

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵՎՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2018

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԲԱՐՅԱՆ,
ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ռ. Մ.
ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ.
խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ. Ա.
ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик Р. М. МАРТИРОСЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН,
академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, , академик В. С. ЗАХАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р.
МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А. ТАВАДЯН, академик Ю.
Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician R. M. MARTIROSYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, corresponding member of NAS RA L. M.
AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding
member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H.
SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, academician V. S. ZAKARYAN, G. A. ABRAHAMYAN
(executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.am> *e-mail:* rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2018

©Издательство “Гитутюн”

НАН РА. 2018

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ա. Մ. Ջրբաշյան, Ջ. Պեքենդին</i> – Դիրիլյեի տիպի A_{ω}^2 տարածություններ կիսահարթությունում	195
<i>Վ. Ա. Միրզոյան</i> – Նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունները Էվկլիդեսյան տարածություններում	203
<i>Հ. Ա. Մամիկոնյան</i> – Պսևդոպարաբոլական տիպի մի հավասարմամբ ծնված կիսախմբի ատրակտորը	214
<i>Վ. Ս. Զաքարյան, Թ. Վ. Տավարաձյան</i> – Մ. Մ. Ջրբաշյանի B_{ω} արտադրյալների եզրային արժեքների մասին	221

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Հ. Գ. Շեկյան</i> – Մի ծայրով գետնահողում ամրակցված հեծանի դինամիկան ու կայունությունը	228
<i>Վ. Ա. Բարսեղյան</i> – Էտապ առ Էտապ փոփոխվող գծային ոչ ստացիոնար դինամիկ համակարգի դեկավարելիությունը	237
<i>Կ. Ա. Կարապետյան, Ս. Շ. Վալեսյան, Ն. Ս. Մուրադյան</i> – Ներքին հիդրոստատիկ ճնշման և առանցքային ձգման ազդեցությունն ապակեպլաստե խողովակների ըստ ոլորման քայքայելու դիմադրության վրա	246

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ռ. Հ. Ալանսկյան</i> – Սկալար լեպտոնների ծնումը լեպտոն-հակալեպտոնային բախումներում	254
--	-----

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

<i>Լ. Ա. Հախվերդյան, Ռ. Ա. Պաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան</i> – Հայաստանի տարածքի երկրակեղևի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վարիացիաների և սեյսմիկաակտիվության միջև կապը	260
---	-----

ԿԵՆՍԱՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

<i>Վ. Օ. Թովուզյան, Վ. Մ. Ղազոյան</i> – Խոլինէսթերազաների արգելակիչների նոր դաս՝ 2,4-երկտեղակալված 5(4H)-իմիդազոլոններ	268
--	-----

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ս. Հ. Ղազարյան, Հ. Մ. Ստեփանյան, Ռ. Վ. Պարոնիկյան, Կ. Պ. Գրիգորյան</i> – Տրիպտոֆանի Cu(II), Zn(II), Li կատիոն պարունակող ածանցյալների հակամանրէային ակտիվությունը	273
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>А. М. Джрбашян, Дж. Пехендино</i> – Пространства A_{ω}^2 типа Дирихле в полуплоскости	195
<i>В. А. Мирзоян</i> – Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах.....	203
<i>А. А. Мамиконян</i> – Аттрактор полугруппы, порожденной одним псевдопараболическим уравнением	214
<i>В. С. Захарян, Т. В. Таварацян</i> – О граничных значениях произведений М. М. Джрбашяна	221

МЕХАНИКА

<i>Г. Г. Шекян</i> – Динамика и устойчивость балки, заземленной одним концом в грунте	228
<i>В. Р. Барсегян</i> – Управляемость поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем.....	237
<i>К. А. Карапетян, С. Ш. Валесян, Н. С. Мурадян</i> – Влияние внутреннего гидростатического давления и осевого растягивающего усилия на сопротивление разрушению стеклопластиковых труб при кручении.....	246

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – Рождение скалярных лептонов в лептон-антилептонных столкновениях	254
--	-----

ГЕОФИЗИКА

<i>Л. А. Ахвердян, Р. А. Пашиаян, Л. В. Арутюнян</i> – Связь между вариациями напряженно-деформированного состояния земной коры и сейсмической активностью на территории Армении	260
--	-----

БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>В. О. Топузян, В. М. Казоян</i> – 2,4-Дизамещенные 5(4Н)-имидазолы: новый класс ингибиторов холинэстераз	268
---	-----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>С. А. Казарян, Г. М. Степанян, Р. В. Пароникян, К. П. Григорян</i> – Антибактериальная активность Cu(II), Zn(II), Li катионсодержащих производных триптофана	273
---	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>A. M. Jerbashian, J. Pejendino</i> – On Dirichlet Type Spaces A_{ω}^2 over the Half-Plane	195
<i>V. A. Mirzoyan</i> – Normally Flat Semi-Symmetric Submanifolds in Euclidean Spaces	203
<i>H. A. Mamikonyan</i> – Attractor of Semigroup Generated by an Equation of Pseudoparabolic Type	214
<i>V. S. Zakaryan, T. V. Tavaratsyan</i> – On Boundary Properties of Products of B_{ω} M. M. Djrbashyan	221

MECHANICS

<i>H. G. Shekyan</i> – Dynamics and Stability Fixed by One End in the Beam Ground	228
<i>V. R. Barseghyan</i> – Controllability of Stage by Stage Changing Linear Nonstationary Dynamic Systems	237
<i>K. A. Karapetyan, S. Sh. Valesyan, N. S. Muradyan</i> - The influence of the Hydrostatic Pressure and Axial Tension on the Resistance to Fracture of Glass-Plastic Tubes Subjected to Torsion	246

PHYSICS

<i>R. H. Alanakyan</i> - Scalar Leptons Production in Lepton-Antilepton Collisions ..	254
---	-----

GEOPHYSICS

<i>L. A. Akhverdyan, R. A. Pashayan, L. V. Arutyunyan</i> – The Relationship between Variations in the Stress-Strain State of the Earth's Crust and Seismic Activity in Armenia	260
---	-----

BIOORGANIC CHEMISTRY

<i>V. O. Topuzyan, V. M. Ghazoyan</i> – 2,4-Disubstituted 5(4H)-Imidazolones: New Class of Cholinesterase Inhibitors	268
--	-----

MICROBIOLOGY

<i>S. H. Ghazaryan, H. M. Stepanyan, R. V. Paronikyan, K. P. Grigoryan</i> – Antibacterial activity of Cu (II), Zn (II), Li Cation Containing Tryptophan Derivatives	273
--	-----

MATHEMATICS

MSC2010: 30H99, 30E05

A. M. Jerbashian, J. Pejendino

On Dirichlet Type Spaces A_{ω}^2 over the Half-Plane

(Submitted by academician V.S. Zakaryan 19/XII 2017)

Keywords: *Dirichlet spaces, boundary values, biorthogonality, interpolation.*

1. Introduction. This paper is devoted to an analysis of some Dirichlet type Hilbert spaces A_{ω}^2 of functions holomorphic in the upper half-plane $G^+ := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, which are similar to the case $p = 2$, $\gamma = 0$ of the considered in [1, 2] larger spaces $A_{\omega, \gamma}^2$, though the new spaces are included in the Hardy space H^2 over G^+ . Initially, some extensions of the statements of Theorems 4, 5 and 6 of [2] are proved, which relate with the orthogonal projection and isometry. Then, the spaces $A_{\omega}^2 \subset H^2$ are introduced by the requirement that the derivative of a function belongs to a larger space $A_{\omega, 0}^2$, and some results on representations, boundary properties, isometry with H^2 , interpolation, biorthogonal systems and bases are obtained for the spaces $A_{\omega}^2 \subset H^2$. The reproducing kernel of the considered spaces A_{ω}^2 , which also provides the approximations, in a sense is better than the Cauchy kernel or rational functions [3], since its singularity on the real axis can be integrable.

2. Extension of the Results on $A_{\omega, 0}^2$ Spaces. This section gives some extension of the statements of Theorems 4, 5 and 6 of [2] to some spaces $A_{\omega, 0}^2$, where the functions are restricted by some other condition at ∞ . We start by several definitions from [1, 2].

Definition 2.1. $A_{\omega, \gamma}^2$ ($0 < p < +\infty$, $-\infty < \gamma \leq 2$) is the set of those holomorphic in G^+ functions f which satisfy the Nevanlinna type condition

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \log^+ |f(\operatorname{Re} i\vartheta)| \left(\sin \frac{\pi(\vartheta-\beta)}{\pi-2\beta} \right)^{1-\pi/\chi} d\vartheta = 0, \quad (2.1)$$

For sufficiently small $\rho > 0$ and $\beta = \arcsin \frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2} - \chi$, and simultaneously

$$\|f\|_{p,\omega,\gamma}^p := \int \int_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_\omega(z)}{(1+|z|)^\gamma} < +\infty, \quad (2.2)$$

where $d\mu_\omega(x+iy) = dx d\omega(2y)$ and it is supposed that ω is of a class Ω_α ($-1 \leq \alpha < +\infty$), i.e. ω is given in $[0, +\infty)$ and satisfies the following conditions:

(i) ω is non-decreasing in $[0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$ and there exists a strictly decreasing sequence $\delta_k \downarrow 0$ such that also $\omega(\delta_k)$ is strictly decreasing;

(ii) $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ for some $\Delta_0 \geq 0$ and any $\Delta_0 \leq t < +\infty$

($f(t) \asymp g(t)$ means that $m_1 f(t) \leq g(t) \leq m_2 f(t)$ for some constants $m_{1,2} > 0$).

The Lebesgue space $L_{\omega,\gamma}^p$ is assumed to be the set of those functions in G^+ , which satisfy only the condition (2.2).

Note that $A_{\omega,\gamma}^2$ ($1 \leq p < +\infty$, $-\infty < \gamma < 1$, $\omega \in \Omega_\alpha$, $\alpha \geq -1$) is a Banach space with the norm (2.2) (see Proposition 1.2 in [1]) and it becomes a Hilbert space for $p = 2$. Later we shall deal with the M. M. Djrbashian kernel

$$C_\omega(z) := \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-tx} \omega(x) dx$$

(see Section 2 of [2]) which for any $\omega \in \Omega_\alpha$ ($-1 \leq \alpha < +\infty$) is holomorphic in G^+ and becomes the $2+\alpha$ -order of the ordinary Cauchy kernel when $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ ($\alpha > -1$). Note that if $\tilde{\omega}$ is the Volterra square of ω , i.e. $\tilde{\omega}(0) = 0$ and

$$\tilde{\omega}(x) = \int_0^x \omega(x-t) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty, \quad (2.3)$$

Then $\tilde{\omega} \in \Omega_{1+2\alpha}$ and $I_\omega^2(x) = I_{\tilde{\omega}}(x)$ ($0 < x < +\infty$) by Lemma 4 of [2].

Theorem 2.1. *If $\omega \in \Omega_\alpha$ ($-1 \leq \alpha < +\infty$) and $\omega(0) = 0$, then:*

1⁰. *The orthogonal projection of $L_{\omega,0}^2$ to $A_{\omega,0}^2$ can be written in the form*

$$P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \quad (2.4)$$

2⁰. *The following representations are true for any function $f \in A_{\omega,0}^2$:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w) \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} \operatorname{Re}\{f(w)\} C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Remark 2.1. In the case of power functions $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ ($\alpha > -1$), formulas (2.5) become the representations found in [8] (see also in [9]). For absolutely continuous measures $d\omega$ and spaces defined in a somehow different way, over multidimensional tube domains, the first line of (2.5) was obtained in [10, 11].

The next theorem is the analog of the Paley-Wiener Theorem for $A_{\omega,0}^2$.

Theorem 2.2. If $\omega \in \Omega_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$) and $\omega(0) = 0$, then the space $A_{\omega,0}^2$ coincides with the set of functions representable in the form

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}} dt, \quad z \in G^+, \quad \Phi \in L^2(0, +\infty), \quad (2.6)$$

where $\|\Phi\|_{L^2(0, +\infty)} = \|f\|_{A_{\omega,0}^2}$, and

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}} \int_0^{+\infty} e^{-tv} \widehat{f}_v(t) d\omega(2v), \quad (2.7)$$

where $\widehat{f}_v$ is the Fourier transform of the function f on the level iv .

Remark 2.2. For somewhat different spaces over tube domains of $\mathbb{C}^n$ with absolutely continuous measures $\omega(t)dt$, an analog of Theorem 2.2 is proved in [10].

Remark 2.3. Let $S = \bigcup_{\alpha=-1}^{+\infty} \Omega_\alpha$. Then, the union of spaces $\bigcup_{\omega \in S} A_{\omega,0}^2$ coincides with the set of all functions representable in the form

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \Psi(t) dt, \quad z \in G^+,$$

where $e^{-\varepsilon t} \Psi(t) \in L^2(0, +\infty)$ for any $\varepsilon > 0$.

Theorem 2.3. If $\omega \in \Omega_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$), $\omega(0) = 0$ and $\tilde{\omega}$ is the Volterra square of ω (2.3), then the space $A_{\omega,0}^2$ coincides with the set of all functions representable in G^+ in the form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t) \varphi(t) dt, \quad \text{where } \varphi \in L^2(-\infty, +\infty). \quad (2.8)$$

For any $f \in A_{\omega,0}^2$, the function

$$\varphi_0(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f(z+i\sigma) d\omega(\sigma)$$

is the unique one in the Hardy space H^2 over G^+ , for which (2.8) is true. Besides, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A_{\omega,0}^2}$, and $\varphi - \varphi_0$ is orthogonal to H^2 for any function $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty)$ which provides the representation (2.8). Further, the operator L_ω is an isometry $A_{\omega,0}^2 \rightarrow H^2$, and the integral (2.8) defines L_ω^{-1} in H^2 .

3. Definition of Dirichlet type spaces A_ω^2 , representations, isometry, a boundary property. Now we introduce some Dirichlet type spaces A_ω^2 which are subsets of the Hardy space H^2 in G^+ . Then we prove some representations, an isometry formula and some boundary properties of functions from A_ω^2 .

Definition 3.1. Assuming that $\omega_0 \in \Omega_\alpha$ ($0 \leq \alpha < +\infty$) is continuously differentiable in $(0, +\infty)$ and $\omega_0(x) \geq Mx$ ($0 < x < +\infty$) with some $M > 0$, we set

$$\omega_0(x) := \omega_0'(x) \quad \text{and} \quad \omega_1(x) := \int_{+0}^x \omega_0(x-t) d\omega_0(t), \quad 0 < x < +\infty,$$

and define A_ω^2 as the set of those functions f holomorphic in G^+ , for which

$$f' \in A_{\omega_1,0}^2 \quad \text{and} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x+iy) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1)$$

Also, we set $\|f\|_{A_\omega^2} := \|f\|_{A_{\omega_0,0}^2}$.

Note that the above definition is correct, since $\omega_1 \in \Omega_{1+2\alpha}$ by Lemma 4 of [2]. Everywhere below, the functions ω , ω_0 and ω_1 are assumed to be as above. Further, one can see that Lemma 4.2 in [12] is true also when there $\alpha = 0$, and therefore, if $\omega = \omega_0$ is a positive, nonincreasing in $(0, +\infty)$ function such that

$\int_0^1 \{t\omega_0(t)\}^{-1} dt < +\infty$, then for any $z = x + iy \in G^+$

$$C_\omega(z) = L_\gamma\left(\frac{1}{-iz}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{d\gamma(t)}{-i(z+it)},$$

where γ is a nondecreasing function in $(0, +\infty)$, such that $\gamma(0) = 0$ and $\gamma(t) \leq [\omega_0(t)]^{-1}$, $0 < t < +\infty$, and hence the function C_ω is holomorphic out of the negative imaginary half-axis, and the origin is an integrable singularity.

One of the representations of the next theorem is an analog of that of the Paley-Wiener Theorem (see, eg. [13], Theorem 11.9 at p. 186), while the other one gives an explicit isometry between A_ω^2 and the Hardy space H^2 over the half-plane.

Theorem 3.1. A_ω^2 is a Hilbert space and $A_\omega^2 \subset H^2$. Besides, A_ω^2 coincides with the set of all functions representable in the form

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}} dt, \quad z \in G^+, \quad (3.2)$$

where $\Phi \in L^2(0, +\infty)$, and $\|\Phi\|_{L^2(0, +\infty)} = \|f\|_{A_\omega^2}$.

A_ω^2 coincides with the set of all functions representable in G^+ as

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(z) \in H^2, \quad (3.3)$$

where $\|\varphi\|_{H^2} = \|f\|_{A_\omega^2}$. Formula (3.3) defines an isometry $H^2 \rightarrow A_\omega^2$, the inversion of which is

$$\varphi(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f'(z+it) \omega(t) dt, \quad z \in G^+. \quad (3.4)$$

The functions of the Dirichlet type spaces A_ω^2 possess nontangential boundary values out of some exceptional, zero omega-capacity sets on the real axis. Note that the mentioned omega-capacity is introduced in [14] as a generalization of the considered in [7] half-plane analog of Frostman's well-known alpha-capacity. Below, we give a somehow modified, but equivalent to that of [14] definition.

Definition 3.2. Let $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ be a Borel measurable set. Then E is of positive ω -capacity, or $C_\omega(E) > 0$, if for any $R > 0$ there exists a finite Borel measure $\sigma \geq 0$ supported on $E \cap (-R, R)$, ($\sigma \prec E \cap (-R, R)$), such that

$$S_R := \sup_{z \in G^+} \int_{-R}^R |C_\omega(z-t)| d\sigma(t) < +\infty.$$

If there is not such a measure, i.e. $S_R = +\infty$ for some $R > 0$ and any finite, nonnegative Borel measure $\sigma \prec E \cap (-R, R)$, then E is of zero ω -capacity, or $C_\omega(E) = 0$.

Proposition 3.1. *Since the functions $f \in A_\omega^2$ possess representations of the form (3.3), Lemma 4.4 of [14] implies that these functions have nontangential boundary values $f(x)$ at all points $-\infty < x < +\infty$, except a set of zero omega-capacity.*

4. Biorthogonal systems, bases and interpolation. The explicit form (3.3) of an isometry between the Hardy space H^2 over the half-plane G^+ and the spaces A_ω^2 permits to convert any result of additive character in H^2 into a similar statement in A_ω^2 . In particular, for $p=2$ the results of [15, 16] on biorthogonal systems and interpolation in H^p ($1 < p < +\infty$) imply some similar statements in A_ω^2 . Almost all of these statements are given in the below propositions. For simplicity, we assume that $\{z_k\}_1^\infty$ is a sequence of *pairwise different* points in G^+ . It is said that $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, if the sequence $\{z_k\}_1^\infty$ is uniformly separated, i.e.

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1, j \neq k}^\infty \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| = \delta > 0. \quad (4.1)$$

Note that this relation implies the validity of the Blaschke condition

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{Im} z_k}{1 + |z_k|^2} < +\infty \quad (4.2)$$

which is necessary and sufficient for the convergence of the Blaschke product

$$B(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \frac{1 + z_k^2}{1 + \bar{z}_k^2}$$

with zeros at $\{z_k\}_1^\infty$ to a holomorphic function everywhere in the finite complex plane, except the closure of the set $\{\bar{z}_k\}_1^\infty$.

The inequality (3.21) of [15] is transferred to the following proposition.

Proposition 4.1. *If $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, then for any function $f \in A_\omega^2$ the following inequality is true: $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im} z_k |L_\omega f(z_k)|^2 \leq C \|f\|^2$, where $C > 0$ is a constant independent of f .*

Before giving some other propositions on approximation and interpolation in A_ω^2 , note that the functions

$$r_k(z) = \frac{1}{z - z_k} \quad \text{and} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - z_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

are of H^2 in G^+ . Hence, all functions $L_\omega^{-1} r_k(z) := r_{k,\omega}(z)$ and $L_\omega^{-1} \Omega_k(z) := \Omega_{k,\omega}(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) are of A_ω^2 , and one can verify that $r_k(z) = -i C_\omega(z - \bar{z}_k)$. Theorem D and some other results of [15] imply the following statement.

Proposition 4.2. *If the sequence $\{z_k\}_1^\infty$ does not satisfy the Blaschke condition, i.e. the series (4.2) is divergent, then the systems $\{-iC_\omega(z - \overline{z_k})\}_1^\infty$ and $\{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$ are complete in A_ω^2 .*

Further, a transformation in the conditions (1.16), (1.17) of [15] (or (2.2), (2.3) of [16]) leads to the introduction of a subset $A_\omega^2\{z_k\} \subset A_\omega^2$ of functions f for which there exist some $g \in H^2$ such that for almost all $-\infty < x < +\infty$ the non-tangential boundary values of $g(-z)B(z)$ from inside the lower half-plane $G^- = \{z : \text{Im } z < 0\}$ coincide with those of the function $L_\omega f \in H^2$ from inside G^+ . Evidently, $A_\omega^2\{z_k\} \subset A_\omega^2$ can be considered only under the condition (4.2). By Theorem 2 of [16] we get the following proposition.

Proposition 4.3. *The systems $\{-iC_\omega(z - \overline{z_k})\}_1^\infty$ and $\{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$ are biorthogonal:*

$$\left(-iC_\omega(z - \overline{z_k}), \Omega_{\nu,\omega}(z)\right)_{A_\omega^2} = \begin{cases} 1, & \text{if } \nu = k, \\ 0, & \text{if } \nu \neq k. \end{cases}$$

The next proposition is implied by Lemmas B and 1.1 of [15].

Proposition 4.4. *If $f \in A_\omega^2$, then:*

1⁰. *f belongs to $A_\omega^2\{z_k\}$ if and only if*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\omega f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in G^+,$$

where $L_\omega f(t)$ and $B(t)$ are the boundary values of $L_\omega f(z) \in H^2$ and $B \in H^2$.

2⁰. *The following orthogonal decomposition is true: $f(z) = F(z) + R(z)$ ($z \in G^+$), $\|f\|_{2,\omega}^2 = \|F\|_{2,\omega}^2 + \|R\|_{2,\omega}^2$, where $F \in A_\omega^2\{z_k\}$, $R = L_\omega^{-1}[B\Psi] \in A_\omega^2$.*

By Theorems 4.1 and 5.2 of [15] we get the next proposition.

Proposition 4.5. *Each of the systems $\{-iC_\omega(z - \overline{z_k})\}_1^\infty$ and $\{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$ is a basis in $A_\omega^2\{z_k\}$ if and only if $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.*

Using formulas (4.29), (4.31) and a formula from the proof of Theorem 5.2 in [15] we get the next proposition.

Proposition 4.6. *If $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, then any function $f \in A_\omega^2\{z_k\}$ is representable in G^+ by both series*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) C_\omega(z - \overline{z_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} L_\omega f(z_k) \Omega_{k,\omega}(z) \quad \text{with } c_k(f) = (f, \Omega_{k,\omega}),$$

which converge in the norm of A_ω^2 and uniformly inside G^+ .

Theorem 4.2 of [15] implies the next proposition.

Proposition 4.7. *If $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, then any function $f \in A_\omega^2$ is representable as $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) C_\omega(z - \overline{z_k}) + \psi(z)$, where the series is convergent in A_ω^2 and uniformly in G^+ , and the following inclusions are true: $\psi(z) = L_\omega^{-1}[B(z)\Psi(z)]$ and $\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\omega f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \in H^2$.*

By Theorems 5.1 and 5.2 of [15] we get the next proposition.

Proposition 4.8. *The following statements are true.*

1⁰. *If $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$ and $\{w_k\}_1^\infty$ is a sequence of complex numbers for which*

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |w_k|^2 < +\infty, \text{ then there is a unique function } f_0 \in A_\omega^2\{z_k\} \text{ such that}$$

$L_\omega f_0(z_k) = w_k \quad (k=1, 2, \dots)$ and $\|f_0\|_{f_0 \in A_\omega^2} \leq C_\delta A$, where $C_\delta > 0$ is a constant depending solely on δ of (4.1). This function is expanded in the series

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_{k,\omega}(z), \quad z \in G^+,$$

which converges in the norm of A_ω^2 and uniformly inside $z \in G^+$.

2⁰. *Conversely, if the set of the sequences $\{(\operatorname{Im} z_k)^{1/2} f'(z_k)\}_1^\infty$ with all possible functions $f \in A_\omega^2$ coincides with the space l^2 of sequences of complex numbers, which possess finite sums of squares of modules, then $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.*

The work is done within the frames of University of Antioquia CIEN Project 2016-11126.

Institute of Mathematics, Faculty of Exact and Natural Sciences,
University of Antioquia, Cl. 67, No. 53-108, Medellin, Columbia
e-mail: armen_jerbashian@yahoo.com, dafavar_754@hotmail.com

A. M. Jerbashian, J. Pejendino

On Dirichlet Type Spaces A_ω^2 over the Half-Plane

Some extensions of the results of the first author related with the Hilbert spaces $A_{\omega,0}^2$ of functions holomorphic in the half-plane are proved. Some new Hilbert spaces A_ω^2 of Dirichlet type are introduced, which are included in the Hardy space H^2 over the half-plane. Several results on representations, boundary properties, isometry, interpolation, biorthogonal systems and bases are obtained for the spaces $A_\omega^2 \subset H^2$.

Ա. Մ. Ջրբաշյան, Ջ. Պեյենդինո

Դիրիխլեի տիպի A_ω^2 տարածություններ կիսահարթությունում

Տրված են համահեղինակներից առաջինի՝ կիսահարթությունում հոլոմորֆ ֆունկցիաների $A_{\omega,0}^2$ տարածություններին վերաբերող որոշ արդյունքների ընդլայնումներ: Ներմուծված են նոր, Դիրիխլեի տիպի, հիլբերտյան A_ω^2 տարածություններ, որոնք պարունակվում են կիսահարթության Հարդիի H^2 տարածության մեջ: $A_\omega^2 \subset H^2$ տարածություններում ստացված են արդյունք-

ներ ներկայացումների, եզրային հատկությունների, իզոմետրիայի, ինտերպոլացիայի, բիրթոգոնալ համակարգերի և բազիսների վերաբերյալ:

А. М. Джрбашян, Дж. Пехендино

Пространства A_{ω}^2 типа Дирихле в полуплоскости

Даны расширения некоторых результатов первого из соавторов, относящиеся к пространствам $A_{\omega,0}^2$ функций, голоморфных в полуплоскости. Введены новые гильбертовы пространства A_{ω}^2 типа Дирихле, содержащиеся в пространстве H^2 Харди. В пространствах $A_{\omega}^2 \subset H^2$ получены результаты о представлениях, граничных свойствах, изометрии, интерполяции, биортогональных системах и ба-
зисах.

References

1. *Jerbashian A. M.* In: Operator Theory: Advances and Applications. 158. Basel/Switzerland. Birkhauser Verlag, 2005 P. 141-158.
2. *Jerbashian A. M., Jerbashian V. A.* – Calculation Methods and Function Theory (CMFT). 2007. V. 7. № 2. P. 205-238.
3. *Walsh J. L.* Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Ann Arbor, Michigan, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XX. Edwards Brothers Inc. 1956.
4. *Jerbashian A. M.* – Complex Variables. 2005. V. 50. P. 155-183.
5. *Jerbashian A. M.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 2014. V. 49. P. 17-22.
6. *Koosis P.* Introduction to H^p Spaces. Cambridge University Press. 1998.
7. *Jerbashian A. M.* Advances in Complex Analysis and Applications. Springer. 2005.
8. *Shamoian F. A., Djrbashian A. E.* Topics in the Theory of A_{α}^p Spaces. Berlin. Teubner Texte zur Mathematics. 1988.
9. *Ricci F., Taibleson M.* – Annali Scuola Normale Superiore-Pisa, Classe di Scienze. 1983. Ser. IV. V. X. P. 1-54.
10. *Karapetyan A. O.* – Soviet Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 1988. V. 23. P. 90-95.
11. *Karapetyan A. O.* – Soviet Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 1990. V. 25. P. 1-19.
12. *Jerbashian A. M., Restrepo J. E.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 2016. V. 51. P. 51-61.
13. *Duren P. L.* Theory of H^p Spaces. Academic Press. 1970.
14. *Jerbashian A. M., Restrepo J. E.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). 2016. V. 51. P. 111-124.
15. *Djrbashian M. M.* – Math. USSR Sbornik. 1982. V. 42. P. 1-70.
16. *Djrbashian M. M.* – Math. USSR Izvestiya. 1979. V. 13. P. 589-646.

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/V 2018)

Ключевые слова: полусимметрические подмногообразия, конусы, эйнштейновы и полуэйнштейновы подмногообразия.

1. Введение. Пусть M – m -мерное гладкое риманово многообразие с метрикой g , римановой связностью ∇ и тензором кривизны R . Тензор Риччи R_i типа (1,1) определяется следующим образом: если $(e_1, \dots, e_m)$ – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M , то для любого касательного векторного поля X полагаем $R_i(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i$. В каждой точке $x \in M$ тензор R_i действует как симметрический эндоморфизм касательного пространства $T_x(M)$. При $R_i = \lambda I$ ($\lambda = \text{const}$, I – тождественное преобразование) многообразие M называется эйнштейновым, а при $R_i = 0$ – риччи-плоским. Операторы кривизны $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M , например,

$$\begin{aligned} (R(X, Y)R_i)Z &= R(X, Y)R_i(Z) - R_i(R(X, Y)Z), \\ (R(X, Y)R)(U, V)W &= R(X, Y)(R(U, V)W) - R(R(X, Y)U, V)W - \\ &\quad - R(U, R(X, Y)V)W - R(U, V)R(X, Y)W, \end{aligned}$$

где X, Y, Z, U, V, W – произвольные касательные векторные поля на M . Тензорное поле T называется параллельным, если $\nabla_X T = 0$ для любого X . Если же $R(X, Y)T = 0$ для любых X, Y , то оно называется полупараллельным.

Римановы многообразия с параллельным тензором кривизны называются локально симметрическими, с полупараллельным тензором кривизны

– полусимметрическими, а с полупараллельным тензором Риччи – риччи-полусимметрическими. Верны импликации:

$$\nabla R = 0 \Rightarrow \nabla R_1 = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0, \quad \nabla R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0.$$

Общая структурная теорема для полусимметрических многообразий была установлена З. Сабо [1], а для риччи-полусимметрических многообразий – автором [2]. Настоящая работа посвящена исследованию нормально плоских полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

2. Пространства дефектности и относительной дефектности.

Пусть M является m -мерным подмногообразием n -мерного евклидова пространства E_n . Если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность на E_n , то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ имеем (см. [3, 4])

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ в точке $x \in M$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а $\alpha_2(X, Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$. Эти формулы определяют на M связность Леви-Чивита ∇ , нормальную связность $\nabla^\perp$ и вторую фундаментальную форму α_2 . Тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей $\nabla, \nabla^\perp$ определяются равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

При $R = 0$ подмногообразие M называется локально евклидовым, а при $R^\perp = 0$ – нормально плоским. Тензор Риччи R_1 подмногообразия M определяется через тензор кривизны R так же, как и для риманова многообразия. Вектор средней кривизны H определяется по формуле $H = \text{tr} \alpha_2$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным.

Пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' подмногообразия M в точке x определяются, соответственно, формулами

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\},$$

$$T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Эти понятия были введены и использованы Чженем и Кюйпером [5]. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются *индексом дефектности* и *индексом относительной дефектности* подмногообразия M в точке x . Имеет место включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в M . Интегральное многообразие распределения T' представляет собой плоскость. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x , а его размерность – индексом кодефектности M в этой точке. Подмногообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 в

каждой точке $x \in M$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

Изометрическое погружение $M \rightarrow E_n$ называется произведением погружений $M_\varphi \rightarrow E_{n_\varphi}$, если $M = M_1 \times \dots \times M_r$, $E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ} ($\varphi \neq \psi$) ортогональны в E_n . В этом случае говорят, что M является прямым произведением подмногообразий $M_1, \dots, M_r$ или, просто, является приводимым как подмногообразие. Если изометрическое погружение $M = M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow E_n$ неприводимо в E_n как подмногообразие, то оно называется сплетающимся произведением подмногообразий $M_1, \dots, M_r$ [6].

3. Редукция условий. Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . Отождествляя точку x со своим радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \quad de_A = \omega_A^B e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad A, B, \dots = 1, \dots, n.$$

Отсюда, путем внешнего дифференцирования, получим следующие структурные уравнения: $d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$, $d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B$. Если M – m -мерное подмногообразие в E_n , тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $(i, j, \dots = 1, \dots, m)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $(\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n)$ (см. [4]). В силу этого по известной схеме (см. [7-9]) получим $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$, $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$, где функции h_{ij}^α – компоненты формы α_2 . Компоненты R_{ikl}^j , $R_{\alpha kl}^\beta$, R_{ik} тензоров кривизны $R, R^\perp$ и тензора Риччи R_1 выражаются через h_{ij}^α по формулам

$$R_{ikl}^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = \sum_l h_{ll}^\alpha$ – компоненты вектора средней кривизны H .

Известно (см. [7-9]), что условия полупараллельности тензоров R, R_1 , соответственно, имеют следующий вид: $R_{pjk}^l \Omega_i^p + R_{ipk}^l \Omega_j^p + R_{ijp}^l \Omega_k^p - R_{ijk}^p \Omega_p^l = 0$, $R_{kj} \Omega_i^k + R_{ik} \Omega_j^k = 0$, где $\Omega_k^j, \Omega_\alpha^\beta$ – формы кривизны связностей $\nabla, \nabla^\perp$.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$.

Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой и в некотором ортонормрепере одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда $R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}$, где $\rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны (г.в.к.) нормально

плоского подмногообразия в E_n . Очевидно, что $H = n_1 + \dots + n_m$. Если $\langle, \rangle$ – скалярное произведение в E_n , то прямым вычислением получим

$$\rho_j = |n_j|^2 - \langle H, n_j \rangle, \quad k(e_i \wedge e_j) = -R_{ijij} = \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} \lambda_j^{\alpha} = \langle n_i, n_j \rangle, \quad (1)$$

$$R_{ijkl} = (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} \lambda_j^{\alpha} = (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \langle n_i, n_j \rangle,$$

где $k(e_i \wedge e_j)$ – секционная кривизна. Из (1) следует, что если секционная кривизна подмногообразия M постоянна, т.е. $k(e_i \wedge e_j) = q$, то $R_{jk} = R_{ijkl} \delta^{il} = q(m-1) \delta_{jk}$. В этом случае M ($\dim M = m \geq 2$) будет риччи-плоским тогда и только тогда, когда оно локально евклидово.

Для нормально плоского подмногообразия M условия полупараллельности тензора Риччи получены в [7] и [10]. Поскольку $\Omega_k^j = -\sum_{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_k^{\alpha} \omega^k \wedge \omega^j = \langle n_j, n_k \rangle \omega^j \wedge \omega^k$, то

$$\begin{aligned} & R_{p j k l} \Omega_i^p + R_{i p k l} \Omega_j^p + R_{i j p l} \Omega_k^p + R_{i j k p} \Omega_l^p = \\ & = \delta_{jk} (\langle n_l, n_j \rangle \langle n_i, n_l \rangle - \langle n_i, n_j \rangle \langle n_l, n_l \rangle) \omega^l \wedge \omega^j + \\ & + \delta_{il} (\langle n_k, n_i \rangle \langle n_k, n_j \rangle - \langle n_i, n_j \rangle \langle n_k, n_k \rangle) \omega^k \wedge \omega^i + \\ & + \delta_{jl} (\langle n_k, n_j \rangle \langle n_i, n_k \rangle - \langle n_i, n_j \rangle \langle n_k, n_k \rangle) \omega^i \wedge \omega^k + \\ & + \delta_{ik} (\langle n_l, n_i \rangle \langle n_l, n_j \rangle - \langle n_i, n_j \rangle \langle n_l, n_l \rangle) \omega^j \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Преобразуя правую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} & R_{p j k l} \Omega_i^p + R_{i p k l} \Omega_j^p + R_{i j p l} \Omega_k^p + R_{i j k p} \Omega_l^p = \\ & = \delta_{jk} \langle n_l, n_l \rangle \langle n_i, n_j \rangle \omega^l \wedge \omega^j + \delta_{il} \langle n_k, n_j \rangle \langle n_k - n_j, n_l \rangle \omega^k \wedge \omega^i + \\ & + \delta_{jl} \langle n_i, n_k \rangle \langle n_k - n_i, n_j \rangle \omega^i \wedge \omega^k + \delta_{ik} \langle n_l, n_j \rangle \langle n_l - n_j, n_i \rangle \omega^j \wedge \omega^l. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим несколько случаев. Если в (2) все индексы имеют попарно различные значения, то правая часть равна нулю и, следовательно, условие полусимметричности $R_{p j k l} \Omega_i^p + R_{i p k l} \Omega_j^p + R_{i j p l} \Omega_k^p + R_{i j k p} \Omega_l^p = 0$ выполняется. Легко проверить, что это условие также выполняется, если в (2) $k = l$ или $i = j$. Пусть в (2) $i \neq j, k \neq l, l = j$. Тогда из (2) получим

$$R_{p j k j} \Omega_i^p + R_{i p k j} \Omega_j^p + R_{i j p j} \Omega_k^p + R_{i j k p} \Omega_j^p = \langle n_i, n_k \rangle \langle n_k - n_i, n_j \rangle \omega^j \wedge \omega^k.$$

Отсюда следует, что левая часть будет равна нулю тогда и только тогда, когда $\langle n_i, n_k \rangle \langle n_k - n_i, n_j \rangle = 0$ для любых трёх различных значений индексов i, j, k . Точно такой же результат получим при $i \neq j, k \neq l, k = j$, а также при $i \neq j, k \neq l, l = i$ или $i \neq j, k \neq l, k = i$.

Таким образом, с учётом результатов, полученных в [7] и [10], заключаем, что для нормально плоского подмногообразия в E_n необходимые и достаточные условия полупараллельности тензора кривизны R и тензора Риччи R_i имеют, соответственно, следующий вид:

$$\langle n_i - n_k, n_j \rangle \langle n_i, n_k \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle n_i - n_k, n_i + n_k - H \rangle \langle n_i, n_k \rangle = 0 \quad (4)$$

при любых различных значениях индексов. Условие (3) было приведено в [7] без доказательства. Покажем, что из (3) следует (4). Действительно, если в (3) $\langle n_i, n_k \rangle = 0$, то (4) выполняется. Если в (3) $\langle n_i, n_k \rangle \neq 0$, то $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Суммируя последнее равенство по $j (j \neq i, j \neq k)$, получим $\langle n_i - n_k, n_i + n_k - H \rangle = 0$. Следовательно, условие (4) также выполняется.

Из (3) следует, что множество всех г.в.к. нормально плоского полусимметрического подмногообразия естественным образом разбивается на группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(r)}$ так, что векторы, принадлежащие разным группам, ортогональны, а векторы, принадлежащие одной и той же группе, удовлетворяют условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Из приведённых выше равенств следует, что при соответствии, устанавливаемой формулой $\rho_j = |n_j|^2 - \langle H, n_j \rangle$, группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(r)}$ соответствуют различным собственным значениям тензора Риччи. Будем считать, что группа $W^{(0)}$ соответствует нулевому собственному значению, а $W^{(1)}, \dots, W^{(r)}$ соответствуют ненулевым собственным значениям $\rho_1, \dots, \rho_r$ тензора Риччи R_1 . Заметим, что некоторые из групп $W^{(\sigma)}$, $\sigma > 0$, вообще говоря, могут содержать взаимно ортогональные векторы. Речь идёт о тех векторах n_i, n_k из $W^{(\sigma)}$, которые удовлетворяют как условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$, так и условию $\langle n_i, n_k \rangle = 0$. Однако все векторы в $W^{(\sigma)}$ не могут быть взаимно ортогональны, поскольку в этом случае соответствующие компоненты тензора кривизны, а следовательно, и соответствующее собственное значение ρ_σ тензора Риччи будут нулевыми.

4. Полусимметрические эйнштейновы подмногообразия. В [6] для риччи-полусимметрических подмногообразий была доказана следующая

Теорема 1. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X, Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

В силу импликации $R(X, Y)R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0$ и мультипликативности условия $R(X, Y)R = 0$ эта теорема справедлива также для полусимметрических подмногообразий. Однако поскольку обратная импликация $R(X, Y)R_1 = 0 \Rightarrow R(X, Y)R = 0$, вообще говоря, неверна, то каждое эйнштейново или полуэйнштейново подмногообразие, будучи риччи-полусимметрическим, может не быть полусимметрическим. Поэтому для полусимметрических подмногообразий теорему 1 можем перефразировать следующим образом.

Теорема 2. В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X,Y)R=0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова полусимметрического подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова полусимметрического подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых полусимметрических подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.

Поскольку нормально плоские двумерные подмногообразия автоматически являются полусимметрическими, то из теоремы 2 следует, что проблема исследования нормально плоских полусимметрических подмногообразий сводится к исследованию нормально плоских эйнштейновых и полуэйнштейновых полусимметрических подмногообразий.

Пусть M ($\dim M \geq 3$) является внутренне неприводимым нормально плоским эйнштейновым полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевой эйнштейновой константой ρ . Тогда индекс дефектности равен нулю, т.е. $\mu=0$, и M допускает только одну группу главных векторов кривизны $W^{(1)}$. Покажем, что имеем право предположить, что в $W^{(1)}$ все векторы удовлетворяют условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Действительно, предположим, что группа $W^{(1)}$ разбивается на подгруппы $W^{(1,1)}, \dots, W^{(1,t)}$ так, что векторы каждой подгруппы ортогональны векторам любой другой подгруппы, а векторы одной и той же подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ ($\varphi, \psi = 1, \dots, t$) удовлетворяют, следовательно, условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Докажем, что в этом случае подмногообразие M внутренне приводимо (т.е. приводимо как риманово многообразие). (В дальнейшем векторы подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ будем снабжать субиндексом φ). Поскольку $\langle n_{i_\varphi}, n_{j_\psi} \rangle = 0$ при $\varphi \neq \psi$, то из (3) следует, что $R_{i_\varphi j_\psi k l} = 0$. Тогда $R_{k l i_\varphi j_\psi} = 0$ и $R_{i_\varphi j_\psi k_\varphi l} = -R_{i_\varphi k_\varphi l j_\psi} - R_{i_\varphi l j_\psi k_\varphi} = 0$. Это значит, что из компонент тензора кривизны ненулевые имеют вид $R_{i_\varphi j_\varphi k_\varphi l_\varphi}$. Следовательно, компоненты тензора кривизны разбиваются на блоки, соответствующие подгруппам $W^{(1,1)}, \dots, W^{(1,t)}$. Пусть $x \in M$ — фиксированная точка. В линейном пространстве кососимметрических линейных операторов $T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ рассмотрим линейное подпространство h_x , натянутое на элементы $R_x(X,Y)$, где $X, Y \in T_x(M)$, т.е. $h_x = \text{span } R_x(X,Y)$. Для элементов $R_x(X,Y)$ и $R_x(Z,W)$ из h_x коммутатор определим по формуле $[R_x(X,Y), R_x(Z,W)] = R_x(X,Y) \cdot R_x(Z,W) - R_x(Z,W) \cdot R_x(X,Y)$. Через $\bar{h}_x$ обозначим алгебру Ли, порождённую множеством h_x относительно этой операции, и пусть P_x — связная подгруппа группы изометрий в $T_x(M)$, определенная алгеброй Ли $\bar{h}_x$. Эта группа называется примитивной группой голономии в точке x . В силу того, что компоненты тензора кривизны

разбиваются на блоки, алгебра $\bar{h}_x$ разлагается в прямую сумму своих под-
алгебр $\bar{h}_x^{(\varphi)}$. Следовательно группа P_x разлагается в прямое произведение
своих подгрупп $P_x^{(\varphi)}$. Пусть $T_x(M) = V_x^{(1)} + \dots + V_x^{(t)}$ является неприводимым
разложением пространства $T_x(M)$ относительно P_x . Подпространства $V_x^{(\varphi)}$
инвариантны относительно действия P_x и попарно вполне ортогональны.
Неприводимость указанного разложения относительно P_x означает непри-
водимость подпространства $V_x^{(\varphi)}$ относительно действия подгруппы $P_x^{(\varphi)}$.
Поскольку подмногообразие M не является риччи-плоским, то его индекс
дефектности равен нулю. В этом случае, согласно результатам З. Сабо [1],
распределения $V^{(\varphi)}$ параллельны на M . Следовательно, M внутренне
представляет собой прямое произведение интегральных многообразий
распределений $V^{(\varphi)}$, которые также являются эйнштейновыми с той же
константой ρ .

Если M является риччи-плоским подмногообразием, т.е. допускает
только группу главных векторов кривизны $W^{(0)}$, и имеет нулевой индекс
дефектности, то, рассуждая как и выше, получим, что оно внутренне явля-
ется прямым произведением риччи-плоских (но не плоских) подмногооб-
разий.

Итак, пусть M ($\dim M \geq 3$) является внутренне неприводимым нор-
мально плоским эйнштейновым полусимметрическим подмногообразием
с нулевым индексом дефектности в E_n . Если M – риччи-плоское (т.е.
 $\rho = 0$), то оно допускает только группу главных векторов кривизны $W^{(0)}$,
которая не содержит нулевые главные векторы кривизны. Если же $\rho \neq 0$,
то оно допускает только группу главных векторов кривизны $W^{(1)}$. В обоих
случаях все векторы в этих группах удовлетворяют условию
 $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Тогда

$$\langle n_i, n_j \rangle = \langle n_j, n_k \rangle = \langle n_k, n_l \rangle = \langle n_l, n_p \rangle$$

и, следовательно, в фиксированной точке все секционные кривизны
 $k(e_i \wedge e_j)$ равны между собой, т.е. подмногообразие M является подвиж-
ным в смысле [4]. Тогда согласно известной теореме Шура (см. [3, 4]) эти
кривизны не зависят также от точки и M является подмногообразием по-
стоянной секционной кривизны. Отметим, что секционная кривизна M не
может быть нулевой, так как в этом случае M автоматически будет
локально евклидовым, что противоречит условию $\mu = 0$. Следовательно,
 M является подмногообразием ненулевой постоянной секционной кри-
визны.

Если нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M
является риччи-плоским, то нетрудно доказать, что оно локально евкли-
дово.

Теорема 3. В евклидовом пространстве E_n нормально плоское эйн-
штейново полусимметрическое подмногообразие M ($\dim M \geq 3$) с ненуле-

вой эйнштейновой константой и нулевым индексом дефектности является подмногообразием ненулевой постоянной секционной кривизны или локально представляет собой прямое произведение таких подмногообразий. Если M – риччи-плоское полусимметрическое подмногообразие, то оно локально евклидово.

Подмногообразия ненулевой постоянной секционной кривизны изометричны эллиптическим и гиперболическим подмногообразиям, модели которых приведены в [3].

5. Полусимметрические полуэйнштейновы подмногообразия.

Пусть M ($\dim M = m > 3$) является нормально плоским полусимметрическим полуэйнштейновым подмногообразием в E_n с индексом дефектности μ . На пространстве дефектности $T_x^{(0)}$ тензор Риччи R_1 имеет нулевое собственное значение, а на пространстве кодефектности $T_x^{(1)}$ – ненулевое собственное значение ρ . Нулевому собственному значению соответствует группа главных векторов кривизны $W^{(0)}$, а собственному значению ρ – группа главных векторов кривизны $W^{(1)}$. Покажем, что и в этом случае имеем право предположить, что в $W^{(1)}$ все векторы удовлетворяют условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Действительно, предположим, что группа $W^{(1)}$ разбивается на подгруппы $W^{(1,1)}, \dots, W^{(1,t)}$ так, что векторы каждой подгруппы ортогональны векторам любой другой подгруппы, а векторы одной и той же подгруппы $W^{(1,\varphi)}$ ($\varphi, \psi = 1, \dots, t$) удовлетворяют, следовательно, условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$, и будем рассуждать как и выше. В этом случае неприводимое разложение пространства $T_x(M)$ относительно примитивной группы голономии P_x будет иметь вид $T_x(M) = T_x^{(0)} + V_x^{(1)} + \dots + V_x^{(t)}$, где подпространства $V_x^{(\varphi)}$ инвариантны относительно действия P_x , а на $T_x^{(0)}$ группа P_x действует тривиально [1]. Поскольку в настоящем случае индекс дефектности отличен от нуля, то распределения $V^{(\varphi)}$, вообще говоря, не являются параллельными на подмногообразии M . Однако методом З. Сабо [1] можем продолжить $V_x^{(\varphi)}$ за счёт подпространства $T_x^{(0)}$ и получить такие подпространства $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$, что распределения $\tilde{V}^{(\varphi)}$ будут параллельными на M . Из самого метода построения подпространств $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$ следует, что если какое-либо подпространство $V_x^{(\varphi)}$ не допускает продолжения, то распределение $V^{(\varphi)}$ параллельно, а его интегральное многообразие эйнштейново. Если же $V_x^{(\varphi)}$ допускает продолжение $\tilde{V}_x^{(\varphi)}$, то интегральное многообразие распределения $\tilde{V}^{(\varphi)}$ является полуэйнштейновым. Таким образом, M внутренне является прямым произведением эйнштейновых и полуэйнштейновых подмногообразий и, может быть, некоторого локально евклидова подмногообразия. Рассуждая точно так же, можно показать, что

риччи-плоское подмногообразие с отличным от нуля индексом дефектности внутренне является прямым произведением риччи-плоских подмногообразий с нулевым индексом дефектности, риччи-плоских подмногообразий с ненулевым индексом дефектности и, может быть, некоторого локально евклидова подмногообразия.

Итак, пусть M является нормально плоским полуэйнштейновым полусимметрическим и внутренне неприводимым подмногообразием в E_n , т.е. простым полусимметрическим листом в смысле З. Сабо [1]. Если $m - \mu > 2$, то μ может принимать только значения 0, 1, 2 ([1], лемма 4.5). Случай $\mu = 0$ рассмотрен фактически в п. 4. Здесь мы рассмотрим только случай $\mu = 1$. Из результатов З. Сабо ([1], лемма 4.6, теорема 4.4) следует, что в этом случае распределение кодефектности $T^{(1)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие $M^{(1)}$ вполне омбилично в M . Тогда выполняются условия следующей теоремы [10]:

пусть $\tilde{M}$ – n -мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $\tilde{T}^{(1)}$, $\dim \tilde{T}^{(1)} = n - \mu \geq 2$. Если его интегральное многообразие $\tilde{M}^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то $\tilde{M}$ локально изометрично либо цилиндру над $\tilde{M}^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu - 1)$ -мерными образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}^{(1)}$ и, более того, $\tilde{M}$ полуэйнштейново тогда и только тогда, когда $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново.

Согласно этой теореме $M^{(1)}$ является эйнштейновым подмногообразием, а само подмногообразие M изометрично конусу над $M^{(1)}$. Более того, $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность (поскольку матрицы его второй фундаментальной формы во всех нормальных направлениях, т.е. в направлениях e_α и одномерном направлении $T_x^{(0)}$, имеют диагональный вид) и является неприводимым нормально плоским подмногообразием постоянной секционной кривизны (теорема 3). Таким образом, подмногообразие M локально изометрично эллиптическому или гиперболическому конусу.

Теорема 4. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское полусимметрическое полуэйнштейново и внутренне неприводимое подмногообразие M ($\dim M = m > 3$) с индексом дефектности $\mu = 1$ локально изометрично эллиптическому или гиперболическому конусу. Если в E_n нормально плоское полусимметрическое полуэйнштейново подмногообразие M внутренне разлагается в произведение неприводимых подмногообразий с единичными индексами дефектности, то оно локально изометрично прямому или сплетающемуся произведению эллиптических или гиперболических конусов.*

Отметим, что классификация полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах была дана З. Сабо в [11], а риччи-полусимметрических гиперповерхностей – автором в [12]. Сформулированная ниже теорема показывает, насколько сложной может быть геометрическая структура полуэйнштейнова полусимметрического подмногообразия.

Теорема 5. Пусть в евклидовом пространстве E_n t -мерное нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке q ($3 \leq q \leq n - t + 1$) ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с равными модулями и кратностями $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно. Если соответствующие этим векторам собственные распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны на M друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$), то

(1) векторы $n_1, \dots, n_q$ образуют попарно равные углы и $p_1 = \dots = p_q (= p)$,

(2) M удовлетворяет условию $R(X, Y)R = 0$, т.е. является полусимметрическим, и локально представляет собой прямое произведение $E_{\mu-1} \times P$, где $E_{\mu-1}$ – плоскость размерности $\mu-1$, а подмногообразие P несёт $(q+1)$ -компонентную ортогональную сопряжённую систему, состоящую из q одинаковых сфер $S_1^P(R), \dots, S_q^P(R)$ ($p \geq 2$) и прямой L , и представляет собой конус (с образующей L в каждой точке) над прямым произведением $S_1^P(R) \times \dots \times S_q^P(R)$, которое, в свою очередь, (а) является $(pq+1)$ -мерным эйнштейновым подмногообразием евклидова пространства $E_{n-\mu+1}$, (б) принадлежит гиперсфере $S^{n-\mu}(\bar{R})$ пространства $E_{n-\mu+1}$; радиусы R и $\bar{R}$ связаны условием $\bar{R}^2 = q \cdot R^2$ и являются линейными (не постоянными) функциями на L .

Если условие равенства модулей векторов $n_1, \dots, n_q$ заменить условием минимальности подмногообразия M , то утверждение (б) будет иметь следующую редакцию: принадлежит гиперсфере $S^{n-\mu}(\bar{R})$ пространства $E_{n-\mu+1}$ и является минимальным в этой гиперсфере.

Эта теорема доказывается с использованием результатов, полученных в [8] и [9].

Национальный политехнический университет Армении
e-mail: vmirzoyan@mail.ru

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах

Даётся геометрическое описание некоторых классов нормально плоских полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

Վ. Ա. Միրզոյան

Նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաչափությունները Էվկլիդեսյան տարածություններում

Տրվում է նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաչափությունների որոշ դասերի երկրաչափական նկարագրությունը Էվկլիդեսյան տարածություններում:

V. A. Mirzoyan

Normally Flat Semi-Symmetric Submanifolds in Euclidean Spaces

A geometric description of some classes of normally flat semisymmetric submanifolds in Euclidean spaces is given.

Литература

1. Szabo Z. I. – J. Differential Geom. 1982. V. 17. № 4. P. 531-582.
2. Мирзоян В. А. – Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. Chen B. Y. Geometry of submanifolds. New York. Marcel Dekker. 1973. 298 p.
4. Chern S. S., Chen W. H., Lam K. S. Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000. 356 p.
5. Chern S. S., Kuiper N. H. – Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.
6. Mirzoyan V. A. – Reports of NAS RA. 2012. V. 112. № 1. P. 19-29.
7. Lumiste Ü. Semiparallel submanifolds in space forms. New York. Springer. 2009. 306 p.
8. Мирзоян В. А. – Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
9. Мирзоян В. А. – Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
10. Мирзоян В. А. – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
11. Szabo Z.I. – Acta Sci. Math. 1984. V. 47. № 3-4. P.321-348.
12. Мирзоян В.А. – Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.

УДК 517.9

А. А. Мамиконян

Аттрактор полугруппы, порожденной одним псевдопараболическим уравнением

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/V 2018)

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, краевая задача, дифференциальный оператор, аттрактор, полугруппа.

Пусть $\Omega \in R^n$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . Обозначим $\Sigma = [0, T] \times \Gamma$, $T > 0$. В данной работе изучается поведение траекторий решений следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} Au' + Bu = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \\ D^\gamma u|_{\Sigma} = 0, |\gamma| < m, \end{cases} \quad (1)$$

где дифференциальные операторы A и B имеют представления

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \quad Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).$$

В случае, когда операторы A и B линейны, задача (1) рассматривалась во многих работах С. Л. Соболева, Р. С. Александряна (см. например [1, 2]). В работе [3] изучены аттракторы эволюционных уравнений вида $\partial_t u = Au$. Доказано существование аттракторов, порожденных этими уравнениями, а также исследованы их свойства. В [4] изучены аттракторы уравнений того же типа с дифференциальным оператором A общего вида, в [5] – пример уравнения порядка $2m$, часто встречающийся в приложениях. В работе [6] рассматриваются аттракторы задачи (1) в случае, когда A и B нелинейные дифференциальные операторы второго порядка.

Введем понятие обобщенного решения задачи (1).

Определение 1. Функцию $u(t, x) \in L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ назовем обобщенным решением задачи (1), если для любой функции $v(t, x) \in L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ имеет место интегральное равенство

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt = 0.$$

Это определение позволяет свести задачу (1) к следующей задаче:

$$\begin{cases} Lu + Mu = 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

где операторы $L, M : L_2((0, T), W_2^m(\Omega)) \rightarrow L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ определены соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt, \\ \langle Mu, v \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt, \end{aligned}$$

Предположим, что функции $b_i(\xi) = b_i(\xi_i)$ определены и непрерывны, а также существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что функции $b_i(\xi_i)$ удовлетворяют условиям:

$$|b_i(\xi)| \leq c_1 \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|, \quad (3)$$

$$|b_i(\xi) - b_i(\eta)| \leq c_2 |\xi_i - \eta_i|. \quad (4)$$

Существование и единственность решения задачи установим, используя результаты работы [7]. Так как в нашем случае оператор L линейный, то для доказательства достаточно проверить липшиц-непрерывность оператора M . Оценим норму:

$$\begin{aligned} \|Mu - Mv\| &= \sup_{\|w\|=1} \langle Mu - Mv, w \rangle = \sup_{\|w\|=1} \left| \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) - b_i \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \right) \right) \frac{\partial^m w}{\partial x_i^m} dx dt \right| = \\ &= \sup_{\|w\|=1} \left| \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m w}{\partial x_i^m} dx dt \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\|=1} c_2 \left(\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m (u - v)}{\partial x_i^m} \right)^2 dx dt \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m w}{\partial x_i^m} \right)^2 dx dt \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{\|w\|=1} c_2 \cdot \|u - v\| \cdot \|w\| = c_2 \cdot \|u - v\|, \end{aligned}$$

т.е. M является липшиц-непрерывным оператором. Тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (1) в $L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$.

Дадим некоторые необходимые определения.

Определение 2. Полугруппой операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, действующих на множестве E , назовем семейство отображений $S_t : E \rightarrow E$, зависящих от параметра $t \geq 0$, удовлетворяющих полугрупповому тождеству

$$S_t S_\tau = S_{t+\tau}, \quad \forall t \geq 0$$

и условию $S_t = I$ при $t = 0$, где I – тождественный оператор.

Приведем схему, по которой операторному уравнению вида $Lu' + Mu = 0$ сопоставляется полугруппа операторов. Предполагаем, что для произвольного $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ доказаны существование и единственность решения задачи Коши для этого уравнения. Из единственности следует, что решения задачи в $L_2((0, T_1), W_2^m(\Omega))$ и в $L_2((0, T_2), W_2^m(\Omega))$ при $T_2 > T_1$ совпадают на $[0, T_1]$. Так как T произвольно, получаем единственное решение при любом $t \in [0, +\infty)$. Каждому элементу $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ сопоставляется единственное решение задачи (2). Далее, для каждого $\tau \in [0, +\infty)$ однозначно определяется элемент $u(t, x) \in W_2^m(\Omega)$. Итак, можно написать следующую формулу для определения операторов: $S_\tau : u(0, x) \rightarrow u(\tau, x)$, где u – решение задачи (2).

Определение 3. Максимальным аттрактором полугруппы операторов $\{S_t\}$ называется такое замкнутое ограниченное множество $U \subset W_2^m(\Omega)$, которое обладает следующими свойствами:

- 1) инвариантность, т. е. $S_t U = U, \forall t \geq 0$,
- 2) притяжение, т.е. для каждого ограниченного множества B из $W_2^m(\Omega)$ расстояние $\text{dist}(S_t B, U) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Перейдем к изучению полугруппы, порожденной задачей (2). Для этого кроме условий (3) и (4) от функций $b_i(\xi_i)$ потребуем выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(\xi_i) \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} dx \geq c_3 \|u(t)\|^2 - k(t), \quad (5)$$

где $k(t)$ – непрерывная и неотрицательная на $[0, +\infty)$ функция, для которой

$$\int_0^{+\infty} e^{2c_3 t} k(t) dt = R_0 < +\infty. \quad (6)$$

Воспользуемся известной теоремой о существовании максимального аттрактора (см. [3]).

Теорема А. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ удовлетворяет следующим условиям.

- 1) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно по t ограничена;
- 2) существует ограниченное (компактное) в $W_2^m(\Omega)$ поглощающее множество B_0 , т.е. для любого ограниченного множества $B \subset W_2^m(\Omega)$ существует число $T > 0$ такое, что для произвольного $t > T$ имеет место включение $S_t B \subset B_0$;
- 3) операторы $S_t : W_2^m(\Omega) \rightarrow W_2^m(\Omega)$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный (компактный) в $W_2^m(\Omega)$ максимальный аттрактор.

Приведем одно дифференциальное неравенство, которое также понадобится далее. Пусть для неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на $[t_0, t_1]$ функции $y(t)$ выполнено неравенство $y'(t) + \gamma y(t) \leq h(t)$, где $h(t)$ является неотрицательной и непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_1]$, а $\gamma \geq 0$. Тогда имеет место оценка

$$y(t) \leq \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-\tau)} h(\tau) d\tau + y(t_0) e^{-\gamma t}.$$

Лемма 1. Пусть функции $b_i(\xi_i)$ удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда решение задачи (2) удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2c_3 t} \|u(0)\|^2 + \gamma_2 \int_0^t e^{2c_3 \tau} k(\tau) d\tau.$$

Доказательство. Предположим u – решение задачи с начальным значением u_0 , т.е. для u имеет место операторное уравнение $Lu' + Mu = 0$ в пространстве $L_2((0, T), W_2^{-m}(\Omega))$. В частности имеет место $\langle Lu', u \rangle + \langle Mu, u \rangle = 0$. В раскрытом виде это соотношение имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^m u'}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} dx dt = 0.$$

Далее преобразовав первое слагаемое, а для второго используя неравенство (5), получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + c_3 \cdot \|u(t)\|^2 \leq k(t).$$

К последнему неравенству применим лемму, приведенную выше. В нашем случае

$$y(t) = \|u(t)\|^2, \quad y(0) = \|u_0\|^2, \quad \gamma = 2c_3, \quad h(t) = 2k(t).$$

Получим

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\int_0^t e^{2c_3(t-\tau)} \cdot 2k(\tau) d\tau + \|u(0)\|^2 \right) e^{-2c_3 t}$$

или

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\int_0^t e^{2c_3 \tau} \cdot 2k(\tau) d\tau + \|u(0)\|^2 \right) e^{-2c_3 t},$$

т.е. получили требуемое неравенство.

Итак, по определению полугруппы, порожденной задачей (2), называется семейство операторов $\{S_t\}$, которые определяются следующим образом: $S_t : W_2^m(\Omega) \rightarrow W_2^m(\Omega)$, $\forall u_0 \in W_2^m(\Omega)$, причем значение $u(t) = S_t u_0$ есть решение задачи (2) с начальным условием u_0 в точке t .

Лемма 2. Полугруппа, определенная выше, равномерно ограничена.

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $R > 0$ существует постоянная C , зависящая только от числа R , такая, что $\|S_t u\| \leq C$,

$\forall t \in [0, +\infty)$, как только $\|u\| \leq R$. Итак, пусть $\|u\|_0 \leq R$, оценим $\|S_t u_0\|^2$, используя предыдущую лемму и неравенство (6):

$$\|S_t u_0\|^2 = \|u(t)\|^2 \leq \left(\int_0^t e^{2c_3 \tau} \cdot 2k(\tau) + \|u_0\|^2 \right) e^{2c_3 t} \leq R^2 + 2R_0 = C.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Полугруппа $\{S_t\}$ обладает поглощающим множеством.*

Доказательство. Нужно доказать, что существует такое множество $B_0 \subset W_2^m(\Omega)$, что для любого ограниченного множества $B \subset W_2^m(\Omega)$ существует число $T > 0$ такое, чтобы имело место включение $S_t B \subset B_0$ для $\forall t \geq T$.

Обозначим через B_0 следующее множество: $B_0 = \{u \in W_2^m(\Omega); \|u\| \leq R_0\}$. Докажем, что оно является поглощающим. Возьмем любое $u \in S_t B$ и докажем, что $u_0 \in B_0$. Если $u \in S_t B$, значит, существует $u_0 \in B$ такое, что $u(t)$ является решением нашей задачи с начальным значением u_0 . Следовательно,

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\int_0^t e^{2c_3 \tau} \cdot 2k(\tau) + \|u_0\|^2 \right) e^{2c_3 t} \leq e^{2c_3 t} (R^2 + 2R_0)$$

Потребуем, чтобы $u_0 \in B_0$:

$$e^{-2c_3 t} (R^2 + 2R_0) \leq R_0^2, \\ t \geq \frac{1}{2c_3} \ln \frac{R_0^2}{R^2 + 2R_0}.$$

Если взять

$$T \geq \frac{1}{2c_3} \ln \frac{R_0^2}{R^2 + 2R_0},$$

то для любого $t \geq T$ будем иметь $u(t) \in B_0$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Операторы $S_t : W_2^m(\Omega) \rightarrow W_2^m(\Omega)$ непрерывны.*

Доказательство. Воспользуемся следующим представлением решения задачи (см. [6]):

$$u(t) = u_0 - \int_0^t Gu(s) ds,$$

где оператор $Gu = L^{-1}M$ липшиц-непрерывен. Оценим разность:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| u_0 - v_0 - \int_0^t Gu(s) ds + \int_0^t Gv(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|u_0 - v_0\| + \left\| \int_0^t Gu(s) ds - \int_0^t Gv(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|u_0 - v_0\| + M \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds. \end{aligned}$$

Далее, по лемме Гронуолла будем иметь

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| \cdot e^{\int_0^t M ds} = \|u_0 - v_0\| \cdot e^{tM}.$$

Следовательно, непрерывность оператора S_t доказана.

Из лемм 1-4 и теоремы А следует, что у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный в $W_2^m(\Omega)$ максимальный аттрактор, т.е. имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $b_i(\xi_i)$ определены и непрерывны, а также существуют постоянные c_1, c_2, c_3 и такие, что функции $b_i(\xi_i)$ удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда у полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), имеется ограниченный в $W_2^m(\Omega)$ максимальный аттрактор.

Ереванский государственный университет
e-mail: hmamikonyan8@gmail.com

А. А. Мамиконян

Аттрактор полугруппы, порожденной одним псевдопараболическим уравнением

Изучается начально-краевая задача

$$\begin{cases} Au + Bu = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ D^\gamma u|_\Sigma = 0, |\gamma| < m, \end{cases}$$

где дифференциальные операторы A и B имеют представления

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \quad Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).$$

Доказывается, что эта задача имеет единственное решение в пространстве $L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ при любом $u_0 \in W_2^m(\Omega)$. Устанавливается существование ограниченного в $W_2^m(\Omega)$ максимального аттрактора полугруппы, порожденной данной задачей.

Հ. Ա. Մամիկոնյան

Պսևդոպարաբոլական տիպի մի հավասարմամբ ծնված կիսախմբի ատրակտորը

Ուսումնասիրվում է սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$\begin{cases} Au + Bu = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ D^\gamma u|_\Sigma = 0, |\gamma| < m, \end{cases}$$

որտեղ A և B դիֆերենցիալ օպերատորները ունեն հետևյալ ներկայացումները.

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \quad Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).$$

Ապացուցվում է այդ խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը $L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ -ում $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ համար, ինչպես նաև այդ խնդրով ծնված կիսախմբի $W_2^m(\Omega)$ -ում սահմանափակ մաքսիմալ ատրակտորի գոյությունը:

Н. А. Mamikonyan

Attractor of Semigroup Generated by an Equation of Pseudoparabolic Type

In this paper the following initial boundary value problem is considered

$$\begin{cases} Au + Bu = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ D^\gamma u|_\Sigma = 0, |\gamma| < m, \end{cases}$$

where differential operators A and B have the following forms

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \quad Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).$$

It is proved that this problem has unique solution in $L_2((0, T), W_2^m(\Omega))$ for $u_0 \in W_2^m(\Omega)$. Also it is proved the existence of bounded in $W_2^m(\Omega)$ attractor of semigroup generated by this problem.

Литература

1. *Соболев С. Л.* – ПМ ФТ. 1960. № 3. С. 20-55.
2. *Александрян Р. А.* – Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455-505.
3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* – УМН. 1983. Т. 38. № 4(232). С. 133-187.
4. *Акопян Г. С., Шахбагян Р. Л.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1994. Т. 29. № 5. С. 27-37.
5. *Шахбагян Р. Л., Акопян Г. С.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1992. Т. 27. № 4. С. 59-69.
6. *Мамиконян А. А.* – Уч. зап. ЕГУ. 2008. № 1. С. 18-23.
7. *Мамиконян А. А.* – Уч. зап. ЕГУ. 2006. № 2. С. 33-40.

МАТЕМАТИКА

УДК 519

Академик В. С. Захарян¹, Т. В.Таварацян²

О граничных значениях произведений
 М. М. Джрбашяна

(Представлено 9/VI 2018)

Ключевые слова: произведения Бляшке и Джрбашяна, ω -емкость множества E , оператор $L^{(\omega)}$, классы гармонических в единичном круге функций U_ω .

Введение. Пусть Ω – класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условию:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0; 1]$;

2) $\omega(0) = 1, \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty$.

Класс P_ω определяется как множество тех функций $p(\tau)$, для которых

$$p(0) = 1, \quad p(\tau) = \tau \int_{\tau}^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx, \quad \tau \in (0, 1],$$

где $\omega(x) \in \Omega$. Функция $p(\tau)$ неотрицательна и непрерывна на $[0, 1]$, и $p(+0) = p(0) = 1, p(1) = 0$.

Отметим, что (см. [1], с. 27) если $p(\tau) \in P_\omega$ и

$$\Delta_k = (k+1) \int_0^1 \tau^k dp(\tau), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

то будем иметь

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$, $a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$, такая что

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{|a_n|}^1 \omega(x) dx < +\infty. \quad (1)$$

Пусть D – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда бесконечное произведение $B_\omega(z; \{a_n\})$, $z \in D$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом (см. [1], с. 46):

$$B_\omega(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\{-W_\omega(z, a_n)\},$$

где для $\zeta \in D$

$$W_\omega(z, \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{z^k}{\Delta_k}.$$

В специальном случае $\omega(x) = 1$ произведения М. М. Джрбашяна превращаются в обычные произведения Бляшке (см. [1], с. 51):

$$B(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \right) \frac{|z_n|}{z_n}, \quad z \in D.$$

В случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, произведения B_ω превращаются в произведения $B_\alpha(z; \{a_n\})$ М.М. Джрбашяна (см. [2], гл. IX).

Известно следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями B_ω , где $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0;1]$, и B (см. [1], с. 55).

Теорема (о взаимосвязи произведений B_ω и B): *если функция $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0;1]$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ удовлетворяет условию (1), то имеет место представление*

$$B_\omega(z; \{a_n\}) = B(z; \{a_n\}) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\gamma} z; \omega) d\mu(\gamma) \right\}, \quad z \in D,$$

где $B(z; \{a_n\})$ – произведения Бляшке, с нулями на последовательности $\{a_n\}$, $\mu(\gamma)$ – некоторая неубывающая ограниченная функция на $[0;2\pi]$ и

$$S(z; \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}$$

ядро типа Шварца М. М. Джрбашяна.

Обозначим через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω , подчиненных дополнительному условию

$$|\omega(x) - 1| \leq K_\omega(\tau) x, \quad (0 \leq x \leq \tau < 1),$$

где $K_\omega(\tau)$ – некоторая постоянная, через Ω_0 – подмножество тех функций из Ω^* , для которых $\omega(x)$ не убывает на $[0,1]$, и через Ω_0^* – подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω_0 , подчиненных дополнительному условию

$$\limsup_{x \rightarrow 1-0} \frac{(1-x)\omega'(x)}{\omega(x)} < 1.$$

Как известно (см [3], с. 54), для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-|a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} < +\infty.$$

Для произведения B_ω , $\omega(x) \in \Omega_0$ доказано (см [1], с. 105), что если имеет место условие (1), то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный и отличный от нуля радиальный предел произведения $B_\omega(z; \{a_n\})$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ за исключением, быть может, некоторого множества $E \in [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$.

В-измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет положительную ω -емкость $C_\omega(E)$, если существует мера $\mu \prec E$, для которой функция

$$U_\omega(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} |C(re^{i(\varphi-\gamma)}; \omega)| d\mu(\gamma)$$

остается равномерно ограниченной по $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $r \rightarrow 1-0$. В случае отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu \prec E$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} U_\omega(re^{i\varphi}) = +\infty,$$

считаем ω -емкость множества E равной нулю. При этом соответственно $C_\omega(E) > 0$ или $C_\omega(E) = 0$.

Оператор $L^{(\omega)}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\} \equiv -\frac{d}{dx} \left\{ x \int_0^1 \varphi(x\tau) dp(\tau) \right\}, \quad x \in (0,1)$$

При предположении, что в надлежащих классах допустимых функций $\varphi(x)$, определенных на $(0,1)$, левая часть тождества существует хотя бы почти всюду на $(0,1)$.

В специальном случае $\omega(x) \equiv 1$, $\varphi(x) \in L(0,1)$

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\} = \varphi(x)$$

почти всюду на $(0,1)$.

Для произвольной функции $\omega(x) \in \Omega$ имеет место формула (см.[1], с. 32)

$$L^{(\omega)}\{x^r\} = \Delta(r)x^r, \quad r \in [0, +\infty), \quad x \in [0,1],$$

где функция

$$\Delta(0) = 1, \quad \Delta(r) = r \int_0^1 \omega(x)x^{r-1} dx, \quad r \in (0, +\infty)$$

непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$, причем очевидно, что

$$\Delta(k) = \Delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $(-1 < \alpha < +\infty)$, то оператор $L^{(\omega)}$ совпадает с оператором интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ Римана – Лиувилля.

Обозначим через U_ω множество гармоничных в круге $|z| < 1$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |u_\omega(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} < +\infty,$$

где $\omega(x) \in \Omega$ и

$$u_\omega(re^{i\varphi}) = L^{(\omega)} \{u(re^{i\varphi})\}$$

Класс U_ω совпадает с множеством функций $u(z)$ (см.[1], с. 37), представимых в виде интеграла

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi - \gamma; r; \omega) d\mu(\gamma), \quad (0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi),$$

где $\mu(\gamma)$ – произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0; 2\pi]$.

Отметим, что все результаты этой работы при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $(-1 < \alpha < 0)$ выведены В.С. Захаряном и Р.В. Даллакяном [4].

Основные результаты. Сначала доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) и пусть $n(r)$ – количество точек a_n , лежащих в круге $|z| \leq r < 1$. Тогда, если

$$n(r) \leq \frac{\lambda(r)}{\int_r^1 \omega(x) dx},$$

где $\lambda(r)$ такая, что $\lim_{r \rightarrow 1-0} \lambda(r) = 0$, то для любого значения φ , $\varphi \in [0; 2\pi]$,

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{C(|z|; \omega)} \cdot \log \left| \frac{B_\omega(re^{i\varphi}; \{a_n\})}{B_1(re^{i\varphi}; \{a_n\})} \right| = 0.$$

Далее, пользуясь результатом теоремы 1, получим второй результат.

Теорема 2. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна. Тогда если для некоторого значения φ , $\varphi \in [0; 2\pi]$,

$$\overline{\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{C(|z|; \omega)}} \cdot \left| \log \left| \frac{B_\omega(re^{i\varphi}; \{a_n\})}{B_1(re^{i\varphi}; \{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то существует последовательность $\{r_k\}$

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < r_k < \dots < 1, \quad r_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$$

такая, что

$$n(r_k) = \frac{c}{\int_{r_k}^1 \omega(x) dx}, \quad (12)$$

где c – некоторая постоянная.

Пользуясь теоремой 1 работы [6], докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна и пусть z стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$ касательным путем. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \frac{1}{C(|z|; \omega)} \log \left| \frac{B_\omega(z; \{a_n\})}{B_1(z; \{a_n\})} \right| = 0.$$

Далее, пользуясь теоремой 2, докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна и пусть

$$n(r_k) = \frac{c}{\int_{r_k}^1 \omega(x) dx}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где последовательность $\{r_k\}$ такая, что

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < r_k < \dots < 1, \quad r_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|a_n|}^1 \omega_1(x) dx = +\infty,$$

где $\omega_1(x)$ – любая неубывающая функция из класса Ω_0^* такая, что

$$\frac{\omega_1(r)}{\omega(r)} \xrightarrow[r \rightarrow 1-0]{} +\infty.$$

В соответствии с теоремой 4 из теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна. Тогда если для некоторого значения φ , $\varphi \in [0; 2\pi]$,

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \frac{1}{C(|z|; \omega)} \left| \log \left| \frac{B_\omega(z; \{a_n\})}{B_1(z; \{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|a_n|}^1 \omega_1(x) dx = +\infty,$$

где $\omega_1(x)$ – любая неубывающая функция класса Ω_0^* такая, что

$$\frac{\omega_1(r)}{\omega(r)} \xrightarrow[r \rightarrow 1-0]{} +\infty.$$

Далее доказываются следующие утверждения.

Теорема 6. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$ и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения φ , $\varphi \in [0; 2\pi]$,

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \frac{1}{C(|z|; \omega)} \left| \log \left| \frac{B_\omega(z; \{a_n\})}{B_1(z; \{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то точка $e^{i\varphi}$ является точкой сгущения для последовательности $\{a_n\}$. Более того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{i\varphi} - a_n|} \int_{|a_n|}^1 \omega(x) dx = +\infty.$$

Теорема 7. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке–Джрбашяна и пусть E – множество тех точек $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, для которых

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \frac{1}{C(|z|; \omega)} \left| \log \left| \frac{B_\omega(z; \{a_n\})}{B_1(z; \{a_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

тогда $\text{cap}_\omega E = 0$.

¹Национальный политехнический университет Армении

²Ванадзорский государственный университет им. О. Туманяна
e-mail: mathdep@seua.am; tehmina1@yandex.ru

Академик В. С. Захарян, Т. В. Таваряцян

О граничных значениях произведений М. М. Джрбашяна

Исследуется граничное поведение частного произведений B_ω , где $\omega(x) \in \Omega$, и $B_1 \equiv B$.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Թ. Վ. Տավարածյան

Մ. Մ. Զրբաշյանի B_ω արտադրյալների եզրային արժեքների մասին

Ուսումնասիրվում է B_ω , ($\omega(x) \in \Omega$), և $B_1 \equiv B$ արտադրյալների հարաբերության եզրային վարքը:

Academician V. S. Zakaryan, T. V. Tavaratsyan

On Boundary Properties of Products of B_ω M. M. Djrbashyan

In this work we investigate boundary properties partial products B_ω , ($\omega(x) \in \Omega$) and $B_1 \equiv B$ -products Blaschke.

Литература

1. Джрбашян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
2. Джрбашян М. М.. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
3. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
4. Захарян В. С., Даллакян Р. В. –Доклады НАН РА. 2016. Т. 116. № 3. С. 187-194.
5. Джрбашян М. М., Захарян В. С. – Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 6. 1262-1339.
6. Даллакян Р. В. – Математика в высшей школе. 2012. Т. 8. С.30-37.

МЕХАНИКА

УДК 550.34

Г. Г. Шемян

Динамика и устойчивость балки, защемленной одним концом в грунте

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 4/V 2018)

Ключевые слова: *устойчивость, поперечные колебания, высотные здания, нелинейная инерционность, грунт, защемленная балка.*

Введение. Многолетний опыт проектирования и эксплуатации многоэтажных зданий и сооружений показывает, что для обеспечения их прочности и надежности недостаточно проведения расчетов на статическую и динамическую прочность при малых колебаниях. Существующие методы описания колебательных процессов справедливы лишь для колебаний с малыми амплитудами. В истории известно немало крупных катастроф и разрушений, произошедших из-за неучёта непонятных и неизвестных динамических явлений, вызывающих потери устойчивости всего сооружения или его частей. При поперечных колебаниях высотных зданий, особенно при землетрясениях, амплитуды колебания иногда достигают существенных величин, вызывая трещины, а порой и разрушения.

При поперечных колебаниях высотных зданий и сооружений с большой амплитудой (например, при 9-балльном землетрясении наблюдалось отклонение вершины 9-этажного здания на величину одного метра и более) произвольное поперечное сечение здания перемещается помимо горизонтального также и в вертикальном направлении. При малых колебаниях этим явлением пренебрегают, а при колебаниях с большой амплитудой такое пренебрежение может привести к катастрофе. Это явление приводит к возникновению нелинейных инерционных сил. Приоритетные задачи по осуществлению современных методов исследований колебательных процессов с учетом нелинейной инерционности берут начало в знаменитых трудах А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре [1, 2], и для колебательного движения уравнение нелинейных колебаний представлено в виде

$$\ddot{y} + 2k \cdot \dot{y} + \omega \cdot y + \varphi(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}_0(t).$$

Нелинейная инерционность такого типа отмечена и в других работах [3-8], также с функцией нелинейной инерционности в неявном виде. Необходимость учета нелинейных инерционных сил при исследовании динами-

ки и устойчивости высотных зданий и сооружений была отмечена и в работах И. И. Голденבלата [10], где указывалось на чрезвычайную важность их учета, особенно при исследовании сейсмостойкости высотных зданий и сооружений.

Постановка задачи. Для того чтобы перейти к понятию нелинейной инерционности, рассмотрим простую задачу.

Пусть упругий однородный стержень (балка) постоянного сечения с длиной l зашцеилен в грунте. При колебании грунта с амплитудой y_0 будет колебаться и балка с распределенной по длине массой в плоскости xOy (плоскость рис. 1). Если мысленно перенести балку на величину y_0 (рис. 1), то по инерции произвольное сечение ее будет перемещаться по направлению движения, вызывая ее прогиб на величину y . Рассмотрим упругую зашцеиленную в грунте балку с распределенной по длине массой. В недеформированном состоянии балка занимает вертикальное положение AO (рис.1). В процессе изгибных колебаний произвольная точка балки переместится из положения K в K_1 с координатами $x-u_x$ и y . Если принять y за величину первого порядка малости, то при условии нерасторжимости стержня разность между абсциссой точек K и K_1 окажется величиной второго порядка малости. Обычно при малых колебаниях этой величиной пренебрегается.

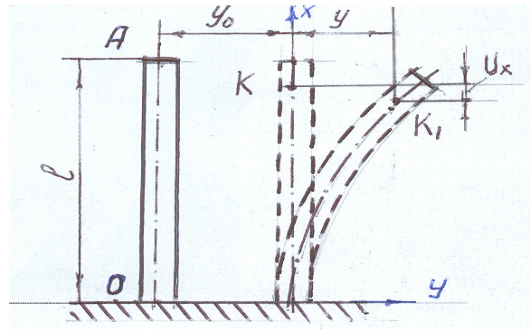


Рис. 1. Балка, зашцеиленная одним концом в грунте, с распределенной по длине массой.

Перемещение произвольного сечения, изображаемого точкой K , на величину y за счет деформации изгиба балки приведет к ее перемещению в вертикальном направлении на величину u_x (рис.1). В этом случае возникает дополнительная вертикальная сила $\Delta N_x = m' \cdot \ddot{u}_x$, где m' – масса единицы длины балки ($m' = \frac{m}{l}$, m – масса балки). Величину u_x можно найти как разность между первичной длиной балки l и проекцией искривленной балки по направлению вертикали [5]

$$u_x = l - \int_0^l \cos \theta dx = l \left(1 - \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{dV}{dx} \right)^2} \cdot dx \right). \quad (1)$$

Разложив радикал в ряд

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dV}{dx} \right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dV}{dx} \right)^4 - \dots$$

и интегрируя его, получим

$$u_x = \frac{l}{2} \int_0^l \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dx + \frac{l}{8} \int_0^l \left(\frac{dV}{dx} \right)^4 dx + \dots, \quad (2)$$

Здесь V – фундаментальная функция [3]

$$V = V(u_x, t) = y \cdot \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает

$$u_x = \frac{\pi^2}{4l} \cdot y^2 + \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi^4}{l^3} \cdot y^4 + \dots$$

Пренебрегая остальными членами ряда, кроме первого, и продифференцировав u_x дважды по времени, получим

$$\ddot{u}_x = \frac{\pi^2}{2l} \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (4)$$

С учетом (4) вертикальная сила инерции будет

$$\Delta N_x = \frac{m}{l} \cdot \frac{\pi^2}{2l} \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \frac{\pi^2 m}{2l^2} \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (5)$$

Приняв во внимание равномерность распределения массы по длине балки и основываясь на вариационных принципах Галеркина – Остроградского, уравнение колебания представим в виде

$$E\mathfrak{S} \frac{d^4 V}{dx^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta N_x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) + m' \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = m \ddot{y}_0(t). \quad (6)$$

С помощью вариационного метода Галеркина уравнение (6) с учетом (3) и (5) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\chi_1 y \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \ddot{y}_0(t),$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{3E\mathfrak{S}}{m' \cdot l^4}; \quad \chi_1 = \frac{\pi m}{4l^2 \cdot m'} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right). \quad (7)$$

Влияние силы нелинейной инерционности балки с распределенной массой можно заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на свободном конце балки. Тогда для балки с массой, сосредоточенной на свободном конце, уравнение колебания без учета сопротивлений будет иметь вид

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y + \varphi(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}_0(t). \quad (8)$$

Вертикальное перемещение сосредоточенной массы можно найти, как и прежде, из выражения

$$u_x = \frac{\pi^2}{4l} \cdot y^2,$$

тогда будем иметь

$$\ddot{u}_x = \frac{\pi^2}{2l} \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение колебания балки с сосредоточенной массой на конце будет иметь вид

$$\ddot{y} + \Omega^2 y + 2\chi \cdot y \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \ddot{y}_0(t), \quad (10)$$

где

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{mgl^2}{3E\mathfrak{I}} \right); \quad \omega_0^2 = \frac{3E\mathfrak{I}}{ml^3}, \quad \chi = \frac{\pi^2}{4l^2}.$$

Если сравнить значение χ_1 для случая балки с распределенной массой со значением χ для случая балки с сосредоточенной на свободном конце массой, то можно распределенную массу балки заменить эквивалентной массой, сосредоточенной на свободном конце балки, и тогда эквивалентная масса будет равна

$$m_s = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \cdot \frac{m}{\pi}.$$

Уравнение (10) с учетом эквивалентной массы и сопротивления среды будет иметь вид

$$\ddot{y} + 2k_1 \dot{y} + \Omega_1^2 y + 2\chi y \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right] = \ddot{y}_0(t); \quad (11)$$

здесь

$$\Omega_1^2 = \omega_{01}^2 \left(1 + \frac{m_s \cdot g \cdot l^2}{3E\mathfrak{I}} \right); \quad \omega_{01}^2 = \frac{3E\mathfrak{I}}{m_s l^3}.$$

Дальнейшее решение уравнения (11) проводится по форме

$$y = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t, \quad (12)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – медленно изменяющиеся амплитуды.

Уравнение (11) перепишем в виде

$$\ddot{y} + \Omega_1^2 y = \omega^2 y_0 \sin \omega t + (\omega_0^2 - \Omega_1^2) y - 2k_1 \dot{y} - 2\chi y \left[y \cdot \ddot{y} + (\dot{y})^2 \right]. \quad (13)$$

Приближенное решение уравнения (13) с учетом (12) можно представить в виде

$$a(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^t G(\tau) d\tau; \quad b(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Подставив (12) (с учетом (14)) в уравнения (13) и разложив в ряд, получим

$$F(a, b) = \omega^2 y_0 + (\omega^2 - \Omega_1^2) a - 2k_1 \omega^2 b - \varphi(a, b),$$

$$G(a,b) = -(\omega^2 - \Omega_1^2)b - 2k_1\omega^2 a - \psi(a,b),$$

где $\varphi(a,b)$ и $\psi(a,b)$ – пока еще неизвестные функции.

После дифференцирования (14) получим уравнения Ван дер Поля

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} G(a,b), \\ \frac{db}{dt} = \frac{1}{2\omega} F(a,b) \end{cases} \quad (15)$$

или в более развернутой форме

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} [-(\omega^2 - \Omega_1^2)] b - 2k_1\omega a - \varphi(a,b), \\ \frac{db}{dt} = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 y_0 (\omega^2 - \Omega_1^2) a - 2k_1\omega b - \psi(a,b)). \end{cases}$$

Вместо уравнения (11) мы получили простую систему из двух уравнений первого порядка, которая не содержит явного времени. В случае стационарного режима колебания $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, и для установившихся амплитуд получим систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -(\omega^2 - \Omega_1^2)b - 2k_1\omega a - \varphi(a,b) = 0, \\ \omega^2 y_0 + (\omega^2 - \Omega_1^2)a - 2k_1\omega b - \psi(a,b) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Неустойчивое решение линейной задачи на границах первой, третьей и вообще нечетных областей согласно [1-3] имеет вид

$$y(t) = \sum_{n=1,2,3} \left(a_n \sin \frac{n\omega t}{2} + b_n \cos \frac{n\omega t}{2} \right), \quad (17)$$

где a_n и b_n – искомые постоянные.

Ряд (17) при определенном выборе коэффициентов может удовлетворять уравнению (11). В самом деле, результаты подстановки (17) в (11) не будут содержать никаких других периодических членов, кроме $\sin \frac{n\omega t}{2}$ и $\cos \frac{n\omega t}{2}$. Условие будет выполнено только в том случае, если нелинейная

функция не будет содержать членов четной степени. Если нас интересуют колебания, происходящие при главном резонансе, когда $\omega = 2\Omega_1$, то мы можем пренебречь разложением (17), положив приближенно

$$y(t) = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}. \quad (18)$$

Разложив функцию нелинейной инерционности $\psi(y, \dot{y}, \ddot{y})$ в ряд Фурье, подставив (18) в (13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых $\sin$ -ах и $\cos$ -ах, получим систему двух уравнений, содержащих неизвестные a и b

$$\begin{cases} \left(\Omega_1^2 - \frac{\omega^2}{4} \right) a - k\omega b + \varphi(a, b) = 0, \\ \left(\Omega_1^2 - \frac{\omega^2}{4} \right) b - k\omega a - \psi(a, b) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для определения $\varphi(a, b)$ и $\psi(a, b)$ подставим (18) в (13).

Вычисление дает

$$\varphi(a, b) = -\frac{A^4}{4} \chi \cdot \omega^2 \cdot a; \quad \psi(a, b) = -\frac{A^4}{4} \chi \cdot \omega^2 \cdot b. \quad (20)$$

Здесь члены, содержащие гармоники, не вписаны, а через A обозначена амплитуда установившихся колебаний

$$A^2 = a^2 + b^2.$$

С учетом (20) система уравнений (19) примет вид

$$\begin{cases} (1 - n^2)a - \frac{k'n}{\pi}b + A^2(-\chi \cdot n^2 a) = 0, \\ (1 - n^2)b - \frac{k'n}{\pi}a + A^2(-\chi \cdot n^2 b) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$n = \frac{\omega}{2\Omega_1}, \quad k' = \frac{2\pi}{\Omega_1} \cdot k.$$

Система имеет отличное от нуля решение в том случае, если определитель системы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Решением уравнения (21) относительно установившихся движений будет

$$A = \frac{1}{m\sqrt{\chi}} \cdot \sqrt{1 - n^2} \pm \frac{k'n}{\pi} \quad \text{или} \quad A = \frac{2}{\omega\sqrt{\chi}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}} \pm \frac{\pi k' \omega}{\Omega_1^2}. \quad (22)$$

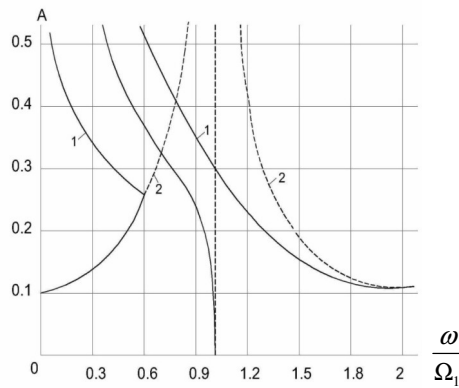


Рис. 2. Зависимость амплитуды колебания вершины балки (или высотного здания) от соотношения вынужденных и собственных частот. 1 – с учетом нелинейной инерционности, 2 – без учета.

Здесь мы имеем два решения, одно из которых неустойчиво. На рис. 2 приведен график, построенный по уравнению (22) (зависимость амплитуды-

ды A от соотношения $\frac{\omega}{\Omega_1}$). Как видно из рисунка, резонансные кривые

имеют наклон в сторону меньших частот. Первая собственная частота снижается почти на 35%. Причиной этого является нелинейная инерционность, и если система будет обладать еще и нелинейной упругостью, то она может попасть в область динамической неустойчивости. В этом случае конечность амплитуды колебания может сохраниться лишь за счет наличия нелинейного затухания. Помимо увода балки из опасной области путем изменения ее параметров могут быть рекомендованы и такие приемы, как введение в систему линейных и нелинейных сил сопротивления (демпферов).

Выводы. Исследования колебательных процессов с большой амплитудой, проведенные на закрепленной одним концом в грунте балке с распределенной по высоте массой, имитирующей высотное здание, показывают, что нелинейная инерционность возникает за счет продольного перемещения произвольного сечения балки при ее изгибных колебаниях в горизонтальной плоскости. Полученные функции нелинейной инерционности и уравнение колебания балки с распределенной по длине массой позволили получить амплитудно-частотные кривые и раскрыть причину уклона резонансных кривых в сторону низких частот, что полагает возможность возникновения параметрических колебаний и субгармонических резонансов, которые особенно опасны для высотных зданий и сооружений при землетрясении.

Институт механики НАН РА

Г. Г. Шекиян

Динамика и устойчивость балки, заземленной одним концом в грунте

Современные методы математического описания горизонтальных колебаний высотных зданий справедливы лишь для колебательных процессов с малыми амплитудами. Однако при землетрясениях отклонение вершин высотных зданий достигает порой одного метра и более. При таких колебаниях произвольное сечение здания, помимо горизонтальных перемещений, перемещается и в вертикальном направлении, вследствие чего возникают нелинейные инерционные силы. Рассмотрены колебания с равномерно распределенной по длине и сосредоточенной на свободном конце массой балок с учетом нелинейной инерционности. Получены уравнения колебания таких балок с учетом нелинейной инерционности, а также функции нелинейности и зависимость амплитуды колебания произвольного сечения балки от максимального ускорения грунта, которое может возникнуть при землетрясении.

Հ. Գ. Շեկյան

Մի ծայրով գետնահողում ամրակցված հեծանի դինամիկան ու կայունությունը

Բարձրահարկ շենքերի հորիզոնական տատանողական շարժման նկարագրման ժամանակակից մաթեմատիկական եղանակները ճիշտ են միայն փոքր ամպլիտուդով տատանողական պրոցեսների համար: Սակայն երկրաշարժի ժամանակ շենքերի կատարների տատանման ամպլիտուդը հաճախ հասնում է մեկ մետրի և ավելին: Հորիզոնական ուղղությամբ այդպիսի մեծ ամպլիտուդով տատանումների ժամանակ շենքի ցանկացած ընդլայնական կտրվածք ինչ-որ չափով տեղաշարժվում է նաև ուղղահայաց, որի պատճառով առաջանում են ոչ գծային իներցիոն ուժեր: Աշխատանքն ուղղված է այդ ոչ գծային իներցիոն ուժերի բացահայտմանը: Դիտարկված է մի ծայրով գետնահողում ամրակցված, մյուս ազատ ծայրում կենտրոնացված կամ երկարությամբ հավասարաչափ բաշխված զանգվածով հեծան, որը նմանակում է բարձրահարկ շինություն և կատարում է մեծ ամպլիտուդով ընդլայնական տատանումներ: Ստացված է մի ծայրով գետնահողում ամրակցված, հավասարաչափ բաշխված զանգվածով հեծանի ընդլայնական տատանման հավասարումը՝ ոչ գծային իներտության ֆունկցիայի հաշվառումով: Ստացված են նաև ոչ գծային իներտության ֆունկցիան և ցանկացած ընդլայնական կտրվածքի տատանման ամպլիտուդի կախվածությունը գետնահողի տատանման մաքսիմալ արագացումից, որը կարող է առաջանալ երկրաշարժի ժամանակ:

H. G. Shekyan

Dynamics and Stability Fixed by One End in the Beam Ground

Existing methods of mathematical description of transverse oscillations of high-rise buildings are just superfluous for oscillatory processes with small amplitudes. In earthquakes, the amplitude of transverse oscillations of the tops of high-rise buildings sometimes reaches up to a meter and more. With such oscillations in the horizontal direction, an arbitrary section of the building moves in the vertical direction, contributing to the appearance of nonlinear inertial forces. The work is aimed at investigating the nuclear inertia, crammed at one end in the beam ground with a mass concentrated at the free end, which imitates a high-rise building, with transverse vibrations. The function of nuclear inertia, the equation of oscillation of a beam with a mass distributed over the length, and the dependence of the oscillation amplitude on the maximum acceleration of the soil, taking into account nuclear inertial forces, are obtained.

Литература

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. Физматгиз. 1959. 325 с.
2. Мандельштам Л. И. Сб. труд. II изд. АН. СССР. 1947. С. 7-12.
3. Папалекси Н. Д. Сб. труд. 1948. 456с.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М. Наука. 1955. 655 с.

5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М. Гостехиздат. 1947. 369 с.
6. Рябов Ю. А. В кн.: Об оценке области при методе малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний. Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев. 1963. С. 425-445.
7. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. М. Гостехиздат. 2005. 176 с.
8. Малкин И. Г. Метод Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний. М. Гостехиздат. 2004. 251 с.
9. Пуанкаре Ж. А. Избранные труды. М. Наука. 1974. 678 с.
10. Голденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М. Стройиздат. 1978. 846 с.
11. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М. Изд. НИЦ "РХД". 2004. 353 с.
12. Летов А. М.. Устойчивость нелинейных систем регулирования. М. Гостехиздат. 1962. 254 с.
13. Шемян Г. Г. Динамика роторных машин. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2004. 330 с.
14. Шемян Г. Г., Захарянц Г. В. Защита современных чувствительных аппаратур от динамических воздействий. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2003. 148 с.

поэтапных нестационарных динамических систем, сравнимых по завершенности с известными критериями.

В настоящей работе сформулированы основные свойства переходной матрицы для поэтапно меняющихся систем. Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем, которое выражено положительной определенностью интегральной матрицы управляемости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными нестационарными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u, & \text{при } t \in [t_0, t_1] \\ A_2(t)x + B_2(t)u, & \text{при } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ A_m(t)x + B_m(t)u, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}, \quad (1.1)$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ ($k=1, \dots, m$) – матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ – управляющее воздействие соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (r \times 1)$, $u(t) - (r \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц-функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Пусть заданы начальное $x(t_0) = x_0$ и конечное $x(T) = x_T$ состояния системы (1.1).

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т.е. в моменты времени t_k имеем условия связи

$$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \quad (k=1, \dots, m-1). \quad (1.2)$$

Определение 1. *Поэтапно меняющаяся система (1.1), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0) = x_0$ и конечных $x(T) = x_T$ состояний можно найти управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ такое, что решение $x(t)$ начиная из состояния $x(t_0)$ в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x(T) = x_T$.*

Вполне управляемая поэтапно меняющаяся система (1.1) обладает тем свойством, что с помощью соответствующего допустимого управления ее можно перевести из любого заданного начального состояния, проходя через все этапы, в заданное конечное состояние.

Принципиальным для любой задачи управления является вопрос о ее разрешимости, который сводится к анализу управляемости системы [1-6].

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый поэтапно меняющейся системой (1.1), будет вполне управляемым.

2. О движении поэтапно меняющейся управляемой линейной системы. Следующая теорема [6] определяет представление решения системы (1.1) с условиями (1.2).

Теорема 1. Для любых начальных значений $x(t_0) = x_0$ и допустимых управлений $u(t)$ существует решение $x(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), и для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ представляется в виде

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H[t_j, \tau] u(\tau) d\tau + \int_{t_{k-1}}^t H_k[t, \tau] u(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где

$$V(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}] V(t_{k-1}, t_j), \quad V(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \\ (k = 1, \dots, m; j = 0, \dots, k-1), \quad (2.2)$$

$H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau] B(\tau)$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решений однородной части k -го уравнения системы (1.1).

Отметим, что согласно введенному обозначению при $j = k-1$ $V(t_k, t_{k-1}) = X_k[t_k, t_{k-1}]$. Принимая, что при $j = k$ $V(t_k, t_k) = E$, формулу (2.1) при $t = t_m = T$ можно записать следующим образом:

$$x(T) = T(T, t_0) + \sum_{j=1}^m V(T, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, t] u(t) dt. \quad (2.3)$$

Введенная в (2.2) матрица позволяет компактно (в виде (2.1)) представить фазовое состояние $x(t)$ поэтапно меняющейся системы (1.1), выходящей из начального состояния $x(t_0)$, для произвольного момента времени t из любого промежутка времени $[t_{k-1}, t_k]$.

Матрица (2.2) является переходной матрицей для поэтапно меняющихся систем и играет важную роль в управлении поэтапно меняющихся линейных систем. Основные свойства этой матрицы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Матрица V , определенная в (2.2) при любом t_0 , обладает следующими свойствами:

- 1) $V(t_k, t_k) = E$ при любом $k = 0, 1, \dots, m$;
- 2) композиционное свойство: $V(t, t_0) = V(t, t_s) V(t_s, t_0)$ при любом $t, t_s, s = 1, \dots, m-1$;
- 3) $\det V(t, t_0) \neq 0$ при любом $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, m$;
- 4) $V^{-1}(t, t_0) = V(t_0, t)$ при любом $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, m$;
- 5) матрица $V(t, t_j)$ удовлетворяет уравнению $V(t, t_j) = A_k(t) V(t, t_j)$ при любом $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $j = 0, \dots, k-1$, $k = 1, \dots, m$;

3. Условия вполне управляемости поэтапно меняющейся нестационарной системы. При помощи введенных в (2.5) функций соотношение (2.3) запишется следующим образом:

$$\int_{t_0}^T \sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, t] u(t) dt = X(T) - V(T, t_0) x(t_0) = \eta. \quad (3.1)$$

Таким образом, получаем, что система (1.1) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta = X(T) - V(T, t_0) x(t_0)$ из R^n можно указать управление $u = u(t, \eta)$, удовлетворяющее условию (3.1).

Пусть $h_i(T, t)$ — i -й столбец матрицы $\left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau] \right)^T$; η_i — i -я компонента вектора C . Тогда соотношение (3.1) можно записать в виде

$$\int_{t_0}^T h_i^T(T, t) u(t) dt = \eta_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Условие вполне управляемости системы (1.1) можно сформулировать в виде следующего утверждения [6].

Для того чтобы система (1.1) была вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции $h_1(T, t), \dots, h_n(T, t)$ были линейно независимыми на этом отрезке.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Поэтапно меняющаяся система (1.1) вполне управляема на отрезке времени $[t_0, T]$ тогда и только тогда, когда интегральная матрица*

$$Q(t_0, \dots, T) = \int_{t_0}^T \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, t] \right) \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, t] \right)^T dt \quad (3.2)$$

положительно определена.

Доказательство. Пусть матрица $Q(t_0, \dots, T)$ положительно определена. Покажем, что система (1.1) вполне управляема. По определению матрица (3.2) является симметричной, следовательно, она является неособой матрицей, т.е. $\det Q(t_0, \dots, T) \neq 0$. Таким образом, обратная матрица $Q^{-1}(t_0, \dots, T)$ существует. Выберем управляющее воздействие в следующем виде:

$$u(t) = \left(V(t, t_j) H_j[t_j, t] \right)^T Q^{-1} \left(X(T) - V(T, t_0) x(t_0) \right) \quad t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в выражение (2.1), будем иметь

$$x(t) = V(t, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^{m-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau] \left[V(t, t_j) H_j[t_j, \tau] \right]^T Q^{-1} \left(X(T) - V(T, t_0) x(t_0) \right) d\tau + \int_{t_{m-1}}^t H_m[t, \tau] \left[H_m[t, \tau] \right]^T Q^{-1} \left(X(T) - V(T, t_0) x(t_0) \right) d\tau$$

или

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \left[\sum_{j=1}^{m-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (H_j[t_j, \tau]) (V(T, t_j) H_j[t_j, \tau])^T d\tau + \int_{t_{m-1}}^t H_m[t, \tau] (H_m[t_m, t])^T d\tau \right] \times Q^{-1} (x(T) - V(T, t_0)x(t_0)). \quad (3.4)$$

В момент времени $t = T = t_m$ из формулы (3.4) получим

$$x(T) = V(T, t_0)x(t_0) + \left[\sum_{j=1}^{m-1} V(T, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (H_j[t_j, \tau]) (V(T, t_j) H_j[t_j, \tau])^T d\tau + \int_{t_{m-1}}^T V(T, T) H_m[T, \tau] (V(T, T) H_m[t_m, t])^T d\tau \right] \times Q^{-1} (x(T) - V(T, t_0)x(t_0)). \quad (3.5)$$

Учитывая, что $V(T, T) = E$ (свойство 1 теоремы 2), выражение (3.5) можно представить в виде

$$x(T) = V(T, t_0)x(t_0) + \left[\sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (V(T, t_j) H_j[t_j, \tau]) (V(T, t_j) H_j[t_j, \tau])^T d\tau \right] \times Q^{-1} (x(T) - V(T, t_0)x(t_0)). \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) с учетом обозначения (2.5) запишем в следующем виде:

$$x(T) = V(T, t_0)x(t_0) + \left[\int_{t_0}^T \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) H_j[t_j, \tau] \right) \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau] \right)^T d\tau \right] \times Q^{-1} (x(T) - V(T, t_0)x(t_0)), \quad (3.7)$$

здесь также учтено, что

$$\int_{t_0}^T (V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau]) (V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau])^T d\tau = 0 \quad i \neq j.$$

Согласно (3.2) из формулы (3.7) получим

$$x(T) = V(T, t_0)x(t_0) + Q \times Q^{-1} (x(T) - V(T, t_0)x(t_0)) = x(T).$$

Таким образом, с помощью управления (3.3) движение системы (1.1) из любого заданного начального состояния $x(t_0)$ переведено в любое заданное конечное состояние $x(T)$. Отметим, что управление вида (3.3) не является единственным. Действительно, управление вида (2.4) с условием (2.6) также переводит движение системы (1.1) из любого начального состояния $x(t_0)$ в любое заданное конечное состояние $x(T)$.

Покажем теперь, что если поэтапно меняющаяся система (1.1) вполне управляема, то матрица (3.2) будет положительно определенной.

Введем обозначение

$$R(t) = \sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau]. \quad (3.8)$$

Размерность матрицы $R(t)$ равна $(n \times r)$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\langle \xi, Q(t_0, \dots, T) \rangle = \int_{t_0}^T \langle \xi, R(t) R^T(t) \xi \rangle dt, \quad (3.9)$$

где ξ – n -мерный вектор.

Так как для любой матрицы $R(t)$ размерностью $(n \times r)$ имеет место [5]

$$\langle \xi, R(t) R^T(t) \xi \rangle = \langle R^T(t) \xi, R^T(t) \xi \rangle,$$

для квадратичной формы (3.9) будем иметь

$$\langle \xi, Q(t_0, \dots, T) \xi \rangle = \int_{t_0}^T \langle R^T(t) \xi, R^T(t) \xi \rangle dt \geq 0. \quad (3.10)$$

Теперь покажем, что $Q(t_0, \dots, T)$ – неособая матрица. Для этого предположим обратное. Пусть $Q(t_0, \dots, T)$ – особая матрица. В этом случае существует такой n -мерный вектор $b \neq 0$, что $\langle b, Q(t_0, \dots, T) b \rangle = 0$.

Обозначим $\sigma(t) = R^T b$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle dt &= \int_{t_0}^T \langle R^T(t) b, R^T(t) b \rangle dt = \int_{t_0}^T \langle b, R(t) R^T(t) b \rangle dt = \\ &= \langle b, \int_{t_0}^T R(t) R^T(t) dt b \rangle = \langle b, Q(t_0, \dots, T) b \rangle = 0 \end{aligned}$$

Из этого следует, что $\sigma(t) = 0$ на отрезке $[t_0, T]$. Так как система (1.1) вполне управляема, существует управление $u(t)$, которое переводит движение системы (1.1) из любого заданного состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$, при этом $x(T) - V(T, t_0)x(t_0) \neq 0$. Для этого управления будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle \sigma(t), u(t) \rangle dt &= \int_{t_0}^T \langle R^T(t) b, u(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \left\langle \sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau] \right\rangle^T b, u(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \langle b, \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau] \right) u(t) \rangle dt = \langle b, \left(\sum_{j=1}^m V(T, t_j) \bar{H}_j[t_j, \tau] \right) u(t) dt \rangle. \end{aligned}$$

С учетом (3.1) получим

$$\int_{t_0}^T \langle \sigma(t), u(t) \rangle dt = \langle b, x(T) - V(T, t_0)x(t_0) \rangle. \quad (3.11)$$

Так как $\sigma(t) = 0$ на отрезке $[t_0, T]$,

$$\int_{t_0}^T \langle \sigma(t), u(t) \rangle dt = 0,$$

а если принимать, что $b = x(T) - V(T, t_0)x(t_0) \neq 0$, то из (3.11) получим $\langle a, b \rangle = 0$. Это противоречит предположению, что $b \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что матрица $Q(t_0, \dots, T)$ является неособой

матрицей, т.е. матрица $Q(t_0, \dots, T)$ положительно определена. Теорема 3 доказана.

Отметим, что из теоремы 3 можно получить известное условие вполне управляемости линейных нестационарных систем [1, 4, 5], движение которых происходит на одном интервале времени. Действительно, если вместо системы (1.1) рассматривать систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, T],$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, размерности матрицы $A(t)$, $B(t)$ вектора $u(t)$ соответственно равны $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(r \times 1)$, то эта система вполне управляема на отрезке времени $[t_0, T]$ тогда и только тогда, когда интегральная матрица

$$Q(t_0, T) = \int_{t_0}^T (X[T, t]B(t))(X[T, t]B(t))^T dt$$

положительно определена.

Заключение. В теории управления поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем важную роль играют понятия переходной матрицы и интегральной матрицы управляемости. Сформулированы основные свойства переходной матрицы для поэтапно меняющихся систем. Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем, которое выражено положительной определенностью интегральной матрицы управляемости.

Институт механики НАН РА,
Ереванский государственный университет
e-mail: barseghyan@sci.am

В. Р. Барсегян

Управляемость поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем

Исследуется управляемость поэтапно меняющихся линейных нестационарных систем. Сформулированы основные свойства переходной матрицы для таких систем. Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных систем, которое выражено положительно определенной интегральной матрицей управляемости.

Վ. Ռ. Բարսեղյան

Էտապ առ Էտապ փոփոխվող գծային ոչ ստացիոնար դինամիկ համակարգի դեկլարելիությունը

Հետազոտված է էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային ոչ ստացիոնար համակարգերի դեկլարելիությունը: Ձևակերպված են այդպիսի համակարգերի անցումային մատրիցի հիմնական հատկությունները: Ստացված է էտապ առ էտապ փոփոխվող

գծային ոչ ստացիոնար համակարգերի լրիվ դեկավարելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, որն արտահայտված է դեկավարելիության մատրիցի դրական որոշյալությամբ:

V. R. Barseghyan

Controllability of Stage by Stage Changing Linear Nonstationary Dynamic Systems

The controllability of stage by stage changing linear nonstationary systems is investigated in this paper. The main properties of the transition matrix for such systems are formulated. A necessary and sufficient condition for the complete controllability of stage by stage changing linear nonstationary systems is obtained, which is expressed through a positive definiteness of integral matrix of controllability.

Литература

1. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М. Наука. 1976. 424 с.
2. *Калман Р.* В кн.: Тр. I конгресса ИФАК. Т. 2. Изд-во АН СССР. М. 1961. С. 521-547.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 476 с.
4. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука. 1972. 576 с.
5. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука. 1978. 552 с.
6. *Барсегян В. Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
7. *Barseghyan V.R.* In: International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia. 2016. P. 33-35.
8. *Barseghyan V. R.* – Yugoslav J. of Operations Research. 2012. V. 22. № 1. P. 31-39.
9. *Барсегян В. Р.* – Проблемы управления. 2012. № 4. С. 11-17.
10. *Барсегян В. Р., Барсегян Т. В.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VIII междунар. конф. Сентябрь 22-26, 2014. Горис – Степанакерт. С. 83-87.
11. *Барсегян Т.В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т. 68. № 1. С. 81-90.
12. *Забелло Л.Е.* – Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 13–19.
13. *Borrelli F., Baotic M., Bemporad A., Morrerri M.* – Elsevier, Automatica. 2005. V. 41. P. 1709-1721.
14. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems. Spriger. 2003. X. 220 p.
15. *Dengguo Xu.* – Advances in Computer, Communication. Control and Automation. LNEE. 2012. V. 121. P. 321-328.

УДК 678.057:620.17:539.4

К. А. Карапетян, С. Ш. Валесян, Н. С. Мурадян

**Влияние внутреннего гидростатического давления
и осевого растягивающего усилия на сопротивление
разрушению стеклопластиковых труб при кручении**

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 25/VI 2018)

Ключевые слова: *стеклопласт, трубчатый элемент, растяжение, внутреннее гидростатическое давление, кручение, сопротивление разрушению.*

Введение. Известно, что напряжения, возникающие в армированных композитных тонкостенных трубчатых элементах, эксплуатирующихся в реальных условиях, можно воссоздать, применяя соответствующую схему растягивающих или сжимающих усилий и крутящих моментов [1]. По этой же причине считается, что исследования механического поведения таких элементов при двух комбинациях нагрузок: растяжении со сдвигом или сжатии со сдвигом, являются наиболее актуальными [2].

В данной работе приводятся и обсуждаются результаты экспериментального исследования сопротивления разрушению при кручении стеклопластиковых труб, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением (растяжение в кольцевом направлении) или осевым растягивающим усилием.

1. Методика проведения исследований. 1. Кручение труб, предварительно нагруженных осевым растягивающим усилием. Исследования влияния осевого растяжения на сопротивление разрушению при кручении труб проводились на слоистых стеклопластиковых трубчатых элементах с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2.25 мм и длиной 285 мм (рис. 1).

Трубы были изготовлены методом намотки стеклоткани, предварительно пропитанной модифицированной эпоксидной смолой, на металлическую оправку с последующим горячим прессованием по боковой поверхности в специальных формах [3]. Была применена стеклоткань полотняного переплетения марки Т-23 (ТУ 6-11-231-76) толщиной 0.27 мм с

плотностью (число нитей на 1см^2 ткани) 36:20 (основа: уток), производимая Севанским заводом «Электростеклоизоляция» (Республика Армения).

Связующее для стеклопластика изготавливалось на основе эпоксифенольных смол (ЭД-20 и БФ-4). Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет $\mu = 0.45$ ($\mu_{\text{основа}} = 0.29$,

$\mu_{\text{уток}} = 0.16$) Направление основы стеклоткани

совпадает с направлением продольной оси трубчатых образцов ($\varphi = 0^\circ$). Краткие сведения о методике проведения экспериментальных исследований, осуществленных через 7 лет после изготовления стеклотканевых труб, приводятся ниже.

Предварительно на одной части из общего числа образцов были определены пределы прочности (временного сопротивления) при осевом растяжении ($\sigma_{zz}^B = 146.6 \text{ МПа}$) и при простом кручении ($\tau_{\theta z}^B = 47.3 \text{ МПа}$).

Другая часть опытных образцов-близнецов была подвергнута осевому растяжению до определенного уровня (соответствующего 0.2; 0.4; 0.6 и $0.8 \sigma_{zz}^B$), а затем, сохраняя эту нагрузку постоянной, была доведена до разрушения путем приложения ступенчатообразно увеличивающегося крутящего момента.

1.2 Кручение труб, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением. Изучение влияния внутреннего гидростатического давления на сопротивление разрушению стеклопластиковых трубчатых элементов при кручении было осуществлено с использованием опытных образцов, полученных из указанных в п. 1.1 труб (исходные образцы) при помощи шлифования. Внешний рабочий диаметр опытных трубчатых образцов составлял 39.7 мм, а длина рабочей части – 60 мм.

Далее приводится краткое описание методики проведения экспериментальных исследований, осуществленных через 30 лет после изготовления исходных трубчатых элементов.

Как и в случае испытаний, описанном в п. 1.1, предварительно на одной части из общего числа опытных трубчатых образцов были определены пределы временного сопротивления на растяжение в кольцевом направлении ($\sigma_{\theta\theta}^B = 458.2 \text{ МПа}$) и при простом кручении ($\tau_{\theta z}^B = 36.2 \text{ МПа}$). Остальная

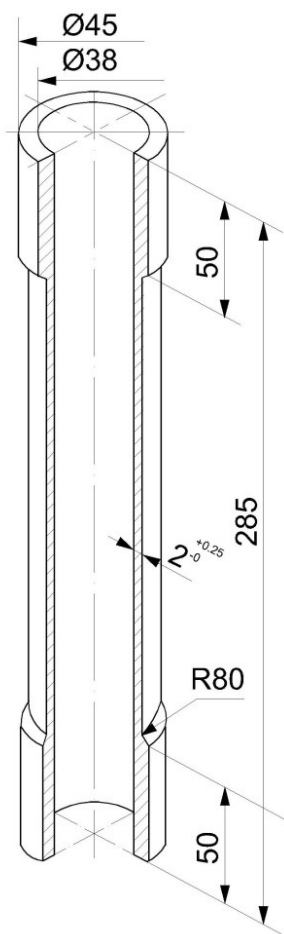


Рис.1. Чертеж стеклопластикового трубчатого элемента.

часть опытных образцов-близнецов была подвергнута внутреннему гидростатическому давлению до определенного уровня (соответствующего 0.4; 0.6 и 0.8 $\sigma_{\theta\theta}^B$), а затем, сохраняя эту нагрузку постоянной, была доведена до разрушения путем ступенчатого увеличения крутящего момента.

При проведении указанных выше экспериментальных исследований каждая ступень увеличивающегося в процессе испытания крутящего момента соответствовала 0.06 - 0.07 доли прочности стеклопластиковых труб при простом кручении. Выдержка труб на каждой ступени нагрузки соответствовала лишь времени, необходимому для снятия показаний деформаций (здесь они не рассматриваются). В каждом случае испытания были использованы данные 4-6 образцов-близнецов, разрушение которых имело место в рабочей зоне.

Описанные в п.п. 1.1 и 1.2 испытания стеклотканевых труб были осуществлены на трехосной разрывной машине ZDe 30.

2. Результаты и их обсуждение. 2.1. Предварительное нагружение труб осевым растягивающим усилием. Прежде чем перейти к обсуждению представленных в данном пункте результатов исследований отметим, что деформационные и прочностные свойства стеклотканевых труб при сложном нагружении растягивающим усилием и крутящим моментом с учетом очередности их приложения подробно рассматривались в работе [4]. Здесь приводятся отдельные результаты из указанной работы, позволяющие сделать некоторые обобщающие выводы.

Рассматриваемые в настоящем пункте результаты исследований на рис. 2 представлены в виде предельной кривой прочности в координатах $\sigma_{zz} - \tau_{\theta z}$, построенной по шести меткам включая σ_{zz}^B и $\tau_{\theta z}^B$.

Согласно данным рис. 2 нагружение на первом этапе испытания постоянным осевым растягивающим усилием приводит к увеличению значения сопротивления разрушению стеклотканевых труб при кручении по сравнению с их прочностью при простом кручении. Максимальное значение роста этой характеристики (более чем 30%) наблюдается у труб, предварительно нагруженных растягивающим усилием, соответствующим $0.6 \sigma_{zz}^B$, что в основном связано с более равномерным распределением внутренних напряжений в армирующем компоненте композита при этом режиме испытания. Значение упомянутого выше роста сопротивления разрушению труб при предварительном нагружении осевым растягивающим усилием, соответствующим 0.4 и $0.8 \sigma_{zz}^B$, составляет примерно 6 и 13%.

Отметим также, что согласно проведенным расчетам с увеличением уровня предварительного нагружения растягивающим усилием наблюдается стабилизация показателей сопротивления разрушению стеклотканевых труб при кручении, полученных при одних и тех же режимах испытаний. Так, при уровне осевого растягивающего напряжения, составляющем 0; 0.2; 0.4; 0.6 и $0.8 \sigma_{zz}^B$, величина коэффициента вариации для указанного сопротивления разрушению составляет соответственно 0.14; 0.12; 0.05; 0.03 и 0.01.

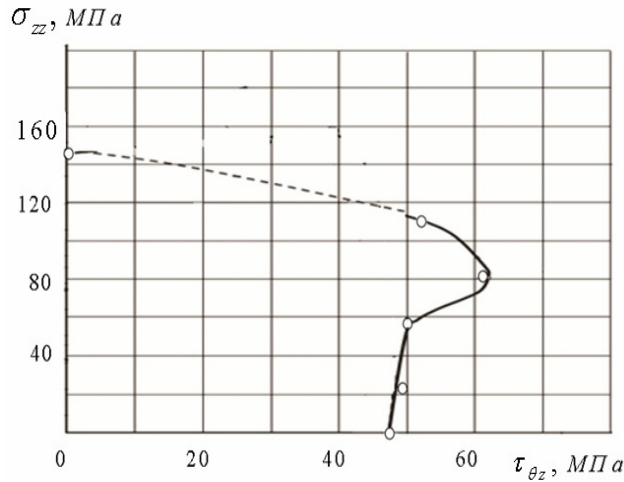


Рис. 2. Предельная кривая сопротивления разрушению тканевых стеклопластиковых труб при совместном действии осевого растягивающего усилия и крутящего момента: $\tau_{\theta z}^B = f(\sigma_{zz})$.

2.2. Предварительное нагружение труб внутренним гидростатическим давлением. Результаты рассматриваемых здесь исследований в виде предельной кривой прочности в координатах $\sigma_{\theta\theta}$ - $\tau_{\theta z}$ представлены на рис. 3. Кривая построена по пяти меткам включая $\sigma_{\theta\theta}^B$ и $\tau_{\theta z}^B$.

Сравнение данных рис. 3 показывает, что сопротивление разрушению при кручении стеклотканевых труб, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением, соответствующим $0.4\sigma_{\theta\theta}^B$, оказывается примерно на 40% выше по сравнению с пределом их прочности при простом кручении $\tau_{\theta z}^B$.

Такое сравнение также показывает, что в случаях кручения труб, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением, соответствующим 0.6 и $0.8\sigma_{\theta\theta}^B$, упомянутое выше сопротивление разрушению оказывается соответственно на 22 и 47% меньше по отношению к пределу их прочности при простом кручении.

Указанное выше существенное увеличение сопротивления разрушению при кручении стеклотканевых труб, находящихся под воздействием постоянного внутреннего гидростатического давления, соответствующего $0.4\sigma_{\theta\theta}^B$, можно объяснить более равномерным распределением внутренних напряжений между армирующими волокнами. А наблюдаемое уменьшение упомянутой характеристики при больших уровнях $\sigma_{\theta\theta}$ связано в основном с тем, что еще до начала процесса кручения трубы приобретают бочкообразную форму, приводящую тем самым к снижению первоначаль-

ной плотности армирующей стеклоткани, а следовательно, и увеличению степени податливости труб относительно кручения.

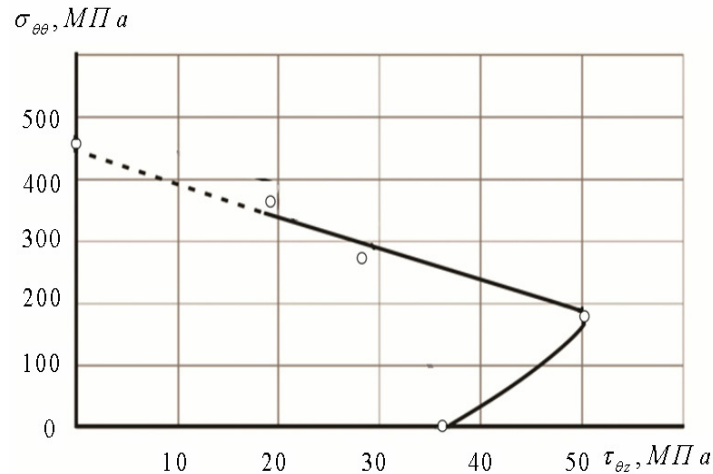


Рис. 3. Предельная кривая сопротивления разрушению тканевых стеклопластиковых труб при совместном действии внутреннего гидростатического давления и крутящего момента $\tau_{\theta z} = \varphi(\sigma_{\theta\theta})$.

3. Экспериментальное обоснование наблюдаемых эффектов. Согласно результатам, представленным в работе М. М. Мартиросяна [5], в условиях сложного нагружения на первом этапе испытаний приложенное предварительное растягивающее осевое усилие оказывает существенное положительное влияние на сопротивление разрушению по кольцевому направлению стеклопластиковых трубчатых образцов, подвергнутых на втором этапе нагружения внутреннему гидростатическому давлению. Обнаруженный при этом рост сопротивления разрушению зависит как от уровня действующего на образец постоянного растягивающего усилия, так и от величины угла φ его армирования.

Согласно данным М. М. Мартиросяна [5] при рассматриваемых углах армирования максимальное увеличение сопротивления разрушению по кольцевому направлению $\sigma_{\theta\theta}^B$ наблюдается у трубчатых образцов, предварительно нагруженных осевым растягивающим усилием, соответствующим $0.6 \sigma_{zz}^B$. Значение указанного роста при углах армирования труб $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 22.5^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ составляет соответственно 65 (коэффициент вариации 0.02); 85 (коэффициент вариации 0.13) и 30% (коэффициент вариации 0.04).

В работе [5] приводятся также результаты контрольных экспериментов, подтверждающие достоверность обнаруженного эффекта. При этом

разработка методики этих экспериментов была осуществлена исходя из следующего предположения: если при двухосном растяжении от воздействия $\sigma_{zz} > 0$ наблюдается повышение сопротивления разрушению труб по кольцевому направлению $\sigma_{\theta\theta}^B$ и при этом $\sigma_{\theta\theta}^B > \sigma_{\theta\theta}^B$, то разгрузка осевого напряжения до нулевого его значения должна привести к неременному разрушению образца от внутреннего давления.

Контрольные эксперименты, проведенные на трубчатых образцах с $\varphi = 45^\circ$ ($\sigma_{zz}^B = 140$ МПа, $\sigma_{\theta\theta}^B = 130$ МПа), подтвердили справедливость отмеченного выше предположения М. М. Мартиросяна [5]. Трубы, нагруженные двухосным растяжением и выдерживающие напряжения в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^B = 156$ МПа в условиях наличия $\sigma_{zz} = 49$ МПа, при разгрузке последнего моментально разрушались.

Следуя изложенному выше, нами также были осуществлены контрольные эксперименты. Согласно их данным тканевые стеклопластиковые трубы, подвергнутые кручению в условиях $\sigma_{zz} = 60$ МПа= $const$ и выдерживающие при этом касательные напряжения $\tau_{\theta z} = 53$ МПа, в процессе разгрузки по осевому направлению разрушались от кручения.

Аналогичное явление было зафиксировано и в контрольных экспериментах кручения труб в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления, соответствующего $\sigma_{\theta\theta} = 100$ МПа= $const$. В этом случае испытания трубы, выдерживающие касательные напряжения $\tau_{\theta z} = 46$ МПа, разрушались от кручения в процессе снижения уровня гидростатического давления.

Вывод. Если при последовательном нагружении осевым растягивающим усилием или внутренним гидростатическим давлением и крутящим моментом сначала прикладывается растяжение или внутреннее давление, имеет место повышение, в некоторых случаях существенное, сопротивления разрушению на сдвиг тканевых стеклопластиковых трубчатых элементов с основой, направленной вдоль оси трубы.

Отмеченное явление, обнаруженное в результате прямых измерений, указывает на то, что существенного повышения несущей способности одних и тех же трубчатых конструктивных элементов на основе стеклоткани, эксплуатируемых в условиях кручения, можно достичь путем обеспечения постоянно действующего на них осевого растягивающего усилия или внутреннего давления.

Решение указанных задач довольно успешно можно осуществить конструктивным методом.

Институт механики НАН РА
e-mail: koryan@mechins.sci.am

К. А. Карапетян, С. Ш. Валесян, Н. С. Мурадян

**Влияние внутреннего гидростатического давления и осевого
растягивающего усилия на сопротивление разрушению
стеклопластиковых труб при кручении**

Приводятся результаты исследования влияния приложенного на первом этапе нагружения внутреннего гидростатического давления или осевого растяжения на сопротивление разрушению при кручении тонкостенных стеклопластиковых трубчатых элементов. Экспериментально установлено, что влияние упомянутых выше силовых факторов на сопротивление разрушению стеклопластиковых труб при кручении в некоторых случаях может оказаться существенным. Предлагается способ увеличения несущей способности при кручении одних и тех же тонкостенных композитных трубчатых элементов.

Կ. Ա. Կարապետյան, Ս. Շ. Վալեսյան, Ն. Ս. Մուրադյան

**Երբին հիդրոստատիկ ճնշման և առանցքային ձգման
ազդեցությունը ապակեպլաստե խողովակների ըստ ոլորման
քայքայելու դիմադրության վրա**

Բերվում են տարբեր մակարդակի ներքին հիդրոստատիկ ճնշման կամ առանցքային ձգող ճիգի ազդեցության տակ գտնվող ապակեպլաստե բարակապատ խողովակների ըստ ոլորման քայքայելուն դիմադրելու հետազոտությունների արդյունքները: Փորձնականորեն հաստատված է, որ վերը նշած ուժային գործոնների ազդեցությունը ապակեպլաստե խողովակների ոլորմամբ քայքայման դիմադրության վրա որոշ դեպքերում կարող է լինել էական: Առաջարկվում է նույն և միևնույն բարակապատ կոմպոզիտե խողովակաձև տարրերի ըստ ոլորման կրողականության բարձրացման եղանակ:

K. A. Karapetyan, S. Sh. Valesyan, N. S. Muradyan

**The influence of the Hydrostatic Pressure and Axial Tension on the
Resistance to Fracture of Glass-Plastic Tubes Subjected to Torsion**

The research results of the influence of the inner hydrostatic pressure and axial tension applied at the loading first stage on the resistance to fracture of thin-walled glass-plastic tubular elements subjected to torsion are brought. It is experimentally established that the effect of above-mentioned force factors on the resistance to fracture of the glass-plastic tubes subjected to torsion can be essential in some cases. The method of increasing the magnitude of resistance to fracture of the same thin-walled composite tubular elements subjected to torsion is suggested.

Литература

1. *Шнейдерович Р. М.* Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. М. Машиностроение. 1968. 343 с.

2. *Лимонов В. А., Разин А.Ф., Микельсон М. Я.* – Механика композитных материалов. 1992. № 3. С.332-340.
3. *Мартиросян М. М.* – Промышленность Армении. 1971. № 10. С. 56-57.
4. *Карапетян К. А., Саркисян Н. Е., Хачикян А. Г., Азнаурян А. Г.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 4. С. 61-69.
5. *Мартиросян М. М.* – Механика полимеров. 1976. № 6. С. 1025-1029.

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.530

Л. А. Ахвердян¹, Р. А. Пашаян¹, Л. В. Арутюнян²

Связь между вариациями напряженно-деформированного состояния земной коры и сейсмической активностью на территории Армении

(Представлено академиком Б. К. Карапетяном 13/VII 2018)

Ключевые слова: деформация, земная кора, сейсмичность, землетрясение, наклоны земной поверхности.

Введение. Изучение геодинамических процессов земной коры проводится в лаборатории геофизических обсерваторных наблюдений посредством комплекса гидрогеодинамических мониторинговых и непрерывных наклономерно-деформографических измерений. Основными задачами измерений являются изучение вариаций напряженно-деформированного состояния земной коры, изучение физических проявлений сейсмической активации региона и определение прогностических признаков. Мониторинговые наблюдения гидрогеодинамики подземных вод региона и гидрогеохимии состава вод минеральных источников Центральной Армении включают работы по изучению геодинамики напряженно-деформированного состояния земной коры во времени и пространстве и их связь с сейсмической активностью. Наклономерно-деформографический аппаратный комплекс состоит из кварцевого штангового деформографа и наклономера. Точность измерения относительной линейной деформации 10^{-10} , наклонов – до 0.001 сек. дуги. Работы включают мониторинг современных движений земной коры методами наклонометрии и деформографии, анализ поведения во времени физических параметров и выявление характеристик, коррелирующих с состоянием сейсмичности. Сейсмичность является одним из чувствительных показателей интенсивности современных тектонических движений, поэтому данные, характеризующие сейсмичность изучаемого района, используются для изучения современных движений земной коры. Данные по сейсмичности, уровню вод гидрогеодинамических скважин и наклономерно-деформографических измерений предоставлены Национальной службой сейсмической защиты РА.

Результаты мониторинговых наблюдений. Сейсмический режим территории Армении за последние годы характеризуется слабой сейсмичностью в 2016 г. и повышенной – в 2017г.; это касается и количества произошедших сейсмических событий (рис. 1), и величин их магнитуд (рис. 2).

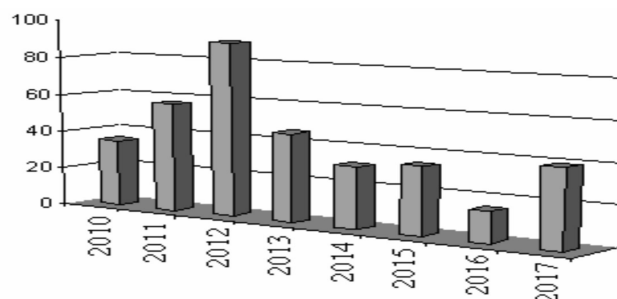


Рис. 1. Гистограмма количества сейсмических событий с $M > 2$, произошедших на территории Армении за последние годы.

Исходя из рис.2 магнитуда землетрясений находится $2 < M < 4.5$. Глубины гипоцентров большинства землетрясений находятся между 5-15 км, что свидетельствует о повышенной геодинамике верхних слоев земной коры. По составленному графику повторяемости землетрясений определены параметр сейсмической активности **a** и параметр наклона графика **b**. Оба параметра в регионе по численному значению за последние десять лет ниже средних значений: $a=3.63$, $b=0.98$, что характеризует среднюю сейсмичность территории за последние годы.

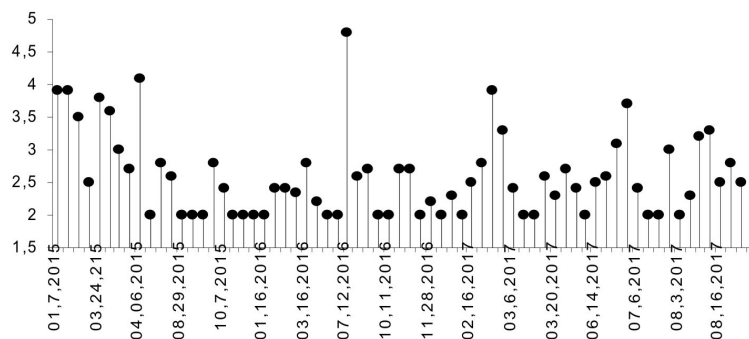


Рис. 2. График распределения произошедших землетрясений по магнитуде.

По данным каталога землетрясений построена карта сейсмичности территории Армении за последние годы (рис. 3) с нанесением эпицентров землетрясений с $M > 2$.

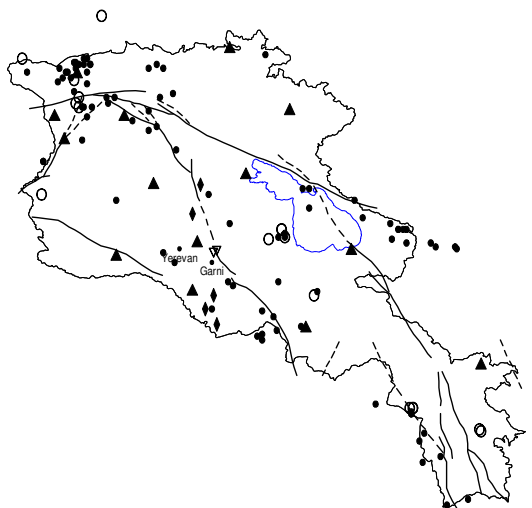


Рис. 3. Карты сейсмичности территории Армении: $M > 2$; $\blacktriangle$ – гидрогеодинамические скважины; $\blacklozenge$ – минеральные источники; эпицентры землетрясений: $\bullet$ – $M > 2$; $\circ$ – $M > 3$.

Общая картина сейсмичности территории Армении отражает концентрацию эпицентров землетрясений на Джавахетском нагорье и вдоль глубинных разломов: Ереванского, Гарнийского, Арарат-Севанского – и частично на ЮЗ региона.

Землетрясения с $M > 3$ имели место: $M=3.9$, 07.01.2015 на юге РА; $M=3.6$, 06.04.2015 на ЮЗ побережье оз.Севана; $M=3.8$, 24.03.2015, $M=4.8$, 12.07.2016, $M=3.3$, 15.08.2017, $M=3.7$, 04.07.2017 на Джавахетском нагорье, $M=3.9$, 28.02.2017 в Зангезуре (юг РА); $M=3.0$, 24.07.2017 в Ехегнадзоре и $M=3.1$, 29.06.2017 на СЗ РА.

Вариации напряженно-деформированного состояния сейсмоактивных участков земной коры региона. Сопоставление результатов анализа сейсмичности региона с вариациями напряженно-деформированного состояния земной коры выявило корреляционную связь между ними. Карта напряженно-деформированного состояния земной коры (рис. 4) составляется по вариациям параметров гидрогеодинамических и гидрогеохимических пунктов наблюдений. Этими параметрами являются уровни подземных вод в скважинах и компоненты химического состава минеральных вод, представляющие собой индикаторы сейсмичности и других геодинамических процессов земной коры [3].

При сопоставлении с картой эпицентров землетрясений (рис.3б), и описания динамики сейсмичности, карта напряженно-деформированного состояния земной коры территории Армении отражает распределение деформации в сейсмоактивных участках земной коры региона [7]. Структура деформационного сжатия (сгущения изолиний величин расчетной деформации) сформирована: на Джавахетском нагорье, на границе с Грузией, западном побережье оз.Севан, в центральной части и

Рис. 4. Карта напряженно-деформированного состояния земной коры территории Армении 2016-2017 гг.).

Наклономерно-деформографические измерения земной поверхности. Измерения наклонов земной поверхности проводятся в штольне Гарнийской обсерватории где установлен наклономер. Наклономер работает в непрерывном режиме, фиксирует медленные процессы и позволяет исследовать динамику деформаций земной коры. Результатами измерений являются бюллетени значений суточного хода наклонов земной поверхности по отдельным составляющим с получасовым и часовым интервалом во времени и значения поправок за лунно-солнечные приливы. Построены графики суточного хода наклонов по составляющим (рис. 5,а,б).

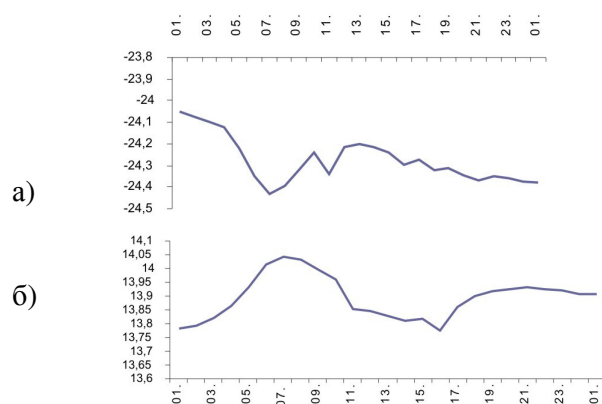


Рис. 5. Суточный ход наклона за 24.03.2015 г.: а – по направлению СЮ; б – по направлению ВЗ.

Наблюдаемый суточный ход наклонов аппроксимируется синусоидой по формуле [1, 6]: $Vt = A \sin(\frac{2\pi}{24} + \varphi)$. Совпадение вычисленных и наблюдаемых ходов суточных наклонов возможно, за исключением случайных погрешностей.

По полученным бюллетеням хода наклонов по составляющим, помимо графика хода наклонов, строится векторная диаграмма хода наклона по отдельным составляющим наклона. В работе построена векторная диаграмма хода наклона на первый час каждого суток на протяжении 2015 г. (рис. 6). Стрелками на диаграмме и на графиках отмечены моменты землетрясений.

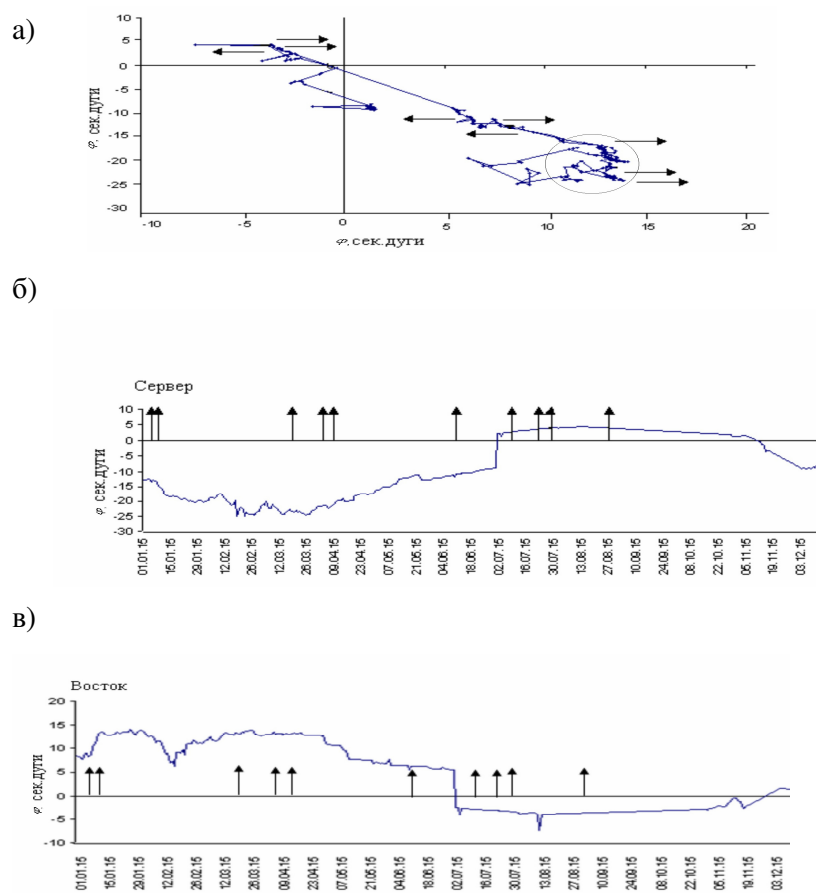


Рис. 6. Записи хода наклона в штольне обсерватории «Гарни»: а – векторная диаграмма хода наклонов, построенная по ежесуточным данным (на 0 ч) с 01.01.15 по 31.12.15; б, в – график вариации хода наклона (сек. дуги) компоненты: север-юг (б) и восток-запад (в).

Векторная диаграмма хода наклонов земной поверхности показывает циклический характер деформирования процессов земной коры, а также изменение направления и скорости в периоды региональных землетрясений (рис.6,а). За период с 10.02.15 по 2.05.15 зафиксирована деформация-сжатие, равная $8.34 \cdot 10^{-6}$, которая на векторной диаграмме отмечена в виде круга. Параметры произошедших землетрясений, указанных на графиках, приводятся в таблице.

Дата землетрясения	Координаты землетрясений		Пункт наблюдения	Эпицентральное расстояние Δ , км	Магнитуда, М	Расчетная деформация, ϵ
	у	х				
7.01.2015	39.35	45.96	Гарни	52.63	3.9	4.88E-09
8.01.2015	41.15	43.55	- //-	38.77	3.5	3.90E-09
24.03.2015	41.04	43.87	- //-	4.00	3.8	8.34E-06
6.04.2015	40.27	45.15	- //-	39.53	3.6	4.89E-09
13.04.2015	40.23	45.17	- //-	44.40	3	6.24E-10
10.06.2015	41.02	43.95	- //-	8.7	2	4.83E-09
11.07.2015	40.42	45.6	- //-	28.9	2.1	1.73E-10
18.07.2015	39.72	45	- //-	36.6	2.8	6.27E-10
19.07.2015	39.73	45.03	- //-	38.8	2.6	2.98E-10
29.08.2015	40.98	43.87	- //-	10.2	2	2.94E-09

В таблицу включены те значения эпицентральных расстояний (Δ), которые выбирались согласно величинам деформационных радиусов землетрясений, вычисляемые по известной формуле: $R=10^{0.43M}$ [4] и местные землетрясения с $M>2$.

В дальнейшем будут получены амплитудный и фазовый спектры месячного хода наклона, что позволит наблюдать смещение от месяца к месяцу фаз и амплитуд суточного наклона по составляющим для выявления сезонных изменений [8] и сопоставления с сейсмичностью.

Выводы. Сейсмический режим Армении указывает на повышение сейсмической активности на севере региона и по Базум-Севанскому и Гарнийскому разломам. Насыщенный сейсмический фон Центральной Армении является индикатором активации динамических процессов земной коры. По результатам наблюдений геодинамических процессов земной коры Армении выявлено, что за последние годы повысилась геодинамическая активность земной коры Ширакского тектонического блока, Центрально-Армянского тектонического комплекса.

Метод наклономерных измерений позволяет получать информацию о характере современных движений земной коры в регионе, а также отражает процессы сейсмической активации.

Наблюдения за многолетними вариациями хода наклонов (периоды от 3 до 20 лет) позволят отразить сейсмический процесс региона. Векторная диаграмма хода наклонов земной поверхности показывает циклический характер деформирования.

¹Институт геофизики и инженерной сейсмологии
им. А. Назарова НАН РА

²Институт общей и неорганической химии им. М. Манвеляна НАН РА

Л. А. Ахвердян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян

**Связь между вариациями напряженно-деформированного
состояния земной коры и сейсмической активностью
на территории Армении**

Приводятся результаты обработки данных мониторинговых наблюдений территории РА, проводимых с целью выявления современных движений земной коры. Мониторинг наблюдения включает изучение сейсмического режима, данных по уровню вод гидрогеодинамических скважин, химического состава минеральных вод, данных по измерению наклонов и деформации земной поверхности в штольне обсерватории «Гарни». Выявлены геодинамические процессы по вариации уровня подземных вод и химических компонентов минеральных вод. Отмечены наклоны и деформации земной поверхности, коррелируемые с сейсмической активностью.

Լ. Ա. Հախվերդյան, Ռ. Ա. Պաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան

**Հայաստանի տարածքի երկրակեղևի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի
վարիացիաների և սեյսմիկաակտիվության միջև կապը**

Բերվում են ՀՀ տարածքի մոնիթորինգային դիտարկումների տվյալների մշակման արդյունքները, որոնք իրականացվել են՝ բացահայտելու երկրակեղևի ժամանակակից շարժումները: Դիտարկումների մոնիթորինգն ընդգրկում է սեյսմիկ ռեժիմի ուսումնասիրությունը ըստ հիդրոերկրադինամիկական հորատանցքերի ջրի մակարդակի տվյալների, ինչպես նաև հանքային ջրերի քիմիական բաղադրության ուսումնասիրությունն ըստ Գառնիի դիտարանի հանքաքուլի մակերեսի թեքության և դեֆորմացիաների չափման տվյալների: Բացահայտվել են երկրադինամիկական գործընթացներ՝ ըստ ստորգետնյա ջրերի վարիացիաների և հանքային ջրերի քիմիական բաղադրիչների: Վեր են հանվել երկրի մակերեսի դեֆորմացիաներ և թեքություններ, որոնք հարաբերակցվում են սեյսմիկ ակտիվության հետ:

L. A. Akhverdyan, R. A. Pashayan, L. V. Arutyunyan

**The Relationship between Variations in the Stress-Strain State
of the Earth's Crust and Seismic Activity in Armenia**

Current article provides the results of processing of monitoring data of the territory of RA. The aim of the monitoring was to reveal the modern movements of earth crust. The monitoring includes the study of seismic regime, the data of the water level of hydrogeodynamic boreholes, the chemical composition of mineral water, data of the measurement of earth surface tilt in the adit of Garni Observatory. Geodynamic processes were revealed based on the variations of underground water level and chemical components of mineral water. The tilts of earth surface which are related with seismic activity were observed.

Литература

1. Бончковский В. Ф., Кармалеева Р. М. – Изв.АН СССР. 1957. № 8. С.1061-1069.
2. Григорян С. В., Пашаян Р. А., Арутюнян Л. В. – Доклады НАН РА. 2015. Т. 115. № 1. С. 50-59.
3. Григорян С. В., Пашаян Р. А., Арутюнян Л. В. – Доклады НАН РА. 2016, Т. 116. № 2. С. 141-148.
4. Добровольский И. Г., Зубков С. И., Мячкин В. И. В сб.: Моделирование предвестников землетрясений. М. Наука. 1980. С. 7-43.
5. Матер. XII Междунар. сейсмологической школы «Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных». 2017. Обнинск. С. 264-269.
6. Островский А. Е. Деформация земной поверхности по наблюдениям наклонов. М. Наука. 1978. 184 с.
7. Пашаян Р. А., Саргсян А. З., Островский А. Е. – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2006. Т. 59. № 2. С. 30-36.
8. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. Мир. 1978. 849 с.

УДК 547.787

Член-корреспондент НАН РА В. О. Топузьян, В. М. Казоян

2,4-Дизамещенные 5(4Н)-имидазолонаты: новый класс ингибиторов холинэстераз

(Представлено 4 /V 2018)

Ключевые слова: 5(4H)-имидазолон, синтез, ингибитор, ацетилхолинэстераза, бутирилхолинэстераза.

Известно, что имидазолоновое кольцо входит в состав различных природных веществ, таких как белки, в частности семейство зеленого флуоресцентного белка (Green Fluorescent Protein) [1], котамиды A-D [2], попаладины A-D [3] и др. Как природные, так и синтетические производные 5(4H)-имидазолон проявляют различные биологические свойства [4-9]. Однако в литературе отсутствуют данные по антихолинэстеразным свойствам этого класса соединений.

Настоящее сообщение посвящено синтезу и изучению антихолинэстеразных свойств 2,4-дизамещенных 5(4H)-имидазолонов (**13-24**). Синтез соединений **13-24** осуществляли ранее разработанным нами методом [10] – взаимодействием 2-арил-4-арилден-5(4H)-оксазолонов (**1-12**) с 1,1,1,3,3,3-гексаметилдисилазаном (HMDS) в диметилформамиде в условиях кипячения реакционной смеси от 20 до 60 мин (рис. 1).

Выходы синтезированных 2-арил-4-арилиден-5(4H)-имидазолонов (**13-24**) колеблются в пределах 69-92 % (табл.1). В ЯМР – спектрах соединений **13-24** синглетный сигнал экзоциклического винильного протона проявляется при 6.87-7.04 м.д., что свидетельствует о Z-конфигурации – соединений, в ИК-спектрах наблюдается поглощение в области 1698 - 1715 см⁻¹ принадлежащего СО-группе имидазолонового кольца.

По методу [11] исследованы антихолинэстеразные свойства полученных имидазолонов **13-24** по отношению к ацетилхолинэстеразе (АХЭ КФ 3.1.1.7) и бутирилхолинэстеразе (БухЭ 3.1.1.8). Полученные данные приведены в табл. 2. Согласно этим данным, 2-арил-4-арилиден-5(4Н)-имидазолы **13-24** в основном являются слабыми ингибиторами ацетилхолин-

эстеразы (0-41%), однако по отношению к БуХЭ проявляют сравнительно высокие ингибирующие свойства (2-87%). (табл.2).

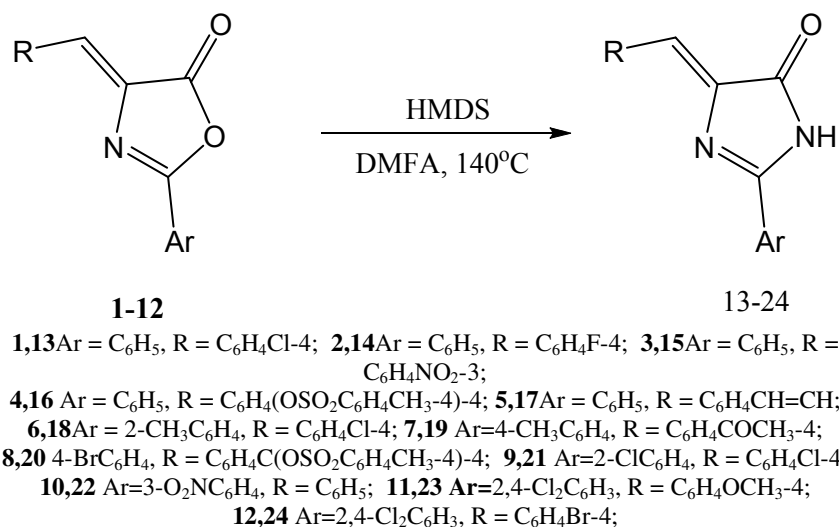


Рис. 1

Таблица 1
Данные продолжительности реакции, выходы и физикохимические константы 2-арил-4-арилиден-5(4Н)-имидазолонов 13-24

№	Продол- жительность реакции, Мин	Выход, %	Т.пл., °С	R _f *	Найдено, N%	Брутто- Формула	Вычис- лено, N%
13	35	80	285-288	0.60	10.24	C ₁₆ H ₁₁ N ₂ ClO	9.91
14	40	76	326-328	0.64	10.12	C ₁₆ H ₁₁ N ₂ FO	10.52
15	60	69	251-254	0.75	14.56	C ₁₆ H ₁₁ N ₃ O ₃	14.33
16	60	71	279-281	0.65	6.43	C ₂₃ H ₁₈ N ₂ O ₄ S	6.69
17	60	82	268-271	0.74	10.39	C ₁₈ H ₁₃ N ₂ O	10.25
18	45	74	290-293	0.70	9.70	C ₁₇ H ₁₃ N ₂ ClO	9.44
19	60	87	278-281	0.65	9.41	C ₁₈ H ₁₆ N ₂ O ₂	9.58
20	60	92	265-268	0.80	5.74	C ₂₃ H ₁₇ N ₂ BrO ₄ S	5.63
21	35	86	252-255	0.83	8.61	C ₁₆ H ₁₀ N ₂ ClO	8.83
22	20	85	255-258	0.47	14.50	C ₁₆ H ₁₁ N ₃ O ₃	14.33
23	60	84	220-223	0.74	8.27	C ₁₇ H ₁₂ N ₂ Cl ₂ O	8.07
24	60	87	230-233	0.73	6.90	C ₁₆ H ₉ N ₂ BrCl ₂ O	7.07

*Подвижная фаза бензол-метанол 5:2

Как видно из табл. 2, сравнительно высоким антибутирилхолинэстеразным свойством (87%) обладает 2-фенил-4-(4-толуолсульфонилоксибензилиден)-5(4Н)-имидазолон (**16**). Нами по методу [12] определены значения концентраций соединения **16**, ингибирующие холинэстеразы на 50%

(IC₅₀%). Полученные данные свидетельствуют о том, что соединение **16** по данным IC₅₀% уступает всем приведенным в табл. 3 известным антихолинэстеразным средствам, а по отношению к БуХЭ уступает только гептилстигмину. Одновременно соединение **16** по селективности к БуХЭ превосходит все приведенные в табл. 3 антихолинэстеразные препараты.

Таблица 2

Данные ингибирования ацетилхолинэстеразы (АХЭ) и бутирилхолинэстеразы (БуХЭ) 8 мМ 2,4-дизамещенными 5(4Н)-имидазолонами (13-24)

№	Ингибирование АChE, %	Ингибирование BuChE, %
13	19	2
14	13	20
15	5	16
16	29	87
17	39	79
18	12	11
19	19	28
20	7	27
21	14	5
22	32	44
23	41	51
24	26	61

Таблица 3

Значения IC₅₀% и селективности 2-фенил-4-(4-толуолсульфонилокси)-бензилиден-5(4Н)-имидазилона (**16**) и некоторых известных антихолинэстеразных препаратов

Соединение	IC ₅₀ , нМ, АChE (А)	IC ₅₀ , нМ BuChE (Б)	Селективность А/Б или Б/А
16	4201±49	6±0.3	700-БуХЭ
Такрин (Cognex)*	190±40	47±1.0	4-БуХЭ
Донепезил (Aricept)*	22±8	4150±1700	188-БуХЭ
Ривастигмин (Exelon)*	4150±160	37±5	122-БуХЭ
Галантамин (Reminyl)*	800±60	7300±830	9-АХЭ
Фенсерин*	22±1.4	1560±45	70-АХЭ
Гептилстигмин (Eptastigmine)*	22±2	5±0.1	4-БуХЭ

*Данные взяты из [13].

Таким образом, найден новый класс соединений – 2,4-дизамещенные 5(4H)-имидазолы, проявляющие антихолинэстеразные свойства и как ингибиторы, в основном, специфичные по отношению к БуХЭ.

Научно-технологический центр органической и фармацевтической химии НАН РА, Институт тонкой органической химии

Член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян, В. М. Казоян

2,4-Дизамещенные 5(4H)-имидазолы: новый класс ингибиторов холинэстераз

Взаимодействием 5(4H)-оксазолонов с 1,1,1,3,3,3-гексаметилдисилазаном были синтезированы 2,4-дизамещенные 5(4H)-оксазолы. Установлено, что эти соединения проявляют ингибирующие свойства по отношению к ацетил- и бутирилхолинэстеразам. В ряду синтезированных соединений сравнительно высокая антибутирилхолинэстеразная активность обнаружена у 2-фенил-4-(п-толуолсульфонил)оксибензилиден-5(4H)-имидазола.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Օ. Թոփույան, Վ. Մ. Հազոյան

**Խոլինէսթերազաների արգելակիչների նոր դաս՝
2,4-երկտեղակալված 5(4H)-իմիդազոլոններ**

Ելնելով չհագեցած 5(4H)-օքսազոլոնների և 1,1,1,3,3,3-հեքսամեթիլդիսիլազանի փոխազդեցությունից իրականացվել է 2,4-երկտեղակալված 5(4H)-իմիդազոլոնների սինթեզ: Ցույց է տրված, որ այդ միացություններն ընդունակ են արգելակելու ացետիլ-խոլին- և բուրիրիլխոլինէսթերազաները: Սինթեզված միացությունների շարքում որպես բուրիրիլխոլինէսթերազի արգելակիչ աչքի է ընկնում 2-ֆենիլ-4-(պ-տոլուոլսուլֆոնիլ)օքսիբենզիլիդեն-5(4H)-իմիդազոլոնը:

**Corresponding member of NAS RA V. O. Topuzyan,
V. M. Ghazoyan**

**2,4-Disubstituted 5(4H)-Imidazolones: New Class
of Cholinesterase Inhibitors**

According to the interaction of unsaturated 5(4H)-oxazolones with 1,1,1,3,3,3-hexamethyldisilazane, have been synthesised 2,4-disubstituted 5(4H)-imidazolones. There where shown, that this compounds can inhibit acetylcholine- and butyrylcholinesterases. From synthesised compounds there was evident the 2-phenil-4-(p-toluol-sulfoniloxylbenzilidene)-5(4H)-imidazolone as active butyrylcholinesterase inhibitor.

Литература

1. Баранов М. С., Лукьянов Р. А., Ямпольский И. В. – Биоорган. химия. 2013. Т. 39. С. 255-276.
2. Appleton D. R., Page M. J., Lambert G. J. – Org. Chem. 2002. V. 67. P. 5402.
3. Sato H., Tsuda M., Watanabe K., Kobayashi J. – Tetrahedron. 1998. V. 54. № 30. P. 8687.
4. Loaec N., Attanasio E., Villiers B., Durieu E. et al. – Mar Drugs. 2017. V.15. P. 316-331.
5. Lokhandwala S., Parekh N. M. – Der Pharma Chemica. 2014. V. 16, № 6. S. 139-142.
6. Sah P., Saraswat N., Seth M. E. – Journal of Chemistry. 2011. V. 8. № 1. P.427-434.
7. Ганиев М. М., Недорезков В. Д. Химические средства защиты растений. М. Колос. 2006. 248 с.
8. Sarala Devi T., Rajitha G., Bharath K. – Asian J. Chem. 2010. V. 22. № 7. P.5271-5276.
9. Ermoli A., Bargiotti A., Brasca M.G. – J. Med. Chem. 2009. V. 52. P.4380-4390.
10. Топузян В. О., Арутюнян Л. Д., Оганесян А. А. – ЖорХ. 2007. Т. 43. Вып. 6 С. 870-873.
11. Rehman A.-ru., Afroz S., Abbasi M.A., Tanveer W., Khan K.M., Ashraf M., Ahmad I., Afzal I., Ambreen N. –J. Pharm.Sci. 2012. V. 25. P. 809.
12. Ellman G. L., Courtney K. D., Andres V. Jr, Feather-Stone R. M. – Biochem. Pharm. 1961. V. 7. P. 88.
13. Luo W., Yu Q.-sh., Kulkarni S.S., et al. – J. Med. Chem. 2006. V. 49. № 7. P.2174-2185.

среды в количестве 10 мл, для верхнего – агаровую среду с предварительно засеянной соответствующей тест-культурой. После застывания засеянного агара на его поверхности расставляли стерильные цилиндрики из нержавеющей стали одинакового размера (6x10 мм). В цилиндрики каждой чашки одновременно пипеткой наносили 0.1 мл раствора испытуемых веществ. Учет результатов производили по диаметру (d, мм) зоны отсутствия роста микробов на месте нанесения веществ после суточного выращивания тест-культур в термостате при 37° С.

В методе серийных разведений на каждый подопытный микроорганизм составляли ряды по 8-10 пробирок, содержащие питательную среду с различными концентрациями испытуемых веществ начиная с концентраций 1000 мкг/мл. Пробирки засеивали одинаковым количеством бактериальной взвеси, приготовленной из 18-часовой культуры микроорганизмов. Результаты опытов учитывали визуально по наличию и по интенсивности роста микробов после суточной инкубации в термостате при 37°С. За действующую дозу принимали ту наименьшую концентрацию вещества в мкг/мл, которая в состоянии ингибировать рост микроорганизмов (минимальная ингибирующая концентрация – МИК). В качестве положительного контроля в аналогичных условиях использовали лекарственный препарат фуразолидон [9].

Результаты и обсуждения. Исследования методом «диффузии в агаре» показали, что DL-триптофан, а также Cu(II) хелат DL-триптофана (1,2) полностью лишены антибактериальной активности (табл. 1). При видоизменении структуры данной аминокислоты получены вещества, обладающие различной степенью антибактериальной активности. Так, Zn(II) хелат DL-триптофана и литиевая соль L-триптофана(3,4) проявляют слабую активность, подавляя рост всех использованных микроорганизмов в зоне диаметром 10-12 мм, а литиевая соль DL-триптофана по сравнению с соединением № 4 оказывает умеренное действие (d=15 мм). Литиевые соли салицилиден триптофана (6,7) в отличие от L- и DL-триптофана (4,5) проявляют выраженную антибактериальную активность (d=17-23 мм). Выраженную активность проявляют также соединения № 8 и 9 – Cu(II) хелат салицилиден DL-триптофана (в отношении грамположительных микробов) и Cu(II) хелат этилового эфира салицилиден DL-триптофана (d=17-24 мм). Zn(II) хелат салицилиден L-триптофана (10) по сравнению с Zn(II) хелат DL-триптофана (3) проявляет значительно большую активность (d=16-21 мм). Этиловый эфир салицилиден L-триптофана (13) оказывает слабое действие (d=10-13 мм), а DL производная данного вещества (12) проявляет по отношению к грамположительным микробам слабую (d=11 мм), а грамотрицательным – выраженную активность (d=16-18 мм). Среди изучаемых соединений наиболее активным оказалось вещество салицилиден L-триптофан (11), которое проявляет несколько большую активность, чем контрольный препарат (d=28-37 мм). Анализируя приведенные в табл. 1 данные, нетрудно заметить, что салицилиден производные триптофана более активны.

В опытах методом «двукратных серийных разведений» также использовали вышеуказанные 4 штамма. Исследования показали, что соединения

№ 3, 4 и 13 (Zn(II) хелат DL-триптофана, литиевая соль L-триптофана, этиловый эфир салицилиден L-триптофана) подавляют рост микроорганизмов в значительно высоких концентрациях (МИК>1000 мкг/мл) (табл. 2). Выраженную активность проявляют вещества № 6, 7 и 10 (литиевые соли салицилиден L- и DL-триптофана, Cu(II) хелат этилового эфира DL-триптофана и Zn(II) хелат салицилиден L-триптофана; МИК=62.5-250 мкг/мл). Наиболее активным оказалось соединение № 11 – салицилиден L-триптофан, которое по отношению ко всем использованным штаммам проявляет равную с контрольным препаратом активность (МИК=31.2 мкг/мл).

Следует отметить, что изучаемые вещества за исключением салицилиден L-триптофана (11) по активности значительно уступают контрольному препарату фуразолидону (d=24-25 мм, МИК=31.2 мкг/мл).

Таблица 1

Антибактериальная активность Cu(II), Zn(II), Li катионсодержащих производных триптофана

№	Соединение	Диаметр зоны задержки роста микроорганизмов, мм			
		Staphylococcus aureus		Shigella flexneri 6858	Esherichia coli 0-55
		209p	1		
1	DL триптофан	0	0	0	0
2	Cu(II)-хелат DL-триптофана	0	0	0	0
3	Zn(II)-хелат DL-триптофана	12	10	12	10
4	Литиевая соль L-триптофана	10	10	10	10
5	Литиевая соль DL-триптофана	15	15	15	15
6	Литиевая соль салицилиден DL-триптофана	17	19	23	17
7	Литиевая соль салицилиден L-триптофана	21	22	23	17
8	Cu(II)-хелат салицилиден DL-триптофана	18	17	14	11
9	Cu(II)-хелат этилового эфира салицилиден DL-триптофана	24	22	17	17
10	Zn(II)-хелат салицилиден L-триптофана	18	16	20	19
11	Салицилиден L-триптофан	30	28	32	37

12	Этиловый эфир салицилиден DL-триптофана	11	11	16	18
13	Этиловый эфир салицилиден L-триптофана	13	12	12	10
14	Фуразолидон	25	24	24	24

Таблица 2

Минимальная ингибирующая концентрация Cu(II), Zn(II), Li катионсодержащих производных триптофана

№	Соединение	Минимальная ингибирующая концентрация, мкг/мл			
		Staphylococcus aureus		Shigella flexneri 6858	Esherichia coli 0-55
		209p	1		
1	DL-триптофан	-	-	-	-
2	Cu(II)-хелат DL-триптофана	-	-	-	-
3	Zn(II)-хелат DL-триптофана	>1000	>1000	>1000	>1000
4	Литиевая соль L-триптофана	>1000	>1000	>1000	>1000
5	Литиевая соль DL-триптофана	500	500	500	500
6	Литиевая соль салицилиден DL-триптофана	250	250	62.5	250
7	Литиевая соль салицилиден L-триптофана	125	125	62.5	250
8	Cu(II)-хелат салицилиден DL-триптофана	250	250	>1000	>1000
9	Cu(II)-хелат этилового эфира салицилиден DL-триптофана	31.2	62.5	250	250
10	Zn(II)-хелат салицилиден L-триптофана	250	500	125	125
11	Салицилиден L-триптофан	31.2	31.2	31.2	31.2
12	Этиловый эфир салицилиден DL-триптофана	>1000	>1000	250	250
13	Этиловый эфир салицилиден L-триптофана	>1000	>1000	>1000	>1000
14	Фуразолидон	31.2	31.2	31.2	31.2

Таким образом, на основании полученных результатов можно заключить, что целесообразно продолжать поиски новых высокоэффективных веществ, особенно в ряду салицилиден триптофана.

Научно-технологический центр органической и
фармацевтической химии НАН РА,
Институт тонкой органической химии им. А. Мнджояна
e-mail: sedrham@yahoo.com

С. А. Казарян, Г. М. Степанян, Р. В. Пароникян, К. П. Григорян

Антибактериальная активность Cu(II), Zn(II), Li катионсодержащих производных триптофана

Показано, что большинство производных L- и DL-триптофана обладает антибактериальными свойствами как по отношению к грамположительным (*Staphylococcus aureus* 209P, 1), так и грамотрицательным (*Shigella flexneri* 6858, *Eshcherichia coli* 0-55) микроорганизмам. При этом более активными оказались литиевые соли салицилиден L- и DL-триптофана, салицилиден L-триптофан, Cu(II) хелат этилового эфира салицилиден DL-триптофана и Zn(II) хелат салицилиден L-триптофана.

**Ս. Հ. Ղազարյան, Հ. Մ. Ստեփանյան, Ռ. Վ. Պարոնիկյան,
Կ. Պ. Գրիգորյան**

Տրիպտոֆանի Cu(II), Zn(II), Li կատիոն պարունակող ածանցյալների հակամանրէային ակտիվությունը

Ցույց է տրված, որ հետազոտված տրիպտոֆանի ածանցյալների մեծ մասը ցուցաբերում է հակամանրէային ակտիվություն թե՛ գրամդրական (*Staphylococcus aureus* 209P, 1) և թե՛ գրամբացասական (*Shigella flexneri* 6858, *Eshcherichia coli* 0-55) մանրէների նկատմամբ: Պարզվել է, որ այդ շարքում համեմատաբար ակտիվ են սալիցիլիդեն L- և DL-տրիպտոֆանի լիթիումական աղերը, սալիցիլիդեն L-տրիպտոֆանի Zn(II) խելատը, սալիցիլիդեն DL-տրիպտոֆանի էթիլային էթերի Cu(II) խելատը և սալիցիլիդեն L-տրիպտոֆանը:

**S. H. Ghazaryan, H. M. Stepanyan, R. V. Paronikyan,
K. P. Grigoryan**

Antibacterial activity of Cu (II), Zn (II), Li Cation Containing Tryptophan Derivatives

It has been shown, that most L and DL-tryptophan derivatives have antibacterial properties both for Gram-positive (*Staphylococcus aureus* 209P, 1) and Gram-negative

(*Shigella flexneri* 6858, *Escherichia coli* 0-55) microorganisms. At the same time lithium salts of salicylidene L and DL-tryptophan, salicylidene L-tryptophan, Cu (II) Salicylidene DL-tryptophan ethyl ester chelate and Zn (II) salicylidene L-tryptophan chelate were more active.

Литература

1. Вернадский В. И. Избранные сочинения. Т. 5. М. Изд-во АН СССР. 1960.
2. Ghangbin, Wang; Ma, Shikim; Jinling, Wang; Fangming, Mino. Synth. – React. Inorg. Met-Org. Chem, 199, 19 (6), p.1023-1031.
3. Smith S.E., Jarson E.J. – J.Biol.Chem. 1946. V. 163. P. 29.
4. Cotzias G.C., Papavasilion P.S., Miller S.T. – Nature. 1964. V. 201. P. 1228.
5. Minasyan S.H., Ghazaryan S.H., Tonoyan V.J., Bajinyan S.A., Grigoryan K.P., Greenaway F.T., Sorenson J. R. J. – Synthesis and Reactivity in Inorganic, Metal-Organic and Nanometal Chemistry. 2006. V. 36. № 5. P. 425-434. 2006.
6. Казарян С. А., Пароникян Р. Г., Экмекджян Э. А., Тадевосян А. А., Григорян К. П., Карапетян А. Г. – Кровь. 2012. № 1(13). С. 46-49.
7. Казарян С. А., Степанян Г. М., Пароникян Р. В., Григорян К. П. – Доклады НАН РА. 2017. Т. 117. № 3. С. 259-264.
8. Руководство по проведению доклинических исследований лекарственных средств. Под ред. Миронова А.Н. М. Медицина. 2012. С. 509-525.
9. Машковский М.Д. Лекарственные средства. М. Новая волна. 2010. С. 851.