

$$\xi=\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}t+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2},\ \eta=\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}u+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2}\quad (k=\overline{1,2}),\ (-1<t,u<1)$$

в результате СИУ (18) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций

$$\psi_k(t)=\psi_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);\ (-1<t<1;\ k=\overline{1,N})$$

$$\bar{\tau}_k(t)=\tau_k^{(0)}\left(\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}t+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2}\right)\ (-1<t<1;\ k=\overline{1,2})$$

на интервале (-1,1).

Затем определяющую СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на (-1,1). Решение системы (19)–(20) строится числено-аналитическим методом [8–10], как в [7], с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

Заключение. Задача о взаимодействии стрингеров и тонкостенных абсолютно жестких включений с упругим кусочно-однородным слоем при антиплоской деформации рассмотрена в общей постановке. Все характеристики задачи можно выразить аналитическими формулами простых структур. Результаты статьи могут быть использованы в расчетах строительных, в частности железобетонных, конструкций.

Институт механики НАН РА,
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

М. С. Мкртчян, М. М. Мкртчян

О напряженном состоянии кусочно-однородного слоя с абсолютно жесткими включениями при антиплоской деформации

Рассматривается задача об определении основных характеристик напряженного состояния композита в виде кусочно-однородного упругого слоя, усиленного по своим крайним граням стрингерами конечных длин и содержащего на линии стыка разнородных материалов коллинеарную систему из произвольного конечного числа абсолютно жестких включений.

Մ. Ս. Մկրտչյան, Մ. Մ. Մկրտչյան

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ բացարձակ կոշտ ներդրակներով կտոր առ կտոր համասեռ շերտի լարվածային վիճակի մասին

Դիտարկվում է կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական շերտի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակի հիմնական բնութագրիչների որոշման խնդիրը, երբ կոմպոզիտն իր եզրային նիստերում ուժեղացված է վերջավոր երկարությամբ ստրինգերներով, իսկ տարասեռ նյութերի միացման գծի վրա կան կամայական վերջավոր թվով բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակներ:

M. S. Mkrtchyan, M. M. Mkrtchyan

On the Stressed State of a Piecewise Homogeneous Layer with Absolutely Rigid Inclusions under Antiplane Deformation

In this paper, we consider the problem of determining the main characteristics of the stress state of a composite in the form of a piecewise homogeneous elastic layer of heterogeneous materials. The layer is reinforced along its extreme faces by stringers of finite lengths and contains a collinear system of an arbitrary finite number of absolutely rigid inclusions at the junction line of heterogeneous materials.

Литература

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М. Наука. 1974. 640 с.
2. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М. Наука. 1982. 344 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. Наука. 1974. 456 с.
4. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
5. *Melan E.* – Ingr. Arch. 1932. Bd. 3. № 2. S. 123-129.
6. *Мхитарян С. М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1993. С. 129-143.
7. *Манукян Э. А., Мкртчян М.* С. – Изв. НАН РА. Механика. 2010. Т. 63. № 2. С. 21-33.
8. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976. 443 с.
9. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* In: Mechanics of Fractures. V. 1. Methods of analy and solutionsof crack problemssis. Leyden. Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368-425.
10. *Theocaric P. S., Iokamidis N. I.* – Quart. Appl. Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173-185.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян

Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел

(Представлено 21/I 2021)

Ключевые слова: *анизотропное тело, плоская деформация, соотношения упругости.*

Введение. В известных монографиях по теории упругости анизотропного тела вопросы обобщенной плоской деформации рассмотрены для анизотропных тел**,** имеющих плоскость упругой симметрии [1, 2]. Возникает естественный вопрос – что будет, если анизотропия общая (21 постоянная упругости). В статье выведены соотношения упругости обобщенной плоской деформации, соответствующие телам, обладающим общей анизотропией. Обсужден вопрос их реализации.

1. Вывод основных соотношений обобщенной плоской деформации анизотропного тела. Для вывода этих соотношений воспользуемся соотношениями упругости трехмерной задачи:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{14}\sigma_{yz} + a_{15}\sigma_{xz} + a_{16}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{24}\sigma_{yz} + a_{25}\sigma_{xz} + a_{26}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{34}\sigma_{yz} + a_{35}\sigma_{xz} + a_{36}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{yz} &= a_{14}\sigma_{xx} + a_{24}\sigma_{yy} + a_{34}\sigma_{zz} + a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz} + a_{46}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{xz} &= a_{15}\sigma_{xx} + a_{25}\sigma_{yy} + a_{35}\sigma_{zz} + a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz} + a_{56}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{46}\sigma_{yz} + a_{56}\sigma_{xz} + a_{66}\sigma_{xy},
\end{aligned} \tag{1}$$

где ε_{ij} – компоненты деформаций**,** σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, a_{ij} – постоянные упругости. ε_{ij} выражаются через компоненты u, v, w вектора перемещения по известным формулам

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \; \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \; \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

При обобщенной плоской деформации считается, что

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Тогда из соотношений (2) следует

$$\varepsilon_{zz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{yz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{xz} \equiv 0. \tag{4}$$

Из соотношений (1) для $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ с учетом (4) напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ можно выразить через $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{xy}\right),\\
\sigma_{yz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{21}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{xy}\right),\\
\sigma_{xz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{31}\sigma_{xx} + \alpha_{32}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{xy}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{44}a_{55}\left(a_{13} - a_{15}\right) + a_{45}\left(a_{35}a_{14} - a_{45}a_{13}\right) + a_{34}\left(a_{15}a_{45} - a_{14}a_{55}\right),\\
\alpha_{12} &= a_{44}a_{55}\left(a_{23} - a_{25}\right) + a_{45}\left(a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45}\right) + a_{34}\left(a_{25}a_{45} - a_{55}a_{24}\right),\\
\alpha_{13} &= a_{44}a_{55}\left(a_{36} - a_{56}\right) + a_{45}\left(a_{35}a_{46} - a_{45}a_{36}\right) + a_{34}\left(a_{45}a_{56} - a_{55}a_{46}\right),\\
\alpha_{21} &= a_{55}\left(a_{33}a_{14} - a_{43}a_{13}\right) + a_{35}\left(a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35}\right) + a_{45}\left(a_{13}a_{35} - a_{33}a_{15}\right),\\
\alpha_{22} &= a_{55}\left(a_{33}a_{24} - a_{23}a_{34}\right) + a_{35}\left(a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35}\right) + a_{25}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right),\\
\alpha_{23} &= a_{33}\left(a_{55}a_{46} - a_{45}a_{56}\right) + a_{35}\left(a_{34}a_{56} - a_{35}a_{46}\right) + a_{36}\left(a_{35}a_{45} - a_{55}a_{43}\right),\\
\alpha_{31} &= a_{34}\left(a_{13}a_{45} - a_{34}a_{15}\right) + a_{44}\left(a_{33}a_{15} - a_{13}a_{35}\right) + a_{14}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right),\\
\alpha_{32} &= a_{34}\left(a_{23}a_{45} - a_{25}a_{34}\right) + a_{35}\left(a_{24}a_{34} - a_{23}a_{44}\right) + a_{33}\left(a_{25}a_{44} - a_{24}a_{45}\right),\\
\alpha_{33} &= a_{34}\left(a_{45}a_{36} - a_{34}a_{56}\right) + a_{44}\left(a_{33}a_{56} - a_{35}a_{36}\right) + a_{46}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}, \qquad \alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}.$$

Подставив значения $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$, вычисленные по формуле (5), в соотношения упругости (1) для $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$, получим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \left[a_{11} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{14}\alpha_{21} + a_{15}\alpha_{31} + a_{13}\alpha_{11} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{12} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{13}\alpha_{12} + a_{14}\alpha_{22} + a_{15}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{16} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{23} + a_{15}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{yy} &= \left[a_{12} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{11} + a_{24}\alpha_{21} + a_{25}\alpha_{31} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{22} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{12} + a_{24}\alpha_{22} + a_{25}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{26} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{13} + a_{24}\alpha_{23} + a_{25}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{xy} &= \left[a_{16} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{11} + a_{46}\alpha_{21} + a_{56}\alpha_{31} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{26} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{12} + a_{46}\alpha_{22} + a_{56}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{66} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{13} + a_{46}\alpha_{23} + a_{56}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

С учетом того, что в плоской задаче все напряжения являются функциями от тангенциальных координат x, y, первые два уравнения равновесия трехмерной задачи упругости примут вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X\left(x, y\right) = 0, \\
&\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y\left(x, y\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $X\left(x, y\right), Y\left(x, y\right)$ – компоненты массовых тел. Уравнения (8) с учетом соотношений упругости (7) составляют полную систему для определения напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ и перемещений u, v. Затем по формулам (5) определяются напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$. Однако третье уравнение равновесия трехмерной задачи в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + Z(x, y) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9), как правило, не будет выполняться, если заранее задано $Z(x, y)$. Поскольку напряжения σ_{xz}, σ_{yz} уже известны, необходимо, чтобы

$$Z(x, y) = -\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right). \tag{10}$$

Таким образом, можно констатировать, что при наличии общей анизотропии тело может находиться в состоянии обобщенной плоской деформации, если помимо тангенциальных нагрузок на него будет приложена также нормальная нагрузка, определяемая формулой (10).

2. Частные случаи упругой симметрии. а) ***Рассмотрим случай наличия плоскости упругой симметрии.*** Направляя ось $0Z$ нормально к этой плоскости, а две другие в нее, заключаем, что 8 постоянных упругости равны нулю [1-3]:

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0. \tag{11}$$

Согласно формулам (6), (11) имеем

$$\alpha_{11} = \left(a_{44}a_{55} - a_{45}^2\right)a_{13}, \quad \alpha_{12} = \left(a_{44}a_{55} - a_{45}^2\right)a_{23},$$

$$\alpha_{13} = \left(a_{44}a_{55} - a_{45}^2\right)a_{23}, \;\; \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{22} = 0, \; \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0, \tag{12}$$

$$\Delta = a_{33}\left(a_{44}a_{55} - a_{45}^2\right).$$

Согласно (5), (12)

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\frac{1}{a_{33}}\left(a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{xy}\right), \\ \sigma_{xz} &= 0, \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

а согласно (7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy} + \beta_{16}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy} + \beta_{26}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{xy} &= \beta_{16}\sigma_{xx} + \beta_{26}\sigma_{yy} + \beta_{66}\sigma_{xy}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6.$$

Соотношения (14) совпадают с соотношениями упругости, приводимыми С. Г. Лехницким [1]. Если тело имеет плоскость упругой симметрии, для решения обобщенной плоской задачи необходимо решить уравнения равновесия (8) при соотношениях упругости (14) и соответствующих граничных условиях.

б) Ортотропное тело (три плоскости упругой симметрии). Помимо (11) равны нулю также $a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0$. Согласно (14) имеем

$$\beta_{16} = \beta_{26} = 0, \ \beta_{66} = a_{66}, \ \beta_{11} = \left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33},$$

$$\beta_{22} = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right)/a_{33}, \quad \beta_{12} = \left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}\right)/a_{33}. \tag{15}$$

Соотношения упругости будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{16}$$

Эти же соотношения имеют место для кристаллов ромбической системы [3], а также для кристаллов кубической системы с той лишь разницей, что для последних $a_{44} = a_{55} = a_{66}$.

в) Монотропное или трансверсиально-изотропное тело (наличие плоскости изотропии). Помимо (11) имеют место

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0,$$

$$a_{11} = a_{22}, \ a_{13} = a_{23}, \ a_{44} = a_{55}, \ a_{66} = 2\left(a_{11} - a_{12}\right). \tag{17}$$

Для таких тел

$$\begin{aligned} &\beta_{11} = \beta_{22} = \left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33}, \\ &\beta_{12} = \left(a_{12}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33}, \beta_{66} = a_{66} = 2\left(a_{11} - a_{12}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Соотношениями упругости являются

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{11}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{xy} &= 2\left(a_{11} - a_{12}\right)\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{19}$$

г) Изотропное тело. Помимо (11), (17) имеем

$$a_{12} = a_{13} = a_{23}, \ a_{11} = a_{22} = a_{23}, \ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3 = \mathrm{E}. \tag{20}$$

В результате

$$\beta_{11}=\beta_{22}=\frac{1-\upsilon^2}{E},\beta_{12}=-\frac{\upsilon(1+\upsilon)}{E},a_{66}=\frac{2(1+\upsilon)}{E}=\frac{1}{G}, \qquad (21)$$

где E,G – модуль Юнга и сдвига, υ – коэффициент Пуассона.

Соотношениями упругости будут

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1-\upsilon^2}{E}\left(\sigma_{xx}-\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\sigma_{yy}\right),\varepsilon_{yy}=\frac{1-\upsilon^2}{E}\left(\sigma_{yy}-\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\sigma_{xx}\right),$$
$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{G}\sigma_{xy}=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{xy}. \qquad (22)$$

которые совпадают с классическими соотношениями упругости обобщенной плоской деформации изотропного тела [4].

Во всех рассмотренных частных случаях третье уравнение равновесия трехмерной задачи выполняется автоматически в силу (13), если нормальная составляющая $Z(x, y)$ объемной нагрузки отсутствует, т.е. всегда можно реализовать плоское деформированное состояние.

Институт механики НАН РА
e-mail: lagal @sci.am

Академик Л. А. Агаловян

Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел

На основе соотношений упругости пространственной задачи теории упругости анизотропного тела (21 постоянная упругости) выведены основные соотношения обобщенной плоской деформации. Установлены условия осуществления этого состояния. Показано, что в случае общей анизотропии обобщенное плоское деформированное состояние не всегда может быть реализовано, в частности, помимо того, что все нагрузки должны быть в основном тангенциальными, к телу должна быть приложена специальная нормальная нагрузка, зависящая от тангенциальных координат. Единым подходом выведены соотношения обобщенной плоской деформации для частных случаев упругой симметрии, часть которых совпадает с уже известными соотношениями.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան

Անիզոտրոպ մարմինների ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի հիմնական առնչությունների մասին

Անիզոտրոպ մարմնի (առաձգականության 21 հաստատուն) տարածական խնդրի առնչություններից արտածվում են ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի խնդրի հիմնական առնչությունները: Բացահայտված են այդ վիճակի իրականացման պայմանները: Ցույց է տրված, որ ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիոն վիճակը ոչ միշտ կարող է իրագործվել: Մասնավորապես, երբ բոլոր բեռները պետք է լինեն հիմնականում տանգենցիալ, մարմնին պետք է կիրառվի հատուկ տիպի նորմալ բեռ՝ կախված տանգենցիալ կոորդինատներից: Առաձգական սիմետրիայի մասնավոր դեպքերի համար միասնական մոտեցմամբ արտածված են ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի առնչությունները, որոնց մի մասը համընկնում է արդեն հայտնի առնչությունների հետ:

Academician L. A. Aghalovyan

On Main Relations of Generalized Plane Deformation of Anisotropic Bodies

On the basis of the elasticity relations of the spatial problem of the elasticity theory of an anisotropic body (21 elasticity constants), the main relations of the generalized plane deformation were derived. The conditions for the implementation of this state were established. It is shown that in the case of general anisotropy, the generalized plane strained state cannot always be realized, in particular, in additiont that all loads must be mainly tangential, a special normal load must be applied to the body, which depend on the tangential coordinates. Using a unified approach, the relations of generalized plane deformation were derived for particular cases of elastic symmetry, part of which coincide with the already known relations.

Литература

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. Наука. 1977. 416 с.
2. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Гетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига. Зинанте. 1980. 572 с.
3. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М. Наука. 1982. 424 с.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 547.787

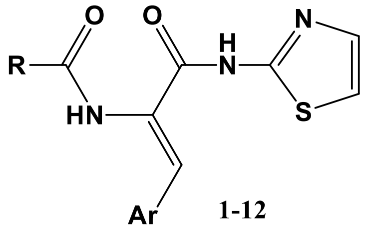
А. А. Оганнесян, Н. А. Оганнесян, С. Р. Тосунян,
член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян

Исследование антихолинэстеразных свойств (Z)-N-(3-оксо-1-арил-3-(тиазол-2-иламино)проп-1-ен-2-ил)ариламидов и (Z)-5-арилиден-2-(арил)-3-(тиазол-2-ил)-3,5-дигидро-4H-имидазол-4-онов

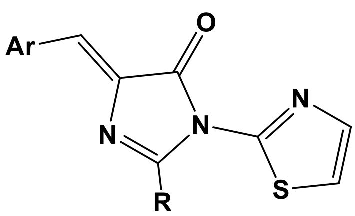
(Представлено 27/I 2021)

Ключевые слова: *тиазоламиды, α,β-дегидроаминокислоты, 5-имидазолоны, антихолинэстеразные свойства, антирадикальные свойства.*

Производные 2-аминотиазола проявляют широкий спектр биологической активности [1-5]. В этом ряду N-алкил-2-аминотиазолы [6] являются ингибиторами ацетил- и бутирилхолинэстераз. Настоящее сообщение посвящено исследованию антихолинэстеразных свойств амидов α,β-дегидроаминокислот **1-12** и 5-имидазолонов **13-20,** содержащих остатки 2-аминотиазола.



1-12

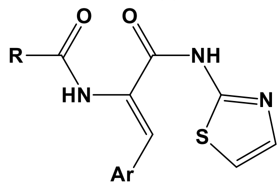


13-20

Синтез производных α,β-дегидроаминокислот **1-12** описан в [7], а 5-имидазолонов **13-20** – в [8]. Исследование анхтихолинэстеразных свойств соединений **1-20** как по отношению к ацетилхолинэстеразе (АХЭ, КФ 3.1.1.7), так и бутирилхолинэстеразе (БуХЭ, КФ 3.1.1.8) осуществлено по методу Эльмана [9]. Полученные результаты приведены в табл. 1 и 2. Согласно полученным данным (табл. 1) амиды **1-12** в зависимости от структурных изменений в концентрации 8x10^{-5} М ингибируют АХЭ на 54-98%, а БуХЭ – на 75-98%. В этом ряду сравнительно высокую активность по отношению к АХЭ проявляет (Z)-N-(3-оксо-1-фенил-3-(тиазол-2-ил-амино)проп-1-эн-2-ил)бензамид (**1,** 98%). В случае БуХЭ сравнительно высокий процент ингибирования наблюдается у (Z)-N-(1-(4-бромфенил)-3-оксо-3-(тиазол-2-иламино)-проп-1-ен-2-ил)-4-метоксибензамида (**5**).

Таблица 1

Антихолинэстеразные свойства амидов 1-11в концентрации 8x10-5M



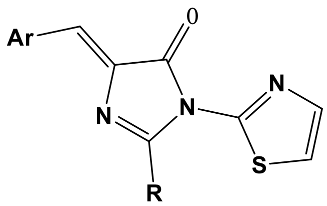
No	R	Ar	Ингибирование, %	
			АХЭ (А)	БуХЭ (Б)
1	C_6H_5	C_6H_5	98,2	95,9
2	C_6H_5	C_6H_4OMe-4	95,5	75,0
3	C_6H_5	C_6H_4Cl-4	74,7	95,1
4	C_6H_5	$C_6H_3O_2CH_2$-3,4	54,2	95,8
5	4-MeOC_6H_4	C_6H_4Br-4	96,8	98,2
6	2-MeOC_6H_4	C_6H_4Br-4	74,4	94,6
7	4-BrC_6H_4	C_6H_5	64,3	91,7
8	3-BrC_6H_4	C_6H_4OMe	73,4	79,2
9	4-i-BuOC_6H_4	C_6H_4Cl-4	97,0	97,1
10	4-AcNHC_6H_4	C_6H_5	96,6	97,5
11	C_4H_4O*	C_6H_5	80,5	89,1
12	C_4H_4O*	$C_6H_4NO_2$-3	97,4	96,4
	2-аминотиазол		74,1	96,0

*Фуроил

Таблица 2

Антихолинэстеразные свойства 5-имидазолонов 12-20

в концентрации 8х10^{-5}М



No	R	Ar	Ингибирование, %	
			АХЭ (А)	БуХЭ (Б)
13	C_6H_5	C_6H_5	94,8	82,6
14	C_6H_5	C_6H_4OMe-4	74,7	85,4
15	C_6H_5	$C_6H_4NO_2$-3	85,7	81,1
16	C_6H_5	C_6H_4Br-4	44,9	67,3
17	4-$MeOC_6H_4$	C_6H_5	95,5	90,1
18	4-$MeOC_6H_4$	C_6H_4Br-4	71,5	73,5
19	4-BrC_6H_4	C_6H_5	86,2	89,5
20	4-$AcNHC_6H_4$	C_6H_5	85,7	96,3

Последний по ингибирующим свойствам превосходит 2-амино-тиазол.

В ряду 5-имидазолонов **13-20** в концентрации 8х10^{-5} М сравнительно высокую ингибирующую активность по отношению к обоим ферментам проявляет (Z)-5-бензилиден-2-(4-метоксифенил)-3-(тиазол-2-ил)-3,5-ди-гидро-4Н-имидазол-4-он (**17**).

Надо отметить, что большинство из исследованных соединений (**1-3, 5,6, 8-15, 17,20**) по своим ингибирующим свойствам по отношению к АХЭ превосходят 2-аминотиазол, тогда как в случае БуХЭ только пред-ставители амидов – соединения **5,9,10,12** проявили антибутирилхолин-эстеразную активность, превосходяшую 2-аминотиазол.

При сравнении антихолинэстеразной активности соединений **1,2,6, 7,10** с **13,14, 18-20** можно заключить, что циклизация амидов α,β-дегидроаминокислот **1,2,6,7,10** в соответствующие 5-имидазолоны **13,14, 18-20** приводит к уменьшению антихолинэстеразных свойств. Аналогичный результат наблюдается также при замене N-бензоильной группы амида **1** на N-фуроильную (см. соединение **11**).

По методу [10] исследованы также антирадикальные свойства амидов **4**, **9** и 5-имидазолонов **13-15**, **19**. Установлено, что все исследованные соединения лишены антирадикальных свойств.

Научно-технологический центр органической
и фармацевтической химии НАН РА
e-mail: armenarami@gmail.com

А. А. Оганнесян, Н. А. Оганнесян, С. Р. Тосунян,
член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян

Исследование антихолинэстеразных свойств (Z)-N-(3-оксо-1-арил-3-(тиазол-2-иламино)проп-1-эн-2-ил)ариламидов и (Z)-5-арилиден-2-(арил)-3-(тиазол-2-ил)-3,5-дигидро-4H-имидазол-4-онов

Исследованы антихолинэстеразные свойства ряда амидов N-замещенных α,β-дегидроаминокислот и 5-имидазолонов, содержащих остатки 2-аминотиазола по отношению как к ацетилхолинэстеразе, так и к бутирилхолинэстеразе. Установлено, что амиды α,β-дегидроаминокислот по ингибирующим свойствам в основном превосходят соответствующие 5-имидазолоны. В ряду амидов α,β-дегидроаминокислот найдены соединения, по антихолинэстеразным свойства превосходящие 2-аминотиазол.

Ա. Ա. Հովհաննիսյան, Ն. Ա. Հովհաննիսյան, Ս. Ռ. Թոսունյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Օ. Թոփուզյան

(Z)-N-(3-օքսո-1-արիլ-3-(թիազոլ-2-իլամինո)պրոպ-1-են-2-իլ)արիլամիդների և (Z)-5-արիլիդեն-2-(արիլ)-3-(թիազոլ-2-իլ)-3,5-դիհիդրո-4H-իմիդազոլ-4-ոնների հակախոլինէսթերազային հատկությունների ուսումնասիրություն

Ուսումնասիրվել են մի շարք 2-ամինոթիազոլի մնացորդ պարունակող α,β-դեհիդրո- ամինաթթուների ամիդների և 5-իմիդազոլոնների հակախոլինէսթերազային հատկությունները ինչպես ացետիլ-, այնպես էլ բութիրիլխոլինէսթերազների հանդեպ: Պարզվել է, որ իրենց արգելակիչ հատկություններով α,β-դեհիդրոամինաթթուների ամիդները հիմնականում գերազանցում են համապատասխան 5-իմիդազոլոններին: Գտնված են միացություններ, որոնք իրենց հակախոլինէսթերազային հատկություններով գերազանցում են 2-ամինոթիազոլը:

A. A. Hovhannisyan, N. A. Hovhannisyan, S. R. Tosunyan, corresponding member of NAS RA V. O. Topuzyan

Investigation Anticholinesterase Properties of (Z)-N-(3-oxo-1-aryl-3-(thiazol-2-ylamino)prop-1-en-2-yl)arylamides and (Z)-5-arylidene-2-(aryl)-3-(thiazole-2-yl)-3,5-dihydro-4H-imidazol-4-ones

Anicholinesterase properties of a number of amides of N-substituted α,β-dehydroaminoacids and 5-imidazolones containing 2-aminothiazole residues with respect to both acetylcholinesterase and butyrylcholinesterase were studied. It was found that the inhibitory properties of amides of α, β-dehydroaminoacids are mainly superior to those of 5-imidazolones. In a number of amides of α,β-dehydroaminoacids, compounds with anticholinesterase properties superior to 2-aminothiazole were found.

Литература

1. *Hussein A. H. M., Khames A. A., Al-Adasy A.-B. A. et al*. – RCC Adv. 2020. V. 10. P. 29723-29736.
2. *Jadav S. S., Badavath V. N., Ganesan R. et al.* – Anti-Infective Agents. 2020. V. 18. P. 101-108.
3. *Марышева В. В., Шабанов П. Д*. – Экспериментальная и клиническая фармакология. 2005. Т. 68. № 1. С. 67-70.
4. *Edvards J. A., Kemski M. M., Rappleye C. A*. – Antimicrob. Agents Chemother. 2013. V. 59. № 9. P. 4349-4359.
5. *Al-Balas Q., Anthony N. G., Al-Jaidi B. et al*. – Plos One. 2009. V. 4. № 5. P.5617.
6. *Boltnava N. P., Serebryakov O. G., Makhaeva G. F. et al.* – Biochem. Biophys. 2013. V. 451. P. 209-211.
7. *Топузян В. О., Тосунян С. Р., Пароникян Р. В.* – Хим. ж. Армении. 2012. Т. 65. № 4. С. 519-525.
8. *Тосунян С. Р*. – Хим. ж. Армении. 2013. Т. 66. № 2. С. 316-320.
9. *Ellman G. L., Courtney K. D., Andres V. et al*. – Biochem. Pharm. 1961. V. 7. № 2. P. 88-90.
10. *Топузян В. О., Халатян М. М., Оганнесян А. А. и др*. – Хим. ж. Армении. 2017. Т. 70. № 3. С. 357-367.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ՀՆԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

УДК 577.29:562/569

Մ. Ա. Անտոնոսյան[1,2], Դ. Ստենտոն[3], Ն. Ամանո[2], Լ. Մ. Եպիսկոպոսյան[1]

Քարին Տակ քարանձավի ոսկրանյութում մոլեկուլային պահպանվածության գնահատում

(Ներկայացված է ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ռ. Մ. Հարությունյանի կողմից 11/I 2021)

Բանալի բառեր. *վերին պլեյստոցեն, հնագույն ԴՆԹ, հնագույն սպիտակուցներ, մաս-սպեկտրոմետրիա:*

Տեղակայված լինելով Աֆրիկայի և Եվրասիայի խաչմերուկում՝ Հարավային Կովկասը հանդիսացել է կարևոր միգրացիոն ուղի՝ Անդրկովկասյան միջանցք, որը հնարավորություն է տվել հոմինինների սփռումը Լևանտից դեպի Եվրասիայի մնացած տարածքներ պլեյստոցենի ընթացքում [1, 2]: Աշխարհագրական դիրքով պայմանավորված կլիմայական նպաստավոր գործոնները (մի կողմից՝ Կովկասյան լեռների պաշտպանական ազդեցությունը հյուսիսային սառը օդային զանգվածների ներթափանցումից, մյուս կողմից՝ Սև և Կասպից ծովերի մեղմող ներգործությունը) թույլ են տվել տարածաշրջանը դիտարկել որպես կենսաաշխարհագրական ապաստան (ռեֆուգիալ գոտի) պլեյստոցենի ամբողջ ժամանակաշրջանում [2 – 4]:

Վերջին տասնամյակում կենսամոլեկուլային տեխնոլոգիաների զարգացման արդյունքում մշակվել են նոր մեթոդներ՝ բրածո ոսկորներում պահպանված կենսաբանական ցուցանիշների առավել ճշգրիտ նույնականացման և վերլուծության համար: Տեխնոլոգիական առաջընթացը հանգեցրել է էական վերափոխումների հնագիտության ոլորտում՝ սկիզբ դնելով մոլեկուլային հնագիտության նոր ճյուղի ձևավորմանը: Այսօր այն խոր պատկերացում է տալիս այնպիսի հարցերի մասին, ինչպիսիք են մարդու ծագումը և նախապատմական գաղթերը [5], հարմարվողականության ձևերը [6], կենսապահովման առանձնահատկությունները [7] և կլիմայական փոփոխությունները, որոնք ազդել են կենսաբազմազանության վրա [8], ինչպես նաև բազմաթիվ այլ գործոններ, որոնց ուսումնասիրությունն անհնար կլիներ միայն ավանդական մոտեցումներով:

Մինչև վերջերս Հարավային Կովկասի տարածքում հնագույն մոլեկուլներ պահպանող նախապատմական հնավայրեր հայտնի չէին: Արցախի Քարին Տակ քարանձավի հայտնաբերումն աննախադեպ հնարավորություն ընձեռեց լրացնելու այդ բացը հնավայրում կենսամոլեկուլների բարձր պահպանվածության շնորհիվ [9, 10]:

Սույն աշխատանքի նպատակն է գնահատել Քարին Տակի տարբեր շերտերում կենսամոլեկուլների պահպանվածության աստիճանը և բրածո հավաքածուի պոտենցիալը հետագա գենետիկական և սպիտակուցաբանական հետազոտության համար:

Նյութեր և մեթոդներ: *Ուսումնասիրման կայք*: Քարին Տակ քարանձավը Փոքր Կովկասի լեռնաշղթայի հարավարևելյան ծայրամասում տեղակայված անխաթար հնագիտական հուշարձան է: Հնավայրում լայնածավալ պեղումները մեկնարկել են համապատասխան մասնագետներով համալրված միջազգային արշավախմբի կողմից 2016 թվականին և շարունակվել 2017-2020 թվականների դաշտային շրջանների ընթացքում: Կայքը պարունակում է միջին քարից մինչև պղնձի դարաշրջաններով թվագրվող մշակութային շերտերի շարունակական հաջորդականություն, հարուստ է մարդկային և կենդանական ծագման բազմաթիվ ոսկորներով, սերմերով, քարե գործիքներով և խեցեղենով:

Բրածո ոսկորներ: Քարանձավում իրականացված դաշտային աշխատանքների ընթացքում հայտնաբերվել է ավելի քան 20000 բրածո ոսկրանյութ: Առկա հավաքածուի միջինից վերին քարեդարյան ժամանակաշրջանով թվագրված ոսկրային զանգվածից առանձնացվել է մոտ 300 մանր բեկոր՝ հետագա մոլեկուլային հետազոտության համար:

Հնակենդանաբանությունը մաս-սպեկտրոմետրիայի (ZooMS) միջոցով: ZooMS-ը նորագույն մեթոդ է, որը թույլ է տալիս նույնականացնել չափազանց մանր և մորֆոլոգիապես անորոշելի ոսկորների բեկորները տեսակային սպեցիֆիկ սպիտակուցների մաս-սպեկտրոմետրային հայտնաբերման միջոցով: Մեթոդը հիմնված է էվոլյուցիայի ընթացքում կոլագեն սպիտակուցի կայունության հատկության վրա, ինչը հնարավորություն է տալիս այն օգտագործելու որպես մոլեկուլային ցուցանիշ ոսկորների տաքսոնոմիական նույնականացման համար [11]: Գերմանիայի Մաքս Պլանկի Մարդու պատմության ինստիտուտում իրականացվել է Քարին Տակի տարբեր շերտերից մոտ երկու հարյուր ոսկորից կոլագեն սպիտակուցի անջատում AmBic մեթոդով: Սպիտակուցի անջատմանը հետևել է պեպտիդների գնահատում Bruker Autoflex Speed LRF MALDI-TOF (Matrix Assisted Laser Desorption/Ionization Time of Flight) մաս-սպեկտրոմետրով:

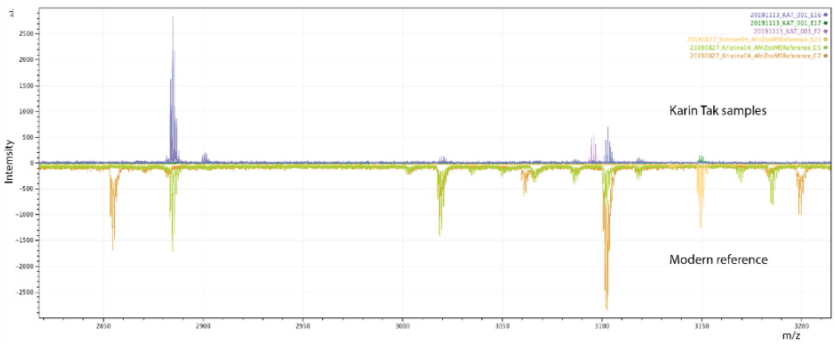
Հնագույն միտոքոնդրիումային ԴՆԹ-ի (մտԴՆԹ) հետազոտություն: Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս մտԴՆԹ-ի ցուցիչների միջոցով վերականգնելու նախապատմական ժամանակներում պոպուլյացիաների տեղաշարժերը և փոխհարաբերությունները: Շվեդիայի Բնական պատմության թանգարանում իրականացվել է Քարին Տակի 25 նմուշից հնագույն մտԴՆԹ-ի անջատում և համապատասխան գենետիկական գրադարանների կառուցում: ԴՆԹ-ի անջատումն իրականացվել է համաձայն ընդունված պրոտոկոլների [12, 13], այնուհետև կառուցվել են Single indexblunt-end Illumina գրադարաններ [14]: Ամպլիֆիկացված նուկլեոտիդների պարունակությունը ստուգվել է ագարոզային գել էլեկտրաֆորեզի միջոցով, որից հետո իրականացվել է գրադարանում ԴՆԹ-ի որակի գնահատում Agilent 2100 կենսավերլուծիչի (bioanalyzer) հիման վրա:

Արդյունքներ և քննարկում: Օրգանիզմի մահվան պահից տեղի են ունենում կենսամոլեկուլների կտրուկ քայքայում և քիմիական կառուցվածքի փոփոխություն: Մասնավորապես օրգանիզմում էնդոգեն նուկլեազների և էկզոգեն գործոնների (օքսիդացում, հիդրոլիզ, ճառագայթում) ազդեցությամբ խախտվում է ԴՆԹ-ի շաքարաֆոսֆատային կմախքը, և փոփոխվում են ազոտային հիմքերը: Նմանապես խախտվում են սպիտակուցների պեպտիդային կապերը՝ հանգեցնելով դեամինացման [15]:

Այդ պատճառով պեղված հնէաբանական նյութի զգալի մասը չի պարունակում էնդոգեն պոլիմերներ: Մինչդեռ կայուն միկրոկլիմայի պայմաններում (ջերմաստիճանի աննշան տատանումներ, ցածր խոնավություն, կատարյալ մթություն) կենսամոլեկուլները կարող են պահպանվել հազարամյակներ շարունակ: Ահա այդպիսի միջավայրով է բնութագրվում Քարին Տակ քարանձավը, ինչն ապահովում է այնտեղ մակրոմոլեկուլների գերազանց պահպանվածությունը:

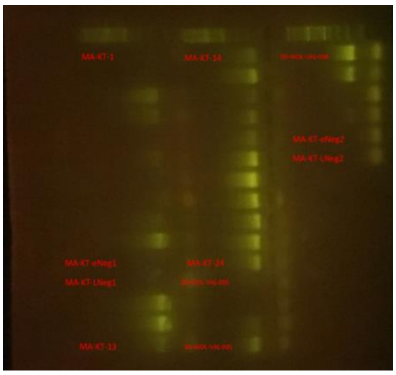
Աշխատանքում իրականացվել է Քարին Տակի քարեդարյան շերտերից պեղված ոսկրանյութի կոլագեն սպիտակուցի և մտԴՆԹ-ի պահպանվածության աստիճանի գնահատում, որը հիմք կծառայի նմուշների հետագա համապարփակ մոլեկուլագենետիկական ուսումնասիրության համար՝ տարածաշրջանի կենսաբազմազանությունը և ֆաունայի կառուցվածքային տատանումները վերականգնելու նպատակով:

Մորֆոլոգիական հատկանիշներով անորոշելի երկու հարյուր հիսուն նմուշ զննվել է ZooMS մեթոդով: Մասնավորապես իրականացվել է ոսկորներից կոլագենի անջատում, որին հաջորդել է պեպտիդների զանգվածի և քանակի գնահատում: Մաս-սպեկտրոմետրային հետազոտությունը ցույց է տվել գտածոների մեծ մասում պեպտիդների բարձր պարունակություն (նկար 1)՝ թույլ տալով նմուշների հետագա տաքսոնոմիական նույնականացումը:



Նկ. 1. Քարին Տակի նմուշներից անջատված կոլագենի մաս-սպեկտրեր: Ուղղահայաց առանցք՝ իոնների ազդակի ինտենսիվություն, հորիզոնական առանցք՝ զանգվածի և լիցքի հարաբերություն (m/z):

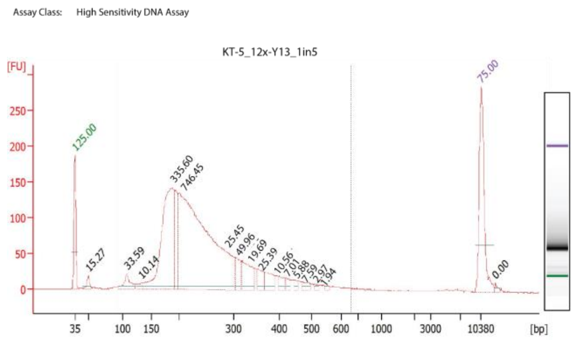
Այսպիսով, Քարին Տակի ոսկրանյութը, որն ունի մոտ 20-40 հազար տարվա վաղեմություն, բնութագրվում է կոլագենի պահպանման բարձր մակարդակով և որոշ դեպքերում համեմատելի է ժամանակակից նմուշների հետ: Նման պատկեր ստացվել է ուսումնասիրված ոսկրանյութի ավելի քան 85 տոկոսի դեպքում: Սպիտակուցի պահպանվածության բարձր աստիճանը, որը բավարար է մինչև ցեղի մակարդակ տաքսոնոմիական նույնականացման համար, հազվադեպ է հանդիպում քարեդարյան հուշարձաններում:



Նկ. 2. Քարին Տակի նմուշների մտԴՆԹ գրադարանների գել էլեկտրաֆորեզի պատկեր:

Դրա հետ մեկտեղ իրականացվել են Քարին Տակի 25 ոսկրային նմուշից մտԴՆԹ-ի անջատում, ամպլիֆիկացիա պոլիմերազային շղթայական ռեակցիայի միջոցով (ՊՇՌ) և գրադարանների կառուցում: Գրադարաններում հնագույն մտԴՆԹ-ի պարունակության գնահատումը ցույց է տվել ԴՆԹ-ի բարձր կոնցենտրացիա հետազոտված նմուշների 80 տոկոսի դեպքում (նկար 2):

Էլեկտրաֆորեզի վիզուալ արդյունքի ճշգրտման և ԴՆԹ-ի հատվածների կոնցենտրացիայի որոշման նպատակով իրականացվել է մեկ նմուշի որակի գնահատում կենսավերլուծիչի միջոցով: Ստացված էլեկտրաֆերոգրամը հաստատել է էնդոգեն ԴՆԹ-ի պահպանվածության բարձր մակարդակը (նկար 3):



Peak table for sample 1

Peak	Size [bp]	Conc. [pg/µl]	Molarity [pmol/l]
1	35	125.00	5,411.3
2	50	15.27	466.1
3	108	33.59	471.7
4	133	10.14	115.1
5	187	335.60	2,718.5
6	194	71.71	560.4
7	199	746.45	5,672.5
8	305	25.45	126.3
9	318	49.96	238.2
10	352	19.69	84.7
11	367	25.39	104.7
12	399	10.56	40.1
13	420	7.01	25.3
14	448	5.88	19.9
15	474	7.59	24.3
16	510	2.97	8.8
17	553	1.94	5.3
18	10,380	75.00	10.9
19	12,707	0.00	0.0

Region table for sample 1

From [bp]	To [bp]	Corr. Area	% of Total	Av. Size [bp]	Conc. [pg/µl]	Molarity [pmol/l]
93	660	2,790.8	96	254	1,359.58	9,345.4

Նկ. 3. Քարին Տակի նմուշի մտԴՆԹ գրադարանի էլեկտրաֆերոգրամ: Ողղահայաց առանցք՝ կամայական ֆլուորեսցենցիայի միավորներ (FU), հորիզոնական առանցք՝ ԴՆԹ-ի հատվածների երկարությունը, կորի վրա թվերը՝ ԴՆԹ-ի կոնցենտրացիա:

Էլեկտրաֆերոգրամի վրա ակնհայտ երևում է, որ ՊՇՌ արդյունքում ամենաբարձր կոնցենտրացիան ունեն 187 bp երկարությամբ ԴՆԹ-ի հատվածները: Հատկանշական է, որ լավ պահպանվել են նաև ավելի խոշոր մոլեկուլները՝ ընդհուպ մինչև 10380 bp: Այդպիսի ճան պահպանվածությունը բավարար է սեքվենավորում իրականացնելու և ստացված հաջորդականությունները լիարժեք վերլուծելու համար:

Անջատված կենսամոլեկուլների հետագա ավելի խոր հետազոտությունը հիմք է ծառայում՝ 20-40 հազար տարի առաջ տարածաշրջանի ֆաունայի բազմազանությունը և կլիմայական տատանումների ազդեցությամբ վերջինիս փոփոխման օրինաչափությունները վերականգնելու համար: Բացի այդ, ստացված արդյունքները թույլ են տալիս համապարփակ մեկնաբանել և ստուգել վերջին սառցապատման ժամանակ Արցախը որպես ռեֆուգիալ գոտի ծառայելու վարկածը:

Հատկանշական է, որ Քարին Տակից հայտնաբերված հնէաբանական նյութի գենետիկական հետազոտության արդյունքները վկայում են Հայկական լեռնաշխարհում մոտ ութ հազար տարի հարատևող մայրագծային գենետիկական շարունակականության մասին [15]: Բացի այդ, հնավայրի բրածոների ԴՆԹ-ի գերազանց պահպանվածությունը թույլ է տվել հաջողությամբ նույնականացնել 29 տաքսոն (որոնք ներկայացնում են կաթնասունների 11 և թռչունների 3 ընտանիք), որոնք բնակեցրել են տարածաշրջանը 24-42 հազար տարի առաջ [10]:

Ակնհայտ է, որ Քարին Տակ քարանձավը գիտական մեծ նշանակություն ունեցող հնավայր է, որը կարևոր տեղեկություններ է պահպանում քարեդարյան ժամանակաշրջանից ի վեր տարածքի հնագույն կենսամիջավայրի, մարդու վաղ բնակեցման և էկոլոգիական հարմարվողականության մասին: Մինչդեռ արդի մոլեկուլային գործիքները հնարավորություն են ընձեռում վերծանելու այդ տեղեկությունները և ստանալու սպառիչ եզրակացություններ հեռավոր անցյալի մասին:

[1]ՀՀ ԳԱԱ Մոլեկուլային կենսաբանության ինստիտուտ
[2]Մաքս Պլանկի Մարդու պատմության ինստիտուտ, Յենա, Գերմանիա
[3]Շվեդիայի բնական պատմության թանգարան, Ստոկհոլմ, Շվեդիա
e-mail: mantonosyan@gmail.com

Մ. Ա. Անտոնոսյան, Դ. Ստենտոն, Ն. Ամանո,
Լ. Մ. Եպիսկոպոսյան

Քարին Տակ քարանձավի ոսկրանյութում մոլեկուլային պահպանվածության գնահատում

Տեղակայված լինելով Աֆրիկայի, Եվրոպայի և Ասիայի միջև աշխարհագրական միջանցքում՝ Հարավային Կովկասը ծառայել է որպես բնական անցուղի, որով, սկսած ստորին պալեոլիթից (հին քարի դար), Աֆրիկայից Եվրասիա են գաղթել հնագույն մարդիկ և կենդանիներ: Արդյո՞ք տարածաշրջանը վերջին սառցապատման ժամանակ ծառայել է որպես բնական ապաստարան (ռեֆուգիալ գոտի) ջերմասեր տեսակների համար: Թերևս այս հարցն առ այսօր մնում է վիճահարույց: Արցախի Քարին Տակ քարանձավի հետազոտական աշխատանքն ուղղված է վերականգնելու այդ տարածաշրջանում հնագույն մարդու կենսամիջավայրը և դրա հիման վրա ստուգելու վերջին սառցապատման ժամանակ տարածքը որպես ռեֆուգիալ գոտի ծառայելու վարկածը: Այդ նպատակով իրականացվել է քարանձավում պեղված բրածո նյութի մոլեկուլային հետազոտություն՝ ոսկրանյութում միտոքոնդրիումային ԴՆԹ-ի և կոլագենի պահպանվածության աստիճանի գնահատման համար:

M. A. Antonosyan, D. Stanton, N. Amano, L. M. Yepiskoposyan

Assessing Molecular Preservation in Fossil Bone Assemblage of Karin Tak Cave

Located in the crossroad between Africa, Europe, and Asia, the South Caucasus region served as a natural passage through which early hominins and fauna have followed during their migration from Africa to Eurasia since Palaeolithic. Additionally, it remains debated whether the region acted as a refugial zone for thermophile biota during the Last Glaciation. The exploration of Karin Tak cave aims to reconstruct early human dwelling environment and test the refugium hypothesis for the Artsakh region during the Last Glaciation. We have performed molecular analyses of fossil bones recovered from Karin Tak in order to assess the rate of preservation of mitochondrial DNA and collagen.

М. А. Антоносян, Д. Стентон, Н. Амано, Л. М. Епископосян

Оценка сохранности древних молекул в костном материале из пещеры Карин Так

Территория Южного Кавказа, находясь на перекрестке между Африкой, Европой и Азией, служила географическим коридором, по которому начиная с раннего палеолита древние гоминиды и представители фауны мигрировали из Африки в Евразию. В то же время до сих пор остается спорным вопрос о том, являлся ли данный регион рефугиальной зоной для термофильной биоты в эпоху последнего оледенения. Исследование пещеры Карин Так направлено на реконструкцию среды обитания древнего человека и на дальнейшее тестирование рефугиальной гипотезы в отношении Арцахского региона в течение последнего оледенения. С этой целью был проведен молекулярный анализ раскопанного материала для оценки степени сохранности митохондриальной ДНК и коллагена.

Գրականություն

1. *Bar-Yosef O., Belfer-Cohen A., Adler D. S*. – Anthropologie. 2006. V. 44(1). P. 49-60.
2. *Fernández-Jalvo Y., King T., Yepiskoposyan L. et al.* Azokh Cave and the Transcaucasian Corridor. 2016. Springer, Cham. P. 1-26.
3. *Gabunia L., Vekua A., Lordkipanidze D*. – J. Hum. Evol. 2000. V. 38(6). P. 785-802.
4. *Orth A., Auffray J. C., Bonhomme F*. – Heredity. 2002. V. 89(5). P. 353-357.
5. *Skourtanioti E., Erdal Y. S., Frangipane M., Restelli F. B. et al*. – Cell. 2020. V. 181(5). P. 1158-1175.
6. *Rivollat M., Jeong C., Schiffels S. et al.* – Sci. Adv. 2020. V. 6(22). eaaz5344.
7. *van de Loosdrecht M. S., Mannino M. A., Talamo S. et al*. – bioRxiv. 2020.
8. *Seersholm F. V., Werndly D. J., Grealy A. et al*. – Nat. Commun. 2020. V. 11(1). P. 1-10.
9. *Margaryan A., Derenko M., Hovhannisyan H. et al*. – Cur. Biol. 2017. V. 27(13). P. 2023-2028.

10. *Antonosyan M., Seersholm F. V., Grealy A. C. et al*. – Quat. Sci. Rev. 2019. 219. P. 102-111.
11. *Buckley M., Collins M., Thomas‐Oates J. et al*. – RCM. 2009. V. 23(23). P. 3843-3854.
12. *Dabney J., Knapp M., Glocke I. et al*. – Proc. Natl Acad. Sci. USA. 2013. 110(39). P. 15758-15763.
13. *Damgaard P. B., Margaryan A., Schroeder H. et al.* – Sci. Rep. 2015. 5. P. 11184.
14. *Meyer M., Kircher M*. – Cold Spring Harb. Protoc. 2010. prot5448.
15. *Cappellini E., Prohaska A., Racimo F. et al*. – Annual review of biochemistry. 2018. V. 87. P. 1029-1060.

Կանոններ հեղինակների համար

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Զեկույցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չհրապարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ:
2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն: Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով:
3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն լեզվով: Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ:
4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ rnas@sci.am) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ): Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5: Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով:

Հանդեսի համառոտ անունը՝
ՀՀ ԳԱԱԶ

Правила для авторов

1.“Доклады Национальной академии наук Армении” выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.
2.Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.
3.Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.
4.Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: rnas@sci.am) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

Сокращенное название журнала
ДНАН РА

Guidelines for Authors

1."The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.
2.Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.
3.Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.
4.It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: rnas@sci.am) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

The abbreviated name of the journal is
RNAS RA