

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
R E P O R T S

Համար
Том
Volume

120 № 4

2020

Երևան

Երևան

Yerevan

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ՀԱՏՈՐ 120

№ 4

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2020

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԲԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԹՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵՂՈՎԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՎԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик Р. М. МАРТИРОСЯН

Редакционная коллегия: чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик В. С. ЗАХАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А. ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician R. M. MARTIROSYAN

Editorial Board: corresponding member of NAS RA R. M. AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, academician V. S. ZAKARYAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:<http://elib.sci.am> e-mail: rnas@sci.am

© НАН РА. Президиум. 2020

© Издательство "Гитутюн"

НАН РА. 2020

Հայաստանի ԳԱԱ Զեկույցներ

Հատոր 120, N 4, 2020

Հրատ. պատվեր N 1063

Խմբագրումը և սրբագրումը՝
Ա. Ապիյան, Ա. Սահակյան

Համակարգչային էջադրումը՝
Վ. Պապյան

Ստորագրված է տպագրության 12.12.2020

Ծավալը՝ 5,75 տպ. մամուլ: Տպաքանակը՝ 150: Գինը՝ պայմանագրային:
ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան
Երևան, Մարշալ Բաղդամյան պող. 24

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ս. Հ. Մարգարյան</i> – Առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ թաղանթների՝ որպես նանոնյութերի դեֆորմացիոն մոդելներ	239
<i>Ս. Լ. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Տ. Վ. Ջաքարյան</i> – Երկշերտ օրթոտրոպ սալի մի խառը դինամիկական խնդրի մասին	249
<i>Ս. Վ. Բելուֆեկյան, Յ. Ս. Գրիգորև, Ս. Վ. Մարգարյան, Ա. Ա. Գավրիլևա</i> – Իներցիոն զանգվածով բեռնավորված շերտում տեղայնացված ալիքները Կոսսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա	256
<i>Ա. Հ. Մարգարյան</i> – Միկրոպոլյար ճկուն շրջանային սալի վարքը ծոման ժամանակ	262
<i>Հ. Գ. Շեկյան, Ա. Վ. Գևորգյան</i> – Էլեկտրական մեքենաների հեղուկ քսուկներով գլորման առանցքակալների աշխատունակության մասին	269
<i>Ե. Վ. Վարդանյան, Ս. Մ. Մխիթարյան, Ա. Ա. Մարուխանյան</i> – Կիսահարթության համար Լամբի հարթ խնդրի լուծման մասին	277

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ա. Մ. Մարգարյան</i> – Շառավղային ճաքի ափերը կոշտ վերդրակներով ուժեղացված շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը	288
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ռ. Հ. Ալանակյան</i> – Հիգգսի բոզոնների լեպտոնային բախումներում որոնման մասին	297
---	-----

ՆԵՅԴՈՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Հ. Ղազարյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան, Բ. Ս. Բարխուդարյան</i> – N-պարապլօքսիբենզոլի ԳԱԿԹ-ի ածանցյալների և նրանց լիթիումական աղերի հակացնցումային ազդեցությունը	309
--	-----

Բովանդակություն 120-րդ հատորի	315
-------------------------------------	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКА

<i>С. О. Саркисян</i> – Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов	239
<i>М. Л. Агалавян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян</i> – Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки	249
<i>М. В. Белубекян, Ю. М. Григорьев, С. В. Саркисян, А. А. Гаврильева</i> – Локализованные волны в слое с нагруженной инерционной массой на основе упрощенной модели Коссера	256
<i>А. А. Саркисян</i> – Поведение микрополярной гибкой круглой пластинки при изгибе	262
<i>Г. Г. Шемян, А. В. Геворкян</i> – О работоспособности подшипников качения электрических машин на жидкой смазке	269
<i>Е. В. Варданян, С. М. Мхитарян, А. А. Саруханян</i> – О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости	277

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>А. М. Саргсян</i> – Упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной, берега которой усилены жесткими накладками	288
---	-----

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – О поиске хиггсовских бозонов в лептонных столкновениях	297
--	-----

НЕЙРОХИМИЯ

<i>С. А. Казарян, Р. Г. Пароникян, И. М. Бархударянц</i> – Противосудорожная активность N-п-алкоксибензоил-ГАМК и их литиевых солей	309
---	-----

Содержание 120-го тома.....	318
-----------------------------	-----

CONTENTS

MECHANICS

<i>S. H. Sargsyan</i> – Thin Shells According to the Moment Theory of Elasticity as Deformation Models of Nanomaterials	239
<i>M. L. Aghalovyan, R. S. Gevorgyan, T. V. Zakaryan</i> – On One Dynamic Mixed Problem of a Two-Layer Orthotropic Plate	249
<i>M. V. Belubekyan, Y. M. Grigoriev, S. V. Sarkisyan, A. A. Gavrilova</i> – Localized Waves in a Layer with a Loaded Inertial Mass, on Based on the Simplified Cosserat Model	256
<i>A. H. Sargsyan</i> – Behavior of Micropolar Flexible Round Plate in Bending Problem	262
<i>H. G. Shekyan, A. V. Gevorgyan</i> – About the Performance of the Bearings Swinging Electric Machines on Liquid Lubricant	269
<i>E. V. Vardanyan, S. M. Mkhitarian, A. A. Sarukhanyan</i> – On the Solution of the Plane Lamb Problem for a Half-Plane	277

ELASTICITY THEORY

<i>A. M. Sargsyan</i> – The Elastic Equilibrium of a Circular Disc with a Radial Crack, the Edges of which are Reinforced by Two Rigid Straps	288
---	-----

PHYSICS

<i>R. H. Alanakyan</i> – On Higgs Bosons Searches in Lepton Collisions	297
--	-----

NEUROCHEMISTRY

<i>S. H. Ghazaryan, R. G. Paronikyan, I. M. Barkhudaryants</i> – Anticonvulsant Activity of N-p-Alkoxybenzoyl-GABA and Their Lithium Salts	309
Contents of 120 th volume.....	320

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

**Тонкие оболочки по моментной теории упругости
как деформационные модели наноматериалов**

(Представлено 31/VII 2020)

Ключевые слова: *моментная теория упругости, модель оболочки, деформационная концепция «сдвиг плюс поворот», наноматериалы.*

Введение. Методы механики деформируемого твёрдого тела получили широкое распространение при моделировании и изучении деформаций наноматериалов. Нанотрубкам и графеновым слоям ставятся в соответствие классические модели упругих тонких оболочек и пластин [1, 2 и др.]. Отметим, что такой подход не совсем точен, поскольку в классических моделях упругих оболочек и пластин соответствующие компоненты тензора напряжений в толщине этих тонкостенных элементов распределяются по определённым законам, а графен или однослойная нанотрубка состоят всего из одного слоя атомов.

С другой стороны, в [3, 4] доказывалось, что при наличии графена или однослойной нанотрубки необходимо в их дискретных моделях учитывать, кроме силового, также моментное взаимодействие между атомами, и устанавливается трёхмерная моментная теория упругости как континуальная модель для указанных наноматериалов. Из изложенного выше следует, что при континуальном моделировании графена и нанотрубок актуально иметь адекватные прикладные модели оболочек и пластин на основе моментной теории упругости. И ещё одно важное обстоятельство – в [5] показывается, что как на уровне мезомеханики твёрдого деформируемого тела, так и на уровне наномеханики деформация в теле происходит по схеме «сдвиг плюс поворот».

В данной работе на основе уравнений трёхмерной линейной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на базе достаточно общих гипотез построена модель тонкой оболочки, деформация которой подчиняется принципу «сдвиг плюс поворот» и

частные случаи которой возможно использовать как континуальные модели нанотрубки, графена и других наноматериалов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерные уравнения линейной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [6] в области оболочки толщиной $2h$:

уравнения равновесия (движения)

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0(\rho \dot{\underline{\underline{V}}}), \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{\sigma}}_x = 0(I \ddot{\underline{\underline{\omega}}}), \quad (1)$$

геометрические соотношения

$$\underline{\underline{\gamma}} = \nabla \underline{\underline{V}} - \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{\omega}}, \quad \underline{\underline{\chi}} = \nabla \underline{\underline{\omega}}, \quad (2)$$

физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= 2\mu \underline{\underline{\gamma}}^{(S)} + 2\alpha \underline{\underline{\gamma}}^{(A)} + \lambda \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\gamma}}, \\ \underline{\underline{\mu}} &= 2\gamma \underline{\underline{\chi}}^{(S)} + 2\varepsilon \underline{\underline{\chi}}^{(A)} + \beta \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\chi}}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ и $\underline{\underline{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; $\underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{\chi}}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручений; $\underline{\underline{V}}$ и $\underline{\underline{\omega}}$ — векторы перемещений и поворота; $\underline{\underline{\sigma}}_x$ — векторный инвариант тензора напряжений; $\underline{\underline{E}}$ — единичный тензор; ∇ — векторный дифференциальный оператор (набла-оператор); $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\chi}}$ — двойное скалярное произведение указанных тензоров; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — упругие постоянные, ρ — плотность, I — мера инерции при вращении; верхним индексом (S) и (A) обозначают симметричную и антисимметричную части соответствующих тензоров.

Приведённую в инвариантной форме полную систему уравнений моментной теории упругости в дальнейшем будем рассматривать в системе координат α_1, α_2, z , где α_1, α_2 — линии главных кривизн срединной поверхности ($z = 0$) оболочки, а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе такой триортогональной системы координат имеют вид [7]

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{z}{R_i} \right) \quad (i=1,2), \quad H_3 = 1, \quad (4)$$

где A_i, R_i представляют собой соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К системе уравнений (1)-(3) необходимо присоединить граничные условия, а в случае динамики также начальные условия.

Будем считать, что на лицевых поверхностях оболочки $z = \pm h$ заданы напряжения и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i}|_{z=\pm h} = p_i^{\pm}, \quad \sigma_{33}|_{z=\pm h} = p_3^{\pm}, \quad \mu_{3i}|_{z=\pm h} = m_i^{\pm}, \quad \mu_{33}|_{z=\pm h} = m_3^{\pm} \quad (i=1,2), \quad (5)$$

а на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$ на Σ' заданы напряжения и моментные напряжения, а на Σ'' – перемещения и свободные повороты.

С помощью начальных условий при $t = t_0$ задаются компоненты векторов перемещения и поворота, а также компоненты векторов линейной и угловой скоростей.

2. Основные гипотезы. Компоненты тензоров деформаций, изгибов-кручений, напряжений и моментных напряжений. Сформулируем два довольно общих допущения, используемых при построении модели оболочек, деформация которых подчиняется принципу «сдвиг плюс независимый поворот».

1. Оболочки будем считать тонкими, если

$$\frac{h}{R} \ll 1, \quad (6)$$

где R – наименьший радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

2. Будем считать, что компоненты векторов перемещений и поворота не зависят от координаты z , т.е.

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i=1,2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_k = \Omega_k(\alpha_1, \alpha_2) \quad (k=1,2,3). \quad (7)$$

В случае динамики функции (7) будут зависеть также и от времени t .

К этим предположениям присоединим статические: пренебрегаются σ_{33} относительно σ_{ii} ; σ_{3i} относительно σ_{i3} и μ_{3i} относительно μ_{i3} ($i=1,2$).

В деформационные выражения (2) введём перемещения и независимые повороты (7) и, пользуясь допущением о тонкостенности оболочки

$$1 + \frac{z}{R_1} \approx 1, \quad 1 + \frac{z}{R_2} = 1, \quad (8)$$

получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \gamma_{33} &= 0, \quad \gamma_{3i} = (-1)^i \cdot \Omega_j, \quad \chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{3i} = 0, \quad \chi_{33} = 0 \quad (i \neq j=1,2),$$

где $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, k_{ii}, k_{ij}, k_{i3}$ равны:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \\
\Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i + (-1)^i \Omega_3, \quad \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j \Omega_j, \\
k_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \\
k_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad k_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i} \quad (i \neq j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{10}$$

Напряжения и деформации, а также моментные напряжения и изгибы-
кручения связаны физическими соотношениями. Имея в виду формулы (2)
и (9), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}), \quad \sigma_{ij} = (\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}, \quad \sigma_{i3} = G^* \Gamma_{i3}, \\
\mu_{ii} &= \frac{2\gamma}{\beta + 2\gamma} [2(\beta + \gamma) k_{ii} + \beta k_{jj}],
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon) k_{ij} + (\gamma - \varepsilon) k_{ji}, \quad \mu_{i3} = B k_{i3} \quad (i \neq j = 1, 2),$$

$$\text{где } G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha}, \quad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \tag{12}$$

Как видно из формул (11), напряжения σ_{ii} , σ_{ij} , σ_{i3} , а также момент-
ные напряжения $\mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3} (i \neq j = 1, 2)$ представляют собой функции толь-
ко от α_1, α_2 . Остальные компоненты тензоров напряжений и моментных
напряжений ($\sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{3i}, \mu_{33}, i = 1, 2$) будут определяться из уравнений
равновесия (движения) с учётом условий (8) о тонкостенности оболочки:

$$\begin{aligned}
\sigma_{3i} &= z \left[-\frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_j \sigma_{ii})}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_i \sigma_{ji})}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{i3}}{R_i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{jj} + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] + \frac{p_i^+ + p_i^-}{2}, \\
\sigma_{33} &= z \left[\left(\frac{\sigma_{11}}{R_1} + \frac{\sigma_{22}}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_2 \sigma_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_1 \sigma_{23})}{\partial \alpha_2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \\
&\quad + \frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \\
\mu_{3i} &= z \left[-\frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_j \mu_{ii})}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_i \mu_{ji})}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \mu_{ij} - \frac{\mu_{i3}}{R_i} + \right.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \mu_{jj} - (-1)^j \sigma_{j3} + I \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} \Bigg] + (-1)^j \int_0^z \sigma_{3j} dz + \frac{m_i^+ + m_i^-}{2} \quad (i \neq j = 1, 2), \\
\mu_{33} = & z \left[\left(\frac{\mu_{11}}{R_1} + \frac{\mu_{22}}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_2 \mu_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_1 \mu_{23})}{\partial \alpha_2} - \right. \\
& \left. - (\sigma_{12} - \sigma_{21}) + I \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right] + \frac{m_3^+ + m_3^-}{2}.
\end{aligned}$$

Формулы (13) приведены для случая динамической задачи, в случае статики необходимо пропустить подчёркнутые члены.

3. Интегральные характеристики-усилия и моменты. Уравнения равновесия (движения) оболочки. Введём вместо напряжений и моментных напряжений интегральные характеристики по толщине тонкой (т.е. с учётом условий (8)) оболочки – усилия и моменты, отнесённые к единице длины координатных линий и приложенные к срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz = 2\sigma_{ii}h, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz = 2\sigma_{ij}h, \\
N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz = 2\sigma_{i3}h, \quad L_{ii} = \int_{-h}^h \mu_{ii} dz = 2\mu_{ii}h, \\
L_{ij} &= \int_{-h}^h \mu_{ij} dz = 2\mu_{ij}h, \quad L_{i3} = \int_{-h}^h \mu_{i3} dz = 2\mu_{i3}h \quad (i \neq j = 1, 2),
\end{aligned} \tag{14}$$

где T_{ii} – нормальные усилия; S_{ij} – касательные усилия; N_{i3} – перерезывающие усилия; L_{ij} – изгибающие моменты; L_{ii} и L_{i3} – крутящие моменты.

Из соотношений (14) получим формулы для определения напряжений $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}$ и моментных напряжений $\mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}$ через усилия и моменты:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{T_{ii}}{2h}, \quad \sigma_{ij} = \frac{S_{ij}}{2h}, \quad \sigma_{i3} = \frac{N_{i3}}{2h}, \\
\mu_{ii} &= \frac{L_{ii}}{2h}, \quad \mu_{ij} = \frac{L_{ij}}{2h}, \quad \mu_{i3} = \frac{L_{i3}}{2h}.
\end{aligned} \tag{15}$$

На основе формул (13) для $\sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{3i}, \mu_{33}$, удовлетворяя граничным условиям (5) на $z = \pm h$, с учётом выражений (15), придем к дифференциальным уравнениям равновесия (движения):

$$\frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_j T_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_i S_{ji})}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} S_{ij} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} T_{jj} + \frac{N_{i3}}{R_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(p_i^+ - p_i^-), \left(2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \\
&\left(\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} = p_3^+ - p_3^-, \left(-2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\
&\frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_j L_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_i L_{ji})}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} L_{ij} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} L_{ji} + \quad (16) \\
&+ \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j N_{j3} = -(m_i^+ - m_i^-) + (-1)^j h(p_j^+ + p_j^-), \left(2Ih \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} \right), \\
&\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} - (S_{12} - S_{21}) = \\
&= (m_3^+ - m_3^-), \left(-2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right),
\end{aligned}$$

где $i \neq j = 1, 2$.

Подставив выражения для напряжений и моментных напряжений (15) в формулы (11), приходим к соотношениям упругости тонких оболочек по моментной теории упругости:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}), \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \quad N_{i3} = 2G^* h \Gamma_{i3}, \\
L_{ii} &= 2h \frac{2\gamma}{\beta + 2\gamma} [2(\beta + \gamma)k_{ii} + \beta k_{jj}], \quad (17) \\
L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{ij} + (\gamma - \varepsilon)k_{ji}], \quad L_{i3} = Bk_{i3} \quad (i \neq j = 1, 2).
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия (движения) (16), соотношения упругости (17) и геометрические соотношения (10) представляют собой систему основных уравнений тонких оболочек по моментной теории упругости. К этой системе уравнений следует добавить граничные условия. На той части (Γ') границы области срединной поверхности оболочки, где заданы усилия и моменты (например, для края, совпадающего с координатной линией α_2), граничные условия будут иметь вид:

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S_{12} = S_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^*, \quad L_{11} = L_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^*. \quad (18)$$

На той части (Γ'') границы области срединной поверхности оболочки, где заданы перемещения и свободные повороты, граничные условия будут выражаться так:

$$u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^*, \quad w = w^*, \quad \Omega_1 = \Omega_1^*, \quad \Omega_2 = \Omega_2^*, \quad \Omega_3 = \Omega_3^*. \quad (19)$$

В случае динамической задачи необходимо задавать и начальные условия. При $t = t_0$ задаются значения $u_i, w, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_k, \frac{\partial \Omega_k}{\partial t}$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, 3$).

Таким образом, модель тонких оболочек на основе моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений с деформационной концепцией «сдвиг плюс свободный поворот» построена. В случае задачи статики система уравнений (16), (17), (10) представляет собой систему дифференциальных уравнений двенадцатого порядка, при этом на каждом из торцов оболочки имеются по шесть граничных условий ((18) или (19)). В случае динамической задачи указанная система уравнений является системой гиперболического типа.

Отметим, что из общих уравнений и граничных условий для оболочек можно получить все зависимости для пластин и стержней как частные случаи.

В декартовой системе координат система уравнений (16), (17), (10) и граничные условия (18) или (19) распадаются на две независимые друг от друга граничные задачи для пластинки:

- 1) плоское напряжённое состояние в срединной плоскости пластинки,
- 2) изгиб пластинки от срединной её плоскости.

В [8, 9] деформации графена изучаются начиная с атомного уровня. Установлено, что деформация графена в континуальном описании представляет собой плоское напряжённое состояние в своей плоскости и изгиб от своей плоскости, причём определяющие системы этих деформаций совпадают с соответствующими системами уравнений пластинки по моментной теории упругости (т.е. с уравнениями (16), (17), (10) при $\frac{1}{R_i} = 0, i = 1, 2$).

Понятно, что система уравнений (16), (17), (10) и граничные условия (18) или (19) в цилиндрической системе координат представляют континуальную модель нанотрубок.

4. Закон сохранения энергии. Энергетические теоремы. Если уравнения равновесия (движения) (16) умножить соответственно на $u_i, w, \Omega_i, \Omega_3$ ($i = 1, 2$) (на $\frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$), сложить их и интегрировать по области (S) срединной поверхности оболочки, после некоторых преобразований придем к закону сохранения энергии в рамках построенной модели. В случае задач статики имеем

$$U_0 = \frac{1}{2} A, \quad U_0 = \iint_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
A = & \iint_{(S)} \left\{ (p_1^+ - p_1^-) \cdot u_1 + (p_2^+ - p_2^-) \cdot u_2 + (p_3^+ - p_3^-) \cdot w + \right. \\
& + [(m_1^+ - m_1^-) - h(p_2^+ + p_2^-)] \cdot \Omega_1 + [(m_2^+ - m_2^-) + h(p_1^+ + p_1^-)] \cdot \Omega_2 + \\
& \left. + (m_3^+ - m_3^-) \cdot \Omega_3 \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& \oint_{\Gamma} (T_{11} u_1 + S_{12} u_2 + N_{13} w + L_{11} \Omega_1 + L_{12} \Omega_2 + L_{13} \Omega_3) A_2 d\alpha_2 - \\
& (S_{21} u_1 + T_{22} u_2 + N_{23} w + L_{21} \Omega_1 + L_{22} \Omega_2 + L_{23} \Omega_3) A_1 d\alpha_1, \\
W_0 = & \frac{1}{2} \left[\frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}) + 2h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 4h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + \right. \\
& + 2hG^* (\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2) + 2h \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} (k_{11}^2 + k_{22}^2) + 2h \frac{4\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} k_{11}k_{22} + \\
& \left. + 2h(\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + 4h(\gamma - \varepsilon)k_{12}k_{21} + 2hB(k_{13}^2 + k_{23}^2) \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Здесь W_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки; U_0 – полная потенциальная энергия деформации оболочки; $\frac{1}{2}A$ – работа внешних усилий и моментов, приложенных к оболочке.

В случае динамической задачи получим уравнение сохранения мощностей:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(K_0 + U_0) = & \iint_{(S)} \left\{ (p_1^+ - p_1^-) \frac{\partial u_1}{\partial t} + (p_2^+ - p_2^-) \frac{\partial u_2}{\partial t} + (p_3^+ - p_3^-) \frac{\partial w}{\partial t} + \right. \\
& + [(m_1^+ - m_1^-) - h(p_2^+ + p_2^-)] \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + [(m_2^+ - m_2^-) + h(p_1^+ + p_1^-)] \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + \\
& \left. + (m_3^+ - m_3^-) \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\Gamma} (T_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + S_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + N_{13} \frac{\partial w}{\partial t} + L_{11} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \\
& + L_{12} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + L_{13} \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}) A_2 d\alpha_2 - (S_{21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + T_{22} \frac{\partial u_2}{\partial t} + N_{23} \frac{\partial w}{\partial t} + L_{21} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \\
& + L_{22} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + L_{23} \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}) A_1 d\alpha_1, \quad (23)
\end{aligned}$$

где K_0 – полная кинетическая энергия движения оболочки:

$$\begin{aligned}
K_0 = & \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left[2\rho h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + 2\rho h \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + 2\rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2Ih \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \right)^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (24)
\end{aligned}$$

Уравнения сохранения энергий (20) или (23) можно использовать для доказательства теоремы единственности как для краевой задачи статики оболочек, так и для начально-краевой задачи в случае динамики оболочек.

Отметим, что поверхностную плотность потенциальной энергии деформации оболочки можем выразить и через усилия-моменты ($W_0^* = W_0$). Легко убедиться, что для построенной модели оболочек имеют место как формулы типа Грина ($T_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{11}}, \dots$), так и формулы типа Кастилиано

$$(\Gamma_{11} = \frac{\partial W_0^*}{\partial T_{11}}, \dots).$$

Используя ход преобразований при получении уравнений сохранения энергии, аналогичными преобразованиями можем доказать теорему взаимности работ ($A_{12} = A_{21}$) для построенной модели оболочек.

Отметим также, что для построенной модели оболочек устанавливаются вариационные принципы типа Лагранжа, Кастилиано, Ху-Вашицу и Гамильтона.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов

На основе уравнений трёхмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на базе достаточно общих гипотез построена прикладная модель тонких оболочек, подчиняющаяся деформационному принципу «сдвиг плюс независимый поворот». Доказываются энергетические теоремы для указанной модели и устанавливаются вариационные принципы. Модели тонких пластин и стержней получены как частные случаи модели оболочек.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Ն. Սարգսյան

**Առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ թաղանթների՝
որպես նանոյուրների դեֆորմացիոն մոդելներ**

Աշխատանքում տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով առաձգականության եռաչափ տեսության հիման վրա, բավական ընդհանուր բնույթի

վարկածների օգնությամբ, կառուցվում է բարակ թաղանթների կիրառական մոդելը, որն արտահայտում է «սահք գումարած անկախ պտույտ» դեֆորմացիոն սկզբունքը: Այս մոդելի համար ապացուցվում են էներգետիկ թեորեմները, և հիմնավորվում վարիացիոն սկզբունքները: Բարակ սալերի և ձողերի մոդելները ստացվում են թաղանթի մոդելից որպես մասնավոր դեպքեր:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

**Thin Shells According to the Moment Theory of Elasticity
as Deformation Models of Nanomaterials**

In this paper, on the basis of the equations of the three-dimensional moment theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations, through the help of some rather general hypotheses, an applied model of thin shells is constructed that obeys the deformation principle of «shear plus independent rotation». For this model, energy theorems are proved and variational principles are established. Models of thin plates and beams are obtained as special cases of the shell model.

Литература

1. *Yakobson B. I., Brabec C. J., Bernholc J.* – Physical Review Letters. 1996. V. 75. № 14. P. 2511-2514.
2. *Ru C. Q.* – Physical Review B. 2000. V. 62. № 15. P. 9973-9976.
3. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. и др.* – Доклады Академии наук России. 2008. Т. 391. № 6. С. 764-768.
4. *Кривцов А. М.* Теоретическая механика. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2009. 127 с.
5. *Панин В. Е.* – Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5-22.
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Pergamon. 1986. 383 p.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.
8. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 5. С. 28-33.
9. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН РА. 2020. Т. 120. № 2. С. 124-135.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. Л. Агаловян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян

Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 17/IX 2020)

Ключевые слова: слоистая пластинка, вынужденные колебания, асимптотическое решение.

Введение. Для решения динамических задач теории упругости были использованы методы Фуре, интегральных преобразований и др. [1]. Для решения статических и динамических задач на основе классических и уточнённых теорий пластин и оболочек эффективным оказался также численно-аналитический метод [2, 3]. Сравнительно мало работ, посвящённых пространственным динамическим задачам пластин и оболочек. Для решения подобных задач эффективным оказался асимптотический метод [4-7].

В данной работе определено асимптотическое решение трёхмерной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной двуслойной пластинки, лежащей на жёсткой подстилке. Считается, что лицевой поверхности пакета сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Показано, что гипотезы классической и известных уточнённых теорий (Тимошенко, С. Амбарцумян) не применимы для решения подобных задач.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Рассмотрим двуслойную ортотропную пластинку, занимающую область

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 = h \ll l,$$

$l = \min(a, b)\}$. Требуется найти решение уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2}, \quad k = I, II$$

и соотношений упругости (обобщённый закон Гука) ортотропного тела

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^k}{\partial x} &= a_{11}^k \sigma_{xx}^k + a_{12}^k \sigma_{yy}^k + a_{13}^k \sigma_{zz}^k, & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= a_{12}^k \sigma_{xx}^k + a_{22}^k \sigma_{yy}^k + a_{23}^k \sigma_{zz}^k, \\
\frac{\partial w^k}{\partial z} &= a_{13}^k \sigma_{xx}^k + a_{23}^k \sigma_{yy}^k + a_{33}^k \sigma_{zz}^k, & \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \\
\frac{\partial w^k}{\partial x} + \frac{\partial u^k}{\partial z} &= a_{55}^k \sigma_{xz}^k, & \frac{\partial w^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial z} &= a_{44}^k \sigma_{yz}^k
\end{aligned} \quad (2)$$

при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях пакета:

$$W^I(h_1) = -W^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \quad (3)$$

$$\sigma_{xz}^I(h_1) = 0, \quad \sigma_{yz}^I(h_1) = 0,$$

$$W(-h_2) = 0,$$

$$\sigma_{xz}^{II}(x, y, -h_2) = f_1 \sigma_{zz}^{II}(x, y, -h_2), \quad (4)$$

$$\sigma_{yz}^{II}(x, y, -h_2) = f_2 \sigma_{zz}^{II}(x, y, -h_2),$$

где $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, Ω – частота внешнего воздействия; при условиях полного контакта между слоями пакета

$$\sigma_{\alpha z}^I(x, y, 0, t) = \sigma_{\alpha z}^{II}(x, y, 0, t), \quad \alpha = x, y, z, \quad (5)$$

$$u^I(x, y, 0, t) = u^{II}(x, y, 0, t), \quad (u, v, w).$$

2. Асимптотическое решение задачи. Решение сформулированной пространственной задачи будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(x, y, z, t) = \sigma_{ij}^k(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = I, II \quad (6)$$

$$(u^k(x, y, z, t), v^k(x, y, z, t), w^k(x, y, z, t)) = (u_x^k(x, y, z), u_y^k(x, y, z), u_z^k(x, y, z)) \exp(i\Omega t),$$

Перейдя в динамических уравнениях и соотношениях упругости (1), (2) к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U = u_x/l, \quad V = u_y/l, \quad W = u_z/l, \quad (7)$$

получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 U^k &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 V^k &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 W^k &= 0, & \frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= a_{11}^k \sigma_{11}^k + a_{12}^k \sigma_{22}^k + a_{13}^k \sigma_{33}^k, \\
\frac{\partial V^k}{\partial \eta} &= a_{12}^k \sigma_{11}^k + a_{22}^k \sigma_{22}^k + a_{23}^k \sigma_{33}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial W^k}{\partial \zeta} &= a_{13}^k \sigma_{11}^k + a_{23}^k \sigma_{22}^k + a_{33}^k \sigma_{33}^k, \\
\frac{\partial V^k}{\partial \xi} + \frac{\partial U^k}{\partial \eta} &= a_{66}^k \sigma_{12}^k, & \frac{\partial W^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} &= a_{55}^k \sigma_{13}^k, \\
\frac{\partial W^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} &= a_{44}^k \sigma_{23}^k, & \Omega_*^2 &= h^2 \Omega^2, \quad k = I, II.
\end{aligned} \quad (8)$$

Решение системы (8) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b), т.е. $I = I^{\text{int}} + I_b$. В англоязычной литературе принято использовать обозначение $I = I^{\text{out}} + I_b$, т.е. $I^{\text{int}}, I^{\text{out}}$ – решение практически одной и той же задачи. Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{ij}^{k\text{int}} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N} \quad (9)$$

$$(U^{k\text{int}}, V^{k\text{int}}, W^{k\text{int}}) = \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}), \quad k = I, II.$$

Здесь $s = \overline{0, N}$ (обозначение Эйнштейна) означает, что в (9) по повторяющемуся индексу s происходит суммирование от нуля до числа приближений N . Считается, что в (8) $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ порядка единицы. Уравнениями (8) можно воспользоваться и при высокочастотных колебаниях. Например, если $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-1})$, можно опять воспользоваться системой (8), если $\rho^k \Omega_*^2$ формально заменить на $\rho^k l h \Omega^2$, а при $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-2})$ – на $\rho^k l^2 \Omega^2$ [4].

Подставив (9) в (8) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую непротиворечивую систему для определения коэффициентов $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} &= 0, \quad \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{13}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \\ \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{33}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \quad (10) \\ \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^k \sigma_{13}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^k \sigma_{23}^{k(s)}. \end{aligned}$$

Из системы (10) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \left(\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{12}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k} \left(-A_{23}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{22}^{k(s)} &= \frac{1}{\Delta^k} \left(-A_{13}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{33}^{k(s)} &= \frac{1}{\Delta^k} \left(A_{11}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$A_{11}^k = a_{11}^k a_{22}^k - (a_{12}^k)^2, \quad A_{12}^k = a_{12}^k a_{33}^k - a_{23}^k a_{13}^k, \quad A_{13}^k = a_{11}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{12}^k, \quad (12)$$

$$A_{22}^k = a_{22}^k a_{33}^k - (a_{23}^k)^2, \quad A_{23}^k = a_{13}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{23}^k, \quad A_{33}^k = a_{11}^k a_{33}^k - (a_{13}^k)^2,$$

$$\Delta^k = a_{11}^k A_{22}^k - a_{12}^k A_{12}^k - a_{13}^k A_{23}^k, \quad Q^{k(m)} \equiv 0, \text{ при } m < 0,$$

а для определения $U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} = R_U^{k(s)}, \quad R_U^{k(s)} = -a_{55}^k \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = R_V^{k(s)}, \quad R_V^{k(s)} = -a_{44}^k \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (14)$$

$$A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta^k \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} = R_W^{k(s)}, \quad (15)$$

$$R_W^{k(s)} = -\Delta^k \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) + A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

Решениями этих уравнений являются

$$U^{k(s)} = C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta + U_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_1^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{55}^k}, \quad (16)$$

$$V^{k(s)} = C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta + V_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_2^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{44}^k},$$

$$W^{k(s)} = C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta + W_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_3^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k \Delta^k / A_{11}^k},$$

где $U_\tau^{k(s)}, V_\tau^{k(s)}, W_\tau^{k(s)}$ – частные решения уравнений.

Подставив значения $U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ в формулы (11), для напряжений

$\sigma_{13}^{k(s)}, \sigma_{23}^{k(s)}, \sigma_{33}^{k(s)}$ будем иметь

$$\sigma_{13}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{55}^k} (C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta - C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta) + f_{13}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\sigma_{23}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{44}^k} (C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta - C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta) + f_{23}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (17)$$

$$\sigma_{33}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k A_{11}^k / \Delta^k} (C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta - C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta) + f_{33}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$f_{13}^{k(s)} = \frac{1}{a_{55}^k} \left(\frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\tau^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad f_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s-1)}}{\partial \eta}, \quad (18)$$

$$f_{33}^{k(s)} = \frac{A_{11}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Delta^k} \left(A_{23}^k \frac{\partial U_\tau^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{13}^k \frac{\partial V_\tau^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right).$$

Используя формулы (16), (17), удовлетворив граничным условиям (3), (4) и условиям полного контакта между слоями (5), определим значения функций $C_i^{k(s)}(\xi, \eta)$, $i=1, \dots, 6$, $k=I, II$

$$C_1^{I(s)} = b_1 C_1^{II(s)} + d_1^{(s)}, \quad C_2^{I(s)} = C_2^{II(s)} + a_1^{(s)}, \quad C_3^{I(s)} = b_2 C_3^{II(s)} + d_2^{(s)},$$

$$C_4^{I(s)} = C_4^{II(s)} + a_2^{(s)}, \quad C_5^{I(s)} = b_3 C_5^{II(s)} + d_3^{(s)}, \quad C_6^{I(s)} = C_6^{II(s)} + a_3^{(s)},$$

$$\begin{aligned}
C_1^{II(s)} &= \frac{1}{B_{22}} \left[b_4 (B_{26} C_5^{II(s)} + B_{25} C_6^{II(s)}) + d_5^{(s)} - B_{21} C_2^{II(s)} \right], \\
C_2^{II(s)} &= \frac{1}{b_1 B_{21} B_{12} + B_{22} B_{11}} \left[(b_4 (B_{26} C_5^{II(s)} + B_{25} C_6^{II(s)}) + d_5^{(s)}) B_{12} b_1 - B_{22} (d_8^{(s)} - B_{12} d_1^{(s)} + B_{11} a_1^{(s)}) \right], \\
C_3^{II(s)} &= \frac{1}{B_{24}} \left[b_5 (B_{26} C_5^{II(s)} + B_{25} C_6^{II(s)}) + d_6^{(s)} - B_{26} C_4^{II(s)} \right], \\
C_4^{II(s)} &= \frac{1}{b_2 B_{26} B_{13} + B_{24} B_{14}} \left[(b_5 (B_{26} C_5^{II(s)} + B_{25} C_6^{II(s)}) + d_6^{(s)}) B_{13} b_2 - B_{24} (d_9^{(s)} - B_{13} d_2^{(s)} + B_{14} a_2^{(s)}) \right], \\
C_5^{II(s)} &= \frac{1}{b_3 B_{26} B_{15} + B_{16} B_5} \left[B_{26} (d_7^{(s)} - B_{15} d_3^{(s)} - B_{16} a_3^{(s)}) - B_{16} d_4^{(s)} \right], \\
C_6^{II(s)} &= \frac{1}{B_{26}} \left[d_4^{(s)} + B_{25} C_5^{II(s)} \right],
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1^{(s)} &= U_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - U_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0), & a_2^{(s)} &= V_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - V_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0), \\
a_3^{(s)} &= W_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - W_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0), & d_1^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho^I / a_{55}^I}} \left(f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, 0) \right), \\
d_2^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho^I / a_{44}^I}} \left(f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, 0) \right), \\
d_3^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho^I A_{11}^I / \Delta^I}} \left(f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{33}^{I(s)}(\xi, \eta, 0) \right), & d_4^{(s)} &= -W_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2), \\
d_5^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho^{II} / a_{55}^{II}}} \left(f_1 \cdot f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \right), \\
d_6^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho^{II} / a_{44}^{II}}} \left(f_2 \cdot f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \right), \\
d_7^{(s)} &= -W^{+(s)}(\xi, \eta) - W_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1), & W^{+(0)} &= W^+ / l, \quad W^{+(s)} = 0, s \neq 0 \\
d_8^{(s)} &= -\frac{f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\Omega_* \sqrt{\rho^I / a_{55}^I}}, \\
d_9^{(s)} &= -\frac{f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\Omega_* \sqrt{\rho^I / a_{44}^I}},
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sqrt{\rho^{II} a_{55}^I / \rho^I a_{55}^{II}}, & b_2 &= \sqrt{\rho^{II} a_{44}^I / \rho^I a_{44}^{II}}, & b_3 &= \sqrt{\rho^{II} A_{11}^{II} \Delta^I / \rho^I A_{11}^I \Delta^{II}}, \\
b_4 &= f_1 \sqrt{A_{11}^{II} a_{55}^{II} / \Delta^{II}}, & b_5 &= \sqrt{A_{11}^{II} a_{44}^{II} / \Delta^{II}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \sin \gamma_1^I \zeta_1, & B_{21} &= \sin \gamma_1^{II} \zeta_2, & B_{12} &= \cos \gamma_1^I \zeta_1, & B_{22} &= \cos \gamma_1^{II} \zeta_2, \\
B_{13} &= \sin \gamma_2^I \zeta_1, & B_{23} &= \sin \gamma_2^{II} \zeta_2, & B_{14} &= \cos \gamma_2^I \zeta_1, & B_{24} &= \cos \gamma_2^{II} \zeta_2, \\
B_{15} &= \sin \gamma_3^I \zeta_1, & B_{25} &= \sin \gamma_3^{II} \zeta_2, & B_{16} &= \cos \gamma_3^I \zeta_1, & B_{26} &= \cos \gamma_3^{II} \zeta_2.
\end{aligned}$$

Если функция W^+ является многочленом от (ξ, η) , итерация обрывается, и в результате получим математически точное решение во внутренней задаче. В частности, при $W^+ = \text{const}$ итерация обрывается на исходном приближении, и для неизвестных $C_i^{k(s)}(\xi, \eta)$, $i = 1, \dots, 6$, $k = I, II$ имеем значения:

$$\begin{aligned} C_1^{I(0)} &= b_1 C_1^{II(0)}, \quad C_2^{I(0)} = C_2^{II(0)}, \quad C_3^{I(0)} = b_2 C_3^{II(0)}, \quad C_4^{I(0)} = C_4^{II(0)}, \\ C_5^{I(0)} &= b_3 C_5^{II(0)}, \quad C_6^{I(0)} = C_6^{II(0)}, \quad C_1^{II(0)} = \frac{1}{B_{22}} [b_4 (B_{26} C_5^{II(0)} + B_{25} C_6^{II(0)}) - B_{21} C_2^{II(0)}], \\ C_2^{II(0)} &= \frac{B_{12} b_4 b_4}{b_1 B_{21} B_{12} + B_{22} B_{11}} (B_{26} C_5^{II(0)} + B_{25} C_6^{II(0)}), \quad C_3^{II(0)} = \frac{1}{B_{24}} [b_5 (B_{26} C_5^{II(0)} + B_{25} C_6^{II(0)}) - B_{26} C_4^{II(0)}], \\ C_4^{II(0)} &= \frac{B_{13} b_2 b_5}{b_2 B_{26} B_{13} + B_{24} B_{14}} (B_{26} C_5^{II(0)} + B_{25} C_6^{II(0)}), \quad C_5^{II(0)} = \frac{B_{26} d_7^{(0)}}{b_3 B_{26} B_{15} + B_{16} B_5}, \quad C_6^{II(0)} = \frac{B_{25} C_5^{II(0)}}{B_{26}}, \\ a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}, d_4^{(0)}, d_5^{(0)}, d_6^{(0)}, d_8^{(0)}, d_9^{(0)} &\equiv 0, \quad d_7^{(0)} = -W^+ / l \end{aligned} \quad (21)$$

и следующее окончательное решение:

$$\begin{aligned} u^k &= l U^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad v^k = l V^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad w^k = l W^{k(0)} \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad k = I, II. \end{aligned}$$

Институт механики НАН РА
e-mails: mheraghalovyan@rambler.ru, gevorgyanrs@mail.ru,
zaqaryantatevik@mail.ru

М. Л. Агаловян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян

Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки

Решена трёхмерная динамическая задача о вынужденных колебаниях ортотропной двуслойной пластинки, лежащей на жёсткой подстилке. Считается, что между подошвой пластинки и жёстким основанием существует трение, которое пропорционально нормальному напряжению. Асимптотическим методом определены все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, когда лицевой поверхности двуслойного пакета сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Доказано, что для этого класса задач гипотезы классической и известных уточнённых теорий не применимы.

Մ. Լ. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Տ. Վ. Ջաքարյան

**Երկշերտ օրթոտրոպ սալի մի խառը դինամիկական
խնդրի մասին**

Լուծված է կոշտ հենարանի վրա հենված երկշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների եռաչափ դինամիկական խնդիրը: Սալի հիմքի և կոշտ հիմնատակի միջև առկա է շփում, որը համեմատական է նորմալ ճնշմանը: Ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բոլոր բաղադրիչները, երբ երկշերտ փաթեթի դիմային մակերևույթին հաղորդված է, ըստ ժամանակի, հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ տեղափոխություն: Ապացուցված է, որ այս դասի խնդիրների համար սալերի դասական և ճշգրիտ տեսությունների վարկածները կիրառելի չեն:

M. L. Aghalovyan, R. S. Gevorgyan, T. V. Zakaryan

**On One Dynamic Mixed Problem of a Two-Layer
Orthotropic Plate**

A three-dimensional dynamic problem of forced vibrations of an orthotropic two-layer plate lying on a rigid litter is solved. It is assumed that there is friction between the sole of the plate and the rigid base, which is proportional to the normal stress. All components of the stress tensor and the displacement vector are determined by the asymptotic method, when the facial surface of the two-layer package is imparted with normal displacement, harmonically changing in time. It is proved that for this class of problems the hypotheses of the classical and well-known refined theories are not applicable.

Литература

1. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М. Наука. 1986. 328 с.
2. *Григоренко Я. М., Григоренко А. Я.* В кн.: Современные проблемы механики. Киев. ЛиТеча ЛТД. 2017. Т. 2. С. 311-378.
3. *Луговой П. З., Мейш В. Ф.* – Прикладная механика. 2017. № 5. С. 3-65.
4. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific Publishing. 2015. 376 p. (Русское издание: *Агалавян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука, Физматлит. 1997. 414 с.).
5. *Агалавян Л. А.* – Изв. вузов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8-11.
6. *Aghalovyan L. A., Aghalovyan M. L.* In: Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics. Yerevan. Gitutyun NAS RA. 2005. V. 1. P. 8-19.
7. *Агалавян Л. А., Агалавян М. Л., Закарян Т. В.* – ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 1. С. 91-101.

М. В. Белубекян¹, Ю. М. Григорьев², С. В. Саркисян^{1,3},
А. А. Гаврильева⁴

**Локализованные волны в слое с нагруженной
инерционной массой на основе упрощенной
модели Коссера**

(Представлено чл.-кор. НАН РА Ара С. Аветисяном 25/IX 2020)

Ключевые слова: *сдвиговые упругие волны, инерция вращения частиц среды, локализация энергии упругих колебаний.*

Введение. Локализация энергии распространяющейся упругой волны в окрестности границы, ограничивающей среду, на практике имеет как негативное (разрушение), так и позитивное (передача энергии без потерь) значение. Результаты изучения локализованных волн (колебаний) приводят к созданию различного рода устройств и приборов как для их гашения, так и усиления.

Исследования поверхностных упругих волн (или локализованных колебаний), таких как волны Рэлея, Лява, Стоунли, Гуляева-Блюстейна, Коненкова и др., связаны с решением задач для полубесконечных областей, например, поверхностные волны Рэлея в полупространстве или локализованные изгибные колебания Коненкова в полубесконечной пластинке.

Однако в реальности нет полубесконечных структур. Все структуры должны иметь определенную конечную глубину. Возникает вопрос: при какой глубине имеет место локализация энергии упругих колебаний в окрестности свободной границы, ограничивающей тело, в частности слой [1-5].

В настоящей работе исследовано распространение сдвиговых упругих волн в слое на основе упрощенной модели Коссера. Одна из плоскостей, ограничивающих слой, нагружена инерционной массой, вторая граница закреплена. Устанавливается возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определяется

скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближении.

1. Рассматривается распространение чисто сдвиговых упругих волн с учетом инерции вращения частиц в плоском слое. В прямоугольной декартовой системе координат x, y, z слой занимает область $-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$.

Уравнение движения в напряжениях (антиплоская задача $u = v = 0, w = w(x, y, t)$) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где индексы 1, 2, 3 означают направления по координатам x, y, z соответственно.

Материальные уравнения для среды Коссера на основе упрощенной модели приняты в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \sigma_{31} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \\ \sigma_{23} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + I \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \sigma_{32} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - I \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.2) c_{44} – модуль сдвига материала, I – коэффициент, характеризующий инерцию вращения частиц среды.

С учетом (1.2) уравнение распространения сдвиговых волн в среде будет

$$c_{44} \Delta w + I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа.

Предполагается, что на плоскости $y = 0$, ограничивающей слой, имеет место граничное условие [6, 7]

$$\sigma_{23} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

При помощи граничного условия (1.4) моделируется влияние наличия инерционной массы на плоскости $y = 0$. Вторая плоскость, ограничивающая слой, принимается закрепленной:

$$w = 0 \text{ при } y = h. \quad (1.5)$$

Требуется найти решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (1.4) и (1.5).

2. Решение уравнения (1.3) представляется следующим образом:

$$w = f(y) \exp i(\omega t - kx). \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.3) приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно искомой функции $f(y)$

$$f''(y) - k^2 \left(1 - \frac{\eta}{1 - \chi\eta} \right) f(y) = 0, \quad (2.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \quad c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho}, \quad \chi = \frac{k^2 I}{\rho}. \quad (2.3)$$

Согласно (2.1) граничное условие нагруженного края (1.4) приводится к виду

$$(1 - \chi\eta) f' + \frac{mk^2\eta}{\rho} f = 0 \text{ при } y = 0. \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.2), удовлетворяющее граничному условию (2.4), будет

$$f(y) = A \left(\sinh(kpy) - \frac{\rho(1 - \chi\eta)p}{km\eta} \cosh(kpy) \right), \quad (2.5)$$

где A – произвольная постоянная,

$$p = \sqrt{1 - \eta(1 - \chi\eta)^{-1}}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что уравнение (2.2) имеет решение в виде гиперболических функций (в виде (2.5)), если выполняется условие

$$0 < \eta < \frac{1}{1 + \chi}. \quad (2.7)$$

В противном случае решение уравнения (2.2) будет выражено через тригонометрические функции. В случае, если уравнение (2.2) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.7), сдвиговая волна локализуется в окрестности поверхности слоя $y = 0$ [4, 5]. В частности, для полупространства $0 \leq y < \infty$ условие (2.7) будет условием затухания амплитуды волны

при $y \rightarrow \infty$ ($w \rightarrow 0$). Требование, чтобы решение (2.5) удовлетворяло граничному условию закрепленного края (1.5), приводит к решению дисперсионного уравнения относительно безразмерного параметра η , скорости распространения волны

$$\tanh(kph) = \frac{1 - \chi\eta}{\theta\eta} p, \theta = \frac{mk}{\rho}. \quad (2.8)$$

В коротковолновом приближении ($kh \gg 1$ или $\tanh(kph) \approx 1$) уравнение (2.8) приводится к виду

$$\sqrt{1 - \chi\eta} \sqrt{1 - \eta(1 + \chi)} = \theta\eta. \quad (2.9)$$

Решением уравнения (2.9), удовлетворяющим условию затухания (2.7), будет

$$\eta = \frac{1 + 2\chi - \sqrt{1 + 4\theta^2}}{2(\chi(1 + \chi) - \theta^2)}. \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить, что скорость распространения локализованной волны, определяемой по формуле (2.10), совпадает со скоростью поверхностной сдвиговой волны (типа Лява) для полупространства с нагруженной поверхностью и с учетом внутреннего вращения частиц.

3. Уравнение (2.8) имеет решение $\eta = (1 + \chi)^{-1}$, устанавливающее толщину слоя, при которой происходит переход от решений в виде тригонометрических функций (от объемных волн) к решениям в виде гиперболических функций (к локализованным волнам). Условие появления локализованных волн получается из уравнения (2.8) при предельном переходе $\eta \rightarrow (1 + \chi)^{-1}$ ($p \rightarrow 0$) [4, 5]

$$kh = 1/\theta. \quad (3.1)$$

Из уравнения (2.8) в длинноволновом приближении $(kh)^2 \gg 1$, при $kh \ll 1/\theta$, получается

$$\eta = (\chi + kh\theta)^{-1}. \quad (3.2)$$

В принятом здесь приближении ω не зависит от волнового числа, поэтому необходимо рассматривать следующее приближение.

В случае, когда граница слоя $y = h$ свободна

$$\sigma_{23} = 0 \text{ при } y = h, \quad (3.3)$$

дисперсионное уравнение получается в виде

$$cth(kph) = \frac{1 - \chi\eta}{\theta\eta} p. \quad (3.4)$$

В коротковолновом приближении из (3.4) получается уравнение, совпадающее с уравнением (2.9). В длинноволновом приближении

$$\eta = \frac{kh}{(1 + \chi)kh + \theta}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.5) скорость распространения сдвиговой волны удовлетворяет условию затухания (2.7), т.е. в этом случае локализованная волна всегда существует (независимо от толщины слоя или от kh).

Закключение. Исследование распространения сдвиговых упругих волн в слое на основе упрощенной модели Коссера, когда одна из плоскостей, ограничивающих слой, нагружена инерционной массой, а вторая граница закреплена, выявило возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определена скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближении.

¹Институт механики НАН РА
e-mail: mbelubekyan@yahoo.com

²Северо-Восточный федеральный ун-т им. М. К. Аммосова, г. Якутск
e-mail: grigyum@yandex.ru

³Ереванский государственный университет
e-mail: vas@ysu.am

⁴Институт физико-технических проблем Севера им. В. П. Ларионова,
обособленное подразделение ФИЦ ЯНЦ СО РАН, г. Якутск

М. В. Белубекян, Ю. М. Григорьев, С. В. Саркисян, А. А. Гаврильева

Локализованные волны в слое с нагруженной инерционной массой на основе упрощенной модели Коссера

Исследовано распространение сдвиговых упругих волн в слое с учетом внутреннего вращения частиц (на основе упрощенной модели Коссера). Установлена возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определена скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближениях.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Յ. Մ. Գրիգորյե, Ս. Վ. Մարգարյան, Ա. Ա. Գավրիլյևա

Դներցիոն զանգվածով բեռնավորված շերտում տեղայնացված ալիքները Կոսսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա

Շերտում մասնիկների ներքին պտտման դեպքում հետազոտված է սահքի առաձգական ալիքների տարածումը (Կոսսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա): Շերտի

բեռնավորված մակերևույթի երկայնքով հաստատված է տեղայնացված (մակերևութային) ալիքի առաջացման հնարավորություն: Կարճալիք և երկարալիք մոտարկումներում որոշվում են ալիքի տարածման արագությունները:

M. V. Belubekyan, Y. M. Grigoriev, S. V. Sarkisyan, A. A. Gavrilava

**Localized Waves in a Layer with a Loaded Inertial Mass,
on Based on the Simplified Cosserat Model**

The propagation of elastic shear waves in the layer is investigated taking into account internal rotation of particles (based on the simplified model of Cosserat). The possibility of the appearance of a localized (surface) wave was set, along the loaded surface of the layer. The velocities of wave propagation in the short-wave and long-wave approximations are determined.

Литература

1. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* – ДНАН Армении. 2014. Т. 114. № 2. С.108-115.
2. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzoca P.* – Journ. Acoustical Society of America. 2017. V. 141(3). P. 1947-1952.
3. *Belubekyan M. V.* – Proc. of the YSU. Physical and Mathematical Sciences. 2017. V. 51. Issue 1. P. 42–45.
4. *Белубекян М. В.* В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 93-98.
5. *Белубекян В. М., Белубекян М. В., Гараков В. Г.* – Вестн. РАУ. Серия физ.-мат. и естеств. наук. 2017. № 2. С. 81-90.
6. *Ambartsumyan S. A., Avetisyan A. S., Belubekyan M. V.* – Proc. of the NAS of Armenia. 2017. V. 70. № 2. P. 15–27.
7. *Аветисян А. С., Белубекян М. В.* – Акустический журн. 2019. Т. 65. № 5. С.1-9.

А. А. Саркисян

Поведение микрополярной гибкой круглой пластинки при изгибе

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. О. Саркисяном 25/IX 2020)

Ключевые слова: микрополярный материал, гибкая круглая пластинка, прикладная модель, деформационное поведение, жесткость.

1. Введение. В [1, 2] на основе классической теории упругости построены общие геометрически нелинейные прикладные теории тонких пластин и оболочек. В [3, 4] построены общие прикладные линейные теории статики и динамики микрополярных упругих тонких пластин. В [5] построена геометрически нелинейная теория микрополярных упругих тонких пластин в криволинейных координатах, а в [6] рассматриваются статические и динамические задачи микрополярных упругих гибких прямоугольных пластин и пологих оболочек.

В данной работе на основе построенной в [5] прикладной модели решена задача микрополярной упругой гибкой круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки. Проведено сравнение с результатами соответствующей классической модели и, как в [6], установлены эффективные свойства микрополярного материала.

2. Геометрически нелинейная прикладная модель микрополярных упругих тонких круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим круглую пластинку постоянной толщины $2h$ и радиусом R как трёхмерное упругое изотропное тело. Отнесём пластинку к системе координат r, θ, z .

Будем исходить из основных уравнений микрополярных упругих геометрически нелинейных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений в криволинейных координатах [5], примем в них $A_1 = 1$, $A_2 = r$, $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \theta$. В результате имеем:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} = -p_1, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + N_{23} - N_{32} = -m_1, \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial r} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) = -p_2, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = -m_2, \\
& \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} T_{11} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} T_{22} + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} (S_{12} + S_{21}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial r} \right] = -p_3 \\
& \frac{\partial L_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} L_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{23}}{\partial \theta} + (S_{12} - S_{21}) = -m_3, \\
& N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} \right) = h p_1, \\
& N_{32} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) = h p_2, \\
& L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Lambda_{13} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} - (M_{12} - M_{21}) = h m_3; \tag{1}
\end{aligned}$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right], \\
T_{22} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right], \\
S_{12} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) - 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\
S_{21} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\
N_{13} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) \right], \\
N_{23} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + (\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1 \right], \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \\
N_{31} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right], \quad N_{32} = 2h \left[(\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha \Omega_1 \right], \\
M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[(\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) - 2\alpha I \right], \\
M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[(\mu + \alpha) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha I \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= 2h \left[(\beta + 2\gamma) \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \iota \right], \quad L_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \Omega_3}{\partial r} \\
L_{22} &= 2h \left[(\beta + 2\gamma) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta \iota \right], \quad L_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \theta}, \\
L_{12} &= 2h \left[(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) \right], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \iota}{\partial r}, \\
L_{21} &= 2h \left[(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} \right], \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \iota}{\partial \theta}, \\
L_{33} &= 2h \left[(\beta + 2\gamma) \iota + \beta \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right]; \quad (2)
\end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
T_{11} &= T_{11}^0, \quad S_{12} = S_{12}^0, \quad M_{11} = M_{11}^0, \quad M_{12} = M_{12}^0, \\
T_{11} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{13} &= N_{13}^0, \quad L_{11} = L_{11}^0, \quad L_{12} = L_{12}^0, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2, w – перемещения точек срединной плоскости пластинки; ψ_1, ψ_2 – полные углы поворота; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – свободные повороты первоначально нормального элемента; ι – интенсивность свободного поворота вдоль оси z ; Γ_{ii} – деформации удлинений; $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$ – деформации сдвигов; K_{ii} – изгибы срединной плоскости пластинки, обусловленные силовыми напряжениями; K_{ij} – кручения срединной плоскости пластинки, обусловленные силовыми напряжениями; $\mathcal{K}_{ii}, \mathcal{K}_{33}$ – изгибы срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями; $\mathcal{K}_{ij}$ – кручения срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями; l_{i3} – гиперсдвиги срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями; $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$ – усилия, $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ – моменты и Λ_{i3} – гипермоменты [4, 5].

Отметим, что из этой модели можно получить соответствующую геометрически линейную модель [4], отбросив нелинейные члены. Также можно получить геометрически нелинейную классическую модель типа Тимошенко, если принять $\alpha = 0$.

В случае осесимметричной задачи уравнения расщепляются на две отдельные системы уравнений: задачу изгиба и задачу кручения круглой пластинки.

Задача изгиба:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{dN_{13}}{dr} + \frac{1}{r}N_{13} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rT_{11}\frac{dw}{dr}\right) &= -p_3, \quad N_{31} - \left(\frac{dM_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(M_{11} - M_{22})\right) = hp_1, \\ \frac{dT_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) &= -p_1, \quad \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = -m_2;\end{aligned}\quad (4)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}T_{11} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{du_1}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \nu\frac{1}{r}u_1\right], \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{r}u_1 + \nu\left(\frac{du_1}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right)\right], \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{d\psi_1}{dr} + \nu\frac{1}{r}\psi_1\right], \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{r}\psi_1 + \nu\frac{d\psi_1}{dr}\right], \\ L_{12} &= 2h\left[(\gamma + \varepsilon)\frac{d\Omega_2}{dr} - (\gamma - \varepsilon)\frac{1}{r}\Omega_2\right], \quad L_{21} = 2h\left[-(\gamma + \varepsilon)\frac{1}{r}\Omega_2 + (\gamma - \varepsilon)\frac{d\Omega_2}{dr}\right] \\ N_{13} &= 2h\left[(\mu + \alpha)\frac{dw}{dr} + (\mu - \alpha)\psi_1 + 2\alpha\Omega_2\right], \quad N_{31} = 2h\left[(\mu + \alpha)\psi_1 + (\mu - \alpha)\frac{dw}{dr} - 2\alpha\Omega_2\right];\end{aligned}\quad (5)$$

граничные условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (6)$$

Задача кручения:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{dS_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) &= -p_2, \quad \frac{dL_{13}}{dr} + \frac{1}{r}L_{13} + (S_{12} - S_{21}) = -m_3, \\ N_{32} - \left(\frac{dM_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(M_{12} + M_{21})\right) &= hp_2, \quad \frac{dL_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + N_{23} - N_{32} = -m_1, \\ L_{33} - \frac{d\Lambda_{13}}{dr} - (M_{12} - M_{21}) &= hm_3;\end{aligned}\quad (7)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}M_{12} &= \frac{2h^3}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{d\psi_2}{dr} - (\mu - \alpha)\frac{1}{r}\psi_2 - 2\alpha\iota\right], \quad N_{23} = 2h[(\mu - \alpha)\psi_2 - 2\alpha\Omega_1], \\ M_{21} &= \frac{2h^3}{3}\left[-(\mu + \alpha)\frac{1}{r}\psi_2 + (\mu - \alpha)\frac{d\psi_2}{dr} + 2\alpha\iota\right], \quad N_{32} = 2h[(\mu + \alpha)\psi_2 + 2\alpha\Omega_1], \\ L_{11} &= 2h\left[(\beta + 2\gamma)\frac{d\Omega_1}{dr} + \beta\frac{1}{r}\Omega_1 + \beta\iota\right], \quad L_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\frac{d\Omega_3}{dr}, \\ L_{22} &= 2h\left[(\beta + 2\gamma)\frac{1}{r}\Omega_1 + \beta\frac{d\Omega_1}{dr} - \beta\iota\right], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\frac{d\iota}{dr}, \\ L_{33} &= 2h\left[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta\left(\frac{d\Omega_1}{dr} + \frac{1}{r}\Omega_1\right)\right], \quad S_{12} = 2h\left[(\mu + \alpha)\frac{du_2}{dr} - (\mu - \alpha)\frac{1}{r}u_2 - 2\alpha\Omega_3\right], \\ S_{21} &= 2h\left[-(\mu + \alpha)\frac{1}{r}u_2 + (\mu - \alpha)\frac{du_2}{dr} + 2\alpha\Omega_3\right];\end{aligned}\quad (8)$$

граничные условия шарнирного опирания

$$\Omega_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (9)$$

3. Задача изгиба микрополярной гибкой круглой пластинки. Рассмотрим деформацию шарнирно опертой микрополярной упругой тонкой круглой пластинки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности q . Решение задачи кручения (7) – (9) будет нулевым, а задачу изгиба (4) – (6) будем решать по методу Галеркина.

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид (6). Зададим решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= C_1 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}, \quad w(r) = C_2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), \\ \psi_1(r) &= C_3 \left(1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}, \quad \Omega_2(r) = C_4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поставив эти представления в физико-геометрические соотношения (5), получим выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для систем уравнений равновесия (4), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(\frac{dT_{11}}{dr} + \frac{1}{r} (T_{11} - T_{22}) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} dr &= 0, \\ \int_0^R \left(\frac{dN_{13}}{dr} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r T_{11} \frac{dw}{dr} \right) - q \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr &= 0, \\ \int_0^R \left(\frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} dr &= 0, \\ \int_0^R \left(N_{31} - \left(\frac{dM_{11}}{dr} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) \right) \right) \left(1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} dr &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

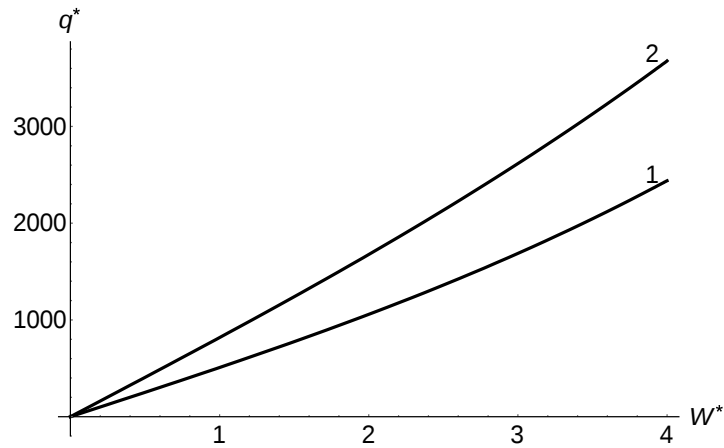


Рис. 1

Выполнив интегрирование, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 . Из указанной системы можно получить зависимость q от W .

Численные расчеты выполнены для круглой пластинки, когда $R = 0.005$ м, а для относительной толщины принято: $\delta = \frac{h}{R} = \frac{1}{100}$. Для физических постоянных приняты следующие значения [7]: $E = 2,768 \cdot 10^9$; $\gamma = 4.1$; $\alpha = 0.85 \cdot 10^9$; $\mu = 1.033 \cdot 10^9$; $\epsilon = 0.13$; $\nu = 0.34$.

Здесь введены безразмерные величины: $W^* = \frac{W}{h}$, $q^* = \frac{q}{E\delta^4}$.

На рис. 1 приведены зависимости прогиб W^* – нагрузка q^* . Линия 1 соответствует классической нелинейной теории, линия 2 – микрополярной нелинейной теории. При $q^* = 1500$ по микрополярной модели получаем $W^* = 1.8$, а по классической модели $W^* = 2.72$. Как видно из графиков, при указанной модели пластинки каждому значению интенсивности нагрузки отвечает одно, вполне определенное равновесное состояние. По нелинейной теории при всех остальных равных условиях микрополярность материала довольно значительно повышает жесткость пластинки.

4. Заключение. На основе геометрически нелинейной модели микрополярных упругих тонких круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений решена конкретная задача об изгибной деформации круглой пластинки. Сделан анализ полученных численных результатов и установлены повышенные жесткостные свойства микрополярных пластин по сравнению с классическими случаями.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С263.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: armenuhis@mail.ru

А. А. Саркисян

Поведение микрополярной гибкой круглой пластинки при изгибе

Рассматривается геометрически нелинейная прикладная модель микрополярных упругих тонких гибких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. На основе этой прикладной модели решена конкретная задача для микрополярных упругих гибких круглых пластин при равномерно распределенной нагрузке, когда края пластинки шарнирно оперты. На основе численного анализа устанавливаются некоторые эффективные проявления микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Ա. Հ. Սարգսյան

**Միկրոպոլյար ճկուն շրջանային սալի վարքը
ծունան ժամանակ**

Դիտարկվում է միկրոպոլյար առաձգական բարակ ճկուն սալերի տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով երկրաչափորեն ոչ գծային կիրառական մոդելը: Այդ կիրառական մոդելի հիման վրա լուծվում է որոշակի խնդիր միկրոպոլյար առաձգական ճկուն շրջանային սալերի համար հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում, երբ սալի եզրերը հողակապորեն հենված են: Թվային անալիզի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի որոշ արդյունավետ դրսևորումներ համեմատած համապատասխան դասական նյութի հետ:

A. H. Sargsyan

**Behavior of Micropolar Flexible Round
Plate in Bending Problem**

Geometrically nonlinear applied model of micropolar elastic thin flexible plates with independent fields of displacement and rotation is considered. On the basis of this applied model, specific problem for micropolar elastic flexible round plates with uniformly distributed load is solved, when its edges are hinge supported. On the basis of numerical analysis, some effective manifestations of micropolar material are established in comparison with the corresponding classical material.

Литература

1. *Karman Th.* Collected works. V. 1. London. 1956. 530 p.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М. Гостехиздат. 1956. 420 с.
3. *Саркисян С. О.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 2. С. 148-155.
4. *Sargsyan A. H., Sargsyan S. H.* – Journal of Sound and Vibration. 2014. V. 333. Issue 18. P. 4354-4375.
5. *Саркисян А. А.* – Ученые записки ГГПИ. 2014. № 1. С. 91-103.
6. *Саркисян А. А., Саркисян С. О.* В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVIII междунар. конф. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября, 2016. Т. 2. Ростов-на-Дону. Изд-во ЮФУ. С. 180-184.
7. *Lakes R.* In: Continuum models for materials with microstructure. Ed. by H. Muhlhaus. Ch. 1. N. Y. J. Wiley and Sons, Ltd. 1995. P. 1-22.

Г. Г. Шемян¹, А. В. Геворкян²

О работоспособности подшипников качения электрических машин на жидкой смазке

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 27/X 2020)

Ключевые слова: подшипник качения, жидкая смазка, тепловыделение, уплотнитель, система смазки.

При повышении скорости вращения ротора электрической машины (ЭМ) температура подшипников повышается. Все детали его расширяются, в результате чего радиальный зазор в подшипнике исчезает. Это приводит к росту тепловыделения, повышению трения скольжения и пластической деформации. В настоящей работе приведены результаты сравнительных испытаний различных видов систем смазки (струйная, фитильная, маслотуманная, лабиринтная, импеллерно-лабиринтная и др.) с оценкой эффективности их применения в высокоскоростных подшипниковых узлах ЭМ. С целью уменьшения мощности, затрачиваемой на подачу смазки в подшипниковый узел, и снижения трения были проведены теоретические и экспериментальные исследования на конкретных макетах подшипниковых узлов ЭМ. Приведен ряд расчетных формул, позволяющих на этапе проектирования высокоскоростных подшипниковых узлов оценивать эффективность выбранной системы смазки.

Для проверки достоверности приведенных расчетных формул был разработан, изготовлен и испытан макет подшипникового узла на 12 000 об/мин. Испытание и исследование систем смазки на макете дали удовлетворительные совпадения расчетных и экспериментальных результатов.

Постановка задачи. При вращении подшипников качения на высоких скоростях развиваются значительные центробежные силы, которые создают дополнительные контактные напряжения на дорожках качения наружного и внутреннего колец [1]. В результате суммарное контактное напряжение на дорожке качения от внешних нагрузок и центробежных сил

может превышать допустимую величину. В этом случае условие прочности подшипников согласно [2] проверяется выражением

$$\sigma_{cm} \leq \sqrt[10]{\frac{10^7}{N_u h}} [\sigma_{cm}] \text{ кг/см}^2, \quad (1)$$

где σ_{cm} – максимальное напряжение смятия на площадке контакта, рассчитанное по формуле Герца – Беляева.

С учетом центробежной силы напряжение смятия будет

$$\sigma_{cm} = \frac{4100}{\mu\gamma} \sqrt{P \left(\frac{4}{d_{ш}} - \frac{1}{R_n} - \frac{1}{r_{жс}} \right)^2} \text{ кг/см}^2, \quad (2)$$

где μ и γ – коэффициенты, выбираемые из соответствующих графиков [2] в зависимости от величины $[\sigma_{cm}]$; h – гарантийный ресурс подшипника; $r_{жс}$ и R_n – радиусы желоба и дорожек качения наружного кольца подшипника в плоскости оси и перпендикулярной оси вращения. Согласно [1]

$$r_{жс} = 0.52d_{ш}, R_n = (D_0 + d_{ш})0.5;$$

N_u – число повторных напряжений, испытываемых дорожкой качения наружного кольца подшипника в течение одного часа:

$$N_u = 30nZ \left(1 - \frac{d_{ш}}{D_0} \right); \quad (3)$$

Z – число тел качения; $d_{ш}$ – диаметр шарика; D_0 – диаметр окружности, проходящий через центр тел качения; n – скорость вращения внутреннего кольца подшипника (об/мин); $[\sigma_{cm}]$ – допустимое напряжение смятия при базе (при точечном контакте и твердости $HR_c = 59$ $[\sigma_{cm}] = 350$ кг/мм²).

Наибольшая суммарная нагрузка P , действующая на наружное кольцо подшипника,

$$P = P_0 + P_c.$$

Здесь P_c – центробежная сила шариков:

$$P_c = \frac{G_{ш}}{g} \omega_c^2 \frac{D_0}{2}, \quad (4)$$

где $G_{ш}$ – вес шарика в кг; g – ускорение сил тяжести (9.8 м/с²); ω_c – угловая скорость вращения сепаратора;

P_0 – сила на наиболее нагруженное тело качения, создаваемая внешней нагрузкой и определяемая по уравнению Штрибека [4]

$$P_0 = \frac{KR}{Z},$$

где R – суммарная радиальная нагрузка, действующая на подшипник; K – числовой коэффициент, для шарикоподшипников $K=5$ [4].

Осуществление в электрических машинах циркуляционной системы смазки со специальными жидкими маслами является достаточно сложной задачей. Для высокоскоростных подшипниковых узлов принимаются следующие виды системы смазки и охлаждения: струйная, фитильная, маслоступная и шнековая.

Струйная система смазки допускает более высокие температуры, чем остальные. При выборе вида системы следует учитывать режимы работы подшипника, скорость вращения, рабочие нагрузки, температуру среды и др. Правильный выбор системы смазки важен для предотвращения энергетических потерь на преодоление сопротивления трения. В качестве смазочных масел применяются минеральные масла, которые обладают химической стабильностью, не содержат механических примесей, органических кислот и воды. Основным техническим показателем смазочного масла, определяющим его эксплуатационные свойства и пригодность для данного узла, является вязкость [3]. При выборе масла также необходимо учитывать другие технические показатели – температуру застывания, температуру вспышки и др.

Проверку параметров режима смазки для быстроходных подшипников при $d_{cp}n \geq 100\,000$ мм об/мин рекомендуется производить из условия $\lambda \geq [\lambda]$, где

$$\lambda = C_0 \frac{0.125}{\sqrt{R_{a_1}^2 + R_{a_2}^2}} d_{cp}^{0.55} (d_{cp}n)^{0.75} V_n Q_{cm}^{-0.45}.$$

Здесь $[\lambda]$ – параметр режима смазки (рекомендуется выбрать $[\lambda] = 3$); $d_{cp} = \frac{D+d}{2}$ – средний диаметр подшипника; C_0 – конструктивный коэффициент, зависящий от типа подшипника (для радиальных однорядных шарикоподшипников всех серий $C_0=70$); R_{a_1} и R_{a_2} – среднеарифметические отклонения шероховатости трущихся поверхностей, определяемые по классам и разрядам чистоты: согласно [9] $\sqrt{R_{a_1}^2 + R_{a_2}^2} \approx 0.125$ мкм; V_n – параметр масла (определяется в зависимости от температуры подшипника [9]; $Q_{cm} = P$ – суммарная нагрузка на подшипник.

Для предотвращения утечки масла из узла в местах выхода вращающегося вала из крышки устанавливаются уплотнения. Существующие уплотнения вращающихся валов подразделяются на: сальниковые, манжетные, лабиринтные, импеллерно-лабиринтные и торцовые [4]. Выбор того или иного типа уплотнения зависит от режима работы и конструкции

узла [8]. ИмPELLерно-лабиринтные уплотнения устроены так, что при вращении вала вытеканию масла препятствуют имPELLер и лабиринтные выточки на валу и в крышке. При остановках машины работа имPELLера прекращается, и для предотвращения утечки уровень масла должен быть ниже уровня поверхности лабиринтных выточек крышек подшипников. ИмPELLерно-лабиринтные уплотнения при работе не испытывают механического трения и износа. Благодаря этому они могут применяться при очень высоких скоростях. При этом эффективность их применения резко возрастает.

Тепловыделение в радиальных шарикоподшипниках при интенсивной струйной смазке определяется по эмпирической формуле [10]

$$Q_{ш} = K_{\eta} \left[(2.2 + 1.5V) 10^{-2} l^{\lambda_{ш} dn} + \Delta Q_{ш}^R + \Delta Q_{ш}^A \right], \quad (5)$$

где

$$K_{\eta} = 1 : \left[V^{0.015} (\eta_{mp} / \eta - 1) - 0.015 / V (\eta_{me} / \eta - 1) \right],$$

η и η_{mp} – вязкости соответственно трансформаторного масла при температуре 50°C и масла, используемого в узле; $\lambda_{ш}$ – параметр для шарикоподшипников, зависящий от скорости прокачки масла: $\lambda_{ш} = 10^{-6} (1.93 - 0.058V)$; V – скорость прокачки масла; $Q_{ш}^R$ – слагаемое, учитывающее влияние величины радиальной нагрузки на тепловыделение $\Delta Q_{ш}^R = 10^{-3} R^{V_{ш}} - C_{ш}$; $V_{ш}$ – показатель степени, зависящий от параметра dn : $V_{ш} = 0.61 + 1.2 \cdot 10^{-7} dn$, $C_{ш}$ – коэффициент тепловыделения подшипника при радиальной нагрузке до $R = 1000$ кг, $C_{ш} = 0.03 + 1.2 \cdot 10^{-7} dn$ ккал/с; $\Delta Q_{ш}^A$ – приращение тепловыделения в подшипниках при действии осевой нагрузки: $Q_{ш}^A = h_1 A^{\Psi}$, A – действующая осевая нагрузка; h_1 и Ψ – параметры, зависящие от значений dn и скорости прокачки:

$$-h_1 = 3.2 \cdot 10^{-12} l^{0.45V} (dn)^{1.4},$$

$$\Psi = 0.763 - 0.5 \cdot 10^{-7} dn - 0.27 \cdot 10^{-3} V^{3.3}.$$

Конечная температура подшипника при установившемся тепловом режиме будет зависеть от количества теплоты, выделяемой подшипником, начальной температуры теплоносителей (смазка, корпус, среда) и коэффициентов их теплопередачи. Существующая теория смазки не располагает четкими критериями для определения температурного уровня подшипников, поэтому воспользуемся приближенным расчетным методом, приняв, что все тепло отводится маслом. Тогда температуру вытекающей из подшипника смазки можно определить по формуле

$$t_{\text{вых}} = t_{\text{ex}} + \frac{60Qn}{CV\gamma} \text{ (}^{\circ}\text{C)},$$

где $t_{\text{вых}}$ и t_{ex} – температура масла перед входом и выходом подшипника, $^{\circ}\text{C}$; C – теплоемкость масла, ккал/кг.град.; γ – удельный вес масла.

Из условия постоянства температуры подшипника, входящего и выходящего масел (при давлении масла на выходе из подшипника не выше атмосферного) получим:

поверхность маслоблока (м^2)

$$S \geq \frac{60C_M V_0 t_{\text{ex}}}{\alpha(t_{\text{ex}} - t_{\text{окр}})};$$

объем маслобака (м^3)

$$W \geq \frac{S\alpha(t_{\text{ex}} - t_{\text{окр}})60}{\gamma C(t_{\text{вых}} - t_{\text{окр}})},$$

где V_0 – расход масла, кг/с; α – коэффициент теплоотдачи от бака к окру-

жающей среде [7]: $\alpha = \frac{q}{t_{\text{ex}} - t_{\text{окр}}} \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{град}^2}$; $t_{\text{окр}}$ – температура окружающей

среды, $^{\circ}\text{C}$; q – плотность теплового потока, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{град}^2}$.

Для проверки достоверности приведённых формул были проведены экспериментальные исследования на макетах подшипниковых узлов. Макет подшипниковых узлов представлял ротор весом 58 кг с подшипниками типа 7В207Еш, собранный на базе генератора С-75. Для контроля температуры подшипника и масла в шести точках были установлены термопары. В состав испытательного стенда входили: двигатель постоянного тока, мультипликатор, маслонасос с автономной маслосистемой, автотрансформатор, макет подшипниковых узлов, смонтированный на раме и снабженный маслосистемой (двигатель – насос, маслосток, фильтр, преобразователь типа ВСА-4, распределительный вентиль, трубопровод). С целью обеспечения техники безопасности испытательный стенд был помещен под защитный П-образный щит с толщиной стенки 5 см. В качестве измерительных средств использовались: а) потенциометр типа ПП-63, класса 0.05 для контроля температур; б) термометр с точностью 0.2 $^{\circ}\text{C}$ для контроля температуры окружающей среды; в) дозиметр для определения расхода масла; г) стендовые приборы (вольтметр, амперметр, тахометр). Макет подшипниковых узлов с помощью гибкой муфты был соединен с валом мультипликатора, что позволило довести скорость вращения ротора до 12 000 об/мин. Подвод масла к подшипникам производился при помощи маслонасоса, а отвод осуществлялся свободным сливом по трубам. Для контроля температуры подшипников, подводимого и отводимого масла, а также масла в маслобаке были установлены термометры и термопары.

Предварительно по вышеприведенной расчетной методике были определены искомые параметры: $V_0 = 0.18$ л/мин; $Q_{ин} = 0.011$ ккал, при $t_{окр} = 25^\circ\text{C}$, $t_{вых} = 45^\circ\text{C}$, объем масла $W = 14$ л, поверхность бака $S = 0.3$ м². Для проверки утечки масла через уплотнения в статическом состоянии макета в подшипниковые узлы были поданы различные расходы масла. Установлено, что при прокачке масла до 0.8 л/мин при невращающемся и вращающемся роторе в течение всего испытания утечка не наблюдалась. Предварительные испытания макета подшипниковых узлов при 12 000 об/мин показали, что температура подшипникового узла устанавливается через час работы узла.

Выводы

1. Температура в подшипниках значительно уменьшается при применении жидкой принудительной смазки по сравнению с консистентной смазкой.
2. При оптимальном расходе температура входящего и выходящего масла отличается от температуры подшипника лишь на 2-3 $^\circ\text{C}$.
3. Уменьшение тепловыделения в подшипнике объясняется уменьшением коэффициента трения при жидкой смазке и смыванием продуктов износа (продукты износа при циркуляции масла задерживаются в фильтре).
4. Для исследуемого макета узла на 12 000 об/мин определен оптимальный расход масла, при котором установившаяся температура узла не превышает 45 $^\circ\text{C}$, – $V = 0.2$ л/мин,
5. Конструкция импеллерно-лабиринтного уплотнения, применённая в макете, надежно обеспечивает отсутствие утечки в подшипниковых узлах, технологична, надежна в эксплуатации и не требует особого ухода.
6. Результаты экспериментальных исследований удовлетворительно совпадают с расчетными.
7. Экспериментально подтверждено, что оптимальный расход масла, рассчитанный по формуле (4), для генераторов 75 кВт составляет $V = 0.2 \div 0.3$ л/мин.
8. При указанных расходах температура подшипников превышает температуру смазки (масла) на выходе лишь на 2 ÷ 3 $^\circ\text{C}$.

¹ Институт механики НАН РА

² ЗАО «Электромаш ГАМ» НП ТЦ

e-mails: hamlet@mechins.sci.am, elektramash@mail.ru

Г. Г. Шемян, А. В. Геворкян

**О работоспособности подшипников качения
электрических машин на жидкой смазке**

Приведены различные виды систем смазки (струйная, фитильная, маслотов-
манная, лабиринтная, импеллерно-лабиринтная и др.). Рассмотрены результаты их
сравнительных испытаний и эффективность применения в высокоскоростных
подшипниковых узлах электрической машины. Рассмотрены также различные ти-
пы уплотнений (сальниковые, манжетные, лабиринтные, импеллерно-лабиринт-
ные и др.).

Հ. Գ. Շեկյան, Ա. Վ. Գևորգյան

**Էլեկտրական մեքենաների հեղուկ քսուկներով զորման
առանցքակալների աշխատունակության մասին**

Բերված են տարբեր տեսակի յուղման համակարգեր (շիթային, պատրույգային,
յուղամառախուղային, պտուտակրիչային և այլն): Դիտարկված են նրանց համեմատա-
կան փորձարկումների արդյունքները և էլեկտրական մեքենաների արագընթաց
առանցքակալներում նրանց կիրառման արդյունավետությունը: Դիտարկված են նաև
տարբեր տեսակի խտարարներ (խցուկային, խցողակային, լաբիրինթային, օդամղա-
լաբիրինթային և այլն):

H. G. Shekyan, A. V. Gevorgyan

**About the Performance of the Bearings
Swinging Electric Machines on Liquid Lubricant**

Various types of lubrication systems are presented (jet, wick, oil-mist, labyrinth,
impeller-labyrinth, etc.). The results of their comparative tests and the effectiveness of
their application in high-speed bearing units of an electric machine are considered.
Various types of seals are also considered (gland, lip, labyrinth, impeller-labyrinth,
etc.).

Литература

1. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин. М. Машиностроение. 1970. 785 с.
2. *Федулов А. А.* Условия эксплуатации и смазки подшипниковых опор. Екатеринбург. Информ. портал УрФУ, ЦНОТ и ТОО. 2020. 43 с.
3. *Унифанцев Ю. А.* Смазка металлургического оборудования. Новокузнецк. СибГИУ. 2008. 53 с.
4. *Богданович П. Н.* Трение, смазка и износ в машинах. Минск. Технология. 2011. 527 с.
5. *Ильченко А.* Смазывание подшипников качения. [Электронный ресурс], Режим доступа: www.snrgjv.ru/librifications11.htm.
6. *Манг Т.* Смазочные материалы, производство, применение, свойства. Справочник. СПб. Профессия. 2010. 944 с.

7. *Кудрявцев В. Н.* Курсовое проектирование деталей машин. Л. Машиностроение. 1984. 400 с.
8. *Голубев А. И.* Современные уплотнения вращающихся валов. М. ГНТИМЛ. М. 1963. 208 с.
9. *Зайцев А. М., Коросташевский Р. В.* Авиационные подшипники качения. М. Оборонгиз. 1963. 102 с.
10. *Туrowsкий Э. М.* Надежность и долговечность шарикоподшипников. Материалы ВК по повышению надежности и долговечности машин, оборудования и приборов. Т. IV. ЦИНТ. 1964. 65 с.

УДК 539.3

Ե. В. Варданян¹, член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян²,
А. А. Саруханян¹

О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости

(Представлено 5/XI 2020)

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциал скорости, смешанная граничная задача, интегральное уравнение.

Введение. В гидромеханике хорошо известна осимметрическая задача Ламба для полупространства об установившемся потенциальном течении идеальной жидкости через круглое отверстие в плоском тонком жестком экране [1]. Эта задача в цилиндрической системе координат математически формулируется как смешанная граничная задача теории потенциала, когда на круге границы полупространства, заполненного идеальной жидкостью, задано значение потенциала, а на остальной части границы полупространства вне круга нормальная производная потенциала обращается в ноль, т.е. нормальная компонента скорости обращается в ноль. Решение задачи Ламба, первоначально приведенное в [1], в дальнейшем применением метода дуальных интегральных уравнений существенно упрощено в [2].

В настоящей работе рассматривается плоская задача Ламба для плоскости, заполненной идеальной жидкостью и на своей границе контактирующей с абсолютно жестким плоским тонким экраном в виде двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных тонких пластин-стержней, т.е. в пространственном измерении в виде двух сдвинутых абсолютно жестких тонких полубесконечных пластин, образующих между собой отверстие в форме бесконечной в обоих направлениях полосы на границе полупространства. Поставленная задача при установившемся потенциальном течении формулируется в виде двухмерной смешанной граничной задачи теории классического потенциала. При помощи решения вспомогательной граничной задачи решение смешанной задачи сводится к решению определяющего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром или к решению эквивалентного сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром

Коши. Методом ортогональных многочленов Чебышева и методом СИУ построены точные (замкнутые) решения определяющих уравнений. Основные характеристики задачи – компоненты скоростей, значения потенциала под жестким экраном, расходы жидкости через сечения отверстия представлены явными аналитическими формулами простых структур. Рассмотрены частные случаи и получены условия ограниченности скоростей в концевых точках отверстия.

Отметим, что результаты по решению задачи Ламба могут быть использованы при исследовании закономерностей изменения характеристик артезианских водных ресурсов при наличии скважин и для количественных оценок этих характеристик.

Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть нижняя полуплоскость $y < 0$, отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxy и заполненная идеальной жидкостью, на своей границе $y = 0$ контактирует с двумя тонкими абсолютно жесткими экранами-пластинами $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, сдвинутыми друг относительно друга на расстоянии $2a$. Рассмотрим плоское установившееся потенциальное (безвихревое) течение идеальной жидкости через отверстие $(-a, a)$, когда на этом интервале заданы значение потенциала и расход жидкости через отверстие $(-a, a)$. Такое течение идеальной жидкости, как известно [3], описывается потенциалом $\varphi(x, y)$, через который компоненты скоростей по координатным осям v_x и v_y выражаются формулами

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (-\infty < x < \infty; y < 0). \quad (1)$$

Из этих формул и уравнения неразрывности вытекает, что потенциал $\varphi(x, y)$ в полуплоскости $y < 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией. Следовательно, описанная граничная задача гидромеханики идеальной жидкости математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи теории потенциала для полуплоскости $y < 0$:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty; -\infty < y < 0) \\ v_y \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 & (x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)); \\ \varphi(x, y) \Big|_{y=0} = f(x) & (-a < x < a); \quad v_x^2 + v_y^2 \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (2)$$

где $f(x)$ – заданное на интервале $(-a, a)$ значение потенциала. Граничная задача [2] должна быть дополнена условием

$$Q = \int_{-a}^a v_y(x, 0) dx, \quad (3)$$

где Q – заданная величина расхода жидкости через отверстие $(-a, a)$ за единицу времени.

Решение смешанной граничной задачи (2) – (3) сведем к решению ИУ. С этой целью предварительно построим решение вспомогательной граничной задачи опять для полуплоскости

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty; -\infty < y < 0) \\ v_y \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = v(x) & (-\infty < x < \infty), \quad v_x^2 + v_y^2 \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (4)$$

где $v(x)$ – пока известная функция. Для решения задачи (4) введем в рассмотрение трансформанты Фурье по переменной x

$$\{\bar{\varphi}(\lambda, y); \bar{v}(\lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x, y); v(x)\} e^{i\lambda x} dx.$$

Тогда в трансформантах Фурье двумерная задача (4) преобразуется в одномерную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - \lambda^2 \bar{\varphi} = 0 & (y < 0); \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \bar{v}(\lambda). \end{cases} \quad (5)$$

Исчезающее на бесконечности решение задачи (5) имеет вид

$$\bar{\varphi}(\lambda, y) = \frac{\bar{v}(\lambda)}{|\lambda|} e^{|\lambda|y} \quad (-\infty < y < 0).$$

Отсюда по формуле обращения Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K(|x-s|, y) \cos(\lambda(x-s)) d\lambda, \\ K(x, y) &= \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y}}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (-\infty < x < \infty; -\infty < y < 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь было учтено первое условие задачи (2), согласно которому $v(x) = 0$ при $x = a$. Для вычисления ядра $K(x, y)$ продифференцируем его выражение из (6) по x и по y и воспользуемся выражениями известных интегралов из [4] (с.71, ф-ла 2.4.(1) и с.23, ф-ла 1.4.(1)). В результате

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\int_0^{\infty} e^{\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

($-\infty < x < \infty; y < 0$)

Отсюда

$$dK = -\frac{x dx}{x^2 + y^2} - \frac{y dy}{x^2 + y^2} = d\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

и, следовательно,

$$K(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C, \quad (7)$$

где C – постоянная, которая применительно к обсуждаемой задаче определяется ниже. Теперь согласно (6) и (7) будем иметь

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + y^2}} v(s) ds + C_0 \quad (-\infty < x < \infty; -\infty < y \leq 0; C_0 = CQ/\pi). \quad (8)$$

При помощи (8) по формулам (1) могут быть вычислены компоненты скоростей через функцию $v(x)$:

$$v_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(s-x)v(s)ds}{(s-x)^2 + y^2}; \quad v_y(x, y) = -\int_{-a}^a \frac{s v(s) ds}{(s-x)^2 + y^2} \quad (-\infty < x < \infty; y < 0). \quad (9)$$

Но чтобы определить функцию $v(x)$, исходя из (8) реализуем второе граничное условие задачи (2). В результате для определения функции $v(x)$ придем к ИУ Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} v(s) ds = f(x) - C_0 \quad (-a < x < a). \quad (10)$$

Решение ИУ (10) должно удовлетворять условию (3), которое записывается в виде

$$\int_{-a}^a \nu(x) dx = Q. \quad (11)$$

ИУ (10) при условии (11) совпадает с определяющим ИУ классической плоской контактной задачи математической теории упругости [5]. Поэтому рассматриваемая здесь задача Ламба и эти задачи в идейном и методологическом аспектах тесно примыкают друг другу.

Продифференцировав уравнение (10) по x , определение функции $\nu(x)$ можно свести к простейшему СИУ с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\nu(s) ds}{s-x} = f'(x) \quad (-a < x < a) \quad (12)$$

опять при условии (11).

Решение определяющих ИУ (10) – (11) и (12) – (11). Решение ИУ (10) – (11) построим методом ортогональных многочленов Чебышева. С этой целью воспользуемся спектральными соотношениями [6, 7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{T_n(s/a) ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \begin{cases} \frac{1}{n} T_n(x/a) & (n=1, 2, \dots); \\ \ln(2/a) & (n=0). \end{cases} \quad (-a < x < a) \quad (13)$$

Здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos(x/a))$ – многочлены Чебышева первого рода [8], удовлетворяющие на интервале следующим условиям ортогональности:

$$\int_{-a}^a T_m(x/a) T_n(x/a) \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n); \\ \pi/2 & (m = n \neq 0); \\ \pi & (m = n = 0). \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Исходя из (13) решение ИУ (10) представим в форме бесконечного ряда

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(x/a) \quad (-a < x < a) \quad (15)$$

с неизвестными коэффициентами x_n . Далее (15) подставим в ИУ (10), поменяем порядок суммирования и интегрирования, а затем воспользуемся соотношениями (13). Имеем

$$x_0 \ln(2/a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} T_n(x/a) = f(x) - C_0 \quad (-a < x < a). \quad (16)$$

Коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определим из условий ортогональности (14), для чего обе части (16) умножим на $T_m(x/a)\sqrt{a^2-x^2}$ и проинтегрируем от $-a$ до a . Приняв во внимание условие (11), получим

$$\begin{aligned} x_0 &= Q/\pi; \quad x_n = \frac{2}{\pi} n f_n \quad (n=1, 2, \dots); \quad C_0 = \frac{1}{\pi} \left(f_0 - Q \ln \frac{2}{a} \right), \\ f_n &= \int_{-a}^a \frac{f(x) T_n(x/a) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, решение ИУ (10) – (11) выражается формулами (15) – (17). Пусть, в частности, потенциал постоянен на отрезке $[-a, a]$, тогда по (17) $f_0 = \pi \Delta_0$, $f_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$) и, следовательно, из (15) получим, что в данном частном случае решение определяющего ИУ (10) – (11) будет даваться формулой

$$v(x) = Q/\pi \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a), \quad (18)$$

и совпадет с известным решением Садовского в теории плоских контактных задач теории упругости [5].

Отметим, что согласно (15) и (18) решение определяющего ИУ (10) – (11) – вертикальная компонента скорости в интервале $(-a, a)$ – на концах этого интервала не ограничено. Чтобы получить ограниченное на концах интервала решение, предположим, что $f(x)$ – четная непрерывная на отрезке $[-a, a]$ функция, обладающая непрерывной производной в $(-a, a)$. Такая функция удовлетворяет условию ограниченности решения ИУ (10) на $(-a, a)$ [5], и по (17) $x_{2n-1} = 0$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда в формуле (15) останутся только четные по индексу коэффициенты x_{2n} , и чтобы получить выражение ограниченного на концах интервала $[-a, a]$ решения, эту формулу преобразуем следующим образом:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} [T_{2n}(x/a) - T_{2n}(1)] + \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} T_{2n}(1) \right\} \quad (-a < x < a). \quad (19)$$

Для ограниченности решения в точках $x = \pm a$ в (19) потребуем выполнения соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} T_{2n}(1) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} = -x_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} = -Q/\pi. \quad (20)$$

Оставшуюся часть (19) преобразуем дальше:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} [T_{2n}(x/a) - 1] = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} [\cos(2n \arccos(x/a)) - 1] = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \sin^2(n \arccos(x/a)). \end{aligned}$$

Так как [8] $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) / \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 < x < 1$), где $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева второго рода, окончательно получим

$$v(x) = \frac{2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} U_{n-1}^2(x/a) \quad (-a \leq x \leq a). \quad (21)$$

Пусть, в частности, $f(x) = -Ax^2$ ($A > 0$). В этом случае по (17) все коэффициенты x_{2n} , кроме x_2 , равны нулю, а $x_2 = -Aa^2$. Далее, приняв во внимание (20), имеем $Aa^2 = Q/\pi$, откуда $a = \sqrt{Q/\pi A}$. Последнее означает, что в случае ограниченного на отрезке $[-a, a]$ решения ИУ (10) – (11), как в [5], длина этого отрезка не может быть произвольной и должна даваться указанной формулой. Само решение согласно (21) будет даваться формулой

$$v(x) = \frac{2Q}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Очевидно, что эпюра распределения скоростей представляет собой эллипс

$$\frac{v^2}{(2Q/\pi a)^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (-a \leq x \leq a; v = v(x)).$$

Далее определим значение потенциала $\varphi(x, y)$ вне интервала $(-a, a)$ на лучах $|x| > a$. С этой целью воспользуемся смежными с спектральными соотношениями (13) интегральными соотношениями [6]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{T_n(s/a) ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = G_n(x) \quad (|x| > a);$$

$$G_n(x) \begin{cases} \frac{1}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] \left[\frac{(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})}{a} \right]^n & (n=1, 2, \dots); \\ \ln \left[2 \frac{(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})}{a^2} \right] & (n=0); \end{cases} \quad (22)$$

где $H(x)$ – известная функция Хевисайда. Теперь, подставляя (15) в (8) и воспользовавшись (22), находим

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \nu(s) ds + C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n G_n(x) + C_0, \quad (|x| > a),$$

где коэффициенты x_n даются формулами (17). Дифференцируя обе части (22) по x , точно таким образом по первой формуле (9) определим $\nu_x(x, 0)$ при $|x| > a$.

Решение разбираемой задачи построим также методом СИУ. С этой целью обе части ИУ (10) продифференцируем по x . В результате придем к простейшему СИУ с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\nu(s) ds}{s-x} = f'(x) \quad (-a < x < a), \quad (23)$$

где интеграл при $s = x$ понимается в смысле главного значения по Коши. Обращение этого СИУ в классе функций, не ограниченных на концах интервала $(-a, a)$, имеет вид [9]

$$\nu(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} f'(s) ds}{s-x} + \frac{C}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a). \quad (24)$$

Для определения постоянной C обе части (24) проинтегрируем по x и воспользуемся выражением интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2} (s-x)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - s^2}} \ln \frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}}, \quad (25)$$

который легко получается из приведенного в [10] (с.111) интеграла. В результате

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}} f'(s) ds + c \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 \quad (-a \leq x \leq a) \quad (26)$$

$$V(x) = \int_{-a}^x v(s) ds; \quad V(-a) = 0; \quad V(a) = Q,$$

где функция $V(x)$ представляет собой расход жидкости через сечения x в отверстия жесткого экрана в форме интервала $(-a, a)$. Далее, подставив в (26) $x = \pm a$, сразу находим $C = Q/\pi, C_1 = Q/2$. Поэтому в (24) следует положить $C = Q/\pi$.

Если $f(x)$ – четная функция, как выше, то, как показано в [5], при помощи элементарных преобразований из (24) можно получить ограниченное на концах интервала $(-a, a)$ следующее решение СИУ (23):

$$v(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2} (s - x)} \quad (-a \leq x \leq a). \quad (27)$$

Исходя из (24) и (27) в указанных выше частных случаях опять получим те же самые решения, приведенные выше.

Отметим, что решение обсуждаемой задачи представляется двумя формулами – (15) и (24), имеющими разные аналитические структуры. Но, как показано в [11], они идентичны.

Решение рассматриваемой здесь задачи можно также свести к решению классического гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ), а именно СИУ представим в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v(s) - Q}{s - x} ds = f'(x) - Q \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) \quad (-a < x < a)$$

и в левой части проведем интегрирование по частям. В результате придем к классическому ГСИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{W(s) ds}{(s - x)^2} = f'(x) - \frac{Q}{\pi} \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) \quad (-a < x < a), \quad W(s) = \int_{-a}^s [v(u) - Q] du; \quad W(\pm a) = 0. \quad (28)$$

Решение ГСИУ (28) на основании (25) и результатов работы [12] представляется формулой

$$W(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}} g(s) ds, \quad g(s) = f'(s) - \frac{Q}{\pi} \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right).$$

Заклучение. Методом ортогональных многочленов Чебышева и СИУ построено точное решение задачи Ламба для полуплоскости. Это решение имеет разные аналитические представления, но, как показано ранее, они идентичны. При этом решение, полученное методом многочленов Чебышева, удобнее для проведения численного анализа характеристик задачи.

¹Национальный университет архитектуры и строительства Армении

²Институт механики НАН РА

e-mail: smkhitarian39@rambler.ru

**Е. В. Варданян, член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян,
А. А. Саруханян**

О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости

Рассматривается плоская задача Ламба об установившемся потенциальном течении идеальной жидкости в полуплоскости, заполненной этой жидкостью и на своей границе контактирующей с абсолютно жестким тонким плоским экраном в виде двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных жестких тонких пластин-стержней, ближние концы которых образуют отверстие-интервал конечной длины. На этом интервале задается значение потенциала, а вне него на полубесконечных интервалах вертикальная компонента скорости обращается в ноль. Задача математически формулируется в виде смешанной граничной задачи двухмерной теории классического потенциала. Решение последней при помощи интегрального преобразования Фурье сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода и одновременно к сингулярному интегральному уравнению. Построены точные решения этих уравнений и получены явные аналитические выражения характеристик задачи. Рассмотрены частные случаи.

**Ե. Վ. Վարդանյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան,
Ա. Ա. Սարուխանյան**

Կիսահարթության համար Լամբի հարթ խնդրի լուծման մասին

Դիտարկվում է կիսահարթությունում իդեալական հեղուկի կայունացած պոտենցիալ հոսքի վերաբերյալ Լամբի հարթ խնդիրը, երբ կիսահարթությունը լցված է այդ հեղուկով և իր եզրագծի երկայնքով հպվում է երկու միմյանց նկատմամբ տեղաշարժված բացարձակ կոշտ կիսաանվերջ բարակ կոշտ սալ-ձողերի տեսքով բարակ կոշտ էկրանին: Էկրանի մոտակա ծայրակետերը կազմում են վերջավոր երկարության ինտերվալ-անցք: Այդ ինտերվալի վրա տրվում է պոտենցիալի արժեքը, իսկ այդ ինտերվալից դուրս՝ կիսաանվերջ ինտերվալների վրա արագության ուղղահիվ բաղադրիչը դառնում է զրո: Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է պոտենցիալի երկչափ

տեսության խառը եզրային խնդրի տեսքով: Վերջինիս լուծումը Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերված է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման, իսկ այնուհետև համարժեք սինգուլյար ինտագրալ հավասարման լուծման: Կառուցված է այդ հավասարումների ճշգրիտ լուծումները և խնդրի բնութագրիչները ներկայացված են բացահայտ տեսքի անալիտիկ արտահայտություններով: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր:

**E. V. Vardanyan, corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitarian,
A. A. Sarukhanyan**

On the Solution of the Plane Lamb Problem for a Half-Plane

Let us consider the plane Lamb problem about the steady-state potential flow of a perfect fluid in a half-plane filled with this fluid and contacting at its boundary with an absolutely rigid thin flat screen in the form of two semi-infinite rigid thin plate-bar the nearest ends of which form a hole-interval of finite length. On this interval, the value of the potential is given, and outside it, at semi-infinite intervals, the vertical component of the velocity turns to zero. The problem is mathematically formulated in the form of a mixed boundary value problem of the two-dimensional theory of the classical potential. Solution of the mentioned problem is given with the help of the Fourier integral transform and reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the first kind and simultaneously to the singular integral equations. Exact solutions of these equations are constructed and explicit analytical expressions for the characteristics of the problem are obtained. Particular cases are considered.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. М. Гостехиздат. 1947. М. – Л. 928 с.
2. Снеддон И. Преобразование Фурье. М. ИЛ. 1955. 668 с.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М. Физматгиз. 1963. 583 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М. Наука. 1969. 344 с.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М. – Л. Гостехиздат. 1949. 270 с.
6. Мхитарян С. М. – Доклады НАН РА. 1992. Т. 93. N 5. С. 220-226.
7. Попов Г. Я. – ПММ. 1963. Вып. 5. С. 821-832.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М. Наука. 1973. 294 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. Наука. 1977. 640 с.
10. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
11. Mkhitarian S. M. – Modern Analysis and Application Operator Theory. V. 191. 2009. P. 155-171. Birkhauser Verlag Baxl Switzerland. 10. 1007/98-3-7643-9921-4-10.
12. Mkhitarian S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetzyan E. G. – The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math. V. 73. Issue 1. 2020. P. 51-75.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

А. М. Саргсян

Упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной, берега которой усилены жесткими накладками

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 26/IX 2020)

Ключевые слова: *круглый диск, радиальная трещина, жесткие накладки, особенность напряжений, коэффициенты особенности.*

1. Введение. Поведение напряжений в окрестности вершины кругового сектора с произвольным углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$), когда его радиальные стороны усилены абсолютно жесткими при растяжении и гибкими при изгибе накладками, а на дуговой части контура заданы четыре различных граничных условия, исследованы в [1–3]. В настоящей работе эти задачи рассматриваются в случае $\alpha = 2\pi$, что с точки зрения постановки является предельным случаем задач упругого кругового сектора, когда угол раствора сектора стремится к 2π .

2. Постановка и решение задач. Отнесем круговой диск к декартовой и полярной системам координат (рис. 1). В полярной системе координат упругое состояние кругового диска определяется решением би-гармонического уравнения для функций напряжений Эри [4]

$$\Delta \Delta \Phi(r, \varphi) = 0 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях на берегах трещины:

$$u_r(r, 0) = \sigma_\varphi(r, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u_r(r, 2\pi) = \sigma_\varphi(r, 2\pi) = 0 \quad (3)$$

и на ободе диска

$$I) \sigma_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad \tau_{r\varphi}(1, \varphi) = f_2(\varphi), \quad (4)$$

$$II) \sigma_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u_\varphi(1, \varphi) = f_2(\varphi), \quad (5)$$

$$III) u_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad \tau_{r\varphi}(1, \varphi) = f_2(\varphi), \quad (6)$$

$$IV) u_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u_\varphi(1, \varphi) = f_2(\varphi), \quad (7)$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ – функции из класса Дирихле. В условиях (6), (7) $f_1(0) = f_1(2\pi) = 0$.

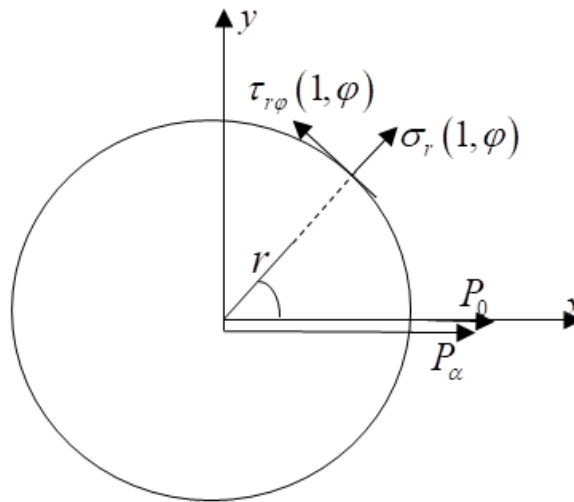


Рис. 1.

Граничные условия (2) и (3) связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к упругим основаниям [5, 6].

Из условия равновесия накладок следует, что

$$\int_0^1 \tau_{r\varphi}(r, 0) dr = P_0, \quad \int_0^1 \tau_{r\varphi}(r, 2\pi) dr = P_\alpha,$$

а из моментного условия равновесия диска

$$\int_0^{2\pi} \tau_{r\varphi}(1, \varphi) d\varphi = 0.$$

Представляя решение бигармонического уравнения (1) в хорошо известном виде [4]

$$\Phi(r, \varphi) = r^{\lambda+1} [A \sin(\lambda+1)\varphi + B \cos(\lambda+1)\varphi + C \sin(\lambda-1)\varphi + D \cos(\lambda-1)\varphi],$$

для напряжения и перемещения имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= \lambda \lambda^+ r^{\lambda-1} [AS_\varphi^+ + BC_\varphi^+ + CS_\varphi^- + DC_\varphi^-], \\
\tau_{r\varphi} &= -\lambda r^{\lambda-1} [A\lambda^+ C_\varphi^+ - B\lambda^+ S_\varphi^+ + C\lambda^- C_\varphi^- - D\lambda^- C_\varphi^-], \\
\sigma_r &= -r^{\lambda-1} [A\lambda\lambda^+ S_\varphi^+ + B\lambda\lambda^+ C_\varphi^+ + C(3-\lambda)\lambda S_\varphi^- + D(3-\lambda)\lambda C_\varphi^-], \\
Eu_r &= r^\lambda [-A\lambda^+ \nu^+ S_\varphi^+ - B\lambda^+ \nu^+ C_\varphi^+ + C(4-\lambda^+ \nu^+) S_\varphi^- + D(4-\lambda^+ \nu^+) C_\varphi^-] + E(a \sin \varphi + b \cos \varphi), \\
Eu_\varphi &= r^\lambda [-A\lambda^+ \nu^+ C_\varphi^+ + B\lambda^+ \nu^+ S_\varphi^+ - C(4+\lambda^- \nu^+) C_\varphi^- + D(4+\lambda^- \nu^+) S_\varphi^-] + E(-a \cos \varphi + b \sin \varphi + cr),
\end{aligned} \tag{8}$$

где A, B, C, D, λ – произвольные постоянные; a, b, c – постоянные, определяющие перемещения упругого тела как жесткого целого, $\lambda^\pm = \lambda \pm 1$, $\nu^+ = 1 + \nu$, $S_\varphi^\pm = \sin(\lambda \pm 1)\varphi$, $C_\varphi^\pm = \cos(\lambda \pm 1)\varphi$. Из (8) следует, что напряжения при $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ будут обладать у вершины радиальной трещины сектора сингулярностью порядка $1 - \operatorname{Re} \lambda$.

Для определения произвольных постоянных A, B, C, D удовлетворим на радиальных сторонах диска условиям (2) и (3). В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\lambda \lambda^+ (B + D) &= 0, \\
r^\lambda [-\lambda^+ \nu^+ B + (4 - \lambda^+ \nu^+) D] &= -Eb, \\
\lambda \lambda^+ (AS_\alpha^+ + BC_\alpha^+ + CS_\alpha^- + DC_\alpha^-) &= 0, \\
r^\lambda [-\lambda^+ \nu^+ S_\alpha^+ A - \lambda^+ \nu^+ C_\alpha^+ B + (4 - \lambda^+ \nu^+) (S_\alpha^- C + C_\alpha^- D)] &= -E(a \sin \alpha + b \cos \alpha).
\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая, что к вершине радиальной трещины кругового диска не приложена сосредоточенная нагрузка, решение системы (9) дает

$$B = D = a = b = 0$$

и уравнение

$$\sin(\lambda + 1)\alpha \cdot \sin(\lambda - 1)\alpha = 0, \tag{10}$$

корни которого действительные и простые:

$$\lambda_k = \frac{k}{2} + 1, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{n}{2} - 1, \quad (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{11}$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности вершины радиальной трещины накладывает на корни уравнения (10) условия

$$\lambda_k > 0, \quad \tilde{\lambda}_n > 0,$$

которые ограничивают область изменения параметров k и n , а именно:

$$k = -1, 0, 1, \dots, \quad n = 3, 4, 5 \dots$$

Так как функции вида

$$\Phi_{kn}(r, \varphi) = C_k r^{\lambda_k + 1} \sin(\lambda_k - 1)\varphi + A_n r^{\tilde{\lambda}_n + 1} \sin(\tilde{\lambda}_n + 1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3) на радиальных сторонах диска, функция напряжения Эри в данном случае принимает вид

$$\Phi(r, \varphi) = -C_{-1} r^{3/2} \sin \varphi / 2 + C_1 r^{5/2} \sin \varphi / 2 + C_2 r^3 \sin \varphi + \sum_{n=3}^{\infty} [C_n r^{\lambda_n + 1} + A_n r^{\tilde{\lambda}_n + 1}] \sin n\varphi / 2.$$

Напряжения и перемещения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= -\frac{3}{4} C_{-1} r^{-1/2} \sin \varphi / 2 + \frac{15}{4} C_1 r^{1/2} \sin \varphi / 2 + 6C_2 r \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (\lambda_n + 1) r^{n/2} + A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \sin n\varphi / 2, \\ \sigma_r &= -\frac{5}{4} C_{-1} r^{-1/2} \sin \varphi / 2 + \frac{9}{4} C_1 r^{1/2} \sin \varphi / 2 + 2C_2 r \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (3 - \lambda_n) r^{n/2} - A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \sin n\varphi / 2, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{4} C_{-1} r^{-1/2} \cos \varphi / 2 - \frac{3}{4} C_1 r^{1/2} \cos \varphi / 2 - 2C_2 r \cos \varphi - \\ &- \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (\lambda_n - 1) r^{n/2} + A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \cos n\varphi / 2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Eu_{\varphi}(r, \varphi) &= C_{-1} (\lambda_1^- v^+ - 4) r^{1/2} \cos \varphi / 2 - C_1 (\lambda_1^- v^+ + 4) r^{3/2} \cos \varphi / 2 - \\ &- C_2 (\lambda_2^- v^+ + 4) r^2 \cos \varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n (\lambda_n^- v^+ + 4) r^{\lambda_n} + A_n \lambda_n^- v^+ r^{\tilde{\lambda}_n}] \cos n\varphi / 2 + E \cdot c, \\ Eu_r &= -C_{-1} (\lambda_1^+ v^+ - 4v) r^{1/2} \sin \varphi / 2 - C_1 (\lambda_1^+ v^+ - 4) r^{3/2} \sin \varphi / 2 - \\ &- C_2 (\lambda_2^+ v^+ - 4) r^2 \sin \varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n (\lambda_n^+ v^+ - 4) r^{\lambda_n} + A_n \lambda_n^- v^+ r^{\tilde{\lambda}_n}] \sin n\varphi / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения произвольных постоянных C_n и A_n удовлетворим граничным условиям (4) – (7). В результате получим системы уравнений

$$I) -\frac{5}{4}C_{-1}\sin\varphi/2 + \frac{9}{4}C_1\sin\varphi/2 + 2C_2\sin\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n\lambda_n(3-\lambda_n) - A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1) \right] \sin n\varphi/2 = f_1(\varphi), \quad (14)$$

$$\frac{1}{4}C_{-1}\cos\varphi/2 - \frac{3}{4}C_1\cos\varphi/2 - 2C_2\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n\lambda_n(\lambda_n-1) + A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1) \right] \cos n\varphi/2 = f_2(\varphi),$$

$$II) -\frac{5}{4}C_{-1}\sin\varphi/2 + \frac{9}{4}C_1\sin\varphi/2 + 2C_2\sin\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n\lambda_n(3-\lambda_n) - A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1) \right] \sin n\varphi/2 = f_1(\varphi), \quad (15)$$

$$C_{-1}(\lambda_1^-v^+ - 4)\cos\varphi/2 - C_1(\lambda_1^-v^+ + 4)\cos\varphi/2 - C_2(\lambda_2^-v^+ + 4)\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n(\lambda_n^-v^+ + 4) + A_n\lambda_n^-v^+ \right] \cos n\varphi/2 = E f_2(\varphi) - E \cdot c,$$

$$III) -C_{-1}(\lambda_1^+v^+ - 4v)\sin\varphi/2 - C_1(\lambda_1^+v^+ - 4)\sin\varphi/2 - C_2(\lambda_2^+v^+ - 4)\sin\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n(\lambda_n^+v^+ - 4) + A_n\lambda_n^-v^+ \right] \sin n\varphi/2 = E f_1(\varphi), \quad (16)$$

$$\frac{1}{4}C_{-1}\cos\varphi/2 - \frac{3}{4}C_1\cos\varphi/2 - 2C_2\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n\lambda_n(\lambda_n-1) + A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1) \right] \cos n\varphi/2 = f_2(\varphi),$$

$$IV) -C_{-1}(\lambda_1^+v^+ - 4v)\sin\varphi/2 - C_1(\lambda_1^+v^+ - 4)\sin\varphi/2 - C_2(\lambda_2^+v^+ - 4)\sin\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n(\lambda_n^+v^+ - 4) + A_n\lambda_n^-v^+ \right] \sin n\varphi/2 = E f_1(\varphi), \quad (17)$$

$$C_{-1}(\lambda_1^-v^+ - 4)\cos\varphi/2 - C_1(\lambda_1^-v^+ + 4)\cos\varphi/2 - C_2(\lambda_2^-v^+ + 4)\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} \left[C_n(\lambda_n^-v^+ + 4) + A_n\lambda_n^-v^+ \right] \cos n\varphi/2 = E f_2(\varphi) - E \cdot c.$$

Умножая первые уравнения (14) – (17) на $\sin m\varphi/2$ ($m=1,2,3,\dots$), а вторые на $\cos m\varphi/2$ ($m=0,1,2,\dots$) и интегрируя по φ в интервале $(0,2\pi)$ с учетом ортогональности тригонометрических функций, имеем [1–3]

$$I) C_{-1} = -\frac{2}{\pi} [\tilde{f}_{11} + 3\tilde{f}_{21}], \quad C_1 = -\frac{2}{3\pi} [\tilde{f}_{11} + 5\tilde{f}_{21}], \quad C_2 = \tilde{f}_{12}/2\pi = -\tilde{f}_{22}/2\pi, \quad (14.1)$$

$$C_n\lambda_n = \frac{\tilde{f}_{1n} - \tilde{f}_{2n}}{2\pi}, \quad A_n(\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{n}{2} \tilde{f}_{1n} + \left(2 - \frac{n}{2} \right) \tilde{f}_{2n} \right], \quad (n=3,4,5,\dots),$$

причём между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеет место соотношение

$$\tilde{f}_{22} + \tilde{f}_{12} = 0. \quad (14^*)$$

$$\begin{aligned} II) \quad C_{-1} &= \frac{1}{\pi} \frac{(\nu^+/2+4)\tilde{f}_{11} + (9/4)\tilde{f}_{21}E}{\nu^+/2-14}, \quad C_1 = \frac{1}{\pi} \frac{(\nu^+/2-4)\tilde{f}_{11} + (5/4)\tilde{f}_{21}E}{\nu^+/2-14}, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \\ C_2 &= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_{12} = -\frac{1}{\nu^++4} \tilde{f}_{22}E, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu^+ \tilde{f}_{1n} - (n/2-1)\tilde{f}_{2n}E}{[\nu^+ + 2(n/2-1)]} \\ A_n &= -\frac{1}{2\pi} \frac{(\nu^+n/2+4)\tilde{f}_{1n} + (n/2+1)(2-n/2)E\tilde{f}_{2n}}{[\nu^+ + 2(n/2-1)]n/2}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Для этого случая вместо (14*) имеем

$$(\nu^+ + 4)\tilde{f}_{12} + 2E\tilde{f}_{22} = 0. \quad (15^*)$$

$$\begin{aligned} III) \quad C_{-1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{3E\tilde{f}_{11} - 2(5\nu^+ - 8)\tilde{f}_{21}}{\nu^+ - 4}, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{E\tilde{f}_{11} - 2(3\nu^+ - 8)\tilde{f}_{21}}{\nu^+ - 4}, \\ C_2 &= -\frac{1}{\pi} \frac{E\tilde{f}_{12}}{\lambda_2^+ \nu^+ - 4} = -\frac{1}{\pi} \frac{\tilde{f}_{22}}{2}, \quad C_n = \frac{1}{\pi} \frac{n(n/2-1)E\tilde{f}_{1n} - \nu^+ n\tilde{f}_{2n}}{n(n-2+\nu^+)}, \\ A_n &= -\frac{1}{\pi} \frac{n(n/2+1)E\tilde{f}_{1n} - ((n+4)\nu^+ - 8)\tilde{f}_{2n}}{n(n-2+\nu^+)}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (16.1)$$

В данном случае связь между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ такова:

$$\begin{aligned} 2E\tilde{f}_{12} - (3\nu^+ - 4)\tilde{f}_{22} &= 0. \quad (16^*) \\ IV) \quad C_{-1} &= -\frac{E}{2\pi} \frac{(\nu^+/2+4)\tilde{f}_{11} - (5\nu^+/2-4)\tilde{f}_{21}}{\nu_0^2 - 16\nu_0 + 16}, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \quad \nu_0 = \nu^+/2, \\ C_1 &= -\frac{E}{2\pi} \frac{(\nu^+/2-4)\tilde{f}_{11} - (3\nu^+/2-4)\tilde{f}_{21}}{\nu_0^2 - 16\nu_0 + 16}, \quad C_2 = -\frac{E}{\pi} \frac{\tilde{f}_{12}}{3\nu^+ - 4} = -\frac{E}{\pi} \frac{\tilde{f}_{22}}{(\nu^+/2+4)}, \\ C_n &= -\frac{E}{2\pi} \frac{\tilde{f}_{1n} - \tilde{f}_{2n}}{\nu^+ - 4}, \quad A_n = \frac{E}{\pi} \frac{(\nu^+n/2+4)\tilde{f}_{1n} - ((n/2+2)\nu^+ - 4)\tilde{f}_{2n}}{n\nu^+(\nu^+ - 4)}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Здесь функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ связаны соотношением

$$(\nu^+ + 4)\tilde{f}_{12} - (3\nu^+ - 4)\tilde{f}_{22} = 0. \quad (17^*)$$

Таким образом, решения поставленной задачи получены в виде сходящихся рядов, коэффициенты которых определены в явном виде.

Заметим, что возникшие в ходе решения этих задач соотношения между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеют конкретный механический смысл – это условие равновесия диска в направлении оси Oy , т.е. система сил, приложенная или возникшая на ободе диска, самоуравновешена на этой оси. Остальные уравнения статического равновесия удовлетворяются тождественно.

Как следует из (12), напряжения при $r \rightarrow 0$ имеют особенность типа $r^{-1/2}$. Причем степенная особенность напряжений обусловлена как первыми членами правой части формул (12), так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{n/2-2}$ при $n=3$. Коэффициенты интенсивности напряжений (коэффициент при особенности) [7] в общем случае нагружения обода диска отличны от нуля. Однако подходящим подбором внешних воздействий эти особенности из решения (12) можно исключить. Тогда окрестность вершины радиальной трещины кругового диска будет находиться в малонапряженном состоянии [8]. Например, если в первой задаче $f_1(\varphi) = P_1 \sin 2\varphi$, $f_2(\varphi) = P_2 \cos 2\varphi$, то для коэффициентов Фурье функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ получим $\tilde{f}_{j4} = P_j \pi$ ($j=1,2$), остальные коэффициенты равны нулю. При этом выполняется соотношение (14*), а формулы для напряжения и перемещения примут вид

$$\sigma_\varphi = (2(P_1 - P_2)r^2 - P_1) \sin 2\varphi, \quad \sigma_r = P_1 \sin 2\varphi, \quad \tau_{r\varphi} = ((P_1 - P_2)r^2 - P_1) \cos 2\varphi,$$

$$Eu_\varphi = -\left(\frac{P_1 - P_2}{3}(\nu^+ + 2)r^3 - P_1 \nu^+ r\right) \cos 2\varphi, \quad Eu_r = -\left(\frac{2(P_1 - P_2)}{3}(\nu^+ - 1)r^3 - P_1 \nu^+ r\right) \sin 2\varphi.$$

Возникает естественный вопрос: можно получить приведенные выше решения из решений соответствующих задач теории упругости для кругового сектора [1–3] предельным переходом $\alpha \rightarrow 2\pi$? Ответ однозначен: можно, если внешние воздействия на дуговой части контура кругового диска в пределе, когда $\alpha \rightarrow 2\pi$, удовлетворяют условиям (14*) – (17*). Например, граничная задача кругового сектора, на дуговой части контура которого заданы нагрузки в виде $f_1(\varphi) = B_1 \delta(\varphi - \pi/2)$, $f_2(\varphi) = 0$, имеет реальный физический смысл при всех значениях угла раствора сектора α из интервала $0 < \alpha < 2\pi$. Когда $\alpha \rightarrow 2\pi$, нарушается условие равновесия диска в направлении оси y .

Институт механики НАН РА
e-mail: azat-sargsyan@mail.ru

A. M. Саргсян

**Упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной,
берега которой усилены жесткими накладками**

Рассматривается упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной, берега которой усилены жесткими накладками, а на ободе диска заданы: 1) нормальные и касательные напряжения, 2) нормальные и окружные перемещения, 3) нормальные напряжения и окружные перемещения, 4) касательные напряжения и нормальные перемещения. Замкнутые решения поставленных задач получаются методом разделения переменных. Исследуются особенности напряжений и поведения коэффициентов при особенности в окрестности вершины радиальной трещины.

Ա. Մ. Սարգսյան

**Շառավղային ճաքի ափերը կոշտ վերդրակներով ուժեղացված
շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը**

Դիտարկված է շառավղային ճաքով շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը, երբ ճաքի ափերն ուժեղացված են կոշտ վերդրակներով, իսկ սկավառակի եզրագծի վրա տրված են. 1) նորմալ և շոշափող լարումներ, 2) նորմալ և շոշափող տեղափոխություններ, 3) նորմալ լարումներ և շոշափող տեղափոխություններ, 4) շոշափող լարումներ և նորմալ տեղափոխություններ: Դրված խնդիրների փակ լուծումները ստացվել են փոփոխականների անջատման մեթոդով: Հետազոտված են լարումների եզակիությունը և եզակիության գործակիցների վարքը ճաքի զագայթի շրջակայքում:

A. M. Sargsyan

**The Elastic Equilibrium of a Circular Disc with a Radial Crack,
the Edges of which are Reinforced by Two Rigid Straps**

An elastic equilibrium of a circular disk with a radial crack, the borders of which are reinforced by two rigid straps and in the contour disk 1) normal and tangential stresses, 2) normal and tangential displacements, 3) normal stresses and tangential displacements, 4) tangential stresses and normal displacements are given, is considered. The closed solution of the stated problems is obtained by the method of separation of variables. The singularity of the stresses and the behavior of the coefficients with the singularity in the vicinity of the crack top are investigated.

Литература

1. *Саргсян А. М.* – Механика композитных материалов. 2017. Т. 53. № 1. С. 143-154.
2. *Саргсян А. М.* – ДНАН Армении. 2019. Т. 119. № 3. С. 224-231.
3. *Саргсян А. М.* В кн.: Матер. VI междунар. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 01 – 06 октября 2019, Дилижан, Армения. Ереван. 2019. С. 282-286.
4. *Williams M. L.* – J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526-528.
5. *Melan E.* – Ing. – Archiv. 1932. Bd. 3. Heft 2. P. 123.
6. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* – Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
7. *Соврук М. П.* Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев. Наукова думка. 1988. 620 с.
8. *Чобанян К. С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1987. 338 с.

УДК 615.213:615.214

С. А. Казарян, Р. Г. Пароникян, И. М. Бархударянц

Противосудорожная активность N-п-алкоксибензоил- ГАМК и их литиевых солей

(Представлено чл.-кор. НАН РА В. О. Топузяном 30/X 2020)

Ключевые слова: *противосудорожное действие, коразоловые, тио-семикарбазидные судороги, производные ГАМК.*

Поиск эффективных и безопасных препаратов с нейропротекторным действием остается одной из приоритетных проблем современной нейрорепсихофармакологии [1, 2]. Внимание химиков и фармакологов привлекают естественные метаболиты нервной системы и их аналоги, обладающие высокой физиологической активностью и низкой токсичностью, способные стимулировать процессы нейропластичности, повышать функциональные резервы мозга, компенсировать патологические изменения, вызванные нейродеструкцией [3]. Особое место среди них занимает гамма-аминомасляная кислота (ГАМК) и ее производные, которые проявляют высокую нейропротекторную активность, – пикамилон, пирацетам, фенибут, фенотропил, баклофен и др. [2, 4, 5]. При судорожной патологии в головном мозге и по мере развития процесса «эпилептизации» нейронов усиливаются деструктивные изменения, снижается интеллектуальная функция. Есть основание предполагать, что активация ГАМК-ергической системы может привести не только к урежению и ослаблению эпилептических припадков, но и к уменьшению нейродегенеративных последствий. Одним из путей повышения терапевтического потенциала известных препаратов является также разработка их солей, в частности литиевых, которые будут способствовать применению таких соединений при смежных областях неврологии [6, 7]. Предлагаемое сообщение является продолжением ранее проведенных исследований по изучению нейротропных свойств различных производных нейроаминокислот [8-11].

Цель данной статьи – выявление новых противосудорожных соединений среди N-пара-алкоксибензоил-ГАМК и их литиевых солей.

Материал и методы. Исследование противосудорожной активности 16 N-пара-алкоксибензоил-ГАМК [№ 7203 (N-пара-метоксибензоил-ГАМК), 7204 (N-пара-этоксибензоил-ГАМК), 7205 (N-пара-пропоксибензоил-ГАМК), 7206 (N-пара-изопропоксибензоил-ГАМК), 7207 (N-пара-бутоксибензоил-ГАМК), 7208 (N-пара-изобутоксибензоил-ГАМК), 7209 (N-пара-амилоксибензоил-ГАМК), 7210 (N-пара-изоамилоксибензоил-ГАМК)] и соответствующих литиевых солей (№ 7175, 7176, 7177, 7178, 7179, 7180, 7181, 7182) проводили на белых мышах обоего пола массой 18-24 г с применением моделей судорог, вызванных коразолом, электрическим током, тиосемикарбазидом (ТСК), а также ареколином и никотином [12-15]. О противосудорожной и прогностической транквилизирующей активности соединений судили по предупреждению коразоловых клонических судорог. Коразоловые клонические судороги получали при подкожном введении коразола в дозе 90 мг/кг («Acrosorganics»). Противосудорожную активность соединений определяли также по предупреждению тонико-экстензорной фазы судорожного припадка максимального электрошока. Параметры максимального электрошока – 50 мА, длительность – 0.2 с, частота колебаний – 50 имп/с, критерием оценки является предупреждение тонико-экстензорной фазы судорожного припадка [14]. О центральном м- и н-холинолитическом эффекте судили по предохранению от ареколинового тремора и никотиновых тонических судорог. Ареколин вводили подкожно в дозе 15 мг/кг, а никотин – внутривентрально в дозе 8 мг/кг [12], центральную холинолитическую активность определяли по трехбалльной системе. Тиосемикарбазид, вводимый мышам подкожно в дозе 18 мг/кг в виде 0.5 %-го раствора, вызывает у животных клонические судороги, которые кончаются гибелью. Антиотиосемикарбазидную активность оценивали по латентному времени наступления судорог и по их предотвращению. Определяли повышение порога (I) в сравнении с контролем по латентному времени наступления судорог.

Вещества вводили внутривентрально в дозах 25, 50, 75, 100, 200, 300 мг/кг во взвеси с карбоксиметилцеллюлозой («Виали – Ингредиенты») с твин-80 («FerakBerlin») за 45 мин до введения судорожных агентов и нанесения электрического раздражения. Контрольным животным вводили эмульгатор. Каждую дозу соединений по каждому тесту изучали на 5 животных. Аналогом сравнения служил известный противоэпилептический препарат этосуксимид (заронтин), применяющийся при лечении абсансов и миоклонических судорог [4, 16], который вводился мышам в дозах 25-300 мг/кг внутривентрально.

Изучено также побочное нейротоксическое (миорелаксантное) действие соединений и этосуксимида в дозах от 50 до 600 мг/кг при внутривентральном введении. Миорелаксацию исследовали у мышей по тесту «вращающегося стержня» [17, 18]. С этой целью их помещали на металлический стержень с гофрированным резиновым покрытием, который вращался со скоростью 5 оборотов в минуту. Определяли число животных, не способных удерживаться на нем в течение 2 мин. Для определения 50%-

ных эффективных ($ЭД_{50}$), вызывающих противосудорожный эффект у 50% животных и 50%-ных нейротоксичных ($ТД_{50}$) доз использовали статистический метод пробит анализа по Литчфильду и Уилкоксоу [19].

Результаты исследований показали, что изучаемые соединения не проявляют антиэлектрошокового действия и не предупреждают ареколинового тремора и никотиновых судорог, т.е. не проявляют центрального холинолитического действия. Однако у них выявлен антагонизм с коразолом и тиосемикарбазидом. В табл. 1 представлены антикоразоловое

Таблица 1

Противосудорожное действие и миорелаксация всех изученных соединений и этосуксимида

Соединение №	Антагонизм с коразолом, ($ЭД_{50}$, мг/кг)*	Миорелаксация, ($ТД_{50}$, мг/кг)*	Латентный период ТСК судорог, мин	
			$M \pm m$	I^{**}
Контроль	—	—	52 ± 4.0	1.0
7203	220(157 ÷ 308)	300(240 ÷ 375)	74.8 ± 3.5	1.4
7204	205(164 ÷ 256.3)	445(356 ÷ 556.3)	72.2 ± 4.5	1.4
7205	158(126.4 ÷ 197.5)	345(265 ÷ 448.5)	78.1 ± 3.2	1.5
7206	58(46.4 ÷ 72.5)	580(414 ÷ 812)	120 ± 3.5	2.3
7207	200(160 ÷ 250)	380(304 ÷ 475)	62 ± 5.2	1.2
7208	170(148 ÷ 195.5)	410(342 ÷ 492)	82 ± 4.8	1.6
7209	175(113 ÷ 271)	420(350 ÷ 505)	118 ± 4.0	2.3
7210	188(144.6 ÷ 244.4)	480(355.5 ÷ 648)	65 ± 3.5	1.2
7175	190(165 ÷ 218.5)	285(248 ÷ 328)	68 ± 5.6	1.3
7176	165(138 ÷ 198)	360(313 ÷ 414)	78 ± 5.5	1.5
7177	145(120.8 ÷ 174)	340(288 ÷ 401)	88 ± 6.5	1.69
7178	225(188 ÷ 270)	295(257 ÷ 339)	97 ± 4.0	1.8
7179	168(140 ÷ 202)	300(261 ÷ 345)	85 ± 4.5	1.6
7180	180(150 ÷ 216)	310(270 ÷ 357)	88 ± 4.8	1.7
7181	98(85 ÷ 113)	350(327 ÷ 396)	125 ± 9.2	2.4
7182	165(137.5 ÷ 198)	315(252 ÷ 394)	74 ± 7.1	1.4
Этосуксимид	155(117.5 ÷ 204.5)	520(412.6 ÷ 655.2)	—	—

*В скобках доверительные интервалы при уровне вероятности $P = 0.05$.

** Увеличение порога.

действие, латентный период ТСК судорог и миорелаксация соединений и сравниваемого препарата этосуксимида. Как видно из таблицы, все изу-

чаемые соединения в той или иной степени проявляют антикоразоловое действие, в той или иной степени удлиняют латентный период тиосемикарбазидных судорог и ЭД₅₀ находится в пределах от 58 до 225 мг/кг. Наиболее активны соединения № 7206, 7181, которые по антикоразоловой активности превосходят известный противосудорожный препарат этосуксимид. У всех соединений, кроме № 7206 и 7181, миорелаксация обнаруживается в дозах, близких к противосудорожным. По удлинению латентного периода ТСК судорог наиболее активны соединения № 7206, 7209, 7181, тогда как этосуксимид по этому тесту не активен. Наиболее активное соединение № 7206 и является наименее токсичным и имеет наибольшую широту защитного действия. Выявлена связь химического строения исследуемых соединений с их фармакологической активностью. Так, независимо от того, какой радикал находится у бензольного кольца, все производные ГАМК и их литиевые соли проявляют противосудорожную активность. Наиболее выражена активность соединения с изопропоксибензоил радикалом у ГАМК, а у литиевых солей – соединение с амилоксибензоил радикалом. Литиевые соли по сравнению с производными ГАМК несколько токсичнее.

Таким образом, обнаружена выраженная противосудорожная активность у изучаемых соединений по тесту коразоловых и тиосемикарбазидных судорог. Выявлена связь между их химическим строением и биологической активностью. Установлено, что некоторые соединения по антикоразоловой и тиосемикарбазидной активности превосходят известный противоэпилептический препарат этосуксимид. Полученные результаты дают основание для продолжения исследований противосудорожной активности в этом ряду соединений.

Научно-технологический центр органической и
фармацевтической химии НАН РА, Институт
тонкой органической химии им. А. Мнджояна
e-mail: paronikyan.ruzanna@mail.ru

С. А. Казарян, Р. Г. Пароникян, И. М. Бархударянц

Противосудорожная активность N-п-алкоксибензоил- ГАМК и их литиевых солей

Исследовалось противосудорожное действие 16 новых соединений N-пара-алкоксибензоил-ГАМК и их литиевых солей на различных общепринятых судорожных моделях (коразоловые судороги, максимальный электрошок, никотиновые и тиосемикарбазидные судороги и ареколиновый тремор). Изучено также побочное нейротоксическое (миорелаксантное) действие соединений. Сравнение проводили с известным противоэпилептическим препаратом этосуксимид. У всех изученных N-пара-алкоксибензоил-ГАМК и их литиевых солей обнаружена выраженная противосудорожная активность по тесту коразоловых и тиосемикарба-

зидных судорог. Выявлена связь между химическим строением исследованных веществ и их биологической активностью.

Ս. Հ. Ղազարյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան, Ի. Մ. Բարխուդարյանց

N-պարա-ալկօքսիբենզոիլ ԳԱԿԹ-ի ածանցյալների և նրանց լիթիումական աղերի հակացնցումային ազդեցությունը

Հետազոտվել է 16 նոր N-պարա-ալկօքսիբենզոիլ ԳԱԿԹ-ի ածանցյալների և նրանց լիթիումական աղերի հակացնցումային ազդեցությունը մկների մոտ տարբեր և ընդունված ցնցումային մոդելների վրա՝ կորագոլային ցնցումներ, մաքսիմալ էլեկտրաշոկի թեստ, նիկոտինային և թիոսեմիկարբազիդային ցնցումներ և արեկոլինային տրեմորի մոդել: Հետազոտվել է նաև միացությունների կողմնակի նեյրոտոքսիկ (մկանաթուլացնող) ազդեցությունը: Համեմատությունը կատարվել է հայտնի հակաէպիլեպտիկ դեղամիջոց էտոսուկսիմիդի հետ: Բացահայտվել է բոլոր ուսումնասիրված N-տեղակալված ԳԱԿԹ-ի ածանցյալների և նրանց լիթիումական աղերի հակացնցումային ազդեցություն կորագոլի և թիոսեմիկարբազիդի հետ անտագոնիզմի թեստերով: Հայտնաբերված է, որ առկա է կապ ուսումնասիրված նյութերի քիմիական կառուցվածքի և դրանց կենսաբանական ակտիվության միջև:

S. H. Ghazaryan, R. G. Paronikyan, I. M. Barkhudaryants

Anticonvulsant Activity of N-p-Alkoxybenzoyl-GABA and Their Lithium Salts

The anticonvulsant action of 16 new compounds N-p-alkoxybenzoyl-GABA and their corresponding lithium salts was studied in various and generally accepted convulsive models: corazole convulsions, maximal electroshock, nicotine and thiosemicarbazide convulsions, and arecoline tremor. The side neurotoxic (muscle relaxant) effect of the compounds was also studied. The comparison was carried out with the known antiepileptic drug ethosuximide. All studied N-p-alkoxybenzoyl-GABA and their corresponding lithium salts showed pronounced anticonvulsant activity according to the test of corazole and thiosemicarbazide seizures. The relationship between the chemical structure of the investigated substances and their biological activity was revealed.

Литература

1. Воронина Т. А., Середенин С. Б. – Экспериментальная и клиническая фармакология. 2007. Т. 70. № 4. С. 44–58.
2. Мирзоян Р. С. – Экспериментальная и клиническая фармакология. 2003. Т. 66. № 2. С. 53–56.
3. Багметова В. В., Тюренков И. Н., Бородкина Л. Е. и др. – Фундаментальные исследования. 2013. № 3-1. С. 22-26.
4. Машковский М. Д. Лекарственные средства. М. Новая волна. 2010. 1216 с.
5. Бородкина Л. Е., Багметова В. В., Тюренков И. Н. – Вопросы биологической, медицинской и фармацевтической химии. 2012. № 8. С. 14-20.

6. Тюренов И. Н., Багметова В. В., Кривицкая А. Н. и др. – Экспериментальная и клиническая фармакология. 2011. Т. 74. № 2. С. 3-7.
7. Oruch R., Elderbi M. A., Khattab H. A. et al. – European Journal of Pharmacology. 2014. V. 704. P. 464-473.
8. Казарян С. А., Пароникян Р. Г. – ДНАН РА. 2017. Т. 117. № 4. С. 328-332.
9. Казарян С. А., Пароникян Р. Г. – ДНАН РА. 2018. Т. 118. № 2. С. 160-165.
10. Казарян С. А., Пароникян Р. Г., Григорян А. С. и др. – ДНАН РА. 2020. Т. 120. № 1. С. 67-73.
11. Пароникян Р. Г., Казарян С. А., Сукасян Р. С. и др. – Фарма. 2015. 11. 7-13 (на арм. яз.).
12. Drug Discovery and Evaluation: Pharmacological Assays. H. G. Vogel, W. H. Vogel (Eds.). Berlin, N. Y. Springer. 2008. P. 569-874.
13. Loscher W., Schmidt D. – Epilepsy Res. 1988. V. 2. P. 145-181.
14. Swinyard E. A. In: Experimental models of epilepsy. N. Y. Raven press. 1992. P. 433-458
15. Геворкян К. А., Папаян Г. Л., Чимаритян С. Г. и др. – Хим.-фарм. журн. 1987. Т. 21(2). С. 167-170.
16. Drugs used in generalized seizures. Basic and Clinical pharmacology, 9th ed.; Katzung, B. (Ed.); Large Medical Books/McGraw-Hill, 2003.
17. Dunham N. W., Miya T. S. – J. Am. Pharm. Ass. (Sci. ed.). 1957. V. 46. № 3. P. 208-209.
18. Jones B. J., Roberts D. J. – J. Pharm. Pharmacol. 1968. V. 20 (4). P. 302-304.
19. Litchfield J. T., Wilcoxon F. – J. Pharmacol. Exp. Ther. 1949. V. 96. P. 99-113.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 120-րդ ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Կ. Լեոնտիև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան – Հանրահաշվական խմբային կապի ուղիներ	7
Վ. Կ. Լեոնտիև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան – Հանրահաշվական խմբային կապի ուղիներ	95
Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Ա. Հակոբյան – Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի միակության թեորեմներ	105
Վ. Գ. Միքայելյան – Ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի՝ մեկ «մարտինգալային հատկության» մասին	110
Գ. Գ. Գևորգյան – Միակության թեորեմներ միապատիկ և բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար	159

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Չուբարյան, Ա. Ա. Համբարձումյան, Հ. Ա. Գասպարյան, Ս. Ա. Հովհաննիսյան – Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների մինիմալ նոյնաբանությունների որոշ հատկությունների մասին	15
---	----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Պ. Սեյրանյան – Ականավոր մաթեմատիկոսի սխալը կամ որտե՞ղ կգնա հեծանիվը	22
Ս. Հ. Մարգարյան – Գրաֆենով ամրավորված բազմաշերտ սալերի (նանոկոմպոզիտների) մաթեմատիկական մոդելները	27
Գ. Ե. Բադդասարյան – Գազի գերձայնային հոսանքով շրջափռվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը	115
Ս. Հ. Մարգարյան – Գրաֆենի ընդհանուր դեֆորմացիայի դեպքում նրա դիսկրետ-կոնտինուալ և կոնտինուալ-մոմենտային մոդելները	124
Լ. Ա. Աղալովյան – Համաշխարհային ձգողականության ընդհանրացված-նյութոտության ուժով պայմանավորված գրավիտացիոն դաշտի հատկությունների մասին	136
Ա. Ս. Ավետիսյան, Ս. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան – Ռելեի տիպի էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքները հեքսագոնալ սիմետրիայի 6mm դասի պլեզոէլեկտրական միջավայրում	164
Վ. Ս. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Բելուբեկյան, Վ. Գ. Գարակով – Գուլյան – Բյուստայնի ալիքի առաջացումը էլեկտրական դաշտի ոչ ստացիոնարության հաշվառումով	174
Ս. Հ. Մարգարյան – Առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ թաղանթների՝ որպես նանոնյութերի դեֆորմացիոն մոդելներ	239
Ս. Լ. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Տ. Վ. Զաքարյան – Երկշերտ օրթոտրոպ սալի մի խառը դինամիկական խնդրի մասին	249
Ս. Վ. Բելուբեկյան, Յ. Ս. Գրիգորև, Ս. Վ. Մարգարյան, Ա. Ա. Գավրիլևա – Իներցիոն զանգվածով բեռնավորված շերտում տեղայնացված ալիքները Կուսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա	256
Ա. Հ. Մարգարյան – Միկրոպոլյար ձկուն շրջանային սալի վարքը ծոման ժամանակ	262
Հ. Գ. Շեկյան, Ա. Վ. Գևորգյան – Էլեկտրական մեքենաների հեղուկ	

քսուկներով գլորման առանցքակալների աշխատունակության մասին	269
Ե. Վ. Վարդանյան, Ս. Մ. Մխիթարյան, Ա. Ա. Մարուխանյան – Կիսահարթության համար Լամբի հարթ խնդրի լուծման մասին	277
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ	
Լ. Գ. Ղուլդազարյան, Փ. Ռ. Համբարձումյան – Երկշերտ սալի առաձգականության տեսության դինամիկ եռաչափ խնդիրը մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում	181
Ա. Մ. Մարգարյան – Շառավղային ճաքի ափերը կոշտ վերդրակներով ուժեղացված շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը	288
ՖԻԶԻԿԱ	
Ռ. Հ. Ալանակյան – Հիգգսի բոզոնների լեպտոնային բախումներում որոնման մասին	297
ՌԱԴԻՈՖԻԶԻԿԱ	
Ա. Հ. Մակարյան – ԳԲՀ ճառագայթման հաճախականությունների փոխակերպումը ֆերիտում	38
ԿԵՆՍԱՖԻԶԻԿԱ	
ՕՊՏԻԿԱ	
Հ. Պ. Մարգարյան – Էրիթրոցիտների միաշերտի վրա լազերային ճառագայթման դիֆրակցիայի տեսական նկարագրությունը	45
ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ	
Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան – Կենտրոնական Հայաստանի երկրակեղևի սեյսմատեկտոնական շարժումների երկրաքիմիական ուսումնասիրություններ	191
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ	
Ա. Վ. Գաբրիելյան, Ռ. Կ. Կոստանյան, Գ. Ա. Վարթան, Գ. Ա. Մարտոյան – Իոնափոխանակիչ մեմբրանով իոնների տեղափոխման գործընթացի մաթեմատիկական մոդելավորումը	52
Ա. Վ. Գաբրիելյան, Ռ. Կ. Կոստանյան, Գ. Ա. Մարտոյան – Լիթիումի իզոտոպների առանձնացումը էլեկտրամեմբրանային եղանակով	146
Զ. Հ. Մանուկյան, Լ. Հ. Հարությունյան, Ս. Հ. Մինասյան, Լ. Ա. Թավադյան – Վիտամին B12-ի ազդեցությունը միցելային համակարգում մեթիլլի-նոլեատի օքսիդացման ռեակցիայի վրա	198
ՆԵՅՐՈՔԻՄԻԱ	
Ռ. Գ. Պարոնիկյան – Որոշ նոր հետերոցիկլիկ միացությունների հակացնցումային և հոգեմետ հատկությունները	60
Ս. Հ. Ղազարյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան, Ա. Ս. Գրիգորյան, Մ. Ս. Գրիգորյան – Խոլինային մնացորդի և լիթիումական կատիոնի միջև կորելիացիայի բացահայտում որոշակի ամինաթթուների մոտ՝ հակացնցումային և հակադեպրեսսանտ ակտիվության առկայության դեպքում	67
Ս. Հ. Ղազարյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան, Ի. Մ. Բարխուդարյան – N-պարա-ալկոքսիբենզոիլ ԳԱԿԹ-ի ածանցյալների և նրանց լիթիումական աղերի հակացնցումային ազդեցությունը	309

ԿԵՆՍՍՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱ

<i>Ս. Վ. Ավետիսյան, Ս. Հ. Պարոնյան, Ս. Ս. Հովհաննեսյան, Ա. Ս. Հովսեփյան – Bacillus thuringiensis-ի մեկանիոզեն շտամերը. դրանց կիրառման հեռանկարները</i>	74
--	----

ԲՆԱՊԱՀՊԱՆԱԿԱՆ ԳԵՆԵՏԻԿԱ

<i>Ա. Ա. Սարգսյան – ԴՆԹ-ի վնասվածության մակարդակի գնահատումը ԴՆԹ կոմետ մեթոդի կիրառմամբ Lumbricus terrestris անձրևորդերի երկու բնական պոպուլյացիաներում</i>	206
---	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

<i>Ք. Վ. Ղազարյան, Տ. Ա. Փիլիպոսյան, Մ. Ա. Դանիելյան, Ն. Գ. Հունանյան – Օքսիտոցինի ազդեցությունը առնետի արգանդի փողի միջին շրջանի էլեկտրական ակտիվության վրա</i>	214
<i>Մ. Հ. Դանիելյան, Ք. Վ. Կարապետյան, Օ. Հ. Նազարյան, Ք. Ա. Ներոզովա – Պարկինսոնի հիվանդության մոդելի վրա հայկական իժի թույնի ներարկման պայմաններում դժգույն գնդի նյարդաբջիջներում տեղի ունեցող փոփոխությունների մորֆոհիստոքիմիական հետազոտությունը</i>	222

ԲԺՇԿԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Պ. Ա. Ղազարյան – Ժամանակակից պատկերացումները կորոնավիրուսային հիվանդությունների էթիոլոգիայի, ախտաճնության, ախտորոշման և բուժման վերաբերյալ</i>	81
---	----

СОДЕРЖАНИЕ 120-го ТОМА

МАТЕМАТИКА

<i>В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян</i> – Алгебраические групповые каналы связи	7
<i>В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян</i> – Алгебраические групповые каналы связи	95
<i>Г. Г. Геворкян, Л. А. Акопян</i> – Теоремы единственности кратных рядов Франклина	105
<i>В. Г. Микаелян</i> – Об одном “мартингальном свойстве” ряда по общей системе Франклина	110
<i>Г. Г. Геворкян</i> – Теоремы единственности для простых и кратных тригонометрических рядов	159

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>А. А. Чубарян, А. А. Амбарцумян, Г. А. Гаспарян, С. А. Ованнисян</i> – О некоторых свойствах минимальных тавтологий классической и неклассических логик	15
--	----

МЕХАНИКА

<i>А. П. Сейранян</i> – Ошибка видного математика или куда поедет велосипед?	22
<i>С. О. Саркисян</i> – Математические модели армированных графеном многослойных пластин (нанокомпозитов)	27
<i>Г. Е. Багдасарян</i> – Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа	115
<i>С. О. Саркисян</i> – Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для общего случая его деформирования	124
<i>Л. А. Агаловян</i> – О свойствах гравитационного поля, обусловленного обобщенно-ньютоновой силой всемирного тяготения	136
<i>Ара С. Аветисян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян</i> – Электро-магнитоупругие волны типа Рэлея в пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии класса 6mm	164
<i>В. М. Белубекян, М. В. Белубекян, В. Г. Гараков</i> – Условия появления волны Гуляева – Блюстейна с учетом нестационарности электрического поля	174
<i>С. О. Саркисян</i> – Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов	239
<i>М. Л. Агаловян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян</i> – Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки	249
<i>М. В. Белубекян, Ю. М. Григорьев, С. В. Саркисян, А. А. Гаврильева</i> – Локализованные волны в слое с нагруженной инерционной массой на основе упрощенной модели Коссера	256
<i>А. А. Саркисян</i> – Изучение поведения микрополярной гибкой круглой пластинки при изгибе	262
<i>Г. Г. Шемян, А. В. Геворкян</i> – О работоспособности подшипников качения электрических машин на жидкой смазке	269
<i>Е. В. Варданян, С. М. Мхитарян, А. А. Саруханян</i> – О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости	277

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>Л. Г. Гулгазарян, П. Р. Амбарцумян</i> – Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления ...	181
<i>А. М. Саргсян</i> – Упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной, берега которой усилены жесткими накладками	288

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – О поиске хиггисовских бозонов в лептонных столкновениях	297
---	-----

РАДИОФИЗИКА	
<i>А. О. Макарян</i> – Преобразование частот СВЧ излучения в феррите	38
БИОФИЗИКА	
ОПТИКА	
<i>Г. П. Саркисян</i> – Теоретическое описание дифракции лазерного излучения на монослое эритроцитов	45
ГЕОФИЗИКА	
<i>Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян</i> – Геохимические исследования сейсмических движений земной коры центральной Армении	191
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
<i>А. В. Габриелян, Р. К. Костанян, Г. А. Вартан, Г. А. Мартоян</i> – Математическое моделирование процесса переноса ионов через ионообменную мембрану	52
<i>А. В. Габриелян, Р. К. Костанян, Г. А. Мартоян</i> – Разделение изотопов лития электромембранным методом	146
<i>З. О. Манукян, Л. А. Арутюнян, С. Г. Минасян, Л. А. Тавадян</i> – Влияние витамина В12 на реакцию окисления метиллинолеата в мицеллярных растворах ..	198
НЕЙРОХИМИЯ	
<i>Р. Г. Пароникян</i> – Противосудорожная и психотропная активность некоторых новых гетероциклических соединений	60
<i>С. А. Казарян, Р. Г. Пароникян, А. С. Григорян, М. С. Григорян</i> – Выявление корреляции между холиновым остатком и литиевым катионом у некоторых аминокислот в случае их противосудорожной и антидепрессантной активности	67
<i>С. А. Казарян, Р. Г. Пароникян, И. М. Бархударянц</i> – Противосудорожная активность N-п-алкоксибензоил-ГАМК и их литиевых солей	309
БИОТЕХНОЛОГИЯ	
<i>С. В. Аветисян, М. Г. Паронян, С. С. Оганнесян, А. С. Овсепян</i> – Меланиногенные штаммы <i>Bacillus thuringiensis</i> : перспективы применения	74
ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ГЕНЕТИКА	
<i>А. А. Саргсян</i> – Оценка повреждений ДНК с применением метода ДНК-комет в двух природных популяциях дождевых червей <i>Lumbricus terrestris</i>	206
ФИЗИОЛОГИЯ	
<i>К. В. Казарян, Т. А. Пилипосян, М. А. Даниелян, Н. Г. Унанян</i> – Влияние окситоцина на электрическую активность средней зоны маточного рога	214
<i>М. А. Даниелян, К. В. Карапетян, О. А. Назарян, К. А. Небогова</i> – Морфогистохимическое исследование изменений в нейронах бледного шара на модели болезни Паркинсона в условиях введения яда армянской гадюки	222
МЕДИЦИНА	
<i>П. А. Казарян</i> – Современное представление об этиологии, патогенезе, диагностике и лечении коронавирусных заболеваний	81

CONTENTS of 120th VOLUME

MATHEMATICS

V. K. Leontiev, G. L. Movsissian, Zh. G. Margaryan – Algebraic Group Communication Channels	7
V. K. Leontiev, G. L. Movsissian, Zh. G. Margaryan – Algebraic Group Communication Channels	95
G. G. Gevorkyan, L. A. Hakobyan – Uniqueness Theorems on Multiple Franklin Series	105
V. G. Mikayelyan – On a “Martingale Property” of Series with Respect to General Franklin System	110
G. G. Gevorkyan – Uniqueness Theorems on Simple and Multiple Trigonometric Series	159

APPLIED MATHEMATICS

A. A. Chubaryan, A. A. Hambardzumyan, H. A. Gasparyan, S. A. Hovhannisyan – On Some Properties of Minimal Tautologies in Classical and Nonclassical Logic ...	15
---	----

MECHANICS

A. P. Seyranian – Error of Great Mathematician or Where to Move a Bicycle ? ...	22
S. H. Sargsyan – Mathematical Models of Reinforced with Graphene Multilayer Plates (Nanocomposites)	27
G. E. Bagdasarian – Stability of a Composite Layered Cylindrical Shell in a Supersonic Gas Flow	115
S. H. Sargsyan – Discrete-Continual and Continual-Moment Models of Graphene for the General Case of Its Deformation	124
A. Aghalovyan – On the Properties of the Gravitational Field Due to the Generalized Newtonian Force of Universal Gravitation	136
Ara S. Avetisyan, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan – Electro-magneto-elastic Waves of Rayleigh Type in a Piezoelectric Medium of 6mm Hexagonal Symmetry Class	164
V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan, V. G. Garakov – Conditions for the Appearance of the Gulyaev – Bleustein wave taking into account the nonstationarity of the electric field	174
S. H. Sargsyan – Thin Shells According to the Moment Theory of Elasticity as Deformation Models of Nanomaterials	239
M. L. Aghalovyan, R. S. Gevorgyan, T. V. Zakaryan – On One Dynamic Mixed Problem of a Two-Layer Orthotropic Plate	249
M. V. Belubekyan, Y. M. Grigoriev, S. V. Sarkisyan, A. A. Gavrilova – Localized Waves in a Layer with a Loaded Inertial Mass, on Based on the Simplified Cosserat Model	256
A. H. Sargsyan – Study of the Behavior of Micropolar Flexible Round Plate in Bending Problem	262
H. G. Shekyan, A. V. Gevorgyan – About the Performance of the Bearings Swinging Electric Machines on Liquid Lubricant	269
E. V. Vardanyan, S. M. Mkhitarian, A. A. Sarukhanyan – On the solution of the plane Lamb problem for a half-plane	277

ELASTICITY THEORY

L. G. Ghulghazaryan, P. R. Hambardzumyan – The Dynamic Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity of a Two-Layer Plate in the Presence of Viscous Resistance	181
A. M. Sargsyan – The Elastic Equilibrium of a Circular Disc with a Radial Crack, the Edges of which are Reinforced by Two Rigid Straps	288

PHYSICS	
<i>R. H. Alanakyan</i> – On Higgs Bosons Searches in Lepton Collisions	297
RADIOPHYSICS	
<i>A.H. Makaryan</i> – Frequency Conversion of Microwave Radiation in Ferrite	38
BIOPHYSICS	
OPTICS	
<i>H. P. Sargsyan</i> – Theoretical Description of Laser Radiation Diffraction from a Monolayer of Red Blood Cells	45
GEOPHYSICS	
<i>R. A. Pashayan, L. V. Harutyunyan</i> – Geochemical Studies of Seismotectonic Movements of the Earth's Crust of Central Armenia	191
PHYSICAL CHEMISTRY	
<i>A.V. Gabrielyan, R. K. Kostanyan, G. A. Vartan, G. A. Martoyan</i> – Mathematical Modeling of the Process of Ions Transport through Ion Exchange Membrane	52
<i>A. V. Gabrielyan, R. K. Kostanyan, G. A. Martoyan</i> – Separation of Lithium Isotopes by the Method of Electromembrane	146
<i>Z. H. Manukyan, L. H. Harutyunyan, S. H. Minasyan, L. A. Tavadyan</i> – Effect of Vitamin B12 on Oxidation Reaction of Methylinoleate in Micellar Solutions	198
NEUROCHEMISTRY	
<i>R. G. Paronikyan</i> – Anticonvulsant and Psychotropic Activities of Some New Heterocyclic Compounds	60
<i>S. H. Ghazaryan, R. G. Paronikyan, A. S. Grigoryan, M. S. Grigoryan</i> – Identification of Correlation between Choline Residue and Lithium Cation in Some Amino Acids in the Case of Their Anticonvulsant and Antidepressant Activities	67
<i>S. H. Ghazaryan, R. G. Paronikyan, I. M. Barkhudaryants</i> – Anticonvulsant Activity of N-p-Alkoxybenzoyl-GABA and Their Lithium Salts	309
BIOTECHNOLOGY	
<i>S. V. Avetisyan, M. H. Paronyan, S. S. Hovhannesyan, A. S. Hovsepyan</i> – Melanogenic Strains of <i>Bacillus thuringiensis</i> : Prospects for Their Use	74
ECOLOGICAL GENETICS	
<i>A. A. Sargsyan</i> – Evaluation of DNA Damage with Application of the Comet Assay in Two Natural Populations of <i>Lumbricus terrestris</i> Earthworms	206
PHYSIOLOGY	
<i>K. V. Kazaryan, T. A. Piliposyan, M. A. Danielyan, Hunanyan N. G.</i> –The Effect of Oxytocin on Electrical Activity of the Uterine Horn Mid Region in Rats	214
<i>M. H. Danielyan, K. V. Karapetyan, O. H. Nazaryan, K. A. Nebogova</i> – Morphohistochemical study of changes in globus pallidus neurons on a model of Parkinson's disease and in the conditions of the introduction of venom of the Armenian viper	222
MEDICINE	
<i>P. A. Ghazaryan</i> – Contemporary Understanding of Etiology, Pathology, Diagnosis and Treatment of Coronavirus Diseases	81

Կանոններ հեղինակների համար

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Զեկույցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական, հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չիրապարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ:
2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն: Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով:
3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն լեզվով: Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ:
4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ mas@sci.am) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ): Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5: Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով:

Հանդեսի համառոտ անունը
ՀՀ ԳԱԱ

Правила для авторов

1. "Доклады Национальной академии наук Армении" выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.
2. Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.
3. Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.
4. Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: mas@sci.am) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

Сокращенное название журнала
ДНАН РА

Guidelines for Authors

1. "The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.
2. Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.
3. Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.
4. It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: mas@sci.am) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

The abbreviated name of the journal is
RNAS RA