

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

Չ Ե Կ ՈՒ Յ Յ Ն Ե Ր
ДОКЛАДЫ
REPORTS

Համար
Том
Volume

120

№ 2

2020

Երևան

Երևան

Yerevan

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ՀԱՏՈՐ 120

№ 1

«ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2020

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ДОКЛАДЫ
REPORTS

ТОМ 120
VOLUME

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА
ЕРЕВАН 2020

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ. Ա. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (սլաւո. քարտուղար)

Главный редактор академик Р. М. МАРТИРОСЯН

Редакционная коллегия: чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик В. С. ЗАХАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А. ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician R. M. MARTIROSYAN

Editorial Board: corresponding member of NAS RA R. M. AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, academician V. S. ZAKARYAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-87*URL:*<http://elib.sci.am> *e-mail:* mas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2020

©Издательство “Тигутюн”

НАН РА. 2020

Հայաստանի ՉԱԱ Զեկույցներ

Հատոր 120 N 1, 2020

Հրատ. պատվեր N 978

Խմբագրումը և սրբագրումը՝
Ա. Ապիյան, Ա. Սահակյան

Համակարգչային էջադրումը՝
Վ. Պապյան

Ծավալը՝ 4,5 տպ. մամուլ: Տպաքանակը՝ 150: Գինը՝ պայմանագրային:
Հ Հ ՉԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Վ. Կ. Լեոնտիև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան</i> – Հանրահաշվական խմբային կապի ուղիներ	95
<i>Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Ա. Հակոբյան</i> – Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի միակության թեորեմներ	105
<i>Վ. Գ. Միքայելյան</i> – Ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի մեկ «մարտինգալային հատկության» մասին	110

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Գ. Ե. Բաղդասարյան</i> – Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը	115
<i>Ս. Հ. Մարգարյան</i> – Գրաֆենի ընդհանուր դեֆորմացիայի դեպքում նրա դիսկրետ-կոնտինուալ և կոնտինուալ-մոմենտային մոդելները ...	124
<i>Լ. Ա. Աղալովյան</i> – Համաշխարհային ձգողականության ընդհանրացված-նյութոնյան ուժով պայմանավորված գրավիտացիոն դաշտի հատկությունների մասին	136

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

<i>Ա. Վ. Գաբրիելյան, Ռ. Կ. Կոստանյան, Գ. Ա. Մարտոյան</i> – Լիթիումի իզոտոպների առանձնացումը էլեկտրամեմբրանային եղանակով	146
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян</i> – Алгебраические групповые каналы связи	95
<i>Г. Г. Геворкян, Л. А. Акопян</i> – Теоремы единственности кратных рядов Франклина	105
<i>В. Г. Микаелян</i> – Об одном “мартингальном свойстве” ряда по общей системе Франклина	110

МЕХАНИКА

<i>Г. Е. Багдасарян</i> – Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа	115
<i>С. О. Саркисян</i> – Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для общего случая его деформирования	124
<i>Л. А. Агаловян</i> – О свойствах гравитационного поля, обусловленного обобщенно-ньютоновой силой всемирного тяготения	136

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>А. В. Габриелян, Р. К. Костанян, Г. А. Мартоян</i> – Разделение изотопов лития электромембранным методом	146
---	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>V. K. Leontiev, G. L. Movsissian, Zh. G. Margaryan</i> – Algebraic Group Communication Channels	95
<i>G. G. Gevorkyan, L. A. Hakobyan</i> – Uniqueness Theorems on Multiple Franklin Series	105
<i>V. G. Mikayelyan</i> – On a “Martingale Property” of Series with Respect to General Franklin System	110

MECHANICS

<i>G. E. Bagdasarian</i> – Stability of a Composite Layered Cylindrical Shell in a Supersonic Gas Flow	115
<i>S. H. Sargsyan</i> – Discrete-Continual and Continual-Moment Models of Graphene for the General Case of Its Deformation	124
<i>A. Aghalovyan</i> – On the Properties of the Gravitational Field Due to the Generalized Newtonian Force of Universal Gravitation	136

PHYSICAL CHEMISTRY

<i>A. V. Gabrielyan, R. K. Kostanyan, G. A. Martoyan</i> – Separation of Lithium Isotopes by the Method of Electromembrane	146
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 621.391.15

В. К. Леонтьев¹, Г. Л. Мовсисян², Ж. Г. Маргарян³

Алгебраические групповые каналы связи

(Представлено академиком Г. Г. Хачатрянном 24/І 2020)

Ключевые слова: алгебраические групповые каналы связи, максимальная мощность, коды, исправление ошибок.

Введение. Семейство каналов связи довольно разнообразно, и подробное теоретическое изучение многих из них встречает серьезные математические трудности. В то же время целый ряд каналов связи в содержательном смысле похожи друг на друга и поэтому могут быть исследованы одинаковыми методами. Таковыми являются групповые каналы, для которых построение максимального кода имеет простое и прозрачное решение, формулируемое в классических теоретико-групповых терминах.

§1. Каналы связи и словарные функции. Пусть $B = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ – конечный алфавит и B^* – множество всех слов конечной длины над алфавитом B . Словарная функция является произвольным частичным отображением ψ следующего вида:

$$B^* \xrightarrow{\psi} B^*.$$

Мы будем рассматривать канал как преобразователь информации, и если принять тезис о том, что в любом канале связи происходит преобразование одних слов в другие, то достаточно общий канал можно описать следующим образом.

Задано некоторое множество

$$\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m\}$$

частичных словарных функций

$$B^* \xrightarrow{\psi_i} B^*, \quad i = \overline{0, m}$$

и многозначное отображение

$$f(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)),$$

где $x \in W \subseteq B^*$. Содержательно это означает, что если $x \in W$, то после передачи по каналу $K(\Psi)$ это слово переходит в одно из слов $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)\} \subseteq W$.

Множество всех обратимых отображений $\{\psi_i\}, \psi_i(W) \subseteq W$ обозначим через T . При этом все суперпозиции $\psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_k}$ функции ψ_{i_j} из множества Ψ определены на W .

Определение [1]. Алгебраическим каналом связи $K(\Psi)$ называется многозначное отображение

$$f(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)), \quad (1)$$

где $\Psi \subseteq T$, и если

$$\psi_i \in \Psi \rightarrow \psi_i^{-1} \in \Psi. \quad (2)$$

Формулу (1) следует понимать следующим образом. На вход канала подается слово v . На выходе получается ровно одно из значений $\psi_0(v), \psi_1(v), \dots, \psi_m(v)$. Фраза «одно из значений» интерпретируется в вероятностном смысле как равномерное распределение на всех словарных функциях $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_m(x)$. Точнее: если на вход канала подается слово v , то с вероятностью $\frac{1}{m+1}$ оно переходит в слово $\psi_i(v)$.

Условие (2) требует, чтобы любое «преобразованное» слово могло быть возвращено к исходному виду путем тех же самых трансформаций. Отметим, что любой аддитивный канал удовлетворяет условию (2) и является алгебраическим [2]. Однако не все матричные каналы являются алгебраическими, например, матричный канал с выпадением символов [3, 4]. Следовательно, на множестве B^n действует группа преобразования T , которая переводит слово из B^n в слово из этого же множества. В дальнейшем мы всегда будем считать, что $\psi_0(x) = x$, что можно интерпретировать как возможность безошибочной передачи слова по этому каналу,

$$W = B^n \subseteq B^*, \text{ где } B = \{0, 1\}.$$

Подобные допущения упрощают многие технические детали и не влияют, как мы увидим далее, на ситуацию в целом. При этом изложенный материал становится более доступным для понимания.

Определение. Множество $V \subseteq B^n$ называется кодом, исправляющим ошибки канала $K(\Psi)$, если выполнено следующее условие:

$$\psi_i(u) \neq \psi_j(v) \quad (3)$$

для всех i и j и для всех слов $u, v \in V$.

Условие (3) означает, что последствия действий канала $K(\Psi)$ на кодовые слова различны, и поэтому искажения могут быть обнаружены и исправлены.

В дальнейшем обозначим через $V(\Psi)$ код, исправляющий ошибки канала $K(\Psi)$. В терминах, введенных выше, основная задача при заданном канале состоит в построении кода $V(\Psi)$ максимальной мощности – $\bar{V}(\Psi)$.

Ясно, что мощность кода $V(\Psi)$ зависит от «структуры» и мощности множества Ψ , «порождающего» канал $K(\Psi)$, и т.д.

Определение. Код $V(\Psi)$ называется совершенным для канала $K(\Psi)$, если

$$B^n = \bigcup_{v \in V(\Psi)} \Psi(v).$$

В содержательном смысле код V должен быть устроен так, чтобы по любому искаженному сигналу исходное сообщение восстанавливалось однозначно, т.е. предполагается существование однозначного декодирования.

§2. Групповые каналы и коды. Существует один важный и полезный класс алгебраических групповых каналов, $K(\Psi)$, $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m)$, на примере которого можно в определенном смысле до конца разобраться во всех отмеченных выше проблемах.

Определение. Если множества словарных функций $\Psi = \{\psi_i\}$ образуют группу относительно операции суперпозиции, то такой канал $K(\Psi)$ называется **групповым**.

Примеры. 1) Канал $K(\Psi)$, где $\psi_i(x) = x + y_i$, а множество $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ – подгруппа в B^n , является групповым, где $+$ – операция сложения по $mod 2$. В частности, если $|y_i| \equiv 0(mod 2)$ для $i = 0, 2^{n-1} - 1$, то канал $K(\Psi)$, где происходит любое четное число ошибок, является групповым.

2) Возьмем в качестве примера канал, порожденный «обобщенным кубом» $A = B^{n_1}(\lambda_1) \times B^{n_2}(\lambda_2) \times \dots \times B^{n_k}(\lambda_k)$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ и $B^{n_i}(\lambda_i) = \{\lambda_i^{n_i}, \lambda_i \in \{0,1\}\}$, т.е. $\psi_i(x) = x + y_i$, $y_i \in A$. Ясно, что $|A| = 2^k$ и канал $K(\Psi)$ является групповым. В содержательном смысле этот канал работает в так называемом «пакетном режиме»: меняются или не меняются одновременно все буквы в одном «пакете» кодового слова.

3) Если $M = \{M_0, M_1, \dots, M_m\}$ – подгруппа группы $GL_2(n)$ невырожденных матриц порядка n над полем $F_2 = \{0,1\}$, то канал $K(\Psi)$, где $\Psi(x) = \{xM_1, xM_2, \dots, xM_m\}$, является групповым.

4) Рассмотрим $S_n = \{g\}$, где g переставляет координаты

$$x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n),$$

не меняя «состава» слова x . Пусть в этом примере $B = \{a_1, a_2 \dots a_p\}$ – произвольный алфавит, $B^n = (B)^n$. Тогда S_n – группа перестановок, действующих на B^n следующим образом:

$$g(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (\alpha_{g(1)} \alpha_{g(2)} \dots \alpha_{g(n)}),$$

где $g \in S_n$.

Таким образом, на множество слов B^n действует группа $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m\}$.

Как обычно, транзитивные множества определяются как $\Psi(x) = \{\psi_i(x), \psi_i \in \Psi\}$ для $x \in B^n$, и имеет место разбиение

$$B^n = \bigcup_{x \in B^n} \Psi(x).$$

При этом $|\Psi(x)| = \text{ind} \Psi_x = \frac{|\Psi|}{|\Psi_x|}$ – индекс группы Ψ по подгруппе Ψ_x , где $\Psi_x = \{\psi_i \in \Psi: \psi_i(x) = x\}$ – стабилизатор слова $x \in B^n$.

Все коды, исправляющие ошибки канала $K(\Psi)$, описываются в следующем утверждении.

Утверждение 1. Код $V = \{v_0, v_1, \dots, v_N\}$ исправляет ошибки группового канала $K(\Psi)$ тогда и только тогда, когда никакая пара (v_i, v_j) не принадлежит одному транзитивному множеству $\Psi(x)$, $x \in B^n$.

Утверждение 2. Для группового канала $K(\Psi)$ любой код $V(\Psi)$, содержащий по одному из представителей всех транзитивных множеств, является совершенным кодом, исправляющим ошибки канала $K(\Psi)$.

Действительно, поскольку любые два транзитивных множества не пересекаются и для любых слов из B^n транзитивное множество и окрестность первого порядка совпадают, то, выбрав по одному представителю из каждого транзитивного множества, получим совершенный код $\bar{V}(\Psi)$ для канала $K(\Psi)$.

Из этого утверждения следует, что число элементов максимального по мощности кода, исправляющего ошибки группового канала $K(\Psi)$, равно числу транзитивных множеств. Следовательно, справедливо следующее утверждение, являющееся следствием классической леммы Бернсайда [5].

Следствие. Совершенный код $V(\Psi)$ алгебраического группового канала $K(\Psi)$ является максимальным по мощности кодом, исправляющим ошибки любого алгебраического канала, эквивалентного $K(\Psi)$ [6].

Пусть $x \in B^n$ и $N(\psi_i)$ – множество неподвижных слов преобразования ψ_i , т. е. множество решений уравнения

$$\psi_i(x) = x, \psi_i \in \Psi.$$

Утверждение 3. Для мощности максимального кода $V(\Psi)$ справедлива формула

$$|\bar{V}(\Psi)| = \frac{1}{m+1} \sum_{\psi_i \in \Psi} |N(\psi_i)|. \quad (4)$$

Воспользуемся теоремой и вычислим мощность кода $\bar{V}(\Psi)$ в следующих примерах.

Примеры. 5) Рассмотрим пример 2. Имеем

$$N(\psi_i) = \begin{cases} B^n, & \text{если } i = 0 \\ \emptyset, & i \neq 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $|\bar{V}(\Psi)| = 2^{n-k}$.

б) Вернемся к примеру 4. Каждому слову $x \in B^n$ можно поставить в соответствие его состав или слово $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)$, где λ_i – число входящих букв α_i в слово x . Ясно, что преобразование $g(x)$ не меняет состава слова x . При этом число слов состава λ равно

$$\binom{n}{\lambda_1} \binom{n-\lambda_1}{\lambda_2} \dots \binom{n-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{p-1})}{\lambda_p} = \frac{n!}{t_1! t_2! \dots t_p!} = \binom{n}{t_1 t_2 \dots t_p}$$

полиномиальному коэффициенту, где

$$n = \sum_{i=1}^p t_i.$$

При этом число различных «составов» слов равно числу решений диофантова уравнения

$$\sum_{i=1}^p t_i = n, \quad t_i \geq 0, \quad i = \overline{1, p}$$

и, значит, равно

$$\binom{p+n-1}{p-1}.$$

Любой код V , исправляющий ошибки канала $K(S_n)$, содержит не более чем одно слово из семейства всех слов, имеющих одинаковый состав. Поэтому максимальная мощность такого кода $V(S_n)$ задается формулой

$$|\bar{V}(S_n)| = \binom{p+n-1}{p-1},$$

в частности, при $p=2$: $|\bar{V}(S_n)| = n+1$. Любой максимальный по мощности код, исправляющий ошибки канала $K(S_n)$, содержит только одно слово из каждого слоя $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$. Число таких кодов равно

$$\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Рассмотрим канал, определяемый следующим образом:

если $x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$, то при передаче по каналу позиции с номерами $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ не меняются, а в остальных -позициях могут происходить любые перестановки букв. Формально ситуация описывается следующим образом. На всех словах $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \in B^n$ действует подгруппа $S(i_1, i_2, \dots, i_{n-k})$ группы S_n , сохраняющая позиции с номерами $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$.

Орбита слова x – это множество всех слов, совпадающих с x в позициях $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ и получающихся перестановками во всех остальных -позициях.

Примеры. 7) Если $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{n-k} = n-k$, то орбита слова

$x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ – это множество слов, получающихся из x перестановкой последних в k -позиции. Если $|\alpha_{n-k+1} \alpha_{n-k+2} \dots \alpha_n| = r$, то число таких слов равно $\binom{k}{r}$ – мощности проекции k слоя в B_r^k . Мощность оптимального кода V равна $2^{n-k}(k+1)$, и любой такой код устроен следующим образом: произвольно выбираются первые $(n-k)$ -позиции, а остальные k – это произвольный набор с фиксированным числом единиц $0, 1 \dots k$.

8) Если $n = 4$, $k = 2$, то код V имеет вид

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0000 & 0100 & 1000 & 1100 & & \\ 0010 & 0110 & 1010 & 1110 & & \\ 0011 & 0111 & 1011 & 1111 & & \end{array}.$$

В общем виде, если перестановка g разбивается в произведение k -независимых циклов, т.е. $g = z^1 z^2 \dots z^k$, то число слов из B^k , инвариантных относительно g , равно 2^k . Теперь для мощности кода V из леммы Бернсайда получаем выражение

$$|V| = \frac{2^{n-k}}{k} \sum_{g \in S} N(g) = \frac{2^{n-k}}{k} \sum_{k=1}^n C(n, k) 2^k,$$

где $C(n, k)$ – число Стирлинга первого рода или число перестановок из S_n , имеющих ровно k независимых циклов. Так как в нашем случае $n = k$ и $C(n, k) = C(n, r)$, то

$$|V| = \frac{2^{n-k}}{k} \sum_{r=1}^k C(k, r) 2^r = \frac{2^{n-k}}{k} (k+1)! = 2^{n-k}(k+1),$$

так как имеет место классическая формула $\{\psi^k\}$ – множество циклических сдвигов порядка n , действующее на B^n следующим образом: для слова $x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \in B^n$ $\psi^0(x) = x$, $\psi^1(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1$, $\psi^k(x) = \psi \psi^{k-1}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. $\sum_{k=1}^n C(n, k) x^k = x(x+1) \dots (x+n-1)$. Интересным примером группового канала является канал циклических сдвигов.

§3. Групповой канал циклических сдвигов. Пусть $B^n = \{0, 1\}^n$ и

$\Psi = \{\psi^k\}$ – множество циклических сдвигов порядка n , действующее на B^n следующим образом: для слова $x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \in B^n$

$$\psi^0(x) = x, \psi^1(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1), \psi^k(x) = \psi \psi^{k-1}(x),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ясно, что $|\Psi| = n$ и Ψ – циклическая группа порядка n , где окрестности слова $x \in B^n$ могут быть найдены с помощью стабилизаторов

$$\Psi_x = \{\psi^k : \psi^k x = x\}.$$

Ниже приведены соответствующие численные результаты некоторых n .

Примеры. 9) Для $n=4$ имеем:

$$\begin{aligned} x = 0000 \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\}, \Psi(x) = \{x\} \\ x = 0001 \quad \Psi_x &= \{\psi^0\}, \Psi(x) = B_1^4 = \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\ x = 1010 \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^2\}, \Psi(x) = \{1010, 0101\} \\ x = 1100 \quad \Psi_x &= \{\psi^0\}, \Psi(x) = \{1100, 0110, 0011, 1001\} \\ x = 1110 \quad \Psi_x &= \{\psi^0\}, \Psi(x) = \{1110, 0111, 1011, 1101\} = B_3^4 \\ x = 1111 \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\}, \Psi(x) = \{x\}. \end{aligned}$$

Таким образом, куб B^4 разбивается на два транзитивных множества мощности 1; 1 – транзитивное множество мощности 2; 3 – транзитивное множество мощности 4. Естественным следствием проделанных вычислений является возможность нахождения функции $N(\psi)$ для всех преобразований ψ . В случае $n = 4$ имеем

$$N(\psi^0) = 2^4, N(\psi^1) = 2, N(\psi^2) = 4, N(\psi^3) = 2.$$

Отсюда число транзитивных множеств согласно утверждению 3 равно

$$\frac{16 + 4 + 2 + 2}{4} = 6,$$

что совпадает с результатом непосредственного вычисления.

Далее, код $V(\Psi) = \{(0000), (1111), (1010), (1100), (1110), (0001)\}$, собранный из представителей транзитивных множеств, является одним из максимальных кодов. Декодирование слов на выходе канала производится с помощью стандартной таблицы декодирования, которая в нашем случае имеет вид

0000	1111	1010	1100	1110	0001
		0101	0110	0111	1000
			0011	1011	0100
			1001	1101	0010

10) Для $n = 6$ картина следующая:

$$\begin{aligned} x = 000000 \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5\}, \Psi(x) = \{x\} \\ x = 111111 \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5\}, \Psi(x) = \{x\} \\ x = 100000 \quad \Psi_x &= \{\psi^0\}, \Psi(x) = B_1^6 \\ x = 100100, \quad \Psi_x &= \{\psi^0, \psi^3\} \text{ и } |\Psi(x)| = 3. \end{aligned}$$

Если $|x| = 2$, но $x \notin \Psi(100100)$, то $\Psi_x = \{\psi^0\}$ и $|\Psi(x)| = 6$.

Таким образом, имеем одно транзитивное множество с тремя словами и два транзитивных множества по 6 слов в каждом. В целом $|B_6^2| = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3$

$$x = 101010 \quad \Psi_x = \{\psi^0, \psi^2, \psi^4\}, \Psi(x) = \{x, \bar{x}\}.$$

В этом случае имеем одно транзитивное множество с двумя словами.

Для остальных $x \notin \Psi(101010)$ с $|x| = 3$ $\Psi_x = \{\psi^0\}$ и $|\Psi(x)| = 6$.

Количество таких транзитивных множеств 3, следовательно, получаем

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 = 3 \cdot 6 + 2,$$

$$x = 110110, \text{ то } \Psi_x = \{\psi^0, \psi^3\} \text{ и } |\Psi(x)| = 3.$$

Для остальных $x \notin \Psi(110110)$ и $|x| = 4$ $\Psi_x = \{\psi^0\}$, $|\Psi(x)| = 6$.

Таких транзитивных множеств два. Следовательно,

$$\binom{6}{4} = 15 = 3 + 2 \cdot 6 <$$

$$|x| = 5, \Psi_x = \{\psi^0\} \text{ и } |\Psi(x)| = 6 >$$

В этом случае имеем одно транзитивное множество.

Таким образом, получаем разбиение B^6 на транзитивные множества и возможность нахождения функции $N(\psi)$ для всех преобразований ψ : $N(\psi^0) = 2^6$, $N(\psi^1) = 2$, $N(\psi^2) = 4$, $N(\psi^3) = 8$, $N(\psi^4) = 4$, $N(\psi^5) = 2$.

Отсюда число транзитивных множеств согласно утверждению равно

$$\frac{64 + 2 + 4 + 8 + 4 + 2}{6} = 14,$$

что совпадает с результатом непосредственного вычисления. Далее, код $V(\Psi) = \{(000000), (111111), (100000), (100100), (101000), (110000), (101010), (111000), (110010), (110100), (110110), (111100), (101110), (111110)\}$, собранный из представителей транзитивных множеств, является одним из максимальных кодов. Декодирование слов на выходе канала производится с помощью стандартной таблицы декодирования, которая в нашем случае $n = 6$ имеет вид

111000	101010	110010	110110	110100	100000	111100
011100	010101	011001	101101	011010	010000	011110
001110		101100	011011	001101	001000	001111
000111		010110	101101	100110	000100	100111
100011		001011		010011	000010	110011
110001		100101		101001	000001	111001
101110	111110	101000	100100	010000	111111	000000
010111	011111	010100	010010	011000		
101011	101111	001010	001001	001100		
110101	110111	000101		000110		
111010	111011	100010		000011		
011101	111101			100001		

В общем виде мощность кода для циклического канала может быть найдена с помощью хорошо известных комбинаторных результатов.

Определение. *Периодом слова $a \in B^n$ называется минимальное число k такое, что $\psi^k(a) = a$.*

Если период слова a равен k , то транзитивное множество $\Psi(a)$ имеет вид: $\{a, \psi(a) \dots \psi^{k-1}(a)\}$. Поэтому мощность транзитивного множества $\Psi(a)$ равна периоду слова a .

Обозначим число транзитивных множеств мощности d через $\lambda_n(d)$. Так как транзитивные множества производят разбиение B^n , то справедливо соотношение

$$\sum_{d/n} d\lambda_n(d) = 2^n. \quad (5)$$

При этом код максимальной мощности $\bar{V}(\Psi)$ – это любое множество всех представителей транзитивных множеств, и его мощность задается формулой (4), которая в данном случае имеет вид:

$$|\bar{V}(\Psi)| = \sum_{d/n} \lambda_n(d). \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) с использованием стандартной теоретико-числовой техники получается следующее хорошо известное выражение:

$$|\bar{V}(\Psi)| = \frac{1}{n} \sum_{d/n} 2d\varphi(n/d) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} 2^{n/d}\varphi(d)$$

или

$$|\bar{V}(\Psi)| = \sum_{k/n} 2^k \varphi\left(\frac{n}{k}\right), \quad (7)$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера – количество чисел меньших q и взаимно простых с ним, вычисляемая по формуле

$$\varphi(n) = n \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Формула (7) представляет собой мощность максимального кода, исправляющего ошибки циклического канала $K(\Psi)$. Если $n = pq$, где p, q – простые числа, то

$$|\bar{V}(\Psi)| = \frac{2^{pq} + 2^p(q-1) + 2^p(p-1) + 2(p-1)(q-1)}{pq}.$$

Для $n = p$ все значительно проще:

$$|\bar{V}(\Psi)| = \frac{2^p - 2}{p} + 2.$$

Приведенные выше примеры показывают, что в случаях, когда канал $K(\Psi)$ является групповым, задача о построении максимального по мощности кода $\bar{V}(\Psi)$, исправляющего ошибки канала $K(\Psi)$, может быть решена до конца. Соответствующая формула для мощности максимального кода

(4) – это классическая лемма Бернсайда для числа транзитивных множеств в условиях действия группы Ψ на некотором множестве слов.

¹ ФИЦ ИУ РАН, Москва

² Группа Бит, Москва

³ Ереванский государственный университет
e.mails: vkleontiev@yandex.ru, garib@hkzap.ru,
j.margaryan@ysu.am

В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян

Алгебраические групповые каналы связи

Исследуются групповые алгебраические каналы связи. Основной результат работы позволяет построить коды максимальной мощности, исправляющие ошибки групповых каналов.

Վ. Վ. Լեոնտիև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան

Հանրահաշվական խմբային կապի ուղիներ

Ուսումնասիրվում են հանրահաշվական խմբային կապի ուղիներ: Աշխատանքի հիմնական արդյունքը թույլ է տալիս կառուցել մաքսիմալ հզորության կոդեր, որոնք ուղղում են սխալները խմբային կապի ուղիներում:

V. K. Leontiev, G. L. Movsissian, J. G. Margaryan

A Group Communication Channels

The present paper explores group algebraic communication channels. The main result allows to build maximum power codes that corrects errors of the group channels.

Литература

1. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л.* В кн.: The First International. Algebra and Geometry Conference 16-20 May 2007, Yerevan, Armenia.
2. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л.* – ДНАН Армении. 2004. Т. 104. № 1. С. 23-27.
3. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л., Осипян А. А.* В кн.: Материалы XI междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложение». Изд-во МГУ. 2012. С. 415-416.
4. *Левенштейн В. И.* – ДАН СССР. 1965. Т. 163. №4. С. 845-848.
5. *де Брейн Н. Дж.* В сб.: Прикладная комбинаторная математика. М. Мир. 1968. С. 61-106.
6. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л., Маргарян Н. Г.* – ДНАН Армении. 2019. Т. 119. №3. С. 195-203.

Кантор [3] доказал, что пустое множество является V -множеством для тригонометрической системы. С этой работы Кантора начались исследования вопросов единственности ортогональных рядов.

Скажем, что множество E является V -множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x), \text{ если } x \notin E,$$

где f всюду конечная интегрируемая функция, следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ является рядом Фурье функции f . Очевидно, что любое V -множество является U -множеством.

Одним из важных обобщений теоремы Кантора является теорема Валле-Пуссена [4]: любое счетное множество является V -множеством для тригонометрической системы. Отметим, что исследования вопросов единственности тригонометрических рядов продолжаются до сих пор. Исследования вопросов единственности рядов по системам Хаара, Уолша и их обобщений начались с работ [5-7] и продолжаются до сих пор. Исследования V -множеств для системы Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ начаты недавно [8, 9]. В [10] доказаны теоремы о VP -множествах системы Франклина.

Теорема 1. *Пустое множество является V -множеством для системы Франклина.*

Теорема 1 следует из теоремы 2, доказанной в [10]. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{1}$$

есть ряд Франклина.

Теорема 2. *Если ряд (1) сходится по мере к интегрируемой функции f и всюду выполняется*

$$\sup |\sum_{k=0}^n a_k f_k(x)| < \infty,$$

то ряд (1) является рядом Фурье – Франклина функции f .

Из теоремы 2 с применением одной теоремы Л. Гоголадзе [11] можно получить, что если кратный ряд Франклина всюду сходится по Прингсхейму к всюду конечной интегрируемой функции f , которая интегрируема по любому набору переменных при фиксированных остальных переменных, то этот ряд является рядом Фурье – Франклина функции f .

Ниже сформулируем теоремы единственности кратных рядов Франклина, не только освободившись от требования интегрируемости функции f по любому набору переменных при фиксированных остальных переменных, но и потребовав сходимости ряда не всюду, а вне некоторого множества из определенного класса множеств.

Известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, где $a_n = f_n(x_0)$ для некоторого $x_0 \in [0,1]$, всюду кроме точки x_0 сходится к нулю. Следовательно, любое одноточечное множество не является V -множеством.

Как увидим ниже, для кратных рядов картина принципиально иная. Не только одноточечные множества, но и любое счетное множество является V -множеством (тем более U -множеством) для кратной системы Франклина. Более того, доказывается, что декартово произведение множеств меры нуль является V -множеством для кратной системы Франклина.

Через \mathbb{N}_0 обозначим множество неотрицательных целых чисел. Для натурального $k \geq 2$ обозначим через \mathbf{x} векторы из $[0,1]^k$, а через \mathbf{n} векторы с координатами из \mathbb{N}_0 , т.е. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $x_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, k$, и $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$, $n_i \in \mathbb{N}_0$ $i = 1, \dots, k$.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортонормированная система Франклина на $[0,1]$. Обозначим через $\{f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k}$ k -кратную систему Франклина, т.е.

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f_{n_1}(x_1) \cdots f_{n_k}(x_k), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k, \quad \mathbf{x} \in [0,1]^k.$$

В данной работе рассматриваются кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^k, \quad (2)$$

с прямоугольными частичными суммами

$$\sum_{\mathbf{n} \leq \mathbf{N}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где запись $\mathbf{n} \leq \mathbf{N}$ означает, что $n_i \leq N_i$, $i = 1, \dots, k$.

Говорят, что кратная числовая последовательность $S_{\mathbf{N}}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}_0^k$, сходится по Прингсхейму (или по прямоугольникам) к числу A , если существует предел $\lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{N}} = A$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_0 \in \mathbb{N}_0, \text{ такое, что } |S_{\mathbf{N}} - A| < \varepsilon, \text{ если } \min_{1 \leq i \leq k} N_i \geq M_0.$$

В [10] доказано, что любое конечное множество является V -множеством для двойных рядов Франклина, сходящихся по Прингсхейму.

Определение. Скажем, что множество $E \subset [0,1]^k$ является разреженным в $[0,1]^k$, если

$$E \subset E_0, \text{ где } E_0 = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k, \text{ с } \mu(E_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 3 и 4.

Теорема 3. Пусть E – разреженное множество, ряд (2) с частичными суммами (3) удовлетворяет условиям

$$\limsup_{\mathbf{N}} |\sum_{\mathbf{n} \leq \mathbf{N}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})| < \infty, \quad \mathbf{x} \notin E$$

и существует последовательный предел

$$\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{N_k} \sum_{n_1=0}^{N_1} f_{n_1}(x_1) \cdots \sum_{n_k=0}^{N_k} f_{n_k}(x_k) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^k,$$

где f – всюду конечная интегрируемая функция. Тогда ряд (2) является рядом Фурье – Франклина функции f .

Теорема 4. Пусть E – разреженное множество в $[0,1]^k$ и для ряда (2) с частичными суммами (3) выполняется

$$\lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{n} \leq \mathbf{N}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \notin E,$$

где f – всюду конечная интегрируемая функция. Тогда ряд (2) является рядом Фурье – Франклина функции f .

Очевидно, что любое счетное множество является разреженным в $[0,1]^k$. Поэтому из теоремы 4 получается следующая теорема.

Теорема 5. Любое счетное множество является V -множеством для кратных рядов Франклина, сходящихся по Прингсхейму.

При доказательстве теорем 4 и 5, наряду с некоторыми вспомогательными леммами, важную роль играют теорема 2 и следующая теорема, доказанная в работе [12].

Теорема 6. Ряд (1) сходится почти всюду на множестве E тогда и только тогда, когда $\sup_{\mathbf{N}} |\sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})| < \infty$ почти всюду на E .

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках проекта 18Т-1А074.

Ереванский государственный университет
e-mails: ggg@ysu.am, levon.hakobyan5@ysumail.am

Академик Г. Г. Геворкян, Л. А. Акопян

Теоремы единственности кратных рядов Франклина

Доказано, что если кратный ряд по системе Франклина всюду кроме, быть может, некоторого множества, являющегося декартовым произведением множеств меры нуль, сходится к всюду конечной интегрируемой функции, то он является рядом Фурье – Франклина этой функции. Доказана также теорема единственности для кратных рядов Франклина, прямоугольные частичные суммы которых в каждой точке имеют последовательный предел.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Ա. Հակոբյան

Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի միակության թեորեմներ

Ապացուցված է, որ եթե Ֆրանկլինի համակարգով բազմապատիկ շարքն ամենուրեք, բացի գուցե ինչ-որ բազմությունից, որը զրո չափի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ է, գուգամիտում է ամենուրեք վերջավոր ինտեգրելի ֆունկցիայի, ապա այդ ֆունկցիայի Ֆուրիե-Ֆրանկլինի շարքն է: Ապացուցված է նաև միակության թեորեմ Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի համար, որոնց ուղղանկյուն մասնակի գումարներն ունեն հաջորդական սահման:

Academician G. G. Gevorkyan, L. A. Hakobyan

Uniqueness Theorems on Multiple Franklin Series

In this paper it is proved that if a multiple Franklin series converges everywhere except possibly on a set which a Cartesian product of measure zero sets, to a finite and integrable function, then it is the Fourier – Franklin series of that function. A uniqueness theorem for multiple Franklin series is also proved for series whose rectangular partial sums have a finite iterated limit at every point.

Литература

1. *Franklin Ph.* – Math. Anallen. 1928. V. 100. P. 522-529.
2. *Бату Н. К.* Тригонометрические ряды. М. Физматгиз. 1961. 936 с.
3. *Cantor G.* – Mathematische Annalen. 1872. V. 5. P. 123-132.

4. *Valle-Poussin Ch. L.* – Bull. Acad. Roy. de Belg. 1912. P. 702-718.
5. *Арутюнян Ф. Г.* – ДАН АрмССР. 1964. Т. 38. С. 129-134.
6. *Петровская М. Б.* – Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 773-798.
7. *Скворцов В. А.* – Вестник МГУ. Сер. матем. 1964. Т. 5. С. 3-6.
8. *Геворкян Г. Г.* – Мат. заметки, 2015. Т. 98. С. 786-789.
9. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 2016. Т. 207. С. 30-53.
10. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 2018. Т. 209. С. 25-46.
11. *Гоголадзе Л. Д.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. С. 83-90.
12. *Геворкян Г. Г.* – Analysis Math. 1990. V. 16. P. 87-114.

Допустимая последовательность T называется сильно регулярной с параметром γ , если $\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{n,i+1}}{\lambda_{n,i}} \leq \gamma$ для всех $n \geq 2, i = 1, \dots, n$, здесь и далее $\lambda_{n,i} = s_{n,i} - s_{n,i-1}$.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая квази-двоичному и сильно регулярному с параметром γ разбиению T . Обозначим $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k f_k(x), x \in [0, 1]$.

Сформулируем основной результат настоящей статьи:

Теорема 1. Если $\inf_n \sigma_n(x) > -\infty, x \in E$, то $\sup_n \sigma_n(x) < +\infty$ почти

всюду на E .

Теорему 1 можно сформулировать в следующей равносильной форме.

Теорема 2. Справедливо равенство

$$\mu\left(\left\{x \in [0, 1] : -\infty < \liminf_n \sigma_n(x) \leq \limsup_n \sigma_n(x) = +\infty\right\}\right) = 0,$$

где μ – мера Лебега.

Заметим, что теорема 2 является аналогом теоремы Геворкяна для классической системы Франклина (см. [3]). Такую же теорему, которая дает ответ известной задаче Лузина о сходимости тригонометрических рядов к $+\infty$ -и, доказал Конягин для тригонометрических рядов (см. [4], теорема 2). В [5] доказана

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ почти всюду на E ;
2. $\sup_n |\sigma_n(x)| < +\infty$ почти всюду на E ;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится почти всюду на E ;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится по мере безусловно на E .

Подобная теорема для рядов Хаара доказана Ф. Арутюняном [6], а для мартингалов – Р. Ганди [7]. Последовательность частичных сумм ряда Хаара является регулярным мартингалом. В то же время последовательность частичных сумм ряда по общей системе Франклина не является мартингалом. Но как показывает теорема 3, ряды по общей системе Франклина имеют свойства, схожие со свойствами мартингалов.

Из теорем 1 и 3 вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. Если $\inf_n \sigma_n(x) > -\infty, x \in E$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ ряд сходится почти всюду на E .

Теорема 5. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) = +\infty$ на E , то $\liminf_n \sigma_n(x) = -\infty$ и $\limsup_n \sigma_n(x) = +\infty$ почти всюду на E .

Подобные теоремы доказаны Ф. Арутюняном [6] для рядов Хаара и Чоу для мартингалов [8].

При доказательстве теоремы 1 важную роль играют следующие понятия и леммы.

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Для $n \geq 2$ введем определение:

$$N_{n,i}(x) = \begin{cases} \delta_{ij}, \text{ при } x = s_{n,j}, \\ \text{линейна на } [s_{n,j-1}, s_{n,j}], j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Заметим, что функции $N_{n,i}(t), i = 0, \dots, n$ нормализованы в пространстве $C[0,1]$, а из соотношений $N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}$ следует, что система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^n$ составляет базис в S_n . Обозначив $M_{n,i}(t) = \frac{2}{s_{n,i+1} - s_{n,i-1}} N_{n,i}(t)$, где $s_{n,-1} = s_{n,0} = 0, s_{n,n+1} = s_{n,n} = 1$, мы получаем другой базис в S_n , который нормализован в $L^1[0,1]$.

Поскольку система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^n$ является базисом в S_n , то условие $f_n \perp S_{n-1}$ равносильно соотношениям

$$\int_0^1 f_n(t) N_{n-1,i}(t) dt = 0, \text{ при } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

По определению общей системы Франклина мы имеем $f_m \perp S_{m-1}$ и $S_n \subset S_{m-1}$ при $m > n$. Следовательно,

$$\int_0^1 f_m(t) \varphi(t) dt = 0, \text{ при } \varphi \in S_n \text{ и } m > n.$$

Далее, для каждого ряда $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ и функции $\varphi \in S_n$ определяем скалярное произведение следующим образом:

$$(S, \varphi) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^1 f_m(t) \varphi(t) dt = \sum_{m=0}^n a_m \int_0^1 f_m(t) \varphi(t) dt = (\sigma_n, \varphi).$$

Понятие скалярного произведения для рядов S и функции $\varphi \in S_n$ введено в [9] и было успешно применено в вопросах единственности рядов Франклина (см. [2, 10, 11]).

Обозначим $\Delta_{n,i} = [s_{n,i-1}, s_{n,i+1}]$.

Лемма 1. Для любого n и i , $0 \leq i \leq n$ имеем $M_{n,i} = \sum_j \alpha_j M_{n+1,j}$, где

$\sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0$ и $\alpha_j = 0$, если $\Delta_{n+1,j} \not\subset \Delta_{n,i}$.

Лемма 2. Если φ линейна в промежутках $[s_{n,i-1}, s_{n,i}]$ и $[s_{n,i}, s_{n,i+1}]$, то

$$(\varphi, M_{n,i}) = \frac{\lambda_{n,i}}{3(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1})} \varphi(s_{n,i-1}) + \frac{2}{3} \varphi(s_{n,i}) + \frac{\lambda_{n,i+1}}{3(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1})} \varphi(s_{n,i+1}).$$

Лемма 3. Если $(S, M_{n,i}) =: A < 0$, то

$$\mu \left(\left\{ x \in \Delta_{n,i} : \sigma_n(x) < \frac{A}{2} \right\} \right) > \frac{\mu(\Delta_{n,i})}{3(\gamma + 1)}.$$

Ереванский государственный университет
e-mail: mik.vazgen@gmail.com

В. Г. Микаелян

Об одном «martingальном свойстве» ряда по общей системе Франклина

Доказан критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина на множестве. Критерий аналогичен критерию, полученному Чоу для мартингалов, Ф. Арутюняном для рядов Хаара и Г. Геворкяном для рядов Франклина.

Վ. Գ. Միքայելյան

Ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի՝ մեկ «մարտինգալային հատկության» մասին

Ապացուցված է, ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի, համարյա ամենուրեք զուգամիտության հայտանիշ բազմության վրա: Համանման հայտանիշ ապացուցել է Չոուն մարտինգալների համար, Ֆ. Հարությունյանը՝ Հասարի շարքերի համար, և Գ. Գևորգյանը՝ Ֆրանկլինի շարքերի համար:

V. G. Mikayelyan

**On a «Martingale Property» of Series with Respect
to General Franklin System**

A criterion for almost everywhere convergence of general Franklin series on a set is proved. The criterion is similar to the ones obtained by Y.S. Chow for martingales, F. Arutyunyan for Haar series and G. Gevorkyan for Franklin series.

Литература

1. *Ciesielski Z.* – *Studia Math.* 1963. V. 23. P. 141-157.
2. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – *Analysis Math.* 2004. V. 164. P. 161-204.
3. *Gevorkyan G. G.* – *Studia Math.* 2019. V. 45. № 4. P. 803-815.
4. *Конягин С. В.* – Матем. заметки. 1988. т. 44. № 6. С. 770-784.
5. *Погосян М. П.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2000. Т. 35. № 2. С. 64-77.
6. *Арутюнян Ф. Г.* – Доклады АН АрмССР. 1966. Т. 42. № 3. С. 134-140.
7. *Gundy-Trans R.* – *Amer. Math. Soc.* 1966. V. 124. P. 228-248.
8. *Chow Y. S.* – *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete.* 1963. V. 1. P. 340-346.
9. *Геворкян Г. Г.* – Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 5, С. 786–789.
10. *Геворкян Г. Г.* – Матем. сб. 2016. Т. 207. № 12 С. 30–53.
11. *Геворкян Г. Г.* – Матем. сб. 2018. Т. 209. № 6. С. 25–46.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян

**Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической
оболочки в сверхзвуковом потоке газа**

(Представлено 25/II 2020)

Ключевые слова: композиционная слоистая цилиндрическая оболочка, флаттер, критическая скорость.

Введение. Устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа посвящены многочисленные исследования. В частности вопросы сверхзвукового флаттера изотропных, слоистых и анизотропных (не композиционных) тонких пластин и оболочек изучены достаточно, и эффекты взаимодействия здесь оказались весьма существенными. Аналогичные вопросы для тонких тел из композиционного материала почти не исследованы.

Предлагаемая работа посвящена вопросам устойчивости слоистой цилиндрической оболочки из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой удлиненной оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. Исследован вопрос оптимального регулирования величины минимальной критической скорости при помощи выбора угла армирования и физико-механических параметров рассматриваемой задачи.

1. Основные уравнения. Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , составленную из конечного числа $(2k+1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки (срединная поверхность среднего слоя), которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 – вдоль образующей, α_2 – по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Третья координатная линия α_3 прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Слои,

симметрично расположенные относительно координатной поверхности $\alpha_3 = 0$, имеют одинаковую толщину, одинаковые физико-механические свойства и состоят из $2n_s$ элементарных слоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi_s$ ($s=1,2,\dots,2k+1$) к оси цилиндра. Таким образом, рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка, составленная из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности [1, 2]. Предполагается, что слои оболочки после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Согласно вышеизложенному упругие характеристики $B_{ij}^{(s)}$ материала s -го слоя в главных геометрических направлениях оболочки определяются через упругие характеристики соответствующих элементарных слоев в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3].

Пусть оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью \bar{u} ($|\bar{u}| = U = \text{const}$), направленной по образующим цилиндра. Будем исследовать устойчивость оболочки под действием избыточного давления газа, появляющегося вследствие малых возмущений обтекаемой поверхности (вследствие возмущенного колебания оболочки).

Для получения основных уравнений и соотношений, описывающих возмущенное движение рассматриваемой аэроупругой системы, принимаются следующие предположения:

а) гипотеза о недеформируемых нормалях для всего пакета оболочки в целом [3];

б) избыточное давление Δp вычисляется с помощью приближенной формулы “поршневой теории” при малых возмущениях [4];

в) влияниями тангенциальных составляющих сил инерции можно пренебречь.

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения и соотношения, описывающие поведение малых возмущений в рассматриваемой оболочке [3]:

уравнения возмущенного состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \alpha_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{R} T_{22} + Z = m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь m^* – приведенная масса, отнесенная к единице площади срединной поверхности

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{k+1} \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i – удельный вес материала i -го слоя, δ_i – расстояние верхней поверхности i -го слоя от срединной поверхности, Z – нормальная составляющая внешней нагрузки, T_{ij} , M_{ij} – возмущения внутренних сил и моментов невозмущенного состояния, $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $v(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки;

соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{11} &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right), \quad M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{22} &= c_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right) + c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad M_{22} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{12} = T_{21} &= c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right), \quad M_{12} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь для жесткостей растяжения c_{ij} и изгиба D_{ij} имеем

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 2 \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1} + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \\ D_{ij} &= \frac{2}{3} \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1}^3 + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где упругие постоянные $B_{ij}^{(s)}$ материала s -го слоя в главных геометрических направлениях оболочки согласно формулам поворота имеют следующие представления [3]:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s, \\ B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s, \\ B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\ B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\ B_0^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + 2B_{66}^{0(s)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.4) $B_{ij}^{(s)}$ – упругие постоянные материала s -го слоя в главных физических направлениях (упругие постоянные элементарных слоев, образующих данный слой оболочки), φ_s – угол армирования материала s -го слоя.

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.2) в уравнение (1.1), получим систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения оболочки:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= 0, \\
c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= 0, \\
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + \\
+ \frac{1}{R} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + c_{22} \frac{w}{R^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha_1, \alpha_2, t)$ возмущенного состояния складывается из сил демпфирования и избыточного аэродинамического давления Δp

$$Z = -\varepsilon m^* \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \tag{1.6}$$

где ε – коэффициент затухания.

В случае внешнего обтекания оболочки, используя “поршневую теорию” для Δp , получаем [5]

$$\Delta p = -\varkappa p_0 \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}. \tag{1.7}$$

В (1.7) M – число Маха, p_0 – давление, a_0 – величина скорости звука для невозмущенного газа, \varkappa – показатель политропы.

Введением функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$, связанной с u, v, w соотношениями [3]

$$\begin{aligned}
u &= L_1 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \Phi, \\
v &= L_2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right] \Phi, \\
w &= L_3 \Phi = \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

с учетом (1.6) и (1.7), приведем систему (1.5) к одному разрешающему уравнению [6]

$$PL_3 \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} + L_3 \left[m^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(m^* \varepsilon + \frac{\varkappa p_0}{a_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa p_0 M \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \Phi = 0, \tag{1.9}$$

где линейный дифференциальный оператор P имеет вид

$$P = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}.$$

Коэффициенты a_{ik} линейных дифференциальных операторов L_i ($i=1,2,3$) определяются формулами [3]

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}} \quad (i=1,2, \quad k=1,2). \quad (1.10)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа сведена к решению уравнения (1.9) при обычных условиях закрепления краев оболочки.

2. Определение критической скорости флаттера. Влияние угла армирования. С целью выявления качественного влияния угла армирования материала оболочки на процесс устойчивости аэроупругой системы ниже рассматривается случай однослойной бесконечной оболочки. Тогда решение уравнения (1.9) ищется в виде

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(\omega t - k\alpha_1)} \cos \frac{n}{R} \alpha_2. \quad (2.1)$$

Здесь Φ_0 – некоторая комплексная постоянная, ω – частота колебаний, $k = \pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина полуволны в направлении обтекающих, n – целое число волн по окружности оболочки.

Подстановка (2.1) в (1.9) приводит к характеристическому уравнению, которое запишем следующим образом:

$$\omega^2 - i\omega(\varepsilon + \gamma) - \Omega^2(k, n) + ik\gamma U = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega^2(k, n) = \frac{1}{\rho h} \left[D_{11}k^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})k^2 \frac{n^2}{R^2} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} + \frac{1}{R^2} \frac{k^4}{a_{11}k^4 + (a_{66} - 2a_{12})k^2 \frac{n^2}{R^2} + a_{22} \frac{n^4}{R^4}} \right], \quad \gamma = \frac{\varepsilon p_0}{\rho h a_0} \quad (2.3)$$

квадрат частоты собственных поперечных колебаний оболочки в вакууме, a_{ik} определяются согласно (1.10), жесткости D_{ik} и c_{ik} согласно (1.3) представляются в виде

$$D_{ik} = B_{ik} h^3 / 12, \quad c_{ik} = B_{ik} h,$$

ρ – плотность материала оболочки.

Для любых заданных значений k и n из уравнения (2.2) можно найти частоту. Если ее мнимая часть положительна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие частот с отрицательной мнимой частью означает неустойчивость. Условия, чтобы уравнение (2.2) с комплексными коэффициентами не имело корней с отрицательными мнимыми частями, могут быть представлены в форме, аналогичной известным условиям Рауса – Гурвица [7]. Поступая анало-

гичным образом, как в работе [5], из этих условий для критической скорости получим формулу

$$U_{cr} = V \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\varepsilon h}{a_0} \right). \quad (2.4)$$

Здесь ρ_0 – плотность невозмущенного газа, V – фазовая скорость распространения упругих волн в оболочке

$$V^2 = \frac{1}{\rho_0 h R^2} \left[\frac{D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{22} n^4}{m^2} + \right. \\ \left. + R^2 \frac{m^2}{a_{11} m^4 + (a_{66} - 2a_{12}) m^2 n^2 + a_{22} n^4} \right], \quad (2.5)$$

где $m = kR$, а второй член в скобках формулы (2.4) учитывает влияние конструкционного демпфирования.

Из (1.3), (1.4) и (1.10) следует, что D_{ik} и a_{ik} зависят от угла армирования φ материала оболочки. Более того, как критическая скорость, так и величины D_{ik} и a_{ik} являются периодическими функциями угла φ с периодом π .

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n , вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение.

Если имеет место осесимметричная форма потери устойчивости, то $n = 0$ и критическая скорость принимает минимальное значение U_{cr}^{\min} при

$$m = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt[4]{D_{11} a_{11}}}. \quad (2.6)$$

Для самой скорости получим формулу

$$U_{cr}^{\min} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 h R}} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{a_{11}}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right). \quad (2.7)$$

Если устойчивость теряется по несимметричной форме, то, учитывая, что [8] при $h/R \ll 1$ и $\lambda/R > \pi$ (тогда $kR \sim 1$) частота колебаний Ω получает минимальное значение, когда число окружных волн порядка десяти, принимается $m^2 \ll n^2$. В этом случае минимум функции $U_{cr}(m, n)$ достигается при

$$\frac{n^2}{m} = \frac{R}{\sqrt{a_{22} D_{22}}} \quad (2.8)$$

и составляет

$$U_{cr}^{\min} = \left[\frac{1}{\rho_0 h} \left(\frac{1}{a_{22}} + \frac{D_{22}}{R^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right). \quad (2.9)$$

Рассматривая формулы (2.6)-(2.9), легко заметить, что минимальные значения критической скорости существенно зависят от угла армирования материала оболочки. Для иллюстрации указанной зависимости на основе (2.9) приведены числовые расчеты при $h = 0.01R$. Рассматриваются оболочки, изготовленные из композиционных материалов со следующими безразмерными упругими характеристиками $\bar{B}_{ik}^0 = B_{ik}^0 / B_{11}^0$ в главных направлениях упругости [9, 10]:

1) стеклопластик СВМ 5:1

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.62, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.12, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.16;$$

2) стеклопластик СВМ 1:1

$$\bar{B}_{11}^0 = \bar{B}_{22}^0 = 1, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.08, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.1;$$

3) стеклопластик КАСТ – В

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.572, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.11, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.0956.$$

При этих исходных данных результаты вычислений приведены на рис.1. Кривые на этом рисунке представляют собой зависимости минимальной безразмерной критической скорости $\tilde{U} = c_t^{-1} U_{cr}^{\min}$, где $c_t = (B_{11}^0 / \rho_0)^{1/2}$, от угла армирования φ .

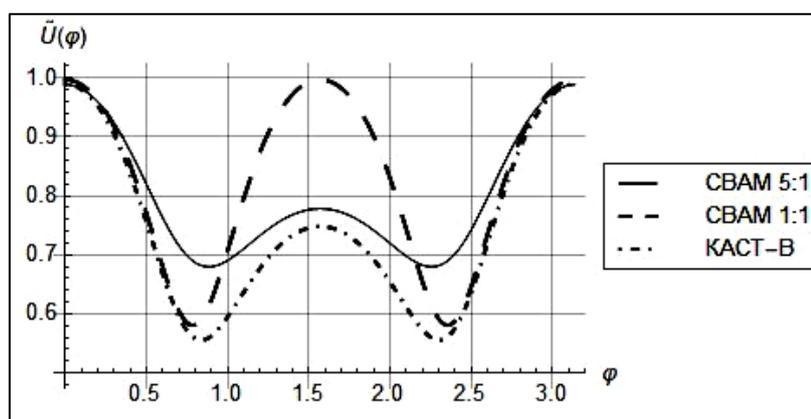


Рис.1. График минимальной критической скорости флаттера $\tilde{U}(\varphi)$ для различных КМ.

Рис.1 показывает, что:

а) максимальные значения минимальной критической скорости получаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, т.е. когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа (указанное максимальное значение получается также при $\varphi = \pi/2$, если $\bar{B}_{11}^0 = \bar{B}_{22}^0$);

б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$, располо-

жение которых существенно зависит от отношений типа B_{ik}^0/B_{11}^0 . Таким образом, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

Институт механики НАН РА
e-mail: gevorg.baghdasaryan@rau.am

Академик Г. Е. Багдасарян

Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа

Рассматривается задача устойчивости слоистой цилиндрической оболочки, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой удлиненной оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. На этой основе показано, что: а) минимальное значение (по волновым числам) критической скорости является функцией угла армирования, а максимальные значения получаются, когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа; б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$. Следовательно, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված շերտավոր գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է գծային դրվածքով փակ երկար թաղանթի դեպքում: Ստացված է ֆլատերի կրիտիկական արագության որոշման բանաձև: Որոշված է կրիտիկական արագության, ըստ ալիքային թվերի, մինիմալ արժեքը՝ կախված թաղանթի նյութի շերտերի արմիրավորման անկյունից: Դրա հիման վրա ցույց է տրված, որ ա) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը ըստ արմիրավորման անկյան ֆունկցիա է և ընդունում է մակսիմալ արժեք, երբ թաղանթի նյութի մոնոշերտերի առաձգականության զլխավոր ուղղություններից մեկը և գազի ուղղությունը համընկնում են, բ) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը

հասանելի է $(0, \pi)$ միջակայքի ներքին կետերում: Հետևաբար, կոմպոզիցիոն աերո-առաձգական համակարգի ֆիզիկական պարամետրերի և հատկապես թաղանթի նյութի արմիրավորման անկյան համապատասխան ընտրության միջոցով կարելի է օպտիմալ ղեկավարել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Academician G. E. Bagdasarian

Stability of a Composite Layered Cylindrical Shell in a Supersonic Gas Flow

The stability problem of a layered cylindrical shell made of monolayers of an orthotropic composite material in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted in a linear formulation in the case of a closed elongated shell. The formula for determining the critical speed of flutter is obtained. The minimum value of the critical velocity by wave numbers was found depending on the angles of reinforcement of the layers of the shell material. Based on this, it was shown that a) the minimum value (by wave numbers) of the critical velocity is a function of the angle of reinforcement and takes maximum values when one of the main directions of elasticity of the material of the monolayers forming the shell coincides with the direction of gas flow, b) the minimum values of the minimum (by wave numbers) critical velocity are reached at points within the interval. Therefore, by varying the physical-mechanical parameters of the composite $(0, \pi)$ aeroelastic system, especially the angle of reinforcement of the shell material, it is possible to optimally control the critical velocity of flutter.

Литература

1. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. Л. Машиностроение. 1985. /М. 1988. 270 с.
2. *Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.* Расчет многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. М. Машиностроение. 1984. 264 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 448 с.
4. *Илюшин А. А.* Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ. Т. 20. Вып. 6. 1956. С. 733-755.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
6. *Багдасарян Г. Е.* В кн.: Тр. IV Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. 1962. Ереван. Изд-во ЕГУ.
7. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Гауса – Гурвица для полиномов и целых функций. М. Изд. АН СССР. 1949. 333 с.
8. *Волмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
9. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига. Зинатне. 1980. 572 с.
10. *Jones R.M.* Mechanics of composite materials. N. Y. Mc. Craw-Hill Book Co. 1975. 520 p.

3) построить стержневую систему, заменяющую атомную (дискретно-континуальную) модель графена при общей его деформации, используя континуально-стержневую модель линейной цепочки атомов;

4) построить континуальную модель графена при общей его деформации предельным переходом из дискретно-континуальной модели (модели стержневой системы, заменяющей атомную);

5) определить упругие постоянные моментной (микрополярной) теории упругости для графена через параметры его атомной структуры.

1. Дискретная модель атомной линейной цепочки в общем случае ее деформирования.

Рассмотрим простейшую одномерную модель – линейную цепочку одинаковых атомов, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга (a). Будем считать, что каждый атом представляет собой тело [12], в данном случае шар, массой m , с собственным осевым моментом инерции I . Предположим, что силы и моменты, действующие на атомы цепочки и обусловленные влиянием других атомов, являются упругими, т.е. пропорциональными линейным или угловым отклонениям расстояний между взаимодействующими атомами от равновесных. Примем, что сказываются взаимодействия только между ближайшими соседями. Ось цепочки обозначим через ξ , а декартовы оси η и z расположим в перпендикулярной к ξ плоскости. Предположим, что цепочка подвергается растяжению – сжатию вдоль оси ξ , изгибаниям в плоскостях $\xi\eta$ и ξz , а также кручению вокруг оси ξ .

Рассмотрим атом под номером k . Действующие на него усилия нецентральные (поэтому их будем разлагать по оси координат), и кроме усилий на этот атом действуют независимые моменты. Действующие на него продольные силы (слева и справа) обозначим через $N^{(k)}$ и $N^{(k+1)}$, действующие при изгибе в плоскости $\xi\eta$ перерезывающие силы – через $Q_2^{(k)}$ и $Q_2^{(k+1)}$, а моменты – через $L_2^{(k)}$ и $L_2^{(k+1)}$. Перерезывающие силы при изгибе в плоскости ξz обозначим через $Q_3^{(k)}$ и $Q_3^{(k+1)}$, а моменты – через $L_3^{(k)}$ и $L_3^{(k+1)}$. Крутящие моменты вокруг оси ξ обозначим через $L_1^{(k)}$ и $L_1^{(k+1)}$.

Потенциал межатомного взаимодействия V примем в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_k c_1 (d_1^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_2 (d_{21}^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_3 (\theta_3^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_2 (d_{31}^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_3 (\theta_2^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_3 (\theta_1^{(k)})^2, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned}
d_1^{(k)} &= u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}, & d_{21}^{(k)} &= (u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}) - \frac{1}{2}a(\omega_3^{(k+1)} + \omega_3^{(k)}), \\
\Theta_3^{(k)} &= \omega_3^{(k+1)} - \omega_3^{(k)}, & d_{31}^{(k)} &= (u_3^{(k+1)} - u_3^{(k)}) - \frac{1}{2}a(\omega_2^{(k+1)} + \omega_2^{(k)}), \\
\Theta_2^{(k)} &= \omega_2^{(k+1)} - \omega_2^{(k)}, & \Theta_1^{(k)} &= \omega_1^{(k+1)} - \omega_1^{(k)},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$c_i (i=1,2,3)$ – упругие параметры цепочки для соответствующих деформаций.

На основе (1.1) имеет место следующий закон упругости для указанной атомной структуры:

$$\begin{aligned}
N^{(k)} &= c_1 a e_{\xi\xi}^{(k)}, & Q_2^{(k)} &= c_2 a \gamma_{\xi\eta}^{(k)}, & Q_3^{(k)} &= c_2 a \gamma_{\xi\xi}^{(k)}, \\
L_3^{(k)} &= c_3 a \chi_{\xi\eta}^{(k)}, & L_2^{(k)} &= c_3 a \chi_{\xi\xi}^{(k)}, & L_1^{(k)} &= c_3 a \tau_{\xi\xi}^{(k)},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
e_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}}{a}, & \gamma_{\xi\eta}^{(k)} &= \frac{u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2}(\omega_3^{(k)} + \omega_3^{(k-1)}), \\
\gamma_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{u_3^{(k)} - u_3^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2}(\omega_2^{(k)} + \omega_2^{(k-1)}), & \chi_{\xi\eta}^{(k)} &= \frac{\omega_3^{(k)} - \omega_3^{(k-1)}}{a}, \\
\chi_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{\omega_2^{(k)} - \omega_2^{(k-1)}}{a}, & \tau_{11}^{(k)} &= \frac{\omega_1^{(k)} - \omega_1^{(k-1)}}{a},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

которые определяют деформации, сдвиги и кривизны-кручения между атомами.

Кинетическая энергия движения линейной цепочки атомов

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \sum_k \left[m \left(\frac{du_1^{(k)}}{dt} \right)^2 + m \left(\frac{du_2^{(k)}}{dt} \right)^2 + m \left(\frac{du_3^{(k)}}{dt} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + I \left(\frac{d\omega_3^{(k)}}{dt} \right)^2 + I \left(\frac{d\omega_2^{(k)}}{dt} \right)^2 + I \left(\frac{d\omega_1^{(k)}}{dt} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Имея в виду формулу (1.1) для потенциальной энергии деформации и (1.5) для кинетической энергии движения, представим лагранжиан для линейной цепочки атомов:

$$L = K - V. \tag{1.6}$$

Тогда принцип Гамильтона можно сформулировать обычным образом:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - V) dt = 0. \tag{1.7}$$

Из принципа Гамильтона (1.7) следуют уравнения движения дискретной модели линейной атомной цепочки.

2. Одномерно-стержневая континуальная модель линейной цепочки атомов в случае ее общего деформирования. Для построения континуальной модели линейной цепочки атомов при общем случае ее деформирования лагранжиан (1.7) дискретной модели представим в специальной форме и осуществим предельный переход, когда $a \rightarrow 0$.

В результате предельного перехода приходим к лагранжиану континуальной модели:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \left[\tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] - \right. \quad (2.1)$$

$$\left. - \left(\tilde{c}_1 \varepsilon_{\xi\xi}^2 + \tilde{c}_2 \gamma_{\xi\eta}^2 + \tilde{c}_2 \gamma_{\xi z}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi\eta}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi z}^2 + \tilde{c}_4 \tau_{\xi\xi}^2 \right) \right\} d\xi.$$

Здесь

$$e_{\xi\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}}{a},$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \omega_3 = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2} (\omega_3^{(k)} + \omega_3^{(k-1)}) \right], \quad (2.2)$$

$$\gamma_{\xi z} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \omega_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{u_3^{(k)} - u_3^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2} (\omega_2^{(k)} + \omega_2^{(k-1)}) \right],$$

$$\chi_{\xi\eta} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\omega_3^{(k)} - \omega_3^{(k-1)}}{a}, \quad \chi_{\xi z} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\omega_2^{(k)} - \omega_2^{(k-1)}}{a},$$

$$\tau_{\xi\xi} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\omega_1^{(k)} - \omega_1^{(k-1)}}{a},$$

$$\tilde{\rho} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a}, \quad \tilde{I} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{I}{a}, \quad \tilde{I}_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{I_0}{a}, \quad (2.3)$$

$\tilde{\rho}$ – линейная плотность массы цепочки; \tilde{I} – линейная плотность ее осевого момента инерции, $\varepsilon_{\xi\xi}$ – относительная продольная деформация; $\gamma_{\xi\eta}$ – сдвиговая деформация в плоскости $\xi\eta$; $\gamma_{\xi z}$ – сдвиговая деформация в плоскости ξz ; $\chi_{\xi\eta}$ – кривизна оси цепочки в плоскости $\xi\eta$; $\chi_{\xi z}$ – кривизна оси цепочки в плоскости ξz ; $\tau_{\xi\xi}$ – относительный угол закручивания.

На основе принципа Гамильтона (1.7), когда лагранжиан имеет вид (2.1), можем получить уравнения движения континуальной модели линейной атомной цепочки:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \xi} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + Q_2 = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \xi} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + Q_3 = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.4) представляет собой уравнение продольного колебания; уравнения (2.5) – уравнения изгибных колебаний в плоскости $\xi\eta$; уравнения (2.6) – уравнения изгибных колебаний в плоскости ξz ; уравнение (2.7) – уравнение крутильных колебаний вокруг оси ξ .

Предельным переходом от уравнений закона упругости (1.3) дискретной модели получим соотношения упругости для континуальной модели:

$$\begin{aligned} N &= \tilde{c}_1 e_{\xi\xi}, & Q_2 &= \tilde{c}_2 \gamma_{\xi\eta}, & Q_3 &= \tilde{c}_2 \gamma_{\xi z}, \\ L_3 &= \tilde{c}_3 \chi_{\xi\eta}, & L_2 &= \tilde{c}_3 \chi_{\xi z}, & L_1 &= \tilde{c}_4 \tau_{\xi\xi}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} e_{\xi\xi} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, & \gamma_{\chi\eta} &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \omega_3, & \gamma_{\xi z} &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \omega_2, \\ \chi_{\xi\eta} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi}, & \chi_{\xi z} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi}, & \tau_{11} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

последние получаются предельным переходом от уравнений (1.4)

Система уравнений движения (2.4)-(2.7), соотношения упругости (2.8) и геометрические соотношения (2.9) представляют собой основные уравнения континуальной модели линейной атомной цепочки при общем случае ее деформирования. Все функции в этих уравнениях представляют собой функции двух переменных (ξ, t) .

К указанной системе уравнений следует присоединить начальные и краевые условия. При начальных условиях следует задавать значения $u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}$ ($i = 1, 2, 3$) при $t = 0$.

Граничные условия вытекают из принципа Гамильтона.

Если край континуально-стержневой модели защемлен, то будут иметь место следующие граничные условия:

$$u_i = 0, \quad \omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2.10)$$

если же край свободен, то $N = 0, \quad Q_i = 0 \quad (i = 2, 3), \quad L_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$. (2.11)

Могут иметь место граничные условия смешанного типа.

Следует отметить, что уравнения (2.4)-(2.9) представляют континуальные уравнения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в одномерном случае (т.е. для стержня). Част-

ный вид этих уравнений (при изгибаниях в одной плоскости) приведен в [13].

3. Построение дискретно-континуальной модели (стержневой системы, заменяющей атомную) и континуальной модели для общего случая деформирования графена. Рассмотрим графен (двумерный материал, рис. 1), считая, что каждый атом взаимодействует лишь с ближайшими соседними атомами.

Предлагаемая конкретная механическая модель упругой связи между атомами графена – модель упругого стержня, работающая на сжатие – растяжение, сдвиг и изгиб в двух перпендикулярных плоскостях и кручение, которая построена в разделе 2 данной работы (уравнения (2.4)-(2.9)).

Потенциальная энергия деформации и кинетическая энергия движения указанной модели упругого стержня имеют вид (см. формулу (2.1)):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a (\tilde{c}_1 e_{\xi\xi}^2 + \tilde{c}_2 \gamma_{\xi\eta}^2 + \tilde{c}_3 \gamma_{\xi z}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi\eta}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi z}^2 + \tilde{c}_4 \tau_{\xi\xi}^2) d\xi, \quad (3.1)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^a \left[\tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right)^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)^2 \right] d\xi, \quad (3.2)$$

где $e_{\xi\xi}, \gamma_{\xi\eta}, \gamma_{\xi z}, \chi_{\xi\eta}, \chi_{\xi z}$ и $\tau_{\xi\xi}$ – выражаются формулами (2.3). Отметим, что ось ξ – это ось стержня (вдоль которой имеем растяжение-сжатие), в плоскостях $\xi\eta$ и ξz происходят сдвиговые и изгибные деформации, а вокруг оси ξ происходит кручение. В этом случае для коэффициентов $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ в формуле (3.1) будем считать, что они представляют собой упругие параметры именно для атомной структуры графена.

Для дальнейшего изучения общей деформации графена можно развить два подхода:

а) дискретно-континуальный. В этом случае в ячейке периодичности представим выходящие из рассматриваемой точки к наиболее близким атомам три стержня, которые обладают потенциальной энергией деформации вида (3.1) и кинетической энергией движения вида (3.2). Далее представим, что рассматриваемая область графена покрыта такой стержневой системой, которая и будет дискретно-континуальной моделью графена. Для изучения деформаций графена необходимо разработать соответствующий подход к применению метода конечных элементов для одного стержня, потом для ячейки периодичности и, далее, для рассматриваемой области графена в целом с учётом соответствующих граничных условий;

б) континуальный. В этом случае необходимо исходя из построенной задачи построить на ячейке предельным переходом континуальную модель для деформаций графена, и, далее, конкретные деформационные задачи для графена изучать на основе решения соответствующих граничных задач этой континуальной модели.

Отметим, что основной целью данной работы являются, во-первых, построение континуальной модели для изучения общих деформационных

задач графена и, во-вторых, сравнение построенной континуальной модели деформаций графена с прикладной моделью тонких пластин по моментной (микрополярной) теории упругости и определение всех упругих постоянных моментной теории упругости. Подходу а) будет посвящена отдельная работа.

Потенциальная энергия деформаций и кинетическая энергия движения для ячейки периодичности (рис. 2) выражаются формулами

$$U = \sum_{k=1}^3 U_k, \quad K = \sum_{k=1}^3 K_k, \quad (3.3)$$

где U_k и K_k – потенциальная и кинематическая энергии k -го стержня ($k = 1, 2, 3$), которые определяются формулами (3.1), (3.2):

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^a (\tilde{c}_1 e_{\xi_k \xi_k}^2 + \tilde{c}_2 \gamma_{\xi_k \eta_k}^2 + \tilde{c}_2 \gamma_{\xi_k z}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi_k \eta_k}^2 + \tilde{c}_3 \chi_{\xi_k z}^2 + \tilde{c}_4 \tau_{\xi_k \xi_k}^2) d\xi_k, \quad (3.4)$$

$$K_k = \frac{1}{2} \int_0^a \left[\tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)_k^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)_k^2 + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)_k^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right)_k^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right)_k^2 + \tilde{I} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right)_k^2 \right] d\xi_k. \quad (3.5)$$

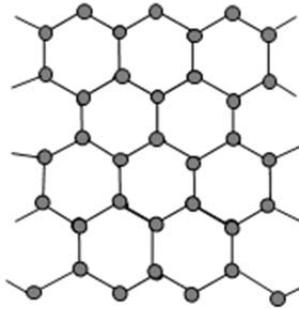


Рис. 1. Графен.

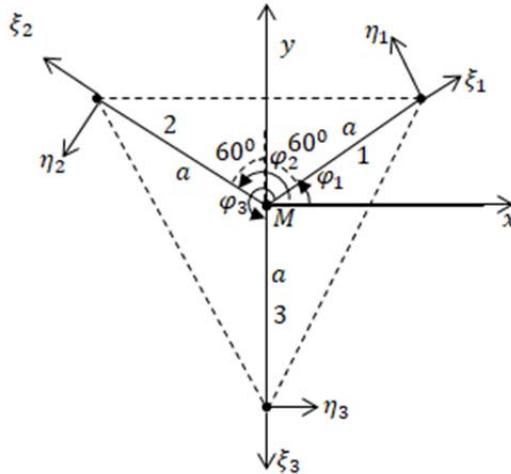


Рис. 2. Ячейка периодичности графена. M – рассматриваемая точка.

Здесь следует иметь в виду (рис.2), что система координат (ξ_k, η_k) , связанная с k -м стержнем, расположена в плоскости графена (x, y) .

Подход при осуществлении предельного перехода к континуальной модели деформирований графена состоит в следующем.

Сначала определим приближенные выражения для общей потенциальной и кинетической энергии ячейки периодичности суммированием по

индексу k средних значений интегралов (3.4), (3.5). Приближенное значение поверхностной интенсивности каждой из указанных энергий получим делением среднего значения соответствующей суммарной энергии на площадь ячейки периодичности $s \left(s = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \right)$. После предельного перехода

($a \rightarrow 0$) для континуальной теории получим выражения поверхностных интенсивностей потенциальной и кинетической энергии в данной точке плоскости графена $M(x, y)$.

В результате указанных преобразований для поверхностных плотностей потенциальной энергии деформации и кинематической энергии движения континуальной модели графена (при общем случае его деформирования) получим:

$$\begin{aligned}
 U_0 = & \frac{1}{2} \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \left(\frac{9}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 \right) e_{xx}^2 + \left(\frac{9}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 \right) e_{yy}^2 + \left(\frac{3}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \right) e_{xx}e_{yy} + \right. \\
 & + \left(\frac{3}{8}c_1 + \frac{9}{8}c_2 \right) \gamma_{xy}^2 + \left(\frac{3}{8}c_1 + \frac{9}{8}c_2 \right) \gamma_{yx}^2 + \left(\frac{3}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \right) \gamma_{xy}\gamma_{yx} + \quad (3.6) \\
 & + \frac{3}{2}c_3\chi_{xz}^2 + \frac{3}{2}c_3\chi_{yz}^2 + \frac{3}{2}c_2\gamma_{xz}^2 + \frac{3}{2}c_2\gamma_{yz}^2 + \left(\frac{3}{8}c_3 + \frac{9}{8}c_4 \right) \chi_{xx}^2 + \left(\frac{3}{8}c_3 + \frac{9}{8}c_4 \right) \chi_{yy}^2 + \\
 & + \left. \left(-\frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{4}c_4 \right) \chi_{xx}\chi_{yy} + \left(\frac{9}{8}c_3 + \frac{3}{8}c_4 \right) \chi_{xy}^2 + \left(\frac{9}{8}c_3 + \frac{3}{8}c_4 \right) \chi_{yx}^2 + \right\} \\
 & \left. \left(-\frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{4}c_4 \right) \chi_{xy}\chi_{yx} \right\}, \\
 K_0 = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\rho_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[I_0 \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial t} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

где ρ_0 – поверхностная плотность массы, I_0 – поверхностная плотность осевого момента инерции графена.

Отметим, что все функции, участвующие в выражениях (3.6) и (3.7), являются функциями от (x, y, t) .

Таким образом, выражения (3.6) и (3.7) представляют собой поверхностные плотности потенциальной энергии деформации и кинетической энергии движения графена в рамках континуальной модели (в общем случае его деформирования). Вариационное уравнение Гамильтона для графе-

на в рамках построенной континуальной модели можем представить так:

$$\delta \iint_{(S)} (K_0 - U_0) dx dy = 0,$$
 где (S) – область, занятая графеном.

Отметим, что из указанного вариационного уравнения Гамильтона следуют отдельные уравнения движения и граничные условия для двух моделей:

- а) плоское напряжённое состояние графена в своей области деформирования;
- б) изгиб графена от своей плоскости.

4. Модели плоского напряженного состояния и изгибной деформации моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для тонкой пластинки. Определение упругих постоянных моментной теории упругости через параметры атомной структуры графена. Рассмотрим случаи а) и б) по отдельности. Отметим, что в [14] построены прикладные теории обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации пластин на основе моментной теории упругости.

Рассмотрим случай а). Сравнивая формулы (3.6), (3.7) с аналогичными формулами из [14] для обобщенного плоского напряженного состояния, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{9}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 \right) &= \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \right) = \frac{2E\nu}{1-\nu^2}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{8}c_1 + \frac{9}{8}c_2 \right) &= \mu + \alpha, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \right) &= 2(\mu - \alpha), \quad \frac{4\sqrt{3}}{9a} \cdot \frac{3}{2}c_3 = B. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Разрешив систему уравнений (4.1) относительно E, ν, μ, α и B , имеем:

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\sqrt{3}}{3a} \cdot \frac{c_1(c_1 + c_2)}{3c_1 + c_2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{6a} \cdot (c_1 + c_2), \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3a} \cdot c_2, \\ \nu &= \frac{c_1 - c_2}{3c_1 + c_2}, \quad B = \frac{2\sqrt{3}}{3a} \cdot c_3. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Равенства (4.2) определяют упругие постоянные плоского напряженного состояния моментной теории упругости через постоянные атомной структуры графена. Отметим, что соответствующие равенства из (4.2) обеспечивают известное равенство $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Случай деформации графена в своей плоскости отдельно рассмотрен в [11].

Рассмотрим случай б). Сравнивая формулы (3.6) (в случае изгиба) и (3.7) с аналогичными формулами из [14], для изгибной деформации получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{8}c_3 + \frac{9}{8}c_4 \right) &= \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(-\frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{4}c_4 \right) &= \frac{4\beta\gamma}{\beta + 2\gamma}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{9}{8}c_3 + \frac{3}{8}c_4 \right) &= \gamma + \varepsilon, \quad \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(-\frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{4}c_4 \right) = 2(\gamma - \varepsilon), \quad \frac{4\sqrt{3}}{9a} \cdot \frac{3}{2}c_2 = C. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из системы уравнений (4.3) определяются значения упругих постоянных $\gamma, \varepsilon, \beta$ и C :

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6a} (c_3 + c_4), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3a} c_3, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3a} \frac{c_4^2 - c_3^2}{3c_3 + c_4}, \quad C = \frac{2\sqrt{3}}{3a} c_2. \quad (4.4)$$

Отметим, что при изучении моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений всегда подразумевалось, что между γ, ε и β должна быть определенная связь, как между μ, E, ν $\left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$, но в литературе определения такой связи мы не встречали. В данной работе приводится выражение этой связи для структуры графена:

$$\beta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} 2\gamma. \quad (4.5)$$

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для общего случая его деформирования

Построены дискретная и континуальная (стержневая) модели линейной атомной цепочки, при этом считается, что силовое взаимодействие между атомами нецентральное и, кроме того, существует также независимое моментное взаимодействие. С помощью континуально-стержневой (микрополярной) модели линейной атомной цепочки взаимодействие между атомами в графене заменено взаимодействием со стержневой системой. Таким образом, получена дискретно-континуальная модель графена. На основе такой модели предельным переходом построена континуально-моментная модель графена, которая представляет собой

модель плоского напряжённого состояния пластинки и модель изгиба пластинки по микрополяриной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Определены упругие постоянные для этих континуально-моментных моделей.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Գրաֆենի ընդհանուր դեֆորմացիայի դեպքում նրա դիսկրետ-կոնտինուալ և կոնտինուալ-մոմենտային մոդելները

Կառուցված է ատոմների գծային շղթայի և՛ դիսկրետ, և՛ կոնտինուալ (ձողային) մոդելները՝ համարելով, որ ատոմների միջև փոխազդեցությունը ուժային տեսակետից ոչ կենտրոնական է, և բացի այդ առկա է նաև անկախ մոմենտային փոխազդեցություն: Օգտագործելով ատոմային գծային շղթայի կոնտինուալ ձողային մոդելը (միկրոպոլյար)՝ գրաֆենի ատոմների միջև փոխազդեցությունները փոխարինվում են նման ձողերից բաղկացած ձողային համակարգով, որը գրաֆենի դիսկրետ-կոնտինուալ մոդելն է: Մահմանային անցման միջոցով այս բնույթի մոդելի հիման վրա կառուցվում է գրաֆենի կոնտինուալ մոդելը, որը սալի ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության հարթ լարվածային վիճակի և ծուխան դեֆորմացիայի մոդել է: Որոշվում են կոնտինուալ-մոմենտային այս մոդելների առաձգական հաստատունները:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Discrete-Continual and Continual-Moment Models of Graphene for the General Case of Its Deformation

In this paper, at first, discrete and continual (beam) models of linear atomic chain are constructed, assuming that the force interaction between the atoms is non central and, in addition, there is also an independent moment interaction. Using the continual-beam (micropolar) model of the linear atomic chain, the interaction between the atoms in graphene is replaced by the interaction of the beam system. Thus, discrete-continual graphene model is obtained. Based on this model, the continual – moment model of graphene is constructed by the limit transition, which is a model of a plane stress state of a plate and a model of plate bending according to the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations. The elastic constants for these continual-moment models are determined.

Литература

1. Панин В. Е. (ред.) Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. В 2-х томах. Новосибирск. Наука. Т. 1.1995. 298 с.; Т. 2. 1995. 320 с.
2. Морозов Н. Ф. – Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 188-189.
3. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М. Физматлит. 2007. 304 с.

4. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.* – Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
5. *Кривцов А. М.* Теоретическая механика. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2009. 127 с.
6. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН РА. 2019. Т. 119. № 1. С. 40-50.
7. *Odegard G. M., Gates T. S., Nicholson L. M. et al.* – NASA Langley Research Center: Technical Memorandum NASA/TM-2001-210863. 2001.
8. *Гольдштейн Р. В., Ченцов А. В.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 57-74.
9. *Li C. A., Chou T. W.* – Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 2487-2499.
10. *Беринский И. Е.* – Научно-техн. ведомости СПбГПУ. 2010. № 104. С. 13-20.
11. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 5. С. 28-33.
12. *Жилин П. А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.
13. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 5. С. 41-54.
14. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 1. С. 129-147.

новываясь на составленном Тихо Браге (Tycho Brahe, 1546-1601) великолепном каталоге данных исключительно точных наблюдений по движению планет, в особенности по Марсу, Кеплер сформулировал сначала первые два из трех своих знаменитых законов, а через несколько лет и третий. Согласно первому закону Кеплера любая планета солнечной системы движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с Солнцем в одном из фокусов эллипса. Тем самым была опровергнута птолемеевская геоцентрическая модель движения. Согласно второму закону любая планета движется по орбите с постоянной секториальной скоростью, т.е. отрезок прямой, соединяющий планету с Солнцем, очерчивает равные площади за равные промежутки времени. Третий закон устанавливает связь между большой полуосью (a) эллипса и периодом (T), за который планета совершает полный оборот:
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$
 G – гравитационная по-

стоянная. Законы Кеплера воспринимаются как эмпирические. Спустя несколько десятилетий Ньютон (Isaac Newton, 1642-1717) математически вывел законы Кеплера и сформулировал знаменитый закон всемирного тяготения. Согласно этому закону сила всемирного тяготения центральная и каждая масса m притягивается другой массой M во Вселенной с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между массами, и направлена по линии, соединяющей центры масс. Важнейшим достижением Ньютона является и доказательство того, что орбитой тел, движущихся вокруг Солнца, может являться любая из кривых семейства конических сечений (окружность, эллипс, парабола, гипербола). В последующие десятилетия и столетия закон всемирного тяготения Ньютона получил множество убедительных и ярких подтверждений. Отметим некоторые из них. Эдмонд Галлей (Edmond Halley, 1656-1742) на основе закона всемирного тяготения Ньютона предсказал очередное появление в небе Земли (декабрь, 1758) наблюдаемой с древнейших времен (240 г. до н.э.) кометы Галлея (названа в его честь в 1759 г.; появляется в небе Земли с периодом 75-76 лет). Галлей поддерживал дружеские контакты с Ньютоном и на свои средства в 1687 г. опубликовал его знаменитый труд “Математические начала натуральной философии”, где впервые изложена теория всемирного тяготения Ньютона. Любопытно, что Галлей не дожил до даты своего предсказания. Однако его предсказание стало первым успешным подтверждением Небесной механики Ньютона и ясной демонстрацией ее предсказательной силы. Опираясь на закон Ньютона, Уильям Гершель (William Herschel, 1738-1822) открыл планету Уран (1781) и два спутника Сатурна (1789), измерил период вращения Сатурна и его колец (1790). Английский математик и астроном Адамс (John Adams, 1819-1892) и французский астроном и математик Леверье (Jean Le Verrier, 1811-1877), изучив неправильности в движении планеты Уран, пришли к выводу, что это есть результат влияния неизвестной еще планеты. Они независимо друг от друга вычислили ее положение и в 1846 г. открыли планету Нептун. Немецкий астроном Галле (Johann Galle, 1812-1910) обнаружил

планету на небе в месте, указанном Леверье. В XVIII в. было открыто множество малых планет – астероидов и спутников известных планет.

Несмотря на огромное множество успехов, некоторые явления по закону Ньютона были трудно объяснимы. В 1859 г. Леверье обнаружил некоторое расхождение орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий в перигее с результатами наблюдений. Известный американский астроном Саймон Ньюкомб (Simon Newcomb, 1835-1909), не найдя убедительных объяснений этого факта, в 1895 г. высказал мнение, что, возможно, закон обратных квадратов Ньютона не выполняется точно на малых расстояниях. После построения Эйнштейном (Albert Einstein, 1879-1955) общей теории относительности (ОТО) в 1917 г. было дано некое объяснение проблемы с Меркурием, и казалось проблема решена. Однако в 1965 г. Р. Дикке и М. Голденберг доказали, что Солнце не является шарообразным и его полярный диаметр на 35 км меньше экваториального. Это позволило объяснить часть остаточного смещения перигелия Меркурия, ставившего под сомнение согласие ОТО с результатами наблюдений.

Есть и вторая особенность создавшегося положения, которая связана с вопросом существования Черной дыры (“Темного тела”). Английский астроном-любитель, один из основателей сейсмологии Джон Митчелл (John Mitchell, 1724-1793) в 1783 г. и известный французский математик и механик Лаплас (Pierre Laplace, 1749-1827) в 1795 г. на основе теории тяготения Ньютона независимо друг от друга высказали мнение, что в природе должны существовать тела, необходимая скорость для преодоления притяжения которых должна превышать скорость света (c). Поэтому такие тела должны быть “темными”, т.е. невидимыми. Их можно обнаружить косвенным путем – гравитационным воздействием на другие тела. Митчелл и Лаплас вывели радиус “темного тела” $r_g = 2GM/c^2$ (гравитационный радиус) при заданной его массе, используя понятие второй космической скорости (скорости убегания). Сторонники ОТО подвергли критике рассуждения Митчелла и Лапласа в том плане, что при скоростях, близких к скорости света, формулы классической механики не применимы, хотя по обеим теориям получается одно и то же значение гравитационного радиуса r_g . Оппоненты же ОТО утверждают, что эта теория не применима, поскольку решение ее уравнений содержит сингулярность, недопустимую при описаниях естественных явлений. К сожалению, до последнего времени не было внесено приемлемой ясности в эти проблемы [1-4].

В [5, 6] установлен новый тип центрального взаимодействия, обобщающий Ньютоново взаимодействие всемирного тяготения. Это взаимодействие на коротких расстояниях более сильное, чем ньютоново, и практически совпадает с ним на больших расстояниях. Тем самым подтверждено предположение Ньюкомба. В данной работе изложены некоторые важные свойства потенциального поля, создаваемого обобщенно-ньюто-

новой силой всемирного тяготения [6], по-новому трактуется проблема Черных дыр (“Темного тела”).

1. Обобщенно-ньютоновое взаимодействие всемирного тяготения.

Пусть имеем тела с массами M, m . Поместим начало полярных координат (r, θ) в центре тела с массой M . Центральную силу взаимодействия между этими телами зададим в виде [5, 6]

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{k/r} \vec{r}}{r^2 |\vec{r}|}, \quad (1)$$

или

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{k/r}}{r^2}, \quad (2)$$

где G – гравитационная постоянная в законе Всемирного тяготения Ньютона ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$). Показатель k характеризует мощность (интенсивность) центра притяжения и имеет размерность длины. При $k = 0$ взаимодействие (1), (2) совпадает с ньютоновым ($F = -(GmM)/r^2$). Учитывая это, в (1) введен коэффициент GmM . При $k > 0$ взаимодействие (1) для коротких расстояний является более мощным, чем ньютоново. На больших расстояниях оба взаимодействия практически совпадают. Поскольку сила \vec{F} – центральная, траектория материальной точки массы “ m ” – плоская кривая и имеет место закон площадей. Создаваемое силой \vec{F} поле является потенциальным с потенциалом

$$U = -\frac{GmM}{k} e^{k/r} + const, \quad (3)$$

который существенно сильнее потенциала ньютонова поля ($U = -GmM/r$).

Используя теорему о кинетической энергии $\left(\frac{dmv^2}{2} = Fdv\right)$, согласно

(2) имеем

$$v^2 = \frac{2GM}{k} e^{k/r} + h, \quad (4)$$

где постоянная интегрирования h определяется из начального условия: при $r = r_0, v = v_0$

$$h = v_0^2 - \frac{2GM}{k} e^{k/r_0}. \quad (5)$$

Траектория движения тела массы m является коническим сечением [6]

$$r = \frac{1/k_1}{1 - \frac{k_2}{k_1} \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \theta_0)}, \quad (6)$$

где

$$k_1 = \frac{GM}{C^2 \delta_1}, \delta_1 = 1 - \frac{GMk}{C^2} > 0, \quad (7)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{kC^2 \delta_1^2} [GM + (GM + kh) \delta_1],$$

постоянная C равна величине момента начальной скорости относительно центра притяжения. Параметры конического сечения определяются по формулам:

$$p = \frac{1}{k_1} = \frac{C^2}{GM} - k, \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{C^2}{MGk} - 1 \right) \left(2 + \frac{hk}{MG} \right)},$$

траектория движения будет эллипсом, если

$$-\frac{MG}{k} \left(1 + \frac{C^2}{C^2 - MGk} \right) < h < -\frac{2GM}{k}, \quad (9)$$

полуоси эллипса определяются по формулам

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (10)$$

Траектория – парабола при $h = -\frac{2GM}{k}$ и гипербола при $h > -\frac{2GM}{k}$.

Используя формулу (5), условие $h < -\frac{2GM}{k}$ для эллиптической траектории запишем в виде

$$v_0^2 < v_*^2, v_*^2 = \frac{2GM}{r_0} \left(\frac{e^{k/r_0} - 1}{k/r_0} \right), \quad (11)$$

$\lim_{k \rightarrow 0} v_*^2 = \frac{2GM}{r_0} = V_N^2$, $V_N = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ – вторая космическая скорость (скорость

убегания) по теории Ньютона, т.е. начальная скорость, при которой тело массы m преодолевает притяжение тела с массой M . Если $k > 0$, из (11) следует $v_* > V_N$, т.е. при взаимодействии (1) скорость убегания больше классической.

Определим гравитационный радиус (R_g), который соответствует взаимодействию (1). Тело с массой M будет “Черной дырой” (“темным”, невидимым), если любое тело с массой m и начальной скоростью, даже равной скорости света “ c ”, не может преодолевать поле притяжения массы

M . Начальными условиями задачи будут при $r_0 = R_g$, $v_* = c$. Подставив эти условия в (11), обозначив $\lim_{k \rightarrow 0} R_g = r_g$, будем иметь

$$R_g = r_g \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \text{ или } \frac{R_g}{r_g} = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}, \quad (12)$$

где

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad \gamma = \frac{k}{R_g}, \quad (13)$$

т.е. r_g – известный гравитационный радиус при классическом центральном взаимодействии Ньютона. Является очевидным, что при $\gamma \neq 0$, $R_g > r_g$ и согласно (12) в зависимости от γ R_g может по сравнению с r_g быть сколь угодно большим [6] (см. график функции R_g / r_g , табл. 1, 2). Для Черной дыры взаимодействие (1) согласно (13) принимает вид

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{\frac{\gamma R_g}{r}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (14)$$

“Черные дыры” (более подходит, на наш взгляд, термин “Темные тела”) будут отличаться друг от друга гравитационным радиусом и интенсивностью притяжения γ . Согласно графику [6] функции R_g / r_g может существовать сколь угодно много “Черных дыр”. Астрономы и астрофизики доказали это [7-12], ибо в любой галактике имеется центр (предположительно “Черная дыра”), вокруг которого тоже вращаются звезды [13-15]. Масса такого тела по сравнению с массой Солнца (M_\odot), $\odot \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, весьма велика. Например, для Черной дыры $S50014+81$ $M = 4 \cdot 10^{10} \odot$ [16], для $NGC 6166$ $M = 3 \cdot 10^{10} \odot$ [17], для $NGC 1277$ $M = 1,2 \cdot 10^9 \odot$ [18], для Лебедя А $M = 1 \cdot 10^9 \odot$ [19]. Существование таких центров (образований) создает гармонию во Вселенной, по аналогии с гармонией в солнечной системе, но в крупных масштабах. Они, в частности, препятствуют “убеганию” звезд и их систем, тем самым препятствуя и расширению Вселенной. Обобщенно-ньютоновская теория всемирного тяготения оказалась способной внести ясность в эту сложную проблему, тем самым подчеркивая еще раз величие Ньютона.

2. О горизонте событий. Горизонтом событий называется граница (поверхность) области пространства, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть ее не могут объекты, даже движущиеся со

скоростью света (c). Обычно эта область считается сферой, радиус которой совпадает с гравитационным радиусом. Радиус, определенный из отношения площади поверхности S этой сферы к (4π) , называется гравитационным радиусом Шварцшильда (Karl Schwarzschild, 1873-1916), который ввел в 1916 г. понятие “горизонт событий”. По Хокингу (Stephen Hawking, 1942-2018) горизонт событий создается светом, который не в силах покинуть Черную дыру и поэтому “парит” на этом горизонте [20]. По теории Ньютона и по ОТО гравитационный радиус $r_g = 2GM/c^2$. Земля может стать Черной дырой, если каким-то способом всю ее массу удастся поместить в шаре радиусом 9 мм, для Солнца – 3 км, что трудно представить. При наличии же взаимодействия (1) гравитационный радиус R_g определяется по формуле (12), и его значение зависит как от массы, так и от показателя γ интенсивности поля. Выше мы показали, что R_g по сравнению с ньютоновым r_g может быть сколь угодно большим. Т.е. при взаимодействии (14) Черная дыра будет иметь правдоподобные размеры, что в принципе наблюдается в реальности для массивных Черных дыр [7-19]. Приняв же за основу вычислений гравитационный радиус Шварцшильда ($R_g^2 = S/4\pi$) и прогнозируемую наблюдениями массу M предполагаемой Черной дыры (некоторые данные приведены выше), сначала определим $r_g = 2GM/c^2$, затем R_g / r_g . После из соотношения (12) определяется значение показателя γ интенсивности силового поля (14), создаваемого Черной дырой. Таким образом, взаимодействие (14) позволяет сгруппировать (распределять) все известные (предполагаемые) Черные дыры (см. Соответствующий каталог) как по величине их масс, так и по радиусу горизонта событий R_g и показателя интенсивности притяжения γ .

По Ньютоновой теории всемирного тяготения средняя плотность Черной дыры ρ_N вычисляется по формуле $\rho_N = M/V$, $V = \frac{4}{3}\pi r_g^3$, где V – объем шара, соответствующему горизонту событий, т.е.

$$\rho_N = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} \quad (15)$$

В случае обобщенно-ньютонового взаимодействия (14) средняя плотность ρ Черной дыры вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_g^3} = \frac{\rho_N}{\lambda_\gamma^3}, \quad \lambda_\gamma = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}, \quad (16)$$

при $\gamma > 0, \lambda_\gamma > 1$ плотность Черной дыры в λ_γ^3 раз будет меньше плотности ρ_N . При $\gamma \gg 1, \rho \ll \rho_N$ объем Черной дыры

$$V_{ч.д.} = \frac{4}{3} \pi R_g^3 = \frac{4}{3} \pi r_g^3 \lambda_\gamma^3, \quad (17)$$

намного больше объема Черной дыры по теории Ньютона.

3. Об ускорениях тел в силовом поле тяготения (1). Силовое поле, создаваемое Ньютоновой силой всемирного тяготения ($F = -GM/r^2$), обладает тем примечательным свойством, что все тела, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра притяжения, вне зависимости от их размеров и масс, приобретают полев одинаковые ускорения [2]. Докажем, что этим свойством обладает также поле, создаваемое силовым взаимодействием (1).

Пусть тело с массой M является центром притяжения по (1), и имеем тела с массами m_1, m_2 , находящиеся на расстоянии r_0 от центра притяжения. Тогда согласно (2) при $r = r_0$ имеем

$$F_1 = -\frac{Gm_1 M e^{k/r_0}}{r_0^2}, \quad F_2 = -\frac{Gm_2 M e^{k/r_0}}{r_0^2}. \quad (18)$$

Следовательно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (19)$$

Согласно второму закону механики Ньютона

$$m_1 w_1 = F_1, \quad m_2 w_2 = F_2, \quad (20)$$

где w_1, w_2 – ускорения тел с массами m_1, m_2 . Отсюда следует

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{w_1}{w_2}. \quad (21)$$

Сопоставив (21) с (19), будем иметь, $w_1/w_2 = 1$, т.е. два тела, имеющие

произвольные массы m_1, m_2 и размеры, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра притяжения, приобретают под воздействием поля одинаковые ускорения.

Институт механики НАН РА
e.mail: lagal@sci.am

Академик Л. А. Агаловян

О свойствах гравитационного поля, обусловленного обобщенно-ньютоновой силой всемирного тяготения

Исследуется обобщенно-ньютоновое взаимодействие всемирного тяготения. Показано, что оно создает более мощное, чем ньютоновое, потенциальное поле.

Выведены условия, когда траектория тела есть коническое сечение, определена скорость убегания. Установлена связь предложенного подхода с проблемой Черных дыр (“Темного тела”), с “горизонтом событий”. Показано, что гравитационный радиус Черной дыры может быть в сколь угодно раз больше ньютонового гравитационного радиуса. Черная дыра подчиняется обобщенно-ньютоновому взаимодействию. Дана оценка плотности Черной дыры, ее объему.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան

**Համաշխարհային ձգողականության ընդհանրացված-նյուտոնյան ուժով
պայմանավորված գրավիտացիոն դաշտի հատկությունների մասին**

Ուսումնասիրվում է ընդհանրացված-նյուտոնյան ուժով պայմանավորված փոխազդեցությունը: Ցույց է տրված, որ համապատասխան պոտենցիալ դաշտն ավելի հզոր է, քան նյուտոնյանը: Արտածված են պայմաններ, երբ մարմնի հետագիծը կոնական հատույթ է, որոշված է փախչելու (II կոսմիկական) արագությունը, կապ է հաստատված Սև խոռոչների գոյության հետ, արտածված է բանաձև գրավիտացիոն շառավղի որոշման համար: Այն կարող է լինել ցանկացած անգամ մեծ նյուտոնյան գրավիտացիոն շառավղից:

Academician L. A. Aghalovyan

**On the Properties of the Gravitational Field Due to the Generalized
Newtonian Force of Universal Gravitation**

The generalized Newtonian interaction of universal gravitation is investigated. It is shown that it creates a more powerful than Newtonian potential field. The conditions are derived when the trajectory of the body is a conical section, the escape speed is determined. The connection of the proposed approach with the problem of Black Holes (“Dark Body”), with the “horizon of events” is established. It is shown that the gravitational radius of the Black Hole can be arbitrarily times greater than the Newtonian gravitational radius. The Black Hole obeys the generalized Newtonian interaction. The density of the Black Hole and its volume are estimated.

Литература

1. *Layzer D.* Constructing the Universe. New York. Scientific American Books. Inc. 1984 (*Лейзер Д.* Создавая картину Вселенной. М. Мир. 1988. 324 с.)
2. *Бергман П.* Загадка гравитации. М. Наука. Физматлит. 1969. 216 с.
3. *Куттель Ч., Найт В., Рудерман М.* Механика. М. Наука. 1975. 480 с.
4. *Wichmann E.* Quantum Physics. Berkeley Physics Course. Vol. IV. 1967. McGRAW-HILL Book Comp. (*Вихман Э.* Квантовая физика. М. Наука. 1977. 416 с.)
5. *Աղալովյան Լ. Ա.* – ДНАН РА. 2006. Т. 106. № 3. С. 238-244.
6. *Aghalovyan L.* – International Journal of Astronomy and Astrophysics. 2018. № 8. P.191-199.
7. *McConnell N., Ma C. et al.* – Nature. 2011. V. 480. P. 215-218.

8. *Ellis A.* – Black Holes – Part 1 – History. The Astronomical Society of Edinburgh Journal. 1999. V. 39.
9. *Helh F. W., Kiefer C. et al.* (Eds.). Black Holes: Theory and Observation. Germany. Springer. 1998.
10. *Serabyn E., Lacy J.* – The Astronomical Journal. 1985. V. 293. P. 445-458.
11. *Ferrarese L., Merritt D.* – Physics World. 2002. V. 15. 1. P. 4-6.
12. *Mitra A.* – International Journal of Astronomy and Astrophysics. 2012. № 2. P. 236-248.
13. *Eckart A., Genzel R.* – Nature. 1996. V. 383. P. 415-417.
14. *Gillessen S., Eisenhauer F. et al.* – The Astrophysical Journal. 2009. V. 692. P. 1075-1109.
15. *Genzel R., Schödel R. et al.* – The Astrophysical Journal. 2003. V. 594. P.812-832.
16. *Ghisellini G., Ceca R. et al.* – Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Journal Oxford University Press. 2010. V. 105. № 1. P. 397.
17. *Magorrian J., Tremaine S. et al.* – The Astronomical Journal. 1998. V. 115. № 6. P. 2285-2305.
18. *Graham A. W., Durre M. et al.* – The Astrophysical Journal, 2016. V. 819. № 1. P. 43.
19. Black Holes: Gravity's Relentless Pull interactive: Encyclopedia-Hubble Site. 2015.
20. *Хокинг Стивен.* Черные дыры и молодые вселенные. М. АСТ. 2018.176 с.

В электромембранных процессах в качестве управления используются различные комбинации ионообменных мембран, электрического напряжения, частоты и других параметров. Для экспериментальной работы предложена новая структура электромембранной системы, благодаря которой возможно проводить исследования в стационарном и динамическом режимах.

Оптимальный выбор режимов электрических параметров в данной электромембранной системе позволяет существенно повысить селективность разделения изотопов, что делает его применимым к изотопам как легких, так и тяжелых элементов. Изменяя частоту, напряжение и вид тока, удастся перемещать ${}^6\text{Li}$ быстрее, чем изотоп ${}^7\text{Li}$, благодаря его ионной подвижности.

Во время динамической работы системы исходный раствор лития находится в состоянии закрытой циркуляции, обеспечивая извлечение целевого изотопа. В электрохимической системе обогащению изотопа ${}^7\text{Li}$ способствует также извлечение изотопа ${}^6\text{Li}$ в отдельных камерах, что, однако, требует дальнейшей доработки для получения товарного вида. Соотношение изотопов лития, обогащенных электродиализом, в зависимости от частоты, количества мембран и импульсов при постоянном напряжении, измерялось с помощью ИСП-МС (масс-спектрометр с индуктивно-связанной плазмой). Масс-спектрометрический метод позволяет качественно и количественно анализировать химические элементы и их изотопы с точностью до нанограмм/литр.

В масс-спектрометре образец прокачивается через перистальтический насос при потоке аргона 0.8-1 л/мин, в результате чего образец распыляется и переходит в плазму. В ИСП-МС при температуре 5000-7000°C газообразный аргон, протекающий со скоростью 15-16 л/мин (чистота 99.998%), является источником ионов, и анализируемый образец ионизируется. Ионы разделяются по соотношению масса/заряд, затем регистрируются интенсивности, которые преобразуются в соответствующие концентрации с помощью аналогового преобразователя [4]. Для изотопного анализа применялся стандартный раствор Li-1000 мг/л «Perkin Elmer».

Для изучения влияния электрических характеристик на разделение изотопов в элементарной ячейке электродиализатора использовался осциллограф, способный записывать сигналы с частотой до 100 МГц и напряжением 10 мкВ, а также генератор импульсов и сигналы усилителя импульсов. Электрические характеристики, зарегистрированные осциллографом, приведены на рис.1: на разделе а) параметры, зарегистрированные на ячейке; на разделе б) параметры, зарегистрированные на сопротивлении. Это сопротивление вводится в цепь для измерения силы тока. Это также позволяет сравнивать форму реального импульса с формой импульсов в ячейке. Таким образом, можно понять закономерности электрохимических процессов в системе.

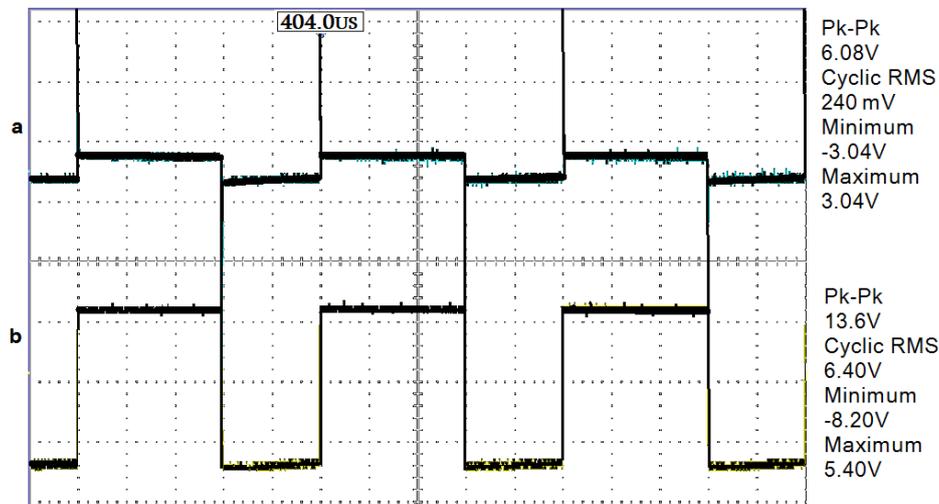


Рис. 1. Сигналы электрических характеристик на дисплее осциллографа и измеренные электрические характеристики (a – на ячейке, b – на сопротивлении).

Таблица 1

Изменение коэффициента обогащения изотопов лития в зависимости от параметров процесса

ν , гц	Период подачи напряжения τ_1 , мкс	Обратный период подачи напряжения τ_2 , мкс	Количество мембран	α
1000	800	200	1	1.432
1000	800	200	4	1.428
1000	800	200	8	1.425
1000	800	200	19	1.410
10000	80	20	1	1.422
10000	80	20	4	1.418
10000	80	20	8	1.420
10000	80	20	19	1.413
1000	600	400	1	1.428
1000	600	400	4	1.424
1000	600	400	8	1.426
1000	600	400	19	1.391
10000	60	40	1	1.425
10000	60	40	4	1.423
10000	60	40	8	1.310
10000	60	40	19	1.289

Примечание: α – коэффициент разделения изотопов $\alpha = \frac{n_1'/n_2'}{n_1/n_2}; n_1'/n_2' - {}^7\text{Li}/{}^6\text{Li}$, соотношение изотопов после разделения, n_1/n_2 – соотношение изотопов до разделения.

Кoeffициент разделения соотношения изотопов лития, обогащенных этим методом, в зависимости от частоты импульсов, количества мембран и значений импульса приведен в табл. 2. Как видно из результатов, представленных в таблице, коэффициент обогащения изотопов зависит от количества мембран – при 1000 Гц он больше, чем при 10 000 Гц, но изменения незначительные. Значение коэффициента обогащения изотопа лития, приведенное выше, существенно отличается от значений, полученных другими известными в настоящее время методами, в частности результата $\alpha = 1.148$, полученного в [5], который являлся лучшим показателем, что значительно ниже полученных нами результатов.

Описанный метод отличается высокой эффективностью для разделения изотопов как легких химических элементов (Li, Mg), так и средних и тяжелых элементов (Nd, Pb) [6].

Выводы. В работе определен коэффициент разделения изотопов лития на основе ряда параметров с помощью предложенного нового электро-мембранного метода.

Установлено, что коэффициент обогащения изотопов чувствителен к изменению количества мембран, и в малой степени – при изменении частоты электрического тока.

Предложенный метод отличается от других методов разделения изотопов эффективностью и простотой для использования в промышленных целях.

«Экоатом» ООО

e-mails: gabriel.armine@gmail.com, rafokost@mail.ru,
martoian@yahoo.com

А. В. Габриелян, Р. К. Костанян, Г. А. Мартоян

Разделение изотопов лития электро-мембранным методом

Предложен новый, электро-мембранный, метод обогащения изотопов лития. Представлены результаты процесса обогащения изотопов лития при различных значениях рабочих параметров экспериментальной установки. Соотношение изотопов лития измерено методом масс-спектрометрии с индукционно-связанной плазмой. Предложенный метод отличается высокой производительностью и большим значением коэффициента обогащения изотопов лития.

Ա. Վ. Գաբրիելյան, Ռ. Կ. Կոստանյան, Գ. Ա. Մարտոյան

Լիթիումի իզոտոպների առանձնացումը էլեկտրամեմբրանային եղանակով

Նկարագրված է լիթիումի իզոտոպների հարստացումը նոր՝ էլեկտրամեմբրանային եղանակով: Ներկայացված է էլեկտրադիալիզատորում էլեկտրամեմբրանային եղանակով լիթիումի իզոտոպների հարստացման գործընթացի իրականացումը աշ-

խատանքային պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում: Լիթիումի իզոտոպների հարաբերությունը չափվել է ինդուկցիոն կապված պլազմայով մաս-սպեկտրաչափական մեթոդով: Առաջարկված մեթոդն առանձնանում է իր արդյունավետությամբ լիթիումի իզոտոպների ստացման այլ մեթոդների համեմատ:

A. V. Gabrielyan, R. K. Kostanyan, G. A. Martoyan

Separation of Lithium Isotopes by the Method of Electromembrane

The new electromembrane method is proposed for enrichment of lithium isotopes. There are presented the results of the enrichment process of lithium isotopes at various values of the operating parameters. The ratio of lithium isotopes was measured by the method of induction-coupled plasma mass spectrometry. The proposed method is characterized by high productivity and high value of the enrichment coefficient of lithium isotopes.

Литература

1. *Norman E. Holden.* – Chemistry International. Newsmagazine for IUPAC. 2010. V. 32(1). P. 12-14.
2. *Calvo E. J.* – Curr. Opin. Electrochem. 2019. V. 15. P.102–108.
3. *Saario T., Tähtinen S., Piippo J.* – Corrosion. 1997. V. 53(9). P. 724-729.
4. *Գաբրիելյան Ա. Վ.* – Հայաստանի ճարտարագիտական ակադեմիայի լրագրեր, 2016, հ. 13, № 1, էջ 164-168:
5. *Martoyan G., Kalugin M., Gabrielyan A. et al.* – In: IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2016. V. 112. P. 012035.
6. *Գաբրիելյան Ա. Վ., Մարտոյան Գ. Ա.* – Հայաստանի ճարտարագիտական ակադեմիայի լրագրեր, 2018, հ. 15, № 4, էջ 660-663:

Գաղտններ հեղինակների համար

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Ջեկոյցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չհրատարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ:
2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն: Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով:
3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն լեզվով: Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ:
4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ mas@sci.am) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ): Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5: Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով:

*Հանդեսի համառոտ անունը՝
ՀՀ ԳԱԱԶ*

Правила для авторов

1. «Доклады Национальной академии наук Армении» выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.
2. Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.
3. Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.
4. Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: mas@sci.am) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5.
5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

*Сокращенное название журнала
ДНАН РА*

Guidelines for Authors

1. "The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.
2. Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.
3. Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.
4. It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: mas@sci.am) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5.
5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

*The abbreviated name of the journal is
DNAS RA*