ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2019

Ереван Երևան Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:http://elib.sci.am e-mail: rnas@sci.am

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

MATHEMATICS

УДК 519.7

D. S. Sargsyan

On Effective Implementation of Recognition Algorithms for Calculating Estimates

(Submitted by academician Yu. H. Shoukourian12/XII 2018)

Keywords: *recognition problem, estimation algorithms.*

1. Introduction. The statement of the recognition problem is given in [1]. Let $M = \bigcup_{i=1}^{l} K_i \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n, n > 1$, where M_i is a metric space with a metric $d_i, i = 1,2, \ldots, n$, be the set of admissible objects. Subsets K_i are called classes and $K_i \neq \emptyset, i = 1,2, \ldots, l$.

For an admissible object S classification is done by calculating estimates $\Gamma_i(S)$ to the class K_i. Each algorithm in a model is determined by choosing a system of supporting sets, a proximity function, weights of the admissible objects, weights of the attributes, and a decision rule. The system of supporting sets Ω_A of an algorithm A is a nonempty set of subsets of $\{1,2, \ldots, n\}$. Each element $\Omega \in \Omega_A$ can be described by its characteristic vector $\omega_\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, where $\omega_\Omega^i = 1$ if and only if $i \in \Omega$. Denote $W_{\Omega_A} = \{\omega_\Omega \mid \Omega \in \Omega_A\}$.

In each algorithm A integers $q_1, q_2 \geq 0$ and $\varepsilon_i \geq 0, i = 1,2, \ldots, n$ are fixed. For admissible objects $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n), S' = (s_1', s_2', \ldots, s_n')$, and a supporting set Ω the proximity function $B(\Omega, S, S')$ is defined as

$$B(\Omega, S, S') = \begin{cases} 1, & (\delta \cdot \omega_\Omega) \geq q_1, (\overline{\delta} \cdot \omega_\Omega) \leq q_2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

where $\delta = \delta(S, S') = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ such that

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & d_i(s_i, s_i') \leq \varepsilon_i \\ 0, & d_i(s_i, s_i') > \varepsilon_i \end{cases}$$

Let $\gamma(S)$ be the weight of an admissible object S. Denote the weight of the attribute $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ by $\mu_i \geq 0$. The weight of a supporting set $\Omega = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ is defined as $\mu(\omega_\Omega) = \mu_{i_1} + \mu_{i_2} + \cdots + \mu_{i_k}$. The estimate $\Gamma_i(S)$ is defined as

$$\Gamma_i(S) = \frac{1}{F|K_i|} \sum_{S' \in K_i} \gamma(S') \sum_{\Omega \in \Omega_A} \mu(\omega_\Omega) B(\Omega, S, S') \quad (1)$$

where F is a normalizing factor. Formula (1) is practically inefficient because the number of terms in the inner sum may be exponentially large. The following formula is proposed for the calculation of the estimates [2]:

$$\Gamma_i(S) = \frac{1}{F|K_i|} \sum_{S' \in K_i} \gamma(S') \sum_{i=1}^{n} \mu_i Q_i(S, S') \quad (2)$$

where $Q_i(S, S') = |\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega,\ B(\Omega, S, S') = 1|$. Now the number of summations in (2) is not greater than n. If the number of distinct values of $Q_i(S, S')$ is small, then the calculation of the inner sum almost disappears. Hence (2) is an effective formula for the estimates calculation.

By $\|\alpha\|$ we denote the number of ones in a binary vector α. For binary vectors α and β, $\alpha + \beta$ denotes the logical XOR operation.

Suppose $\delta_i = 1$ if and only if $i \in \Delta = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}, j_1 < j_2 < \dots < j_m$. For $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ denote $\alpha^1 = \left(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_m}\right)$ and $\alpha^2 = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_{n-m}})$, where $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-m}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Delta,\ k_1 < k_2 < \dots < k_{n-m}$. Then

$$B(\Omega, S, S') \equiv B(\Omega, \delta, \Delta, q_1, q_2) = \begin{cases} 1, & \left\|\delta^1 + \omega_\Omega^1\right\| \le |\Delta| - q_1, \left\|\delta^2 + \omega_\Omega^2\right\| \le q_2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

The latter defines $B(\Omega, \delta, \Delta, q_1, q_2)$ even when δ and Δ are not related, i.e. $B(\Omega, \delta, \Delta, q_1, q_2)$ is defined for $\forall \delta \in E^n, \forall \Omega, \Delta \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall q_1, q_2 \ge 0$. Unless otherwise stated, we assume that δ and Δ are not related.

Define $Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) = |\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega,\ B(\Omega, \delta, \Delta, q_1, q_2) = 1|$, $\tilde{\imath}(\Omega_A) = \{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega\}$ and $\overline{Q}_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) = |\tilde{\imath}(\Omega_A)| - Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)$.

Definition 1.1. *A system Ω_A of supporting sets is said to have rank k, if $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| \le k$, for $\forall \delta \in E^n, \forall \Delta \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \forall q_1, q_2 \ge 0$, and $\left|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)\}_{i=1}^n\right| = k$ for some $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$.*

Definition 1.2. *A system Ω_A of supporting sets is said to have Δ-rank k, if $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2)\}_{i=1}^n| \le k$, for $\forall \delta \in E^n, \Delta = \{i \mid \delta_i = 1\}, \forall q_1, q_2 \ge 0$, and $\left|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)\}_{i=1}^n\right| = k$ for some $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$, $\Delta^0 = \{i \mid \delta_i^0 = 1\}$.*

The rank and the Δ-rank of the system Ω_A are denoted by $R(\Omega_A)$ and $R_\Delta(\Omega_A)$ respectivally. Clearly $R_\Delta(\Omega_A) \le R(\Omega_A)$.

Definition 1.3. *A system Ω_A of supporting sets is called absolutely reducible if $|\tilde{\imath}(\Omega_A)| \le 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ or $|\tilde{\imath}(\Omega_A)| \ge n - 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Definition 1.4. *A system Ω_A of supporting sets is called absolutely symmetric if for each $\Omega \in \Omega_A$ it follows that $E_n^{\|\omega_\Omega\|} \subseteq W_{\Omega_A}$.*

Definition 1.5. *A system Ω_A of supporting sets is called internal if $\varnothing \notin \Omega_A$ and $\{1, 2, \dots, n\} \notin \Omega_A$.*

Clearly, when considering the rank and the Δ-rank of a system Ω_A, without loss of generality we may assume that Ω_A is internal. The following theorem is due to [3]:

Theorem 1.6. *Given an internal system Ω_A of supporting sets, $R_\Delta(\Omega_A) \leq 2$ if and only if Ω_A is either absolutely reducible or absolutely symmetric.*

For the rest of the paper we will assume that Ω_A is internal. If Ω_A is absolutely symmetric then $R(\Omega_A) \leq 4$ [2]. Thus, for absolutely reducible and absolutely symmetric supporting sets we only have upper bounds for $R(\Omega_A)$ and $R_\Delta(\Omega_A)$. In section 2 we calculate the exact values of $R(\Omega_A)$ and $R_\Delta(\Omega_A)$ for these supporting sets. Finally, in section 3 we suggest a general method for constructing effective algorithms.

2. Ranks of absolutely reducible and absolutely symmetric supporting sets. Proposition 2.1. *If Ω_A is absolutely symmetric, then $R_\Delta(\Omega_A) = 2$.*

Proof. Let $\delta = (0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n\}$, $q_1 = q_2 = 0$. Then $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 0$ and $Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2) \neq 0, i \neq 1$ and $R_\Delta(\Omega_A) = 2$.

Proposition 2.2. *If Ω_A is absolutely reducible, then $R(\Omega_A) = R_\Delta(\Omega_A) = 2$.*

Proof. If $|\tilde{\imath}(\Omega_A)| \neq |\tilde{\jmath}(\Omega_A)|$ for some $i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j$, then taking $\forall\delta \in E^n, q_1 = 0, q_2 = n$ we have $R_\Delta(\Omega_A) = 2$. Otherwise, we take the same approach as in the proof of proposition 2.1.

It is easy to see that $R(\Omega_A) \leq 2$. Thus we also have $R(\Omega_A) = 2$.

To calculate the ranks of absolutely symmetric supporting sets we need a few lemmas. To avoid considering various trivial cases we will assume that $n > 5$.

Lemma 2.3. *For $W_{\Omega_A} = E_n^2$ we have $R(\Omega_A) = 4$.*

Proof. Let $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = 1, q_2 = 1$. Then $\delta^1 = (0,0,1,\dots,1), \delta^2 = (0,1)$ and

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2) = \begin{cases} 1, & \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| \leq n-3, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \leq 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Since $\delta^1 \in E^{n-2}, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-3$ means $\omega_\Omega^1 = \overline{\delta^1} = (1,1,0,\dots,0)$. As $\omega_\Omega \in E_n^2$, the latter implies $\omega_\Omega = (0,1,1,0,\dots,0)$. Now

$$\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid 1 \in \Omega, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| > 1\}\right| = \binom{n-2}{1} = n-2$$

and

$$\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid 1 \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-3, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \leq 1\}\right| = 0$$

Hence $\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-2$. For $\bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2)$ we have

$$\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid 2 \in \Omega, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| > 1\}\right| = 1$$

and

$$\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid 2 \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-3, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \leq 1\}\right| = 1$$

Therefore, $\bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 2$. Similarly, we get $\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 1$ and $\bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 0$. From

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) > \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

it follows that

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

and $R(\Omega_A) = 4$.

Lemma 2.4. *For $W_{\Omega_A} = E_n^3$ we have $R(\Omega_A) = 4$.*

Proof. Let $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = 1, q_2 = 1$. In the same way as in lemma 2.3, we can show that

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-2}{2}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-2$$

$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-3, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 1$$

Hence $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$ and $R(\Omega_A) = 4$.

Corollary 2.5. *If $W_{\Omega_A} = E_n^2$ or $W_{\Omega_A} = E_n^3$ then for $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ we have $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$.*

Lemma 2.6. *For $W_{\Omega_A} = E_n^k, 3 < k < n-1$ we have $R(\Omega_A) = 4$.*

Proof. Let $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = k-3, q_2 = 1$. Then $\delta^1 = (0,0,1,\dots,1), \delta^2 = (0,1)$ and

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2) = \begin{cases} 1, & \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| \le n-k+1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

The value of $\binom{m}{l}$, where $l < 0$, is considered to be zero.

Again, by considering $\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| > 1\}\right|$ and $\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-k+1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1\}\right| = 0$ for $i = 1,2,4,n$, we get

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-4}{k-4}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-4}{k-4},$$

$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-5}{k-5}, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-4}{k-4}$$

Hence,

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$$

and $R(\Omega_A) = 4$.

Corollary 2.7. *Let $W_{\Omega_A} = E_n^k, \delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}$, $q_1 = k-3, q_2 = 1$. The following assertions hold:*

(i) If $5 \le k < n-2$, then

$$Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2, Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2,$$

$$Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) > 2.$$

(ii) If $5 \le k = n-2$ then

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - 1.$$

(iii) If $4 = k < n-1$ then

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2).$$

Proof. From the proof of lemma 2.6 we have

$$Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-1}$$

$$Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-5}{k-4}$$

$$Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-5}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}$$

The statement of the corollary immediately follows.

Lemma 2.8. *If* $W_{\Omega_A} = E_n^k, 4 < k < n-1$, *then for* $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, 1 \le q_1 < k-3, q_2 = 1$ *we have* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$.

Proof. By definition,

$$B(\Omega,\delta,\Delta,q_1,q_2) = \begin{cases} 1, & \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| \le n-2-q_1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

From $1 \le q_1 < k-3$ it follows that

$$\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-2-q_1, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1\}\right|$$
$$\le \left|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^1 + \omega_\Omega^1\| > n-k+2, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| \le 1\}\right| = 0$$

for each $i = 1,2,\dots,n$.

Hence, we only consider $\left|\{\Omega \in \Omega_A \mid i \in \Omega, \|\delta^2 + \omega_\Omega^2\| > 1\}\right|$ for $i = 1,2,4,n$, and

$$\bar{Q}_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-2}{k-1}, \bar{Q}_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2},$$
$$\bar{Q}_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = \binom{n-3}{k-2}, \bar{Q}_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = 0.$$

Thus,
$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$ and the proof is completed.

The following lemmas can be proven similarly.

Lemma 2.9. *If* $W_{\Omega_A} = E_n^1$ *or* $W_{\Omega_A} = E_n^{n-1}$, *then for* $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ *we have* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2)$.

Lemma 2.10. *Let* $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = n-5, q_2 = 1, n > 6$. *If* $W_{\Omega_A} = E_n^1$ *then* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) \le Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2), |Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) - Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2)| \le 1$. *If* $W_{\Omega_A} = E_n^{n-1}$ *then* $Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) = Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) = Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-2$, $Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2) = n-1$.

Proposition 2.11. *If* Ω_A *is absolutely symmetric then*

$$R(\Omega_A) = \begin{cases} 2, & if\ W_{\Omega_A} = E_n^1\ or\ W_{\Omega_A} = E_n^{n-1} \\ 3, & if\ W_{\Omega_A} = E_n^1 \cup E_n^{n-1} \\ 4, & otherwise \end{cases}$$

Proof. The first case follows from proposition 2.2. Fix (δ,Δ,q_1,q_2) and consider the second case. Note that if $\{Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\}_{i=1}^n = \{a,b\}$ for $W_{\Omega_A} = E_n^{n-1}$, then $|a-b| = 1$. Since $|\{Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\}_{i=1}^n| = 2$ for $W_{\Omega_A} = E_n^1$ implies that $\{Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\}_{i=1}^n = \{0,1\}$, we have $|\{Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)\}_{i=1}^n| < 4$ for $W_{\Omega_A} = E_n^1 \cup E_n^{n-1}$. Again taking $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1), \Delta = \{2,3,\dots,n-1\}$, $q_1 = q_2 = 1$ yields $R(\Omega_A) = 3$.

For the third case, first suppose that $W_{\Omega_A} \cap (E_n^2 \cup E_n^3 \cup E_n^4) = \emptyset$. Let $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}$, $q_1 = \min\{|\Omega| \mid \Omega \in \Omega_A, |\Omega| \ne 1, |\Omega| \ne n-1\} - 3$, $q_2 = 1$. If $W_{\Omega_A} \cap (E_n^1 \cup E_n^{n-1}) = \emptyset$ then

$$Q_1(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_2(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_4(\delta,\Delta,q_1,q_2) < Q_n(\delta,\Delta,q_1,q_2),$$

and therefore $R(\Omega_A) = 4$, follows straight from corollary 2.7 and lemma 2.8. Now if $W_{\Omega_A} \cap (E_n^1 \cup E_n^{n-1}) \neq \emptyset$ then from corollary 2.7, lemma 2.8, and lemma 2.10 follows that we again have

$$Q_1(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_2(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_4(\delta, \Delta, q_1, q_2) < Q_n(\delta, \Delta, q_1, q_2)$$

and $R(\Omega_A) = 4$.

Finally, if $W_{\Omega_A} \cap (E_n^2 \cup E_n^3 \cup E_n^4) \neq \emptyset$, we choose $\delta = (0,0,0,1,1,\dots,1)$, $\Delta = \{2,3,\dots,n-1\}, q_1 = q_2 = 1$ and $R(\Omega_A) = 4$ follows at once from corollary 2.5, corollary 2.7, lemma 2.8, and lemma 2.9.

3. A General Method for Constructing Effective Algorithms. Let Ω_A be a supporting set, $M \subseteq N \equiv \{1,2,\dots,n\}$, and G be a subgroup of the symmetric group S_M. For $\sigma \in G$ and $\omega_\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in W_{\Omega_A}$ define $\sigma\omega_\Omega = (\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_n)$ as

$$\upsilon_i = \begin{cases} \omega_i, & if\ i \notin M \\ \omega_{\sigma^{-1}(i)}, & if\ i \in M \end{cases}$$

Definition 3.1. *$G(\Omega_A) = \{\sigma \in S_N \mid \sigma\omega_\Omega \in W_{\Omega_A}\}$ is the invariant group of Ω_A.*

For $\sigma \in S_M$ define $\bar{\sigma} \in S_N$ as

$$\bar{\sigma}(i) = \begin{cases} i, & if\ i \notin M \\ \sigma(i), & if\ i \in M \end{cases}$$

For $G \leq S_M$ denote $\bar{G} = \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in G\}$.

Definition 3.2. *Let $G \leq S_M$. We say Ω_A is invariant under G over M, if $\bar{G} \leq G(\Omega_A)$.*

Definition 3.3.*We say that Δ-rank of Ω_A over M is equal to k and write $R_\Delta^M(\Omega_A) = k$, if $|\{Q_i(\delta, \Delta, q_1, q_2) \mid i \in M\}| \leq k$, for $\forall \delta \in E^n, \Delta = \{i \mid \delta_i = 1\}, \forall q_1, q_2 \geq 0$, and $\left|\{Q_i(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0) \mid i \in M\}\right| = k$ for some $(\delta^0, \Delta^0, q_1^0, q_2^0)$, $\Delta^0 = \{i \mid \delta_i^0 = 1\}$.*

Theorem 3.4. *Suppose $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k = N, N_i \cap N_j = \emptyset, i \neq j$, $\bar{G}_1 \times \bar{G}_2 \times \dots \times \bar{G}_k \leq G(\Omega_A)$, so that Ω_A is invariant under G_i over N_i, and $R_\Delta^{N_i}(\Omega_A) \leq k_i$. Then $R_\Delta(\Omega_A) \leq \sum_{i=1}^{k} k_i$.*

The case $G_i = S_{N_i}$ is considered in [2]. Thus, this is a natural generalization of [2]. It is proven that for $G_i = S_{N_i}$ we have $R_\Delta^{N_i}(\Omega_A) \leq 2$. Let us consider another example. Suppose $M = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\} \subseteq N, i_0 < i_1 < \dots < i_{m-1}$ and π_M is the cyclic permutation $\pi_M = (i_0 i_1 \dots i_{m-1})$ defined over M. Denote $C_M = <\pi_M> = \{\pi_M^t \mid t \in Z\}$ and

$W_{\Omega_A}^M = \{(\omega_{i_0}, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{m-1}}) \mid (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in W_{\Omega_A}\}$.

Definition 3.5. A system Ω_A of supporting sets is circulant on M if $W_{\Omega_A}^M = \{\sigma\omega^0 \mid \sigma \in C_M\}$, where $\omega^0 = (1,1,\dots,1,0,0,\dots,0) \in E^m, \|\omega^0\| = k, 1 \leq k \leq m-1$. The weight of M is denoted by $\psi(M)$ and is equal to k.

Clearly, if Ω_A is circulant on M then Ω_A is invariant under C_M over M. Let Ω_A be circulant on M and $\psi(M) = k$. For $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ and $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ define

$$l(M,\delta,j)=\left(\delta_{i_{(j-k+1)\,mod\,m}},\delta_{i_{(j-k+2)\,mod\,m}},\dots,\delta_{i_{(j+k-1)\,mod\,m}}\right)$$
$$=(l_1,l_2,\dots,l_{2k-1}).$$

For example if $n=10, M=\{1,2,\dots,10\}, k=3, l(M,\delta,5)=(\delta_4,\delta_5,\delta_6,\delta_7,\delta_8)$ and $l(M,\delta,9)=(\delta_8,\delta_9,\delta_{10},\delta_1,\delta_2)$. For $x=(x_1,x_2,\dots,x_{2k-1})\in E^{2k-1}$ denote $y_i=(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-1}), 1\le i\le k$ and consider the multiset $W(x)=\{\|y_1\|,\|y_2\|,\dots,\|y_k\|\}$. The following proposition follows from the definition of $B(\Omega,S,S')$:

Proposition 3.6. *If* $W\big(l(M,\delta,j)\big)=W\big(l(M,\delta,k)\big)$ *for some* $j,k\in\{0,1,\dots,m-1\}$, *then for* $\Delta=\{i\mid\delta_i=1\}$ *and* $q_1,q_2\ge 0$ *we have* $Q_{i_j}(\delta,\Delta,q_1,q_2)=Q_{i_k}(\delta,\Delta,q_1,q_2)$.

Define an equivalence relation on vectors of length $2k-1$: $x\sim y$ if and only $W(x)=W(y)$. Denote the number of equivalence classes by c_k.

Proposition 3.7. *If* Ω_A *is circulant on* M, *then* $R_\Delta^M(\Omega_A)\le c_k$.

Thus, finding the number of equivalence classes gives an upper bound on the number of distinct values of $Q_i(\delta,\Delta,q_1,q_2)$ on M.

Proposition 3.8. $c_k=(k+3)2^{k-2}$.

Proof. Say $H_1,H_2,\dots,H_{C_k}$ are the equivalence classes: $W(x)=W(y)$ for $x,y\in H_j, j=1,2,\dots,c_k$. Consider sequences $a_1a_2\dots a_k$ that satisfy the following conditions:

$$\begin{cases}0\le a_i\le k, i=1,2,\dots,k\\ a_i\le a_{i+1}\le a_i+1, i=1,2,\dots,k-1\end{cases}\qquad(3.1)$$

Let us show that for each sequence that satisfies (3.1) there is a class H_j, such that $a_i=\|(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-1})\|, i=1,2,\dots,k$ for some $x\in H_j$.

We apply induction on k. For $k=1$ the assertion holds. Now let $k>1$ and assume the assertion is true for smaller values. There are the following two cases to consider:

Case 1: $a_{k-1}<k$.

By the induction hypothesis there is $x\in E^{2k-3}$ such that $a_i=\|(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-2})\|, i=1,2,\dots,k-1$. Then for $\tilde{x}=(x_1,x_2,\dots,x_{k-2},0,x_{k-1},\dots,x_{2k-3},a_k-a_{k-1})\equiv(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{2k-1})$ we have $a_i=\|(\tilde{x}_i,\tilde{x}_{i+1},\dots,\tilde{x}_{i+k-1})\|, i=1,2,\dots,k$.

Case 2: $a_{k-1}=k$.

Now we have $a_{k-1}=a_k=k$. Consider $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{2k-1})$ where

$$\tilde{x}_i=\begin{cases}1-(a_{i+1}-a_i), & if\ 1\le i\le k-2\\ 1, & if\ k-1\le i\le 2k-1\end{cases}$$

Note that $a_i=\|(\tilde{x}_i,\tilde{x}_{i+1},\dots,\tilde{x}_{i+k-1})\|, i=1,2,\dots,k$.

Thus, there is one to one correspondence between the equivalence classes and the set of sequences satisfying (3.1). Hence, it all comes down to counting the number of sequences satisfying (3.1).

Let S_k denote the set of all sequences that suffice (3.1). We consider two cases similar to what we just have considered. If $a_1,a_2,\dots,a_k\in S_k$, then sequences $a_1,a_2,\dots,a_k,a_k$ and $a_1,a_2,\dots,a_k,a_k+1$ belong to S_{k+1}. Thus, in

S_{k+1} it remains to count the number of sequences ending with two $k+1$, i.e. the number of sequences satisfying

$$\begin{cases} 0 \le a_i \le k+1, i = 1,2,\dots,k+1 \\ a_i \le a_{i+1} \le a_i + 1, i = 1,2,\dots,k-1 \\ a_k = a_{k+1} = k+1 \end{cases} \tag{3.2}$$

For each such sequence there is $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}) \in E^{2k+1}$ for which $a_i = \|(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k})\|, 1 \le i \le k+1$. From $a_k = a_{k+1} = k+1$ it follows that $x_i = 1, i = k, k+1, \dots, 2k+1$. The latter implies that the $a_i \le a_{i+1} \le a_i + 1, i = 1,2,\dots,k-1$ condition is met for every value of $x_i, i = 1,2,\dots k-1$. Note that for each $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ we get a different sequence. Hence the number of sequences satisfying (3.2) is 2^{k-1}. Combining the two cases we get $c_{k+1} = 2c_k + 2^{k-1}$. Solving the recurrence relation proves the proposition.

Corollary 3.9. *Let* $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k = N, N_i \cap N_j = \varnothing, i \ne j$ *and* Ω_A *be circulant on* $N_i, n_i = |N_i|$, *with* $\psi(N_i) = k_i, i = 1,2,\dots,k$. *Then* $R_\Delta(\Omega_A) \le \sum_{i=1}^{k} min(n_i, (k_i+3)2^{k_i-2})$.

The upper bound given in corollary 3.9 is only helpful if $\psi(N_i)$ are very small compared to $|N_i|$. For these cases we may even have equality, i.e. the upper bound in corollary 3.9 is achievable.

Proposition 3.10. The upper bound in corollary 3.9 is exact.

Proof. Let $n = 4t, t > 3, k = 2, N_1 = \left\{1,2,\dots,\frac{n}{2}\right\}$,

$N_2 = \left\{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n\right\}, \psi(N_1) = 1, \psi(N_2) = 2.$

Choose $q_1 = 0, q_2 = 1, \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, where

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le i \le \dfrac{n}{4}\ \ or\ i = \dfrac{n}{2}+1\ or\ \dfrac{n}{2}+3 \le i \le \dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

For example, if $n = 16, \delta = (1,1,1,1,0,0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0)$.

Then $Q_1(\delta, \Delta, q_1, q_2) = \frac{n}{4}+2, Q_{\frac{n}{4}+1}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = \frac{n}{4}-2$,

$Q_{\frac{n}{2}+1}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = \frac{n}{2}, Q_{\frac{n}{2}+3}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = \frac{n}{2}+\frac{n}{4}$,

$Q_{\frac{n}{2}+4}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = n, Q_{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+2}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = \frac{n}{4}, Q_{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+3}(\delta, \Delta, q_1, q_2) = 0$,

and $R_\Delta(\Omega_A) = (k_1+3)2^{k_1-2} + (k_2+3)2^{k_2-2} = 7$.

Theorem 3.11. *Suppose* $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k = N, N_i \cap N_j = \varnothing, i \ne j, \Omega_A$ *is invariant under* $S_{N_i}, i = 1,2,\dots,t$, *and is circulant on* $N_j, n_j = |N_j|$, *with* $\psi(N_j) = k_j, j = t+1, t+2, \dots, k$. *Then* $R_\Delta(\Omega_A) \le 2t + \sum_{j=t+1}^{k} \min(n_j, (k_j+3)2^{k_j-2})$.

Yerevan State University
e-mail: davit.sargsyan.1993@gmail.com

D. S. Sargsyan

On Effective Implementation of Recognition Algorithms for Calculating Estimates

In this paper the exact values of the ranks for some systems of supporting sets are calculated. A general method for constructing effective algorithms is suggested.

Դ. Ս. Սարգսյան

Ճանաչողական ալգորիթմների արդյունավետ իրականացումը գնահատականների հաշվման համար

Հաշվվում են ռանգերի ճշգրիտ արժեքները որոշ օգնող բազմությունների համար։ Առաջարկվում է արդյունավետ ալգորիթմների կառուցման ընդհանուր մեթոդ։

Д. С. Саргсян

Об эффективной реализации алгоритмов распознавания для вычисления оценок

Вычислены конкретные значения рангов для некоторых систем опорных множеств. Предлагается общий подход построения эффективных алгоритмов.

References

1. *Zhuravlev Yu.I.* – Probl. Kibern. 1978. N 33. P. 5-68.
2. *Aleksanyan A.A., Zhuravlev Yu.I.* Zh. – Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1985. V. 25. N 2. P. 283-291.
3. *D'yakonov A.G.* – Doklady Mathematics. 2000. V. 61. N 2. P. 312-314.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

MATHEMATICS

УДК 517.518.86

L. Z. Gevorgyan

On Two Extremal Problems

(Submitted by academician V. S. Zakaryan 9/I 2019)

Keywords: *extremal properties of polynomials, convex sets, biorthogonal systems, Kolmogorov widths.*

Let X be a normed space, $\{f_k\}_1^n$ $(n = \dim X \geq 2)$ be a set of linear independent elements from X. Denote by $\Pi_n = \left\{z : z \in \mathbb{C}^n : \max\limits_{1\leq k\leq n}|z_k| \leq 1\right\}$ the unit ball (cube) in $\mathbb{C}^n$ and by $\Sigma_n = \left\{z : z \in \mathbb{C}^n : \max\limits_{1\leq k\leq n}|z_k| = 1\right\}$ – the unit sphere.

Problem 1. We seek

$$\sup_{\{\alpha_k\}\in\Pi_n} \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n\| \tag{1}$$

and the element from X maximizing norm in (1).

A similar problem is considered in [1], where the exact convergence rate of an iterative method of solution of a Hilbert space operator equation is calculated.

As the mapping $p(\{\alpha_k\}) = \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots \alpha_n f_n\|$ is continuous and Π_n is compact, the element M realizing the maximum in (1) exists. Easy to see that p is positive homogeneous and subadditive, i.e. $p(c\alpha) = |c|\, p(\alpha)$, $p(\alpha+\beta) \leq p(\alpha) + p(\beta)$.

To describe the element M we first prove some auxiliary propositions. Let H_n be the Hemming cube $[0;1]^n$.

Proposition 1. The set of extreme points of H_n consists of the vertices of H_n.

Proof. Let $x \in H_n$ and for some i the strict inequality $0 < x_i < 1$ be satisfied. Then there exists a positive number ε such that $\varepsilon \le x_i \le 1-\varepsilon < 1$. Denote by $x_\pm$ the element obtained from x changing x_i by $x_i \pm \varepsilon$. Evidently $x = 0.5\left(x_+ + x_-\right)$, meaning that x cannot be an extreme point. If y is a vertex of H_n, i.e. consists of 0 and, 1 and $y = ta + (1-t)b,\ t \in [0;1]$, then $a = b = y$.

According to the Caratheodory theorem ([2], Ch.1, §1, P.1.6) any element of a convex compact subset C of $\mathbb{R}^n$ may be represented as a convex combination of $n+1$ extreme points of C.

Proposition 2. Any element of Π_n is a convex combination of at most $2n+2$ extreme points of Π_n.

Proof. Let $z = \left\{r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2}, \cdots, r_n e^{i\alpha_n}\right\} \in \Pi_n$. As $r = \left(r_1, r_2, \cdots, r_n\right) \in H_n$ by Caratheodory's theorem $r = t_1 e^1 + t_2 e^2 + \cdots + t_{n+1} e^{n+1}$, where $t_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$ and $\left\{e^k\right\}_1^{n+1}$ are the extreme points of H_n. Then

$$r_1 = t_1 e_1^1 + t_2 e_1^2 + \cdots + t_{n+1} e_1^{n+1}, r_2 = t_1 e_2^1 + t_2 e_2^2 + \cdots + t_{n+1} e_2^{n+1},$$
$$\cdots, r_n = t_1 e_n^1 + t_2 e_n^2 + \cdots + t_{n+1} e_n^{n+1} \qquad (2)$$

Multiplying the k-th equality of (2) by $exp\left(i\alpha_k\right)$, we get $z = t_1 g^1 + t_2 g^2 + \cdots + t_{n+1} g^{n+1}$, where $g_k^j = e_k^j exp\left(i\alpha_k\right)$. Replacing (if the necessity arises) the extreme points of H_n by a pair of the extreme points of Π_n, we complete the proof.

Example 1. The extreme points of H_2 are $e^1(0;0), e^2(1;0), e^3(0;1)$ and $e^4(1;1)$.

For a point $P(a;b) \in H_2$ we have the representation $t_1 = 1 - \max\{a,b\}$, $t_2 = a - \min\{a,b\}$, $t_3 = b - \min\{a,b\}$, $t_4 = \min\{a,b\}$.

Let $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}, z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$. Then

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(1-r_2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(r_2 - r_1\right)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix},\ if\ r_2 > r_1$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(1-r_1\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(r_1 - r_2\right)\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix},\ if\ r_1 > r_2.$$

Finally we get (if $r_2 > r_1$)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1-r_2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1-r_2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{r_2-r_1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} + \frac{r_2-r_1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Theorem 1. Let $M = \sum_{k=1}^{n} z_k f_k$ *be the solution of the Problem 1. Then* $|z_k| = 1$ *for any* $k, k = 1, 2, \cdots, n.$

Proof. By (1) $\|M\| = p(z)\mathrm{b}\sum_k t_k \|g^k\| \le \|M\|$. As the inequality in fact is equality, condition $\|g^k\| < 1$ implies t_k=0 so there exists at least one index j such that $\|g^j\| = \|M\|$.

Remark 1. The condition in this theorem is not sufficient. In $L^2(0;1)$ we have $\|1-x\| = 1/\sqrt{3}$ and $\|1+x\| = \sqrt{7/3}.$

The solution, in general, is not unique. For an orthonormal set $\{f_k\}_1^n$ and any set of real numbers $\{\varphi_k\}_1^n$ the equality $\left\|\sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k} f_k\right\|^2 = n$ is satisfied.

Consider now the case, where the norm in X is generated by an inner product. In this case we denote $X = H$. We have

$$\|M\|^2 = \sum_{k,m=1}^{n} \langle f_k, f_m \rangle \alpha_k \bar{\alpha}_m.$$

If condition of Theorem 1 is satisfied, then

$$\|M\|^2 = \sup_{|\xi_1|=|\xi_2|=\cdots|\xi_n|=1} \sum_{k,m=1}^{n} \langle f_k, f_m \rangle \xi_k \bar{\xi}_m .$$

Example 2. Find the solution of Problem 1 in the space $L^2(0;1)$ taking $\{f_k\} = \{1, x, \cdots, x^{n-1}\}.$

We have $\langle f_k, f_m \rangle = \dfrac{1}{k+m-1}$, arriving at the Hilbert matrix

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ . & . & . & . \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}.$$

Denoting by S_n the sum of all elements of D_n, we have the recurrences

$$S_{n+1} = S_n + 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1}.$$

Below are first eight values of

$S_n - 1, 7/3, 37/10, 533/105, 1627/252, 67/353, 2951/320, 2853/269.$

Finally $\|M\|^2 = S_n$ and $M(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

Now we pass to the second problem and seek

$$\inf_{\{\alpha_k\}\in\Sigma_n} \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n\| \tag{3}$$

Let $a, b \in X$ and the function $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ be defined by the formula $g(\lambda) = \|a - \lambda b\|$.

Recall that b is said to be orthogonal to a if $\|a - \lambda b\| \mathrm{r} \|a\|$ for any $\lambda \in \mathbb{C}$. In a unitary space (where the norm is defined by an inner product) this orthogonality coincides with the orthogonality with respect to the inner product.

Theorem 2. *Let* $m = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$ *be the solution of (3) and* $|\alpha_k| < 1$. *Then* f_k *is orthogonal to* m.

Proof. For any $\lambda \in \mathbb{C}$ and $t \in [0;1]$ we have

$$g((1-t)\lambda + t\mu) = \|a - ((1-t)\lambda + t\mu)b\| =$$
$$\|(1-t)a - (1-t)\lambda b + ta - t\mu b\| \le (1-t)\|a - \lambda b\| +$$
$$+t\|a - \mu b\| = (1-t)g(\lambda) + tg(\mu),$$

implying that the function g is convex.

Let $0 < |\lambda| < 1 - |\alpha_k|$, then $|\alpha_k - \lambda| < |\lambda| + |\alpha_k| < 1$. The minimality of $\|m\|$ implies $\|m\| \le \|m - \lambda f_k\|$, meaning that 0 is the local minimum point for the function $\|m - \lambda f_k\|$. As it is well known ([3], Ch. 1, 3.3, Theorem 5) for any convex function defined on a convex set any local minimum is the global minimum, so $\|m\| \le \|m - \lambda f_k\|$ for any $\lambda \in \mathbb{C}$, completing the proof.

The estimate of the norm of the linear combination of basis elements in a Hilbert space from below is proposed in [4]. According to Theorem 1 of [4] for any set $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{C}$ the following inequality holds

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right\| \mathrm{r}\ d_{n-1}(E_n, H) \cdot \max_{1\le k\le n} |\alpha_k|,$$

where $d_{n-1}(E_n, H)$ is the $(n-1)$-th Kolmogorov width of the linear span in

H of $\{f_k\}_1^n$ with coefficients belonging to Π_n.

By Lemma 1 of [5]

$$d_{n-1}(E_n, H) = \frac{1}{\max\limits_{1\le k\le n}\|f_k^*\|}$$

where $\{f_k^*\}_1^n$ is the biorthogonal with $\{f_k\}$ set, i.e. $\langle f_k, f_j^*\rangle = \delta_{jk}$ and $\{f_k^*\}_1^n$ lie in the linear subspace generated by $\{f_k\}_1^n$.

Denote by G the Gram matrix

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \cdots & \langle f_2, f_n\rangle \\ . & . & . & . \\ \langle f_n, f_1\rangle & \langle f_n, f_2\rangle & \cdots & \langle f_n, f_n\rangle \end{pmatrix}.$$

As it is well known the inverse matrix G^{-1} is generated by the biorthogonal set $\{f_k^*\}$. Let $\|f_k^*\|^2 = \max\left(diag\left(G^{-1}\right)\right)$. By the Schwarz inequality $\left|\langle f_j^*, f_k^*\rangle\right| < \|f_k^*\|^2, j \neq k.$ The coefficients of element m having the minimal norm will be the entries of the $k-$th row of G^{-1}, divided by $\|f_k^*\|^2$ and $\|m\| = \dfrac{1}{\|f_k^*\|}$.

Example 3. The inverse of D_5 is the matrix

$$\begin{pmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{pmatrix},$$

$m = -1/128 + 3/20x - 21/32x^2 + x^3 - 63/128x^4$ and $\|m\|^2 = 1/179200.$

Remark 2. The solution of problem (3) is not unique. For an orthonormal set $\{f_k\}_1^n$ the minimal norm is equal to 1 and is attained on each element f_k.

National Polytechnic University of Armenia
e-mail: levgev@hotmail.com

L. Z. Gevorgyan

On Two Extremal Problems

Two extremal problems for the norm of linear combinations of basis elements are considered. First we describe the linear combination having the greatest possible norm. Next the linear combination having the least norm is characterized.

Լ. Զ. Գևորգյան

Երկու էքստրեմալ խնդիրների մասին

Քննարկվում են երկու էքստրեմալ խնդիրներ՝ կապված բազիսային տարրերի գծային թաղանթին պատկանող տարրի նորմի հետ: Սկզբում նկարագրվում է առավելագույն նորմ ունեցող տարրը: Այնուհետև բնութագրվում է նվազագույն նորմով տարրը:

Л. З. Геворгян

О двух экстремальных задачах

Рассматриваются две экстремальные задачи о нахождении нормы линейной комбинации базисных элементов. Сначала описывается элемент с максимальной нормой. Затем характеризуется элемент с наименьшей нормой.

References

1. *Gevorgyan L.* – Math. Sci. Res. J. 2006. V. 10. № 7. P. 170-176. MR2263662.
2. *Kreĭn M.G., Nudelman A.A*. The Markov moment problem and extremal problems. AMS, Providence, R.I. 1977.
3. *Minoux M.* Mathematical programming: theory and applications. Wiley Interscience. 1986.
4. *Martirosyan D.* In: Proc. Int. Conf. Harmonic Analysis and Approximations, VIII. Abstracts. Tsaghkadzor. 2018.
5. *Martirosyan M., Samarchyan S.* In: Proc. Int. Conf. Harmonic Analysis and Approximations, IV. Abstracts. Tsaghkadzor. 2008.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

MATHEMATICS

УДК 517.9

H. A. Asatryan[1], A. H. Kamalyan[2], M. I. Karakhanyan[2]

On $\mathcal{L}$-convolution Type Operators with Semi-Almost Periodic Symbols

(Submitted by academician A. B. Nersessian 6/II 2019)

Keywords: *semi-almost periodic functions, $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator, Fredholm operator.*

1. Introduction. The semi-Fredholm theory of Wiener-Hopf operators with semi-almost periodic symbols was developed in works [1] and [2] (see also [3]).

In works [4] and [5] the concept of the $\mathcal{L}$-convolution type operator is introduced by replacing the Fourier transform in the definition of the convolution operator by the operator which transforms the Sturm-Liouville operator on the whole axis into the operator of multiplication by an independent variable. The concept of the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator is also introduced in a natural way. In the case of zero potential these two notions coincide with classical convolution operators and Wiener-Hopf operators, respectively. The precise definitions of $\mathcal{L}$-convolution type and $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators in the case of reflectionless potentials will be given in the next section. In this work we extend the results of [1, 2] to the case of $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator with a reflectionless potential.

2. The $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator. Let $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a Lebesgue measurable function satisfying the condition $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)c(x)\,dx < \infty$. An important role in the spectral theory of the Sturm-Liouville equation

$$-y''(x) + c(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$$

is played by the Jost solutions $e_+(x,\lambda)$ ($x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$) and $e_-(x,\lambda)$ ($x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$) defined by boundary conditions

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\lambda x} e_\pm(x,\lambda) = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\lambda x} e'_\pm(x,\lambda) = i\lambda$$

(see, e.g., [6]). For $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ the pairs of functions $e_+(x,\lambda)$, $e_+(x,-\lambda)$ and $e_-(x,\lambda)$, $e_-(x,-\lambda)$ form fundamental systems of solutions of the Sturm-Liouville equation (see [6]) and hence $e_+(x,\lambda)$ can be represented as

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,-\lambda) + b_0(\lambda)e_-(x,\lambda).$$

If the reflection coefficients $r_\pm(\lambda) := \mp b(\mp\lambda)/b_0(\lambda)$ vanish identically, the potential c is called reflectionless (see, e. g., [7], [8]).

It is known (see [7]-[9]) that every reflectionless potential has a representation of the form

$$c(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}(\ln \Delta(x)) \tag{2.1}$$

where

$$\Delta(x) = \det\left[\delta_{ij} + \frac{m_j \exp(-(\mu_i + \mu_j)x)}{\mu_i + \mu_j}\right] \quad i,j = 1, \dots, N, \tag{2.2}$$

δ_{ij} is the Kronecker delta, μ_k, m_k $(k = 1, \dots, N)$ are positive numbers such that $\mu_k \neq \mu_j$ for $k \neq j$. Reflectionless potentials are connected with a family of explicit solutions of the Korteweg–de Vries equation, the so-called $\mathcal{N}$-soliton solutions (see [8], [9]). Let the potential c be given by (2.1), (2.2). The operators $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}_0$, defined on the Sobolev space $\mathcal{W}_2^2(\mathbb{R})$ by the formulas $\mathcal{L}y = -y'' + cy$, $\mathcal{L}_0 y = -y''$, are self-adjoint (see [10]). Let H_d be the direct sum of all eigenspaces of the operator $\mathcal{L}$, and let $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ be the orthonormal basis of H_d, uniquely determined by the system of linear equations

$$\varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{N} \frac{m_k m_s e^{-(\mu_k+\mu_s)x}}{\mu_k + \mu_s}\varphi_s(x) = m_k e^{-\mu_k x}, \qquad k = 1, \dots, N$$

(see [7]-[9]). Consider the functions

$$u^-(x,\lambda) := t(\lambda)e^{i\lambda x}\left(1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k e^{-\mu_k x}}{\mu_k - i\lambda}\varphi_k(x)\right),$$

$$u^+(x,\lambda) := e^{-i\lambda x}\left(1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k e^{-\mu_k x}}{\mu_k + i\lambda}\varphi_k(x)\right),$$

where the transmission coefficient $t(\lambda)$ is defined by

$$t(\lambda) = b_0^{-1}(\lambda) := \prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda + i\mu_k}{\lambda - i\mu_k}.$$

Note that in the case of the zero potential the subspace H_d coincides with the zero subspace, $t(\lambda) \equiv 1$ and hence $u^\mp(x,\lambda) = e^{\pm i\lambda x}$.

Further, $m(g)$ will denote the operator of multiplication by a function (or a matrix-function) g, i.e., $(m(g)y)(x) = g(x)y(x)$. The operators $J: L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $\pi_\pm: L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\pi_\pm^0: L_p(\mathbb{R}_\pm) \to L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+)$ are given by the formulas

$$(Jy)(x) = y(-x), \qquad (\pi_\pm y)(x) = y(x),$$

$$(\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & x \in \mathbb{R}_-, \end{cases} \qquad (\pi_-^0 y)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}_+ \\ y(x), & x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Consider the space $L_2(\Delta, \delta)$ where $\Delta = \{1, \dots, N\}$ and δ is the Dirac measure on Δ. The unitary operator $\widetilde{U}: H_d \to L_2(\Delta, \delta)$ is defined by the formula $\widetilde{U}\varphi_k = \xi_k$ where $\xi_k(j) = \delta_{kj}$. Consider also the operators $U_\mp$, $U: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $\widehat{U}: H_c \oplus H_d \to L_2(\mathbb{R}) \oplus L_2(\Delta, \delta)$ defined by the formulas

$$(U_\mp y)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^\mp(x, \lambda) y(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+,$$

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} U|_{H_c} & 0 \\ 0 & \widetilde{U} \end{pmatrix},$$

where $H_c = L_2(\mathbb{R}) \ominus H_d$, $\chi_\pm$ is the characteristic function of the set $\mathbb{R}_\pm$, and the integrals converge in the norm of the space $L_2(\mathbb{R})$.

Note that in the case $c = 0$ the equalities $U_- = U = \widehat{U} = F$, $U_+ = F^{-1}$ hold, where F denotes the Fourier transform:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x)\, dx, \qquad y \in L_2(\mathbb{R}).$$

The following statement is true:

Theorem 2.1. The operators $U_\mp$, U are bounded, the operator $\widehat{U}$ is unitary and on a dense subspace of $L_2(\mathbb{R})$ the equality $\widehat{U}\hat{\mathcal{L}}\widehat{U}^* = m(\lambda^2)$ holds.

Let $d = (d_1, \dots, d_N)^T \in \mathbb{C}^N$. Define the operator $\widehat{m}(d): L_2(\Delta, \delta) \to L_2(\Delta, \delta)$ by the formula $\widehat{m}(d)(\xi) = (d_1\xi_1, \dots, d_N\xi_N)^T$.

Let $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$ $(1 \le p < \infty)$ denote the set of all functions $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ such that the operator

$$\widehat{U}^* \begin{pmatrix} m(a) & 0 \\ 0 & \widehat{m}(d) \end{pmatrix} \widehat{U}$$

is $L_p(\mathbb{R})$-bounded on the subspace $L_p(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. The continuous extension of this operator to $L_p(\mathbb{R})$ will be denoted by $W_\mathcal{L}^0(a, d)$ and will be called the *$\mathcal{L}$-convolution type operator* with an $\mathcal{L}$-symbol (a, d) on the space $L_p(\mathbb{R})$.

The operator $W_\mathcal{L}(a, d) = \pi_+ W_\mathcal{L}^0(a, d)\pi_+^0$ will be called the *$\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator*. In the case $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ we will use the notations $\mathcal{M}_p$, $W^0(a)$,

$W(a)$ instead of $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}_0}$, $W^0_{\mathcal{L}_0}(a,d)$, $W_{\mathcal{L}_0}(a,d)$. Obviously, $W^0(a)$ and $W(a)$ are the convolution integral operator and the Wiener-Hopf operator, respectively, and $\mathcal{M}_p$ is the set of all Fourier multipliers (see [11], [3]). It is known (see [11]) that $\mathcal{M}_p$ is a Banach algebra with the norm $\|a\|_{\mu_p} = \|W^0(a)\|_{B(L_p(\mathbb{R}))}$. In particular, $\mathcal{M}_2$ coincides with $L_\infty(\mathbb{R})$.

Theorem 2.2. *The inclusion* $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$ $(1 \le p < \infty)$ *holds.*

3. Main results. The closure of the algebra of all piecewise constant functions in $\mathcal{M}_p$ $(1 \le p < \infty)$ will be denoted by PC_p. It is well known (see [11]) that $PC_p = PC_2 = PC$, where PC is the class of functions having finite one-sided limits $a(x \pm 0)$ at each point $x \in \mathbb{R}$ and also at $x = \pm\infty$. Further, it is known that $PC_p = \mathcal{M}_p \cap PC$ (see [3]).

Let $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq [-\infty, \infty]$, and let $C_p(\overline{\mathbb{R}}) \coloneqq PC \cap C(\mathbb{R})$ with $C(\mathbb{R})$ being the set of all continuous complex-valued functions on $\mathbb{R}$. In particular, $C(\overline{\mathbb{R}}) \coloneqq C_2(\overline{\mathbb{R}}) = PC \cap C(\mathbb{R})$. $C_0(\mathbb{R})$ will denote the subalgebra of $C(\overline{\mathbb{R}})$, consisting of all $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ with $a(\pm\infty) = 0$.

Further, let AP^0 be the algebra of all almost periodic polynomials, i.e., the algebra of all functions $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ which can be written as a finite sum

$$p(x) = \sum \alpha_j e^{i\lambda_j x}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C},\ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Let AP_p denote the smallest closed subalgebra of $\mathcal{M}_p$ $(1 < p < \infty)$ containing AP^0, and let SAP_p denote the smallest closed subalgebra of $\mathcal{M}_p$ containing $\mathbb{C}_p(\mathbb{R})$ and AP_p. The algebra AP_p (SAP_p) lies in AP_2 (SAP_2) which itself coincides with the algebra AP (SAP) of all Bohr almost periodic functions (semi-almost periodic functions). Every function $a \in SAP_p$ has a representation of the form

$$a = (1-u)a_\ell + u a_r + a_0 \tag{3.1}$$

where $a_\ell, a_r \in AP_p$, $a_0 \in \mathcal{M}_p \cap C_0(\mathbb{R})$ and $u \in C(\overline{\mathbb{R}})$ is a fixed increasing function satisfying conditions $u(-\infty) = 0$, $u(+\infty) = 1$ (see [2], [3]). The functions a_ℓ, a_r do not depend on the choice of u and are uniquely determined by the function a (see [1]-[3]).

The group of all invertible elements of an algebra A will be denoted by GA.

It is well known that a function $a \in SAP_p$ ($a \in AP_p$) belongs to $GSAP_p$ (GAP_p) whenever $a \in GL_\infty(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\inf|a(\lambda)| > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

According to the Bohr theorem on the argument of an almost periodic function (see [12]), for $a \in GAP$ there exist a real number $\varkappa(a)$ and a function $\psi \in AP$ such that

$$a(x) = e^{i\varkappa(a)x} e^{\psi(x)} \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

The uniquely determinable number $\varkappa(a)$ is called the *mean motion* of the function a and can be computed by the formula

$$\varkappa(a) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{2\ell} [(\arg a)(\ell) - (\arg a)(-\ell)].$$

Here $\arg a$ is to be understood as an arbitrary fixed function from $C(\mathbb{R})$, satisfying the equality $a = |a| e^{i \arg a}$.

Let $M(\psi) := \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \psi(x) dx$ be the Bohr mean value of the function ψ. The number $\xi(a) := e^{M(\psi)}$ is uniquely determined by the function $a \in GAP$; it is called the *geometric mean value* of the function a. For any $a \in GSAP_p$, the functions a_ℓ and a_r, determined from (3.1), belong to GAP_p (see [2, 3]). Furthermore, the following equalities hold (see [3]):

$$\xi(a_r) = \exp \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} [\log|a(x)| + i(\arg a)(x) - i\,\varkappa(a_r)x]\, dx,$$

$$\xi(a_\ell) = \exp \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{0} [\log|a(x)| + i(\arg a)(x) - i\,\varkappa(a_\ell)x]\, dx.$$

The following two theorems describe the semi-Fredholm properties of the operator $W_{\mathcal{L}}(a,d)$.

Theorem 3.1. *Let $a \in SAP_p \setminus \{0\}$ with $1 < p < \infty$. Condition (3.2) is necessary for the normal solvability of the operator $W_{\mathcal{L}}(a,d)$ in the space $L_p(\mathbb{R}_+)$. In order that the operator $W_{\mathcal{L}}(a,d)$ be normally solvable, it is necessary and sufficient that along (3.2) one of these two conditions hold:*

1. $\varkappa(a_\ell)\,\varkappa(a_r) \geq 0$ and $\varkappa(a_\ell) + \varkappa(a_r) \neq 0$.
2. $\varkappa(a_\ell) = \varkappa(a_r) = 0$ and

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{1}{2}\big(\xi(a_r) + \xi(a_\ell)\big) - \frac{1}{2}\big(\xi(a_r) - \xi(a_\ell)\big) \operatorname{cth} \pi \left(\frac{i}{p} + x\right) \right| > 0 \qquad (3.3)$$

Theorem 3.2. *Let the operator $W_{\mathcal{L}}(a,d)$ be normally solvable in the space $L_p(\mathbb{R}_+)$ with $1 < p < \infty$. Then the following assertions are true:*

1) *If* $\varkappa(a_\ell) + \varkappa(a_r) > 0$, *then* $\dim\ker W_{\mathcal{L}}(a,d) < \infty$, $\dim \operatorname{Coker} W_{\mathcal{L}}(a,d) = \infty$ and $\dim\ker W_{\mathcal{L}}(a,0) = 0$. *In the case $p = 2$ the operator $W_{\mathcal{L}}(a,0)$ is left invertible.*

2) *If* $\varkappa(a_\ell) + \varkappa(a_r) < 0$, *then* $\dim\ker W_{\mathcal{L}}(a,d) = \infty$, $\dim \operatorname{Coker} W_{\mathcal{L}}(a,d) < \infty$ and $\dim \operatorname{Coker} W_{\mathcal{L}}(a,0) = 0$. *In the case $p = 2$ the operator $W_{\mathcal{L}}(a,0)$ is right invertible.*

3) If $\varkappa(a_\ell) = \varkappa(a_r) = 0$ and condition (3.3) is satisfied, then the $W_{\mathcal{L}}(a, d)$ is an Fredholm operator and

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a, d) = -\frac{1}{2\pi}[(\arg a)(+\infty) - (\arg a)(-\infty)] + \frac{1}{p} - \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi}\left(\arg\frac{\xi(a_\ell)}{\xi(a_r)}\right)\right\}$$

where $\{s\}$ denotes the fractional part of the real number s.

[1] FernUniversität in Hagen, Germany
e-mail: hayk.asatryan@fernuni-hagen.de, asatrianh@gmail.com
[2] Yerevan State University;
e-mail: armen.kamalyan@ysu.am, kamalyan_armen@yahoo.com
m_karakhanyan@ysu.am, m_karakhanyan@yahoo.com

H. A. Asatryan, A. H. Kamalyan, M. I. Karakhanyan

On $\mathcal{L}$-convolution Type Operators with Semi-Almost Periodic Symbols

The notions of the $\mathcal{L}$-convolution operator and the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator are introduced by replacing the Fourier transform in the definition of the convolution operator by a unitary operator which transforms the Sturm-Liouville operator $\mathcal{L}$ on the whole axis to the operator of multiplication by an independent variable. It is considered the case when the potential of the operator is reflectionless and the symbol of the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator is a semi-almost periodic function. Criteria for semi-Fredholm and Fredholm properties of the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator are revealed. In the Fredholm case a formula for the index is obtained.

Հ. Ա. Ասատրյան, Ա. Հ. Քամալյան, Մ. Ի. Կարախանյան

Կիսա-համարյա պարբերական սիմվոլներով $\mathcal{L}$-փաթեթի տիպի օպերատորների մասին

Փաթեթի օպերատորի սահմանման մեջ Ֆուրիեի ձևափոխությունը փոխարինելով առանցքի վրա սահմանված Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորը անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորին բերող ունիտար օպերատորով ներմուծվել են $\mathcal{L}$-փաթեթի և $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոպֆի օպերատորները: Դիտարկվել է այն դեպքը, երբ $\mathcal{L}$ օպերատորի պոտենցիալը չանդրադարձնող է, իսկ $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոպֆի օպերատորի սիմվոլը կիսա-համարյա պարբերական ֆունկցիա է: Բացահայտվել են $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոպֆի օպերատորի կիսա-ֆրեդհոլմյան և ֆրեդհոլմյան լինելու պայմանները: Ֆրեդհոլմյան դեպքում ստացվել է ինդեքսի բանաձև:

А. А. Асатрян, А. Г. Камалян, М. И. Караханян

Об операторах типа -свертки с полу-почти периодическими символами

Заменой в определении оператора свертки преобразования Фурье на унитарный оператор, приводящий оператор $\mathcal{L}$ Штурма – Лиувилля на оси к оператору умножения на независимую переменную, введены понятия оператора $\mathcal{L}$-свертки и оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. Рассмотрен случай, когда потенциал оператора является безотражательным, а символ оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа – полу-почти периодической функцией. Выявлены условия полу-фредгольмовости и фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. В фредгольмовом случае получена формула для индекса.

References

1. *Sarason D.* – Duke. Math. J. 1977. V. 44. № 2. P. 356-364. DOI:10.1215/S0012-7094-77-04415-5.
2. *Duduchava R.V., Saginashvili A.I.* – Differ. Uravn. 1981. V. 17. № 2. P. 301-312.
3. *Böttcher A., Karlovich Yu.I., Spitkosky I.M.* Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser. 2002.
4. *Kamalyan A.H., Spitkovsky I.M.* – Math Notes. 2018. V. 104. № 3. P. 404-416. DOI: 10.1134/S0001434618090080.
5. *Kamalyan A. H., Karakhanyan M. I., Hovhannisyan A. H.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 2018. V. 53. № 3. P. 134-138. DOI: 10.3103/S1068362318030032.
6. *Marchenko V.A.* – Sturm-Liouville Operators and Applications. Basel; Boston; Stuttgart. Birkhäuser. 1986.
7. *Yurko V.A.* Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems [in Russian]. Fizmatlit. M. 2007.
8. *Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E.* Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. New York; London. Consultants Bureau. 1984.
9. *Bhatnagar P.L.* Nonlinear Waves in One-dimensional Dispersive Systems. Clarendon Press. Oxford. 1979.
10. *Faddeev L.D.* – Journal of Soviet Mathematics. 1976. V. 5. № 3. P. 334–396. DOI: 10.1007/BF01083780.
11. *Duduchava R.V.* Convolution Integral Equations with Discontinuous Presymbols, Singular Integral Equations with Fixed Singularities and Their Applications to Problems of Mechanics [in Russian]. Metsniereba. Tbilisi. 1973.
12. *Levitan B.M.* Almost Periodic Functions [in Russian]. Fizmatlit. Moscow. 1953.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

С. Л. Гогян[1], Н. В. Срапионян[2]

Изменение значений функций на множестве малой меры и ряды с монотонными коэффициентами

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 20/II 2019)

Ключевые слова: *ряды с монотонными коэффициентами, изменение функций.*

Начиная с первого десятилетия XX в. интенсивными темпами проводились исследования об улучшении свойств функций, при изменении их значений на множестве малой меры. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Н. Н. Лузиным в 1912 г. (см [1]). Далее в этом направлении интересные результаты получили Е. Меньшов, А. Талалян, К. Оскольков, Б. Кашин, М. Григорян, О. Церетели и др.

Нашей отправной точкой является работа [2], где рассматривается возможность изменений значений функций на множестве малой меры таким образом, чтобы для полученной функции коэффициенты разложения по системе Хаара были монотонно убывающими, при этом множество, на котором проводилось изменение значений функций, не зависело бы от функции. Были доказаны следующие теоремы.

Теорема А ([2], теорема 3). *Каково бы ни было измеримое множество $E, E \subset [0,1]$ с мерой $0 < |E| < 1$, существует функция $f_0 \in L^1(0,1)$ такая, что если некоторая функция $f \in L^1(0,1)$ совпадает с f_0 на множестве E, то последовательность $\{|c_n(f)|\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть монотонно убывающей ($c_n(f)$ – коэффициент разложения при -той функции, нормированной в $L^1(0,1)$ системе Хаара).*

В той же работе доказана следующая теорема.

Теорема Б ([2], теорема 4). *Для любого $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, существует измеримое множество $E, E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти $\tilde{f}, \tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что все ненулевые члены в последовательности $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке.*

Как видно из этих теорем, функцию можно модифицировать таким образом, чтобы ненулевые члены ряда коэффициентов по системе Хаара были расположены в убывающем порядке, однако невозможно добиться этого для всей последовательности.

В данной работе мы показываем, что существует базис, для которого верна следующая теорема.

Теорема 1. *Существует нормированный в* $L^1(0,1)$ *базис* $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что для любого* $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, *существует измеримое множество* $E, E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f}, \tilde{f} \in L^1(0,1)$, *которая совпадает с* f *на множестве* E *и для которой все члены последовательности* $\{c_n(f,\Psi)\}_{n=1}^{\infty}$ *расположены в убывающем порядке.*

Основная лемма и идея доказательства теоремы. Базис, который обладает свойством теоремы 1, был построен в работе [3] для случая, когда последовательность $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ растет очень быстро, например $M_i = 2^{2^i}$.

Разделим систему Хаара на две подпоследовательности $\{b_i\}$ и $\{\phi_i\}$, причем $b_i = h_i^{(2)}$ при $i = 1,2,3,\dots$ Положим также $N_0 = 0$ и $N_i = \sum_{k=1}^{i} 2^{2^k}$. В [2] рассматривается система функций $F = \left\{\left\{f_{(i,j)}\right\}_{j=0}^{M_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$, которая определяется следующим образом:

$$f_{(i,0)} = \phi_i - \frac{1}{M_i+1} \sum_{N_{i-1}+1 \le k \le N_i} b_k,$$

$$f_{(i,j)} = f_{(i,0)} + b_{N_{i-1}+j}, \quad j = 1,2,\dots,M_i\,.$$

В работе [2] отмечено, что система $\left\{f_{(i,j)}\right\}$ является базисом в $L^1(0,1)$. Отметим свойства системы F и чисел M_i, которые используются в дальнейшем:

$$2 \le \|f_{(i,j)}\| \le 3,$$

$$\phi_i = \frac{1}{M_i+1} \sum_{j=0}^{M_i} f_{(i,j)},$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{M_j}{M_{i+1}} < \frac{2}{M_i} < 2^{-i}\,.$$

С помощью этих аргументов становится возможным доказать лемму, которая является усиленной версией леммы 1 из [2].

Лемма 1. *Пусть даны числа* $i \in N, \gamma \ne 0, \delta > 0, \nu, q \ge 1, \epsilon > 0$ *и двоичный интервал*

$$\Delta = \left(\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu}\right), \quad 1 \le i \le 2^\nu,$$

где $\Delta \cap [0,\epsilon] = \emptyset$. Тогда существуют измеримое множество $E, E \subset \Delta$, натуральное число $k, k > i$ и полином по системе F

$$Q = \sum_{j=N_i}^{N_k} \sum_{0 \le s \le M_j} a_{(j,s)} f_{(j,s)}$$

такие, что

1) $|E| \geq (1 - 2^{-q})|\Delta|$,
2) $\gamma - \epsilon < Q(t) < \gamma + \epsilon$ для всех $t, t \in E$,
3) $-\epsilon < Q(t) < \epsilon$ для всех $t, t > \epsilon, t \notin \Delta$,
4) $\int_{\epsilon}^{1}|Q(t)dt \leq 2|\gamma| \cdot |\Delta|(1 + \epsilon)$,
5) последовательность $a_{(j,s)}$ постоянна относительно второго индекса и монотонно убывающая относительно первого индекса,
6)
$$\left\|\sum_{j=N_i}^{A} \sum_{0\leq s\leq M_j} a_{(j,s)} f_{(j,s)} + \sum_{0\leq s\leq B} a_{(A+1,s)} f_{(A+1,s)}\right\| \leq 3\|Q\|$$

для всех $N_i \leq A \leq N_k - 1, 0 \leq B \leq M_A$.

С применением утверждений леммы 1, а также техники, описанной в работе [2], доказывается теорема 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18-1A081

[1] Институт математики НАН РА

[2] Ереванский государственный университет

e-mail: gogyan@instmath.sci.am, nerses.srapionyan@gmail.com

С. Л. Гогян, Н. В. Срапионян

Изменение значений функций на множестве малой меры и ряды с монотонными коэффициентами

Существует нормированный базис в $L^1(0,1)$ такой, что для любого положительного ϵ существует множество $E, |E| \leq \epsilon$, такое, что значения любой функции из $L^1(0,1)$ можно изменить на множестве E таким образом, чтобы последовательность коэффициентов разложения полученной функции по данному базису была монотонно убывающей.

Ս. Լ. Գոգյան, Ն. Վ. Սրապիոնյան

Փոքր չափի բազմության վրա ֆունկցիաների արժեքների փոփոխում և մոնոտոն գործակիցներով շարքեր

Գոյություն ունի $L^1(0,1)$-ում նորմավորված բազիս, որ ցանկացած ϵ դրական թվի համար գոյություն ունի E չափելի բազմություն, $|E| \leq \epsilon$, որ $L^1(0,1)$-ից ցանկացած ֆունկցիայի արժեքները E բազմության վրա հնարավոր է փոխել այնպես, որ ստացված ֆունկցիայի վերլուծության գործակիցներն ըստ մեր բազիսի լինեն դասավորված նվազման կարգով:

S. L. Gogyan, N. V. Srapionyan

Modifications of Values of Functions on a Set of Small Measure and Series with Monotone Coefficients

There exists a normalized basis in $L^1(0,1)$ such, that for every positive ϵ there exists a set $E, |E| \leq \epsilon$ such, that the values of any function from $L^1(0,1)$ can be changed on E in such a way, that the sequence of coefficients of that function by our basis is monotone decreasing.

Литература

1. *Лузин Н. Н.* – Мат. сборник. 1912. Т. 28. С. 266–294.
2. *Gogyan S., Grigoryan M.* – Anal. Math. 2006. V. 32. № 1. P. 49-80.
3. *Gogyan S.* – Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences. 2016. V. 239. № 1. P. 3-6.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

Г. М. Зограбян, С. М. Саядян, А. А. Чубарян

Исследование свойства монотонности некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 21/I 2019)

Ключевые слова: *минимальная тавтология; пропозициональные системы резолюций; количество шагов выводов; монотонность системы, строгая монотонность системы.*

1. Введение. Минимальные тавтологии, т.е. тавтологии, которые не являются результатом подстановки в более короткие тавтологии, играют существенную роль в теории сложностей выводов. Традиционно считается, что минимальные тавтологии не могут выводиться сложнее результатов подстановок в них, т.е. должна быть некоторая «естественная монотонность» выводов. Однако оказалось, что многие «строгие» пропозициональные системы выводов двузначных и многозначных логик не монотонны ни по шагам, ни по длине выводов [1, 2]. Аналогичная немонотонность некоторых «слабых» систем выводов классической логики доказана в [3]. В настоящей работе исследованы соотношения между шагами выводов минимальных тавтологий и результатов подстановок в них для пропозициональных систем резолюций интуиционистской логики и логики Иоганссона. Доказано, что для каждой из указанных логик существует последовательность пар минимальных тавтологий φ_n и формул ψ_n, являющихся результатом подстановок в φ_n таких, что: 1) длины φ_n и ψ_n по порядку равны, 2) для каждого *n* количество шагов выводов ψ_n ограничено константой, а количество шагов выводов φ_n по порядку не менее экспоненты от длины формул. Далее в работе введено понятие строгой монотонности, предполагающее, что для каждой заданной в данной логике тавтологии существует такая минимальная тавтология, сложность вывода которой совпадает с наименьшим количеством шагов вывода заданной формулы, и доказано, что пропозициональные системы резолюций классической и двух вышеназванных неклассических логик строго монотонны. Доказано также, что исследованная в [3] немонотонная система обобщенных расщеплений также не строго монотонна.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного n-мерного булева куба E^n, пропозициональной формулы, тавтологии в данной логике.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные p_i $(i \geq 1)$ и (или) p_{i_j} $(i \geq 1, j \geq 1)$, логические связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и пару скобок (,). Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оценивается и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

2.1. Описания рассматриваемых систем. Известная пропозициональная система резолюций $\boldsymbol{RC}$ классической логики направлена на установление тавтологичности заданной формулы путем установления противоречивости некоторой системы дизъюнктов, строящейся по заданной формуле. Напомним предложенный Г.С. Цейтиным в [4] метод построения соответствующей системы дизъюнктов для произвольной формулы φ таким образом, чтобы длина этой системы не превышала $6|\varphi|$. Каждой подформуле даннной формулы ставится в соответствие своя переменная. Если одна из подформул является отрицанием другой, то им соответствуют сопряженные переменные. Если некоторая подформула A является конъюнкцией подформул B и C и этим подформулам приписаны соответственно переменные α, β, γ, то подформуле A приписывается система дизъюнктов $\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\alpha}\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}$: Аналогично приписываются системы дизъюнктов подформулам, являющимся дизъюнкцией или импликацией других подформул соответственно для дизъюнкции и $\alpha\beta$, $\alpha\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma$ для импликации. Объединяя все полученные дизъюнкты, добавляем туда еще дизъюнкт $\bar{\xi}$, где ξ – переменная, приписанная всей формуле.

Аксиомы системы $\boldsymbol{RC}$ не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся дизъюнкты из построенной вышеописанным способом системы. **Правило классической резолюции** (р-правило) выводит дизъюнкт $D' \cup D''$ из дизъюнктов $D' \cup \{p\}$ и $D" \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p. Если применяя правило вывода к дизъюнктам построенной по φ системе, а также ко вновь полученным дизъюнктам, мы в конце концов получим пустой дизъюнкт Λ, то формула φ является тавтологией.

Описанная в [5] интуиционистская система резолюций ***RI*** является секвенциальной системой. Мы будем пользоваться общепринятыми понятиями цедента, антецедента, сукцедента, глубины формулы, собственной подформулы, элементарной подформулы.

Модифицируя описанный выше метод Цейтина сведения любой тавтологии к противоречивой системе формул глубины ≤ 2, каждой формуле сопоставляем секвенцию $D_1, \ldots, D_n \to p$, где каждая из D_i имеет один из видов

$$p \supset (q \vee r);\quad (p \supset q^*) \supset r;\quad p \supset (q \supset r^*);\quad p \supset q;\quad p^*, \qquad (1)$$

где p^* – или p или $\bot$.

Для каждой формулы D_i одного из видов (1) введем соответствующую секвенцию $\overline{D_\iota}$ вида $p \to q \vee r;\quad p \supset q^* \to r;\quad p, q \to r^*;\quad p \to q;\quad p^*.$

Следуя [5], опишем систему ***RI***.

Аксиомы системы:

$$p \to p, \bot \to \bot$$

Правила вывода:

$$(\supset_{1R}^-)\quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma p\ \to}{\Sigma \to r}\ ,\qquad (\supset_{2R}^-)\quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma p\ \to q}{\Sigma \to r}.$$

$$(\supset_{3R}^-)\quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma\ \to\ q}{\Sigma \to r},\qquad (\supset_{2R}^-)\quad \frac{p \supset \bot \to r;\ \sum p\ \to \bot}{\Sigma \to r},$$

$$(\vee_R^-)\quad \frac{p \to q\ \vee r;\ \Gamma\ \to\ q;\ \Sigma q \to\ s^*;\ \Pi r \to\ s^{**}}{\Gamma\Sigma\Pi \to r},$$

$$(C_{1R})\quad \frac{pq \to r^*;\ \Gamma\ \to\ p;\ \Sigma\ \to\ q}{\Gamma\Sigma \to r^*},\qquad (C_{2R})\quad \frac{p \to q;\ \Gamma \to p}{\Gamma \to q},$$

$$(\bot_R)\quad \frac{\to \bot}{\to\ p},$$

где Γ, Σ, Π — цеденты, p,q,r – пропозициональные переменные. $\neg A$ вводится как $A \supset \bot$.

Система резолюции для логики Иоганссона ***(RJ)***, следуя [6], определяется по аналогии с системой ***RI***, при помощи удаления правил вывода $(\supset_{1R}^-)$ и $(\bot_R)$.

В [5] доказано, что для произвольной формулы φ, если s – переменная, которой заменена сама формула φ, в ***RI*** с использованием в качестве дополнительных аксиом построенные для φ и называемые дизъюнктами вышеописанные секвенции $\overline{D_\iota}$ выводима секвенция $\to\ s$, тогда и только тогда, когда секвенция $\to$ φ выводима в системе натурального вывода для интуиционистской логики высказываний, т.е. является интуиционистской тавтологией. Аналогично для системы ***RJ***.

Система обобщенных расщеплений ***OP*** для классической логики была введена в [7]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ, конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v , которому приписана некоторая формула φ_v , приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p, входящей в φ_v следующим образом: при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$, где формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p (\alpha = \bar{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение $1(0)$ и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Естественно, что меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы. Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией – 1 и одним правилом вывода $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$, обозначена через $\boldsymbol{OP}$.

2.2. Характеристики логических систем выводов. Мы здесь будем исследовать некоторые свойства логических систем на основе одной из сложностных характеристик выводов – *t*-сложности, определяемой как количество различных формул в выводе. Пусть ϕ является некоторой системой выводов фиксированной логики, а φ – некоторая тавтология данной логики. Через $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$ обозначим минимально возможное значение *t*-сложности всевозможных выводов тавтологии φ в системе ϕ. Если система ϕ зафиксирована, то будем обозначать просто $\boldsymbol{t}(\varphi)$ **.**

Определение 2.2.1. Тавтология данной логики называется ***минимальной,*** если она не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии этой же логики.

Для произвольной минимальной тавтологии φ фиксированной логики обозначим через S(φ) множество всех тавтологий этой же логики, являющихся результатом подстановки в φ.

Определение 2.2.2. Система выводов ϕ называется ***t-монотонной***, если для каждой минимальной тавтологии φ и для каждой формулы ψ из S(φ) $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi) \leq \boldsymbol{t}^{\phi}(\psi)$.

Определение 2.2.3. Система выводов ϕ называется ***t-строго монотонной,*** если для каждой не минимальной тавтологии ψ этой системы существует такая минимальная тавтология φ этой же системы, что ψ принадлежит S(φ) и $\boldsymbol{t}^{\phi}(\psi) = \boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$.

3. Основные результаты. Теорема 1. *Системы **RI** и **RJ** не являются **t-монотонными.***

Доказательство аналогичного утверждения для системы ***RC*** в [3] было основано на рассмотрении последовательностей формул:

$\varphi_n = p \supset q \vee A_n$ и $\psi_n = p \supset (p \supset p) \vee A_n$ для $A_n = TTM_{n,2^n-1}$,

$$\text{где } TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E^n} \mathop{\&}_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} p_{i_j}^{\sigma_i} \quad (n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1).$$

Нетрудно убедиться, что для каждого $n \geq 1$ формула φ_n является минимальной тавтологией и $\psi_n \in S(\varphi_n)$. Учитывая, что произвольная формула A выводима в ***RC*** тогда и только тогда, когда формула $\neg\neg A$ выводима в ***RI,*** что в свою очередь равнозначно выводимости формулы $(A \supset \bot) \supset \bot$ в ***RJ,*** мы можем использовать для доказательства теоремы 1 интуиционистские и иоганссоновские «образы» формул φ_n и ψ_n , которые обозначим через $I\varphi_n$, $I\psi_n$ и $J\varphi_n$, $J\psi_n$ соответственно. Используя одинаковость множества основных аксиом (цейтинских дизъюнктов и соответствующих им секвенций) для всех трех систем, по аналогии с доказательствами из [3] получим:

$$\boldsymbol{t}\,(I\varphi_n) = \Omega(2^{2^n}), \text{ а } \boldsymbol{t}\,(I\psi_n) = O(\mathbf{1}),$$

$$\boldsymbol{t}\,(J\varphi_n) = \Omega(2^{2^n}), \text{ а } \boldsymbol{t}\,(J\psi_n) = O(\mathbf{1}).$$

Теорема 2. *Системы **RC, RI** и **RJ** являются **t-строго монотонными**.*

Доказательство для всех трех систем основано на следующем методе построения соответствующих минимальных тавтологий для заданной не минимальной тавтологии. Сначала, согласно первоначальному шагу Цейтина, каждой подформуле данной формулы ставится в соответствие своя переменная, далее если при построении минимальной тавтологии нужно некие подформулы заданной формулы заменить на переменные, то в качестве таковых берем именно те переменные, которые уже приписаны этим подформулам. При таком выборе переменных система дизъюнктов для каждой построенной минимальной тавтологии будет противоречивой подсистемой системы дизъюнктов первоначальной формулы. Доказательство теоремы 2 обосновано выбором той из всевозможных построенных минимальных тавтологий, которая имеет наименьшее количество шагов выводов.

Теорема 3. Не *t*-*монотонная система* *OP* *также не* *t-строго монотонна*.

Доказательство очевидным образом следует из того факта, что заменив все переменные заданной тавтологии на одну и ту же переменную, получим тавтологию, которая может и не является минимальной, однако имеет всего 2 различные формулы в выводе (дереве расщепления): саму формулу, зависящую от одной переменной, и приписанную после расщепления единицу. Завершается доказательство очевидным фактом существования минимальной тавтологии, количество шагов расщепления которой больше 2 (см. напр. [3]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1B034.

Ереванский государственный университет
e-mails: grishazohrabyan@gmail.com, sayadyan@gmail.com,
achubaryan@ysu.am

Г. М. Зограбян, С. М. Саядян, А. А. Чубарян

Исследование свойства монотонности некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик

Для некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик доказано, что минимальные тавтологии данной логики могут выводиться гораздо сложнее, чем результаты подстановок в них, однако для каждой заданной в данной логике тавтологии существует такая минимальная тавтология, сложность вывода которой совпадает с наименьшим количеством шагов вывода заданной формулы.

Գ. Մ. Զոհրաբյան, Ս. Մ. Սայադյան, Ա. Ա. Չուբարյան

Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի մոնոտոնության հատկության հետազոտում

Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի համար ապացուցված է, որ մինիմալ նույնաբանությունները կարող են արտածվել էապես ավելի բարդ, քան նրանցից ստացված տեղադրման արդյունքները, սակայն տվյալ տրամաբանության յուրաքանչյուր նույնաբանության համար գոյություն ունի այնպիսի մինիմալ նույնաբանություն, որի արտածման բարդությունը համընկնում է տրված բանաձևի արտածման նվազագույն քայլերի հետ:

G. M. Zohrabyan, S. M. Sayadyan, A. A. Chubaryan

Investigation of Monotonous Property for Some Propositional Proof Systems of Classical and Non-Classical Logics

For some propositional proof systems of classical and non-classical logics it is proved that minimal tautologies can be deduced essentially harder, than results of substitutions in them, but for every tautology of given logic there is some minimal tautology such that its proof complexity is equal to minimal steps in proof of given tautology.

Литература

1. *Chubaryan A., Petrosyan G.* – Evolutio, Естественные науки. 2016. Вып 3. С. 12-14.
2. *Chubaryan A., Khamisyan A., Petrosyan G.* – On some systems for two versions of many-valued logics and its properties, Lambert Academic Publishing (LAP). 2017. 80 p.
3. *Саядян С.М., Чубарян А.А.* – ДНАН РА. 2018. Т. 118. № 1. С. 20-25.
4. Цейтин Г.С. – Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л. Наука. 1968. Т. 8. С. 234-259.
5. *Минц Г.Е.* – Семиотика и информатика. 1985. Вып. 25. С. 120-135.
6. *Чубарян Ан.А., Чубарян Арм.А.* – НАУ, Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени. 2015. Ч. 10, 2(7). С. 11-14.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Дискретная и континуальная (микрополярная) «стержневая» модели атомной цепочки нанокристаллического материала

(Представлено 18/XII 2018)

Ключевые слова: *атомная цепочка, нанокристаллический материал, дискретная модель, континуальная (микрополярная) «стержневая» модель.*

Введение. В связи с развитием в настоящее время нанотехнологий большой интерес представляет математическое моделирование углеродных материалов (нанотрубка, графен и др.) [1]. При изучении атомных или молекулярных систем большого размера наиболее распространённым является метод молекулярной динамики [1, 2]. В вычислительных нанотехнологиях метод молекулярной динамики (в задачах статики – метод молекулярной механики) позволяет рассчитывать новые и перспективные материалы на атомно-молекулярном уровне и создавать наноматериалы с заданными физико-механическими свойствами.

Следует отметить, что в последние десятилетия широкое распространение при моделировании наноматериалов получили методы механики деформируемого твердого тела [3]. При расчёте напряжённо-деформированного состояния, например, нанотрубок, в некоторых работах (например, [4]) пользуются классической теорией упругих тонких оболочек, но без учёта микроструктуры материала, или теорией упругих оболочек [5], когда упругие модули оболочки определяются в результате исследования дискретной модели, в которой учитывается только силовое взаимодействие между формирующими трубку атомами. Однако существование однослойной нанотрубки и графена свидетельствует о необходимости учёта моментного взаимодействия между атомами (в противном случае слой атомов, формирующий нанотрубку или графен, не имел бы изгибной жёсткости, что не соответствует действительности) [6-10].

С другой стороны, известно, что невозможно однозначно определять толщину наноматериалов (нанотрубка, графен и др.). Несмотря на это при изучении нанотрубки или графена как для отмеченных выше оболочённых моделей [4, 5], так и построенных в работах [12-16] стержневых моделей используется понятие толщины. С этой точки зрения актуально построение таких механических моделей, в данном случае «стержневых», которые, с одной стороны, учитывали бы моментные взаимодействия между атомами наноматериала и, с другой стороны, не использовали понятие их толщины.

В данной работе на основе учёта нецентрального силового и моментного взаимодействия между атомами построена дискретная модель нанокристаллической цепочки атомов и, далее, с помощью предельныого перехода построена её континуальная одномерная («стержневая») модель, в которой не фигурирует толщина этого «стержня». В этой микрополярной «стержневой» континуальной модели все упругие постоянные выражаются через параметры атомной дискретной модели рассматриваемой цепочки.

Имея в виду, что в работах [17-19] асимптотическим методом построена простейшая физически понятная и наглядная одномерная модель микрополярного упругого стержня, при рассмотрении которой (при свободных колебаниях) не учитывается понятие толщины этого стержня, при помощи сравнения с континуальной «стержневой» моделью атомной цепочки определяются упругие постоянные микрополярного стержня через параметры атомной дискретной модели цепочки.

1. Дискретно-моментная модель цепочки атомов. Принцип Гамильтона. Рассмотрим многоатомную молекулу, когда атомы (с одинаковыми массой и моментом инерции) данной молекулы расположены с равным интервалом a вдоль одной прямой (такая молекула называется линейной или атомной цепочной). Пусть на этой прямой расположена ось x. Будем учитывать взаимодействие каждого атома только с его ближайшими соседями. Действующие силы и моменты на атом с номером k от соседних атомов с номерами $k-1$ и $k+1$ отметим следующим образом. Так как указанные силы имеют нецентральный характер, составляющие по оси x отметим буквой N, составляющие по оси y – буквой Q, моменты – буквой L. Движение атомов цепочки проходит в плоскости xy (по оси $x-$ продольная деформация, по оси $y-$ изгибная деформация).

Уравнения движения атома с номером k как тела-точки [20] выражаются следующим образом (рассматриваем свободные колебания):

$$N^{(k+1)} - N^{(k)} = m\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$Q^{(k+1)} - Q^{(k)} = m\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial t^2},$$
$$L_3^{(k+1)} - L_3^{(k)} + Q^{(k)}\frac{1}{2}a + Q^{(k+1)}\frac{1}{2}a = I_3\frac{\partial^2 \omega_3^{(k)}}{\partial t^2}. \qquad (1.2)$$

Здесь m и I_3 – масса и собственный момент инерции каждого атома, $N^{(k)}$ – продольная сила, $Q^{(k)}$ – перерезывающая сила, $L_3^{(k)}$ – изгибающий момент, $\left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\right)$ – компоненты вектора перемещения атома с номером k, $\omega_3^{(k)}$ – свободный поворот k-го атома вокруг собственной оси z. Во втором уравнении системы (1.2) (т.е. в уравнении моментов) для перерезывающих сил $Q^{(k)}$ и $Q^{(k+1)}$ как точки их приложения взяты средние точки между соседними атомами [21].

В литературе (см., например, [22, 23]) хорошо известны выражения для потенциальной энергии многих молекул в линейном приближении (т.е. если считать упругие силы и моменты линейно зависящими от деформационных перемещений и поворотов). Запишем это выражение для рассматриваемой цепочки атомов:

$$V = \frac{1}{2}\sum_k C_1\left(d_1^{(k)}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_k C_2\left(d_2^{(k)}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_k C_3\left(\theta^{(k)}\right)^2, \qquad (1.3)$$

где C_i, $i = 1,2,3$ – упругие постоянные для соответствующих деформаций (продольных или изгибных), $d_1^{(k)}$ – продольные относительные перемещения, $d_2^{(k)}$ – относительные изгибные линейные перемещения, $\theta^{(k)}$ – относительные угловые свободные перемещения, т. е.

$$d_1^{(k)} = u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}, \quad d_2^{(k)} = u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)} - \frac{1}{2}a\left(\omega_3^{(k+1)} + \omega_3^{(k)}\right),$$
$$\theta^{(k)} = \omega_3^{(k+1)} - \omega_3^{(k)}. \qquad (1.4)$$

Выражение потенциальной энергии (1.3) обычно используется для расчета спектров колебаний многоатомных молекул, причём упругие постоянные C_i ($i = 1,2,3$) можно считать предварительно известными (экспериментально) для многих молекул [22, 14].

Легко заметить, что

$$N^{(k+1)} - N^{(k)} = -\frac{\partial V}{\partial u_1^{(k)}}, \quad Q^{(k+1)} - Q^{(k)} = -\frac{\partial V}{\partial u_2^{(k)}},$$
$$L_3^{(k+1)} - L_3^{(k)} = -\frac{\partial V}{\partial \omega_3^{(k)}}. \qquad (1.5)$$

Можем записать закон Гука для рассматриваемой линейной молекулы:

$$N^{(k)} = C_1\left(u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}\right), \qquad (1.6)$$

$$\begin{aligned} Q^{(k)} &= C_2\left[\left(u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}\right) - \frac{1}{2}a\left(\omega_3^{(k)} + \omega_3^{(k-1)}\right)\right], \\ L_3^{(k)} &= C_3\left(\omega_3^{(k)} - \omega_3^{(k-1)}\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Таким образом, дискретная модель (модель молекулярной динамики) для рассматриваемой линейной молекулы построена. В случае продольных колебаний – это уравнение движения (1.1) и закон упругости (1.6), в случае изгибных колебаний – это уравнения движения (1.2) и закон упругости (1.7).

Для рассматриваемой линейной молекулы кинетическая энергия выражается следующим образом:

$$K = \frac{1}{2}\sum_k\left[m\left(\frac{du_1^{(k)}}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{du_2^{(k)}}{dt}\right)^2 + I_3\left(\frac{d\omega_3^{(k)}}{dt}\right)^2\right]. \tag{1.8}$$

Из выражений (1.3), (1.4) и (1.8) следует, что лагранжиан L для рассматриваемой линейной молекулы равен

$$\begin{aligned} L = K - V = \frac{1}{2}\sum_k\Bigg\langle&\left[m\left(\frac{du_1^{(k)}}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{du_2^{(k)}}{dt}\right)^2 + I_3\left(\frac{d\omega_3^{(k)}}{dt}\right)^2\right] - \\ &-\Bigg\{C_1\left(u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}\right)^2 + C_2\left[u\left(u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}\right) - \frac{1}{2}a\left(\omega_2^{(k+1)} + \omega_2^{(k)}\right)\right]^2 + \\ &+C_3\left(\omega_3^{(k+1)} - \omega_3^{(k)}\right)^2\Bigg\}\Bigg\rangle, \end{aligned} \tag{1.9}$$

а принцип Гамильтона выражается обычным образом:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}(K - V)\,dt = 0. \tag{1.10}$$

Легко заметить, что вытекающие из принципа Гамильтона (1.10) (с учётом (1.9)) уравнения Эйлера – Лагранжа представляют собой уравнения движения (1.1) и (1.2).

2. Одномерная («стержневая») континуальная модель линейной цепочки атомов. Принцип Гамильтона для континуальной модели.

Для построения континуальной модели линейной молекулы представим лагранжиан дискретной модели (1.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\sum_k a\Bigg\langle&\left[\frac{m}{a}\left(\frac{du_1^{(k)}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{a}\left(\frac{du_2^{(k)}}{dt}\right)^2 + \frac{I_3}{a}\left(\frac{d\omega_3^{(k)}}{dt}\right)^2\right] - \\ &-\Bigg\{C_1 a\left(\frac{u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}}{a}\right)^2 + C_2 a\left[\frac{u_3^{(k+1)} - u_3^{(k)}}{a} - \frac{1}{2}\left(\omega_3^{(k+1)} + \omega_3^{(k)}\right)\right]^2 + \\ &+C_3 a\left(\frac{\omega_3^{(k+1)} - \omega_3^{(k)}}{a}\right)^2\Bigg\}\Bigg\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Специальная форма, в которой записан лагранжиан дискретной модели (1.9), выбрана для удобства предельного перехода к случаю континуальной (непрерывной) модели, т.е. когда $a \to 0$.

Что касается множителя a, который стоит под знаком суммы перед большими скобками в формуле (2.1), то его следует заменить на $\Delta x = dx$, а суммирование по k заменить интегралом по x. Далее ясно, что индекс k, характеризующий номер атома, должен при переходе к континуальной модели превратиться в непрерывную координату x. Поэтому вместо переменных $u_1^{(k)}(t)$, $u_2^{(k)}(t)$ и $\omega_3^{(k)}(t)$ будем теперь иметь переменные $u(x,t), w(x,t)$ и $\Omega(x,t)$. Что касается величин $C_i \cdot a,, i = 1,2,3,$ ниже убедимся, что предельные их значения, когда $a \to 0$, являются постоянными; пока обозначим их

$$C_i \cdot a, = \widetilde{C}_i, \;\; i = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Поступая указанным выше образом, в результате предельного перехода, при $a \to 0$, формула (2.1) переходит в лагранжиан континуальной модели, для которого имеем:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left\{ \left[\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{I}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 \right] - \right.$$
$$\left. - \left(\widetilde{C}_1 \varepsilon_x^2 + \widetilde{C}_2 \gamma^2 + \widetilde{C}_3 \chi^2\right) \right\} dx \;. \tag{2.3}$$

Здесь

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{a \to 0} \frac{u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}}{a}, \tag{2.4}$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \Omega = \lim_{a \to 0} \left[\frac{u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}}{a} - \frac{1}{2}\left(\omega_3^{(k+1)} + \omega_3^{(k)}\right) \right], \tag{2.5}$$

$$\chi = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \lim_{a \to 0} \frac{\omega_3^{(k+1)} - \omega_3^{(k)}}{a}, \tag{2.6}$$

$$\widetilde{\rho} = \lim_{a \to 0} \frac{m}{a}, \;\; \widetilde{I} = \lim_{a \to 0} \frac{I}{a}, \tag{2.7}$$

$\widetilde{\rho}$ – линейная плотность массы цепочки, $\widetilde{I}$ – линейная плотность её момента инерции, ε_x – относительная продольная деформация, γ – сдвиговая деформация, χ – кривизна цепочки.

Для получения уравнения движения, соотношения упругости и геометрических соотношений для континуальной модели уравнения движения (1.1), (1.2) и соотношения упругости (1.7) представим в виде:

уравнения движения

$$\frac{N^{(k+1)} - N^{(k)}}{\alpha} = \frac{m}{a}\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial t^2}, \tag{2.8}$$

$$
\frac{Q^{(k+1)} - Q^{(k)}}{\alpha} = \frac{m}{a}\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial t^2},
$$

$$
\frac{L_3^{(k+1)} - L_3^{(k)}}{\alpha} + \frac{1}{2}Q^{(k)} + \frac{1}{2}Q^{(k+1)} = \frac{I_3}{a}\frac{\partial^2 \omega_3^{(k)}}{\partial t^2} \tag{2.9}
$$

соотношения упругости

$$
N^{(k)} = c_1 a \frac{u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}}{a}, \tag{2.10}
$$

$$
Q^{(k)} = c_2 a \left[\frac{u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2}\left(\omega_3^{(k)} + \omega_3^{k-1}\right) \right],
$$

$$
L_3^{(k)} = c_3 a \frac{\omega_3^{(k)} - \omega_3^{(k-1)}}{a}. \tag{2.11}
$$

Переходя к пределу, когда $\alpha \to 0$, получим уравнения движения, соотношения упругости и геометрические соотношения для континуальной модели:

уравнения движения

$$
\frac{\partial N}{\partial x} = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.12}
$$

$$
\frac{\partial Q}{\partial x} = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} + Q = \widetilde{I}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}; \tag{2.13}
$$

соотношения упругости

$$
N = \widetilde{c}_1 \varepsilon_x, \tag{2.14}
$$

$$
Q = \widetilde{c}_2 \gamma, \quad L_3 = \widetilde{c}_3 \chi, \tag{2.15}
$$

геометрические соотношения

$$
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.16}
$$

$$
\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \Omega, \quad \chi = \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \tag{2.17}
$$

Уравнения (2.12), (2.14) и (2.16) относятся к продольным колебаниям, а уравнения (2.13), (2.15) и (2.17) – к изгибным колебаниям. К этим группам уравнений следует присоединить начальные и граничные условия.

Для продольных колебаний как начальные условия, при $t = 0$, задаются значения для u и $\frac{\partial u}{\partial t}$, а для изгибных колебаний в начале движения задаются значения для w, Ω и $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \Omega}{\partial t}$.

При $x=0$ или $x=l$ задаются следующие граничные условия: 1) условия для перемещений и свободного поворота, например, если один из этих краев жестко закреплен:

$$u=0 \tag{2.18}$$

для продольных колебаний,

$$w=0, \quad \Omega=0 \tag{2.19}$$

для изгибных колебаний.

2) для свободного края:

$$N=0 \tag{2.20}$$

для продольных колебаний,

$$Q=0, \; L=0 \tag{2.21}$$

для изгибных колебаний.

Могут быть граничные условия смешанного вида.

Следует сказать, что уравнения движения (2.12), (2.13) и граничные условия (2.20), (2.21) можем получить и на основе принципа Гамильтона (1.10), (2.3) для континуальной модели.

Если формулы геометрических соотношений (2.16), (2.17) подставить в соотношения упругости (2.14), (2.15) и полученные выражения подставить в уравнения движения (2.12), (2.13), придем к следующим уравнениям (относительно функции $u=u(x,t)$ при продольных колебаниях $w(x,t)$, $\Omega(x,t)-$ при изгибных колебаниях):

уравнение продольных колебаний

$$\widetilde{c}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \widetilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{2.22}$$

уравнения изгибных колебаний

$$\begin{aligned} &\widetilde{c}_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) = \widetilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ &\widetilde{c}_3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \widetilde{c}_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Omega \right) = \widetilde{I} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Модель (2.12), (2.14), (2.16), (2.18) или (2.20) для продольных колебаний цепочки атомов, а модель (2.13), (2.15), (2.17), (2.19) или (2.21) для изгибных колебаний цепочки атомов представляют, соответственно, одномерные-континуальные («стержневые») модели для колебаний цепочки атомов. Уравнения этих моделей не содержат понятие толщины этих «стержней». Это весьма важный результат для наноматериалов, в частности для графина (если считать, что материал расположен в плоскости xz и все атомы синхронно двигаются относительно оси z, а колебания проходят в плоскости xy: по $x-$ продольные, а по $y-$ изгибные).

Уравнения (2.22) для продольных колебаний цепочки атомов или (2.23) для изгибных колебаний цепочки атомов можно сравнить с соответствующими уравнениями простейших моделей колебаний микрополярных тонких стержней.

3. **Уравнения для простейшей прикладной теории микрополярных упругих тонких стержней с независимыми полями перемещений и вращений. Сравнение построенных моделей и определение микрополярных упругих постоянных.** В работах [17, 18] на основе асимптотического подхода построен простейший вариант прикладной теории микрополярных упругих тонких стержней для задач статики и динамики, а в работе [19] изучены конкретные задачи их свободных колебаний. Определяющая система уравнений прикладной теории микрополярных упругих тонких стержней при свободных колебаниях выражаются следующим образом:

уравнение для продольных колебаний

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

где E – модуль Юнга, а ρ – объёмная плотность массы материала;

изгибные колебания

$$\begin{gathered}\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial \varOmega}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\ B\frac{\partial^2 \varOmega}{\partial x^2}+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\varOmega\right)=I\frac{\partial^2 \varOmega}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где μ – классический модуль сдвига, α – микрополярный модуль сдвига, B – микрополярная упругая постоянная для исследуемого материала, I – объёмная плотность момента инерции.

Как можно убедиться, уравнения (2.22) и (3.1), а также (2.23) и (3.2) внешне вполне схожи. Основное отличие состоит в том, что в уравнениях (2.22), (2.23) $\tilde{\rho}$ представляет собой линейную плотность массы, $\tilde{I}$ – линейную плотность момента инерции, а в уравнениях (3.1), (3.2) ρ – объёмная плотность массы, I – объёмная плотность момента инерции. Понятно, что в левых частях этих уравнений коэффициенты тоже будут физически разными.

Чтобы осуществить сравнение уравнений (2.22) и (3.1), а также (2.23) и (3.2), примем, что представительный объём для рассматриваемого материала – куб размером a, тогда $\frac{\tilde{\rho}}{a^2}$ представит собой приближенную величину объёмной плотности материала, а $\frac{\tilde{I}}{a^2}$ – объёмной плотности момента инерции.

Исходя из этого уравнения (2.22) и (2.23) представим следующим образом:

уравнение продольных колебаний

$$\frac{\tilde{c}_1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

уравнения изгибных колебаний

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tilde{c}_2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\
&\frac{\tilde{c}_3}{a^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}+\frac{\tilde{c}_2}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\Omega\right)=I\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Сравнивая уравнения (3.1) и (3.3), а также (3.2) и (3.4), получим

$$E=\frac{\tilde{c}_1}{a^2}, \tag{3.5}$$

$$\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}=\frac{\tilde{c}_1}{a^2}, \quad B=\frac{\tilde{c}_3}{a^2}. \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) и (3.6) представляют связи между физическими макропараметрами и микро(нано)параметрами данного материала при продольных и изгибных колебаниях. Формулы (3.6) дают возможность вычислять механические постоянные микрополярного вещества через параметры его атомно-молекулярной структуры.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Дискретная и континуальная (микрополярная) «стержневая» модели атомной цепочки кристаллического материала

Рассматривается линейная цепочка взаимодействующих атомов. Исходя из того, что взаимодействие между атомами имеет общий характер, т.е. силовое взаимодействие – нецентральное, и кроме того имеет место также моментное взаимодействие, построена дискретная модель атомной линейной цепочки с установлением также принципа Гамильтона. При помощи предельного перехода построена континуальная (непрерывная) модель атомной линейной цепочки, которая представляет собой микрополярную одномерную «стержневую» модель. Устанавливаются принцип Гамильтона для этой континуальной модели, а также соответствие между ранее построенной одномерной простейшей моделью микрополярного стержня с независимими поворотами и континуальной моделью атомной цепочки, в результате чего получены формулы между микрополярными упругими постоянными и параметрами дискретной модели атомной цепочки.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Նանոբյուրեղային նյութից ատոմային շղթայի դիսկրետ և կոնտինուալ (միկրոպոլյար) «ձողային» մոդելները

Դիտարկվում է փոխազդեցության մեջ գտնվող ատոմների գծային շղթա: Հաշվի առնելով, որ ատոմների միջև փոխազդեցությունը ընդհանուր բնույթի է (այսինքն՝

ուժային փոխազդեցությունը ոչ կենտրոնական է, ու, բացի այդ, տեղի ունի նաև մոմենտային փոխազդեցություն), կառուցվում է ատոմային գծային շղթայի դիսկրետ մոդելը, որի համար հաստատվում է Համիլտոնի սկզբունքը: Այնուհետև սահմանային անցումի միջոցով կառուցվում է ատոմային գծային շղթայի կոնտինուալ (անընդհատ) մոդելը, որը միկրոպոլյար «ձողային» միաչափ մոդել է: Հաստատվում է նաև այդ կոնտինուալ մոդելի համար Համիլտոնի սկզբունքը: Նախապես կառուցված անկախ պտույտներով միկրոպոլյար ձողի պարզագույն մոդելի և ատոմային շղթայի կոնտինուալ միաչափ մոդելի միջև հաստատվում է համապատասխանություն, որի արդյունքում ստացվում են բանաձևային առնչություններ ձողի միկրոպոլյար առաձգական հաստատունների և ատոմային գծային շղթայի դիսկրետ մոդելի պարամետրերի միջև:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Discrete and Continual (Micropolar) «Beam» Models of the Atomic Chain of the Crystalline Material

A linear chain of interacting atoms is studied in the present paper. Assuming that the interaction between atoms is common, i.e. force interaction is noncentral and, moreover, moment interaction also takes place, a discrete model of the atomic linear chain is constructed with the establishment of Hamilton principle. Then, using the limiting transition, a continual (continuous) model of the atomic linear chain is constructed, which is a micropolar one-dimensional «beam» model. Hamilton principle for this continual model is also established. A correspondence is established between the previously constructed one-dimensional simplest model of a micropolar beam with independent rotations and the continual model of the atomic chain. As a result, formulas are obtained between the micropolar elastic constants and the parameters of the discrete model of the atomic chain.

Литература

1. *Попов А.М.* Вычислительные нанотехнологии. М. КНОРУС. 2017. 312 с.
2. *Елецкий А.В.* – Успехи физ. наук. 2007. Т. 37. № 3. С. 233-274.
3. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Под ред. А.И. Потапова. Нижний Новгород. Изд-во ННГТУ. 2010. 303 с.
4. *Yakobson B.I., Brabeck C.I., Bernholc J.* – Phys. Rev. Lett. 1996. V. 75. P. 2511-2514.
5. *Ru C.Q.* – Phys. Rev. B. 2000. V. 62. № 15. P. 9973-9976.
6. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д.* – Доклады РАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 764-768.
7. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* – Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
8. *Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5. С. 6-16.
9. *Кривцов А.М.* Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М. Физматлит. 2007. 304 с.
10. Теоретическая механика. Упругие и тепловые свойства идеальных кристаллов. Под ред. А.М. Кривцова. СПб. Изд. Политехн. ун-та. 2009. 144 с.
11. *Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* – Доклады РАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 345-347.
12. *Odegard G.M., Gates T.S., Nicholson L.M., Wise K. E.*– NASA Langley Research Center: Technical Memorandum NASA/TM-2001-210863. 2001.

13. *Гольдштейн Р.В., Ченцов А. В.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 57-74.
14. *Li C. A., Chou T. W.* – Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 2487-2499.
15. *Беринский И.Е.*– Научно-техн. ведомости СПбГПУ. 2010. № 104. С. 13-20.
16. *Wan H., Delale F.* – Meccanica. 2010. V. 45. P. 43-51.
17. *Саркисян С.О.* – Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 5. С. 41-54.
18. *Саркисян С.О.* В кн.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Сб., посвященный 85-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван. Гитутюн. 2007. С. 177-183.
19. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* В: Сб. научных трудов, посвященный 80-летию чл.-кор. АН СССР, академика НАН Армении С. Н. Мергеляна. Ванадзор. Изд-во Ванадзорского педагогического ин-та им. Ов. Туманяна. 2008. С. 5-17.
20. *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб. Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.
21. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д.* Теоретическая механика. Определение эквивалентных упругих характеристик дискретных систем. СПб. Изд-во СПбГПУ. 2004. 32 с.
22. *Грибанов А.И.* – Механика полимеров. 1967. № 4. С. 608-614.
23. *Кормилицын О.П.* Механика материалов и структур нано- и микротехники. М. Академия. 2008. 224 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 119 2019 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян[1,2], М. А. Микилян[1,2], И. А. Варданян[1,2], А. В. Пантелеев[3]

Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний цилиндрической панели

(Представлено 5/II 2019)

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, сверхзвуковой поток газа, амплитудно-частотная зависимость.*

Введение. Имеются многочисленные исследования, посвященные устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-4] и в обзорных статьях [5, 6]. Исследования проведены как в линейной, так и нелинейной постановке. Решением линейных задач получены наименьшие (критические) значения величины скорости обтекающего потока, при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно, так и приближенно (в основном, используя метод Галеркина). Нелинейные задачи решены приближенными методами, и одним из основных вопросов исследований было изучение зависимости частоты флаттерных колебаний от величины амплитуды возмущений (амплитуды). Исследования в основном посвящены изучению амплитудно-частотной зависимости в случае пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [7, 8]. В случае отсутствия обтекающего потока характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинки носит жесткий характер [4], т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний увеличивается. В работах [7, 8], в частности, установлено, что: а) присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости; б) существование незатухающих нелинейных колебаний возможно как в случае докритических, так и посткритических скоростей. Настоящая работа посвящена изучению аналогичных вопросов в случае гибких цилиндрических оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Показано существование определенных областей изменения величины частоты колебаний, при которых: а) зависимость амплитуда-частота может быть многозначной, б) существует интервал изменения частоты, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания (зона молчания), в) показана возможность существования точек бифуркации. Установлено существование различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, причем переход от одной зависимости к другой можно отрегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

1. Постановка задачи устойчивости. Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины h. Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам x, y, z, где координатные линии x и y совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия z прямолинейная и представляет собой расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущенной скоростью $\vec{u} = (U, 0, 0)$, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы. Не вдаваясь в подробности, приведем основные дифференциальные уравнения в частных производных и граничные условия, описывающие колебания и устойчивость рассматриваемой аэроупругой системы. Подробности можно найти в работах [1, 2, 7, 12, 13], на основе которых приведены постановка задачи и метод сведения к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа – Лява, согласно которой [9]

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t), \end{aligned} \tag{1}$$

где u_i – компоненты перемещения точек оболочки $(i = 1, 2, 3)$, u, v и w – тангенциальные и нормальные компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки;

2) давление газа учитывается по приближенной формуле «поршневой теории» [10, 11]

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{æ - 1}{2}\frac{\mathrm{v}_3}{a_\infty}\right)^{\frac{2æ}{æ-1}}, \tag{2}$$

где p – давление газа на поверхности оболочки, p_∞ – давление невозмущенного потока газа, v_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности оболочки, a_∞ – величина скорости звука для невозмущенного газа, æ – показатель политропы;

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменяемости, считая, что прогибы $w(x,y,t)$ сравнимы с толщиной оболочки [4].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения оболочки [1]:

$$D\Delta^2 w+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æ p_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+æ p_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{R}-æ p_\infty\frac{æ+1}{4}M^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{M}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right] \tag{3}$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$, $M=\dfrac{U}{a_\infty}$, $a_\infty=\dfrac{æ p_\infty}{\rho_\infty}$, $F(x,y,t)$ – функция напряжений $\left(T_{11}=\partial^2 F/\partial y^2, T_{22}=\partial^2 F/\partial x^2, T_{12}=-\partial^2 F/\partial x\partial y\right)$, T_{ik} - внутренние усилия, ε – коэффициент линейного затухания, $M=U/a_\infty$ – число Маха, t – время, R – радиус оболочки, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (3)–(4) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опертая по всему контуру $\left(0\le x\le a,\ 0\le y\le b\right)$ пологая оболочка, края которой свободно смещаются в плане. Тогда, следуя [1], граничные условия принимаются в виде:

при $x=0$, $x=a$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{5}$$

$$\overline{T}_{11}=0,\quad \overline{T}_{12}=0, \tag{6}$$

при $y=0$, $y=b$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{7}$$

$$\overline{T}_{22}=0,\quad \overline{T}_{21}=0, \tag{8}$$

где $\overline{T}_{ik}$ – значения осредненных вдоль кромок усилий.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенное решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (5) и (7), будем искать в виде

$$w(x,y,t)=\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\sin\lambda_k x\right)\sin\mu_1 y;\quad \lambda_k=k\pi/a,\ \mu_n=n\pi/b. \tag{9}$$

Подставив (9) в (4), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F. Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (6) и (8), при $n=2$ представляется в виде

$$\begin{aligned}F(x,y,t)=Eh\Bigg[&\frac{\lambda_1^2\sin(\lambda_1 x)\sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{11}}f_1(t)+\frac{\left(\mu_1^4\cos(\lambda_2 x)+\lambda_1^4\cos(\mu_2 y)\right)}{2\lambda_4^2\mu_1^2}f_1^2(t)+\\&+\frac{\lambda_2^2\sin(\lambda_2 x)\sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{21}}f_2(t)+\frac{\left(\mu_1^4\cos(\lambda_4 x)+\lambda_2^4\cos(\mu_2 y)\right)}{2\lambda_4^2\mu_2^2}f_2^2(t)+\\&+\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}\Bigg(\cos(\lambda_3 x)-9\cos(\lambda_1 x)+\\&+\lambda_3^4\left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}}-\frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}}\right)\cos(\mu_2 y)f_1(t)f_2(t)\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\Delta_{ij}=\frac{1}{Eh}\left(\lambda_i^2+\mu_j^2\right)^2.$$

Для определения $f_i(t)$ воспользуемся уравнением (3). Подставляя (9) и найденное выражение для F в (3), применяя метод Бубнова – Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1=f_1(t)/h$ $x_2=f_2(t)/h$, получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 12]:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+\\&\qquad+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)+L\left(\delta_{11}x_1^2+\delta_{12}x_2^2\right)=0\\&\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+\\&\qquad+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)+L\delta_{21}x_1x_2=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau=\omega_1 t$, введены обозначения

$$k=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{4}{16\rho_0\omega_1^2},\quad L=\frac{1}{\rho_0h\omega_1^2},$$
$$\nu=M\frac{h}{a},\quad \gamma=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \chi=\frac{1}{\omega_1}\left(\varepsilon+\varepsilon_a\right), \tag{14}$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik}, учитывающие аэродинамическую нелинейность:

$$\alpha_{11}=\frac{2}{9}(æ+1),\quad \alpha_{12}=\frac{56}{45}(æ+1),\quad \alpha_{21}=\frac{16}{45}(æ+1),$$
$$\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1), \tag{15}$$

и коэффициенты γ_{ik} и δ_{ik}, учитывающие геометрическую нелинейность:

$$\gamma_{11}=Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right),\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}},\ \gamma_{22}=Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),$$
$$\delta_{11}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_2^2}+\frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}}\right),\ \delta_{12}=-\frac{32\lambda_1^2\mu_1^4}{15\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_4^2}+\frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}}\right), \tag{16}$$
$$\delta_{21}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{8Eh}{15\lambda_2^2}+\frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}}+\frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}}+\frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}}+\frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}}\right).$$

В (13) ν – приведенный параметр скорости, χ – приведенный параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулой

$$\omega_i^2=\frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2+\frac{\lambda_i^4}{R^2\Delta_{i1}}\right]\qquad (i=1,2). \tag{17}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (13) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра ν).

Аналогичным образом получается система уравнений в случаях $n>2$. Они довольно громоздки и здесь не приводятся.

3. Определение критической скорости флаттера и амплитуды флаттерных колебаний. ***3.1. Определение критической скорости.*** Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра $\nu=\nu_{cr}$, при котором невозмущенное состояние оболочки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение ν_{cr} будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (13) линейная система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2=0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_1=0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Представляя решение системы (18) в виде

$$x_1=y_1e^{\lambda\tau},\quad x_2=y_2e^{\lambda\tau},$$

получаем следующее характеристическое уравнение относительно λ:

$$\lambda^4+2\chi\lambda^3+\left(\gamma^2+1+\chi^2\right)\lambda^2+\chi\left(\gamma^2+1\right)\lambda+\gamma^2+\frac{4}{9}k^2\nu^2=0.$$

Невозмущенная форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости согласно теореме Гурвица записываются в виде:

$$\chi>0,\quad \chi\left(1+\gamma^2\right)>0,$$

$$\left(\gamma^2-1\right)^2+2\chi^2\left(1+\gamma^2\right)-\frac{16}{9}k^2\nu^2>0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений ν все корни λ характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, и тривиальное решение $w\equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $\nu=\nu_{cr}$, при котором два корня характеристического уравнения становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому из третьего неравенства получается формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости оболочки [1, 13]:

$$\nu_{cr}=\frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma^2+1\right)}{\left(\gamma^2-1\right)^2}}. \tag{19}$$

Принимая $\nu=\nu_{cr}$ из характеристического уравнения, найдем следующее значение θ_{cr} частоты колебания оболочки при линейном флаттере $\left(\lambda_{cr}=\pm i\theta_{cr}\right)$

$$\theta_{cr}^2=\frac{1}{2}\left(\gamma^2+1\right). \tag{20}$$

Формулы, аналогичные (19) и (20), получены многими авторами (см. списки литературы, приведенные в [1, 13]) и являются первыми приближениями для ν_{cr} и θ_{cr}.

3.2. Исследование характера амплитудно-частотной зависимости. Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (13). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости тонких пластин наличием членов с квадратичными нелинейностями, имеющими как аэродинамическое, так и геометрическое происхождение. Указанные члены характеризуют несимметричность нелинейности, и поэтому, приближенное периодическое решение системы (13), следуя работам [12, 14], будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos\theta\tau + B_1 \sin\theta\tau + C_1 + \ldots, \\ x_2 &= A_2 \cos\theta\tau + B_2 \sin\theta\tau + C_2 + \ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь A_i, B_i, C_i и $\theta = \omega\omega_1^{-1}$ $(i = 1,2)$ – неизвестные постоянные; ω - неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие высшие гармоники. Структура решения (21) отличается от существующих [1] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых дает возможность учитывать влияния квадратичной нелинейности.

Подставим решение (21) в систему (13) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$ (члены, содержащие высшие гармоники, считаются пренебрежимо малыми). Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближенного решения этой системы предполагается, что [12]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi|B_i| << |A_i|$, $|B_i| << |A_i|; (i = 1,2)$), б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившиеся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущенного $\left(|A_j| >> |C_j|;\ j = 1,2\right)$. Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведением величин B_1, B_2, C_1 и C_2, указанная нелинейная система представится подсистемами, полученными приравниванием к нулю свободных членов, коэффициентов при $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$.

Третья подсистема, полученная приравниванием к нулю коэффициентов при $\sin\theta\tau$, учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания указанная подсистема имеет следующее приближенное решение:

$$B_1 \approx 0,\ \ B_2 \approx 0 \text{ при } \chi \approx 0.$$

Из остальных подсистем, исключая C_1 и C_2, получается нелинейная система алгебраических уравнений, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и ν:

$$
\begin{aligned}
&A_1(1-\theta^2)-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\alpha_{11}A_1C_1+2k\nu^2\alpha_{12}A_2C_2+\\
&\qquad+\frac{3}{4}k\nu^3A_2(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2)=0,\\
&A_2(\gamma^2-\theta^2)+\frac{2}{3}k\nu A_1+k\nu^2\alpha_{21}(A_1C_2+A_2C_1)+\\
&\qquad+\frac{3}{4}k\nu^3A_1(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2)=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
C_1&=-K\nu^2\frac{\left(L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_2-\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_4}{2\Delta}\\
C_2&=-K\nu^2\frac{\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_1-L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\left(\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3}{2\Delta}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1=1+\frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2+K\nu^3\beta_{11}A_1A_2,\\
&\Delta_2=\gamma^2+K\nu^3\beta_{22}A_1A_2+\frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2,\\
&\Delta_3=\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{21}A_1^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{22}A_2^2+Q\gamma_{21}A_1A_2,\\
&\Delta_4=-\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{12}A_2^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{11}A_1^2+Q\gamma_{12}A_1A_2,\\
&\Delta=\Delta_1\Delta_2-\Delta_3\Delta_4.
\end{aligned}
$$

Имея в виду, что задача многофункциональная, исследование приводится поэтапно: при $\nu=\nu_{cr}$, $\nu<\nu_{cr}$ и $\nu>\nu_{cr}$. Настоящая работа посвящена первому этапу $(\nu=\nu_{cr})$. Остальные этапы будут рассмотрены в дальнейших наших исследованиях. В этом случае нелинейные колебания рассматриваемой аэроупругой системы описываются системой (22), заменяя в ней ν на ν_{cr}. Эта система решена численно при следующих исходных данных: $E=7.3\cdot10^{10}$ Н/м^2; $\mu=0.34$; ρ_0=$2.79\cdot10^3$кг/м^3 (дюралюминий), æ=1.4; $\rho_\infty=1.29$ кг/м^3; $a_\infty=340.29$ м/с (воздух). Исследован характер зависимости амплитуды установившихся флаттерных колебаний A в точке $(a/2,\ b/2,\ 0)$ оболочки (в рассматриваемом случае $A=A_1$) от частоты θ. Результаты численных расчетов, представляющие графики функции $A(\theta)$, при $a=100h$ и различных значениях геометрических параметров R/a и b/a приведены на рис. 1-3, которые показывают:

- если значение R/a достаточно велико и $b/a<1$, то наблюдается следующий характер зависимости $A(\theta)$: невозмущенное состояние оболочки устойчиво при $\theta<\theta_{cr}$, а при $\theta=\theta_{cr}$ амплитуда колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения. С дальнейшим увеличением θ амплитуда возрастает. При уменьшении частоты θ режим колебаний сохраняется вплоть до $\theta=\theta_{*}<\theta_{cr}$ (точка β_{*} на рис. 1), где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. Точка $\theta=\theta_{cr}$ является точкой бифуркации (рис.1);

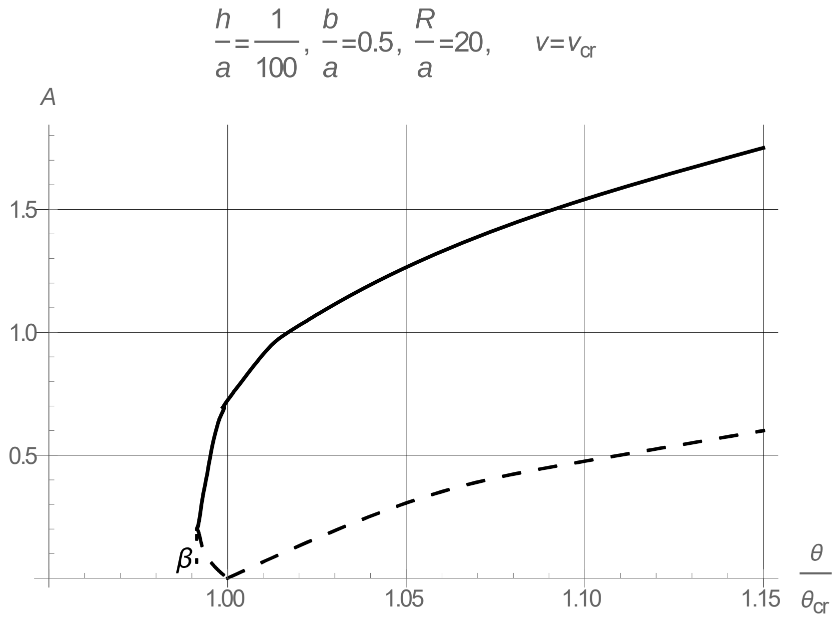


Рис. 1. График функции $A(\theta)$ при больших значениях R/a.

- при умеренных значениях параметра $R/a>1$ зависимость частоты θ нелинейных колебаний цилиндрической оболочки от амплитуды A идентична характеру указанной зависимости в случае собственных нелинейных колебаний гибких пластин в отсутствие обтекающего потока (рис. 2);

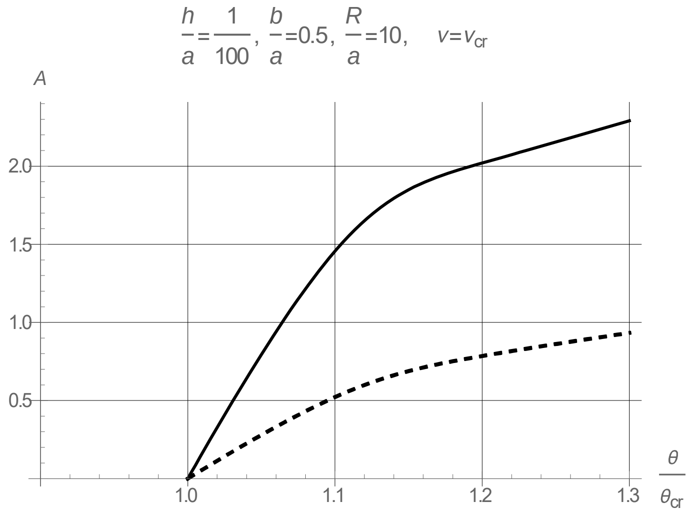


Рис. 2. График функции $A(\theta)$ при умеренных значениях R/a.

- дальнейшее уменьшение параметра кривизны $R/a>1$ приводит к зависимости $A(\theta)$, показанной на рис. 3. Из этого рисунка видно, что существует интервал $[\theta_*,\theta^*]$ изменения частоты θ (точки β_* и β^* на рисунке), вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания, т.е. области $[0,\theta_*]$ и $[\theta^*,\infty)$ являются зонами молчания. При этом: а) с увеличением θ состояние оболочки устойчивое, пока $\theta<\theta_{cr}$. При $\theta=\theta_{cr}$ амплитуда колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения, после чего в интервале $[\theta_{cr},\theta^*]$ графиком амплитуды является кривая (L_1,L_2) на рисунке. В точке L_2 колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. С уменьшением частоты при $\theta=\theta^*$ амплитуда скачком возрастает и в интервале $[\theta_*,\theta^*]$ графиком амплитуды является кривая (L_2,L_3) на рисунке. При $\theta=\theta_*$ колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки.

Отметим, что численные вычисления показывают, что зависимость, приведенная на рис. 1, имеет место также при $b/a>1$.

Таким образом, как существование различных типов зависимостей $A(\theta)$, точек бифуркации и областей молчания, так и переход от одной

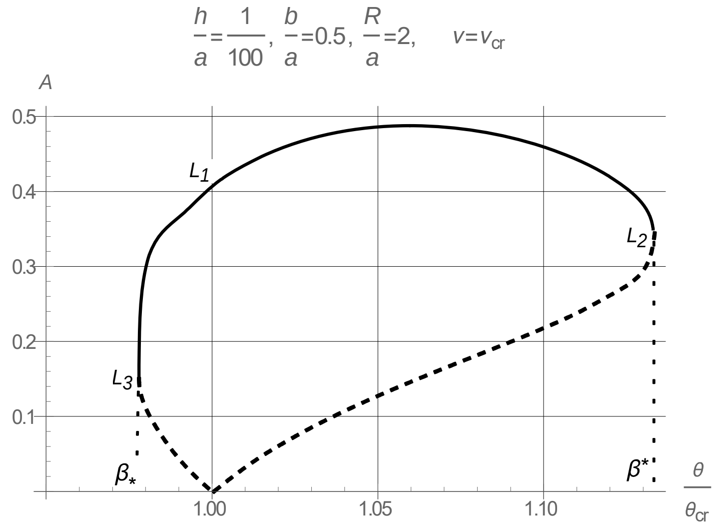


Рис. 3. График функции $A(\theta)$ при сравнительно малых значениях R/a.

зависимости $A(\theta)$ к другой можно урегулировать оптимальным выбором геометрических параметров задачи.

[1]Российско-Армянский университет
[2] Институт механики НАН РА
[3] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
baghdasaryan@rau.am, marine.mikilyan@rau.am, irena_123@bk.ru, avpanteleev@inbox.ru

Академик Г. Е. Багдасарян, М. А. Микилян, И. А. Варданян, А. В. Пантелеев

Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний цилиндрической панели

Рассматривается задача о нелинейных колебаниях изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Основным предметом исследования является изучение влияния обтекающего оболочку сверхзвукового потока на амплитудно-частотную зависимость установившихся флаттерных колебаний. Исследование проведено с учетом обоих типов нелинейности: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учету аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда-частота в определенных интервалах изменения параметра частоты является многозначной. Этот факт проиллюстрирован на приведенных в тексте рисунках в основном в виде двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показано существование определенных областей изменения частоты колебаний, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания (зоны молчания). Установлено существование различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, причем переход от одной зависимости к другой можно отрегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Մ. Ա. Միկիլյան,
Ի. Ա. Վարդանյան, Ա. Վ. Պանտելեև

Գերձայնային հոսանքի ազդեցությունը գլանային պանելի ոչ գծային ֆլատերային տատանումների «ամպլիտուդա-հաճախություն» կապի վրա

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտության հիմնական առարկան հաստատված ֆլատերային տատանումների «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածության վրա գերձայնային հոսանքի ազդեցության ուսումնասիրությունն է: Հետազոտությունը կատարված է աէրոառաձգական և երկրաչափական (քառակուսային և խորանարդային) ոչ գծայնությունների հաշվառմամբ: Աէրոդինամիկական ոչ գծայնության (հատկապես նրա ոչ գծային քառակուսային մասի) հաշվառման շնորհիվ ցույց է տրված, որ հաճախության պարամետրի փոփոխման որոշակի միջակայքերում «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածությունը բազմարժեք է: Այդ փաստը ցուցադրված է տեքստում բերված գծագրերի միջոցով, որոնք պատկերված են երկու ճյուղերի տեսքով, որոնցից ստորինները, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Անկայուն ճյուղերը բաժանում են երկու հարևան կայուն լուծումների ձգողականության տիրույթները: Այստեղից հեշտությամբ որոշվում է գրգռման մեծությունը, որն անհրաժեշտ է համակարգը մի կայուն վիճակից մյուսին փոխանցելու համար: Ցույց է տրված տատանումների հաճախության փոփոխության որոշակի տիրույթների գոյությունը, որտեղ հնարավոր չէ գրգռել չմարող ֆլատերային տատանումներ (լռության տիրույթներ): Ցույց է տրված, որ ինչպես տարբեր տիպի «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածությունների, բիֆուրկացիայի կետերի և լռության տիրույթների գոյությունը, այնպես էլ մի կախվածությունից մյուսին անցումը կարելի է ղեկավարել տատանումների հաճախականության պարամետրի օպտիմալ ղեկավարման միջոցով:

Academician G. Y. Baghdasaryan, M. A. Mikilyan, I. A. Vardanyan, A. V. Panteleev

Influence of Supersonic Flow on the Character of Dependence «Amplitude-Frequency» of Nonlinear Flutter Oscillations of Cylindrical Panel

The problem of nonlinear oscillations of isotropic shallow cylindrical shell in a supersonic gas flow is considered. The main subject of research is the study of influence of supersonic flow on the dependence «amplitude-frequency» of steady-state flutter oscillations. The study was conducted taking into account both types of nonlinearity:

aerodynamic and geometric (both quadratic and cubic). Taking into account the aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part), it was found that the dependence “amplitude – frequency” in certain intervals of the frequency parameter is a multi-valued one. This fact is illustrated in the figures brought in the text, mainly in the form of two branches, the lowers of which, probably, are unstable. Unstable branches separate the areas of two neighboring stable solutions. From here it is easy to find the value of perturbation necessary to transfer the system from one stable branch to another. It is shown the existence of certain areas of change of frequency of oscillations, at which it is impossible to generate undamped flutter oscillations (zones of silence). It has been established that both existence of various types of dependencies “amplitude-frequency”, bifurcation points and areas of silence, and the transition from one dependency to another can be managed by the optimal choice of oscillation frequency parameter.

Литература

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
2. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden. Noordhoff International Publishing. 1975.
3. *Olson M.D.* Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells. Dissertation (Ph.D.). California Institute of Technology. 1966.
4. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
5. *Dowell E.H.* – AIAA Journal. 1970. V. 8. № 3. P. 385-399.
6. *Новичков Ю.Н.* – Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел, М. Наука. 1978. Т. 11. С. 67-122.
7. *Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E., Frulla G., Marzocca P.* – International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. V. 77. P. 51-60.
8. *Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.* – Journal of Aerospace Engineering, 2017 V. 30. N 5.
9. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М. Гостехтеориздат. 1949.
10. *Ashley H., Zartarian C.* – Journ. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 6.
11. *Илюшин А.А.* – ПММ. 1956. Т. 20. Вып.6.
12. *Багдасарян Г.Е.* – Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 92-98.
13. *Швейко Ю.Ю.* – Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение.1960. № 6.
14. *Гнуни В.Ц.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1960. Т. 13. № 1.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 119 2019 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

И. А. Варданян, А. А. Шмавонян

Задача термоупругого флаттера замкнутой цилиндрической оболочки

(Представлено академиком Г. Е. Багдасаряном 9/II 2019)

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, сверхзвуковой поток газа, температурное поле.*

1. Постановка задачи и основные предположения. Рассмотрим тонкую изотропную замкнутую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R, находящуюся в постоянном температурном поле T. Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам x,φ,r, координатные линии x и φ совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки (x – вдоль образующей, φ – по дуге поперечного сечения). Пусть с внешней стороны оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы. Постановка задачи заимствована из [1]. В основе исследования лежат следующие известные предположения:

а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях [2];

б) «закон плоских сечений» при определении аэродинамического давления [3, 4]

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{æ-1}{2}\frac{v_3}{a_\infty}\right)^{\frac{2æ}{æ-1}}, \tag{1}$$

где p – давление газа на поверхности пластинки, a_∞ – скорость звука для невозмущенного газа $\left(a_\infty^2 = æ p_\infty \rho_\infty^{-1}\right)$, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, æ – показатель политропы, v_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки;

в) линейный закон изменения температуры $T(x,\theta,r)$ по толщине оболочки [4]: $T = T_0(x,\varphi) + (R-r)\Theta(x,\varphi)$;

г) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [5].

Для простоты и наглядности принимается, что из лицевых поверхностей $\left(r = R \pm h/2\right)$ оболочки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^{+} и T^{-} соответственно), а боковые поверхности ($x = 0$ и $x = a$) теплоизолированы.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля $\left(\Theta \neq 0\right)$ происходит выпучивание оболочки (с прогибом $w_T(x)$ и продольным перемещением $u_T(x)$), и вследствие этого появляется аэроупругое давление. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [1], и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

2. Характеристики невозмущенного состояния. ***2.1. Определение температурного поля.*** На основе принятых предположений задача определения стационарного температурного поля сводится к решению уравнения теплопроводности $\Delta T = 0$ в области, занимаемой оболочкой, при следующих поверхностных условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k\left(T - T^{\pm}\right) \quad \text{при} \quad r = R \pm \frac{h}{2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \;\; и \;\; x = a .$$

Сформулированная задача теплопроводности, согласно предположению о линейной зависимости температуры от толщины оболочки, имеет следующее решение:

$$T = T_0 + (r - R)\Theta, \qquad T_0 = \frac{T^{+} + T^{-}}{2}, \;\; \Theta = \frac{k\left(T^{+} - T^{-}\right)}{kh - 2\lambda}. \tag{2}$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент теплоотдачи.

2.2. Определение термоупругих напряжений и перемещений. Учитывая принятые предположения, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких оболочек имеем:

соотношения

$$u_0^{(r)} = w_T\left(x\right), \quad u_0^{(x)} = u_T\left(x\right) - (r - R)\frac{dw_T}{dx} \tag{3}$$

согласно гипотезам Кирхгофа – Лява;

уравнения относительно u_T и w_T :

$$\frac{d^2 u_T}{dx^2} + \frac{\mu}{R}\frac{dw_T}{dx} = 0 \tag{4}$$

$$D\left[\frac{d^4 w_T}{dx^4}+\frac{12}{Rh^2}\left(\mu\frac{du_T}{dx}+\frac{w_T}{R}\right)\right]+æ p_\infty M\frac{dw_T}{dx}=0, \tag{5}$$

согласно теории тонких оболочек;

выражение для внутренних усилий невозмущенного состояния:

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= \int\limits_{R-h/2}^{R+h/2}\sigma_{11}^0 dr=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{du_T}{dx}+\mu\frac{w_T}{R}-\alpha\left(1+\mu\right)T_0\right], \\ T_{22}^0 &= \int\limits_{R-h/2}^{R+h/2}\sigma_{22}^0 dr=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\mu\frac{\partial u_T}{\partial x}+\frac{w_T}{R}-\alpha(1+\mu)T_0\right] \end{aligned} \tag{6}$$

согласно обобщенному закону Гука.

Здесь $M=Ua_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $a_\infty = æ p_\infty \rho_\infty^{-1}$ – скорость звука для невозмущенного газа, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, $æ$ – показатель политропы, $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки.

Решения уравнений (4) и (5) должны удовлетворять условиям закрепления краев оболочки $x=0$ и $x=a$. Будут рассмотрены краевые условия следующего типа:

края шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси $0x$

$$w_T=0,\quad \frac{d^2 w_T}{dx^2}+\alpha\left(1+\mu\right)\Theta=0 \quad \textit{при} \quad x=0, x=a, \tag{7}$$

$$\frac{du_T}{dx}-\alpha\left(1+\mu\right)T_0=0 \quad \textit{при} \quad x=0, x=a. \tag{8}$$

Решение u_T уравнения (4), удовлетворяющее условию (8), имеет следующий вид (при этом использовано также условие $w_T=0$ на торцах оболочки):

$$u_T=-\frac{\mu}{R}\int\limits_0^x w_T(\xi)d\xi+\alpha\left(1+\mu\right)T_0 x. \tag{9}$$

В силу (9) из (6) имеем:

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= 0, \\ T_{22}^0 &= Eh\left[\frac{w_T}{R}-\alpha T_0\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Задача определения w_T в силу (5) и (9) сводится к решению уравнения

$$D\frac{d^4 w_T}{dx^4}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{1-\mu^2}{R}w_T+\alpha\mu(1+\mu)T\right)+æp_\infty M\frac{dw_T}{dx}=0 \qquad (11)$$

при граничных условиях (7). Получено решение уравнения (11), удовлетворяющее указанным условиям. Его здесь не приводим ввиду громоздкости.

3. Характеристики возмущенного состояния. Для получения уравнений возмущенного состояния учитывается, что:

а) величины, характеризующие невозмущенное состояние, удовлетворяют уравнениям и соотношениям, полученным в пункте 2;

б) величины невозмущенного состояния определены на основе линейной теории термоупругости (подлежащие определению величины входили в соответствующие уравнения и краевые условия линейно);

в) в окончательных уравнениях и соотношениях величины, характеризующие невозмущенное состояние, будут присутствовать только в первых степенях.

На основе теории термоупругости изотропных тел, гипотезы Кирхгофа – Лява и принятых предположений аналогично [6] получена следующая система линейных дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{(1-\mu^2)T_{22}^0}{ERh}\frac{\partial w}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Delta w+\frac{w}{R^2}\right)=0;\\
&D\left[\Delta^2 w+\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}\right)\right]+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\\
&\quad -T_{22}^0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{w}{R^2}\right)+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}++æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{æ(æ+1)}{2}p_\infty M^2\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}=0,
\end{aligned} \qquad (12)$$

где $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$ и $w(x,\varphi,t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, ρ_0 – плотность материала оболочки, ε – коэффициент линейного затухания.

При решении конкретных задач устойчивости к системе (12) присоединяются граничные условия относительно возмущений, вытекающие из условий закрепления краев оболочки. Например, если края оболочки шарнирно оперты и неподвижны, то граничные условия представляются в виде

$$\frac{du}{dx}=0, v=0, w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a. \qquad (13)$$

4. Условия и область устойчивости. Решение системы (12), удовлетворяющее условиям (13), представим в виде

$$
\begin{aligned}
&u(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\cos\lambda_i x\right)\sin n\theta,\\
&v(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)\sin\lambda_i x\right)\cos n\theta,\\
&w(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}w_i(t)\sin\lambda_i x\right)\sin n\theta,\quad \left(\lambda_i=\frac{i\pi}{a}\right),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $u_i(t),\ v_i(t),\ w_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t.

Подставляя (14) в систему (12) и используя процесс ортогонализации, ограничиваясь случаем двухчленной аппроксимации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций $x_m = w_m/h$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+\alpha_{11}x_1-\frac{2K\nu}{3}x_2+\alpha_{12}x_2=0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\frac{2K\nu}{3}x_1+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2=0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 t=\tau,\ \chi=\frac{1}{\omega_1}\left(\varepsilon+\frac{a_\infty\rho_\infty}{\rho h}\right),\ K=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\ \nu=M\frac{h}{a},\\
&\omega_1^2=\frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_1^2+\mu_n^2\right)^2+\frac{\lambda_1^4}{R^2\Delta_{1n}}\right],\\
&\alpha_{11}=\sigma_{11}+T_0\sigma_{11}^{(1)}+\Theta\sigma_{11}^{(2)},\\
&\alpha_{12}=\Theta\sigma_{12}^{(2)},\\
&\alpha_{21}=\Theta\sigma_{21}^{(2)},\\
&\alpha_{22}=\sigma_{22}+T_0\sigma_{22}^{(1)}+\Theta\sigma_{22}^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты σ_{ij} и $\sigma_{ij}^{(1)}$ зависят только от геометрических и физико-механических параметров, а $\sigma_{ij}^{(2)}$ – также от приведенного параметра скорости ν аэротермоупругой системы и здесь не приводятся.

Представляя решение системы (15) в виде

$$
x_1=y_1e^{\lambda\tau},\quad x_2=y_2e^{\lambda\tau},
$$

из условия существования нетривиального решения получим следующее характеристическое уравнение относительно λ:

$$
a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0,
\tag{16}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 = 2\chi\\
&a_2 = T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right) + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}\right) + \chi^2\\
&a_3 = \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} + T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right) + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}\right)\right]\chi\\
&a_4 = -\Theta\left[\frac{2}{3}K\nu\left(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}\right) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)}\right] + \left(\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)} + \Theta\sigma_{11}^{(2)}\right)\left(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости согласно теореме Гурвица записываются в виде

$$
a_i > 0 \quad (i = 0,1,\ldots,4),\ \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0. \tag{18}
$$

С учетом (17) система (18) примет вид

$$
\begin{aligned}
&2\chi^2 + T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right) + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}\right) > 0;\\
&-\frac{16}{9}K^2\nu^2 + 4\Theta\left[-\frac{2}{3}K\nu\sigma_{21}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)}\left(\frac{2}{3}K\nu + \sigma_{21}^{(2)}\right)\right] +\\
&\qquad + \left(\sigma_{11} - \sigma_{22} + T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(1)}\right) + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)}\right)\right)^2 +\\
&\qquad + 2\chi^2\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right) + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}\right)\right) > 0;\\
&\frac{4}{9}K^2\nu^2 - \Theta\left[\frac{2}{3}K\nu\left(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}\right) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)}\right] +\\
&\qquad + \left(\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)} + \Theta\sigma_{11}^{(2)}\right)\left(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}\right) > 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Условия (19) определяют область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров $\nu,\ T_0,\ \Theta$. Рассмотрим ниже частные случаи $T_0 \neq 0,\ \Theta = 0$ и $T_0 = 0,\ \Theta \neq 0$ отдельно.

1) Случай постоянного температурного поля $\left(T_0 \neq 0,\ \Theta = 0\right)$**.** Если влиянием затухания пренебречь (формально $\chi = 0$), то вместо (19) получится биквадратное уравнение, и поэтому условиями устойчивости будут:

$$
\begin{aligned}
&T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right) > 0;\\
&-\frac{16}{9}K^2\nu^2 + \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} - T_0\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right)\right)^2 > 0;\\
&\frac{4}{9}K^2\nu^2 + \left(\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)}\right)\left(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)}\right) > 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для фиксированных значений T_0 численным решением системы (20) определены значения скорости ν_{cr}, при которых рассматриваемая аэротермоупругая система теряет устойчивость. Результаты численных решений, представляющие зависимость ν_{cr} от T_0 и n (где n – число полуволн вдоль круга цилиндра), представлены на рис. 1 и в табл. 1.

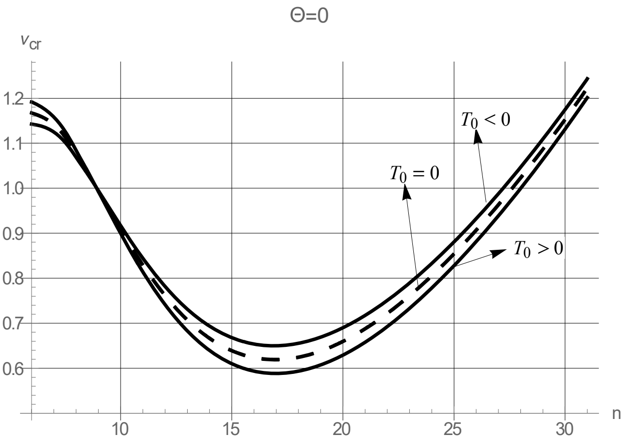


Рис. 1. Зависимость критической скорости ν_{cr} *от числа полуволн вдоль круга цилиндра* n *в случае постоянного температурного поля.*

Для расчета здесь и в дальнейшем принято α=23.8*10^{-6} град$^{-1}$; k=1200 Вт/(м^2 град); λ=210 Вт/(м град); μ=0.34; a=1м; h/a=1/100; R/a=2.

Таблица 1

Значение критической скорости ν_{cr} при разных значениях температуры T_0 и числа полуволн вдоль круга цилиндра n

T_0 / N	-500	0	400
5	1.1918	1.1671	1.1424
10	0.8998	0.9084	0.8998
15	0.6102	0.6392	0.6681
17	0.5884	0.6192	0.6500
20	0.6291	0.6596	0.6899
25	0.8277	0.8540	0.8804
30	1.1311	1.1529	1.1747

Рис. 1 и табл. 1 показывают, что: а) постоянное температурное поле практически не влияет на значение ν_{cr}; б) в зависимости от числа полуволн ν_{cr} имеет точку минимума.

2) Случай переменного по толщине оболочки температурного поля $(T_0 = 0,\ \Theta \neq 0)$. В этом случае условиями устойчивости будут (19) при $T_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&\Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}\right) > 0;\\
&-\frac{16}{9}K^2\nu^2 + 4\Theta\left[-\frac{2}{3}K\nu\sigma_{21}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)}\left(\frac{2}{3}K\nu + \sigma_{21}^{(2)}\right)\right] + \left(\sigma_{11} - \sigma_{22} + \Theta\left(\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)}\right)\right)^2 > 0;\\
&\frac{4}{9}K^2\nu^2 - \Theta\left[\frac{2}{3}K\nu\left(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}\right) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)}\right] + \left(\sigma_{11} + \Theta\sigma_{11}^{(2)}\right)\left(\sigma_{22} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}\right) > 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

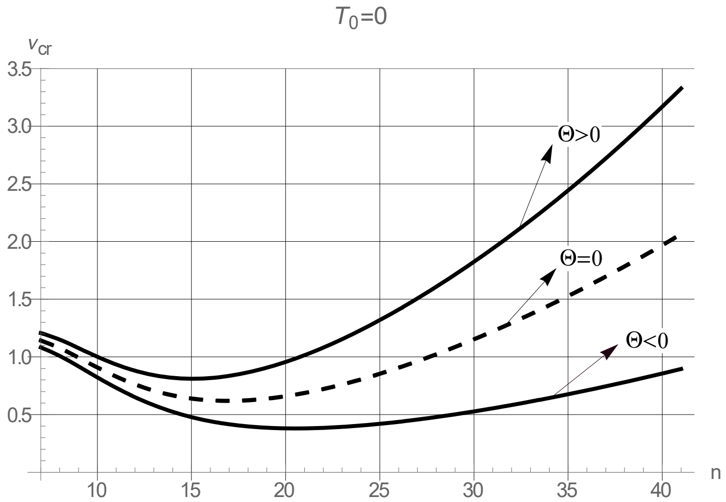


Рис. 2. Зависимость критической скорости ν_{cr} *от числа полуволн вдоль круга цилиндра* n *в случае переменного по толщине оболочки температурного поля.*

Таблица 2

Значение критической скорости ν_{cr} при разных значениях температуры T_0 и числа полуволн вдоль круга цилиндра n

N \ Θ	-500	0	500
5	1.1150	1.1671	1.2239
10	0.8223	0.9084	1.0012
15	0.4779	0.6392	0.8110
20	0.3807	0.6596	0.9568
25	0.4200	0.8540	1.3192
30	0.5278	1.1529	1.8249

График зависимости критической скорости обтекающего потока от числа полуволн на основе условий (21) приведен на рис. 2.При разных значениях переменной температуры вычислены значения критической скорости (табл. 2).

Рис. 2 и табл. 2 показывают, что: а) переменность температурного поля имеет существенное влияние на величину критической скорости (ν_{cr} увеличивается); б) функция $\nu_{cr}(n)$ имеет точку минимума, которая зависит от Θ.

Институт механики НАН РА

И. А. Варданян, А. А. Шмавонян

Задача термоупругого флаттера замкнутой цилиндрической оболочки

В линейной постановке рассмотрена задача устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки под действием неоднородного температурного поля и обтекающего оболочку сверхзвукого потока газа. Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой аэротермоупругой системы. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

Ի. Ա. Վարդանյան, Հ. Ա. Շմավոնյան

Փակ գլանային թաղանթի ջերմաառաձգական ֆլատերի խնդիրը

Ներկայացվող աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող փակ գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը անհամասեռ ջերմային դաշտի ազդեցության տակ։ Ստացված են դիտարկվող աէրոթերմոառաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները։ Ցույց է տրված, որ շրջհոսվող գազի հոսանքի և ջերմային դաշտի համատեղ ազդեցությամբ կարելի է ղեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության արժեքը։

I. A. Vardanyan, H. A. Shmavonyan

The Problem of Thermoelastic Flutter of Closed Cylindrical Shell

In this work, the problem of stability of closed cylindrical shell under the action of non-uniform temperature field and flowing around the shell supersonic gas is considered in a linear formulation. The stability conditions for the unperturbed state of the aerothermoelastic system under consideration are obtained. It is shown that the combined action of the temperature field and the flowing stream can control the process of stability and significantly change the value of the critical velocity of the flutter with the help of the temperature field.

Литература

1. *Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.* – Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т. 64. № 4. С. 51-67.
2. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и её приложения в технике. М. Гостехтеориздат. 1949.
3. *Ashley H., Zartarian C.* – J. Aeronaut. Sci. V. № 6. 1956.
4. *Болотин В.В*. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
5. *Новацкий В*. Вопросы термоупругости. М. Изд-во АН СССР. 1962. 364 с.
6. *Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A.* Effects of magnetoelastic interactions in electroconductive plates and shells. Springer. 2016. 279 p.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 119 2019 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян [1], С. В. Саркисян [2]

Распространение волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, с инерционной массой на другой

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. С. Аветисяном 11/II 2018)

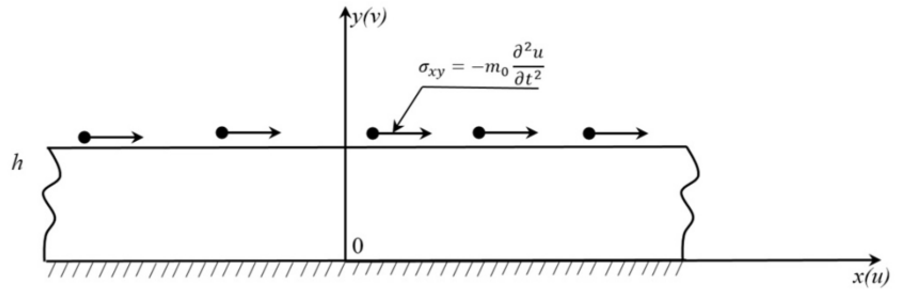
Ключевые слова: *слой, упругий волновод, инерционная масса.*

Введение. Упругий слой с плоскопараллельными лицевыми плоскостями представляет собой частный случай математической модели упругого волновода. Одной из первых работ по распространению волн в упругом волноводе является работа Похгаммера [1], где рассмотрена задача колебаний бесконечно длинного кругового цилиндра со свободными от нагрузок боковыми поверхностями. Аналогичные задачи колебаний для бесконечной плиты, находящейся в плоскодеформированном состоянии, со свободными лицевыми плоскостями впервые рассмотрели Рэлей и Лемб [2, 3]. В дальнейшем исследования по распространению упругих волн в слое со свободными лицевыми плоскостями детально изучены во многих работах, в частности отметим [4-9] .

Задача распространении волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а другая свободна от напряжений, в двумерной постановке впервые решена в [10], где получено дисперсионное уравнение и проведено сравнение с результатами задачи Лемба. Было показано, что наименьшая фазовая скорость распространения волны равна фазовой скорости поверхностных волн Рэлея. Отличительной чертой этих задач является то обстоятельство, что симметричная и антисимметричная мода колебаний не разделяются, а также то, что к этому классу задач не применимы гипотезы классической теории балок и пластин, в частности, гипотеза Кирхгофа и уточненные теории [11-18].

В настоящей статье предлагается модель для исследования влияния инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим задачу распространения волн в бесконечном упругом слое толщиной h. Слой ограничен плоскостями $y=0$ и $y=h$. Плоскость $y=0$ жестко закреплена, а на плоскости $y=h$ задана сосредоточенная (инерционная) масса $m_0>0$.



Рассмотрим задачу плоской деформации, т.е. перемещения $\vec{u}\left(u(x,y,t),\right.$ $\left.\mathrm{v}(x,y,t),0\right)$ не зависят от переменной z, а $w=0$. При помощи преобразований

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

динамические уравнения теории упругости приводятся к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ [5]. Решение этих уравнений представим в виде

$$\varphi=\left(A\operatorname{sh}(k\alpha_1 y)+B\operatorname{ch}(k\alpha_1 y)\right)\exp ik(x-ct), \tag{2}$$

$$\psi=\left(C\operatorname{sh}(k\alpha_2 y)+D\operatorname{ch}(k\alpha_2 y)\right)\exp ik(x-ct),$$

где $\alpha^2{}_1=1-\eta\theta,\ \alpha^2{}_2=1-\eta,\ \eta=c^2/c_t^2.$

Постоянные A,B,C и D должны определяться из следующих граничных условий:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\quad \text{при } y=0,$$

$$\frac{1-2\theta}{\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,$$

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0\quad \text{при } y=h. \tag{3}$$

Здесь $\theta=c_t^2/c_l^2<1,\ m=m_0k^2c^2\mu^{-1},\ \mu-$ модуль сдвига материала упругого слоя.

Удовлетворяя решение (2) граничным условиям (3), для постоянных интегрирования получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
iB+\alpha_2 C=0,\ \alpha_1 A-iD=0,\\
\frac{1-2\theta}{\theta}\left(Ash\left(H\alpha_1\right)+Bch\left(H\alpha_1\right)\right)-\frac{1}{\theta}\alpha_1^2\left(Ash\left(H\alpha_1\right)+Bch\left(H\alpha_1\right)\right)+\\
+2i\alpha_2\left(Cch\left(H\alpha_2\right)+Dsh\left(H\alpha_2\right)\right)=0,\ H=kh,\\
iA\left(2\alpha_1 ch\left(H\alpha_1\right)-\frac{m}{k}sh\left(H\alpha_1\right)\right)+iB\left(2\alpha_1 sh\left(H\alpha_1\right)-\frac{m}{k}ch\left(H\alpha_1\right)\right)+\\
+C\left(\left(1+\alpha_2^2\right)sh\left(H\alpha_2\right)-\frac{m}{k}\alpha_2 ch\left(H\alpha_2\right)\right)+D\left(\left(1+\alpha_2^2\right)ch\left(H\alpha_2\right)-\frac{m}{k}\alpha_2 sh\left(H\alpha_2\right)\right)=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы алгебраических уравнений (4) получаем следующее характеристическое уравнение относительно безразмерной фазовой скорости распространения волн в упругом слое η:

$$
\begin{gathered}
4(2-\eta)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}-\left((2-\eta)^2+4\right)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}ch\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)ch\left(H\sqrt{1-\eta}\right)+\\
+\left((2-\eta)^2+4(1-\eta\theta)(1-\eta)\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta}\right)+\\
+\frac{m}{k}\eta\sqrt{1-\eta}\left(sh\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)ch\left(H\sqrt{1-\eta}\right)-\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}ch\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta}\right)\right)=0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Исследование характеристического уравнения и численные результаты. Характеристическое уравнение (5) при отсутствии инерционной массы ($m_0=0$) совпадает с уравнением, полученным в работе [10]. Здесь исследуем влияние инерционной массы на колебания упругого слоя. При предельном переходе $\eta\to 1$ и при $m_0=0$ из уравнения (5) относительно H имеем следующую функцию:

$$
f\left(H\right)=4-5ch\left(H\sqrt{1-\theta}\right)+H\frac{sh\left(H\sqrt{1-\theta}\right)}{\sqrt{1-\theta}}.
$$

Для функции $f\left(H\right)$ в интервале $H\in\left[0,5\right]$ существует критическое значение H_*, при котором $f\left(H_*\right)=0.$ Следовательно, при $kh=H_*$ в упругом слое получаются решения типа локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta<1$. Например, при $\theta=\frac{1}{3}$ $H_*=3.8063.$ При наличии инерционной массы из характеристического уравнения (5) при $\eta\to 1$ имеем

$$
f\left(m,H\right)=\frac{\sqrt{1-\theta}}{sh\left(H\sqrt{1-\theta}\right)}\left(-4+5ch\left(H\sqrt{1-\theta}\right)\right)-\frac{m}{k}-H.
$$

При различных значениях kh получаются приведенные значения m, при которых существуют решения типа локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta<1$.

В таблице приводятся значения инерционной массы m при различных значениях $H = kh$, когда $\theta = \frac{1}{3}$.

H	0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.1	1.3
m/k	10.0555	3.4978	2.2675	1.7896	1.4768	1.4168	1.3256

Как видно из таблицы, с возрастанием H приведенные значения сосредоточенной массы m убывают. Отметим, что при $\eta > 1$ получаем колебания упругого изотропного слоя толщиной h, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а на другом задана инерционная масса m_0 с частотой $\omega = kc$, которую можно определить из уравнения (5).

Заключение. Таким образом, показано влияние инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Наименьшая фазовая скорость распространения волны для упругого слоя, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а другая свободна от напряжений, равна фазовой скорости поверхностных волн Рэлея. При различных значениях толщины слоя и волнового числа найдены значения инерционной массы, при которых в слое существуют решения типа локализованных колебаний, причем эти значения убывают.

[1]Институт механики НАН РА
[2]Ереванский государственный университет
e.mail:vas@ysu.am

М. В. Белубекян, С. В. Саркисян

Распространение волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, с инерционной массой на другой

Предлагается модель для исследования влияния инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը մի եզրը կոշտ ամրացված, իներցիոն զանգվածով բաշխված մյուս եզրով առաձգական շերտում

Առաջարկված է մի մոդել, որի միջոցով կարելի է հետազոտել առաձգական, մի հարթությամբ բաշխված իներցիոն զանգվածով, մյուսով՝ կոշտ ամրացված շերտում, առաձգական ալիքատարի բնութագրիչների վրա զանգվածի ազդեցությունը:

M. V. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Waves Propogation in Elastic Layer with one Boundary Clumped, in with Inertial Mass on the Another

The model is offered for the study of the inertial mass, in elastic layer distributed on the one plane with a clumped, in with inertial mass on the another on the characteristic of the waveguide.

Литература

1. *Pochhammer L.* – Journal für Mathematic. 1876. V. 81. P. 324-336.
2. *Lamb H.* – Proceedings of the Royal Society, SA. V. 93. 1917.
3. *Rayleigh J.W.* – Proc. Math. Soc. London. 1889. V. 20.
4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М. Наука. 1981. 288 с.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 283 с.
6. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. North-Holland. 1984. 425 p.
7. *Miklowitz J.* Elastic Wave Propagation. Appl. Mech. Surv. Washington. D.C. Spartan Books. 1966. P. 809-839.
8. *Mindlin R.D.* Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates. Structural Mechanics, Pergamon Press. New York. 1960. P. 199-232.
9. *Viktorov I.A.* Rayleigh and Lamb Waves – Physical Theory and Applications. New York. Plenum Press. 1967.
10. *Ишков П.К.* – Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1941. № 2. С.169–176.
11. *Мелешко В.В. и др.* – Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. С. 86–104.
12. *Белубекян В.М., Белубекян М.В.* – Доклады НАН Армении. 2015. Т. 115. № 1. С. 40-43.
13. *Вартанов А.Г.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. № 4. С. 3-30.
14. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Vardanov A., Milanese A., Marzocca P.* In: Proceedings of 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 2008. P.1874-1886.
15. *Коссович Л.Ю. и др.* – Вестник СамГУ. Естественно-научная серия: Механика. 2008. № 8/2 (67). С. 78–89.
16. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.* – Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. Физматлит. 2010. 280 с.
17. *Абрамян Б.Л., Саакян А.В.* В сб.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван. 2003.
18. *Саркисян С.В., Саркисян А.С.* В кн.: Механика 2016 (Тр. Междунар. школы-конф. молодых ученых). Ереван. Ин-т механики. 2016. С. 124-127.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 541.64 + 547.491.83

М. Л. Ерицян[1], Г. С. Петросян[2], Р. А. Карамян[1], А. М. Арустамян[1]

Кинетические закономерности полимераналогичных превращений на хитозане

(Представлено академиком Л. А. Тавадяном 21/II 2019)

Ключевые слова: *хитозан, N-метилолмочевина, модификация, константа скорости реакции, катализатор, гликозидная группа.*

Хитозан (Хтз) как природный, после целлюлозы, наиболее распространенный полимер, отличающийся биологической активностью, имеет большое значение для создания новых материалов, предназначенных для применения в медицине, биотехнологии в качестве добавки к кормам животных [1 - 6]. Для расширения областей применения Хтз требуется повысить его растворимость в различных растворителях, с одной стороны, а с другой – увеличить совмещающую способность их с растворами различных полимеров и смол. В связи с этим синтез новых производных Хтз с целью расширения области их применения является весьма актуальной задачей.

Одним из подходов к решению этой задачи является функционализация Хтз различными соединениями.

В настоящем сообщении приводятся экспериментально полученные результаты по изучению полимераналогичных превращений на Хтз N-метилолмочевины (ММч) в присутствии катализатора и без него.

Экспериментальная часть. В исследованиях использован водорастворимый Хтз с молекулярной массой 80 кДа, в котором гликозидные звенья с группой $–NH_2$ в среднем составляют 92%, ацетамидные – 8%.

Получение ММч. В реактор загружают 15 г (0.25 моль) мочевины и 20 г 38%-го водного раствора формальдегида (0.25 моль) и перемешивают при температуре $(35\pm0.5)^0$С 30 мин. Затем под низким давлением (15-20) мм рт. ст. при температуре $(45\text{-}50)^0$С отгоняют воду. Белый осадок (ММч) неоднократно промывают и перекристаллизуют этиловым спиртом и сушат под давлением (15-20) мм рт. ст. при $(50\text{-}60)^0$С до достижения постоянной массы. Выход ММч составляет 93%, температура плавления ($T_{пл.}$) равна $(111\pm0.5)^0$С. Установлен элементный состав (в %): С – 26.6

(26.67); H – 6.8 (6.66); N – 31.2 (31.11). ММч растворяется в холодной воде, метаноле, диметилсульфоксиде.

На спектрофотометре NIKOLET/FT-IR NEXUS были исследованы инфракрасные (ИК) спектры поглощения ММч и конечного продукта в областях поглощения (ν, $см^{-1}$): 1010 (- CH_2OH); 1420 (>N-C(O)-N<); 1695÷1705 (-C(O)-N<); 2850 (-CH_2-); 3470 (-OH), подтверждающие протекание процесса прививки монометилолмочевины на хитозане.

Реакцию между Хтз и ММч проводили в 2%-ном водном растворе уксусной кислоты, частично нейтрализованной 0.5 молярным водным раствором NaOH до значения pH = 5.6 [1, 2]. Хитозан марки "пищевой" произведен биокомбинатом ЗАО "Биопрогресс" ВНИИТИБП Щелковского района г. Москвы. Катализатором служил ацетат меди - $Cu[OC(O)CH_3]_2$ марки "чда". Для определения кинетики расхода ММч в процессе прививки на Хтз при различных значениях времени проведения реакции (10, 20, 30 и 40 мин) из раствора бралась проба обьемом 4 мл, из которой полимер высаживался в этиловом спирте, фильтровался, осадок неоднократно промывался ацетоном и затем сушился под вакуумом (1.5-2 мм рт. ст.) до достижения постоянной массы. За кинетикой прививки ММч к Хтз во времени следили элементным анализом на азот [7].

Обсуждение результатов. Хитозан, подлежащий модификации, имеет представленный на схеме 1 звеньевой состав.

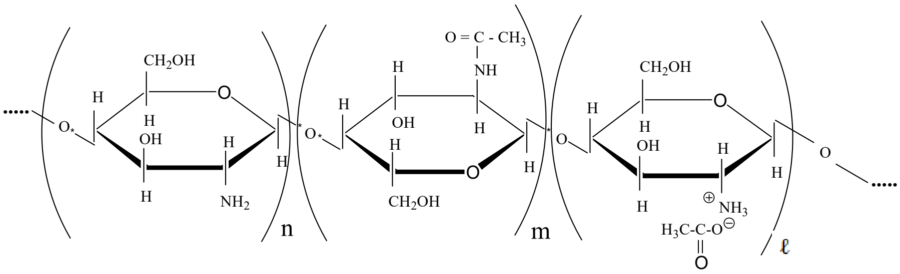


Схема 1. m, n и ℓ – мольные доли звеньев в макромолекуле хитозана, которые соответственно равны: m = 0.08, n = 0.47, ℓ = 0.45.

Таблица 1

Кинетика процесса прививки ММч на Хтз в отсутствие катализатора при различных температурах и значениях времени реакции: $[Хтз\text{-}NH_2]_0$ = = 6.8×10^{-2}моль/л; $[ММч]_0 = 2.2\times10^{-2}$моль/л

Время реакции, t, мин	Расход ММч, моль/л, в зависимости от температуры			
	65 (^{0}C)	70 (^{0}C)	75 (^{0}C)	80 (^{0}C)
10	0.5×10^{-4}	1.6×10^{-4}	3.8×10^{-4}	9×10^{-4}
20	1.8×10^{-4}	3×10^{-4}	5.4×10^{-4}	12.0×10^{-4}
30	3.5×10^{-4}	5.4×10^{-4}	9×10^{-4}	1.3×10^{-3}
40	5.5×10^{-4}	7.7×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.4×10^{-3}

Прививка ММч на макромолекуле Хтз осуществляется через $–NH_2$ функциональную группу гликозидных звеньев, концентрация которых в исходном Хтз обозначена как [Хтз- NH_2]$_0$.

Результаты прививки ММч на Хтз в отсутствие и в присутствии катализатора приводятся в табл.1 и 2.

Таблица 2

Кинетические данные каталитической реакции прививки ММч на Хтз при различных температурах: [Хтз-NH_2]$_0$ = 6.8×10^{-2}моль/л; [ММч]$_0$ = = 2.2×10^{-2}моль/л; [$Cu(OC(O)CH_3)_2$]$_0$ = 1×10^{-4}моль/л

Время реакции, t, мин	Расход ММч, моль/л, в зависимости от температуры			
	65 (^{0}C)	70 (^{0}C)	75 (^{0}C)	80 (^{0}C)
10	1.7×10^{-3}	2.4×10^{-3}	4.1×10^{-3}	7.4×10^{-4}
20	28×10^{-3}	3.9×10^{-3}	6.8×10^{-3}	1.2×10^{-2}
30	3.4×10^{-3}	5.4×10^{-3}	8.5×10^{-3}	1.5×10^{-2}
40	4.3×10^{-3}	6.1×10^{-3}	11.0×10^{-3}	1.7×10^{-2}

Отметим, что реакция между NH_2 группами гликозидных звеньев Хтз и ММч в присутствии и в отсутствие катализатора является реакцией второго порядка, для константы скорости которой справедливо уравнение [8]

$$K = \frac{1}{t} \cdot \frac{2{,}3}{A_0 - B_0} \log \frac{B_0\,(A_0 - X)}{A_0(B_0 - X)}\,, \qquad (1)$$

где $[A]_0$ = [Хтз-NH_2]$_0$ = 6.8×10^{-2} моль/л; $[B]_0$ = [ММч]$_0$ = 2.2×10^{-2} моль/л; X – расход исходных реагентов в величинах моль/л.

На рис.1 и 2 приведены экспериментально установленные зависимости $\frac{2{,}3}{A_0 - B_0} \log \frac{B_0\,(A_0 - X)}{A_0(B_0 - X)}$ от времени проведения реакции (t). Прямолинейная зависимость указывает на правомочность применения уравнения (1) и, соответственно, на второй порядок реакции между Хтз и ММч как в присутствии, так и в отсутствие катализатора.

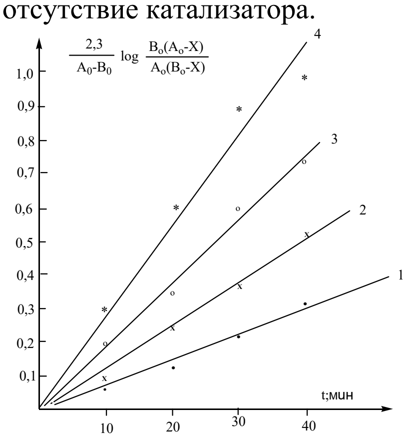


Рис. 1. Зависимость $\frac{2{,}3}{A_0 - B_0} log \frac{B_0\,(A_0 - X)}{A_0(B_0 - X)}$ *от t (времени проведения реакции между Хтз и ММч) в отсутствие катализатора при различных температурах: 65^{0}C (1); 70^{0}C (2); 75^{0}C (3); 80^{0}C (4); A_0 = 6.8x10^{-2} моль/л; B_0 = 2.2 x10^{-2} моль/л.*

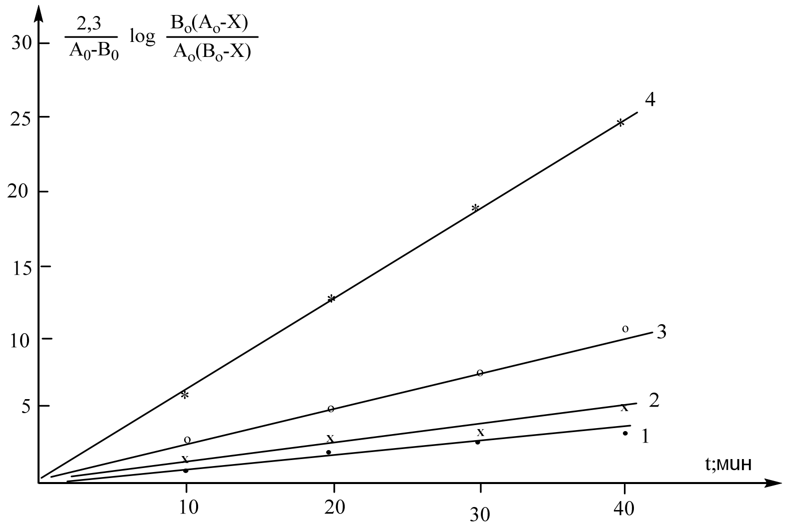


Рис. 2. Зависимость $\frac{2,3}{A_0-B_0}log\frac{B_0\,(A_0-X)}{A_0(B_0-X)}$ *от t (времени проведения реакции между Хтз и ММч) в присутствии катализатора при различных температурах: 65⁰С (1); 70⁰С (2); 75⁰С (3); 80⁰С (4);* $A_0 = 6.8\ x10^{-2}$ *моль/л;* $B_0 = 2.2\ x10^{-2}$ *моль/л,* $[Cu(OC(O)CH_3)_2]_0 = 1x10^{-4}$ *моль/л.*

На основании данных рис. 1 и 2 определены значения констант скоростей исследуемой реакции прививки ММч на Хтз как в присутствии, так и в отсутствие катализатора при различных температурах (табл. 3).

Таблица 3

Значения констант скоростей реакции прививки ММч на Хтз в отсутствие (I) и в присутствии (II) катализатора $Cu[OC(O)CH_3]_2$ при различных температурах

$T(^0C)$		65	70	75	80
k, л×моль$^{-1}$× мин$^{-1}$	I	(1.2±0.5) 10^{-4}	(2±0.5) 10^{-4}	(3±0.3) 10^{-4}	(4.5±0.5) 10^{-4}
	II	(1.66±0.5) 10^{-3}	(2.2±0.4) 10^{-3}	(4.1±0.5) 10^{-2}	(1.04±0.3) 10^{-2}

Построение зависимости в аррениусовских координатах $\log k$ от 1/T (рис. 3 и 4) на основе численных значений k табл. 3 позволило оценить значение энергии активации и предэкспоненциального множителя некаталитического и каталитического взаимодейства ММч на Хтз, которые, соответственно, равны:

в отсутствие катализатора $E_a = (25\pm1.6)$ккал/моль, $A = (1.7\pm0.15)10^5$ л×моль$^{-1}$×мин$^{-1}$;

в присутствии катализатора $E_a = (19\pm05)$ккал/моль, $A = (3.0\pm1.3)10^4$ л×моль$^{-1}$×мин$^{-1}$.

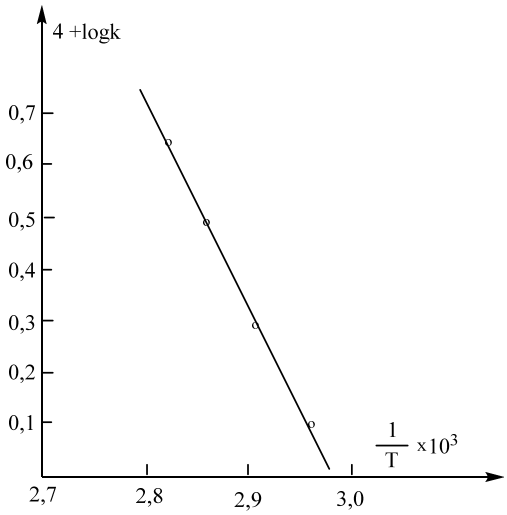
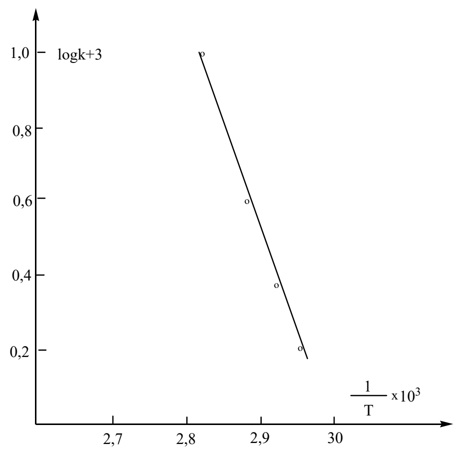


Рис. 3. Зависимость $log\, k$ *от* $\frac{1}{T}$ *(для некаталитической реакции между Хтз и ММч).*



0,5

Рис. 4. Зависимость $log\, k$ *от* $\frac{1}{T}$ *(для каталитической реакции между Хтз и ММч).*

Из сравнения значений констант скорострей и энергии активации реакции ММч с Хтз в присутствии катализатора и без него следует, что катализатор $Cu[OC(O)CH_3]_2$ значительно повышает скорость реакции и, соответственно, степень (эффективность) прививки при одинаковых временах реакции, что, как нам представляется, связано с активацией реакционных центров Хтз молекулой катализатора. Процесс активации Хтз молекулой катализатора представлен на схеме 2.

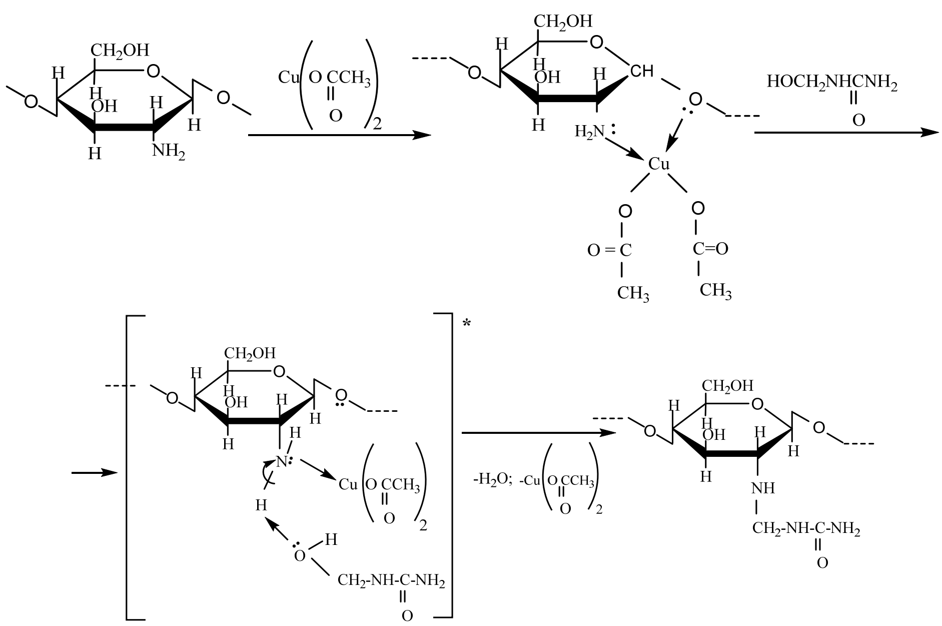


Схема 2.

Звеньевой состав Хтз после прививки на нем ММч представлен структурной формулой (схема 3).

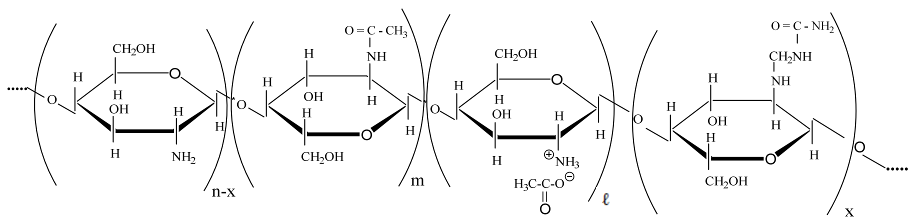


Схема 3. n = 0.47; m = 0.08; x – число N-метилкарбамидилглюкозидных звеньев, 0≤x≤0.47.

[1]Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна
[2]Ереванский государственный медицинский университет им. М.Гераци
e-mail: mejlum.yeritsyan@mail.ru

М. Л. Ерицян, Г. С. Петросян, Р. А. Карамян, А. М. Арустамян

Кинетические закономерности полимераналогичных превращений на хитозане

Экспериментально установлены кинетические закономерности процесса прививки монометилолмочевины на хитозане в присутствии катализатора ацетата меди $Cu[OC(O)CH_3]_2$ и в его отсутствие. Наличие катализатора значительно повышает скорость реакции прививки. Определены аррениусовские параметры

констант скорости процесса прививки между указанными соединениями как в присутствии, так и в отсутствие катализатора.

Մ. Լ. Երիցյան, Գ. Ս. Պետրոսյան, Ռ. Ա. Քարամյան, Ա. Մ. Առուստամյան

Խիտոզանի պոլիմերանալոգ փոխակերպման կինետիկական օրինաչափությունները

Պղնձի ացետատի՝ $Cu[OC(O)CH_3]_2$ կատալիզատորի ներկայության կամ բացակայության պայմաններում հաստատված են խիտոզանին մոնոմեթիլոլմիզանյութի պատվաստման կինետիկական օրինաչափությունները: Ցույց է տրված, որ կատալիզատորի ներկայությամբ զգալի մեծանում է պատվաստման արագությունը: Որոշված են նշված միացությունների փոխազդեցության արենիուսյան պարամետրերը, ինչպես կատալիզատորի, այնպես էլ նրա բացակայության պայմաններում:

M. L. Yeritsyan, G. S. Petrosyan, R. A. Qaramyan, A. M. Arustamyan

The Kinetic Parameters of the Chitosan Based Polimer-Analog Transformations

The kinetic parameters of the grafting process of monomethylol urea on chitosan were experimentally determined both in the presence and absence of catalytic amounts of copper acetate ($Cu[OC(O)CH_3]_2$). The presence of catalyst significantly increases the rate of grafting. The arrenhius parametes of the rate constants of the grafting process between mentioned above compounds were determined both in the presence and absence of catalyst.

Литература

1. *Горовой Л. Ф., Кисляков В.Н.* В кн.: Хитин и хитозан. Получение, свойства и применение. Под ред. К.Г.Скрибина, Г.А.Виоревой, В.П.Варламова. М. Наука. 2002. С. 217-246.
2. *Болгов А.А.* Получение гомологов хитозана и его полимераналогичные превращения. Канд дис. Моск. академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова, 2009.
3. *Domard A.* – Int. J. Biol. Macromol. 1987. V. 9. P. 98-104
4. *Rhazi M., Desbrieres J., Tolaimate A, Rinaudo M., Vottero P., Allagui A.* – Polimer. 2002. V. 43. P. 1267-1276.
5. *Peter M.G.,Domard A., Muzarelli R.A.A.* V. – Advan Chitin Sci. 2000. V. 4. P. 460-465.
6. *Афзалетдинова Н.Г.,Муринов Ю.И., Муллагалиев Н.Р., Зарудий Ф.С., Давыдова В.А., Исмагилова А.Ф.* – Хим.-фарм. журнал. 2000. V. 34. № 5. С. 26-27.
7. *Աբրահամյան Ա.Ա.* Օրգանական միացությունների քանակական միկրոէլեմենտար անալիզ, Հայպետհրատ, 1963, էջ 126-129.
8. *Эмануэль Н.М., Кноре Д.Г.* Курс химической кинетики. М. Высшая школа. 1969. 432 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

MICROBIOLOGY
BIOCHEMISTRY

УДК 595; 577

H. H. Panosyan,
corresponding member of NAS RA A. H. Trchounian

Polar Lipid Pattern and Fatty Acid Composition of Geobacilli and Their Temperature Induced Changes

(Submitted 9/II 2019)

Keywords: *geobacilli, polar lipids, straight, iso- and anteiso-ranched, fatty acids, chemotaxonomy.*

Membrane lipids have been used extensively for chemotaxonomic purposes [1]. The identification of bacteria is based on the large structural differences within membrane fatty acids (FA) including the variation in length (8 to 20 C-atoms), presence of saturated and monounsaturated bonds, occurrence of branched (*iso*- and *anteiso*-), cyclopropane (17:0c, 19:0c), hydroxy- (with an OH-group at position two or three of the molecule) FAs [1-3].

Bacteria are able to modify their membrane composition in response to environmental changes, such as in temperature, osmolarity, salinity and pH [4, 5]. The biophysical properties to control their membrane phospholipids allows bacteria to thrive in a wide range of physical environments [6, 7]. It was shown that bacteria precisely adjust their membrane lipid composition by modifying the types of FAs and altering the structures of pre-existing phospholipids [7].

In thermophilic bacterial species, polar lipids form a large proportion of the cellular membrane fractions and usually include phospholipids and glycolipids [8]. Comparative studies on the FAs composition of psychrophilic, mesophilic and thermophilic bacilli have shown that a certain preference for the synthesis of saturated, elongated and branched FAs existed at higher temperature [9-12].

The aim of this study is to determine polar lipid and FA composition of geobacilli strains isolated from Armenian geothermal springs. Temperature induced changes in membrane lipids and FAs profile were also analyzed. Chemotaxonomic implications based on FAs analysis were reported too.

Materials and methods. The objects of investigation were four thermophilic bacilli strains recently isolated from Arzakan (Armenian) geothermal spring and identified based on 16S rRNA gene sequence data as *Geobacillus caldoxylosilyticus* ArzA-3, *G. thermodenitrificans* ArzA-6, *G. toebii* ArzA-8 and *G. toebii* ArzA-33a. The sequences of strains have been deposited in GenBank under accession numbers JQ929017, JQ929020, JQ929022, and JQ929015 respectively [13].

Cultivation conditions. Batch cultivation of thermophilic bacilli was carried out using nutrient broth (Difco) at pH 7.2 and 65 °C (optimum temperature) under aerobic conditions with shaking at 240 rpm, for 24 h. In case of *G. thermodenitrificans* ArzA-6 incubation were carried out also at 45, 55, 60 and 70 °C. All strains were grown in 1 L Erlenmeyer flasks filled with 200 mL of medium. Cultures were grown to the late exponential phase (turbidity 0.6-0.7 OD at 600 nm) and 50 ml inocula were transferred into 1 L of fresh medium in 5 L flasks and incubated at the appropriate conditions up to late exponential phase. After incubation, the cells were harvested by centrifugation (10,000 rpm; 15 min) and lyophilized.

Lipid analysis. Total lipids were extracted by the method of Bligh and Dyer [14] usung by $CHCl_3/CH_3OH$ (1:1, v/v) mixture under shaken conditions overnight. Solvents were removed with a rotavapor and lipids were weighed for calculation of lipid yield. Lipids were fractionated by thin layer chromatography (TLC) on silica gel (0.25 mm, F_{254}, Merck KGA). The mixture of $CHCl_3/CH_3OH/H_2O$ (65:25:4, v/v/v) was used as a solvent system for the initial monodimensional TLC experiment. The phospholipids were identified also by using bidimensional TLC. The plate was developed in the first dimension in solvent system $CHCl_3/CH_3OH/H_2O$ (65:25:4, v/v/v) and in second dimension in solvent system $CHCl_3/CH_3OH/CH_3COOH/H_2O$ (85:12:15:4,v/v/v/v) [15]. Cardiolipin disodium salt from bovine heart (CL), rac1,2-dipalmitoyl-glycero-3-phosphoethanolamine (PEA), 2,3-dipalmitol glycero-1-phosphocholine (PC_1), 1,2-dipalmitol-SN-glycero-3-phosphocholine monohidrate (PC_3), 1(3-SN-phosphatidyl)-rac-glycerol sodium salt (PG) and 3-SN-phosphatidyl-1-serine from bovine brain (PS) were used as standards. Lipids were detected by spraying the plates with Cs_2SO_4 in H_2SO_4 (w/v) followed by heating at 100 °C for 5 min. Staining tests for complex lipids were performed by using specific reagents: molybdenum blue (for detection of phospholipids); 3.4% N-(1-naphthyl)-ethylenediamine in 97:3 MeOH–H_2SO_4 (for detection of glycolipids), ninhydrin (for visualization of aminolipids) [16-18].

FA analysis. FA methyl esters (FAMEs) were obtained from complex lipids by acid methanolysis (CH_3OH/HCl anhydrous 9:1 at 80 °C overnight). Samples were treated repeatedly with the mixture of CH_3OH and $CHCl_3$ and dried under nitrogen until disappearance of HCl smell. The purity of samples was assessed by TLC analysis. Samples were eluted with N-hexane/CH_3CH_2OH (96:4 v/v), detected by exposure to J_2 vapors and compared with standards. FAME analyses were performed by gas liquid chromatography (GLC, Carlo Erba HRGC 5300 Instrument, FID, OV 1.25m x 0.32mm, 0.25μm). Identification was accomplished by comparison with a standard mixture of FAMEs. In addition to GLC, identification of each sample component was confirmed by mass spectroscopy analyses, which were performed with an GC-MS HP5890 series II TRIO 2000 VG analytical Instrument, using flame-ionization detector (FID) under following conditions: HP-5 column, temperature programme of 120°C (1 min), from 120 to 230 °C at 2 °C /min, from 230 °C to 250 °C at 10 °C/min, injection volume 1μl. The identification of the compounds was performed by parallel runs of pure standards (Sigma), and by interpretation of mass spectra [15].

Results and discussion. The total lipid content of studied thermophilic strains ranged between 2.0-2.5 % of the cells biomass at the optimal growth temperature. Phospholipids formed a large proportion of the cellular membrane fractions for all studied strains (Fig. 1). A major glycolipid (phosphoglycolipid) was detected only for *G. thermodenitrificans* ArzA-6 (Fig. 1) in case of incubation at higher temperatures (60, 65 and 70 °C). Other glycolipids were not visualized in chromatograms probably due to their absence in studied strains. It was recently reported also that relative proportion of the main glycoloipids increase with growth temperature [19]. Presumably, sugar-containing lipids increase the hydrogen-bonding capacity of the lipid bilayer surface, thus stabilizing the membrane at high temperatures.

Analogy in aminolipid content between all studied bacilli was observed. Major aminolipids and minor aminolipids and amniophospholipids and or their traces were also detected in strains. A major aminolipid and aminophospholipid was detected for *G. thermodenitrificans* ArzA-6 at lower than the optimal growth temperatures.

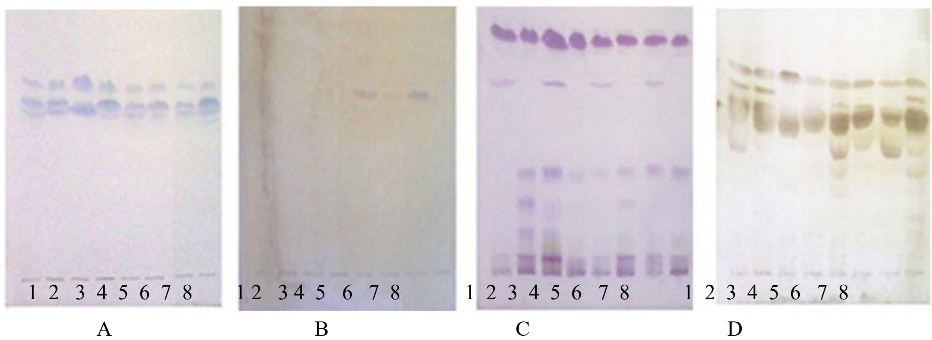
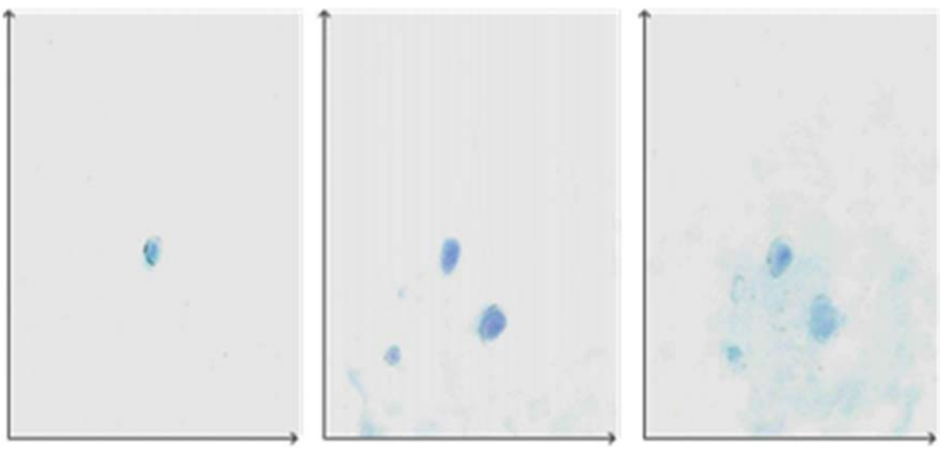


Figure 1. TLC of polar lipids. A, Phospholipids; B, Glycolipids; C, Aminolipids; D, Total lipids. The solvents systems and staining reactions were given under Materials and methods. 1-3 – *Geobacillus caldoxylosilyticus* ArzA-3, *G. toebii* ArzA-8, *G. toebii* ArzA-33a, respectively, at 65 °C; 4-8 – *G. thermodenitrificans* ArzA-6 at 45, 55, 60, 65 and 70 °C, respectively.

Significant differences in the lipid pattern of *G. thermodenitrificans* ArzA-6 were observed at lower, optimal and higher growth temperatures. The relative proportions of different polar lipids in *G. thermodenitrificans* ArzA-6 was obviously affected by temperature. As the growth temperature was increased, the phosphoglycolipids content increased in contrast to aminophospholipids, amount of which was decreased. Moreover, phosphoglycolipids was absent at the lowest temperature of growth (45 °C). Obtained results are in good agreement with data reported earlier confirming that lipid headgroup compositional changes are part of the mechanism regulating membrane fluidity [9, 15, 20].

Different strains of Geobacillus were investigated and different polar lipids, mainly phospholipid species such as phosphatidylethanolamines, phosphatidylglycerols, cardiolipins (glucopyranosylcardiolipin, alanylcardiolipin or lysylcardiolipin, bisphosphatidylglycerol, acylglycosylcardiolipins) were isolated [12]. Analysis of bidimensional TLC of lipid extracts from studied geobacilli also revealed components that could be identified as PEA (Fig. 2). Other tested phospholipids (CL, PC_1, PC_3, PG and PS) were absented or probably due to their small amount were not identified.

The results for determination of FA composition of geobacilli strains are shown in Table 1. All strains were characterized by the predominance of branched chain *iso*- and *anteiso*- FAs (mainly *i*C15:0, *ai*C15:0, *i*C17:0, *ai*C17:0, often *i*C16:0, rarely *ai*C16:0, *ai*+*i*C14:0). The other major component was *n*C16:0. FAs of *n*C15:0 and *n*C17:0 were presented in low amount, while FAs of *n*C14:0 were absent or in trace amounts. The presence of *n*C18:0 as a minor component was detected only for *G. toebii* ArzA-33a. In general, at the optimal growth temperature branched FAs were predominant, ranging from 80 % to more than 89 % of all FAs measured, while straight-chained FAs were minor components (6-8 %).



1 2 3

Figure 2. Bidimensional TLC of phospholipids of *G. thermodenitrificans* ArzA-6 compared with PEA using as standard. 1 – PEA; 2 – lipid solution extract of *G. thermodenitrificans* ArzA-6; 3 – mixture of PEA and lipid solution extract of *G. thermodenitrificans* ArzA-6.

Table 1

FA composition (%) of geobacilli strains*

Strains	T (°C)	Lipids % cell dry wt	Total %			*i*C15/*ai*C15	*i*C15/*i*C17	Individual FAs (%)											
			i-branched	*ai*-branched	Normal			*n*C14:0	*i*+*ai*C14:0	*i*C15:0	*n*C15:0	*ai*C15:0	*i*C16:0	*n*C16:0	*ai*C16:0	*i*C17:0	*n*C17:0	*ai*C17:0	*n*C18:0
G. caldoxylosilyticus ArzA-3	65	2.6	83	6	10	24.6	1.01	0.5	1.1	39.4	1.7	1.6	6.3	7.4	0.3	37.2	tr	3.8	-
G. toebii ArzA-8	65	2.4	81	6	12	23.9	0.94	-	0.5	35.9	1.8	1.5	7.1	8.9	tr	37.9	1.1	4.6	tr
G. toebii ArzA-33a	65	2.7	80	6	13	21.9	0.93	-	Tr	35.1	1.8	1.6	6.9	8.2	tr	37.8	1.1	4.7	2.1
G. thermodenitrificans ArzA-6	70	2.0	82	7	10		0.99	Tr	0.5	36.6	1.6	1.2	7.8	6.7	tr	36.9	1.4	6.4	tr
	65	2.6	83	8	9	37.4	1.17	0.2	Tr	41.1	1.4	1.1	7.0	6.8	tr	34.9	1.0	6.4	-
	60	2.3	82	10	7		1.23	0.6	Tr	41.0	1.3	1.9	6.9	6.6	1.1	33.2	tr	6.5	-
	55	1.4	80	10	9		1.35	1.0	-	42.2	1.1	3.1	7.0	6.1	1.0	31.2	tr	6.3	-
	45	1.1	79	11	9		1.49	1.2	-	42.8	0.8	3.8	7.2	5.8	1.3	28.7	tr	6.0	-
[a]*G. caldoxylosilyticus* DSM 12041[T]	65	-	90	4	4	51.5	2.1	-	-	56.7	1.7	1.1	6.8	2.2	-	26.7	-	2.5	-
[b]*G. toebii* SK-1[T]	60	-	86	-	-	-	0.97	-	-	34.03	-	-	17.46	-	-	34.86	-	-	-
[c]*G. thermodenitrificans* DSM 465[T]	65	-	78	8	13	27.8	1.04	0.4	0.38	35.64	1.79	1.28	8.07	6.77	-	34.23	1.61	6.4	0.55

* Values are the means of the least two determinations.
tr: Trace amounts; -: Not detected.
Abbreviation for FAME: *i*, *iso*-branched; *ai*, *anteiso*-branched; *n, normal*-elongated unbranched; C14:0-C18:0, saturated straight chains.
[a]Data from Fortina et al. (2001); [b]Data from Sung et al. (2002); [c]Data from Manachini et al. (2000) and Nazina et al. (2001).

The branched-*iso*-family was the most abundant component of the FAs mixture for all tested strains and greatly predominated over *anteiso*-branched FAs. The presence of branched FAs is considered to be a means of maintaining membrane fluidity; *iso*-branched FAs generally have higher melting points, while *anteiso*-branched FAs typically have lower melting points. The studied bacterial strains contained less of the lower melting point pair (*ai*C15:0, *ai*C17:0) and more of the higher melting point pair (*i*C15:0, *i*C17:0).

Unsaturated FAs were not detected. It is comprehensible: unsaturated FAs do not have appropriate properties suitable for maintaining membrane fluidity at higher temperature and they are not widespread in thermophilic microbes. Furthermore, in cold-adapted species the levels of unsaturated FAs or polyunsaturated FAs are known to be relatively high [10, 21].

For *G. thermodenitrificans* ArzA-6 the change in FAs composition at different growth temperature were determined. At different growth temperatures the ratios of branched to straight and of *iso*- to *anteiso*-FAs did not change significantly. The branched-chain FAs were major constituents at all temperature tested. The highest growth temperatures of the strain induced the synthesis of longer chains, while at the minimum temperature shorter chains were biosynthesized. Study of FA profiles in relation to the different temperatures tested showed that *i*C17:0 were preferred at the higher growth temperatures and *i*C15:0 at the lower temperatures, accordingly the ratio of *i*C15:0/*i*C17:0 was decreased along with the temperature rise. With increasing temperature, a decrease of *n*C14 FAs and an increase of *n*C15-*n*C17 FAs were observed. Despite of trace amounts, *n*C18:0 were found only at the highest growth temperature.

The strong presence of elongated, saturated and branched *iso*-FAs with high melting points and, on the other side, the absence of unsaturated acids with low melting points were detected for all tested thermophilic strains. The melting point of the major membrane constituents can be regarded as a factor influencing the flexibility and stability of the membrane. Obtained results are in agreement with previously published data, confirming significance of the membrane lipids structure and composition in thermophility formation [8, 10, 15, 21]. It was shown bacteria have elaborate mechanisms by which they regulate the FAs composition at temperatures just above the phase transition temperature [9].

The chemotaxonomic importance of ratio of the quantitatively predominant FAs *i*15C:0 and *ai*15C:0 for bacilli has been reviewed by Kaneda and later by Kampfer [2, 22]. It was shown for obligatory thermophilic bacilli at the optimal growth temperatures the *i*15C:0 was the predominant FA and *i*15C:0/*ai*15C:0>2. FA profiles of studied strains were compared with those of the following thermophilic reference strains: *G. caldoxylosilyticus* DSM 12041^T [23], *G. thermodenitrifcans* DSM 465^T [24, 25] and *G. toebii* SK-1^T [26]. The ratio of *i*15C:0/*ai*15C:0 of studied thermophilic strains varied from 21.9 to 37.4 (Table 1). This evidence and also high amounts of *i*C17:0 in all strains confirming their affiliation to genus *Geobacillus* including only obligatory thermophiles. Thus, FAs analysis was used as chemotaxonomic approach for complete identification of isolates.

This research was carried out at the Institute of Biomolecular Chemistry (C.N.R.) Pozzuoli (Naples, Italy).

Acknowledgements. The work was supported by the FEBS Short Fellowship-2009 H.P. The invaluable assistance of Prof. B. Nicolaus, Dr. A. Poli and technical support of Mr. E. Pagnotta is to be highly emphasized.

Yerevan State University
hpanosyan@ysu.am

H. H. Panosyan, corresponding member of NAS RA A. H. Trchounian

Polar Lipid Pattern and Fatty Acid Composition of Geobacilli and Their Temperature Induced Changes

Polar lipid patterns and fatty acid (FA) compositions of membrane of four geobacilli strains were analyzed. Phospholipids were found as the main polar lipids. The branched chain of *iso*- and *anteiso*- FAs were predominant, ranging from 80 % to 89 % of total FAs. The branched-*iso*-family FAs (*i*C15:0, *i*C17:0) were the most abundant components (73-76.6 %). Unsaturated FAs were not detected. Temperature induced changes in polar lipids and FA composition were analyzed. With increasing temperature, a decrease of amino-phospholipids and short straight (*n*C14) chains of FAs and an increase of phosphoglycolipids and long straight (*n*C15-*n*C17) chains of FAs were observed. The ratio of *i*C15:0/*i*C17:0 was decreased along with the growth temperature rise. FAs analysis was used as chemotaxonomic approach for complete identification of isolates.

Հ. Հ. Փանոսյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Հ. Թռչունյան

Գեոբացիլների բևեռային լիպիդների և ճարպաթթուների կազմը և դրանց ջերմաստիճանով մակածված փոփոխությունները

Ուսումնասիրվել է չորս գեոբացիլների մեմբրանային բևեռային լիպիդների և ճարպաթթուների բևեռային լիպիդների և ճարպաթթուների (ՃԹ) կազմը: Հաստատվել է, որ բևեռային լիպիդներից գերակշռել են ֆոսֆոլիպիդները: *Իզո*- և *անթեիզո*-ճյուղավորված ՃԹ-ները կազմել են գումարային ՃԹ-ների 80 – 90%-ը: Քանակապես գերակշռել են *իզո*-ճյուղավորված (*i*C15:0, *i*C17:0) ՃԹ-ները՝ կազմելով ճյուղավորված ՃԹ-ների 73 – 76.6%-ը: Չհագեցած ՃԹ-ներ չեն հայտնաբերվել: Ցույց է տրվել, որ բևեռային լիպիդների համամասնությունը և ՃԹ-ների կազմը կախված են ջերմաստիճանից: Ջերմաստիճանի բարձրացմանը զուգընթաց դիտվել է ամինալիպիդների և կարճ չճյուղավորված ՃԹ-ների (*n*C14) քանակի նվազում ու ֆոսֆոգլիկոլիպիդների և երկար չճյուղավորված ՃԹ-ների (*n*C15-*n*C17) քանակի ավելացում: Ջերմաստիճանի բարձրացմանը զուգընթաց *i*C15:0/*i*C17:0 հարաբերությունը նվազել է: Ճարպաթթուների վերլուծությունը կիրառվել է որպես քեմոտաքսոնոմիական մոտեցում ամբողջականացնելու շտամների նույնականացումը:

О. А. Паносян, член-корреспондент НАН РА. А.А. Трчунян

Состав полярных липидов и жирных кислот геобацилл и их температурные изменения

Изучен состав полярных липидов и жирных кислот (ЖК) мембран четырех штаммов геобацилл. Установлено, что фосфолипиды являются основными полярными липидами изученных штаммов. Показано доминирование длинноцепочечных *изо*- и *антеизо*-разветвленных ЖК, составляющих 80-89% суммарных ЖК. Длинноцепочечные *изо*-разветвленные ЖК (*i*C15: 0, *i*C17: 0) оказались наиболее распространенными компонентами (73-76.6%). Ненасыщенные ЖК не обнаружены. Были обнаружены также изменения пропорции полярных липидов и состава ЖК, вызванные температурой. С повышением температуры наблюдалось уменьшение количества аминофосфолипидов и коротких неразветвленных (*n*C14) ЖК и увеличение количества фосфогликолипидов и длинных неразветвленных цепей (*n*C15-*n*C17) ЖК. Соотношение *i*C15:0/*i*C17:0 уменьшалось с повышением температуры роста. Анализ ЖК использаван как хемотаксономический подход для полной идентификации штаммов.

References

1. *Sharmili A.S., Ramasamy P.* – European Journal of Experimental Biology. 2016. V. 6. Issue 5. P. 1-7.
2. *Kaneda T.* – Microbiol. Rev. 1991. V. 55. P. 288-302.
3. *Vandamme P., Pot B., Gillis M., De Vos P., Kersters K., Swings J.* – Microbiol. Rev. 1996. V. 60. P. 407-438.
4. *Diomandé S.E., Nguyen-The C., Guinebretière M.H., Broussolle V., Brillar J.* – Front. Microbiol. 6:813. doi:10.3389/fmicb.2015.00813, 2015.
5. *Parsons J.B., Rock Ch.O.* – Prog Lipid Res. 2013. V. 52. № 3. P. 249-276.
6. *Al-Beloshei N.E., Al-Awadhi H., Al-Khalaf R.A., Afzal M.* – Can. J. Microbiol. 2015. V. 61. P. 48-59.
7. *Zhang Y.M., Rock Ch.O.* – Nature reviews: Microbiology. 2008. V. 6. P. 222-233.
8. *Dreissen A.J.M., Albers S.V.* In: Physiology and Biochemistry of Extremophiles, Eds. Charles Gerday Ch., Glansdorff N. ASM Press. 2007. P. 104-116.
9. *Koga Y.* Thermal Adaptation of the Archaeal and Bacterial Lipid Membranes. Hindawi Publishing Corporation. Archaea. ID 789652, doi:10.1155/2012/789652, 2012.
10. *Russell N.J., Fukunaga N.* – FEMS Microbiol. Rev. 1990. V. 75. P. 171-182.
11. *Shen P.Y., Coles E., Foote J.L., Stenesh J.* – J. Bacteriol. V. 103. № 2. P. 479-481.
12. *Siristova L., Melzoch K., Rezanka T.* – Extremophiles. 2009. V. 13. P. 101-109.
13. *Panosyan H., Birkeland N.K.* – J. Basic Microbiol. 2014. V. 54. P. 1240-1250.
14. *Bligh E.D, Dyer W.J.* – Can. J. Biochem. Biophysiol. 1959. V. 37. P. 911-917.
15. *Nicolaus B., Manca M.C., Lama L., Esposito E., Gambacorta A.* – System. Appl. Microbiol. 1995. V. 18. P. 32-36.
16. *Dittmer J.C., Lester, E.L.* – J. Lip. Res. 1964. V. 5. P. 126-127.
17. *Kates M.* Techniques of lipidology: isolation, analysis, and identification of lipids (3rd rev. ed). NewportSomerville, Ottawa, Canada, 2010.

18. *Kundu S.K.* In: Methods in Enzymology, Ed. Lowenstain J.M. N. Y. Academic Press Inc. 1981. P. 185-204.
19. *Yang Y.L., Yang F.L., Jao S,. Ch., Chen M.Y., Tsay S.S., Zou W., Wul S.H.* – J. Lipid Res. 2006. V. 47. P. 1823-1832.
20. *Panosyan H.H.* – Biolog. J. Armenia. 2010. V. 62. № 2. P. 100-107.
21. *Charlier D., Droogmans L.* – Cell Mol. Life Sci. 2005. V. 62. P. 2974-2984.
22. *Kampfer P.* – System. Appl. Microbiol. 1994. V. 17 P. 86-98.
23. *Fortina M.G., Mora D., Schumann P., Parini C., Manachini P. L., Stackebrandt E.* – Int. J. of Syst. Evol. Microbiol. 2001. V. 51. P. 2063–2071.
24. *Manachini P.L., Mora D., Nicastro G., Parini C., Stackebrandt E., Pukall R., Fortina M.G.* – Int. J. of Syst. Evol. Microbiol. 2000. V. 50. P. 1331–1337.
25. *Nazina T.N., Tourova T.P., Poltaraus A.B., Novikova E.V., Grigoryan A.A., Ivanova A.E., Lysenko A.M., Petrunyaka V.V., Osipov G.A., Belyaev S.S., Ivanov M.V.* – Int. J. of Syst. Evol. Microbiol. 2001. V. 51. P. 433–446.
26. *Sung M.H., Kim H., Bae J.W., Rhee S.K., Jeon C.O., Kim K., Kim J.J., Hong S.P., Lee S.G., Yoon J.H., Park Y.H.,. Baek D.H.* – Int. J. of Syst. Evol. Microbiol. 2002. V. 52. P. 2251–2255.

Կանոններ հեղինակների համար

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Զեկույցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չհրապարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ:
2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն: Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով:
3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն լեզվով: Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ:
4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ mas@sci.am) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ): Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5: Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով:

Հանդեսի համառոտ անունը՝
ՀՀ ԳԱԱԶ

Правила для авторов

1.“Доклады Национальной академии наук Армении” выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.
2.Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.
3.Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.
4.Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: rnas@sci.am) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

Сокращенное название журнала
ДНАН РА

Guidelines for Authors

1."The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.
2.Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.
3.Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.
4.It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: rnas@sci.am) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

The abbreviated name of the journal is
RNAS RA