

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵՎՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2018

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ,
ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի
տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս
Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН,
академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам.
главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А.
ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, corresponding member of NAS RA L. M.
AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding
member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.am> *e-mail:* rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2018
©Издательство “Гитутюн”
НАН РА. 2018

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Ս. Ջաքարյան, Ս. Լ. Բերբերյան – Գրինի տիպի պոտենցիալների լարային սահմանների մասին	7
Ս. Հ. Աբելյան – Դիրիխլեի խնդրի արդյունավետ լուծումը միավոր շրջանում	15

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Մ. Սայադյան, Ա. Ա. Չուբարյան – Դասական տրամաբանության ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի ոչ մոնոտոնիկ հատկության մասին	20
--	----

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

Գ. Է. Հարությունյան – Պլանավորման մոտեցում նանոչափական բյուրեղներում ներկառուցված նախագծման բլոկների զուգահեռ և հաջորդական թեստավորման համար	26
--	----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Վ. Մ. Բելուֆելյան, Ս. Վ. Սարգսյան – Լյավի խնդիրը առաձգամածուցիկ ծածկույթով կիսատարածության համար	33
Ս. Մ. Մխիթարյան – Բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակի հետ փոխազդող վերջավոր ճաքով առաձգական սալի լարվածային վիճակի մասին	39
Ս. Մ. Գրիգորյան, Ս. Մ. Մխիթարյան – Երկու միատեսակ ստրինգերների հետ առաձգական կիսաանվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության մասին	49
Ք. Ա. Ժամակոչյան – Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների կաշկանդված պտույտներով մաթեմատիկական մոդելի կառուցման համար	60
Ա. Վ. Գևորգյան – Մակերևութային P-SV տիպի ալիքները վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածությունների բաժանման եզրով	68
Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան, Ս. Ա. Միկիլյան – Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումներն ու ստատիկական կայունությունը մագնիսական դաշտում	72
Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան, Ս. Ա. Միկիլյան – Երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալի տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորումը	82

ՖԻԶԻԿԱ

Ռ. Հ. Ալանակյան – Լիցքավորված Հիգգսի բոզոնների ծնումը լեպտոն-հակալեպտոնային բախումներում	93
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>В. С. Захарян, С. Л. Берберян</i> – О хордальных пределах потенциалов типа Грина	7
<i>С. О. Абелян</i> – Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге	15

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>С. М. Саядян, А. А. Чубарян</i> – О свойстве немонотонности некоторых систем выводов классического исчисления высказываний	20
---	----

ИНФОРМАТИКА

<i>Г. Э. Арутюнян</i> – Подход к планированию параллельного и последовательного тестирования блоков проектирования в наномерных системах на кристалле ...	26
---	----

МЕХАНИКА

<i>В. М. Белубемян, С. В. Саркисян</i> – Задача Лява для полупространства с вязкоупругим покрытием	33
<i>С. М. Мхитарян</i> – О напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жестким тонким включением	39
<i>М. С. Григорян, С. М. Мхитарян</i> – О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной	49
<i>К. А. Жамакочян</i> – Применение метода степенных рядов для построения математической модели микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением	60
<i>А. В. Геворкян</i> – Поверхностные Р-SV волны на границе раздела конечнопроходящих полупространств	68
<i>Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян</i> – Колебания и статическая устойчивость трехслойных магнитострикционных пластин под действием магнитного поля	72
<i>Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян</i> – Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки	82

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – Рождение заряженных хиггсовских бозонов в лептон-антилептонных столкновениях	93
--	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

V. S. Zakaryan, S. L. Berberyan – On the Chordal Limits of Potentials of the Green Type	7
S. H. Abelyan – On the Effective Solution of the Dirichlet Problem in the Unit Disk	15

APPLIED MATHEMATICS

S. M. Sayadyan, A. A. Chubaryan – On Some no Monotonous Property of Some Propositional Proof Systems of Classical Logic	20
---	----

INFORMATICS

G. E. Harutyunyan – An Approach for Scheduling Parallel and Serial Testing of Embedded IP Cores in Nanoscale SoCs	26
---	----

MECHANICS

V. M. Belubekyan, S. V. Sarkisyan – Love Problem for a Half-Space with a Viscoelastic Coating	33
S. M. Mkhitarian – On the Stressed State of an Elastic Infinite Plate with a Finite Crack Interacting with an Absolutely Rigid Thin Inclusion	39
M. S. Grigoryan, S. M. Mkhitarian – On Contact Interaction of an Elastic Semi-Infinite Plate with Two Similar Stringers	49
K. A. Zhamakochyan – Application of the Method of Power Series for the Construction of a Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Bars with Constrained Rotation	60
A.V. Gevorgyan – Surface P-SV Waves on the Interface of Two Finite Conductive Semi-Spaces	68
G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan – Vibrations and Static Stability of Three-Layered Magnetostrictive Plates under the Action of Magnetic Field	72
G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan – Mathematical Modeling of Vibrations of Two-Layered Magnetostrictive Plate	82

PHYSICS

R. H. Alanakyan – Charged Higgs Bosons Production in Lepton-Antilepton Collisions g.....	93
--	----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Академик В. С. Захарян, С. Л. Берберян

О хордальных пределах потенциалов типа Грина

(Представлено 17/XII 2017)

Ключевые слова: хордальные пределы, потенциал типа Грина, β -емкость множеств.

Граничному поведению потенциалов типа Грина, введенных М. М. Джрбашяном (см.[1]), посвящены многочисленные работы. Отметим только часть из них [1-6]. Для дальнейшего изложения приведем некоторые обозначения и определения.

Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $L(0, l)$, где $0 < l < +\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) с началом в точке $x=0$ принято называть функцию $D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$, $x \in (0, l)$. Если

$f(x) \in L(0, l)$, то при любом α ($0 < \alpha < +\infty$) функция $D^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и принадлежит классу $L(0, l)$. При $\alpha = 0$ принимают $D^0 f(x) = f(x)$. Рассмотрим при $z, \xi \in D$ функцию, введенную М. М. Джрбашяном (см.[1]) при построении им теории факторизации мероморфных в единичном круге D функций:

$$A_{\alpha}(z; a) = \left(1 - \frac{z}{a}\right) \exp\{-W_{\alpha}(z; a)\}, \text{ где } -1 < \alpha < \infty$$

и

$$W_{\alpha}(z; a) = \int_{|\alpha|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot \{a^{-k|\alpha|} \int_0^{|\alpha|} (1-x)^{\alpha} x^{k-1} dx - a^{-k} \int_{|\alpha|}^1 (1-x)^{\alpha} x^{-k-1} dx\} \cdot z^k.$$

Рассмотрим функцию $u_{\alpha}(z; a) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_{\alpha}(z; a)|$. Функцию $G_{\alpha}(z; a) = -u_{\alpha}(z; a)$ называют функцией типа Грина. При $\alpha = 0$

$A_0(z; a) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{|a|}{a}$ и, следовательно, функция $G_0(z; a) = -\log \left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right| =$
 $= \log \left| \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right|$ совпадает с обычной функцией Грина для круга D . Функция

$\omega_\alpha(z) = \iint_D G_\alpha(z; a) d\mu(a)$, где $-1 < \alpha < +\infty$, называется потенциалом типа

Грина. При $\alpha = 0$ получаем классический потенциал Грина. Введём понятие ёмкости. Говорят (см.[7, 8]), что измеримое по Борелю множество E имеет положительную α -ёмкость, $0 < \alpha < 1$, если существует такая мера

$\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$, для которой интеграл $V(e^{r, x}) = \int_E \frac{1}{|e^{i\theta} - re^{ix}|^\alpha} d\mu$ равно-

мерно ограничен по x при $r \rightarrow 1$. В случае отсутствия такой меры α -ёмкость множества E равна нулю. Обозначим α -ёмкость множества E через $\text{cap}_\alpha E$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть $\omega_\alpha(z)$ – потенциал типа Грина, где $\alpha \geq 0$, а неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию

$$\Omega(r) = \iint_{|a| < r} d\mu(a) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+\alpha}}\right), \text{ где } 0 \leq \lambda < 1.$$

Тогда на Γ можно указать такое множество E , где $\text{cap}_\beta E = 0$ и $\lambda < \beta < 1$, что для всех $\xi \in \Gamma$, кроме, быть может, множества E , для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\omega_\alpha(z)$ существуют хордальные пределы, равные нулю, т.е. $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E \\ z \in h(\xi, \varphi)}} \omega_\alpha(z) = 0$.

Вычислительную часть доказательства выделим в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $\omega_\alpha(z)$ – потенциал типа Грина, где $\alpha \geq 0$, а неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию

$$\Omega(r) = \iint_{|a| < r} d\mu(a) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+\alpha}}\right), \text{ где } 0 \leq \lambda < 1.$$

Тогда на Γ можно указать такое множество E , где $\text{cap} E = 0$ и $\lambda < \beta < 1$, что для всех $\xi \in \Gamma \setminus E$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(z) &\leq \iint_{\Delta_{v_0}^*} G_\alpha(z; a) \cdot d\mu(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{v_0, v-1}} G_0(z; a) d\mu(a) + \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{v-1, v+2}} G_0(z; a) d\mu(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{v+2}} G_0(z; a) d\mu(a) = \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}$$

где $G_0(z; a) = \log \left| \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right|$ — функция Грина для единичного круга D ,

$\Delta_v = \left\{ z : |z| < 1 \cap |z - 1| < \frac{1}{2^v} \right\}$, $\Delta_{v_0}^*$ — дополнение Δ_{v_0} до единичного круга D , а

$\Delta_{v, v'} = \Delta_v - \Delta_{v'}$ для любых натуральных значений, причем очевидно, что $v < v'$.

Доказательство. В дальнейшем для доказательства воспользуемся оценкой

$$G_\alpha(z, a) \leq \frac{(1 - |a|)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot G_0(z; a) \quad (0 \leq \alpha < +\infty), \quad (1)$$

полученной Л. А. Сехпояном (см. [9]). Обозначим через $d\sigma(a) = (1 - |a|)^{1+\alpha} d\mu(a)$. Тогда

$$\iint_{r \leq |a| < 1} d\sigma(a) = \int_r^1 (1-t)^{1+\alpha} d\Omega(t). \quad (2)$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^{1+\alpha} \Omega(r) \leq (1-r)^{1+\alpha} \cdot \frac{\text{const}}{(1-r)^{\lambda+\alpha}} = 0$$

и

$$\int_r^1 \Omega(t) \cdot (1-t)^\alpha dt \leq \text{const} \cdot \int_r^1 \frac{dt}{(1-t)^\lambda} = O\left((1-r)^{1-\lambda}\right),$$

из соотношения (2) получим

$$\iint_{r \leq |a| < 1} d\sigma(a) = O(1-r)^{1-\lambda}, \quad (3)$$

Обозначим $r_v = 1 - \frac{1}{2^v}$ ($v = 1, 2, \dots$). Тогда из (3) следует, что

$$\iint_{r_v \leq |a| < 1} d\sigma(a) \leq \frac{\text{const}}{2^{v(1-\lambda)}}. \quad (4)$$

Разделим круговое кольцо $r_v \leq |z| < 1$ на 2^v равных областей ω_v^I , где $\omega_v^I : r_v \leq |z| < 1$ и $\frac{2\pi}{2^v} I \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{2^v} (I+1)$, ($I = 0, 1, 2, \dots, 2^v - 1$).

Тогда согласно (4) имеем, что

$$\sum_{I=0}^{2^v-1} \sigma(\omega_v^I) \leq \frac{\text{const}}{2^{v(1-\lambda)}}. \quad (5)$$

Пусть N – число из ω_ν^I , для которых $\sigma(\omega_\nu^I) \geq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}}$, где $0 < \delta < \beta - \lambda$. Из неравенства (5) следует, что

$$N \leq \text{const} \cdot \frac{2^{\nu(1+\delta)}}{2^{\nu(1-\lambda)}}.$$

Присоединим к каждой такой области ω_ν^I две смежные области $\omega_\nu^{I-1}, \omega_\nu^{I+1}$ и положим $\omega_\nu^{*I} = \omega_\nu^{I-1} \cup \omega_\nu^I \cup \omega_\nu^{I+1}$. Обозначим через $\gamma_{\nu I}$ дуги на Γ , соответствующие областям ω_ν^{*I} при фиксированных ν и I , а через F_ν^* – множество всех дуг на Γ , которое принадлежит границе $\{\omega_\nu^{*I}\}$ при фиксированном ν . Положим $F^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_\nu^*$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{I=1}^N |\gamma_{\nu I}|^\beta &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{I=1}^N \left[3 \cdot \left(\frac{2\pi}{2^\nu} (I+1) - \frac{2\pi}{2^\nu} I \right) \right]^\beta \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 3^\beta \cdot \frac{(2\pi)^\beta}{2^{\nu\beta}} \cdot \text{const} \cdot \frac{2}{2^{\nu(-\lambda-\delta)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{const}}{2^{\nu(\beta-\lambda-\delta)}} < +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Последний ряд в (6) очевидно сходится, так как по предположению $\beta - \lambda - \delta > 0$. Поэтому $\Lambda_\beta(F^*) = 0$, и, следовательно, $\text{cap}_\beta(F^*) = 0$.

Обозначим дополнение к F^* относительно Γ через F . Если $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, то $\xi \in C(F_\nu^*)$, а значит, область $\omega_\nu(\theta)$, где

$$\omega_\nu(\theta) : r_\gamma \leq |z| < 1, \quad \theta - \frac{2\pi}{2^\nu} \leq \arg z \leq \theta + \frac{2\pi}{2^\nu},$$

содержится в объединении $\omega_\nu^I \cup \omega_\nu^{I+1}$, в которых

$$\sigma(\omega_\nu^I) \leq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}}, \quad \sigma(\omega_\nu^{I+1}) \leq \frac{1}{2^{\nu(1+\delta)}}.$$

Поэтому

$$\sigma(\omega_\nu(\theta)) \leq \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}}, \quad (\text{где } \nu \geq \nu_0, \quad 0 < \delta < \beta - \lambda). \quad (7)$$

Без нарушения общности допустим, что точка $\xi = 1$ принадлежит множеству F , и пусть $h(1, \varphi)$ – хорда, проходящая через точку $\xi = 1$ и составляющая с радиусом в этой точке угол φ , где $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Согласно (7)

$$\sigma(\Delta_\nu) \leq \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}} \quad (\nu \geq \nu_0, \quad 0 < \delta < \beta - \alpha). \quad (8)$$

Фиксируем $\varphi_0, 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогда значения $\lambda_\nu(\varphi)$ при каждом $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ выражают σ -массу, сосредоточенную в секторе, ограниченном окружностью $|z-1| < \frac{1}{2^\nu}$ и хордами $h(1, -\varphi_0), h(1, \varphi_0)$. Таким образом,

$\lambda_\nu(\varphi)$ есть возрастающая функция от φ , $\lambda'_\nu(\varphi)$, существует почти всюду на $(-\varphi_0, \varphi_0)$ и

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \lambda'_\nu(\varphi) d\varphi \leq \lambda_\nu(\varphi_0) \leq \sigma(\Delta_\nu) \leq \frac{2}{2^{\nu(1+\delta)}}, \quad (9)$$

Пусть e_ν^* обозначает множество всех таких значений φ , для которых либо $\lambda'_\nu(\varphi)$ не существует, либо существует и $\lambda'_\nu(\varphi) \geq \frac{1}{2^\nu}$. Согласно (9) имеем $me_\nu^* \leq \frac{2}{2^{\nu\delta}}$, и значит, множество $e^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=k}^{\infty} e_\nu^*$ имеет меру, равную нулю. Пусть e – дополнение к e^* до интервала $(-\varphi_0, \varphi_0)$. Предположим, что $\varphi_1 \in e$ и $z \in h(\xi, \varphi_1)$. Рассмотрим такие точки z , для которых $\frac{1}{2^{\nu+1}} \leq |z-1| \leq \frac{1}{2^\nu}$. Получим

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(z) = & \iint_{\Delta_{\nu_0}^*} G_\alpha(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \iint_{\Delta_{\nu_0, \nu-1}} G_\alpha(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \\ & + \iint_{\Delta_{\nu-1, \nu+1}} G_\alpha(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} + \iint_{\Delta_{\nu+2}} G_\alpha(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Имеем $\lim_{z \rightarrow 1} I_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \iint_{\Delta_{\nu_0}^*} G_\alpha(z; a) \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)^{1+\alpha}} = 0$.

Принимая во внимание оценку (1), из соотношения (10) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(z) \leq & I_1 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{\nu_0, \nu-1}} G_0(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{\nu-1, \nu+2}} G_0(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{\Delta_{\nu+2}} G_0(z; a) \cdot \frac{d\sigma(a)}{(1-|a|)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Утверждение леммы 1 доказано.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся оценкой, полученной М. Цудзи [10]. Его утверждение сформулируем в виде леммы.

Лемма Ц. Пусть неотрицательное распределение масс $\sigma(a)$ удовлетворяет в области $\Delta_\nu, \nu \geq \nu_0$ неравенству (8) при $0 < \delta < 1$, и допустим, что φ_1 – произвольное значение угла, принадлежащее дополнению e множества e^* относительно интервала $(-\varphi_0, \varphi_0)$. Тогда в произвольной точке $z \in h(0, \varphi_1)$, принадлежащей кольцу $\frac{1}{2^{\nu+1}} < |z-1| \leq \frac{1}{2^\nu}$, $\nu \geq \nu_0$, справедлива оценка

$$I_2 + I_3 + I_4 \leq \frac{\text{const} \cdot \nu}{2^{\nu\delta}} + \frac{\text{const}}{2^{\nu_0}},$$

где ν_0 может быть сколь угодно большим натуральным числом.

Доказательство теоремы 1. Воспользовавшись утверждениями лемм 1 и Ц, получим оценку

$$\omega_\alpha(z) \leq I_1 + \frac{\text{const} \cdot \nu}{2^{\nu\delta}} + \frac{\text{const}}{2^{\nu_0}}, \quad (11)$$

где $\lim_{z \rightarrow 1} I_1 = 0$, $\nu \geq \nu_1$, ν_0 – сколько угодно большое натуральное число и $\delta = \beta - \alpha > 0$. Из оценки (11) непосредственно следует утверждение теоремы 1.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 0$ утверждение теоремы 1, доказанное в [11], является уточнением соответствующего результата М. Цудзи [10].

Л. Сехпосьяном [9] доказано существование хордальных пределов, равных нулю, у потенциалов типа Грина при $-1 < \alpha < +\infty$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ всюду на Γ , кроме, быть может, исключительного множества E , линейная мера которого равна нулю при условии, что неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию

$$\iint_{|\xi| < 1} (1 - |\xi|)^\alpha d\mu(\xi) < +\infty. \quad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что $\iint_{|\xi| < r} (1 - |\xi|)^\alpha d\mu(\xi) = O(1)$.

Поэтому

$$\Omega(r) = \iint_{|\xi| < r} d\mu(\xi) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right),$$

где $0 \leq \alpha < +\infty$.

Отсюда легко следует, что выполняются условия теоремы 1 при $\lambda = 0$. Следовательно, из утверждения теоремы 1 вытекает уточнение утверждения теоремы, полученной Л. Сехпосьяном [9]. Уточнение касается исключительных множеств. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\omega_\alpha(z)$ – потенциал типа Грина, где $\alpha \geq 0$, а неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию (12).

Тогда на Γ можно указать такое множество E , где $\text{cap}_\beta E = 0$ и $0 < \beta < 1$, что для всех $\xi \in \Gamma$, кроме, быть может, множества E , для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют хордальные пределы, равные нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E \\ z \in h(\xi, \varphi)}} \omega_\alpha(z) = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A083 и в

рамках финансовой поддержки проекта развития Российско-Армянского Университета.

Национальный политехнический университет Армении
Российско-Армянский университет
e-mail: samvel357@mail.ru

Академик В. С. Захарян, С. Л. Берберян
О хордальных пределах потенциалов типа Грина

Доказывается существование хордальных пределов у потенциалов типа Грина $\omega_\alpha(z)$, где $\alpha \geq 0$, всюду на единичной окружности, кроме исключительного множества E , характеристика которого дана с помощью β -емкости, где $0 < \beta < 1$. Уточняется один результат, полученный Л. А. Сехпосяном.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ս. Լ. Բերբերյան
Գրինի տիպի պոտենցիալների լարային սահմանների մասին

Ապացուցվել է լարային սահմանների գոյությունը $\omega_\alpha(z)$ Գրինի տիպի պոտենցիալների մոտ, որտեղ $\alpha \geq 0$, ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա, բացի այն բացառիկ E բազմությունից, որի բնութագիրը տրված է β -ունակության օգնությամբ, երբ $0 < \beta < 1$: Մասնավորապես ճշգրտվում է մի արդյունք, որը ստացվել է Լ. Ա. Սեխպոսյանի կողմից:

Academician V. S. Zakaryan, S. L. Berberyan
On the Chordal Limits of Potentials of the Green Type

The existence of chordal limits is proven for potentials of Green type, where $\alpha \geq 0$, everywhere on the unit circle, except for the exceptional E set, which characteristic is given by the β -capacity, where $0 < \beta < 1$. In particular, a result obtained by L. A. Sekhposyan is specified.

Լիտերատուրա

1. *Ժրբաիան Մ. Մ.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. 1966. М. Наука. 671 с.
2. *Ժրբաիան Մ. Մ.* . В сб.:Современные проблемы теории аналитических функций (Материалы конф. по теории аналитических функций. Ереван, 1965). М. 1966. С 118-137.
3. *Захарян В. С.* — ДАН АрмССР. 1978. Т.66. №4. С. 212-215.
4. *Ժրբաիան Մ. Մ., Զաքարյան Վ. Ս.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Изд. фирма «Физ.-мат. литература». 1993. 224 с.

5. *Берберян С. Л.* – Изв. АН Арм ССР. Математика. 1986. Т.21. №2. С. 187-197.
6. *Джрбабян А. М.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. №2. С. 47-75.
7. *Носиро К.* Предельные множества. М. ИЛ. 1963. 253 с.
8. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 306 с.
9. *Сехпосян Л. А.* Граничные свойства некоторых классов мероморфных функций. Канд. дис.1981. Ереван. 73 с.
10. *Tsuji M.* Littlewoods theorem on subharmonic functions in a unit circle. Comment. Math.Univ. St. Pauli. 1956. V.5. №7. P. 3-16.
11. *Берберян С. Л.* – ДАН АрмССР. 1979. Т. 68. №2. С. 79-87.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

С. О. Абелян

Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/XI 2017)

Ключевые слова: *дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, правильно эллиптическое уравнение.*

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$ – единичный круг, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 u = 0. \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования, а ν, μ – постоянные числа такие, что $\mu\nu \neq 0$, $0 < |\nu| < 1$, $0 < |\mu| < 1$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u \in C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$. Для уравнения (1) рассмотрим задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma = \partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_{\Gamma} = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{\Gamma} = f_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|_{\Gamma} = f_2. \quad (2)$$

Здесь заданные функции f_j принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}(\Gamma)$. В [1] было доказано, что условия (2) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^{2-j} \partial \bar{z}^j} \Big|_{\Gamma} = F_j, \quad j = 0, 1, 2, \\ u(1, 0) = f_0(1, 0), \quad u_r = f_1(1, 0), \quad u_{\theta} = f_2(1, 0). \quad (3)$$

Здесь $F_k \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, однозначно определяемые по функциям f_0, f_1, f_2 .

Рассмотрим задачу (1), (3). Как известно (см. [2, 3]), задача (1), (3) фредгольмова. Целью работы является определение дефектных чисел этой задачи, т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи Дирихле и количество линейно независимых условий на граничные функции, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи Дирихле. Случай двукратных корней для уравнения типа (1) четвертого порядка был рассмотрен в [4].

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $\zeta = \mu\nu$. Тогда задача Дирихле (1), (3) однозначно разрешима, если

$$Q_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-3} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)\zeta^k + \\ + \sum_{k=0}^{n-4} (n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)(n^2+11n+8nk+k^2-k)\zeta^{n-2+k} \neq 0, \quad n=4,5,\dots, \quad (4)$$

Если условия (4) не выполняются при некотором n_0 , то однородная задача (1), (3) имеет нетривиальное решение, которое является полиномом порядка n_0+2 . При этом для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_j . Поэтому дефектные числа задачи (1), (3) равны числу параметров $n \geq 4$, для которых $Q_n(\zeta) = 0$.

Доказательство. В [1] показано, что общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(z, \bar{z}) = \Phi_1(z) + \sum_{k=2}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{k-2} \Phi_k(z + \mu \bar{z}) + \sum_{k=0}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^k \Psi_{k+1}(\bar{z} + \nu z), \quad (5)$$

где Φ_j, Ψ_j – искомые функции. Функция Φ_1 аналитична в D , а Φ_j ($j=2,3$) и Ψ_k ($k=1,2,3$) аналитичны в областях $D_1(\mu) = \{z + \mu \bar{z} | z \in D\}$ и $D_2(\nu) = \{\bar{z} + \nu z | z \in D\}$ соответственно, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ – производная по аргументу комплексного числа ($z = re^{i\theta}$). Подставим функцию (5) в граничные равенства (3).

Используя операторное тождество [1]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (k-m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

получим при $j=0$

$$\Phi_1''(z) + \sum_{k=2}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + 2iI \right)^{k-2} \Phi_k''(z + \mu \bar{z}) + \sum_{k=0}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + 2iI \right)^k \Psi_{k+1}''(\bar{z} + \nu z) \nu^2 = F_0; \quad (6)$$

при $j=1,2$

$$\sum_{k=2}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (2-2j)iI \right)^{k-2} \Phi_k''(z + \mu \bar{z}) \mu^j + \sum_{k=0}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (2-2j)iI \right)^k \Psi_{k+1}''(\bar{z} + \nu z) \nu^{2-j} = F_j. \quad (7)$$

Представим Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ , используя представление, полученное в [2]:

$$\begin{aligned} \Phi_1''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} z^k, \quad \Phi_j''(z + \mu \bar{z}) = \varphi_j(z) + \varphi_j(\mu \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} \mu^k z^{-k}, \quad j=2,3 \\ \Psi_j''(\bar{z} + \nu z) &= \psi_j(\bar{z}) + \psi_j(\nu z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} \nu^k z^k, \quad j=1,2,3. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как подлежащие определению функции φ_j , ψ_j и Φ_1'' аналитичны в круге D , то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk} . Разложим функции F_0, F_1, F_2 на окружности Γ в ряд Фурье

$$F_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj} z^k, \quad j=0,1,2 \quad (9)$$

и для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим разложения (8) и (9) в граничные условия (3).

При $j=0$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} z^k + \sum_{l=2}^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{lk} (ik+2i)^{l-2} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{lk} \mu^k (-ik+2i)^{l-2} z^{-k} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_{lk} (-ik+2i)^{l-1} z^{-k} \nu^2 + \sum_{k=0}^{\infty} B_{lk} (ik+2i)^{l-1} \nu^{2+k} z^k \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{k0} z^k, \end{aligned}$$

а при $j=1,2$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=2}^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{lk} (ik+(2-2j)i)^{l-2} \mu^j z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{lk} (-ik+(2-2j)i)^{l-2} \mu^{j+k} z^{-k} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_{lk} (-ik+(2-2j)i)^{l-1} z^{-k} \nu^{2-j} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{lk} (ik+(2-2j)i)^{l-1} \nu^{2-j+k} z^k \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj} z^k. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{jk} и B_{jk} . При $k \geq 1$ получим систему пяти уравнений относительно неизвестных A_{2k} , A_{3k} , B_{jk} , $j=1,2,3$:

$$\begin{aligned} & A_{2k} \mu^{k+2} + A_{3k} \mu^{k+2} (-ik-2i) + B_{1k} + B_{2k} (-ik-2i) + B_{3k} (-ik-2i)^2 = d_{-k2}, \\ & A_{2k} \mu^{k+1} + A_{3k} \mu^{k+1} (-ik) + \nu B_{1k} + B_{2k} (-ik) \nu + B_{3k} \nu (-ik)^2 = d_{-k1}, \\ & A_{2k} \mu^k + A_{3k} \mu^k (-ik+2i) + \nu^2 B_{1k} + B_{2k} (-ik+2i) \nu^2 + B_{3k} (-ik+2i)^2 \nu^2 = d_{-k0}, \\ & A_{2k} \mu^2 + A_{3k} \mu^2 (ik-2i) + \nu^k B_{1k} + B_{2k} (ik-2i) \nu^k + B_{3k} (ik-2i)^2 \nu^k = d_{k2}, \\ & A_{2k} \mu + A_{3k} \mu ik + \nu^{k+1} B_{1k} + B_{2k} ik \nu^{k+1} + B_{3k} (ik)^2 \nu^{k+1} = d_{k1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим детерминант этой системы

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} \mu & ik\mu & \nu^{k+1} & ik\nu^{k+1} & (ik)^2 \nu^{k+1} \\ \mu^2 & \mu^2 (ik-2i) & \nu^k & (ik-2i)\nu^k & (ik-2i)^2 \nu^k \\ \mu^k & \mu^k (-ik+2i) & \nu^2 & (-ik+2i)\nu^2 & (-ik+2i)^2 \nu^2 \\ \mu^{k+1} & \mu^{k+1} (-ik) & \nu & -ik\nu & (-ik)^2 \nu \\ \mu^{k+2} & \mu^{k+2} (-ik-2i) & 1 & -ik-2i & (-ik-2i)^2 \end{vmatrix}$$

После преобразований получим

$$\Omega_k = 8(\zeta-1)^6 \zeta^3 Q_k(\zeta).$$

Предположим, что выполнены условия (4). В этом случае коэффициенты A_{2k}, A_{3k} и B_{jk} при $k \geq 3$ определены однозначно. Для $k = 0, 1, 2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но не однозначно, после чего из (6) определяем Φ_1'' . Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (1),(3) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более четырёх. Однако из однородных условий (2) следует, что ненулевое решение однородной задачи (1), (3) необходимо делится на $(1-z\bar{z})^3$ (см. [5], т.5.1, с.84), т.е. является многочленом порядка не менее шести. Поэтому задача (1),(3) однозначно разрешима. И, наконец, учитывая, что $\Omega_k \rightarrow -4i\mu^2\nu^3(1-2i) \neq 0$ для $k \rightarrow \infty$, мы видим, что коэффициенты A_{jk} и B_{jk} имеют такую же скорость роста в бесконечности, как d_{jk} , поэтому функции Φ_{jk}'', Ψ_{jk}'' удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутом круге D . Это означает, что решение u задачи (1), (3) принадлежит заданному классу $C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что $Q_n(\zeta) = 0$. В этом случае однородная система (10) будет иметь нетривиальное решение, поэтому функция, построенная по этим коэффициентам, представляет собой нетривиальное решение задачи (1), (3).

Например, если $Q_4(\zeta) = 0$, то $\zeta = \frac{1}{3}(-3 + \sqrt{6})$. В этом случае $c(1-z\bar{z})^3$

будет нетривиальным решением однородной задачи. При этом для того, чтобы неоднородная система (10) имела решение, необходимо, чтобы правая часть удовлетворяла одному условию разрешимости:

$$\begin{aligned} & \frac{6-\sqrt{6}}{\mu^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_0(\theta) e^{-4i\theta} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\theta) \left(\frac{-3\sqrt{6}}{\mu^5} e^{4i\theta} - \frac{3\sqrt{6}-6}{\mu} e^{-4i\theta} \right) d\theta + \\ & + \int_{-\pi}^{\pi} F_2(\theta) \left(3e^{-4i\theta} + \frac{8\sqrt{6}-3}{\mu^4} e^{-4i\theta} \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Национальный политехнический университет Армении

С. О. Абелян

Об эффективном решении задачи Дирихле в единичном круге

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет три различных корня: один простой корень – мнимая единица, один двукратный корень с положительной мнимой частью и один трехкратный корень с отрицательной мнимой частью. Получена новая формула для определения дефектных чисел. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

Ս. Ն. Աբելյան

Դիրիխլեի խնդրի արդյունավետ լուծումը միավոր շրջանում

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում վեցերորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Ենթադրվում է, որ բնութագրիչ հավասարումն ունի երեք տարբեր արմատներ, որոնցից մեկը կեղծ միավոր է, երկրորդը կրկնակի արմատ է դրական կեղծ մասով, իսկ երրորդը՝ եռապատիկ արմատ՝ բացասական կեղծ մասով: Ստացվել է նոր բանաձև՝ դեֆեկտային թվերը որոշելու համար: Համասեռ խնդրի լուծումը և լուծելիության պայմանները որոշվում են արդյունավետ:

S. H. Abelyan

On the Effective Solution of the Dirichlet Problem in the Unit Disk

In the paper the Dirichlet problem in a unit disc for a sixth order properly elliptic equation is considered. It is supposed that the characteristic equation has three different roots. One simple root is an imaginary unit, one double root with a positive imaginary part and one triple root with a negative imaginary part. A new formula for determining defective numbers is obtained. The conditions for the solvability and solution of the homogeneous problem are determined in explicit form.

Լիտերատուրա

1. Babayan A. H. – *Mathematica Montisnigri*. 2015. V. 32. P. 66-80.
2. Tovmasyan N. E. *Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields*. World Scientific Publishing Co.Ltd. Singapore, London. Hong-Kong. 1998.
3. Lions J.-L., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. V. 1. Dunod. Paris. 1968.
4. Бабаян А.О. – *Изв. НАН Армении. Математика*. 2003. Т. 38 №6. С.39-48.
5. Axler S., Bourdon P., Ramay W. *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, Inc, New York, 2001.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

С. М. Саядян, А. А. Чубарян

О свойстве немонотонности некоторых систем выводов классического исчисления высказываний

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 19/I 2018)

Ключевые слова: минимальная тавтология; «слабые» системы выводов; сложностные характеристики выводов; монотонные системы.

1. Введение. В теории сложности выводов важную роль играют минимальные тавтологии, т.е. тавтологии, которые не являются результатом подстановки в более короткие тавтологии. Традиционно считается, что минимальные тавтологии не могут выводиться сложнее результатов подстановок в них, т.е. должна быть некоторая «естественная монотонность» выводов. Однако оказалось, что многие «строгие» пропозициональные системы выводов двузначных и многозначных логик не монотонны ни по шагам, ни по длине выводов [1, 2]. В настоящей работе для некоторых «слабых» систем выводов двузначной логики исследованы соотношения между сложностями выводов минимальных тавтологий и результатов подстановок в них. Показано, что существует последовательность пар минимальных тавтологий φ_n и формул ψ_n , являющихся результатом подстановок в φ_n таких, что: 1) длины φ_n и ψ_n по порядку равны, 2) для каждого n количество шагов выводов ψ_n ограничено константой, длины тех же выводов в двух системах ограничены константой, а в третьей ограничены линейной функцией от длины формул, в то время как 3) и количество шагов, и длины выводов φ_n во всех системах по порядку не менее экспоненты от длины формул.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [3]. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного n -мерного булева куба B^n , пропозициональной формулы, тавтологии. Длина формулы φ определяется как количество всех вхождений в нее пропозициональных переменных. Литералом считается переменная или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности называются **правилами замещения**:

$$\begin{array}{lll} 0 \&\psi = 0, & \psi \& 0 = 0, & 1 \&\psi = \psi, & \psi \& 1 = \psi, \\ 0 \vee \psi = \psi, & \psi \vee 0 = \psi, & 1 \vee \psi = 1, & \psi \vee 1 = 1, \\ 0 \supset \psi = 1, & \psi \supset 0 = \bar{\psi}, & 1 \supset \psi = \psi, & \psi \supset 1 = 1. \\ \bar{0} = 1, & \bar{1} = 0, & \bar{\bar{\psi}} = \psi, & \end{array}$$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью.

Пусть φ – пропозициональная формула, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – множество всех ее переменных, а $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\} (1 \leq m \leq n)$ – некоторое подмножество P .

Определение 2.1. Для некоторого $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in B^m$ конъюнкт $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ -определяющим, если, подставляя в φ вместо каждой переменной p_{ij} значение $\sigma_j (1 \leq j \leq m)$ и последовательно применяя правила замещения, получаем значение формулы φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

Определение 2.2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) $D = \{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ называется φ -определяющей для формулы φ , если каждый конъюнкт из D является φ -1-определяющим и $\varphi = D$.

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

2.1. Описания рассматриваемых систем. В [3] описана следующая система доказательств E . Аксиомы системы E не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. **Элиминационное правило** вывода (э-правило) выводит конъюнкт $K' \cup K''$ из конъюнктов $K' \cup \{p\}$ и $K'' \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p . E -выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдущих по э-правилу.

Очевидно, что ДНФ $D = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ является тавтологией, если, применяя э-правило, можно вывести пустой конъюнкт ($\emptyset$) из аксиом $\{K_1, K_2, \dots, K_l\}$.

Известная пропозициональная система резолюций R направлена на установление тавтологичности заданной формулы путем установления противоречивости некоторой системы дизъюнктов, строящейся по заданной формуле. Г.С. Цейтиным в [4] описан метод построения соответствующей системы дизъюнктов для произвольной формулы φ . Аксиомы системы R не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся дизъюнкты из построенной упомянутым способом системы. **Правило резолюции** (р-правило) выводит дизъюнкт $D' \cup D''$ из дизъюнктов

$D' \cup \{p\}$ и $D'' \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p . Если, применяя правило вывода к дизъюнктам построенной по φ системе, а также ко вновь полученным дизъюнктам, мы в конце концов получим пустой дизъюнкт Λ , то формула φ является тавтологией.

Система обобщенных расщеплений **ОР** введена в [5]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ , конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v , которому приписана некоторая формула φ_v , приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p , входящей в φ_v следующим образом: при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$, где формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p(\alpha = \bar{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение 1(0) и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Естественно, что меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы. Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией $\neg 1$ и одним правилом вывода $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$, обозначена через **ОР**.

2.2. Сложностные характеристики выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: t -сложность, определяемая как количество различных формул в выводе, и l -сложность, определяемая как сумма длин всех различных формул в выводе [2]. Пусть ϕ является некоторой системой выводов, а φ – некоторая тавтология. Через $t^\phi(\varphi)$ ($l^\phi(\varphi)$) обозначим минимально возможное значение t -сложности (l -сложности) всевозможных выводов тавтологии φ в системе ϕ . Если система ϕ зафиксирована, то будем обозначать просто $t(\varphi)$ ($l(\varphi)$).

Определение 2.2.1. Тавтология называется *минимальной*, если она не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии.

Обозначим через $S(\varphi)$ множество всех формул, являющихся результатом подстановки в минимальную тавтологию φ .

Определение 2.2.2. Система выводов называется *t -монотонной* (*l -монотонной*), если для каждой минимальной тавтологии φ и для каждой формулы ψ из $S(\varphi)$ $t^\phi(\varphi) \leq t^\phi(\psi)$ ($l^\phi(\varphi) \leq l^\phi(\psi)$).

2.3. Важные формулы. В дальнейших рассмотрениях важную роль

играют тавтологии $TTM_{n,m} = V_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E^n} \bigwedge_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n p_{ij}^{\sigma_i} \left(n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1 \right)$.

Пусть $A_n = TTM_{n, 2^n - 1}$. Заметим, что длина формулы A_n есть $n2^n(2^n - 1)$, а в [3] и [5] доказано, что в системах **E**, **R** и **OP** $l(A_n) \geq t(A_n) \geq 2^{2^n - 1}$.

3. Основные результаты. В качестве исследуемых здесь последовательностей формул зафиксируем тавтологии: $\varphi_n = p \supset q \vee A_n$ и $\psi_n = p \supset (p \supset p) \vee A_n$. Нетрудно убедиться, что для каждого $n \geq 1$ формула φ_n является минимальной тавтологией и $\psi_n \in S(\varphi_n)$.

Лемма 3.1. Для любого $n \geq 1$ в каждой из систем **E**, **R** и **OP**

$$l(\varphi_n) \geq t(\varphi_n) \geq 2^{2^n - 1}.$$

Доказательство. Учитывая, что каждая оДНФ формул φ_n получается объединением множества $\{\neg p, q\}$ с некоторой оДНФ формул A_n , а переменные p и q не входят в формулу A_n , а значит не входят ни в одну оДНФ формулы A_n , получаем, что количество различных формул в выводе $\emptyset$ из оДНФ формулы φ_n не может быть меньше количества различных формул в выводе $\emptyset$ из оДНФ формулы A_n . Для оценки сложностных характеристик выводов каждой из формул φ_n в системе резолюций допустим, что подформуле A_n приписана переменная γ , подформуле $q \vee A_n$ – переменная α , а самой формуле φ_n – переменная β , тогда система дизъюнктов формулы φ_n должна состоять из системы Σ дизъюнктов формулы A_n и из дизъюнктов $\gamma q \neg \alpha$, $\neg \gamma \alpha$, $\neg q \alpha$, $p \beta$, $\neg \alpha \beta$, $\neg \beta \neg p \alpha$ и $\neg \beta$. Если переменной γ придать значение 0, то нетрудно убедиться, что можно подобрать значения остальных переменных α , β , ϕ и p таким образом, что все семь указанных дизъюнктов примут значение 1, а значит из системы Σ должен быть выведен дизъюнкт γ , после чего, используя дизъюнкты $\neg \gamma \alpha$, $\neg \alpha \beta$ и $\neg \beta$, можно вывести Λ . В [3] показано, что любой вывод Λ из системы дизъюнктов, построенных по методу Цейтина для тавтологии, которой приписана переменная γ , может быть преобразован без увеличения количества шагов и длины таким образом, чтобы правило резолюции с использованием дизъюнкта $\neg \gamma$ было последним. Таким образом, количество различных формул в опровержении формулы φ_n в системе **R** не может быть меньше количества различных формул в опровержении формулы A_n .

Рассмотрим вывод формулы φ_n в системе **OP**. Если начать расщепление с переменной p , то на выходящих узлах получим 1 и $q \vee A_n$, далее, расщепляя последнюю формулу по переменной q , получим на выходящих узлах 1 и A_n . Если сначала расщеплять по переменной q , затем по переменной p , мы получим сначала 1 и $p \supset A_n$, затем 1 и A_n . Если же начать расщепление с переменных формулы A_n , быть может иногда перемежая расщеплениями по p или q , то мы получим не менее $2^{2^n - 1}$ указанных в [5] различных формул F , быть может, «обрамленных» одним из следующих видов: $p \supset q \vee F$, $p \supset F$ или $q \vee F$. Таким образом, количество различных

формул в д.р. формулы φ_n не может быть меньше количества различных формул в д.р. формулы A_n .

Лемма 3.2. а) Для любого $n \geq 1$ в каждой из систем E , R и OP $t(\psi_n)$ ограничено некоторой константой. б) Для любого $n \geq 1$ в каждой из систем E и R $l(\psi_n)$ ограничено некоторой константой, а $l^{OP}(\psi_n) = |\psi_n| + 1$.

Доказательство. Утверждения для системы E очевидны, так как одной из оДНФ формулы ψ_n является $\{p, \neg p\}$. Утверждения для системы OP также очевидны, так как расщепляя по переменной p , мы сразу получим две единицы и в д.р. будут только две различные формулы: сама ψ_n и 1. Утверждения для системы R также нетрудно доказать, так как если подформулам A_n , $(p \supset p)$, $(p \supset p) \vee A_n$ и самой формуле $p \supset (p \supset p) \vee A_n$ приписать соответственно переменные β , α , γ и q , то в соответствующей системе дизъюнктов будут, в частности, $p\alpha$, $\neg p\alpha$, $\neg\gamma q$, $\neg q$ и $\neg\alpha\gamma$. Из первых двух можно вывести α , из двух следующих — $\neg\gamma$, используя которое с последним, можно вывести $\neg\alpha$ и далее Λ .

Теорема. Ни одна из систем E , R и OP не является ни t -монотонной, ни l -монотонной.

Доказательство следует из утверждений лемм 1 и 2 и оценок из [3, 5], указанных непосредственно перед пунктом 3. Действительно, в каждой из систем E , R и OP $l(\varphi_n) \geq t(\varphi_n) = \Omega(2^{2^n})$, а $t(\psi_n) = O(1)$. В каждой из систем E и $l(\psi_n) = O(1)$, а $l^{OP}(\psi_n) = O(n2^{2^n})$.

Ереванский государственный университет
e-mails: sayadyan@gmail.com, achubaryan@ysu.am

С. М. Саядян, А. А. Чубарян

О свойстве немонотонности некоторых систем выводов классического исчисления высказываний

Для некоторых «слабых» пропозициональных систем выводов классической логики доказано, что минимальные тавтологии могут выводиться гораздо сложнее, чем результаты подстановок в них.

Ս. Մ. Սայադյան, Ա. Ա. Չոբարյան

Դասական տրամաբանության ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի ոչ մոնոտոնիկ հատկության մասին

Ապացուցվել է, որ դասական ասույթային հաշվի որոշ «թույլ» համակարգերում մինիմալ նույնաբանությունները կարող են ունենալ էապես ավելի բարդ արտածումներ, քան նրանցից ստացված տեղադրման արդյունքները:

S. M. Sayadyan, A. A. Chubaryan

**On Some no Monotonous Property of Some Propositional
Proof Systems of Classical Logic**

For some “weak” propositional systems of classical logic it is proved that minimal tautologies can be deduced essentially harder, than results of substitutions in them.

Литература

1. *Chubaryan A., Petrosyan G.* Evolutio, Естественные науки. Вып 3, 2016, P.12-14.
2. *Chubaryan A., Khamisyan A., Petrosyan G.* On some systems for two versions of many-valued logics and its properties, Lambert Academic Publishing (LAP), 2017, 80 pages.
3. *Чубарян А.* — Изв. НАН РА. Математика. 2002. Т. 37. N 5. С. 71-84.
4. *Цейтин Г.* — Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 8. Л. Наука. 1968. С. 234-259.
5. *Чубарян Ан., Чубарян Арм.* — НАУ. Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени. Ч. 10. 2(7). 2015. С.11-14.

INFORMATICS

УДК 519.688

G. E. Harutyunyan

An Approach for Scheduling Parallel and Serial Testing of Embedded IP Cores in Nanoscale SoCs

(Submitted by academician S.K. Shoukourian 22/I 2018)

Keywords: *hierarchical test, system-on-chip, test pattern, test scenario, pattern porting.*

1. Introduction. Variety and complexity of used memories and IP cores, shrinking technologies and design complexity increasing in nanoscale systems-on-chips (SoC) make it crucial to have embedded in SoC test and repair solutions kept up with the advances in order to consistently and continuously provide chip quality and yield optimization. The embedded test approaches developed for designs just few years ago are not sufficient for today's designs, which are bigger, faster, hierarchical and much more sensitive to area, timing and power [1, 2]. Similarly, the embedded test solutions developed, for example, for 28-nm technology node will not deliver the same level of test quality, diagnosis accuracy and repair efficiency for 14-nm and below technology nodes, as defects and failure mechanisms change with process technologies shrink. From the other side, nanoscale SoCs are re-using multiple already designed sub-chips which means that multiple test infrastructures might be organized in some test hierarchy built according to suggested by the SoC developer [3, 4].

Figure 1 shows the evolution of the SoC test infrastructure during the last several years. The part (a) of the Figure 1 shows the stage when there was only one BIST (built-in self-test) scheme per SoC, while in Figure 1 (b) there are multiple BIST schemes and, the test configuration for the SoC has only one Server. This means that though multiple BIST schemes are used but SoC does not require a hierarchy of Servers. The part (c) of the Figure 1 shows modern SoCs with many memories and IP cores as well as containing a hierarchy of Servers, where there is a Server at top and there are Sub-Servers at the second level of hierarchy.

Usually, different approaches and standards are used for IP testing and integration into SoC and, at the same time, at the chip level the total number of

test channels is limited such that all core-level test channels cannot be accessed at the same time.

In general, hierarchical test gives designers flexibility to schedule test of individual interface IP cores and other cores for parallel and serial testing to optimize test time and power consumption during test [2, 5]. The flexible test schedule can significantly reduce test time, especially for designs with a large number of high-speed I/Os.

From the other side, there are certain limitations in SoC which should be taken into account when scheduling the test. Common types of SoC limitations are the following:

- Design limitation – e.g., limited number of test access mechanisms to test multiple IP cores;
- Test limitation – e.g., precedence constraint (e.g., test of IP2 should be run only after completing the test run on IP1);
- Resource limitation – e.g., power constraint (limitation on SoC consumed power when testing multiple IP cores in parallel).

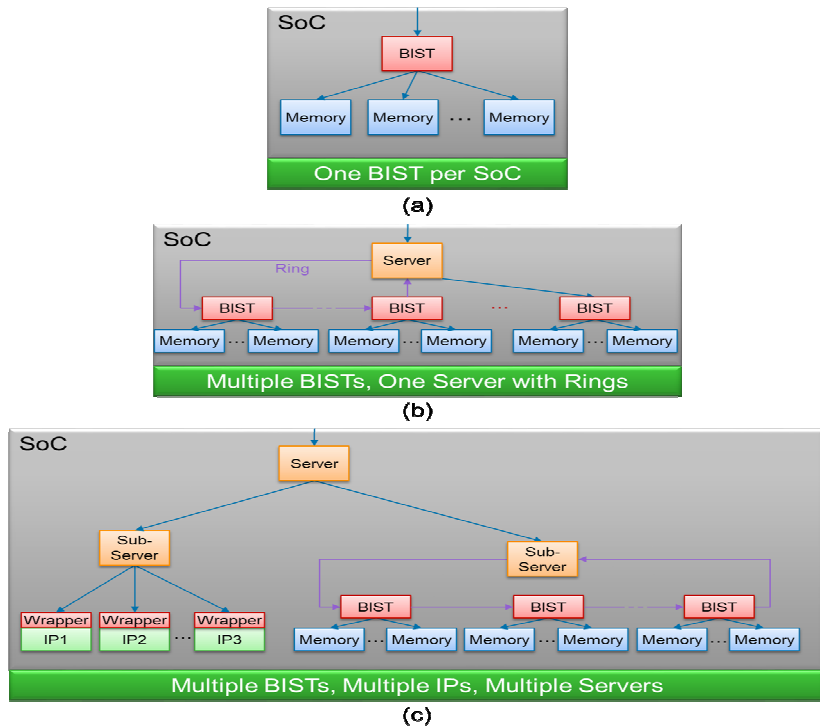


Fig. 1. SoC and its evolution

In this paper, a hierarchical test approach is proposed which takes into account all the above mentioned limitations and allows to do efficient test scheduling.

2. Hierarchical test system. Figure 2 shows a hierarchical test system [2-4] which is used to do scheduling of parallel and serial testing of IPs in SoC. At IP level it is based on IEEE 1500 standard [6] which provides unified access to different types of IP cores. At top level the test system consists of main Server and multiple Sub-Servers placed at the second level of hierarchy. Top level Server is connected to IEEE 1149.1 JTAG interface [7] which is in charge of providing test patterns from the outside world. Usually SoCs are consists of Sub-Chips and the test patterns applied to a Sub-Chip can be reused at top level by porting those test patterns from Sub-Chip level to SoC level.

The considered hierarchical test system has the following main capabilities:

- Unified test accessibility for different IP cores in SoC based on existing test standards (IEEE 1500 [6], IEEE 1149.1 (JTAG) [7], IEEE 1687 (IJTAG) [8]);
- Pattern porting from IP and Sub-Chip level to SoC level which allows to reduce the design and test times;
- Language for describing the structural models of memories and IP cores;
- Capability to create effective test scenarios under the presence of limited resources available in SoC.

The mentioned above language for structural models provides a set of parameters that are necessary to describe the structure of a given IP which is comprised of the following sections:

- Port description – Name of ports and attributes (function, direction, range, etc.);
- Core internal and external registers;
- Test patterns;
- Comments – line (//...) and block (/* ... */) comments are supported.

3. Scheduling of Parallel and Serial Testing of IPs in SoC. Within the concept of the hierarchical test scheduling, in nowadays complex SoCs the test time is one of the important challenges for which usually concurrent test is used to minimize the test time. For thousands of cores in SoC comprised of multiple levels of hierarchy the following problem exists: **determination of an optimal scenario for concurrent test and its implementation in a test infrastructure.**

Figure 3 shows a ring architecture of the hierarchical test system which allows to do efficient test scheduling. Group of blocks connected serially is called ring. Sub-Server can have one or more rings (Ring 1, Ring 2, ..., Ring K), and each ring can contain one or more blocks (e.g., Block 11, Block 12, ..., Block 1N₁), where a block can be an IP core or group of IPs (connected with hierarchical connections) or it can be another Sub-Server.

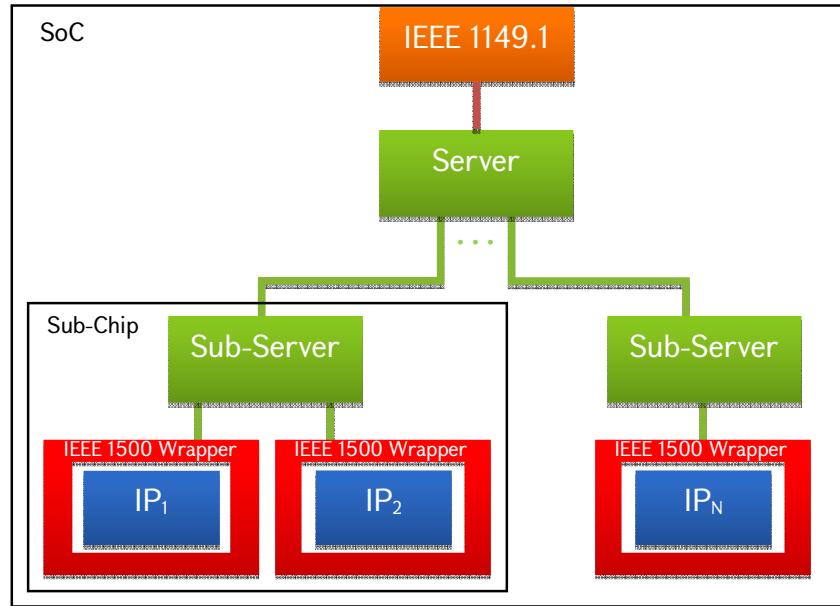


Fig. 2. Hierarchical Test System

When several IP cores are being tested in parallel, usually there is a limitation that the total consumed power should not exceed the given number (e.g., MAX_POWER) [9]. Figure 4 shows two scenarios for testing a given set of IP cores. Figure 4 (a) shows a non-efficient (poor) scheduling while in Figure 4 (b) an efficient scheduling scenario is shown. In both scenarios IP cores are divided to be tested in 3 sequential sessions where in each session the IP blocks

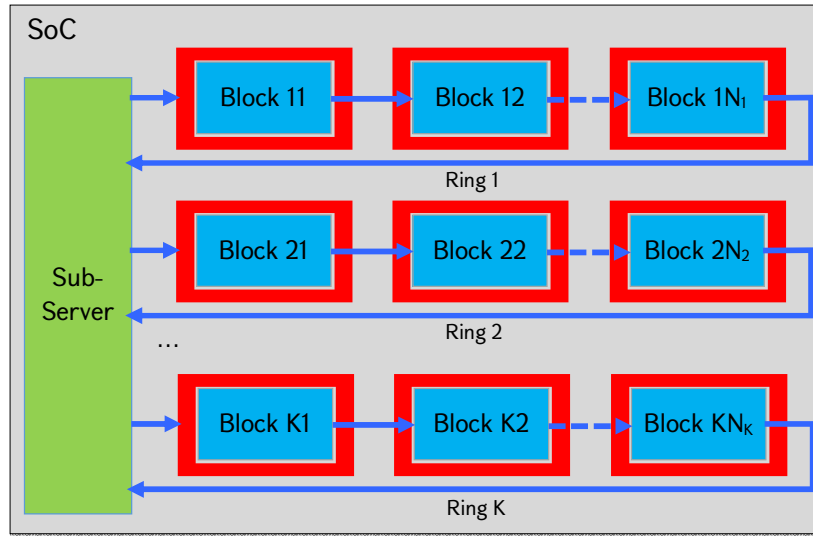


Fig. 3. Ring architecture

are being tested in parallel. In the figure, the «Idle time» shows how well or bad the available resources are used: better scheduling brings smaller «Idle time» which means the available resources are being used more efficiently and thus the overall test time is shorter.

Within the proposed architecture in Figure 3, the overall time for testing all the blocks is calculated in the following way: $T = T_{\text{ring_access}} + T_{\text{ring_load}} + T_{\text{block_test}}$ where:

- $T_{\text{ring_access}}$ – time needed to access rings;
- $T_{\text{ring_load}}$ – time needed to load information into rings;
- $T_{\text{block_test}}$ – time needed to test all the blocks.

Let assume there are K test sessions determined by one of well-known scheduling algorithms to get effective test concurrency for given design, test and resource limitations, e.g. Greedy/Rectangle Packing algorithm [10]. It is

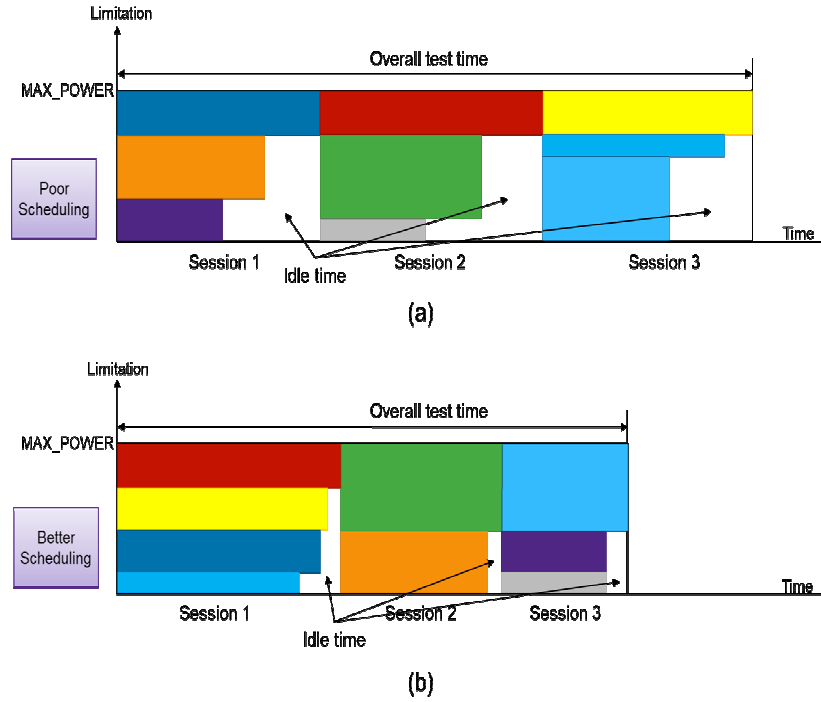


Fig. 4. Optimal scheduling scenario

proved that the following proposition is true: **it is necessary for the proposed test architecture to have K independent rings (one ring per session) to reach optimal test time.**

Proof. All other cases will lead to having non-optimal test time. There are the following two cases:

- If blocks of the same session are distributed in different rings, then for testing those blocks in parallel there is a need to access more than one ring, which increases the overall ring access time ($T_{\text{ring_access}}$).

- If a ring contains blocks from different sessions, then for testing blocks of one session there is a need to bypass the blocks that are in that ring but are out of that session, which will increase the overall ring load time (T_{ring_load}).

T_{block_test} depends on the scheduling algorithm and is independent from the test architecture, thus it is not impacted by how the blocks are distributed in the rings.

Experiments showed the same results, i.e., optimal test time is obtained when the blocks of the same session belong to the same ring and there are no other blocks in the ring.

4. Conclusions. In this paper, an approach for parallel and serial testing of embedded IP cores is proposed allowing:

- to take into account SoC design, test and resource limitations during scheduling;
- to provide capability for creation of optimal test scenarios under the presence of limited resources available in SoC.

Yerevan State University
e-mail: gurgun.harut@gmail.com

G. E. Harutyunyan

An Approach for Scheduling Parallel and Serial Testing of Embedded IP Cores in Nanoscale SoCs

Modern nanoscale chips are increasingly growing and involve more memories and other design blocks. As a result, the test process of such chips becomes essentially difficult. In this paper, an efficient approach is proposed which provides capability to create optimal test scenarios under the presence of limited resources available in SoC.

Գ. Է. Հարությունյան

Պլանավորման մոտեցում նանոչափական բյուրեղներում ներկառուցված նախագծման բլոկների զուգահեռ և հաջորդական թեստավորման համար

Արդի նանոչափական բյուրեղները (չիպերը) աստիճանաբար մեծանում են՝ ընդգրկելով ավելի շատ հիշող սարքեր և այլ նախագծման բլոկներ: Արդյունքում էապես դժվարանում է այդ բյուրեղների թեստավորման գործընթացը: Այս աշխատանքում առաջարկված է մի արդյունավետ մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս ստեղծելու օպտիմալ թեստային սցենարներ՝ բյուրեղում սահմանափակ ռեսուրսների առկայության դեպքում:

Г. Э. Арутюнян

**Подход к планированию параллельного и последовательного
тестирования блоков проектирования в наномерных
системах на кристалле**

С постоянным увеличением размеров и сложности наномерных систем на кристалле усложняется процесс их тестирования. Предлагается эффективный подход к планированию параллельного и последовательного тестирования блоков проектирования, который предоставляет возможность создания оптимальных тестовых сценариев в условиях жестких ограничений на используемые ресурсы.

References

1. *Han D., Lee Y., Kang S.* - ETRI Journal, 2014. V. 36, N 2. P. 293-300.
2. *Zorian Y., Shoukourian S.* - International Conference on Computer Science and Information Technologies. 2013. P. 1-3.
3. *Kogan T., Abotbol Y., Boschi G., Harutyunyan G., et al.* - IEEE International Test Conference. 2017. Paper 14.2. P. 1-6.
4. *Eychenne Ch., Harutyunyan G., Zorian Y.* - IEEE International Workshop on Automotive Reliability & Test. 2017. Paper S01-01. P. 1-4.
5. *Keller B., Chakravadhanula K., Foutz B., Chickermane V., et al.* - IEEE International Test Conference. 2014. P. 1-10.
6. *DaSilva F., Zorian Y., Whetsel L., Arabi K., Kapur R.* - IEEE International Test Conference. 2003. P. 988-997.
7. IEEE Std. 1149.1, IEEE Standard for Test Access Port and Boundary-Scan Architecture. 2001.
8. 1687-2014 - IEEE Standard for Access and Control of Instrumentation Embedded within a Semiconductor Device.
9. *Martirosyan L., Harutyunyan G., Shoukourian S., Zorian Y.* - IEEE East-West Design and Test Symposium. 2015. P. 27-30.
10. *Iyengary V., Chakrabarty K., Marinissen E. J.* - IEEE VLSI Test Symposium. 2002. P. 253-258.

тальных размеров. Для решения подобных задач наибольшее распространение получили два следующих подхода.

В первом подходе предлагаются эвристические гипотезы относительно распределения искомых полей вдоль малого размера, и на основании этих гипотез снижается размерность уравнений задачи. Примером подобного подхода могут служить теория изгиба пластин Кирхгоффа, уточненная теория изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [14], теория пограничного слоя в гидродинамике [15].

Второй подход заключается в нахождении решений задачи для произвольных размеров и последующем упрощении этих решений путем так называемого длинноволнового приближения, когда длина упругой волны принимается намного большей, чем длина малого размера, в данном случае больше, чем толщина слоя. Применимость и сравнение указанных подходов обсуждаются в [16, 17].

В настоящей работе используется второй подход: уравнения и граничные условия теории (вязко-)упругости записываются в трехмерной формулировке. Их общие решения приводят к характеристическим уравнениям, определяющим существование и характер распространения волн. Полученные уравнения упрощаются для длинноволнового приближения, и на основе исследования упрощенных уравнений становится возможным судить о качественном поведении волн в рассмотренной структуре.

1. Постановка задачи. Рассматриваются чисто сдвиговые упругие волны в системе слой-полупространство. Полупространство из упругого материала в прямоугольной системе координат (x, y, z) занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, а слой из вязкоупругого материала – область $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y < 0$, $-\infty < z < \infty$. Величины, относящиеся к слою, будут отмечаться индексом 1, соответствующие величины для полупространства будут без индексов.

Уравнение чисто сдвиговых волн в слое имеет вид [18]:

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где связь напряжение-деформации для вязкоупругого материала принимается согласно модели Фойгта [19, 20]:

$$\sigma_{13}^{(1)} = \left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Соответствующее уравнение и материальные связи для полупространства следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{13} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = G \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Предполагается, что внешняя граница слоя свободна:

$$\sigma_{23}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \quad (1.5)$$

На плоскости контакта слоя и полупространства принимается непрерывность перемещения и напряжения

$$w_1 = w, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}, \quad \text{при } y = 0. \quad (1.6)$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.5), (1.6) и условию затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w = 0. \quad (1.7)$$

2. Решение краевой задачи. Принимается, что слой достаточно тонкий, например, по сравнению с предполагаемой в дальнейшем длиной волны. Вначале уравнение (1.1) с учетом (1.2) записывается в виде

$$\left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Затем для уравнения (2.1) принимается, что $w_1 = w_1(x, t)$, и после этого уравнение (2.1) интегрируется по y в пределах от $-h$ до 0 . В результате с учетом граничных условий (1.5) и (1.6) получается

$$h \left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial w}{\partial y} = \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad \text{при } y = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, задача решения уравнения (2.1) для слоя приводится к граничному условию для уравнения (1.3).

Решение волнового уравнения (1.3) с учетом (1.4) представляется в виде

$$w = A e^{kpy} \exp i(\omega t - kx), \quad (2.9)$$

где

$$p^2 - (1 - \eta^2) = 0 \quad \eta = \frac{\omega}{kC_t} \quad C_t^2 = \frac{G}{\rho}. \quad (2.10)$$

Для того чтобы решение (2.9) удовлетворяло условию затухания (1.7), необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{Re} p < 0. \quad (2.11)$$

В случае волн Лява при отсутствии вязкости ($\mu_1 = 0$) получается $\eta^2 < 1$ и $p = -\sqrt{1 - \eta^2}$, т.е. для p получается действительное значение.

Если принять следующие комплексные выражения:

$$\omega = \alpha_1 + i\beta_1, \quad p = r + iq, \quad (2.12)$$

то условию затухания будет удовлетворять корень уравнения (2.10)

$$p_1 = -\Gamma + i\alpha\beta / \Gamma. \quad (2.13)$$

В (2.13) приняты новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{kC_t}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{kC_t},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

При этом решение (2.9) при $p = p_1$ из (2.13) будет удовлетворять условию затухания, если

$$0 < \alpha^2 < 1 + \beta^2. \quad (2.15)$$

3. Дисперсионное уравнение и численные результаты. Подстановка (2.9), при значении корня $p = p_1$ из (2.13), в граничное условие (2.2) приводит к дисперсионному уравнению, которое после разделения на действительную и мнимую части преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно искомых безразмерных параметров α, β

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon kh \beta + \gamma (kh)^{-1} \Gamma - \theta (\alpha^2 - \beta^2) &= 0, \\ \varepsilon kh - \gamma (kh \Gamma)^{-1} \beta - 2\theta \beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\mu_1 C_t}{h G_1}, \gamma = \frac{G}{G_1}, \theta = \frac{C_t^2}{G_1^2}, G_1^2 = \frac{G_1}{\rho_1}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) при неучете вязкости ($\varepsilon = 0$) следует $\beta = 0$, и уравнение для α^2 будет [15]

$$1 + \gamma (kh)^{-1} \sqrt{1 - \alpha^2} - \theta \alpha^2 = 0. \quad (3.3)$$

Согласно (3.3) решение, удовлетворяющее условию затухания (2.15) при $\beta = 0$, существует, если $\theta > 1$.

При прямой подстановке решения (2.9) в граничные условия (2.2) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\gamma \sqrt{1 - \eta^2} - kh (\theta \eta^2 - 1) + i \phi kh \gamma \eta = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\phi = \frac{\mu_1 k}{\rho C_t}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\sqrt{1 - \eta} = \frac{1}{\gamma \sqrt{1 + \eta}} [kh (\theta \eta^2 - 1) - i \phi kh \gamma \eta], \quad (3.6)$$

что удобно для нахождения корня уравнения методом последовательных приближений:

$$\eta_n = 1 - \frac{1}{\gamma (1 + \eta_{n-1})} [kh (\theta \eta_{n-1}^2 - 1) - i \phi kh \gamma \eta_{n-1}]. \quad (3.6)$$

В частности принимая $kh = 0.1, \theta = 2, \phi = 0.1$, при $\gamma = 1$ получается $\eta_1 \approx 0.98 + 0.002i$, а при $\gamma = 1.5$ — $\eta_1 \approx 0.91 + 0.001i$.

Численное решение уравнения (3.4) в частном случае значений параметров $kh = 0.1, \theta = 2, \phi = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5$, $\gamma = 1$ и 1.5 показывает, что наличие вязкости приводит к незначительному усилению затухания по глубине. Результаты расчетов приведены в таблице.

ϕ	0.01	0.05	0.1	0.5
γ				
1	0.99518+0.00009i	0.99519+0.00047i	0.99522+0.00094i	0.99628+0.00475i
1.5	0.99786-0.0002i	0.99806-0.00098i	0.9983-0.00196i	1.0001-0.00987i

Заклучение. В настоящей работе исследовано влияние вязкости материала покрытия, а также других параметров задачи на существование и характер распространения поверхностных сдвиговых волн в полупространстве. Полученно дисперсионное уравнение задачи. Условие существования поверхностной волны установлено в виде неравенства относительно параметров задачи. В случае длинноволнового приближения показано, что вязкость материала покрытия приводит к усилению затухания амплитуды поверхностной волны по глубине полупространства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и БРФФИ (РБ) в рамках совместных научных программ «Հ Բ 16-47».

¹Институт механики НАН РА

²Ереванский государственный университет
e-mail:vas@ysu.am

В. М. Белубекян, С.В. Саркисян

Задача Лява для полупространства с вязкоупругим покрытием

Рассматриваются условия существования и характер распространения вязкоупругих сдвиговых поверхностных волн в упругом полупространстве с вязкоупругим покрытием. Исследуется влияние параметров задачи, в том числе вязкости покрытия, на распространение поверхностной волны.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Լյավի խնդիրը առաձգամածուցիկ ծածկույթով կիսատարածության համար

Դիտարկվում են առաձգամածուցիկ սահքային մակերևութային ալիքների տարածման գոյության պայմանները և բնույթը առաձգամածուցիկ ծածկույթով առաձգական կիսատարածությունում: Հետազոտվել է խնդրի պարամետրերի, ներառյալ ծածկույթի մածուցիկության, ազդեցությունը մակերևութային ալիքների տարածման վրա:

V. M. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Love Problem for a Half-Space with a Viscoelastic Coating

The existence conditions and the nature of propagation of viscoelastic shear surface waves are considered in an elastic half-space with a viscoelastic coating. The influence of the parameters of the problem, including the viscosity of the coating, on the propagation of the surface wave is investigated.

Литература

1. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М. Наука, Физматлит. 1991. 416 с.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 376 с.

3. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* – ДНАН Армении. 2014. Т. 114. №2. С. 108-115.
4. *Белубекян М. В., Белубекян В. М.* – Уч. записки ЕГУ. Сер. физика и математика. 2013. Вып. 3. С. 45–48.
5. *Белубекян М. В., Гаспарян А. Е.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 6. С. 27-35.
6. *Белубекян М. В., Геворкян А. Е.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. № 18. С. 55-57.
7. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.* – Успехи физ. наук. 1989. Т. 157. №1. С. 85–127
8. *Даноян З. Н., Атоян Л. А., Саакян С. Л., Даноян Н. З.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. №4. С. 21-28.
9. *Даноян З. Н., Казарян К. Б., Атоян Л. А., Даноян Н. З.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. №4. С. 29-37.
10. *Gasparyan D. K, Ghazaryan K. B.* – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 2015.V. 68. №1. P. 57–65.
11. *Sarkisyan S. V., Jilavyan S. H., Khurshudyan As. Zh.* – Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. №3, July. (Russian Original. 2015. V. 51 № 3, May-June). P. 277-284.
12. *Bernard C., Destrade M., Maugin G.*– European J. of Mechanics. A/Solids. 2006. V. 25. P. 695-706.
13. *Li Peng, Feng Jin.* – Smart Mater. Struct. 2012. V. 21. 045009 (9pp).
14. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин:прочность, устойчивость и колебания. М. Наука. 1987. 360 с
15. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1962. 479 с.
16. *Белубекян М. В.* В сб.: Актуальные проблемы неоднородной механики. Изд-во ЕГУ. 1991. С. 66-71.
17. *Белубекян М. В.* – Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т. 44. №3 С. 7-10.
18. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 256 с.
19. *Ватулян А. О., Юров В.О.* – Изв. РАН. МТТ. 2016. №5. С. 85-93.
20. *Можаровский В. В., Старжинский В. Е.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи. Минск. Наука и техника. 1988. 270 с.

резка нижнего ее берега, вдавливается тонкое абсолютно жесткое включение в форме сильно сплюснутого полуэллипса, была рассмотрена в [10]. При этом на верхнем берегу трещины заданы внешние напряжения, остальные отрезки нижнего берега вне включения также нагружены распределенными силами, а пластина на бесконечности в вертикальном направлении, перпендикулярном линии трещины, растягивается равномерно распределенными силами. В контактной зоне учитываются силы сцепления.

Решение этой задачи в [10] сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ), которое в свою очередь сведено к решению двумерной метрической краевой задаче Римана–Гильберта. Построено точное решение последней и, следовательно, точное решение определяющего СИУ, вычислены КИН в концевых точках трещины и другие характеристики задачи. Одновременно в [10] отдельно и предельным переходом получено также точное решение поставленной задачи при полном контакте включения с нижним берегом трещины. Показано, что при приближении концевых точек включения к концевым точкам трещины КИН бесконечно возрастают, вследствие чего трещина распространится раньше, чем концевые точки включения дойдут до концевых точек трещины.

Однако для сравнительного анализа соответствующих характеристик рассматриваемой задачи в случаях неполного и полного контакта необходимо в явном виде определить их в случае полного контакта. С этой целью в настоящей статье в несколько более общей постановке вновь рассматривается упомянутая выше смешанная задача из [8] в случае полного контакта. Простым способом, несколько отличным от примененных в [8] и [10] методов, построено замкнутое решение определяющего СИУ задачи и определены характеристики задачи: комплексная комбинация контактных напряжений, плотность дислокаций на берегах трещины, раскрытие трещины, напряжения вне трещины на линии ее расположения.

1. Пусть упругая бесконечная пластина модуля упругости E , коэффициента Пуассона ν и высоты h , отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy , на горизонтальной оси Ox вдоль отрезка $[-a, a]$ содержит трещину. Пусть далее на верхнем (+) берегу трещины действуют нормальные силы интенсивности $p_+(x)$ ($p_+(-x) = p_+(x)$), касательные силы отсутствуют, а нижний (-) берег по его центральной части $[-b, b]$ ($b < a$) под действием центрально вертикальной силы P вдавлируется абсолютно жесткое тонкое включение, контактирующая поверхность которого описывается уравнением $y = f(x)$, причем $f(x) > 0$, $f(-x) = f(x)$ и $\max f(x) \ll b$ ($-b \leq x \leq b$). Это может быть, в частности, центральная часть сплюснутого в вертикальном направлении полуэллипса

$$y = f(x) = d - \frac{d}{c} \sqrt{c^2 - x^2} \quad (d \ll c; -b \leq x \leq b; b < c < a)$$

или полоска постоянной высоты δ , т.е. $f(x) = \delta$ ($\delta \ll b; -b \leq x \leq b$). Кроме того будем считать, что пластина на бесконечности в вертикальном на-

правлении, перпендикулярном к трещине, растягивается равномерно распределенными силами интенсивности p .

В предположении, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии и включение по отрезку $[-b, b]$ нижнего берега трещины сцеплено с пластиной, т.е. в контактной зоне $-b \leq x \leq b$ действуют силы сцепления, требуется определить касательные и нормальные контактные напряжения, соответственно $\tau_-(x)$ и $p_-(x)$ ($-b \leq x \leq b$), плотность дислокаций на берегах трещины, раскрытие трещины, разрушающие касательные и нормальные напряжения $\tau(x)$ и $\sigma(x)$, соответственно, вне трещины на ее линии расположения, т.е. при $|x| > a$ и $y = 0$ и КИН. Отметим, что неизвестные функции $\tau_-(x)$ и $p_-(x)$ должны удовлетворить условию сцепления $|\tau_-(x)/p_-(x)| < \rho$ ($-b < x < b$), где ρ – коэффициент сухого трения между контактируемыми телами.

Укажем схему вывода основных уравнений поставленной задачи. С этой целью бесконечную пластину по горизонтальной оси разрежем на верхнюю (+) и нижнюю (-) упругие полуплоскости и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma_y|_{y=\pm 0} &= -\Sigma_{\pm}(x) = \begin{cases} -p_{\pm}(x) - p & (|x| < a); \\ -\sigma(x) & (|x| > a); \end{cases} \\ \tau_{xy}|_{y=\pm 0} &= -T_{\pm}(x) = \begin{cases} -\tau_{\pm}(x) & (|x| < a); \\ -\tau(x) & (|x| > a); \end{cases}\end{aligned}\quad (1.1)$$

где σ_y и τ_{xy} – соответственно нормальные и касательные напряжения в пластине, отнесенные к единице ее высоты h , $\tau_+(x) \equiv 0$ при $|x| < a$, а $\tau_-(x) = p_-(x) = 0$ при $b < |x| < a$. Далее исходя из комплексных потенциалов в случае сосредоточенных сил на границе упругой полуплоскости ([8], с. 343) известным способом для производных комплексных комбинаций горизонтальных ($u_{\pm}(x)$) и вертикальных ($v_{\pm}(x)$) перемещений граничных точек верхней (+) и нижней (-) упругих полуплоскостей будем иметь

$$\begin{aligned}w_{\pm}(x) &= u'_{\pm}(x) + i v'_{\pm}(x) = \pm \vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{\pm}(s) ds}{s - x} + 2i \vartheta_2 \Omega_{\pm}(x) - Q \quad (-\infty < x < \infty) \\ \vartheta_1 &= 2/\pi E, \quad \vartheta_2 = (1 - \nu)/2E, \quad Q = \nu p/E, \quad \Omega_{\pm}(x) = T_{\pm}(x) + i \Sigma_{\pm}(x).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Теперь введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{1}{2}[w_+(x) + w_-(x)]; & \Phi(x) &= \frac{1}{2}[w_+(x) - w_-(x)]; \\ \Psi(x) &= u_+(x) - u_-(x) + i[v_+(x) - v_-(x)]; \\ \Omega(x) &= \frac{1}{2}[\Omega_+(x) + \Omega_-(x)]; & X(x) &= \frac{1}{2}[\Omega_+(x) - \Omega_-(x)];\end{aligned}\quad (-\infty < x < \infty)$$

и безразмерные величины

$$\begin{aligned}
\xi &= x/a, \quad \eta = s/a; \quad \omega(\xi) = X_-(a\xi)/E = \tau(\xi) + ip(\xi); \\
(X_-(x) &= \tau_-(x) + ip_-(x) \quad (-b < x < b)); \\
\tau(\xi) &= \tau_-(a\xi)/E; \quad p(\xi) = p_-(a\xi)/E; \quad p_+^0(\xi) = p_+(a\xi)/E; \quad p_0 = p/E; \\
P_0 &= P/aE; \quad P_0^+ = P^+/aE \quad \left(P^+ = \int_{-a}^a p_+(x) dx \right); \quad k = b/a. \\
\Psi_0(\xi) &= \{ [u_+(a\xi) - u_-(a\xi)] + i[v_+(a\xi) - v_-(a\xi)] \} / a.
\end{aligned}$$

Тогда исходя из (1.1)-(1.2) при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x после несложных выкладок придем к следующему определяющему СИУ поставленной задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \left(1 + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \frac{\omega(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - 2iv_0 \omega(\xi) &= g(\xi) \quad (-k < \xi < k) \\
g(\xi) &= \frac{\nu_0 (P_0 - P_0^+) + 2i\pi p_0 \xi}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} - p_0 - if'(a\xi) + \frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\eta + \xi) p_+^0(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{1-\eta^2} + \sqrt{1-\xi^2})} \\
(\nu_0 &= (1-\nu)/2).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Решение СИУ должно удовлетворять условию равновесия включения в безразмерной форме

$$\int_{-k}^k \omega(\xi) d\xi = iP_0. \tag{1.4}$$

Случай СИУ (1.3)-(1.4) подробно рассмотрен в [10]. Здесь будем считать $k=1$, и характеристики задачи выразим через решение СИУ (1.3)-(1.4) при $k=1$. Тогда для плотности дислокаций на берега трещины будем иметь

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\xi) &= \frac{2}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} [\omega(\eta) + ip_+^0(\eta)] d\eta}{\eta - \xi} - 2iv_0 \omega(\xi) - 2\nu_0 p_+^0(\xi) - \\
&- \frac{2\nu_0 (P_0 - P_0^+) + 4i\pi p_0 \xi}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \quad (-1 < \xi < 1); \quad \varphi_0(\xi) = \varphi(a\xi) = \varphi(x) = \Phi(x) \quad (-a < x < a);
\end{aligned}$$

для безразмерного раскрытия –

$$\begin{aligned}
\Psi_0(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} [\omega(\eta) + ip_+^0(\eta)] d\eta - \\
&- \nu_0 \int_{-1}^1 \text{sign}(\xi - \eta) [p_+^0(\eta) + i\omega(\eta)] d\eta - \frac{2\nu_0}{\pi} + \\
&+ 4ip_0 \sqrt{1-\xi^2} \quad (\Psi_0(\xi) = \Psi(a\xi)/a; \quad -1 \leq \xi \leq 1);
\end{aligned}$$

а для безразмерных напряжений вне трещины –

$$\begin{aligned} \tau_0(\xi) + i\sigma_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \frac{\text{sign}\xi}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} [\omega(\eta) + ip_+^0(\eta)] d\eta}{\eta - \xi} - \frac{\nu_0(P_0 - P_0^+)}{2\pi} \text{sign}\xi - \right. \\ \left. - \frac{ip_0}{|\xi| + \sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{\nu_0}{2\pi} \sqrt{1-\xi^2} \int_{-1}^1 \frac{p_+^0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \right\}; \quad (|\xi| > 1; \quad \tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/E; \quad \sigma_0(\xi) = \sigma(a\xi)/E). \end{aligned}$$

2. Перейдем к решению СИУ (1.3)-(1.4) при $k=1$ и с этой целью введем в рассмотрение кусочно-голоморфные функции комплексной переменной $z = \xi + i\eta$:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} \omega(\eta) d\eta}{\eta - z},$$

аналитические в комплексной плоскости z , разрезанной по отрезку вещественной оси $[-1, 1]$. По формулам Сохоцкого–Племеля для граничных значений этих функций имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(\xi) + \Phi_1^-(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega(\eta) d\eta}{\eta - \xi}; \quad \Phi_2^+(\xi) + \Phi_2^-(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} \omega(\eta) d\eta}{\eta - \xi}; \quad (2.1) \\ \Phi_1^+(\xi) - \Phi_1^-(\xi) = \omega(\xi); \quad \Phi_2^+(\xi) - \Phi_2^-(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \omega(\xi) \quad (-1 < \xi < 1). \end{aligned}$$

При помощи этих соотношений решение СИУ (1.3) при $k=1$ сводится к решению следующей двумерной матричной краевой задаче Римана–Гильберта:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(\xi) = \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} \Phi_1^-(\xi) + \frac{\Phi_2^-(\xi)}{(\nu_0 - 1)\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{ig(\xi)}{2(\nu_0 - 1)} & (-1 < \xi < 1) \\ \Phi_2^+(\xi) = \frac{1}{\nu_0 - 1} \sqrt{1-\xi^2} \Phi_1^-(\xi) + \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} \Phi_2^-(\xi) + \frac{i\sqrt{1-\xi^2} g(\xi)}{2(\nu_0 - 1)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Теперь обе части второго уравнения (2.2) разделим на $\sqrt{1-\xi^2}$ и введем в рассмотрение функцию комплексного переменного $\Omega_1(z) = \Phi_2(z)/\sqrt{z^2 - 1}$ ($z = \xi + i\eta$).

В комплексной плоскости z , разрезанной по отрезку вещественной оси $[-1, 1]$, выберем ту однозначную ветвь функции $F(z) = \sqrt{z^2 - 1}$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет поведение $F(z) = z + O(1/z)$ ($z \rightarrow \infty$). На верхнем (+) и нижнем (−) берегах этого разреза для граничных значений $F^\pm(\xi)$ имеем $F^\pm(\xi) = \pm i\sqrt{1-\xi^2}$ ($-1 < \xi < 1$).

В результате краевая задача (2.2) преобразуется в следующую краевую задачу с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(\xi) = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\Phi_1^-(\xi) + \frac{2i}{1+\nu}\Omega_1^-(\xi) - \frac{ig(\xi)}{1+\nu} \\ \Omega_1^+(\xi) = -\frac{2i}{1+\nu}\Phi_1^-(\xi) + \frac{1-\nu}{1+\nu}\Omega_1^-(\xi) - \frac{g(\xi)}{1+\nu} \end{cases} \quad (-1 < \xi < 1).$$

После перехода к постоянной Мусхелишвили

$$\chi = (3-\nu)/(1+\nu) \quad (\nu = (3-\chi)/(1+\chi))$$

эта задача примет вид

$$\begin{cases} \Phi_1^+(\xi) = \frac{1-\chi}{2}\Phi_1^-(\xi) + \frac{1+\chi}{2}i\Omega_1^-(\xi) - \frac{1+\chi}{4}ig(\xi) \\ \Omega_1^+(\xi) = \frac{1+\chi}{2}i\Phi_1^-(\xi) - \frac{1-\chi}{2}\Omega_1^-(\xi) - \frac{1+\chi}{4}g(\xi) \end{cases} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (2.3)$$

Далее при помощи линейного преобразования краевую задачу (2.3) преобразуем в краевую задачу с диагональными матричными коэффициентами. С этой целью найдем собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} (1-\chi)/2 & (1+\chi)i/2 \\ (1+\chi)i/2 & -(1-\chi)/2 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что характеристический многочлен этой матрицы имеет корни $\lambda_1 = i\sqrt{\chi}$ и $\lambda_2 = -i\sqrt{\chi}$. Следовательно, элементы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

искомого линейного преобразования будут определяться из матричного равенства

$$BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\chi} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\chi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$b_{11} = b_{22} = -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi}, \quad b_{12} = -b_{21} = (1+\chi)/2\sqrt{\chi}$$

и, следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi} & (1+\chi)/2\sqrt{\chi} \\ -(1+\chi)/2\sqrt{\chi} & -(1-\chi)i/2\sqrt{\chi} \end{pmatrix}.$$

Теперь (2.3) запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(\xi) \\ \Omega_1^+(\xi) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Phi_1^-(\xi) \\ \Omega_1^-(\xi) \end{pmatrix} - \frac{1+\chi}{4} \begin{pmatrix} ig(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix}$$

и к обеим частям этого равенства слева применим матрицу B . Будем иметь

$$\begin{aligned} -\frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}}i\Phi_1^+(\xi) + \frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Omega_1^+(\xi) &= i\sqrt{\chi}\Phi_1^-(\xi) - \frac{1-\chi^2}{8\sqrt{\chi}}g(\xi) - \frac{(1+\chi)^2}{8\sqrt{\chi}}g(\xi); \\ -\frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}}\Phi_1^+(\xi) - \frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}}i\Omega_1^+(\xi) &= -i\sqrt{\chi}\Omega_1^-(\xi) + \frac{(1+\chi)^2}{8\sqrt{\chi}}ig(\xi) + \frac{1-\chi^2}{8\sqrt{\chi}}ig(\xi). \end{aligned} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (2.4)$$

Исходя из (2.4) введем голоморфные в верхней полуплоскости $\Pi_+ = \{-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \infty\}$ функции

$$\Psi_1^+(z) = -\frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}} i\Phi_1^+(z) + \frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}} \Omega_1^+(z); \quad X_1^+(z) = -\frac{1+\chi}{2\sqrt{\chi}} \Phi_1^+(z) - \frac{1-\chi}{2\sqrt{\chi}} i\Omega_1^+(z) \quad (2.5)$$

и голоморфные в нижней полуплоскости $\Pi_- = \{-\infty < \xi < \infty, -\infty < \eta < 0\}$ функции

$$\Psi_1^-(z) = \Phi_1^-(z), \quad X_1^-(z) = \Omega_1^-(z). \quad (2.6)$$

Тогда из (2.4) получим следующие простейшие раздельные одинарные краевые задачи Римана–Гильберта:

$$\Psi_1^+(\xi) = i\sqrt{\chi}\Psi_1^-(\xi) + g_1(\xi) \quad (-1 < \xi < 1); \quad (2.7)$$

$$X_1^+(\xi) = -i\sqrt{\chi}X_1^-(\xi) + h_1(\xi) \quad (-1 < \xi < 1); \quad g_1(\xi) = ih_1(\xi) = -\frac{1+\chi}{4\sqrt{\chi}}g(\xi) \quad (2.8)$$

Приступив к решению задачи (2.7), находим, что согласно известным результатам [8] (с. 392) каноническое решение соответствующей однородной краевой задачи имеет вид

$$X(z) = (z-1)^{-3/4-i\alpha} (z+1)^{-1/4+i\alpha},$$

откуда

$$X^\pm(\xi) = e^{\mp 3\pi i/4} e^{\pm \pi i\alpha} \omega_\alpha(\xi); \quad \alpha = \frac{1}{4\pi} \ln \chi; \quad \omega_\alpha(\xi) = (1-\xi)^{-3/4-i\alpha} (1+\xi)^{-1/4+i\alpha} \quad (-1 < \xi < 1). \quad (2.9)$$

Далее, следуя известной процедуре, изложенной в [8], решение краевой задачи (2.7) представим формулой

$$\Psi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g_1(\eta) d\eta}{(\eta-z)X^+(\eta)} + C_1 X(z),$$

где C_1 – пока неизвестная постоянная. Отсюда

$$\Psi_1^\pm(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g_1(\eta) d\eta}{(\eta-z)X^+(\eta)} + C_1 X(z) \quad (z \in \Pi_\pm). \quad (2.10)$$

Но по (2.6)

$$\Psi_1^-(z) = \Phi_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega(\eta) d\eta}{\eta-z} = -\frac{P_0}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z \rightarrow \infty, z \in \Pi_-),$$

где использовано условие (1.4) при $k=1$. Теперь сравнением порядков левых и правых частей в (2.10) при $z \rightarrow \infty$ получим $C_1 = P_0/2\pi$.

Вполне аналогичным образом решение краевой задачи (2.8) представим формулой

$$X_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{h_1(\eta) d\eta}{(\eta-z)X_0^+(\eta)} + C_0 X_0(z),$$

откуда

$$X_1^\pm(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{h_1(\eta) d\eta}{(\eta-z)X_0^+(\eta)} + C_0 X_0(z) \quad (z \in \Pi_\pm);$$

$$X_0(z) = (z-1)^{-\frac{1}{4}-i\alpha} (z+1)^{-\frac{3}{4}+i\alpha}; \quad X_0^\pm(\xi) = e^{\mp i\pi/4} e^{\pm \pi\alpha} \gamma_\alpha(\xi); \quad (2.11)$$

$$\gamma_\alpha(\xi) = (1-\xi)^{-\frac{1}{4}-i\alpha} (1+\xi)^{-\frac{3}{4}+i\alpha} \quad (-1 < \xi < 1).$$

После того как найдены функции $\Psi_1^+(z)$ и $X_1^+(z)$, выражающиеся формулами (2.10)–(2.11), из (2.5) определим функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Omega_1^+(z)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\chi}} \left[(1+\chi) X_1^+(z) + i(1-\chi) \Psi_1^+(z) \right]; \\ \Omega_1^+(z) &= \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \left[(1+\chi) \Psi_1^+(z) - i(1-\chi) X_1^+(z) \right]. \end{aligned} \quad (z \in \Pi_+) \quad (2.12)$$

Исходя из (2.10) и (2.11) по формулам Сохоцкого–Племеля вычислим граничные значения $\Psi_1^\pm(\xi)$, $X_1^\pm(\xi)$ на разрезе:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(\xi) &= -\frac{1+\chi}{8\sqrt{\chi}} g(\xi) + \frac{1+\chi}{8\pi\sqrt{\chi}} i\omega_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)} + \frac{(1+i)\sqrt{2}}{4\pi} \sqrt[4]{\chi} P_0 \omega_\alpha(\xi) \\ &\quad (-1 < \xi < 1); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(\xi) = \Psi_1^-(\xi) &= -\frac{1+\chi}{8\chi} ig(\xi) + \frac{1+\chi}{8\pi\chi} \omega_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)} + \frac{(1-i)\sqrt{2}}{4\pi\sqrt[4]{\chi}} P_0 \omega_\alpha(\xi) \\ &\quad (-1 < \xi < 1); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$X_1^+(\xi) = \frac{1+\chi}{8\sqrt{\chi}} ig(\xi) + \frac{1+\chi}{8\pi\sqrt{\chi}} \gamma_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)} + \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt[4]{\chi} C_0 \gamma_\alpha(\xi). \quad (2.15)$$

Функцию $\Phi_1^+(\xi)$ вычислим по первой формуле (2.12) при помощи (2.13) и (2.15). После элементарных преобразований находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(\xi) &= -\frac{1+\chi}{8} ig(\xi) + \frac{1+\chi}{16\pi\chi} \left[(1-\chi) \omega_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)} - (1+\chi) \gamma_\alpha(\xi) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)} \right] + \frac{(1-i)\sqrt{2}(1-\chi)}{8\pi\sqrt[4]{\chi}} P_0 \omega_\alpha(\xi) - \frac{(1-i)\sqrt{2}(1+\chi)}{4\sqrt[4]{\chi}} C_0 \gamma_\alpha(\xi) \\ &\quad (-1 < \xi < 1). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее по третьей формуле (2.1) при помощи (2.14) и (2.16) вычислим решение исходного СИУ (1.3). Получим

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= \frac{1-\chi^2}{8\chi} ig(\xi) - \frac{(1+\chi)^2}{16\pi\chi} \omega_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\omega_\alpha(\eta)} - \\ &\quad - \frac{(1+\chi)^2}{16\pi\chi} \gamma_\alpha(\xi) \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)\gamma_\alpha(\eta)} - \frac{\sqrt{2}(1-i)(1+\chi)}{8\pi\sqrt[4]{\chi}} P_0 \omega_\alpha(\xi) - \frac{\sqrt{2}(1-i)(1+\chi)}{4\sqrt[4]{\chi}} C_0 \gamma_\alpha(\xi) \\ &\quad (-1 < \xi < 1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где функции $\omega_\alpha(\xi)$ и $\gamma_\alpha(\xi)$ выражаются формулами из (2.9) и (2.11).

Для определения постоянной C_0 опять воспользуемся условием (1.4) при $k=1$. Приняв во внимание выражения интегралов

$$\begin{aligned}
1) \int_{-1}^1 \omega_{\alpha}(\xi) d\xi &= \Gamma(1/4 - i\alpha) \Gamma(3/4 + i\alpha) = \pi / \sin[\pi(1/4 - i\alpha)]; \\
2) \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha}(\xi) d\xi &= \Gamma(3/4 - i\alpha) \Gamma(1/4 + i\alpha) = \pi / \sin[\pi(1/4 + i\alpha)]; \\
3) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_{\alpha}(\xi) d\xi}{\eta - \xi} &= \beta_0 \gamma_{\alpha}(\eta) \quad (\beta_0 = \operatorname{ctg}[\pi(1/4 + i\alpha)]); \\
4) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_{\alpha}(\xi) d\xi}{\eta - \xi} &= \delta_0 \omega_{\alpha}(\eta) \quad (\delta_0 = -\operatorname{tg}[\pi(1/4 + i\alpha)]);
\end{aligned}
\quad (-1 < \eta < 1)$$

причем последние два интеграла вычислены по формуле Коши для бесконечной области ([8], с. 252, ф-ла (3')), после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned}
C_0 &= A_0(\chi, \alpha) / B_0(\chi, \alpha); \quad A_0(\chi, \alpha) = \frac{1 + \chi}{16\chi} G_0 \{ (1 + \chi) \operatorname{ctg}[\pi(1/4 + i\alpha)] - \\
&\quad - 2(1 - \chi) - (1 + \chi) \operatorname{tg}[\pi(1/4 + i\alpha)] \} + i \left[1 - \frac{\sqrt{2}(1 + i)(1 + \chi)}{8\sqrt[4]{\chi}} \frac{1}{\sin[\pi(1/4 - i\alpha)]} \right] P_0; \\
B_0(\chi, \alpha) &= \frac{\sqrt{2}(i - 1)(1 + \chi)}{4\sqrt[4]{\chi}} \frac{\pi}{\sin[\pi(1/4 + i\alpha)]}; \quad G_0 = \int_{-1}^1 g(\eta) d\eta.
\end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера.

Отметим, что если формально считать $\nu = 1$ и, следовательно, $\chi = 1$, то (2.17) совпадает с соответствующим результатом из [11].

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

**О напряженном состоянии упругой бесконечной пластины
с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно
жестким тонким включением**

Рассмотрена контактная задача о вдавливании абсолютно жесткого тонкого включения в нижний берег трещины конечной длины, содержащейся в пластине, с учетом сил сцепления. Решение задачи сведено сначала к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ), а затем эквивалентной краевой двумерной матричной задачи Римана–Гильберта. Построено точное решение последней, и все основные характеристики задачи в явном виде представлены через решение определяющего СИУ.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

**Բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակի հետ փոխազդող
վերջավոր ճաքով առաձգական սալի լարվածային վիճակի մասին**

Հարակցման ուժերի հաշվառումով դիտարկված է առաձգական անվերջ սալում պարունակվող վերջավոր երկարության ճաքի ստորին ափին բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակի սեղմման կոնտակտային խնդիրը: Խնդրի լուծումը սկզբում բերված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման (ՄԻՀ) լուծման, իսկ այնուհետև համարժեք Ռիման-Հիլբերտի երկչափ մատրիցային եզրային խնդրի լուծման: Կառուցված է վերջինիս ճշգրիտ լուծումը, և խնդրի հիմնական բնութագրիչները ներկայացված են որոշիչ ՄԻՀ լուծման միջոցով:

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

**On the Stressed State of an Elastic Infinite Plate with a Finite Crack
Interacting with an Absolutely Rigid Thin Inclusion**

The contact problem on indentation of an absolutely rigid thin inclusion into the lower edge of a plate crack of finite length is considered taking into account adhesion forces. The solution of the problem is first reduced to the solution of the SIE, and then to the solution of an equivalent Riemann-Hilbert boundary-value two-dimensional matrix problem. The exact solution of the problem is constructed and all main characteristics of the problem are represented explicitly through the solution of the governing SIE.

Литература

1. *Selvadural A.S.P., Singh B.M.* – International Journal of Fracture. 1984. V. 25. P. 69-77.
2. *Hwu, Liang Y.K., Yen W. I.* – International Journal of Fracture. 1995. V. 79(4). P. 301-323.
3. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М. Наука. 1983. 296 с.
4. *Бережницкий Л. Т. Панасюк В. В, Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев. Наукова думка. 1983. 288 с.
5. *Hakobyan V.N.* Stress concentration near defects in homogeneous and compuned bodies. LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011. 168 p.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т.1, 2. Под ред. Ю. Мураками. 1990. М. Мир. 1013 с.
7. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений для тел с трещинами. Справочник в 4 томах. Киев. Наукова думка. 1988. 620 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 707 с.
9. *Шерман Д. И.* – Доклады АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 330-334.
10. *Antipov Y.A., Mkhitaryan S.M.* – Q. J. Mechanics Appl. Math. 2017. V. 70 (2). P. 153-185.
11. *Бардзокас Д. И., Мхитарян С. М.* В кн.: Труды междунар. конф., посвященной 95-летию академика Н.Х. Арутюняна. 25-28 сентября 2007 г. Цахкадзор. Ереван. Гитутюн. С. 91-94.

мости исследования в дальнейшем задач о напряженно-деформированном состоянии упругой полубесконечной пластины, усиленной на своей границе двумя одинаковыми симметрично расположенными стрингерами и ослабленной коллинеарной системой вертикальных трещин, в том числе и при наличии краевой трещины.

2. О контактном взаимодействии двух одинаковых абсолютно жестких стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. Пусть отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy упругая полубесконечная пластина, занимающая нижнюю полуплоскость $y \leq 0$, обладает модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Пусть далее пластина на своей границе $y=0$ по двум отрезкам $[-a, -b]$ и $[b, a]$ одинаковых длин, расположенных симметрично относительно начала координат, усилена двумя абсолютно жесткими на растяжение-сжатие и абсолютно гибкими на изгиб стрингерами. В центрах концевых сечений $x = \pm a$ стрингеров действуют горизонтальные сосредоточенные растягивающие силы P . Сечения стрингеров $x = \pm b$ свободны от внешних сил. Предполагается, что стрингеры не сопротивляются изгибу, т.е. в вертикальном направлении они обладают абсолютной гибкостью. Тогда на контактных участках $L = \{y=0; b < |x| < a\}$ нормальными контактными напряжениями по отношению касательных контактных напряжений можно пренебречь, т.е. будем иметь

$$\sigma_y|_{y=0} = 0; \quad \tau_{xy}|_{y=0} = \tau(x) \quad (x \in L; \quad \tau(-x) = -\tau(x)).$$

Здесь σ_y и τ_{xy} – соответственно, компоненты нормальных и касательных напряжений.

При указанном симметрическом нагружении стрингеров и в предположении, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(x)$, отнесенные к единице ширины пластины.

Воспользовавшись комплексными потенциалами для упругой полуплоскости [10], когда на ее границе действуют только горизонтальные силы, решение описанной контактной задачи сведем к решению следующего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода:

$$\frac{2}{\pi E} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds = \delta \operatorname{sign} x \quad (x \in (-a, -b) \cup (b, a)). \quad (1)$$

Здесь δ – величина жесткого горизонтального перемещения стрингеров.

Приняв во внимание нечетность функции $\tau(x)$, ИУ (1) можем преобразовать к виду

$$\frac{2}{\pi E} \int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau(s) ds = \delta \quad (b < x < a). \quad (2)$$

Решение ИУ (2) должно удовлетворять условию равновесия правого стрингера

$$\int_b^a \tau(x) dx = P. \quad (3)$$

Теперь исходя из интегрального соотношения [11]

$$\int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{\pi K}{a} \quad (b < x < a),$$

получим следующее решение ИУ (2):

$$\tau(x) = (a\delta E / (2K)) / \left(\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)} \right) \quad (b < x < a), \quad (4)$$

где $K = K(k)$ ($k = b/a$) – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k . Далее (4) подставим в (3) и для вычисления полученного интеграла по формуле $x = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)t^2}$ ($0 < t < 1$) от переменной x перейдем к переменной t . В результате установим зависимость между жестким смещением стрингеров δ и растягивающих их сил P :

$$\delta = (2P/E)(K/K') \quad (K' = K(k'); k' = \sqrt{1-k^2}). \quad (5)$$

Представляя выражение δ из (5) в (4), придем к формуле

$$\tau(x) = aP / K' \sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} \quad (b < x < a). \quad (6)$$

Эта формула в форме

$$\tau(x) = aP \operatorname{sign} x / K' \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)} \quad (b < |x| < a) \quad (7)$$

ранее была получена в [12].

Исходя из (6) или (7) определим компоненты напряжений на вертикальной оси упругой полуплоскости, т.е. на отрицательной полуоси Oy . С этой целью воспользуемся комплексными потенциалами Колосова – Мусхелишвили для нижней упругой полуплоскости в полярной системе координат r, ϑ . Тогда нижняя полуплоскость $y \leq 0$ описывается следующим образом:

$$\Pi_- = \{0 \leq r < \infty; -\pi \leq \vartheta \leq 0\} \quad (x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta).$$

Нужные нам формулы имеют вид [10] (с. 133)

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right]; \quad \sigma_r - i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\vartheta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \quad (8)$$

где $\sigma_r, \sigma_\vartheta$ – в полярной системе координат компоненты нормальных напряжений в радиальном и в окружном направлении, соответственно, а $\tau_{r\vartheta}$ – компонента касательных напряжений. Здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ – комплексные потенциалы, аналитические в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функции. Из первого уравнения (8) определим σ_r и его выражение подставим во второе уравнение (8). В результате придем к формуле

$$\sigma_\vartheta + i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + e^{2i\vartheta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \quad (9)$$

Но для нижней упругой полуплоскости ([10], с. 405, ф-ла (11) и с. 408, ф-ла (2))

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\Phi'(z) \quad (\overline{\Phi(z)} = \overline{\Phi(\bar{z})}); \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iT(t)}{t-z} dt, \quad (10)$$

где $P(t)$ и $T(t)$ – интенсивности, соответственно, нормальных и касательных сил, приложенных на границе полуплоскости. В данном случае имеем

$$P(t) \equiv 0 \quad (-\infty < t < \infty); \quad T(t) = \begin{cases} \tau(t) & (t \in L); \\ 0 & (t \in (-\infty, \infty) \setminus L); \end{cases} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{t \tau(t) dt}{t^2 - z^2}. \quad (11)$$

Выражение функции $\Psi(z)$ из (10) подставим в (9), в результате чего будем иметь

$$\sigma_{\vartheta} + i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + e^{2i\vartheta} [(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) - \overline{\Phi(z)}].$$

Далее полагая в этой формуле $\vartheta = -\pi/2$ ($z = iy$, $y < 0$), при помощи (11) получим

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=-\pi/2} = \frac{4}{\pi} \int_b^a \frac{t^3 \tau(t) dt}{t^2 + y^2}; \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=-\pi/2} = 0 \quad (0 \leq y < \infty). \quad (12)$$

При этом

$$\sigma_r|_{\vartheta=-\pi/2} = \left\{ 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - \sigma_{\vartheta} \right\}|_{\vartheta=-\pi/2} = \frac{4y^2}{\pi} \int_b^a \frac{t \tau(t) dt}{(t^2 + y^2)^2} \quad (0 \leq y < \infty). \quad (13)$$

Отметим, что по первой формуле (8) $\sigma_r + \sigma_{\vartheta}$ представляет собой двукратную вещественную часть аналитической в нижней полуплоскости функции $\Phi(z)$. Следовательно, $\sigma_r + \sigma_{\vartheta}$ гармоническая в этой полуплоскости функция и поэтому своего максимума достигает на границе полуплоскости. Но при $y = 0$ по (13) $\sigma_r|_{\vartheta=-\pi/2} = 0$, откуда следует

$$\max(\sigma_r + \sigma_{\vartheta}) = \max \sigma_{\vartheta} = \sigma_{\vartheta}|_{y=0} = \frac{4}{\pi} \int_b^a \frac{\tau(t) dt}{t}, \quad (14)$$

где принята во внимание первая формула (12). С другой стороны, по принципу симметрии возможное хрупкое разрушение упругого тела происходит по траектории максимальных нормальных напряжений, когда последние превосходят предел хрупкого разрушения для данного материала. Следовательно, в данном случае согласно (14) хрупкое разрушение упругой полубесконечной пластины происходит по ее вертикальной оси при условии

$$\frac{4}{\pi} \int_b^a \frac{\tau(t) dt}{t} \geq \sigma_b, \quad (15)$$

где σ_b – предел хрупкого разрушения материала пластины. В процессе разрушения в пластине образуется вертикальная краевая трещина.

Далее выражение касательных контактных напряжений из (6) подставим в (15):

$$\frac{4aP}{\pi K'} \int_b^a \frac{dt}{t \sqrt{(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}} \geq \sigma_b$$

и для вычисления этого интеграла от переменной t перейдем к переменной s , полагая $t = 1/\sqrt{s}$. После простых преобразований условие (15) примет вид

$$kK(k') \leq 2\sigma; \quad \sigma = P/a\sigma_b. \quad (16)$$

Для достаточно малых k соотношение (16) заведомо выполняется. В самом деле, воспользуемся известным представлением ([13], с. 919, ф-ла 8.113.3), в котором заменив k на k' , будем иметь

$$\begin{aligned} K' = K(k') &= \ln(4/k) + (1/2)^2 (\ln(4/k) - 2/1 \cdot 2) k^2 + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow K' &\sim \ln(4/k) \quad (k \rightarrow +0). \end{aligned} \quad (17)$$

На основании последнего

$$\lim_{k \rightarrow +0} k K(k') = \lim_{k \rightarrow +0} (k \ln(4/k)) = \lim_{k \rightarrow +0} ((\ln 4 - \ln k)/(1/k)) = 0,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Отметим, что на основании (17) условие (16) можно представить в виде

$$k \ln(4/k) \leq \sigma_b \quad (k \rightarrow +0).$$

В табл. 1 приведены значения функций $f(k) = k K(k')$; $g(k) = k \ln(4/k)$.

Таблица 1

Значения функций $f(k)$ и $g(k)$

k	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0
$f(k)$	2.44 x 10^{-9}	1.98 x 10^{-7}	1.75 x 10^{-6}	0. 000016	0. 00109	0. 00864	0. 06338	0. 4038	0. 669832	0. 8844	1. 22067
$g(k)$	2.44 x 10^{-9}	1.98 x 10^{-7}	1.75 x 10^{-6}	0. 000015	0. 00106	0. 00829	0. 05991	0.368 89	0. 59915	0. 77708	1. 03972

При малых k они с большой точностью совпадают. Условие хрупкого разрушения пластины (16) можно выразить также через жесткие перемещения стрингеров δ . А именно, из (5) $P = EK'\delta/2K$, и подставляя это выражение P в (16), придем к условию

$$k K(k) \leq \delta_0 \sigma_0 \quad (\delta_0 = \delta/a; \sigma_0 = E/\sigma_b). \quad (18)$$

Так как $\lim_{k \rightarrow +0} k K(k) = 0$, то для данного δ_0 и σ_0 условие (18) для достаточно малых k выполняется.

3. Контактная задача о взаимодействии двух одинаковых симметрично расположенных упругих стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. Пусть описанная в предыдущем пункте упругая полубесконечная пластина, опять отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy , на сей раз по совокупности отрезков своей границы L усилена двумя одинаковыми упругими стрингерами, симметрично расположенными относительно начала координат. Считается, что стрингеры обладают модулем упругости E_s , площадью поперечного сечения A_s , причем $A_s = h d_1$, где h — их высота, а d_1 — их ширина, в центрах их поперечных сечений $x = \pm a$ опять, как выше, действуют горизонтальные сосредоточенные растягиваю-

щие силы величины P . Сечения стрингеров $x = \pm b$ свободны от внешних сил, а по срединным линиям их верхних граней действуют горизонтальные растягивающие силы интенсивности $\tau_+(x)$ ($\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$). Кроме того пластина на бесконечности в горизонтальном направлении подвержена растяжению равномерно распределенными силами интенсивности P_0 . Предполагается, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, а стрингеры, как обычно [1, 3], находятся в одноосном напряженном состоянии.

При этих предположениях требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$ и осевые напряжения в сечениях стрингеров $\sigma_s(x)$.

Приступим к выводу определяющих уравнений поставленной задачи, придерживаясь обозначений [8]. Рассматривая равновесие части $[b, x]$ правого стрингера, находим

$$\sigma_s(x) = \frac{1}{A_s} \left[d \int_b^x \tau_-(s) ds - \int_b^x \tau_+(s) ds \right] \quad (b \leq x \leq a). \quad (19)$$

Здесь $d = \min(d_1, d_2)$ – эффективная ширина контактного участка [8], где d_2 – ширина пластины. Отсюда по закону Гука для осевой деформации получим

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{A_s E_s} \left[d \int_b^x \tau_-(s) ds - \int_b^x \tau_+(s) ds \right] \quad (b \leq x \leq a), \quad (20)$$

а полагая в (19) $x = a$, придем к условию равновесия правого стрингера:

$$d \int_b^a \tau_-(s) ds = Q; \quad Q = P + \int_b^a \tau_+(s) ds. \quad (21)$$

Теперь отметим, что в интегралах (19) и (20) их пределы (b, x) можем заменить пределами (x, a) , изменив при этом знаки интегралов на противоположные. В результате будем иметь

$$\sigma_s(x) = \frac{1}{2A_s} \left[d \int_b^a \text{sign}(x-s) \tau_-(s) ds - \int_b^a \text{sign}(x-s) \tau_+(s) ds \right] \quad (b \leq x \leq a); \quad (22)$$

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{2A_s E_s} \left[d \int_b^a \text{sign}(x-s) \tau_-(s) ds - \int_b^a \text{sign}(x-s) \tau_+(s) ds \right]. \quad (23)$$

Далее запишем выражение производных горизонтальных перемещений граничных точек упругой полубесконечной пластины [8]:

$$\frac{du(x, 0)}{dx} = \frac{2}{\pi E} \frac{d}{d_2} \int_b^a \frac{2s \tau_-(s) ds}{s^2 - x^2} + \frac{P_0}{E} \quad (b < x < a). \quad (24)$$

Подставляя (24) и (23) в условие контакта стрингеров и пластины

$$du(x, 0)/dx = \varepsilon_s(x) \quad (b < x < a),$$

придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению (СИУ) рассматриваемой задачи:

$$\int_b^a \left[\frac{4d}{\pi E d_2} \frac{s}{s^2 - x^2} + \frac{d}{2E_s A_s} \text{sign}(s-x) \right] \tau_-(s) ds = \frac{1}{2E_s A_s} \int_b^a \text{sign}(s-x) \tau_+(s) ds -$$

$$-\frac{P_0}{E} \quad (b < x < a), \quad (25)$$

откуда определяются неизвестные контактные касательные напряжения $\tau_-(x)$.

Решение СИУ (25) должно удовлетворять условию (21).

После решения СИУ (25) осевые напряжения будут определяться по формуле (22).

Отметим, что решение рассматриваемой здесь контактной задачи в несколько другой постановке в [8] сведено к решению интегродифференциального уравнения Прандтля.

Далее в СИУ (25) и условие (21) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad \tau(\xi) = d \cdot \tau_-(a\xi)/d_2 E; \quad \tau_0(\xi) = \tau_+(a\xi)/d_2 E; \\ p_0 = P_0/E; \quad \lambda = ad_2 E/2A_s E_s; \quad k = b/a.$$

В результате СИУ (25) преобразуется к виду

$$\frac{2}{\pi} \int_k^1 \left[\frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{\pi\lambda}{2} \operatorname{sign}(\eta - \xi) \right] \tau(\eta) d\eta = f_0(\xi) \quad (k < \xi < 1) \\ f_0(\xi) = -p_0 + \lambda \int_k^1 \operatorname{sign}(\eta - \xi) \tau_0(\eta) d\eta; \quad (26)$$

а условие (21) – к виду

$$\int_k^1 \tau(\eta) d\eta = Q_0; \quad Q_0 = Q/ad_2 E. \quad (27)$$

При этом согласно (22) для безразмерных осевых напряжений $\sigma(\xi)$ будем иметь

$$\sigma(\xi) = \sigma_s(a\xi)/E_s = \lambda \left[\int_k^1 \operatorname{sign}(\xi - \eta) \tau(\eta) d\eta - \int_k^1 \operatorname{sign}(\xi - \eta) \tau_0(\eta) d\eta \right] \quad (k \leq \xi \leq 1). \quad (28)$$

Наконец, в СИУ (26)-(27) от интервала $(k, 1)$ перейдем к интервалу $(-1, 1)$, полагая [8]

$$\xi = \sqrt{ct+d}; \quad \eta = \sqrt{cu+d} \quad (-1 < t, u < 1); \quad c = (1-k^2)/2; \quad d = (1+k^2)/2.$$

После простых преобразований СИУ (26) перейдет в следующее СИУ:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u-t} + \frac{\pi\lambda c}{4\sqrt{cu+d}} \operatorname{sign}(u-t) \right] \chi(u) du = f_0(t) \quad (-1 < t < 1); \\ \chi(u) = \tau(\sqrt{cu+d}); \quad f_0(t) = f(\sqrt{ct+d}); \quad (29)$$

а условие (27) – в следующее условие:

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi(u) du}{\sqrt{cu+d}} = Q_0/c. \quad (30)$$

При этом формула (28) преобразуется к виду

$$\Sigma(t) = \lambda c \left[\int_{-1}^1 \operatorname{sign}(t-u) \frac{\chi(u) du}{\sqrt{cu+d}} - \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(t-u) \frac{\omega_0(u) du}{\sqrt{cu+d}} \right] \quad (-1 \leq t \leq 1); \\ \Sigma(t) = \sigma(\sqrt{ct+d}); \quad \omega_0(u) = \tau_0(\sqrt{cu+d}). \quad (31)$$

4. Решения СИУ (29)-(30). Решение эквивалентного этому СИУ интегродифференциального уравнения Прандтля в [8] методом многочленов Чебышева сведено к решению регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Но весьма эффективное решение СИУ (29)-(30) можно построить также известным численно-аналитическим методом решения СИУ [14-16]. Следуя изложенной в этих работах процедуре, положим

$$\chi(u) = X(u) / \sqrt{1-u^2} \quad (-1 < u < 1), \quad (32)$$

где функция $X(u)$ – гильдеровская функция на отрезке $[-1, 1]$. В результате решение СИУ (29)-(30) сведется к следующей конечной СЛАУ:

$$\sum_{n=1}^M K_{mn} X_n = c_m \quad (m = \overline{1, M}) \quad (33)$$

$$K_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{M} \left[\frac{1}{u_n - t_m} + \frac{\pi \lambda c}{4 \sqrt{cu_n + d}} \operatorname{sign}(u_n - t_m) \right] & (n = \overline{1, M}; m = \overline{1, M-1}); \\ \frac{\pi}{M} \frac{1}{\sqrt{cu_n + d}} & (n = \overline{1, M}; m = M); \end{cases} \quad X_n = X(u_n);$$

$$c_m = \begin{cases} f_0(t_m) & (m = \overline{1, M-1}); \\ Q_0/c & (m = M); \end{cases} \quad u_n = \cos \left[\frac{\pi(2n-1)}{2M} \right] \quad (n = \overline{1, M});$$

$$t_m = \cos \left(\frac{\pi m}{M} \right) \quad (m = \overline{1, M-1}).$$

Здесь M – любое натуральное число, а u_n и t_m – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого рода $T_M(u)$ и второго рода $U_{M-1}(t)$ соответственно.

Теперь приведенные безразмерные контактные касательные напряжения согласно (32) будут выражаться через решение СЛАУ (33) формулой

$$\chi(u_n) = X_n / \sqrt{1-u_n^2} \quad (n = \overline{1, M}).$$

Аналогичной формулой будут выражаться безразмерные осевые напряжения (31).

Но более эффективное решение СИУ (29)-(30), как в [17], можно получить при помощи метода интерполяционного многочлена Лагранжа [18], полагая в (32)

$$X(u) = P_{M-1}(u) = \frac{2}{M} \sum_{n=1}^M X(u_n) \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{M-1} T_j(u) T_j(u_n) \right] \quad (-1 \leq u \leq 1), \quad (34)$$

где $P_{M-1}(u)$ – названный многочлен по чебышевским узлам для функции $X(u)$. Подставляя (32), где $X(u)$ дается формулой (34), в СИУ (29), после элементарных преобразований и вычислений придем к следующей конечной СЛАУ:

$$V_m + \frac{\lambda c}{2\pi} \sum_{nj=1}^{M-1} L_{mj} V_j = b_m \quad (m = \overline{1, M-1}) \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
R_{mj} &= \int_{-1}^1 \frac{I_m(u) T_j(u) du}{\sqrt{cu+d} \sqrt{1-u^2}} \quad (m=\overline{1, M-1}); \\
f_m &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f_0(t) U_{m-1}(t) dt; \quad d_m = \int_{-1}^1 \frac{I_m(u) du}{\sqrt{cu+d} \sqrt{1-u^2}}; \\
b_m &= \frac{M}{2\pi} f_m - \frac{\lambda c}{4\pi} W_M d_m \quad (d_m = R_{m0}); \quad W_m = \sum_{n=1}^M X_n; \quad V_m = \sum_{n=1}^M X_n T_m(u_n); \\
I_m(u) &= \int_{-1}^1 \text{sign}(u-t) \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) dt = \begin{cases} \sqrt{1-u^2} \left[\frac{U_m(u)}{m+1} - \frac{U_{m-2}(u)}{m-1} \right] & (m \neq 1); \\ \pi/2 - \arccos u + (1/2) \sqrt{1-u^2} U_1(u) & (m=1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Решение (35) при правой части f_m обозначим через $V_m^{(1)}$, а при правой части d_m – через $V_m^{(2)}$. Тогда

$$V_m = (M/2\pi) V_m^{(1)} - (\lambda c/4\pi) W_M V_m^{(2)} \quad (m=\overline{1, M-1}). \quad (36)$$

Исходя из (35)-(36) и принимая во внимание условие (30), относительно неизвестных X_n придем к следующей конечной СЛАУ:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^M R_{mn} X_n &= e_m \quad (m=\overline{1, M}) \quad (37) \\
R_{mn} &= \begin{cases} T_m(u_n) + (\lambda c/4\pi) V_m^{(2)} & (n=\overline{1, M}, m=\overline{1, M-1}); \\ A_0/M + (2/M) \sum_{m=1}^{M-1} A_m T_m(u_n) & (n=\overline{1, M}, m=M); \end{cases} \\
A_m &= \int_{-1}^1 \frac{T_m(u) du}{\sqrt{cu+d} \sqrt{1-u^2}} \quad (m=\overline{0, M-1}); \quad e_m = \begin{cases} (M/2\pi) V_m^{(1)} & (m=\overline{1, M-1}); \\ Q_0/c & (m=M). \end{cases}
\end{aligned}$$

Далее в рассматриваемом случае упругих стрингеров запишем условие хрупкого разрушения упругой полубесконечной пластины. В этом случае оно имеет вид

$$\frac{2Ec}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{X(u) du}{(cu+d) \sqrt{1-u^2}} \geq \sigma_b \quad (38)$$

и при $k \rightarrow +0$ заведомо выполняется. Условие (38) через решение СЛАУ (33) и (37) выразится, соответственно, формулами

$$\begin{aligned}
\frac{2c}{M} \sum_{n=1}^M \frac{X_n}{cu_n+d} &\geq \frac{\sigma_b}{E}, \\
\frac{2c}{\pi M} \sum_{n=1}^M G_n X_n &\geq \frac{\sigma_b}{E}, \quad G_n = B_0 + 2 \sum_{m=1}^M B_m T_m(u_n); \quad B_m = \int_{-1}^1 \frac{T_m(u) du}{(cu+d) \sqrt{1-u^2}}.
\end{aligned}$$

Интегралы A_m и B_m легко могут быть вычислены по квадратурным формулам Гаусса.

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Մ. Ս. Григорян, член-корреспондент НАН РА Ս. Մ. Мхитарян

**О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров
с упругой полубесконечной пластиной**

С точки зрения возможного формирования вертикальной краевой трещины в упругой полубесконечной пластине, когда система пластина – стрингеры подвержена воздействию растягивающих в горизонтальном направлении сил, рассматривается контактная задача о взаимодействии двух одинаковых стрингеров с такой пластиной. При этом стрингеры считаются абсолютно жесткими или обычными одномерными упругими континуумами. На основании решения этих задач при помощи комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили для упругой полуплоскости определяются разрушающие нормальные напряжения на оси симметрии пластины. Далее в этих напряжениях, достигающих своего максимума на границе пластины, записывается условие ее хрупкого разрушения. Показано, что при достаточно близких расстояниях между ближними концами стрингеров условие хрупкого разрушения упругой полубесконечной пластины заведомо выполняется.

Մ. Ս. Գրիգորյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

**Երկու միատեսակ ստրինգերների հետ առաձգական կիսաանվերջ
սալի կոնտակտային փոխազդեցության մասին**

Կիսաանվերջ առաձգական սալում ուղղաձիգ եզրային ճաքի հնարավոր առաջացման տեսանկյունից, երբ սալ-ստրինգերներ համակարգը ենթարկված է հորիզոնական ուղղությամբ ձգող ուժերի ներգործությանը, հողվածում դիտարկվում է երկու միատեսակ ստրինգերների հետ այդպիսի սալի փոխազդեցության մասին կոնտակտային խնդիրը: Ընդ որում ստրինգերները համարվում են բացարձակ կոշտ կամ սովորական միաչափ առաձգական հոծ մարմիններ: Այդ խնդիրների լուծման հիման վրա առաձգական կիսահարթության համար Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների օգնությամբ որոշվում են սալի համաչափության առանցքի վրա գործող քայքայող նորմալ լարումները: Այնուհետև այդ լարումներով, որոնք սալի եզրագծի վրա հասնում են իրենց մաքսիմումին, գրվում է սալի փխրուն քայքայման պայմանը: Ցույց է տրվում, որ ստրինգերների մոտակա ծայրերի բավականաչափ փոքր հեռավորությունների դեպքում առաձգական կիսաանվերջ սալի փխրուն քայքայման պայմանը իրոք տեղի ունի:

**M. S. Grigoryan,
corresponding member of NAS RA Ս. Մ. Mkhitryan**

**On Contact Interaction of an Elastic Semi-Infinite Plate with
Two Similar Stringers**

In a semi-infinite elastic plate, from the point of view of the vertical boundary crack possible formation, when the plate stringer system is subjected to the horizontally stretching forces influence, the contact problem on the interaction of such plate with two similar stringers is considered. The stringers are considered to be absolutely rigid or ordinary one-dimensional elastic solid bodies. On the base of these

problems' solution with the help of Kolosov-Muskhelishvili complex potentials for an elastic half-plane, fracturing normal stresses, acting on the axis of the plate symmetry are determined. Then, with these stresses which on the boundary of the plate reach their maximum, the brittle fracturing condition of the plate is written. It is shown that in the case of the sufficiently small distances of the stringers nearest ends the brittle fracture condition of the elastic semi-infinite plate obviously takes place.

Литература

1. *Melan E.* – Ing. Arch. 1932. Bd. 3. N 2. S.123-129.
2. *Koiter W.* – J. T. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. N 2. P. 164-178.
3. *Bufler H.* – Ing.Arch. 1964. Bd. 18. N 3–4. S. 284-292.
4. *Bufler H.* – VDI Forschungsheft 485. 1961. Ausgabe B. 27. S. 5-44.
5. *Alblas J. R., Kaypers W.* – J. Appl. Scientific Res. 1965–1966. Sect. A. V. 15. N 6. P. 429-439.
6. *Muki R., Sternberg E.* – J. of Appl. Mech. Trans. ASME. 1967. Ser. E. V. 34. N 3. P. 233-242.
7. *Давтян З. А., Мкртчян М. С., Мхитарян С. М.* – Изв. РАН. МТТ. 2016. N 1. С. 30-49.
8. *Александров В. М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
9. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 708 с.
11. *Мхитарян С. М.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. N 6. С. 3-18.
12. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.–Л. Гостехиздат. 1949. 270 с.
13. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. ФМ. 1963. 1100 с.
14. *Erdogan F., Gupta G. D. Cook T.S.* In: Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis a Solution of Crack Problems. Publ. Leyden. Noordhoff Intern. 1973. P. 368-425.
15. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* – Quart. Appl Math. 1977. V. 35. N 1. P. 173-185.
16. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976. 443 с.
17. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97. Issue 6. P. 639-654.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. Наука. 1968. 720 с.

x_2 (по направлению толщины $2h_1$) осуществляется обобщенное плоское напряженное состояние и задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к краевой задаче в срединной плоскости параллелепипеда x_1x_3 (т.е. к изучению задачи в прямоугольнике: $0 \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_3 \leq h$). Для дальнейшего рассмотрения примем, что $2h_1 = 1$. Будем исходить из основных уравнений задачи обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением [20-22]:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} - (\sigma_{13} - \sigma_{31}) = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11} + \nu \gamma_{33}), \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{33} + \nu \gamma_{11}), \quad \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2\mu \gamma_{13}, \\ \mu_{12} &= B \chi_{12}, \quad \mu_{32} = B \chi_{32}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \quad \gamma_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения; $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{13}, \gamma_{31}$ – деформации; χ_{12}, χ_{32} – изгибы-кручения; V_1, V_3 – перемещения, ω_2 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_2 ; E, ν, α, B – упругие постоянные микрополярного тела со стесненным вращением.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{31} = \pm p_1^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm p_3^{\pm}, \quad \mu_{32} = \pm m_2^{\pm}, \quad \text{при } x_3 = \pm h. \quad (1.4)$$

Далее будем рассматривать задачу изгиба.

Граничные условия на кромках прямоугольника ($x_1 = 0, x_1 = a$) в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек записываются в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

Будем считать, что $2h \ll a$ (рассматриваемый прямоугольник тонкий, т.е. балка тонкая).

2. Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), получим, что силовые и моментные напряжения будут выражаться через перемещения V_1, V_3 . Для построения прикладной модели изгибной деформации микрополярных балок со стесненным вращением

применим метод степенных рядов [8]. Аппроксимируем V_1 , V_3 степенными рядами относительно x_3 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1,n} x_3^n, \quad V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3,n} x_3^n. \quad (2.1)$$

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения и граничные условия (приведенные выше) плоской задачи микрополярной теории упругости со стесненным вращением, имеющим место в тонком прямоугольнике, получим рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты частичных сумм (полиномов) (2.1) любой степени (причем число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов).

Таким образом, на основании формул (1.2), (1.3) с учетом (2.1) для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{dV_{1,n}}{dx_1} + \nu(n+1)V_{3,n+1} \right] x_3^n, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)V_{3,n+1} + \nu \frac{dV_{1,n}}{dx_1} \right] x_3^n, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{13} + \sigma_{31} = \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_{13,n} + \sigma_{31,n}] x_3^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu \left[(n+1)V_{1,n+1} + \frac{dV_{3,n}}{dx_1} \right] x_3^n, \quad (2.4)$$

$$\mu_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left((n+1) \frac{dV_{1,n+1}}{dx_1} - \frac{d^2 V_{3,n}}{dx_1^2} \right) x_3^n, \quad (2.5)$$

$$\mu_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left((n+2)(n+1)V_{1,n+2} - (n+1) \frac{dV_{3,n+1}}{dx_1} \right) x_3^n. \quad (2.6)$$

Используя формулы (2.2)-(2.6) и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$, после некоторых преобразований приходим к следующим шести равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{31,2k} h^{2k} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{31,2k+1} h^{2k+1} = \frac{p_1^+ + p_1^-}{2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1)V_{3,2k+1} + \nu \frac{dV_{1,2k}}{dx_1} \right] h^{2k} = \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+2)V_{3,2k+2} + \nu \frac{dV_{1,2k+1}}{dx_1} \right] h^{2k+1} = \frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left[(2k+1)(2k+2)V_{1,2k+2} - (2k+1) \frac{dV_{3,2k+1}}{dx_1} \right] h^{2k} = \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} B \left[(2k+3)(2k+2)V_{1,2k+3} - (2k+2) \frac{dV_{3,2k+2}}{dx_1} \right] h^{2k+1} = \frac{m_2^+ + m_2^-}{2}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.2)-(2.6) в уравнения равновесия (1.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{d^2 V_{1,n}}{dx_1^2} + \nu(n+1) \frac{dV_{3,n+1}}{dx_1} \right] + (n+1)\sigma_{31,n+1} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[(n+2)(n+1)V_{3,n+2} + \nu(n+1) \frac{dV_{1,n+1}}{dx_1} \right] + \frac{d\sigma_{13,n}}{dx_1} = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B \left[\frac{d^2 V_{1,n+1}}{dx_1^2} (n+1) - \frac{d^3 V_{3,n}}{dx_1^3} + V_{1,n+3} (n+1)(n+2)(n+3) - \right. \\ \left. - \frac{dV_{3,n+2}}{dx_1} (n+1)(n+2) \right] + \sigma_{31,n} - \sigma_{13,n} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отметим, что уравнения (2.13)-(2.15) и условия (2.7)-(2.12) распадаются на две части: симметричную относительно x_3 (растяжение-сжатие) и обратно-симметричную (изгибная деформация).

Изгибная деформация микрополярного тонкого прямоугольника (балки) на основании перечисленных выше уравнений и условий в исходном приближении метода степенных рядов описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{31,2} + \sigma_{31,2} h^2 &= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[2V_{3,2} + \nu \frac{dV_{1,1}}{dx_1} \right] &= \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \\ \frac{1}{2}B \left[6V_{1,3} - 2 \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right] &= \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}, \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right] + 2\sigma_{31,2} &= 0, \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[2V_{3,2} + \nu \frac{dV_{1,1}}{dx_1} \right] + \frac{d\sigma_{13,0}}{dx_1} &= 0, \\ \frac{1}{2}B \left[\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} - \frac{d^3 V_{3,0}}{dx_1^3} + 6V_{1,3} - 2 \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right] + \sigma_{31,0} - \sigma_{13,0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из уравнений (2.16)₆ и (2.4) получим выражения для $\sigma_{13,0}$. Подставляя $\sigma_{13,0}$ и имея в виду (2.16)₂, из уравнения (2.16)₅ получим

$$\begin{aligned} 4\mu h \left(\frac{dV_{1,1}}{dx_1} + \frac{d^2 V_{3,0}}{dx_1^2} \right) + Bh \left(\frac{d^3 V_{1,1}}{dx_1^3} - \frac{d^4 V_{3,0}}{dx_1^4} \right) = \\ = -2(p_3^+ + p_3^-) - \frac{d}{dx_1} (m_2^+ + m_2^-). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для случая изгиба в исходном приближении имеем

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[2\nu V_{3,2} + \frac{dV_{1,1}}{dx_1} \right] x_3. \quad (2.18)$$

Для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\overset{0}{\sigma}_{31} = \sigma_{31,0}. \quad (2.19)$$

Подставив выражение σ_{11} из (2.18) в первое уравнение равновесия (1.1), интегрируя по x_3 , получим

$$\tilde{\sigma}_{31} = -\frac{x_3^2}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right) + \bar{\sigma}_{31}(x_1), \quad (2.20)$$

где $\bar{\sigma}_{31}(x_1)$ – «постоянная интегрирования». Для определения этой величины потребуем, чтобы усредненная по высоте прямоугольника величина $\tilde{\sigma}_{31}$ была равна нулю:

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{31} dx_3 = 0. \quad (2.21)$$

Подставив выражение (2.20) в (2.21), получим

$$\bar{\sigma}_{31}(x_1) = \frac{h^2}{6} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right). \quad (2.22)$$

Таким образом, подставив (2.22) в (2.20), для $\tilde{\sigma}_{31}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\sigma}_{31} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left(\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right). \quad (2.23)$$

Итак, для σ_{31}

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31} + \tilde{\sigma}_{31}. \quad (2.24)$$

Подставив (2.19) и (2.23) в (2.24), получим окончательную формулу для σ_{31} :

$$\sigma_{31} = \sigma_{31,0} - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left(\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} + 2\nu \frac{dV_{3,2}}{dx_1} \right), \quad (2.25)$$

где $V_{3,2}$ выражается с помощью $V_{1,1}$ $\left(V_{3,2} = \frac{1-\nu^2}{2E} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{dV_{1,1}}{dx_1} \right)$.

При помощи формул (2.25) удовлетворяя соответствующему граничному условию из (1.4), получим

$$\begin{aligned} 4\mu \left(\frac{dV_{3,0}}{dx_1} + V_{1,1} \right) - B \left(\frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} - \frac{d^3 V_{3,0}}{dx_1^3} \right) - \frac{4h^2}{3} E \frac{d^2 V_{1,1}}{dx_1^2} - \\ - \nu \frac{2h}{3} \frac{d}{dx_1} (p_3^+ + p_3^-) = 2(p_1^+ - p_1^-) + \frac{1}{h} (m_2^+ + m_2^-). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Объединив (2.17) и (2.26), окончательно приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{3,0}$, $V_{1,1}$:

$$\begin{aligned}
4\mu h \left(\frac{dV_{1,1}}{dx_1} + \frac{d^2V_{3,0}}{dx_1^2} \right) + Bh \left(\frac{d^3V_{1,1}}{dx_1^3} - \frac{d^4V_{3,0}}{dx_1^4} \right) &= -2(p_3^+ + p_3^-) - \frac{\partial}{\partial x_1}(m_2^+ + m_2^-), \\
4\mu \left(\frac{dV_{3,0}}{dx_1} + V_{1,1} \right) - B \left(\frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \frac{d^3V_{3,0}}{dx_1^3} \right) - \frac{4h^2}{3} E \frac{d^2V_{1,1}}{dx_1^2} - \\
-\nu \frac{2h}{3} \frac{d}{dx_1} (p_3^+ + p_3^-) &= 2(p_1^+ - p_1^-) + \frac{1}{h}(m_2^+ + m_2^-).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Система уравнений (2.27) представляет собой математическую модель статики микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением при изгибной деформации. К системе (2.27) следует присоединить граничные условия на концах балки ($x_1 = 0, x_1 = a$).

Теперь сравним полученную модель статики микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением с аналогической моделью [19], построенной на основе метода гипотез и имеющей асимптотическое подтверждение:

$$\begin{aligned}
&\text{уравнения равновесия} \\
\frac{dN_{13}}{dx_1} &= -2\tilde{p}_3, \quad N_{31} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = 2h\tilde{p}_1, \\
\frac{dL_{12}}{dx_1} + N_{31} - N_{13} &= -2\tilde{m}_2;
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
&\text{соотношения упругости} \\
N_{13} + N_{31} &= 4h\mu\Gamma_{13}, \\
M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{12} = 2Bhk_{12};
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
&\text{геометрические соотношения} \\
\Gamma_{13} &= \frac{dw}{dx_1} + \psi_1, \\
K_{11} &= \frac{d\psi_1}{dx_1}, \quad k_{12} = \frac{d\Omega_2}{dx_1}, \quad \Omega_2(x_1) = \frac{1}{2} \left(\psi_1 - \frac{dw}{dx_1} \right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Если (2.30) подставить в соотношения упругости (2.29) и последние в уравнения равновесия (2.28), получим основные уравнения в перемещениях модели микрополярных упругих балок работы [19]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (2.27) на основе метода степенных рядов ($V_{3,0} = w$, $V_{1,1} = \psi_1$), легко убедиться, что разница только в подчеркнутом члене в (2.27). Но эта величина – результат того, что в физическом уравнении для γ_{11} было удержано силовое напряжение σ_{33} , которым, как известно, в теории тонких балок принято пренебрегать.

Таким образом, модель микрополярных упругих тонких балок, построенная в работе [19] на основе метода гипотез и являющаяся асимптотически точной, обосновывается также методом степенного разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: knarikzhamakochan@mail.ru

К. А. Жамакочян

**Применение метода степенных рядов для построения
математической модели микрополярных упругих тонких балок
со стесненным вращением**

Рассматриваются уравнения статики обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением в тонком прямоугольнике. Принимая метод разложений по толщине прямоугольника в степенные ряды, на основе исходного приближения построена прикладная-одномерная модель статического изгиба микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением. Показано, что построенная модель полностью совпадает с аналогичной моделью микрополярных балок, построенной на основе асимптотически обоснованного метода гипотез.

Ք. Ա. Ժամակոչյան

**Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար
առաձգական բարակ հեծանների կաշկանդված պտույտներով
մաթեմատիկական մոդելի կառուցման համար**

Դիտարկվում են կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի ստատիկայի հավասարումները բարակ ուղղանկյուն տիրույթում: Կիրառելով ըստ ուղղանկյան հաստության աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը՝ կառուցվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների ծոման դեֆորմացիայի ստատիկայի կիրառական-միաչափ մաթեմատիկական մոդելը: Ցույց է տրվում, որ կառուցված մոդելը լիովին համընկնում է միկրոպոլյար հեծանների անալոգ մոդելի հետ, որը կառուցված է ասիմպտոտիկ հիմնավորմամբ վարկածների մեթոդի հիման վրա:

K. A. Zhamakochyan

**Application of the Method of Power Series for the Construction of
a Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Bars
with Constrained Rotation**

Static equations of generalized plane stress state of the micropolar theory of elasticity with constrained rotation are considered in thin rectangle. Using the method of expansion to power series along the thickness of rectangle and based on the initial approximation, the applied one-dimensional model of a static bending with constrained

rotation of micropolar elastic thin bars is constructed. It is shown that the constructed model coincides with the analogical model of micropolar bars, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

Литература

1. *Голденвейзер А. Л.* – Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 684-695.
2. *Ворович И. И.* В сб.: Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилисс. ун-та, 1975. С. 51-149.
3. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
4. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. World Scientific. 2015. 360 p.
5. *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. СПб.-М. Лань. 2002. 672 с.
6. *Timoshenko S.* – Phil. Mag. 1921. Ser. 6. V. 41. № 245. P. 744-746.
7. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
8. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* – Итоги науки и техники. ВИНТИ. Серия «Механика твердых деформируемых тел». 1973. Т.5. 272 с.
9. *Саркисян С. О.* – Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 260 с.
10. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 5. С. 41-54.
11. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
12. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
13. *Sargsyan S. H.* – Advances in Pure Mathematics. August 2015. V. 5. № 10. P. 629-642.
14. *Sargsyan S. H.* – J. of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. № 1. P. 98-108.
15. *Саркисян С. О.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
16. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
17. *Саркисян С. О.* – Доклады Российской академии наук. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
18. *Саркисян С. О.* В кн.: Упругость и неупругость. Материалы Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. Изд-во Московского ун-та. 2011. С. 231-235.
19. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. № 2. С.121-128.
20. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М. Наука. 1984. 256 с.
21. *Савин Г. Н.* Основы плоской моментной теории упругости. Киев. Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162 с.
22. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. В. Геворкян

Поверхностные P-SV волны на границе раздела конечнопроводящих полупространств

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.С. Аветисяном 15/1 2018)

Ключевые слова: P-SV волны, конечнопроводящее полупространство, граница раздела, магнитное поле.

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных типа P-SV волн на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств с проскальзыванием при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Пусть упругие конечнопроводящие полупространства отнесены к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$: ось x_1 – направлена вдоль границы, ось x_2 – в глубь нижнего полупространства.

Начальное магнитное поле $\vec{H}_0 \equiv [0, 0, H_0]$ направлено по оси x_3 .

Магнитные проницаемости материалов полупространств принимаются равными единице.

Учитывая, что в плоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид соответственно:

$$\vec{u} \equiv [u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0], \quad \vec{h} \equiv [0, 0, h_3(x_1, x_2, t)],$$

$$\vec{e} \equiv [e_1(x_1, x_2, t), e_2(x_1, x_2, t), 0].$$

Из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости получим следующую систему уравнений [1–3]:

$$c_m^2 \nabla^2 \vec{u}^{(n)} + (c_{ln}^2 - c_m^2) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}^{(n)}) + \frac{H_0}{4\pi r_n} (\nabla \times \vec{h}^{(n)}) \chi_{I_3} = \partial_t^2 \vec{u}^{(n)},$$

$$D_n \vec{h}^{(n)} = \frac{4\pi \sigma_n}{c^2} H_0 \partial_t (\nabla \times (\vec{i}_3 \times \vec{u}^{(n)})), \quad \nabla \cdot \vec{h}^{(n)} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{h}^{(n)} = \frac{4\pi \sigma_n}{c} \left(\vec{e}^{(n)} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{u}^{(n)} \times \vec{H}_0 \right),$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{e}^{(n)} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{h}^{(n)}, \\ \nabla &\equiv \vec{i}_1 \partial_1 + \vec{i}_2 \partial_2, \quad \nabla^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad r=1,2,t, \\ n &= \begin{cases} 1, & x_2 < 0 \\ 2, & x_2 > 0, \end{cases}\end{aligned}$$

где $c_{ln}^2 = \frac{\lambda_n + 2G_n}{\rho_n}$, $c_{tn}^2 = \frac{G_n}{\rho_n}$ – квадрат скоростей продольных и поперечных волн материалов полупространств, λ_n и G_n – упругие постоянные, ρ_n , σ_n – соответственно плотность и удельная электропроводимость материалов полупространств, c – электродинамическая постоянная, $\vec{i}_p$ – единичный вектор оси x_p .

Представляя вектор смещения $\vec{u}^{(n)}$ через потенциальную и соленоидальную части [4]

$$\vec{u}^{(n)} = \nabla \varphi_n + \nabla \times (\psi_n \vec{i}_3), \quad (2)$$

после простых преобразований будем иметь

$$\nabla \left(\square_n \varphi_n - \frac{H_0}{4\pi\rho_n} h_3^{(n)} \right) + \nabla \times (\square_n \psi_n \vec{i}_3) = 0, \quad (3)$$

$$D_n \vec{h}^{(n)} = -\frac{4\pi\sigma_n}{c^2} H_0 \nabla \times (\nabla \times \varphi_n \vec{i}_3), \quad (4)$$

$$\square_n \equiv c_{ln}^2 \nabla^2 - \partial_t^2, \quad \square_n \equiv c_{tn}^2 \nabla^2 - \partial_t^2, \quad \square_n \equiv \nabla^2 - 4\pi\sigma_n c^{-2} \partial_t,$$

$n=1,2$ – свободный индекс.

Далее, применяя к уравнению операции div и rot и с учетом (4), приходим к разрешающим уравнениям для рассматриваемой задачи

$$(D_n \square_n - 4\pi\sigma_n v_n^2 c^{-2} \partial_t \nabla^2) \varphi_n = 0, \quad (5)$$

$$h_3^{(n)} = H_0 v_n^{-2} \square_n \varphi_n, \quad (6)$$

$$\square_n \psi_n = 0, \quad v_n^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_n}, \quad n=1,2. \quad (7)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = 0, \quad G_1 (\partial_2 u_1^{(1)} + \partial_1 u_2^{(1)}) = G_2 (\partial_2 u_1^{(2)} + \partial_1 u_2^{(2)}) = 0, \quad (8)$$

$$h_3^{(1)} = h_3^{(2)}, \quad e_1^{(1)} = e_1^{(2)}, \quad x_2 = 0.$$

Решения уравнений (5) и (7) будем искать в виде

$$\varphi_n = A_n e^{k\eta_n x_2} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (9)$$

$$\psi_n = B_n e^{k\xi_n x_2} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad n=1,2. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (5) и (7), приходим к соответствующим характеристическим уравнениям

$$\eta_n^4 - [2 - \alpha_n (1 + s_n) z_n + z_n^2] \eta_n^2 + (1 - \alpha_n z_n) (1 + z_n^2) - \alpha_n s_n z_n = 0, \quad (11)$$

$$\xi_n^2 - (1 + c_{ln}^2 \cdot c_{ln}^{-2} z_n^2) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha_n = \frac{4\pi\sigma_n c_{ln}}{kc^2}, \quad z_n = \frac{i\omega}{kc_{ln}}, \quad s_n = \frac{v_n^2}{c_{ln}^2}, \quad n = 1, 2.$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнений (11) и (12) выберем только те, которым соответствуют затухающие по глубине волны.

Тогда решения уравнений (5) и (7) запишутся в следующем виде:

$$\varphi_1 = \left(A_+^+ e^{k\eta_{1(+)}x_2} + A_-^+ e^{k\eta_{1(-)}x_2} \right) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (13)$$

$$\psi_1 = D_1 e^{k\xi_1 x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \left(B_+^- e^{-k\eta_{2(+)}x_2} + B_-^- e^{-k\eta_{2(-)}x_2} \right) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (15)$$

$$\psi_2 = D_2 e^{-k\xi_2 x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (16)$$

$$\eta_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{2 - \alpha_n (1 + s_n) z_n + z_n^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - \alpha_n (1 + s_n) z_n + z_n^2}{2} \right)^2 - (1 - \alpha_n z_n)(1 + z_n^2) + \alpha_n s_n z_n}, \quad (17)$$

$$\xi_n = \sqrt{1 + c_{ln}^2 \cdot c_{ln}^{-2} z_n^2}, \quad (18)$$

$$\operatorname{Re} \eta_{n(\pm)} > 0, \quad \operatorname{Re} \xi_n > 0, \quad n = 1, 2. \quad (19)$$

С другой стороны, исключение падающих волн на границе раздела конечнотупроводящих полупространств приводит к следующим ограничениям:

$$\operatorname{Im} \eta_{n(\pm)} \leq 0, \quad \operatorname{Im} \xi_n \leq 0, \quad n = 1, 2. \quad (20)$$

Из (6) определяется индуцированное магнитное поле

$$h_3^{(1)} = s_1^{-1} k^2 H_0 \left(a_{1(+)} A_+^+ e^{k\eta_{1(+)}x_2} + a_{1(-)} A_-^+ e^{k\eta_{1(-)}x_2} \right) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (21)$$

$$h_3^{(2)} = s_2^{-1} k^2 H_0 \left(a_{2(+)} B_+^- e^{k\eta_{2(+)}x_2} + a_{2(-)} B_-^- e^{-k\eta_{2(-)}x_2} \right) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (22)$$

$$a_{1(\pm)} = \eta_{1(\pm)}^2 - z_1^2 - 1, \quad a_{2(\pm)} = \eta_{2(\pm)}^2 - z_2^2 - 1. \quad (23)$$

Подставляя выражения (13)–(16) и (21)–(22) в граничные условия (8), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы – дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\frac{\eta_{1(+)}\eta_{1(-)} + z_1^2 + 1}{\eta_{1(+)}\eta_{1(-)}(\eta_{1(+)} + \eta_{1(-)})} + \sigma_* \cdot \frac{\eta_{2(+)}\eta_{2(-)} + z_2^2 + 1}{\eta_{2(+)}\eta_{2(-)}(\eta_{2(+)} + \eta_{2(-)})} = 0, \quad (24)$$

$$z_2 = \gamma_* \cdot z_1, \quad \gamma_* = \frac{c_{l1}}{c_{l2}}, \quad \sigma_* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \gamma_* \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Если материалы полупространств являются одинаковыми, то дисперсионное уравнение (24) записывается в форме [5]

$$\eta_+ \cdot \eta_- + 1 + z^2 = 0, \quad z_1 = z_2 = z. \quad (25)$$

При $\sigma_* \ll 1$ уравнение (24) принимает вид

$$\eta_{1(+)} \cdot \eta_{1(-)} + 1 + z_1^2 = 0, \quad (26)$$

т.е. магнитоупругие поверхностные P-SV волны практически распространяются в верхнем полупространстве $x_2 < 0$, а в случае $\sigma_* \gg 1$ – в нижнем полупространстве $x_2 > 0$

$$\eta_{2(+)} \cdot \eta_{2(-)} + 1 + z_2^2 = 0. \quad (27)$$

Подробное изучение уравнений (25)–(27), проведено в работе [6].

Дисперсионные уравнения (25)–(27) совпадают с аналогичным уравнением (13), полученным в [4–7] формальным переходом $c_{ln} \leftrightarrow c_{tn}$.

В заключение отметим, что при отсутствии внешнего магнитного поля с граничными условиями (8) поверхностные волны Рэлея для полупространства отсутствуют.

Институт механики НАН РА

А. В. Геворкян

Поверхностные P-SV волны на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных типа P-SV волн на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств с проскальзыванием при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела. Показано существование поверхностных типа P-SV волн.

Ա. Վ. Գևորգյան

Մակերևութային P-SV տիպի ալիքները վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածությունների բաժանման եզրով

Դիտարկված է P-SV տիպի մակերևութային ալիքների տարածման հարցը սահող եզրերով վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածություններում՝ բաժանման եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ցույց է տրված P-SV տիպի մակերևութային ալիքների գոյությունը:

A. V. Gevorgyan

Surface P-SV Waves on the Interface of Two Finite Conductive Semi-Spaces

The propagation of P-SV magnetoelastic surface waves on the sliding interface of two finite conductive semi-spaces is considered under the action of external constant magnetic field parallel to the interface. The existence of surface P-SV waves is shown.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т.1. М. Наука. 1983. 492 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М. Наука. 1982. 624 с.
4. *Геворкян А.В.* - Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №3. С. 26-31.
5. *Белубекян М.В., Геворкян А.В.* – ДНАН РА. 1995. Т.95. №2. С. 86–88.
6. *Геворкян А.В.* – Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т.47. №1–2. С. 44–52.
7. *Геворкян А. В.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII междунар. конф., сентябрь 19–23. Горис–Степанакерт, 2011. С. 117-120.

свойств принимаются в приближении вакуума. Пусть пластинка помещена в магнитное поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\vec{B}_0(0,0,B_{03})$. Под $\vec{B}_0$ понимается магнитная индукция в вакууме (окружающая пластинку среда) при отсутствии пластинки.

Для математического моделирования процессов магнитоупругого взаимодействия в рассматриваемой пластинке принимаются основные положения следующих теорий и методов, используемых в задачах механики тонких пластин и оболочек:

- линеаризованная теория упругой устойчивости магнитоэлектрических твердых тел [2];
- классическая теория упругих пластин [3];
- асимптотический метод исследования упругих колебаний тонких пластин [4, 5].

Учитывая вышеизложенное и поступая так же, как в [2, 6] (в этих работах подробно изложено метод математического моделирования магнитоупругих процессов в магнитомягкой ферромагнитной пластинке, материал которой не обладает магнитоэлектрическими свойствами), в [1] получены линеаризованные двумерные уравнения и соответствующие условия, описывающие колебания и устойчивость трехслойных магнитоэлектрических пластин в поперечном магнитном поле. Для простоты и наглядности здесь рассматривается случай прямоугольной пластинки, торцы которой неподвижны в своей плоскости. Тогда согласно [1] возможны чисто изгибные колебания и задача исследования поведения магнитоупругих возмущений в рассматриваемой пластинке при поперечных колебаниях сводится к решению следующего уравнения:

$$D_* \Delta^2 w + 2A[\rho] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T \Delta w + 2A[\rho \epsilon] \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

при классических граничных условиях [2] на контуре пластинки.

Здесь

$$\begin{aligned} D_* = & \frac{2}{3} \left\{ (h^3 - \delta^3) \frac{E^{(1)}}{1 - (v^{(1)})^2} + \delta^3 \left[\frac{E}{1 - v^2} \frac{1 + g_1}{1 - g_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}} \frac{1}{1 + \mu_r k \delta} \left(\sigma - \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \frac{\chi B_{03}}{\mu_0} \left(1 + \frac{\chi}{\mu_r} e_2 - \frac{\chi}{\mu_r} \frac{\lambda_2 e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \right] \right\}, \quad (1.2) \\ T = & \frac{2\delta \chi^2 B_{03}^2}{\mu_0 \mu_r^2} \left\{ \left[\frac{\lambda_2 e_1}{\lambda_3 + 2\mu} - e_2 \right] \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}} \frac{1}{1 + \mu_r k \delta} \gamma \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{v}{1 - v} e_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{5\mu_r}{1 + \mu_r k \delta} - 1 \right] e_2 \right\}, \\ \Delta \equiv & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2, \\ A[\alpha] = & (h - \delta) \alpha^{(1)} + \delta \alpha^{(2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03}, \\
\lambda_1 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_2 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
g_1 &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)(e_1^2 + e_2^2) - 2\nu e_1 e_2 \right] \frac{\chi^3}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
g_2 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} e_1^2 \frac{\chi^3}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
\lambda &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\
\gamma &= 1 + \frac{5}{2} \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{2}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{1}{2} \frac{\chi^2 B_{03}^2}{\mu_0 \mu_r^2} \frac{\chi^2}{\mu_r} \frac{1}{\lambda_3 + 2\mu}, \\
\beta &= \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r}, \quad d_1 = -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03}, \quad d_2 = \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[\frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03}.
\end{aligned}$$

В (1.1) и (1.2) $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб пластинки; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ – магнитная константа; E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – магнитострикционные постоянные материала магнитострикционного слоя, $E^{(1)}$ – модуль упругости; $\nu^{(1)}$ – коэффициент Пуассона внешних немагнитострикционных слоев пластинки, индексом (1) обозначены величины, относящиеся в внешним слоям, индексом (2) – к срединному слою пластинки; t – время, членом $2\rho h \varepsilon \partial w / \partial t$ учтено влияние сил внутреннего трения, где ε – коэффициент линейного затухания материала слоев. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин и уравнений конкретному слою очевидно, будем записывать их, пропуская указанные индексы.

Задачи, аналогичные сформулированным выше краевым задачам, в которых присутствуют неизвестные волновые числа k_1 и k_2 , решены в [2, 4-6] путем применения асимптотического метода интегрирования [4, 5]. В результате в зависимости от граничных условий и форм колебаний получены соответствующие трансцендентные уравнения для определения k_1 и k_2 . Приведем указанные трансцендентные уравнения в случае сформулированной задачи при различных классических граничных условиях.

Пластика жестко закреплена по контуру. Граничными условиями задач для рассматриваемого случая жесткого закрепления являются [1, 3]:

$$\begin{aligned}
w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a_1, \\
w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = a_2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда в зависимости от симметрии (по отношению к координатным осям $0x_1$ и $0x_2$) для определения k_1 и k_2 получены следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} &= -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{ctg} \frac{a_2 k_2}{2} &= -k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (1.4)$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний, и

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} &= k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} &= k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (1.5)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведенных комбинированием соответствующим образом одного из уравнений (1.4) с другим из (1.5).

Пластика шарнирно закреплена по контуру. Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид [1, 3]:

$$\begin{aligned}w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= 0 \quad \text{при} \quad x_1=0, \quad x_1=a_1, \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= 0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=a_2.\end{aligned}\quad (1.6)$$

В этом случае для k_1 и k_2 получены выражения:

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.7)$$

Соответствующим образом, комбинируя приведенные уравнения (1.3)-(1.7), можно получить уравнения относительно k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жестко защемлены, а стороны $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (1.4) и (1.7) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} &= -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ k_2 &= \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}.\end{aligned}$$

На основе уравнения (1.1) и граничных условий (1.6) (шарнирно опертая прямоугольная пластинка) рассмотрим конкретные задачи с целью выявления эффектов, обусловленных взаимодействием пластинки и внешнего магнитного поля, а также неоднородного строения пластинки.

2. Собственные колебания. С учетом (1.7) решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.6), представим в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, \quad (2.1)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a_1}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a_2}.$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_{mn}}{dt} + \Omega_{mn}^2 (1 - B_{mn}) f_{mn} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{D_*}{2A[\rho]} k_{mn}^4, \quad B_{mn} = \frac{T}{D_* k_{mn}^2}, \quad (2.3)$$

$$k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad \varepsilon = \frac{A[\varepsilon\rho]}{A[\rho]}.$$

Удовлетворяя уравнению (2.2) решением вида $f_{mn}(t) = A_{mn} \exp(s_{mn} t)$, находим характеристические числа s_{mn} , определяемые формулой

$$s_{mn} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \Omega_{mn}^2 (1 - B_{mn}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Рассматривая (2.4), замечаем, что если величина магнитной индукции внешнего заданного магнитного поля удовлетворяет условию

$$B_{mn} < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\Omega_{mn}} \right)^2, \quad (2.5)$$

то затухание возмущений имеет колебательный характер с частотой

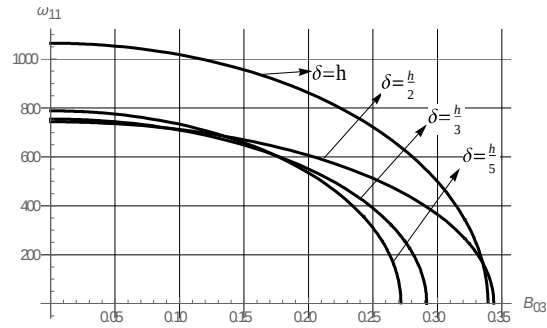
$$\omega_{mn} = \Omega_{mn} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\Omega_{mn}} \right)^2 - B_{mn} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

На основе формулы (2.6), при следующих исходных данных: $E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu^{(2)} = 0.33$, $\chi^{(2)} = 30$, $e_2 = 42$ (Ферроскуб 7Al), $a = 100h$, $b = a$, и, пренебрегая затуханием, произведены численные исследования зависимости ω_{11} от значения индукции B_{03} магнитного поля и от параметра δ/h (характеризующего неоднородность пластинки) при различных значениях геометрических параметров пластинки. Результаты расчетов приведены на рис. 1 для материала Текстолит ПТ, у которого $E_1 \approx E_2/2$, $\nu_1 = 0.28$) и на рис. 2 для стекла, у которого $E_1 \approx 2E_2$, $\nu_1 = 0.23$.

Рис. 1 показывает, что а) функция $\omega_{11}(B_{03})$ является монотонно убывающей и при определенном значении величины индукции B_{03} магнитного поля принимает нулевое значение, б) когда модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, меньше чем модуль упругости материала внешних слоев, то частота колебаний

слоистой пластинки существенно меньше, чем частота колебаний одно-
слойной пластинки с материалом срединного слоя.

$$E^{(1)} < E^{(2)}$$



$$E^{(1)} > E^{(2)}$$

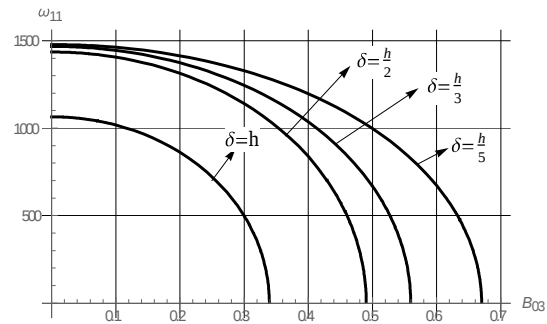


Рис. 1. Зависимость $\omega_{11}(B_{03})$ при разных значениях толщины магнитоэластичного слоя.

В противном случае (в противоположном соотношении между модулями упругости) неоднородность приводит к существенному увеличению частоты.

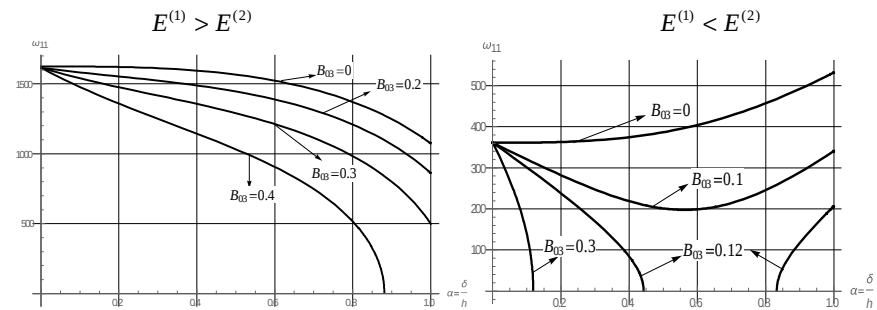


Рис.2. Зависимость $\omega_{11}(\delta/h)$ при разных значениях величины интенсивности магнитного поля

Рис. 2 показывает, что а) когда модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, меньше, чем модуль упругости материала внешних слоев, то функция $\omega_{11}(\delta/h)$ является монотонно убывающей функцией, более того, в зависимости от величины индукции магнитного поля, а также от знака и значений магнитострикционных констант срединного слоя пластинки она может не достичь нулевого значения; б) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, больше, чем модуль упругости материала внешних слоев, при отсутствии магнитного поля частота упругих колебаний монотонно возрастает с увеличением толщины магнитострикционного слоя; в) при больших значениях индукции магнитного поля с увеличением толщины магнитострикционного слоя частота магнитоупругих колебаний уменьшается, достигая нулевого значения, которое сохраняется в определенном интервале изменения параметра толщины магнитострикционного слоя δ/h , дальнейшее увеличение значения параметра δ/h приводит к резкому увеличению частоты колебаний слоистой пластинки; г) при «средних» значениях индукции магнитного поля частота магнитоупругих колебаний от параметра δ/h имеет экстремальный характер (существует точка минимума).

Отметим также, что все указанные явления обусловлены магнитострикционными свойствами материала срединного слоя и неоднородностью пластинки. Нужно отметить особо, что приведенная зависимость $\omega_{11}(\delta/h)$ в случае $E^{(1)} < E^{(2)}$ является аналогом зависимости $\omega_{11}(B_{03})$ в случае проводящих неферромагнитных пластин и оболочек [2, 7].

3. Возможность потери устойчивости. Рассматривая (2.4), замечаем, что при $B_{mn} > 1$ одно из двух характеристических чисел становится положительным, означающим потерю устойчивости пластинки. Условием устойчивости, очевидно, является $B_{mn} = 1$. Из этого условия в силу (2.3) для определения $B_{0*}(m, n)$ (где $B_{0*}(m, n)$ минимальное значение магнитной индукции заданного внешнего магнитного поля, при котором пластинка теряет устойчивость) получается следующее уравнение:

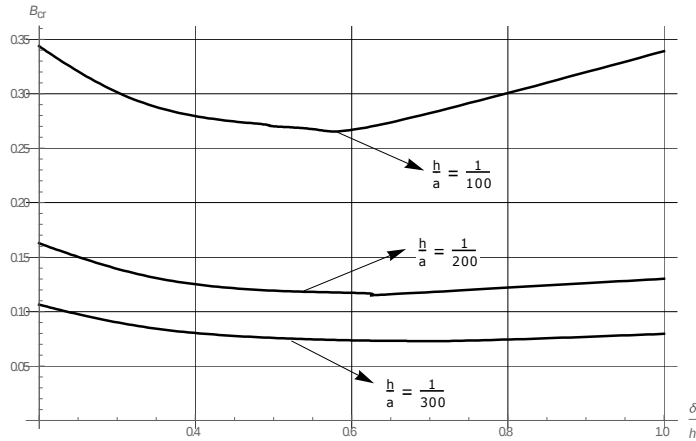
$$D_* k_{mn}^2 = T. \quad (3.1)$$

Вычисления показывают, что для основных магнитострикционных материалов минимальное значение $B_{0*}(m, n)$ достигается приближенно при $m = n = 1$. В силу этого, на основании (3.1) определены значения $B_{0*}(1, 1)$ в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи. Численные исследования произведены при уже приведенных выше исходных данных с целью выявить: а) возможность потери устойчивости пластинки под действием магнитного поля; б) зависимость критического значения индукции магнитного поля от магнитострикционных свойств и неоднородности пластинки. Результаты приведены на рис. 3.

Рис.3 показывает, что а) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, больше,

чем модуль упругости материала внешних слоев, то критическое значение индукции магнитного поля в зависимости от параметра δ/h имеет экстремальный характер (функция $B_{0*}(\delta/h)$ имеет минимум); б) $B_{0*}(h/a)$ является монотонно убывающей функцией; в) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, меньше, чем модуль упругости материала внешних слоев, то критическое значение магнитного поля в зависимости от параметра δ/h имеет монотонно убывающий характер независимо от значения относительной толщины слоистой пластинки. Указанные результаты получены, когда $e_1 > 0$. Численные расчеты показывают также, что если $e_1 < 0$, то уравнение (3.1) не имеет действительных решений, т.е. при $e_1 < 0$ исключается возможность потери статической устойчивости.

$$E^{(1)} < E^{(2)}$$



$$E^{(1)} > E^{(2)}$$

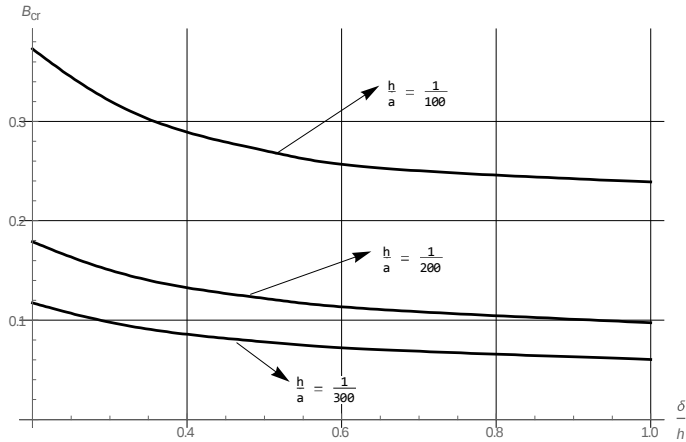


Рис. 3. Зависимость $B_{0*}(1,1)$ от параметра δ/h .

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

¹Ереванский государственный университет

e-mail: gevorgb@rau.am, edan@ysu.am

²Российско-Армянский университет

e-mail: marine.mikilyan@rau.am

³Институт механики НАН РА

Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян

Колебания и статическая устойчивость трехслойных магнитострикционных пластин под действием магнитного поля

Исследованы вопросы колебания и статической устойчивости трехслойных магнитострикционных ферромагнитных пластин в постоянном поперечном магнитном поле. Путем решения конкретной задачи установлено, что благодаря магнитострикционному эффекту а) возможна потеря статической устойчивости пластинки под действием постоянного поперечного магнитного поля; б) при помощи магнитного поля можно существенно изменить величину частоты собственных колебаний. Исследовано также влияние неоднородности пластинки на рассматриваемые процессы.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան,

Մ. Ա. Միկիլյան

Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումներն ու ստատիկական կայունությունը մագնիսական դաշտում

Հետազոտված են արտաքին հաստատուն ընդլայնական մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալերի տատանումների և ստատիկական կայունության հարցերը: Որոշակի խնդրի լուծմամբ ցույց է տրված, որ սալի նյութի մագնիսաստրիկցիոն հատկությունների շնորհիվ՝ ա) ստատիկական կայունության կորստի հնարավորությունը մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ, բ) մագնիսական դաշտի օգնությամբ հնարավոր է էապես փոխել սեփական տատանումների հաճախության մեծությունը: Հետազոտված է նաև սալի անհամասեռության ազդեցությունը դիտարկվող պրոցեսների վրա:

Academician G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan

Vibrations and Static Stability of Three-Layered Magnetostrictive Plates under the Action of Magnetic Field

The issues of vibrations and static stability of three-layered magnetostrictive ferromagnetic plates in constant transversal magnetic field are studied. Having solved the certain problem it is established, that due to the magnetostrictive properties of plate material: a) it is possible the loss of static stability of the plate under the action of transversal constant magnetic field; b) with the help of magnetic field it is possible to

change essentially the value of the frequency of natural vibrations of the plate. The influence of heterogeneity of the plate on the examined processes is also studied.

Литература

1. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. – Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т. 71. N 1.
2. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1999. 439 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М. Физматгиз. 1963. 653 с.
4. Болотин В. В., Макаров Б.П., Мишенков Г.В., Швейко Ю.Ю. В кн.: Расчеты на прочность. Т. 6. М. Машгиз. 1960. С. 231-253.
5. Багдасарян Г.Е. – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. N 24. С.72-75.
6. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А. – Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N4, pp. 1-18.
7. Baghdasaryan G., Mikilyan M. Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 2016. 289 p.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян^{1,3}, Э. А. Даноян¹, М. А. Микилян^{2,3}

Математическое моделирование колебаний двухслойной
 магнитострикционной пластинки

(Представлено 21/І 2018)

Ключевые слова: *двухслойные магнитострикционные пластинки, колебания, изгиб*

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из двух однородных изотропных упругих слоев (рис. 1). Нижний слой изготовлен из диэлектрического магнитострикционного ферромагнитного материала и имеет толщину δ . Верхний слой пластинки изготовлен из диэлектрического материала, магнитные свойства которого эквивалентны свойствам вакуума, и имеет толщину h .

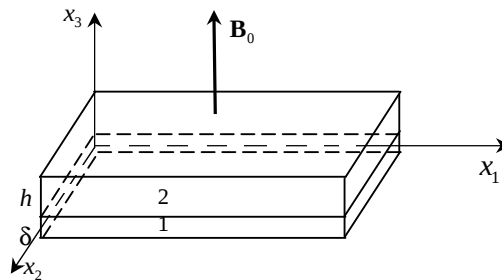


Рис. 1

Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ так, что координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает с срединной плоскостью магнитострикционного слоя. В слое с номером 1 (нижний слой) координата x_3 изменяется в интервале $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$, а в слое с номером 2 (верхний слой) – в интервале $\frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} + h$. Считается, что слой

после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Пусть пластинка помещена в нестационарном магнитном поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризуемого магнитного поля $\mathbf{B}_0(0, 0, B_{03}(t))$. При помещении слоистой магнитоstrictionонной пластинки в магнитном поле происходит намагничивание слоев пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Для линеаризации уравнений и граничных условий магнитоупругости рассматриваемой пластинки представим характеристики магнитного поля в виде [1-4]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_* + \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{h}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}_*$, $\mathbf{M}_*$ и $\mathbf{H}_*$ – соответственно магнитная индукция, намагниченность и напряженность магнитного поля недеформируемой пластинки, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{h}$ – добавления к указанным величинам, обусловленные деформацией пластинки. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Здесь, как в линейной теории магнитоупругости, считается, что добавления $\mathbf{m}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$ являются малыми по сравнению с соответствующими величинами, характеризующими магнитное поле недеформируемой пластинки. В работах [1-6], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [1, 6] и теории малых возмущений, путем линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение магнитоупругих характеристик рассматриваемой задачи, обусловленные взаимодействием указанной магнитоактивной деформируемой среды с магнитным полем:

уравнения во внутренней области пластинки (в слое с номером 1)

$$\begin{cases} \frac{\partial s_{ik}^{(1)}}{\partial x_i} + \mu_0 M_*^i \left(\frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) + \mu_0 m_i \frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} = \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m}), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} s_{ij}^{(1)} = s_0^{ij} + c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k, \\ H_k = A^{kl} M_{*l} + g_{ikl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + A^{kl} m_l, \\ s_0^{ij} = \mu_0 M_{*j} M_{*k} + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l}, \end{cases} \quad (3)$$

где s_{ik} – компоненты тензора напряжений; u_k – компоненты вектора упругих перемещений; h_k , m_k и b_k – компоненты векторов $\mathbf{h}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{b}$; x_i – декартовы координаты;

уравнение во внутренней области пластинки (в слое с номером 2,

$$\frac{\partial s_{ik}^{(2)}}{\partial x_i} = \rho_0^{(2)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$s_{ij}^{(2)} = \left(\lambda^{(2)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}; \quad (5)$$

уравнения во внешней области (в области вне магнитоэлектрического слоя пластинки)

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс “e” означает принадлежность к внешней среде;

условия сопряжения для напряжений на поверхности S_0 нижнего слоя пластинки, граничащего с вакуумом

$$s_{ki}^{(1)} N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0; \quad (7)$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности раздела слоев $\left(x_3 = \frac{\delta}{2} \right)$

$$(s_{ki}^{(1)} - s_{ki}^{(2)}) N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0; \quad (8)$$

условия сопряжения для магнитных величин на поверхности S_0 нижнего слоя

$$\begin{aligned} [b_k - b_k^{(e)}] N_k^0 &= [B_m - B_m^{(e)}] \frac{\partial u_k}{\partial x_m} N_k^0, \\ \epsilon_{nmk} \left\{ [h_n - h_n^{(e)}] N_m^0 - [H_{*n} - H_{*n}^{(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_i^0 \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где T_{ki} и $T_{ki}^{(e)}$ – тензоры напряжений Максвелла для нижнего слоя и окружающей его среды, N_k^0 – компоненты вектора внешней нормали $\mathbf{N}_0$ к соответствующей поверхности нижнего слоя S_0 , ϵ_{ijk} – символ Ливы-Чивита,

$$\begin{aligned} T_{ki}^{(e)} &= \mu_0 H_{*k}^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} [\mathbf{H}_*^{(e)}]^2 + \mu_0 H_{*k}^{(e)} h_i^{(e)} + \mu_0 h_k^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \\ &\quad - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_*^{(e)} \mathbf{h}^{(e)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$T_{ki} = H_{*k} B_{*i} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_*^2 + H_{*k} b_i + h_k B_{*i} - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_* \mathbf{h},$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности верхнего слоя пластинки, граничащего с вакуумом $\left(x_3 = \frac{\delta}{2} + h \right)$

$$s_{ki}^{(2)} N_k^0 = 0. \quad (11)$$

В материальных уравнениях (3)

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} &= C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r'' M_j'' (\delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{rq} + \delta_{kl} \delta_{iq} \delta_{ir} + \delta_{lp} \delta_{iq} \delta_{kr}) + \\
&+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} (\delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kl} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} + \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl}) M_r'' M_s'' + \\
&+ \mu_0 B_{pqrs} (\delta_{pk} \delta_{ql} \delta_{is} M_j'' + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{is} M_k'') M_r'', \\
e_{ijk} &= B_{ijkl} M_l'' + A_{mi} (\delta_{kj} M_m'' + \delta_{mk} M_j''), \\
g_{ijk} &= B_{jkpi} M_p'' + A_{rs} (\delta_{is} \delta_{jk} M_r'' + \delta_{rk} \delta_{is} M_j'' + \delta_{ij} \delta_{sk} M_r''),
\end{aligned} \tag{12}$$

где c_{ijkl} , A_{kl}^{-1} и B_{jkpi} – тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов, соответственно.

Для магнитострикционного слоя пластинки, который в размагниченном состоянии изотропен как по магнитным, так и упругим свойствам, справедливы равенства [1, 3]

$$\begin{aligned}
C_{ijkl} &= \lambda^{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(1)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl}, \\
B_{ijkl} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),
\end{aligned} \tag{13}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – постоянные Ляме, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, e_1, e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

Для основных магнитострикционных материалов справедливы следующие неравенства: $\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l} / \mu \ll 1$, $\chi e_i \gg 1$. В силу этих условий, когда вектор $\mathbf{M}_*$ параллелен одной из осей координатной системы, для тензоров обобщенных упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов получаются следующие упрощенные представления [1, 7]:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad g_{ijk} = B_{jkpi} M_{*p}, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_{*l} \tag{14}$$

К уравнениям (4) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

Входящие в приведенные уравнения и условия магнитные величины недеформированной пластинки, отмеченные символом *, являются решением следующей задачи магнитостатики:

уравнения магнитостатики во внутренней области магнитострикционного слоя

$$\text{rot } \mathbf{H}_* = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_* = 0, \quad \mathbf{B}_* = \mu_0 (\mathbf{H}_* + \mathbf{M}_*); \tag{15}$$

уравнения магнитостатики во внешней области магнитострикционного слоя

$$\text{rot } \mathbf{H}_*^{(e)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_*^{(e)} = 0, \quad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mu_0 \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{M}_*^{(e)} = 0; \tag{16}$$

условие сопряжения на поверхности магнитострикционного слоя и условие на бесконечности

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_* - \mathbf{B}_*^{(e)}) \cdot \mathbf{N}^0 &= 0, \quad (\mathbf{H}_* - \mathbf{H}_*^{(e)}) \times \mathbf{N}^0, \\
\mathbf{H}_*^{(e)} &\rightarrow \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0} \quad \text{при } |r| \rightarrow \infty;
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\mathbf{H}^0 = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0}$ – напряжение заданного внешнего магнитного поля, в котором помещается рассматриваемое тело.

2. Вывод двумерных уравнений колебаний тонкой двухслойной пластинки. Для применения процедуры получения двумерных уравнений колебаний тонких пластин необходимо знать характеристики (напряженность, магнитная индукция и намагниченность) магнитного поля во всем пространстве. Их определяем, решая трехмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач в случае пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Численные решения этих задач для пластинки-полосы приведены в [8]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитного поля для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристик магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда решение задачи (15)-(17) представится в виде

$$\begin{aligned} B_{*i}^{(e)} &= 0, \quad B_{*i} = 0, \quad H_{*i}^{(e)} = 0, \quad H_{*i} = 0, \quad M_{*i}^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, \\ B_{*3}^{(e)} &= B_{03}, \quad H_{*3}^{(e)} = \frac{B_{03}}{\mu_0}, \quad M_{*3}^{(e)} = 0, \\ B_{*3} &= B_{03}, \quad H_{*3} = \frac{B_{03}}{\mu_0 \mu_r}, \quad M_{*3} = H_{*3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для приведения трехмерных уравнений колебания (2), (3) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [9], согласно которой имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ u_2 &= v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ u_3 &= w(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (19)$$

где $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t), w(x_1, x_2, t)$ – перемещения точек срединной поверхности нижнего слоя пластинки.

Пользуясь формулами (4), (12), (13) и пренебрегая влияниями напряжения $s_{33} = 0$, с уже принятой точностью $\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l} / \mu \ll 1$, получаем следующие выражения для компонент s_{11} , s_{22} и s_{12} тензора магнитоупругих напряжений:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(1)} &= (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \epsilon_{11} + \bar{\lambda}^{(1)} \epsilon_{22} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0 \mu_r} B_{03}, \\ s_{22}^{(1)} &= (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \epsilon_{22} + \bar{\lambda}^{(1)} \epsilon_{11} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0 \mu_r} B_{03}, \\ s_{12} &= 2\mu^{(1)} \epsilon_{12}, \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03}, \\ \bar{\lambda} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu}, \quad \lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\ \lambda_2 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2,\end{aligned}\tag{21}$$

Подставляя соотношения (20) в уравнения (2) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки с учетом поверхностных условий (7)-(11), получим следующие двумерные уравнения колебаний рассматриваемой пластинки относительно u, v, w :

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_1(h_3) = X_1, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_2(h_3) = X_2, \\ L_{312}(u, v) + L_{33}w + L_3(h_3) = X_3. \end{cases}\tag{22}$$

В системе (22) L_{ij} – линейные дифференциальные операторы

$$L_{ii} = \left[\left(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \delta + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left[\mu^{(1)} \delta + \mu^{(2)} h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; \quad i = 1, 2,$$

$$\text{при этом } j = \begin{cases} 2 & \text{если } i = 1 \\ 1 & \text{если } i = 2 \end{cases},$$

$$\begin{aligned}L_{12} &= L_{21} = \left[\left(\bar{\lambda}^{(1)} + \mu^{(1)} \right) \delta + \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right) h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ L_{i3} &= \frac{h(h + \delta)}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta, \quad i = 1, 2; \\ L_{312}(u, v) &= \frac{h(h + \delta)}{2} \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right); \\ L_{33} &= - \left[\left(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{\delta^3}{12} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right] \Delta^2 - \\ &\quad - \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} (B_{03})^2 \left[\left(1 - \frac{\chi}{\mu_r} \left(\frac{e_1 - 3e_2}{2} \right) \right) - \frac{d_2}{B_{03}} \right] \delta \Delta; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ \theta(\delta, h) &= 1 + 3 \left(1 + \frac{\delta}{h} \right)^2;\end{aligned}\tag{23}$$

$L_i(h_3)$ – члены, учитывающие влияние индуцированного в пластинке магнитного поля $\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned}
L_i(h_3) &= \left(\sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial h_3}{\partial x_i} dx_3, i = 1, 2; \\
L_3(h_3) &= \left(\sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} x_3 \Delta h_3 dx_3 + \chi B_{03} \left(1 - \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(h_3 \Big|_{x_3 = -\frac{\delta}{2}} - h_3 \Big|_{x_3 = \frac{\delta}{2}} \right);
\end{aligned} \tag{24}$$

X_i – компоненты объемной силы инерционного происхождения

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}, \\
X_2 &= \left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2}, \\
X_3 &= \left[\left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] - \\
&\quad - \left(\rho^{(1)} \frac{\delta^3}{12} + \rho^{(2)} \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w.
\end{aligned} \tag{25}$$

3. Определение индуцированного магнитного поля. Для замыкания системы (19) следует определить компоненты h_i индуцированного магнитного поля во всем пространстве. С этой целью вводятся потенциальные функции $\phi^{(j)}$ посредством

$$\mathbf{h}^{(j)} = \text{grad } \phi^{(j)}. \tag{26}$$

Здесь индекс $j = 1$ соответствует областям $x_3 < -\delta/2$ и $x_3 > \delta/2$, причем $\phi^{(1)}$ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \phi^{(1)} = 0;$$

индекс $j = 2$ соответствует области $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$, причем $\phi^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$\mu_0 \mu_r \Delta_3 \phi = d_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + (c - d_2) \Delta_2 w, \tag{27}$$

где Δ_2, Δ_3 – соответственно трехмерный и двумерный операторы Лапласа,

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03}, \\
d_2 &= \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[\frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03}, \\
c &= \frac{\chi^2 B_0^3}{2\mu_r} (e_1 - 3e_2),
\end{aligned}$$

индекс $j = 3$ соответствует области $\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2 + h$, причем $\phi^{(3)}$ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \phi^{(3)} = 0.$$

Указанные уравнения решаются при поверхностных условиях (9). Решая таким образом сформулированные граничные задачи в случае бесконечной пластинки, находим $\varphi^{(j)}$ и, в частности, для интересующей нас функции $\varphi^{(2)}$ в магнитострикционном слое, необходимой для замыкания системы (19), получается следующее представление:

$$\varphi = \left(\gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 + \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 \frac{a}{k} \left(\operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \frac{d_2}{\mu_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + F_0 w, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{n\tilde{k}}, \quad n = \mu_r - \frac{d_1}{\mu_0}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\mu_0 \mu_r - d_1}} k, \\ \delta_1 &= \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \delta_2 = \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \\ \gamma_1 &= r \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} z \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \gamma_2 = r \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \\ r &= \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03} - F_0, \quad z = \frac{d_2 k^2}{\mu_0}, \\ F(0) &= \frac{c - d_2}{\mu_0 \mu_r}. \end{aligned}$$

Подставляя (28) в (26), для интересующей нас компоненты h_3^0 индуцированного магнитного поля получается следующее выражение:

$$h_3 = \tilde{k} \left(\gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 + \frac{d_2 a}{\mu_0} \frac{\tilde{k}}{k} \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 \left(\operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right).$$

4. Граничные условия на торцах пластинки. На торцах пластинки можно рассматривать различные граничные условия. В частности, пусть на торце пластинки $x_1 = \text{const}$ ($x_1 = 0$ или $x_1 = a$) имеют место следующие условия:

1) условия жесткой заделки:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0, \\ w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

2) отмеченный край свободен от внешних механических воздействий. Тогда согласно (7) получаются следующие условия (при $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$):

$$\begin{aligned} s_{11} &= \left((2\mu + \lambda_1) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{11} + \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{22} + \\ &+ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right) h_3 = T_{11}^{(e)} - T_{11}, \quad \text{при } (-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2) \\ s_{11} &= \left((2\mu + \lambda) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_{11} + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_{22} = 0, \quad \text{при } (\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2 + h) \end{aligned} \quad (30)$$

$$u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad (31)$$

$$u_3 = w = 0.$$

Интегрируя условие (30) в пределах $[-\delta/2, \delta/2 + h]$ по x_3 , затем, умножая это же условие на x_3 и интегрируя в указанных пределах, получаем следующие условия:

$$\left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\delta + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})h \right] \frac{\partial u}{\partial x_1} - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{\sigma\delta}{2\mu_0\mu_r} B_{03}, \quad (32)$$

$$(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{\delta^3}{12} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0,$$

а из второго и третьего условий (31), как и в предыдущем случае, получаем

$$v = 0, \quad w = 0 \quad (x_1 = 0, x_1 = a). \quad (33)$$

Аналогично можно рассматривать граничные условия на торце пластинки $x_2 = \text{const}$.

Таким образом, задача колебаний двухслойных магнитострикционных пластин в поперечном магнитном поле приведена к решению системы (22) при краевых условиях (32) и (33). Легко заметить, что полученная краевая задача является неоднородной. А это значит:

а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгиб пластинки;

б) если внешнее магнитное поле нестационарное (в частности $B(t) = B_0 + B_1 \cos \omega t$), то пластинка совершает вынужденные колебания, т.е. однородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле становится источником распространения возмущений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

¹Ереванский государственный университет
e-mail: gevorgb@rau.am, edan@ysu.am

²Российско-Армянский университет
e-mail: marine.mikilyan@rau.am

³Институт механики НАН РА

Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян

Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки

Рассматривается математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки в нестационарном магнитном поле. На основе теории тонких пластин и линеаризованной теории магнитоупругости ферромагнитных тел получены основные уравнения и граничные условия, описывающие

динамическое поведение рассматриваемой магнитоупругой системы. Исходя из полученных уравнений сформулирована соответствующая задача математической физики. Исследованием сформулированной задачи установлено, что: а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгибание пластинки; б) если внешнее магнитное поле нестационарное, то пластинка совершает вынужденные колебания, т.е. однородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле становится источником распространения возмущений.

**Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան,
Մ. Ա. Միկիլյան**

**Երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալի տատանումների
մաթեմատիկական մոդելավորումը**

Դիտարկվում է երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալի և ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի փոխազդեցության մաթեմատիկական մոդելավորումը: Բարակ սալերի տեսության և ֆերոմագնիսական մարմինների մագնիսաառաձգականության զծայնացված տեսության հիման վրա ստացված են հիմնական հավասարումները և եզրային պայմանները, որոնք նկարագրում են դիտարկվող մագնիսաառաձգական համակարգի դինամիկական վարքը: Ստացված հավասարումների հիման վրա ձևակերպված է մաթեմատիկական ֆիզիկայի համապատասխան խնդիր: Ձևակերպված խնդրի հետազոտմամբ ցույց է տրված, որ ա) երբ մագնիսական դաշտը ստացիոնար է, ապա այդպիսի դաշտերի ազդեցության տակ տեղի է ունենում սալի ծռում, բ) եթե արտաքին մագնիսական դաշտը ոչ ստացիոնար է, ապա սալը կատարում է ստիպողական տատանումներ: Այսինքն համասեռ սալը, ըստ ժամանակի, մագնիսական դաշտում դառնում է զրգռումների տարածման աղբյուր:

Academician G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan

**Mathematical Modeling of Vibrations of Two-Layered
Magnetostrictive Plate**

Mathematical modeling of vibrations of two-layered magnetostrictive plate in non-stationary magnetic field is considered. On the basis of the theory of thin plates and linearized theory of magnetoelasticity of ferromagnetic bodies the main equation and boundary conditions, describing the dynamical behavior of the examined magnetoelastic system are obtained. On the basis of the obtained equations the corresponding problem of mathematical physics is addressed. By the study of the formulated problem it is established, that: a) in the case of stationary magnetic field the plate bends under the action of such fields, b) if the external magnetic field is non-stationary, then the plate does forced vibrations. It means that the homogeneous plate in the harmonic magnetic field acts as a source of propagation of disturbances.

Литература

1. *Багдасарян Г.Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1999. 440 с.

2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. – МТТ. 1992. №3. С. 87-94.
3. Багдасарян Г.Е. – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. №3. С 70-75.
4. Pao Y.- H., Yen C.-S. – Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. №4. P. 415-436.
5. Brown W.F. Magnetoelastic Interactions. N. Y. Springer-Verlag. 1966. 155 p.
6. Maugin G. A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. North-Holland–Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo. 1988. 560 p.
7. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. – Доклады НАН РА. 2015. Т. 115. №3. С. 218-226
8. Bagdasarian G.E., Philiposian G.T. In: Proc. North American Conf. on Smart Structure and Materials (SPIE). USA. 1997. V. 3039. P. 715-725.
9. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 446 с.