

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵՇՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2017

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ս. ԹԱՎԱԴՅԱՆ,
ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի
տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԲՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս
Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН,
академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам.
главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А.
ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, corresponding member of NAS RA L. M.
AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding
member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone: (37410)56-80-67 *URL:* <http://elib.sci.am> *e-mail:* rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2017
©Издательство “Гитутюн”
НАН РА. 2017

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Գ. Միքայելյան – Գիբսի երևույթը Ստրոմբերգի համակարգերի համար	187
Ա. Հ. Բաբայան, Մ. Հ. Մոխամմադի – Միավոր շրջանում մի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին	192
Վ. Ա. Միրզոյան – Երկու կոչափի նորմալ հարթ ընթացիկ-կիսասիմետրիկ ենթաբազմա- ձևությունները էվկլիդեսյան տարածություններում	200

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Մարգարյան, Մ. Հ. Մարգարյան, Լ. Բ. Մանեհյ, Ս. Ա. Տիման – Կաշկանդված պտույտ- ներով մոմենտային տեսության հիման վրա առաձգական բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական տեսությունը և նրա կիրառությունը պոլիմերների մոտ	212
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Մ. Ե. Վեյսման, Ն. Ե. Անդրեև, Հ. Հ. Մաթևոսյան, Հ. Ս. Հարոյան – Բախումային պլազմայի լայնատիրույթ դիէլեկտրիկական թափանցելիությունն իոնների կամայական լիցքի դեպքում	222
---	-----

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

Լ. Ա. Աղալովյան, Լ. Ա. Հախվերդյան, Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան – Գառնիի երկրաֆիզիկական դիտարանում երկրային մակերևույթի թեքությունների և դեֆորմացիաների չափման արդյունքները	234
---	-----

ՔԻՄԻԱ

Ն. Մ. Պողոսյան, Մ. Ղ. Արսենտև, Վ. Ս. Հարությունով, Լ. Ա. Թավադյան – Թեթև ածխա- ջրածինների գուգորդված օքսիդացումը՝ որպես պրոպիլենի և ալեղի ծանր օլեֆինների ստաց- ման աղբյուր	243
---	-----

ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ժ. Բ. Հակոբյան, Լ. Ս. Ներսեսովա, Մ. Ս. Պետրոսյան, Մ. Գ. Գազարյան – Ca-մոդի- ֆիկացված երկպարույր ՌՆԹ-ն՝ որպես ռադիոպաշտպանիչ միջոց	252
--	-----

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Հ. Ղազարյան, Հ. Մ. Ստեփանյան, Ռ. Վ. Պարոնիկյան, Կ. Պ. Գրիգորյան – Որոշ սալիցիլիդեն-ամինաթթուների լիթիումական աղերի հակաբակտերիալ ակտիվությունը	259
Լ. Վ. Դանիելյան, Հ. Գ. Հովհաննիսյան – Մայրական կաթի կաթնաթթվային բակտերիաների պրոբիոտիկ հատկությունները	265

ԲՈՒՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Պ. Ստեփանյան-Ղանդիլյան – Նոր տվյալներ Հայաստանի ֆլորայի մի շարք տե- սակների աշխարհագրական տարածվածության վերաբերյալ	273
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>В. Г. Микаелян</i> – Явление Гиббса для систем Стромберга	187
<i>А. О. Бабаян, М. Х. Мохаммади</i> – О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения в единичном круге	192
<i>В. А. Мирзоян</i> – Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два в евклидовых пространствах	200

МЕХАНИКА

<i>А. А. Саркисян, С. О. Саркисян, Л. И. Маневич, С. А. Тиман</i> – Прикладная теория изгибной деформации упругой тонкой балки на основе моментной теории со стесненным вращением и ее приложение к полимерам	212
---	-----

ФИЗИКА

<i>М. Е. Вейсман, Н. Е. Андреев, Г. Г. Матевосян, О. С. Ароян</i> – Широкодиапазонная диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов	222
--	-----

ГЕОФИЗИКА

<i>Л. А. Агалянов, Л. А. Ахвердян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян</i> - О результатах измерений наклонов и деформаций земной поверхности в Гарнийской геофизической обсерватории	234
--	-----

ХИМИЯ

<i>Н. М. Погосян, С. Д. Арсентьев, В. С. Арутюнов, Л. А. Тавадян</i> - Сопряжённое окисление лёгких углеводов как источник получения пропилена и более тяжёлых олефинов	243
---	-----

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

<i>Ж. И. Акопян, Л. С. Нерсесова, М. С. Петросян, М. Г. Газарянц</i> – Са-модифицированная двуспиральная РНК в качестве радиопротекторного средства	252
---	-----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>С. А. Казарян, Г. М. Степанян, Р. В. Пароникян, К. П. Григорян</i> – Антибактериальная активность литиевых солей некоторых салицилиден-аминокислот ...	259
<i>Л. В. Даниелян, Г. Г. Оганесян</i> - Пробиотические свойства молочнокислых бактерий грудного молока	265

БОТАНИКА

<i>Н. П. Степанян-Гандилян</i> – Новые данные к географическому распространению ряда видов флоры Армении	273
--	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS	
<i>V. G. Mikayelyan</i> – Gibbs Phenomenon for Stromberg Systems	187
<i>A. H. Babayan, M. H. Mohammadi</i> – On a Dirichlet Problem for One Properly Elliptic Equation in the Unit Disk	192
<i>V. A. Mirzoyan</i> – Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimension Two in Euclidean Spaces	200
MECHANICS	
<i>A. H. Sargsyan, S. H. Sargsyan, L. I. Manevich, S. A. Timan</i> – Applied Theory of Bending Deformation of an Elastic Thin Bar Based on Moment Theory with Constrained Rotation and Its Application to Polymers	212
PHYSICS	
<i>M. E. Veysman, N. E. Andreev, H. H. Matevosyan, H. S. Haroyan</i> - Wide-Range Permittivity of the Collisional Plasma with an Arbitrary Ionic Charge	222
GEOPHYSICS	
<i>L. A. Agalovyan, L. A. Hakhverdyan, R. A. Pashayan, L. V. Harutyunyan</i> - Results of Measurement of Tiles and Deformations of the Earth Surface in the Garni Geophysical Observatory	234
CHEMISTRY	
<i>N. M. Poghosyan, S. D. Arsentev, V. S. Arutyunov, L. A. Tavadyan</i> – The Conjugated Oxidation of Light Hydrocarbons as a Source of Propylene and Higher Olefines Production	243
MOLECULAR BIOLOGY	
<i>J. I. Akopian, L. S. Nersesova, M. S. Petrosyan, M. G. Gazaryants</i> – Ca-modified Double-Stranded RNA as a Radioprotective Agent	252
MICROBIOLOGY	
<i>S. H. Ghazaryan, H. M. Stepanyan, R. V. Paronikyan, K. P. Grigoryan</i> – Antibacterial Activity of Lithium Salts of Some Salicylidene Amino Acids	259
<i>L. V. Danielyan, H. G. Hovhannisyan</i> – Probiotic Properties of Lactic Acid Bacteria from Human Milk	265
BOTANY	
<i>N. P. Stepanyan-Gandilyan</i> – New Data on the Geographical Distribution of Some Species of the Armenian Flora	273

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

В. Г. Микаелян

Явление Гиббса для систем Стромберга

(Представлено академиком Г.Г. Геворкяном 22/V 2017)

Ключевые слова: *система Стромберга, ряды Фурье, явление Гиббса.*

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции, впервые обнаруженная Г. Уилбрейамом (1848) и значительно позже переоткрытая Дж. Гиббсом (1899). n -я частичная сумма ряда Фурье имеет большие колебания вблизи скачка, который достигает максимума частичной суммы, выше заданной функции. При увеличении n скачок не затухает, но достигает конечного предела.

Стромберг поставил перед собой задачу построить базис в пространстве $H^p(R)$ [1]. Модифицируя систему Франклина, он ввел систему,

которая является безусловным базисом в $H^p(R)$, при $p > \frac{1}{2}$ [1].

Определим систему Стромберга. Пусть $m \geq 0$ и N – множество натуральных чисел. Положим $A_0 = N \cup \{0\} \cup \left(-\frac{1}{2}N\right)$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Точки множества A_0 разбивают действительную ось R на интервалы $\{I_\sigma\}_{\sigma \in A_0}$, где σ – левая концевая точка интервала I_σ . Обозначим через S_0^m подпространство пространства $L^2(R)$, состоящее из таких функций $f \in L^2(R) \cap C^m(R)$, которые на каждом интервале $I_\sigma, \sigma \in A_0$ являются полиномами с действительными коэффициентами, степени не больше $m+1$. Аналогично определяется подпространство S_1^m , если вместо A_0 рассматривать A_1 . Очевидно, что $S_0^m \subset S_1^m$ и если $f(x) \in S_0^m$, то $f(x-1) \in S_1^m$. Вообще функции из S_1^m отличаются от функций S_0^m только тем, что функции из S_0^m должны быть полиномами степени не больше $m+1$ на $[0,1]$, а функции из S_1^m могут быть полиномами степени не больше $m+1$ только на каждом из интер-

валов $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Поэтому S_0^m имеет коразмерность 1 в S_1^m . Следовательно, существует функция $\tau \in L^2(R)$, с точностью до знака определяемая из следующих соотношений:

1. $\tau \in S_1^m$,
2. $\tau \perp S_0^m$, т. е. $\int_R \tau(x) f(x) dx = 0$, для любого $\tau \in S_0^m$,
3. $\|\tau\|_{L^2} = 1$.

Для любой пары $(i, j) \in Z^2$, где Z – множество целых чисел, и для любого $x \in R$ положим

$$f_{i,j}(x) = 2^{\frac{i}{2}} \tau(2^i x - j).$$

Система $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ была введена Стромбергом [1]. Им же получено, что система $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ полная ортонормированная в $L^2(R)$ и является безусловным базисом в $H^p(R)$ при любом $p > \frac{1}{m+2}$.

Пусть t_0 точка разрыва первого рода функции $q \in L^2(R)$, причем $|q(t_0+) - q(t_0-)| = 2d > 0$, и пусть последовательность функций $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0 . Функцию

$$G(t_0, q, \{q_{i,j}\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}) = G(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ i \rightarrow +\infty}} \frac{1}{d} \left| q_{i,j}(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2} \right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$. Если $G(t_0) > 1$, то говорят, что для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ в точке t_0 имеет место явление Гиббса.

Хорошо известно (см. [2], с. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.17.$$

Для частичных сумм ряда Фурье – Франклина наличие явления Гиббса установлено в работе [3]. Для них функция G почти всюду является постоянной. Для частичных сумм ряда Фурье по общей системе Франклина наличие явления Гиббса установлено в работе [4], где доказано, что явление Гиббса для них имеет место почти во всех точках $[0,1]$ и найдены оценки сверху и снизу для функции Гиббса. Для частичных сумм ряда Фурье – Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [5], где доказано,

что функция Гиббса не является постоянной. В работе [6] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $m = 0$, t_0 – неустраняемая точка разрыва первого рода функции $f \in L^2(R)$,

$$S_{i_0, j_0}(f, x) = \sum_{i=-\infty}^{i_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{i,j} f_{i,j}(x) + \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} a_{i_0,j} f_{i_0,j}(x)$$

частичная сумма ряда Фурье – Стромберга и

$$G(t_0) = G\left(t_0, f, \{S_{i_0, j_0}(f, \cdot)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

– функция Гиббса. Тогда всюду на R имеет место явление Гиббса и в каждой точке $t_0 \in R$ справедливы оценки

$$1 + \frac{48 - 28\sqrt{3} + 8\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27} \leq G(t_0) \leq \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3},$$

причем почти всюду $G(t_0) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 2. Пусть $m \geq 0$, t_0 – неустраняемая точка разрыва первого рода функции $f \in L^2(R)$,

$$S_{i_0, j_0}(f, x) = \sum_{i=-\infty}^{i_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{i,j} f_{i,j}(x) + \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} a_{i_0,j} f_{i_0,j}(x)$$

частичная сумма ряда Фурье – Стромберга и

$$G(t_0) = G\left(t_0, f, \{S_{i_0, j_0}(f, \cdot)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

– функция Гиббса. Тогда почти всюду на R имеет место явление Гиббса.

Пусть $(i_0, j_0) \in Z^2$. Обозначим

$$K_{i_0, j_0}(x, t) = \sum_{i=-\infty}^{i_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i,j}(x) f_{i,j}(t) + \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} f_{i_0,j}(x) f_{i_0,j}(t).$$

Из определения функций $f_{i,j}$ следует, что для любого $(i_0, j_0) \in Z^2$

$$K_{i_0, j_0}(x, t) = 2^i K_{0,0}(2^i x - j, 2^i t - j).$$

Для любого $f \in L^2(R)$ и $(i_0, j_0) \in Z^2$ справедливо равенство

$$S_{i_0, j_0}(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i_0, j_0}(x, t) f(t) dt.$$

При доказательстве теоремы 1 важную роль играют равенства

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in R \right\} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3},$$

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in R \right\} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{4},$$

полученные нами для системы Стромберга при $m = 0$.

Для доказательства теоремы 2 нами установлено, что для системы Стромберга при любом m справедлива оценка

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in R \right\} > 1.$$

Ереванский государственный университет
e-mail: mik.vazgen@gmail.com

В. Г. Микаелян

Явление Гиббса для систем Стромберга

Исследовано явление Гиббса для систем Стромберга. Доказано, что явление Гиббса имеет место почти во всех точках R . В случае кусочно-линейных функций для функции Гиббса получены оценки снизу и сверху во всех точках и доказано, что почти во всех точках R оценка сверху достижима.

Վ. Գ. Միքայելյան

Գիբսի երևույթը Ստրոմբերգի համակարգերի համար

Գիբսի երևույթը հետազոտված է Ստրոմբերգի համակարգերի համար: Ապացուցված է, որ Գիբսի երևույթը տեղի ունի R -ի համարյա բոլոր կետերում: Կտրու առկտր գծային ֆունկցիաների դեպքում Գիբսի ֆունկցիայի համար ստացվել են երկկողմանի գնահատականներ, և ապացուցվել է, որ R -ի համարյա բոլոր կետերում վերնից գնահատականը հասանելի է:

V. G. Mikayelyan

Gibbs Phenomenon for Stromberg Systems

The Gibbs phenomenon with respect to Stromberg systems is studied. It is proved that the Gibbs phenomenon occurs for almost all points of R . In the case of piecewise linear functions lower and upper bounds are obtained for the Gibbs function and it is proved that for almost all points of R upper bound is attainable.

Լիտերատուրա

1. *Stromberg J. O.* In: Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund. Wadsworth. 1983. V. II. P. 475-494.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. 1961. Физматгиз, М. 937 с.
3. *Саргсян О. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1996. Т. 31. N. 1. С. 61-84.
4. *Mikayelyan V. G.* – Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 2017. V. 52. N 4. P. 198-210.
5. *Зубакин А. М.* – Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. N 1. С. 147-157.
6. *Балашиов Л. А.* – Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 37-48.

MATHEMATICS

УДК 517.946

A. H. Babayan, M. H. Mohammadi

On a Dirichlet Problem for One Properly Elliptic Equation in the Unit Disk

(Submitted by academician V.S. Zakaryan 6/VI 2017)

Keywords: *defect numbers, properly elliptic equation, Dirichlet problem, correct boundary value problem.*

1. Introduction. Formulation of the results. Let $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ be the unit disc of the complex plane. We consider in the domain D fourth order elliptic differential equation

$$\sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

where A_k are the complex constants ($A_0 \neq 0$). We suppose that the roots λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) of the characteristic equation

$$\sum_{k=0}^4 A_k \lambda^{4-k} = 0, \quad (2)$$

satisfy the condition

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq i, \Im \lambda_1 > 0; \lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_j \neq -i, \Im \lambda_j < 0, j = 3, 4, \quad (3)$$

that is the equation (1) is properly elliptic. We want to find the solution of the equation (1) in the class $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, which satisfy the Dirichlet conditions

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

on the boundary Γ . Here $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ and $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ are the given functions,

$\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}$ - is a differentiation in the inner normal direction to the boundary Γ (here and further $z = x + iy = re^{i\varphi}$).

It is well known ([1, 2]) that for the properly elliptic equation (1) the Dirichlet problem is Fredholmian. We want to determine the defect numbers of the problem (1), (4), that is the number of the linearly independent solutions of the homogeneous problem (the problem (1), (4) where $f \equiv g \equiv 0$) and the

number of the linearly independent solvability conditions of the inhomogeneous problem. The problem (1), (4) in the case when one of the roots of the characteristic equation (2) is equal to $\pm i$ was completely investigated in [23]. The case $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$ was considered in [4]. In [5] was investigated the problem (1), (4) for higher order equation (1).

In this paper we consider the problem (1), (4) (homogeneous and inhomogeneous), when the roots of the equation (2) satisfy the conditions (3). We get the new formula for the determination of the defect numbers of the problem and we find in explicit form the solutions of homogeneous problem and the solvability conditions of inhomogeneous problem.

For exact formulation of the obtained results let's represent the equation (1) and boundary conditions (3) in the complex form, using operators of complex differentiation

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Taking into account the conditions (3) the equation (1) will be represented in following form:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) u(x, y) = 0, \quad (3)$$

where $\mu = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}$, $\nu_j = \frac{i + \lambda_{2+j}}{i - \lambda_{2+j}}$ $j = 1, 2$. Using the conditions (3), we have

$$|\mu| < 1, \nu_1 \neq \nu_2, |\nu_j| < 1, j = 1, 2; \mu \nu_1 \nu_2 \neq 0. \quad (4)$$

Boundary conditions (4) are reduced to equivalent form ([3])

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|_{\Gamma} = F(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\Gamma} = G(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad u(1, 0) = f(1, 0). \quad (5)$$

Here the functions F and G from the class $C^{(\alpha)}(\Gamma)$ are determined by the formulas

$$F(x, y) = \frac{z}{2} \left(g(x, y) + i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad G(x, y) = \frac{\bar{z}}{2} \left(g(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad z = re^{i\varphi} \in \Gamma. \quad (6)$$

Using these denotations the results of the paper may be formulated in following way.

Theorem 1. *Let's denote $\sigma = \mu \nu_1, \tau = \mu \nu_2$. The problem (1), (4) is uniquely solvable if and only if the conditions*

$$P_k(\sigma, \tau) \equiv \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{p=0}^m (m-p) (\sigma \tau)^p \sum_{j=0}^{m-p-1} \sigma^j \tau^{m-p-j} \neq 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (7)$$

hold. If the conditions (7) fail, that is $P_{k_0}(\sigma, \tau) = 0$ for some value $k_0 > 2$, then the homogeneous problem (1), (4) has one linearly independent solution which is polynomial of order $k_0 + 1$. The corresponding inhomogeneous problem has a solution if the boundary functions F, G satisfy one linearly independent

orthogonality condition. Therefore, the defect numbers of the problem are equal to the quantity of the numbers k_0 for which $P_{k_0}(\sigma, \tau) = 0$.

2. Proof of the theorem 1. The general solution of the equation (3) may be represented in the form ([5]):

$$u(x, y) = \Phi_0(z + \mu\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \Phi_1(z + \mu\bar{z}) + \Psi_0(\bar{z} + \nu_1 z) + \Psi_1(\bar{z} + \nu_2 z), \quad (8)$$

where Φ_j and Ψ_j ($j = 0, 1$) are the functions, which must be determined, analytic in the domains $G = \{z + \mu\bar{z} \mid z \in D\}$ and $D_j = \{\bar{z} + \nu_{j+1} z \mid z \in D\}$ respectively. We substitute the function (8) in the boundary equations (5). Using operator identity ([5])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \frac{\partial^l}{\partial \varphi^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + (k-m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

we get

$$\begin{aligned} \mu \Phi'_0(z + \mu\bar{z}) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - iI \right) \Phi'_1(z + \mu\bar{z}) + \Psi'_0(\bar{z} + \nu_1 z) + \Psi'_1(\bar{z} + \nu_2 z) &= F(z), \quad z \in \Gamma, \\ \Phi'_0(z + \mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + iI \right) \Phi'_1(z + \mu\bar{z}) + \nu_1 \Psi'_0(\bar{z} + \nu_1 z) + \\ &+ \nu_2 \Psi'_1(\bar{z} + \nu_2 z) = G(z), \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Now, we represent the function $\Omega(z + \mu\bar{z})$, where Ω is analytic in the domain $G = \{z + \mu\bar{z} : z \in D\}$, on the circumference Γ using analytic in D functions. It was proved in [76] that the function $\Omega(z + \mu\bar{z})$ may be represented in the form (for $|z|=1$)

$$\Omega(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad (10)$$

where ω is analytic function in the unit disk. If we have the function ω , then the function Ω is determined by the formula:

$$\Omega(\zeta) = \omega\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right) + \omega\left(\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\mu}}{2}\right), \quad (11)$$

for $\zeta \in G$. In these formulas we choose the branch of $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, what is analytic outside the segment $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ and satisfies the condition $\zeta^{-1} \sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \rightarrow 1$ for $\zeta \rightarrow \infty$. We use (10) and represent the functions Φ'_j, Ψ'_j on the circumference Γ

$$\begin{aligned} \Phi'_j(z + \mu\bar{z}) &= \vartheta_j(z) + \vartheta_j(\mu\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj} \mu^k z^{-k}, \\ \Psi'_j(\bar{z} + \nu_{j+1} z) &= \rho_j(\bar{z}) + \rho_j(\nu_{j+1} z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} \nu_{j+1}^k z^k, \quad j = 0, 1, \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

We want to determine unknown functions ϑ_j and ρ_j . These functions are analytic in the unit disc D , therefore they determined by the corresponding Taylor coefficients A_{kj} и B_{kj} . For the determination of these coefficients let's

substitute the expansions (12) and Fourier expansions of the functions F and G

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} \bar{z}^k \equiv F_+(z) + F_-(z), \\ G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} \bar{z}^k \equiv G_+(z) + G_-(z), \end{aligned} \quad (15)$$

in the boundary equations (11). We get

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu^{k+1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} (ik-i) \mu z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} (ik+i) \mu^{k+1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} z^{-k} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu_1^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} \nu_2^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} z^{-k}, \quad |z|=1, \\ &\sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} (ik+i) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} (i-ik) \mu^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu_1 z^{-k} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu_1^{k+1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} \nu_2 z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} \nu_2^{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} z^{-k}, \quad |z|=1. \end{aligned} \quad (16)$$

Equating the coefficients by the same degrees of z and $\bar{z}$, we get the system for the determination of the unknown coefficients A_{kj} and B_{kj} . For $k=0$ we have:

$$2\mu A_{00} - 2\mu i A_{01} + 2B_{00} + 2B_{01} = F_0, \quad 2A_{00} + 2iA_{01} + 2\nu_1 B_{00} + 2\nu_2 B_{01} = G_0. \quad (13)$$

If $k \geq 1$ we have fourth order system of linear equations for the determination A_{kj} and B_{kj} :

$$\begin{aligned} A_{k0} + i(k+1)A_{k1} + \nu_1^{k+1}B_{k0} + \nu_2^{k+1}B_{k2} &= G_k, \\ \mu A_{k0} + i(k-1)\mu A_{k1} + \nu_1^k B_{k0} + \nu_2^k B_{k2} &= F_k, \\ \mu_1^k A_{k0} - i(k-1)\mu_1^k A_{k1} + \nu_1 B_{k0} + \nu_2 B_{k2} &= G_{-k}, \\ \mu_1^{k+1} A_{k0} - i(k+1)\mu_1^{k+1} A_{k1} + B_{k0} + B_{k2} &= F_{-k}, \end{aligned} \quad (14)$$

We consider the determinant of the main matrix of the system (14):

$$S_k = \det \tilde{S}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu & i(k-1)\mu & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu^k & i(-k+1)\mu^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu^{k+1} & i(-k-1)\mu^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

After transformation, using denotations of the theorem 1, we get:

$$\begin{aligned} S_k &= i \begin{vmatrix} 1 & k+1 & \sigma^{k+1} & \tau^{k+1} \\ 1 & (k-1) & \sigma^k & \tau^k \\ 1 & (-k+1) & \sigma & \tau \\ 1 & (-k-1) & 1 & 1 \end{vmatrix} = i(1-\sigma)^2 (1-\tau)^2 \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{p=0}^m (m-p) (\sigma^p \tau^m - \sigma^m \tau^p) \equiv \\ &\equiv i(1-\sigma)^2 (1-\tau)^2 \Theta_k(\sigma, \tau). \end{aligned} \quad (16)$$

And finally, the function Θ_k may be represented in the form

$$\Theta_k(\sigma, \tau) = (\tau - \sigma) P_k(\sigma, \tau),$$

where P_k is a function defined in the theorem 1. From the conditions of the theorem we have $\sigma \neq 1$, $\tau \neq 1$ and $\sigma \neq \tau$. Therefore, $S_k \neq 0$ for $k > 2$ if and only if the conditions (9) hold. $S_2 \neq 0$ also, because S_2 is a generalized Vandermonde determinant with different terms.

Let's suppose, that the conditions (9) hold. Then the coefficients A_{kj} and B_{kj} for $k \geq 2$ are uniquely determined. Determinant S_1 of the system (18) for $k=1$ is equal to zero, because second and third rows are the same. But, taking into account the formulas (8) we have

$$F_1 = G_{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi,$$

that is the system (18) has a solution (not unique) for $k=1$ also. And at last we determine (not uniquely too) the coefficients A_{0j} and B_{0j} from the system (17). Thus, the coefficients A_{kj} and B_{kj} may be found for arbitrary k , and therefore, we get the functions ϑ_j and ρ_j after what, by the formula (13) we determine Φ_j and Ψ_j . We have $S_k \rightarrow -2i$ for $k \rightarrow \infty$, hence the coefficients A_{kj} and B_{kj} have the same rate of decreasing as coefficients F_k and G_k , therefore, the resulting function u (the solution of the problem (1), (4), defined by the formula (10)) belongs to the prescribe class $C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$. Now, let's consider the homogeneous problem (1), (4). In this case, if the conditions (9) hold, the corresponding Taylor coefficients A_{kj} and B_{kj} are equal to zero for $k > 1$ and, therefore, nontrivial solution of the homogeneous problem (1), (4) may be at most second order polynomial. But the theorem 5.1 from [7] (p. 84) implies, that every nontrivial polynomial, which satisfies homogeneous conditions (4) must be divisible by $(1 - z\bar{z})^2$, that is must have at least fourth order. It means, that if the conditions (9) hold, then the corresponding homogeneous problem has only zero solution.

If the condition (9) fail for some $k_0 > 2$, that is $S_{k_0} = 0$, then the corresponding homogeneous problem has one linearly independent solution which is determined by nonzero solution A_{k_0j} and B_{k_0j} of the system (18). Theorem 1 is proved.

3. Some numerical results. In this point we will speak about the conditions (9). First, open the brackets in (5). We get

$$\left(P_3(\sigma, \tau) \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} + E \frac{\partial^4}{\partial z \partial \bar{z}^3} + H \frac{\partial^4}{\partial z^3 \partial \bar{z}} + \mu^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{z}^4} \right) u = 0, \quad (21)$$

where $P_3(\sigma, \tau)$ defined in (9) for $k=3$:

$$P_3(\sigma, \tau) = 1 + 2(\sigma + \tau) + \sigma\tau \equiv 1 + 2\mu(\nu_1 + \nu_2) + \mu^2 \nu_1 \nu_2,$$

and the constants E, H are following:

$$E = -(\nu_1 + \nu_2 + 2\mu\nu_1\nu_2); \quad H = -(2\mu + \mu^2(\nu_1 + \nu_2)).$$

Let's illustrate the results of the theorem 1 in the cases $k=3, 4$. We consider the homogeneous problem. Taking into account homogeneous

conditions (4) we know ([7], p.84) that the seeking solution must be divisible by $(1 - z\bar{z})^2$.

First, let's suppose, that the function $u_0(z, \bar{z}) = \alpha(1 - z\bar{z})^2$ ($\alpha \neq 0$) is a solution of the homogeneous problem (1), (4). This function satisfies the homogeneous boundary conditions (4). Substituting the function in the equation (21), we get:

$$P_3(\sigma, \tau)4\alpha = 0.$$

Thus, the function u_0 is non-zero solution of the homogeneous problem (1), (4) if and only if $P_3(\sigma, \tau) = 0$. For example, if the constants μ, ν_1, ν_2 satisfy the conditions

$$\mu\nu_1 = \sigma = -\frac{2}{3}, \mu\nu_2 = \tau = -\frac{1}{4},$$

then the function u_0 is a non-zero solution of the homogeneous problem (1), (4).

Now, let's seek the non-zero solution of the homogeneous problem (1), (4) in the form

$$u_1(z, \bar{z}) = (1 - z\bar{z})^2(\beta z + \gamma \bar{z}), \quad |\beta| + |\gamma| \neq 0.$$

Substituting this function in the equation (21), we get:

$$P_3(\sigma, \tau)(12\beta z + 12\gamma \bar{z}) + 12E\gamma z + 12H\beta \bar{z} = 0.$$

This equality holds if and only if β, γ satisfy the system:

$$P_3(\sigma, \tau)\beta + E\gamma = 0, H\beta + P_3(\sigma, \tau)\gamma = 0. \quad (22)$$

This homogeneous system of linear equations has non-zero solution if and only if the determinant of the main matrix of this system is equal to zero. Using denotations of the theorem 1, $\sigma = \mu\nu_1, \tau = \mu\nu_2$, this determinant may be written as follows:

$$P_3^2(\sigma, \tau) - EH = (1 + 2(\sigma + \tau) + \sigma\tau)^2 - (\sigma + \tau + 2)(\sigma + \tau + 2\sigma\tau) = P_4(\sigma, \tau).$$

Thus, we get that u_1 is the non-zero solution of the homogeneous problem (1), (4) if and only if $P_4(\sigma, \tau) = 0$. Let's show that P_4 may be equal zero for σ, τ such that $|\sigma| < 1, |\tau| < 1$. First, we represent $P_4(\sigma, \tau) = 1 + 2(\sigma + \tau) + 3\sigma^2 + 4\sigma\tau + 3\tau^2 + 2\sigma\tau(\sigma + \tau) + \sigma^2\tau^2$ in the form:

$$P_4(\sigma, \tau) = 1 + 2\sigma + 3\sigma^2 + 2\tau(1 + 2\sigma + \sigma^2) + \tau^2(3 + 2\sigma + \sigma^2) \equiv E_0 + E_1\tau + E_2\tau^2, \quad (23)$$

fix arbitrary σ ($|\sigma| < 1$) and consider second order polynomial

$$p(\tau) = E_0 + E_1\tau + E_2\tau^2.$$

We will use Shur transform (see [8], p.492) for showing that two roots of this polynomial lie in the unit disc. We have $p^*(\tau) = \tau^2 \overline{p\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)} = \bar{E}_2 + \bar{E}_1\tau + \bar{E}_0\tau^2$ and, therefore, Shur transform Tp of the polynomial (23) is following:

$$Tp(\tau) = \bar{E}_0 p(\tau) - E_2 p^*(\tau) = (\bar{E}_0 E_1 - E_2 \bar{E}_1)\tau + |E_0|^2 - |E_2|^2.$$

Let's calculate the constants

$$\gamma_1 = Tp(0) = |E_0|^2 - |E_2|^2, \quad \gamma_2 = T^2 p(0) = (|E_0|^2 - |E_2|^2)^2 - |\bar{E}_0 E_1 - E_2 \bar{E}_1|^2.$$

Using representation $\sigma = \rho e^{i\varphi}$, we get

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -8(1-\rho^2)^2 (1+\rho^2 + \rho \cos \varphi), \\ \gamma_2 &= 16(1-\rho^2)^2 (3(1+\rho^2) + 4\rho(1+\rho^2) \cos \varphi - 4\rho^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Taking into account inequality $0 < \rho < 1$, we obtain $\gamma_1 < 0$ and $\gamma_2 > 0$, therefore, by the theorem 6.8b from [8] we have that all two roots of the polynomial (23) lie in the unit disc. For example, if we get $\sigma = 0.5$ then $E_0 = \frac{11}{4}$, $E_1 = \frac{9}{2}$,

$E_2 = \frac{17}{4}$ and the roots of the polynomial (23) are equal $\tau_{1,2} = \frac{-9 \pm i\sqrt{108}}{17}$, and

therefore, $|\tau_{1,2}| < 1$. Thus, in this case, if $\mu\nu_1 = 0.5$ and $\mu\nu_2 = \frac{-9 + i\sqrt{108}}{17}$ then the function u_1 , where β, γ is a nontrivial solution of the system (22), is a non-zero solution of the homogeneous problem (1), (4).

We can continue in the same way, for example,

$$u_2(z, \bar{z}) = (1 - z\bar{z})^2 (\beta z^2 + \gamma \bar{z}^2 + \delta z\bar{z}), \quad |\beta| + |\gamma| + |\delta| \neq 0,$$

is a non-zero solution of homogeneous problem (1), (4) if and only if $P_5(\sigma, \tau) = 0$.

Authors tried to find concrete values of the defect numbers for the different values of σ, τ . The calculation, what was done using MATHEMATICA program, showed that the defect numbers may be equal to zero and one only. Therefore, we may formulate hypothesis, what will be interesting to check:

Hypothesis. *Let's denote $\sigma = \mu\nu_1$, $\tau = \mu\nu_2$. The problem (1), (4) is uniquely solvable if and only if the conditions (9) hold. The condition (7) may fail at most only for one number k , therefore, the defect numbers of the problem are equal only to zero or one.*

National Polytechnical University of Armenia
e-mail: barmenak@gmail.com, mohamadi.mh.edu@gmail.com

A. H. Babayan, M. H. Mohammadi

On a Dirichlet Problem for One Properly Elliptic Equation in the Unit Disk

The Dirichlet problem for the fourth order properly elliptic equation with constant coefficients in the unit disc is considered. The characteristic equation has one double root in upper half-plane and two different roots in the lower half-plane.

The solution must be found in the class of functions satisfying the Hölder condition with first order derivatives up to the boundary. The new formula for the

determination the defect numbers is obtained. The solvability conditions and the solutions of homogeneous and inhomogeneous problems are obtained in explicit form. The numerical results show that the defect numbers may be only zero and one.

Ա. Հ. Բաբայան, Մ. Հ. Մոխամմադի

Միավոր շրջանում մի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին

Դիտարկվում է միավոր շրջանում Դիրիխլեի խնդիրը հաստատուն գործակիցներով չորրորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Բնութագրիչ հավասարումն ունի կրկնապատիկ արմատ վերին կիսահարթությունում և երկու տարբեր արմատներ ստորին կիսահարթությունում: Լուծումը փնտրվում է առաջին կարգի ածանցյալների հետ միասին ընդհուպ մինչև եզրը Հյուլլերի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասում: Ստացվել է դեֆեկտային թվերի որոշման համար նոր բանաձևը: Դիտարկվող խնդրի լուծելիության պայմանները և համասեռ ու անհամասեռ խնդիրների լուծումները ստացվել են բացահայտ տեսքով: Թվային արդյունքները ցույց են տալիս, որ դեֆեկտային թվերը կարող են լինել միայն զրո և մեկ:

А. О. Бабаян, М. Х. Мохаммади

О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения в единичном круге

Рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка в единичном круге. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет один двукратный корень в верхней полуплоскости и два различных корня в нижней полуплоскости. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы вместе с производными первого порядка. Получена новая формула для определения дефектных чисел. Условия разрешимости рассматриваемой задачи и решение однородной и неоднородной задач определяются в явном виде. Результаты вычислений показывают, что дефектные числа могут принимать значения только ноль или единица.

Լիտերատուրա

1. Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I. Dunod. Paris. 1968. 368 p.
2. Tovmasyan N. E. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore. 1998. 235 p.
3. Бабаян А. О. – Изв. НАН Армении. Математика. 1999. Т. 34. № 5. С.1-15.
4. Бабаян А.О. – Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 66-80.
5. Бабаян А.О. – Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. № 6. С. 39-48.
6. Товмасын Н. Е. – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 6. С. 497-521.
7. Axler S., Bourdon P., Ramey W. Harmonic Function Theory. New York, Springer-Verlag. Inc. 2001. 270 p.
8. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis, V.1. New York, John Wiley & Sons. Inc. 1974. 683 p.

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

**Нормально плоские риччи-полусимметрические
 подмногообразия коразмерности два
 в евклидовых пространствах**

(Представлено академиком В.С. Захаряном 27/VI 2017)

Ключевые слова: *риччи-полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы подмногообразия, конусы над сферами, полуэйнштейновы подмногообразия.*

1. Введение. Пусть M – риманово многообразие с римановой связностью ∇ и операторами кривизны $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$, где X, Y – касательные векторные поля на M . Операторы $R(X, Y)$ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M . Например, если R_1 – тензор Риччи типа $(1, 1)$, то $(R(X, Y)R_1)(Z) = R(X, Y)R_1(Z) - R_1(R(X, Y)Z)$. Тензорное поле T , определенное на M , называется параллельным, если $\nabla_X T = 0$ для любого X , и полупараллельным, если $R(X, Y)T = 0$ для любых X, Y . Римановы многообразия с полупараллельным тензором Риччи называются риччи-полусимметрическими [1- 6]. В евклидовых пространствах различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий, в том числе и гиперповерхности, были исследованы в [3-15]. Настоящая работа посвящена изложению и уточнению как известных результатов по геометрии нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два [16-21], так и представлению новых результатов по этому классу подмногообразий.

2. Пространства дефектности и кодефектности. Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормированных базисов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . отождествляя точку x с её радиус-вектором, будем иметь (см. [1- 6])

$$dx = \omega^A e_A, \quad de_A = \omega_B^A e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \\ A, B, C = 1, \dots, n.$$

Пусть M – m – мерное подмногообразие в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ можно привести к главному расслоению $O(E_n, M)$ адаптированных ортонормированных $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, где $x \in M$, $e_i \in T_x(M)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $T_x(M)$ и $T_x^\perp(M)$ обозначают касательное и нормальное пространства к M в точке x соответственно, $i, j, k = 1, \dots, m$, $\alpha, \beta = m+1, \dots, n$. По известной схеме [1- 6] имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha, \\ \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k,$$

где h_{ij}^α – компоненты второй фундаментальной формы α_2 , $\omega_i^j - 1$ – формы римановой связности ∇ на M , а $\omega_\alpha^\beta - 1$ – формы нормальной связности $\nabla^\perp$. Если $\alpha_2 = 0$, то подмногообразие называется вполне геодезическим. Компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ , $\nabla^\perp$ и тензора Риччи R_1 определяются по формулам

$$R_{ikl}^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ – компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$. Если $R = 0$, то подмногообразие называется локально евклидовым. При $R^\perp = 0$ оно называется нормально плоским, а при $R_1 = 0$ – риччи-плоским. Пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' подмногообразия M в точке x определяются по формулам

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}, \\ T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Эти понятия были введены и использованы Чженем и Кюйпером [22]. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются *индексом дефектности* и *индексом относительной дефектности* подмногообразия M в точке x . Имеет место включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в M . Интегральное многообразие распределения T' представляет собой плоскость [22]. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x , а его размерность – индексом кодефектности M в этой точке. Подмногообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 в каждой точке имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

3. Нормально плоские подмногообразия. Пусть M – нормально плоское подмногообразие, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутиру-

ют и в некотором ортонормированном базисе могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Для компонент тензора Риччи получим

$$R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}, \quad \rho_i = \sum_{\alpha} \left((\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha \right).$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются *главными векторами кривизны* (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n . Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$. Если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E_n , то, вычисляя, получим $\rho_i = \langle n_i, n_i \rangle - \langle H, n_i \rangle = |n_i|^2 - \langle H, n_i \rangle$.

Пусть в точке x нормально плоское m -мерное подмногообразие M в E_n имеет q различных г.в.к. $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно, $p_1 + \dots + p_q = m$. Через $F_x^{(\varphi)}$ ($\varphi = 1, \dots, q$) обозначим p_φ -мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет только одно собственное значение $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ кратности p_φ . В указанном смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим г.в.к. n_φ . Справедливо разложение $T_x(M) = F_x^{(1)} \oplus \dots \oplus F_x^{(q)}$. Будем предполагать, что в некоторой области на M подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности, и через $F^{(\varphi)}$ обозначать соответствующее распределение. Подпространства $F_x^{(\varphi)}$ обладают рядом важных свойств ([5, 11, 12]).

Главный вектор кривизны n_φ называется *регулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$, и *сингулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(0)}$ [11]. Размерность линейной оболочки регулярных векторов называется *индексом регулярности* и обозначается через i_R , а число ненулевых сингулярных векторов – *индексом сингулярности* подмногообразия M и обозначается через i_S . Ненулевые сингулярные г.в.к. однократны, взаимно ортогональны и ортогональны также всем остальным г.в.к. Справедливо неравенство $0 \leq \mu - \nu + i_R \leq n - m$ [11].

Для нормально плоского подмногообразия M в E_n приведённая выше формула фактически устанавливает соответствие между собственными значениями ρ_i тензора Риччи и его г.в.к. n_i . Пусть тензор Риччи R_i подмногообразия M имеет нулевое собственное значение и различные ненулевые собственные значения $\rho_1, \dots, \rho_t$ с учётом их кратностей и пусть $W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ обозначают множество всех регулярных г.в.к., соответствующих собственным значениям $\rho_1, \dots, \rho_t$ соответственно. Очевидно, что если векторы n_i и n_j , $i \neq j$, принадлежат множеству $W^{(\sigma)}$, $(\sigma, \tau = 1, \dots, t)$, то они удовлетворяют условию $|n_i|^2 - \langle n_i, H \rangle = |n_j|^2 - \langle n_j, H \rangle$ ($= \rho_\sigma$). Если же $n_i \in W^{(\sigma)}$, $n_j \in W^{(\tau)}$, $\sigma \neq \tau$, то $|n_i|^2 - \langle n_i, H \rangle \neq |n_j|^2 - \langle n_j, H \rangle$. Нулевому собственному значению тензора Риччи R_i соответствуют нулевой г.в.к., все

сингулярные г.в.к. и некоторые регулярные г.в.к. Это множество будем обозначать через $W^{(0)}$. Справедливо следующее утверждение [12]: *если в какой-либо группе $W^{(\sigma)}$, $\sigma > 0$, имеются неравные коллинеарные векторы, то их число равно двум.*

Пусть M является m -мерным нормально плоским подмногообразием в E_n . Для того, чтобы M было риччи-полусимметрическим, необходимо и достаточно (см. [4]), чтобы любые два его г.в.к., n_i и n_j , удовлетворяли одному из следующих условий: $|n_i|^2 - \langle n_i, H \rangle = |n_j|^2 - \langle n_j, H \rangle$ или $\langle n_i, n_j \rangle = 0$.

Лемма. *Для того, чтобы нормально плоское подмногообразие M в E_n было риччи-полусимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его главные векторы кривизны, соответствующие различным собственным значениям тензора Риччи, были ортогональны (что равносильно ортогональности векторов группы $W^{(\sigma)}$ векторам группы $W^{(\tau)}$ при $\sigma \neq \tau$, $\sigma, \tau = 0, 1, \dots, t$).*

Следствие 1. *Если группа главных векторов кривизны $W^{(0)}$ нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия содержит ненулевой вектор, то число собственных значений тензора Риччи не превосходит коразмерность подмногообразия. Если же группа $W^{(0)}$ содержит только нулевой вектор, то число всех собственных значений тензора Риччи может превосходить коразмерность подмногообразия на единицу. Если число групп главных векторов кривизны $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия равно его коразмерности, то в каждой из групп $W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ все векторы коллинеарны.*

Следствие 2. *Ни одна из групп главных векторов кривизны $W^{(p)}$, $p > 0$, нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия не содержит однократного вектора, ортогонального остальным векторам этой же группы. Если регулярные главные векторы кривизны, входящие в $W^{(0)}$, однократны, то их число должно быть не меньше двух, причём ни один из них не может быть ортогонален остальным регулярным главным векторам кривизны, входящим в $W^{(0)}$.*

4. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи. Справедлива следующая

Теорема 1 [16]. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности $p \geq 2$ евклидова пространства E_n . Если число различных ненулевых собственных значений тензора Риччи равно коразмерности, то их кратности ≥ 2 , индексы дефектности и относительной дефектности совпадают, а само подмногообразие M разлагается в прямое произведение p риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (возможно нулевой размерности).*

Из этой теоремы следует, что нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M коразмерности два в E_n с двумя ненулевы-

ми собственными значениями тензора Риччи разлагается в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости. Риччи-полусимметрические гиперповерхности геометрически описываются следующей теоремой.

Теорема 2 [3]. В евклидовом пространстве E_{m+1} гиперповерхность M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (а) гиперсферы S^m в E_{m+1} ; (б) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1} ; (в) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n гиперсфера в E_{n+1} , а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$; (г) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n — гиперконус вращения в E_{n+1} , а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$; (д) гиперповерхности ранга ≤ 2 ; (е) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1} , $m \geq 5$, которая несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер, $S^p(r_1)$, $p \geq 2$, и $S^q(r_2)$, $q \geq 2$, и прямой L , и представляет собой конус σ (прямая L в качестве образующей) над прямым произведением $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m(r) \subset E_{m+1}$; (ж) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n — полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1} , описываемая, как и K^m в п. (е), а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 5, \dots, m-1$.

Согласно теореме 1 исследуемый класс риччи-полусимметрических подмногообразий содержится среди попарных произведений гиперповерхностей, перечисленных в теореме 2. Однако не каждое такое произведение будет иметь два ненулевых собственных значения тензора Риччи. Например, произведение двух сфер $S^{m_1}(r_1) \times S^{m_2}(r_2)$, при выполнении условия $\frac{1-m_1}{r_1^2} = \frac{1-m_2}{r_2^2}$, будет эйнштейновым. Поэтому при составлении попарных произведений гиперповерхностей, перечисленных в теореме 2, необходимо проверять наличие двух различных собственных значений тензора Риччи.

5. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условию $i_R = 1$, $\mu = \nu$. Рассмотрим теперь случай, когда в евклидовом пространстве E_n тензор Риччи m -мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда M допускает или только одну группу г.в.к. $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае оно имеет более сложную структуру. Поскольку $n-m=2$, то $0 \leq \mu - \nu + i_R \leq 2$. Из этого неравенства следует, что необходимо

рассмотреть всего три случая: (а) $i_R = 1$, $\mu = \nu$, (б) $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$, (с) $i_R = 2$, $\mu = \nu$.

Рассмотрим случай (а). Условие $i_R = 1$ означает, что размерность линейной оболочки множества всех регулярных г.в.к. равна 1. Поскольку тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение, то этому собственному значению соответствует некоторый регулярный г.в.к. Следовательно, все остальные регулярные г.в.к. коллинеарны этому вектору и все они принадлежат $W^{(1)}$. Тогда группа $W^{(1)}$ состоит или из одного регулярного г.в.к., имеющего кратность, или из двух коллинеарных регулярных г.в.к. Условие $\mu = \nu$ означает, что группа $W^{(0)}$ не содержит ненулевых сингулярных г.в.к. Тогда она либо пуста, либо состоит только из нулевого г.в.к. Таким образом, в рассмотренном случае выполняются условия следующей теоремы (см. [11, 12]): *нормально плоское m -мерное подмногообразие M в E_n с двумя и более ненулевыми главными векторами кривизны является гиперповерхностью тогда и только тогда, когда все эти векторы коллинеарны.*

Согласно этой теореме в случае (а) нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие является риччи-полусимметрической гиперповерхностью. На основании теоремы 2 можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *В евклидовом пространстве E_{m+2} m -мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M , удовлетворяющее условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu$, является риччи-полусимметрической гиперповерхностью в некотором $E_{m+1} \subset E_{m+2}$. Если $\mu = \nu = 0$, то M локально является m -мерной сферой в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$ или двумерной поверхностью с ненулевой гауссовой кривизной в $E_3 \subset E_4$. Если $\mu = \nu = 1$, то M локально является или гиперконусом вращения C^m в E_{m+1} , или произведением $S^{m-1}(r) \times L$ сферы и прямой в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, или трёхмерной гиперповерхностью ранга два в $E_4 \subset E_5$, или полуэйнштейновой гиперповерхностью K^m в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, $m \geq 5$, описанной в п. (е) теоремы 4.2. Если $\mu = \nu \geq 2$, то M локально является или произведением $S^n(r) \times L_{m-n}$, или произведением $C^n \times L_{m-n}$, или гиперповерхностью ранга ≤ 2 , или произведением $K^n \times L_{m-n}$ в $E_{m+1} \subset E_{m+2}$, где L_{m-n} представляет собой плоскость размерности $m-n$.*

6. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$. В случае (б) справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Нормально плоское риччи-полусимметрическое m -мерное подмногообразие M в E_{m+2} , удовлетворяющее условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$ и допускающее только один регулярный г.в.к. кратности $p \geq 2$, является, с точностью до изометрии, открытой частью одного из следующих произведений: $S^p(r) \times L^{m-p}$, $C^{p+1} \times L^{m-p-1}$, $\tilde{C}^{p+1} \times E^{m-p-1}$, $\tilde{C}^{p+1} \tilde{\times} L^{m-p-1}$,*

$(\tilde{C}^{p+1} \tilde{\times} L^{m-p-1-q}) \times E^q$, где L^{m-p} , L^{m-p-1} , $L^{m-p-1-q}$ являются гиперповерхностями ранга 1, E^{m-p-1} , E^q – плоскостями, C^{p+1} – конусом над сферой $S^k(r)$, $\tilde{C}^{k+1}$ – искривлённым конусом над сферой $S^k(r)$, который изометричен конусу C^{k+1} , $0 < q \leq m-p-2$, а $\tilde{\times}$ обозначает знак сплетающегося произведения.

Сплетающиеся произведения подмногообразий были определены в [15].

Теорема 5. Нормально плоское риччи-полусимметрическое m -мерное подмногообразие M в евклидовом пространстве E_{m+2} , удовлетворяющее условиям $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$ и допускающее два коллинеарных (и неравных) регулярных г.в.к., локально представляет собой или

а) подмногообразие кодефектности два, или

б) прямое произведение $(m-n)$ -мерной гиперповерхности ранга один в E_{m-n+1} и полуэйнштейновой гиперповерхности K^n в E_{n+1} ($n \geq 5$), описанной в п. (е) теоремы 2.

7. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 2$, $\mu = \nu$. Пусть m -мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} удовлетворяет этим условиям. Первое условие означает, что группа $W^{(1)}$ регулярных г.в.к. содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства $T_x^{(0)}$ и T'_x совпадают. Следовательно, подмногообразие M допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если T'_x является нулевым пространством, то M – эйнштейново подмногообразие. При $\dim T'_x \geq 1$ подмногообразие M является полуэйнштейновым.

Рассмотрим случай, когда подмногообразие M имеет только два различных линейно независимых г.в.к. n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. В этом случае имеем $\rho = |n_1|^2 - \langle H, n_1 \rangle = |n_2|^2 - \langle H, n_2 \rangle$, где ρ – единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, а $H = p_1 n_1 + p_2 n_2$ – вектор средней кривизны. Подставляя значение H в это равенство, получим $(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2 \rangle - (p_2 - 1)|n_2|^2 = 0$. Отсюда следует, что необходимо рассмотреть всего три случая: 1) $p_1 = p_2 = 1$, 2) $p_1 \geq 2, p_2 = 1, |n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$, 3) $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$. Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть тензор Риччи m -мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M индекса дефектности μ евклидова пространства E_{m+2} допускает только одно ненулевое собственное значение и пусть этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. Тогда M локально является или подмногообразием кодефектности два (если $p_1 = p_2 = 1$), или оно изометрично

цилиндру с μ -мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым канальным подмногообразием $\tilde{M}$ коразмерности три или цилиндру с $(\mu-1)$ -мерными плоскими образующими над конусом, построенному над $\tilde{M}$ (если $p_1 \geq 2, p_2 = 1, |n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$), или является прямым произведением двух сфер и плоскости, или прямым произведением сферы, конуса над сферой и плоскости, или прямым произведением двух конусов над сферами и плоскости, или полуэйнштейновым подмногообразием, которое представляет собой прямое произведение конуса над произведением двух сфер и плоскости, причём произведение этих сфер является $(p_1 + p_2)$ -мерным эйнштейновым подмногообразием евклидова пространства $E_{m-\mu+3}$ и принадлежит гиперсфере этого пространства (если $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$).

Рассмотрим теперь случай, когда группа $W^{(1)}$ содержит три г.в.к. Пусть m -мерное риччи-полусимметрическое подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} удовлетворяет условиям $i_R = 2$, $\mu = \nu$ и допускает только три г.в.к. n_1, n_2, n_3 с кратностями $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2, p_3 \geq 2$ соответственно. Риччи-полусимметричность подмногообразия M равносильна условиям

$$\rho = |n_1|^2 - \langle n_1, H \rangle = |n_2|^2 - \langle n_2, H \rangle = |n_3|^2 - \langle n_3, H \rangle, \quad (1)$$

где $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$. Будем считать, что векторы n_1, n_2 линейно независимы и $n_3 = \eta n_1 + \theta n_2$. Тогда $H = (p_1 + \eta p_3)n_1 + (p_2 + \theta p_3)n_2$ и, подставляя в (1), получим

$$\begin{aligned} (1 - p_1 - \eta p_3)|n_1|^2 + (p_1 - p_2 + (\eta - \theta)p_3)\langle n_1, n_2 \rangle - (1 - p_2 - \theta p_3)|n_1|^2 = 0, \\ (1 - \eta^2 + (\eta - 1)p_1 + (\eta^2 - \eta)p_3)|n_1|^2 + (-2\eta\theta + \theta p_1 + (\eta - 1)p_2 + (2\eta\theta - \theta)p_3)\langle n_1, n_2 \rangle + \\ + (-\theta^2 + \theta p_2 + \theta^2 p_3)|n_2|^2 = 0. \end{aligned}$$

Эта система равносильна условию риччи-полусимметричности. В дальнейшем будем предполагать, что векторы n_1, n_2 взаимно ортогональны и имеют равные модули. Тогда эта система будет иметь следующий вид:

$$p_1 + \eta p_3 = p_2 + \theta p_3, \quad \eta^2(p_3 - 1) + \eta(p_1 - p_3) + 1 - p_1 = \theta^2(1 - p_3) - \theta p_2. \quad (2)$$

Из первого уравнения следует, что в базисе (n_1, n_2) вектор H имеет равные координаты и, следовательно, составляет с векторами n_1, n_2 равные углы. Пусть в системе (2) $\eta = 1$. Тогда

$$\theta p_3 = p_1 - p_2 + p_3, \quad \theta(\theta(1 - p_3) - p_2) = 0.$$

Если $\theta = 0$, то вектор n_3 совпадает с n_1 . Если же $\theta \neq 0$, то $\theta(1 - p_3) = p_2$. Подставляя значение θ , получим $(1 - p_3)(p_1 + p_3) = p_2$, что невозможно. Следовательно, при $\eta = 1$ возможен только случай $\theta = 0$. Аналогично, если в (2) $\theta = 1$, то

$$\eta p_3 = p_2 - p_1 + p_3, \quad \eta(\eta(p_3 - 1) + p_1) = 0.$$

При $\eta = 0$ вектор n_3 совпадает с n_2 . Если же $\eta \neq 0$, то $p_1 = (p_2 + p_3)(1 - p_3)$, что также невозможно. Следовательно, при $\theta = 1$ возможен только случай $\eta = 0$. В последующем эти случаи будем исключать из рассмотрения.

Из первого уравнения системы (2) следует, что $\eta = \theta$ тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2$. Более того, если $\eta = \theta$, то второе уравнение, квадратное относительно η , имеет решение, поскольку $1 - p_1 \leq 0$. Чтобы исследовать систему (2) в общем случае, из первого уравнения значение η подставим во второе. В результате получим

$$2p_3^2(p_3 - 1)\theta^2 + (3p_1p_3^2 - p_1p_3^2 - 2p_2p_3 + 2p_1p_3 - p_3^3)\theta + p_3^2(1 - p_2) - (p_1 - p_2)^2 - p_2p_3(p_1 - p_2) = 0. \quad (3)$$

Поскольку при $p_1 \geq p_2$ свободный член этого уравнения отрицателен, то уравнение имеет решение. Например, при $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ получаем $2\theta^2 + 2\theta - 1 = 0$ и, следовательно, $\theta = \eta = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. Ответ на вопрос о существовании решения этого уравнения при $p_1 \leq p_2$ может быть следующим. Если из первого уравнения системы (2) выразить θ через η и подставить во второе, то получим

$$2p_3^2(p_3 - 1)\eta^2 + (3p_1p_3^2 - p_2p_3^2 - 2p_1p_3 + 2p_2p_3 - p_3^3)\eta + p_3^2(1 - p_1) - (p_1 - p_2)^2 - p_2p_3(p_2 - p_1) = 0. \quad (4)$$

При $p_1 \leq p_2$ свободный член этого уравнения отрицателен, и мы можем определить η , а следовательно, и θ . Поскольку θ должно удовлетворять уравнению (3), то заключаем, что уравнение (3) имеет решение также при $p_1 \leq p_2$. Следовательно, уравнения (3) и (4) имеют решения при любых значениях кратностей p_1, p_2, p_3 .

Таким образом, система (2), обеспечивающая выполнение условия риччи-полусимметричности (в данном случае полуэйнштейновости), всегда имеет решение относительно η и θ , если заданы кратности p_1, p_2, p_3 . Очевидно, что в рассматриваемом случае η и θ являются постоянными, что и будем предполагать в дальнейшем.

Перейдём к геометрическому описанию подмногообразия M . Пусть $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2, p_3 \geq 2$ и пусть $T_x^{(n_1)}, T_x^{(n_2)}, T_x^{(n_3)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам n_1, n_2 и n_3 ($\dim T_x^{(n_1)} = p_1, \dim T_x^{(n_2)} = p_2, \dim T_x^{(n_3)} = p_3, \dim T_x^{(0)} = \mu$). Будем предполагать, что ортонормирующий базис $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что в каждой точке $x \in M$, $e_{i_1} \in T_x^{(n_1)}, e_{i_2} \in T_x^{(n_2)}, e_{i_3} \in T_x^{(n_3)}, e_r \in T_x^{(0)}$, где индексы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} i, j, k &= 1, \dots, m, \quad \alpha, \beta = m+1, m+2, \quad i_1, j_1, k_1 = 1, \dots, p_1, \\ i_2, j_2, k_2 &= p_1+1, \dots, p_1+p_2, \\ i_3, j_3, k_3 &= p_1+p_2+1, \dots, p_1+p_2+p_3, \quad r, s, t = p_1+p_2+p_3+1, \dots, m, \\ \varphi, \psi, \chi &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

На подмногообразии M имеем (см. п.2)

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad \delta_{ij} \lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha + (d\lambda_i^\alpha) \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \quad (5)$$

С учетом принятых обозначений можем написать $\lambda_{i_1}^\alpha = \lambda_{(1)}^\alpha$, $\lambda_{i_2}^\alpha = \lambda_{(2)}^\alpha$, $\lambda_{i_3}^\alpha = \lambda_{(3)}^\alpha$, $\lambda_r^\alpha = 0$. Отсюда и из (5) следует, что $\omega_r^\alpha = 0$. Так как г.в.к. n_1 и n_2 взаимно ортогональны, то нормальные векторы e_{m+1} и e_{m+2} можно выбрать так, чтобы e_{m+1} был сонаправлен с вектором n_1 , а e_{m+2} — с вектором n_2 . Тогда

$$n_1 = \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1}, \quad n_2 = \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2}, \quad n_3 = \eta \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + \theta \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2}, \\ H = (p_1 + \eta p_3) \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + (p_2 + \theta p_3) \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2}.$$

где $\lambda_{(1)}^{m+1} > 0$, $\lambda_{(2)}^{m+2} > 0$. Поскольку векторы n_1 и n_2 имеют равные модули, то $\lambda_{(1)}^{m+1} = \lambda_{(2)}^{m+2} = \lambda$. Если в последнем уравнении системы (5) индексам придавать всевозможные допустимые значения и каждый раз учитывать уже полученные результаты, то в итоге придём к соотношениям

$$h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0, \quad i_\varphi \neq j_\varphi, \quad h_{rsk}^\alpha = h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = h_{i_1 j_1 j_2}^\alpha = h_{i_2 j_2 j_1}^\alpha = h_{i_3 j_3 j_1}^\alpha = h_{i_3 j_3 j_2}^\alpha = h_{i_1 j_1 j_3}^\alpha = h_{i_2 j_2 j_3}^\alpha = 0,$$

$$h_{i_1 j_2 r}^\alpha = h_{i_1 j_3 r}^\alpha = h_{i_2 j_3 r}^\alpha = h_{j_2 r k}^{m+1} = h_{i_1 r k}^{m+2} = 0, \quad h_{i_1 i_1 r}^\alpha = h_{j_1 j_1 r}^\alpha, \quad i_1 = j_1, \quad h_{i_1 i_1 r}^{m+1} = h_{i_2 i_2 r}^{m+2}, \\ \eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} - \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = h_{i_3 i_3 r}^{m+1}, \quad \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} + \eta h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = h_{i_3 i_3 r}^{m+2}, \quad \theta h_{i_3 i_3 r}^{m+1} = \eta h_{i_3 i_3 r}^{m+2}, \quad (6)$$

$$\theta h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = (\eta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2}, \quad (\theta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = \eta h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2}, \quad h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = -h_{i_1 j_2 k_3}^{m+2} \quad (7)$$

и следующей дифференциальной системе:

$$d\lambda = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^r, \quad \lambda \omega_{i_1}^{j_2} = h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} \omega^{k_3}, \quad \theta \lambda \omega_{i_1}^{j_3} = h_{i_1 j_3 k_2}^{m+1} \omega^{k_2}, \quad \eta \lambda \omega_{i_1}^{j_3} = h_{i_2 j_3 k_1}^{m+1} \omega^{k_1}, \\ \lambda \omega_{j_1}^r = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^{j_1}, \quad \lambda \omega_{j_2}^r = h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^{j_2}, \quad \eta \lambda \omega_{j_3}^r = (\eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1} - \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+2}) \omega^{j_3}, \quad (8) \\ \lambda \omega_{m+1}^{m+2} = h_{i_1 i_1 r}^{m+2} \omega^r, \quad \omega_{i_1}^{m+2} = \omega_{j_2}^{m+1} = \omega_r^\alpha = 0.$$

Из системы (6) следует, что $h_{i_1 i_1 r}^{m+2} = 0$, $h_{i_3 i_3 r}^{m+1} = \eta h_{i_1 i_1 r}^{m+1}$, $h_{i_3 i_3 r}^{m+2} = \theta h_{i_1 i_1 r}^{m+1}$, а из (7) имеем $(\eta + \theta - 1) h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = 0$. Если $(\eta + \theta - 1) \neq 0$, то $h_{i_1 j_2 k_3}^{m+1} = 0$ для любых допустимых значений нижних индексов. В этом случае из (8) следует, что $\omega_{i_1}^{j_2} = \omega_{i_1}^{j_3} = \omega_{i_3}^{j_2} = 0$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_{i_1}^{j_2} = 0$ и учитывая независимость форм $\omega^{i_1} \wedge \omega^{j_2}$, получим $\sum_r (h_{i_1 i_1 r}^{m+1})^2 = 0$ или

$h_{i_1 i_1 r}^{m+1} = 0$. Следовательно, $\omega_{i_1}^r = \omega_{j_2}^r = \omega_{k_3}^r = 0$ и распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$, $T^{(0)}$ параллельны на подмногообразии M . Тогда они интегрируемы и вполне омбиличны в E_{m+2} . Интегральные многообразия распределений $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$ представляют собой сферы размерностей p_1 , p_2 , p_3 соответственно, а интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$ является μ -мерной плоскостью (см., например, [5, 11]). Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то подмногообразие M разлагается в прямое произведение их интегральных многообразий, т.е. является прямым произведением трёх сфер и плоскости, что

невозможно, поскольку такое произведение имеет существенную коразмерность три. Если $\eta + \theta - 1 = 0$, то, подставляя в (2) $\theta = 1 - \eta$, будем иметь

$$2\eta p_3 = p_2 - p_1 + p_3, \quad 2(p_3 - 1)\eta^2 + (p_1 - p_3 + 2 - 2p_3 - p_2)\eta + p_2 + p_3 - p_1 = 0.$$

Отсюда путём прямого вычисления получим

$$(p_2 + p_3 - p_1) \left(\frac{p_2 + p_3 - p_1}{2p_3^2} (p_3 - 1) + \frac{p_1 - p_2 - 3p_3 + 2}{2p_3} + 1 \right) = 0.$$

Если $p_2 - p_1 + p_3 = 0$, то $\eta = 0$ и, следовательно, $\theta = 1$. Тогда $n_3 = n_2$. Если же

$$\frac{p_2 + p_3 - p_1}{2p_3^2} (p_3 - 1) + \frac{p_1 - p_2 - 3p_3 + 2}{2p_3} + 1 = 0,$$

то $p_2 = p_1 + p_3$ и, следовательно, $\eta = 1$. В этом случае вектор n_3 совпадает с вектором n_2 . Итак, справедлива следующая

Теорема 7. *В евклидовых пространствах не существуют нормально плоские риччи-полусимметрические (в частности, полуэйнштейновы) подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 2$, $\mu = \nu$ и допускающие три главных вектора кривизны, из которых два взаимно ортогональны и имеют равные модули, а третий не коллинеарен ни одному из них.*

Национальный политехнический университет Армении

В. А. Мирзоян

Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два в евклидовых пространствах

Описанию локальное строение нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два в евклидовых пространствах.

Վ. Ա. Միրզոյան

Երկու կոչափի նորմալ հարթ թիչի-կիսաէմետրիկ ենթաբազմադրությունները Էվկլիդեսյան տարածություններում

Աշխատանքը նվիրված է երկու կոչափի նորմալ հարթ թիչի-կիսաէմետրիկ ենթաբազմադրությունների լոկալ կառուցվածքի նկարագրությանը Էվկլիդեսյան տարածություններում:

V. A. Mirzoyan

Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimension Two in Euclidean Spaces

The description of local structure of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds of codimension two in Euclidean space is presented.

Литература

1. Lumiste Ü. Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer.2009. - 306 p.
2. Мирзоян В. . – Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. – Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.
4. Мирзоян В.А. – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. Мирзоян В.А. – Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. – Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С. – Математика в высшей школе. 2008. Т. 4. № 4. С. 31-41.
8. Мачкалян Г. С. – Математика в высшей школе. 2009. Т. 5. № 3. С.14-21.
9. Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С. – ДНАН РА. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
10. Мачкалян Г. С., Чахмахчян Р. Э. – Математика в высшей школе. 2011. Т. 7. № 3. С. 5-15.
11. Мирзоян В. А. – Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
12. Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С. – Изв.вузов. Математика. 2012. № 9. С.19-31.
13. Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С., Чахмахчян Р. Э. – ДНАН РА. 2012. Т. 112. № 2. С.141-151.
14. Мирзоян В.А, Мачкалян Г.С., Чахмахчян Р.Э. – Вестник ГИУА. 2012. Ч. 1. С. 3-7.
15. Mirzoyan V. A. – Reports of NAS RA. 2012. V.112. № 1. P. 19-29.
16. Мирзоян В.А., Налбандян Г. А., Чахмахчян Р.Э. – Вестник ГИУА. 2013. Ч. 1. С. 3-8.
17. Мирзоян В. А., Мачкалян Г.С. – Вестник ГИУА. 2014. Ч. 1. С. 8-12.
18. Мирзоян В. А., Назарян А. Р. – Вестник НПУА. 2015. Ч. 1. С. 3-8.
19. Назарян А. Р. – ДНАН РА. 2016. Т. 116. № 1. С. 13-25.
20. Назарян А. Р. – Математика в высшей школе. 2016. Т. 12. № 1. С. 46-56.
21. Мирзоян В. А., Назарян А. Р. – Математика в высшей школе. 2016. Т.12. № 1. С. 19-30.
22. Chern S. S., Kuiper N. H. – Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Саркисян¹, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян¹,
Л. И. Маневич², С. А. Тиман²

**Прикладная теория изгибной деформации упругой тонкой
балки на основе моментной теории со стесненным
вращением и ее приложение к полимерам**

(Представлено 26/V 2017)

Ключевые слова: *прикладная теория, изгиб, балка, моментная теория, полимеры.*

В определенных приложениях, в частности, при моделировании полимерных макромолекул, необходимо будет включать в модель не геометрические точки, а малые, но конечные объёмы, которым приписаны смещения и повороты, так же, как и силы и моменты межмолекулярного взаимодействия [1-5]. В работе [6] построена моментная континуальная модель деформации полугетиленовых цепей исходя из их молекулярной модели и определены ее физические постоянные через параметры молекулярной структуры цепей [7, 8]. В работе [9] устанавливается феноменологическая моментная теория упругости со стесненным вращением, которая адекватна континуальной модели полиэтиленовой цепи [6].

В данной статье на основе трехмерной модели работы [9] построена прикладная теория изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением.

1. Трехмерная континуальная моментная теория упругости со стесненным вращением. Основные уравнения моментной теории упругости со стесненным вращением как континуальная модель для полиэтилена имеют вид [9]:

уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + \sigma_{31} - \sigma_{13} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{11} \varepsilon_{22} + c_{33}^{11} \varepsilon_{33}, & \sigma_{13} + \sigma_{31} &= 2c_{13}^{13} \varepsilon_{13}, \\
 \sigma_{22} &= c_{22}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{22} \varepsilon_{33}, & \sigma_{23} + \sigma_{32} &= 2c_{23}^{23} \varepsilon_{23}, \\
 \sigma_{33} &= c_{33}^{11} \varepsilon_{11} + c_{33}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}, & \mu_{31} &= k_1 \chi_{31} - k_2 \chi_{32}, \\
 \sigma_{21} = \sigma_{12} &= c_{12}^{12} \varepsilon_{12} & \mu_{32} &= k_1 \chi_{32} - k_2 \chi_{31}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3} \sigma_{33} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \quad \text{или} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G_{23}} (\sigma_{23} + \sigma_{32}), & \chi_{31} &= \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2} \mu_{31} + \frac{k_2}{k_1^2 - k_2^2} \mu_{32}, \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2G_{13}} (\sigma_{13} + \sigma_{31}), & \chi_{32} &= \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2} \mu_{32} + \frac{k_2}{k_1^2 - k_2^2} \mu_{31};
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}, \\
 \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}; \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \tag{1.5}$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ – силовые напряжения; μ_{31}, μ_{13} – моментные напряжения; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения; $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор поворота; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ – деформации; χ_{31}, χ_{32} – изгибы-кручения; $c_{11}^{11}, c_{22}^{11}, c_{33}^{11}, c_{22}^{22}, c_{33}^{22}, c_{33}^{33}, c_{13}^{13}, c_{23}^{23}, c_{12}^{12}, k_1, k_2$ (или $E_1, E_2, E_3, \nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{31}, \nu_{13}, \nu_{32}, \nu_{23}, k_1, k_2$) – упругие постоянные континуального полиэтилена, вычисленные в работах [7, 8] и выраженные через физические данные атомного уровня кристалла полиэтилена.

Рассматриваемое тело представляет собой призматическое тело, ось z – его ось, оси x и y расположены в поперечном сечении тела и представляют собой главные центральные оси этого сечения (поперечное сечение рассматриваемого призматического тела будем считать прямоу-

гольником: $2a \times 2b$), длину тела обозначим через l (тогда $-b \leq x \leq b$, $-h \leq y \leq h$, $0 \leq z \leq l$).

К основным трехмерным уравнениям континуального полиэтилена следует присоединить граничные условия (а также начальные условия в случае задачи динамики).

Выражение для плотности потенциальной энергии деформации имеет вид [9]:

$$W = \frac{1}{2} (c_{11}^{11} \varepsilon_{11}^2 + c_{22}^{22} \varepsilon_{22}^2 + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}^2 + c_{12}^{12} \varepsilon_{12}^2 + c_{13}^{13} \varepsilon_{13}^2 + c_{23}^{23} \varepsilon_{23}^2 + 2c_{22}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2c_{33}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + 2c_{33}^{22} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + k_1 \chi_{31}^2 + k_1 \chi_{32}^2 - 2k_2 \chi_{31} \chi_{32}). \quad (1.6)$$

Нашей основной целью является построение прикладной теории изгиба тонких балок исходя из трехмерной модели моментной теории упругости со стесненным вращением ((1.1)-(1.6)).

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты; деформации, изгибы-кручения; силовые и моментные напряжения. При построении прикладной теории тонкой балки ($2a \ll l$, $2b \ll l$) исходя из трехмерной моментной теории упругости со стесненным вращением будем пользоваться гипотезами [10-13], суть которых состоит в следующем:

1) В процессе деформации поперечные сечения тонкой балки поворачиваются как жесткое целое вокруг двух взаимно перпендикулярных осей x и y на некоторые углы, не изменяя своих размеров и не оставаясь перпендикулярными к деформированной исходной оси z балки. Это известная кинематическая гипотеза Тимошенко [14, 15] при изгибной деформации тонкой балки, в данном случае при изгибе в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (yz и xz).

2) Нормальными напряжениями σ_{11} и σ_{22} будем пренебрегать в выражении ε_{33} относительно нормального напряжения σ_{33} , а также будем считать $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$.

3) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} сначала примем

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^0(z), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^0(z). \quad (2.1)$$

После определения указанных выше величин окончательные выражения для σ_{13} и σ_{23} определим как сумму (2.1) и результата интегрирования уравнения равновесия (движения) (1.1)₃ (с учетом закона независимого действия сил), с требованием равенства нулю соответствующего интеграла (в плоскости yz от $-h$ до $+h$; в плоскости xz от $-b$ до $+b$).

Математически принятую кинематическую гипотезу Тимошенко можем записать так:

$$u_1 = u_1(z), \quad u_2 = u_2(z), \quad (2.2)$$

$$u_3 = y \cdot \psi_1(z) + x \cdot \psi_2(z), \quad (2.3)$$

где $u_1(z)$ – прогиб оси балки в плоскости xz , а $u_2(z)$ – прогиб оси балки в плоскости yz ; $\psi_1(z)$ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг главной центральной оси инерции x этого сечения, а $\psi_2(z)$ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг оси y ; (x, y) – произвольная точка поперечного сечения балки. Отметим, что площадь поперечного сечения и моменты инерции относительно осей x и y будут:

$$F = 2h \cdot 2b = 4hb, J_x = \frac{2b \cdot (2h)^3}{12} = \frac{4bh^3}{3}, J_y = \frac{2h \cdot (2b)^3}{12} = \frac{4hb^3}{3}. \quad (2.4)$$

Подставляя в формулы (1.5) выражения для перемещений (2.2), (2.3), для углов поворота получим:

$$\omega_1 = \Omega_1(z) = \frac{1}{2} \left(\psi_1(z) - \frac{du_2(z)}{dz} \right), \quad \omega_2 = \Omega_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{du_1(z)}{dz} - \psi_2(z) \right), \quad \omega_3 = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя формулы для перемещений (2.2), (2.3) и поворотов (2.5) в геометрические соотношения (1.4), для деформаций и изгибов-кручений будем иметь:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{33} = y \cdot \frac{d\psi_1(z)}{dz} + x \cdot \frac{d\psi_2(z)}{dz}, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{du_1(z)}{dz} + \psi_2(z), \quad \varepsilon_{23} = \psi_1(z) + \frac{du_2(z)}{dz}, \quad (2.8)$$

$$\chi_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_1(z)}{dz} - \frac{d^2 u_2(z)}{dz^2} \right), \quad \chi_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} - \frac{d\psi_2(z)}{dz} \right), \quad (2.9)$$

Приняв обозначения

$$K_{11} = \frac{d\psi_1(z)}{dz}, \quad K_{22} = \frac{d\psi_2(z)}{dz}, \quad \Gamma_{13} = \psi_2(z) + \frac{du_1(z)}{dz}, \quad \Gamma_{23} = \psi_1(z) + \frac{du_2(z)}{dz}, \quad (2.10)$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_1(z)}{dz} - \frac{d^2 u_2(z)}{dz^2} \right), \quad \lambda_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} - \frac{d\psi_2(z)}{dz} \right),$$

формулы (2.6)-(2.9) можем записать так:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{33} = y \cdot K_{11}(z) + x \cdot K_{22}(z), \quad \varepsilon_{13} = \Gamma_{13}(z), \quad \varepsilon_{23} = \Gamma_{23}(z),$$

$$\chi_{31} = \lambda_{31}(z), \quad \chi_{32} = \lambda_{32}(z).$$

Как видно из формул (2.2), (2.3), (2.5), (2.10), (2.11), основными кинематическими функциями задачи являются: $u_1(z)$, $u_2(z)$, $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$.

На основе гипотезы 2) из соотношения закона Гука (1.3)₃ для нормального силового напряжения σ_{33} , а также для моментных напряжений μ_{31}, μ_{32} из (1.3)₄, (1.3)₅, получим:

$$\sigma_{33} = E_3 \cdot \varepsilon_{33} = E_3 (y \cdot K_{11}(z) + x \cdot K_{22}(z)), \quad (2.12)$$

$$\mu_{31} = \mu_{31}(z) = k_1 \lambda_{31}(z) - k_2 \lambda_{32}(z), \quad \mu_{32} = \mu_{32}(z) = k_1 \lambda_{32}(z) - k_2 \lambda_{31}(z). \quad (2.13)$$

На основе гипотезы 3) уравнения (1.3)₅, (1.3)₆ (с учетом (2.11)) и уравнения равновесий (1.1)₄, (1.1)₅ представим в виде:

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}(z) = 2G_{13} \cdot \Gamma_{13}(z) - \overset{0}{\sigma}_{13}(z), \quad \sigma_{32} = \sigma_{32}(z) = 2G_{23} \cdot \Gamma_{23}(z) - \overset{0}{\sigma}_{23}(z), \quad (2.14)$$

$$\frac{d\mu_{31}(z)}{dz} + \overset{0}{\sigma}_{23}(z) - \sigma_{32}(z) = 0, \quad \frac{d\mu_{32}(z)}{dz} + \sigma_{31}(z) - \overset{0}{\sigma}_{13}(z) = 0. \quad (2.15)$$

Отметим, что первые два уравнения равновесия из (1.1) с учетом гипотезы 2) (учитывая, что $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} = 0 \quad (2.16)$$

и будут служить для определения нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} (с учетом граничных условий при $x = \pm b$ для σ_{11} и $y = \pm h$ для σ_{22}). Как видно из (2.16) (имея в виду, что $\sigma_{31} = \sigma_{31}(z)$, $\sigma_{32} = \sigma_{32}(z)$; формулы (2.14)), σ_{11} будет линейной функцией по x , а σ_{22} — линейной функцией по y и оба будут функциями также и по z .

Для получения уточнённых выражений для силовых касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} выполним вычисления по гипотезе 3). Будем считать, что по формуле (2.12) уже определено нормальное силовое напряжение σ_{33} . Тогда исходя из принципа независимого действия сил (т.к. рассматриваемая задача линейная) вместо третьего уравнения равновесия можем записать два отдельных уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{33}^* = x \cdot \overset{1*}{\sigma}_{33}(z), \quad \overset{1*}{\sigma}_{33}(z) = E_3 \cdot K_{22}(z), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}^{**}}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{33}^{**} = y \cdot \overset{1**}{\sigma}_{33}(z), \quad \overset{1**}{\sigma}_{33}(z) = E_3 \cdot K_{11}(z). \quad (2.18)$$

Интегрируя уравнение (2.17) по x , а (2.18) по y , получим

$$\bar{\sigma}_{13} = \overset{0}{\sigma}_{13}(z) - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d \overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz}, \quad \bar{\sigma}_{23} = \overset{0}{\sigma}_{23}(z) - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{d \overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}. \quad (2.19)$$

По гипотезе 3) от результатов интегрирования (2.19) будем требовать соответственно условие

$$\int_{-b}^b \bar{\sigma}_{13} dx = 0, \quad \int_{-h}^h \bar{\sigma}_{23} dy = 0. \quad (2.20)$$

Тогда для $\overset{0}{\sigma}_{13}(z)$ и $\overset{0}{\sigma}_{23}(z)$ имеем

$$\overset{0}{\sigma}_{13}(z) = \frac{b^2}{6} \cdot \frac{d \overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz}, \quad \overset{0}{\sigma}_{23}(z) = \frac{h^2}{6} \cdot \frac{d \overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в формулы (2.19), для $\bar{\sigma}_{13}$ и $\bar{\sigma}_{23}$ получим

$$\bar{\sigma}_{13} = \left(\frac{b^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \frac{d \overset{1*}{\sigma}_{33}(z)}{dz}, \quad \bar{\sigma}_{23} = \left(\frac{h^2}{6} - \frac{y^2}{2} \right) \frac{d \overset{1**}{\sigma}_{33}(z)}{dz}. \quad (2.22)$$

Теперь на основании гипотезы 3) запишем окончательные формулы для силовых касательных напряжений σ_{13} и σ_{23} (сумма (2.1) и (2.22)):

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^0(z) + \left(\frac{b^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \frac{d\sigma_{33}^{1*}(z)}{dz}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^0(z) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{y^2}{2} \right) \frac{d\sigma_{33}^{1**}(z)}{dz}. \quad (2.23)$$

При помощи формул (2.23) можем удовлетворить граничным условиям для σ_{13} и σ_{23} :

$$\sigma_{13}|_{x=\pm b} = q_{13}(z), \quad \sigma_{23}|_{y=\pm h} = q_{23}(z), \quad (2.24)$$

в результате придем к следующим уравнениям:

$$\sigma_{13}^0(z) - \frac{b^2}{3} \cdot \frac{d\sigma_{33}^{1*}(z)}{dz} = q_{13}(z), \quad \sigma_{23}^0(z) - \frac{h^2}{3} \cdot \frac{d\sigma_{33}^{1**}(z)}{dz} = q_{23}(z), \quad (2.25)$$

3. Прикладная теория изгибной деформации микрополярной тонкой балки со стесненным вращением. С целью приведения трехмерной задачи моментной теории упругости со стесненным вращением к одномерной (прикладной), что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории тонкой балки вместо силовых и моментных напряжений введем статически эквивалентные им интегральные характеристики – усилия N_{i3} , N_{3i} , моменты от силовых напряжений M_{ii} , моменты от моментных напряжений L_{3i} ($i=1,2$), которые с учетом формул (2.1), (2.12), (2.13) примут вид

$$N_{13} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{13} dx dy = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{13}^0(z) dx dy = 2h \cdot 2b \sigma_{13}^0(z), \quad (3.1)$$

$$N_{23} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{23} dx dy = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{23}^0(z) dx dy = 2h \cdot 2b \sigma_{23}^0(z), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{33} \cdot y dy dx = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \left(y \cdot \sigma_{33}^{1**}(z) + x \cdot \sigma_{33}^{1*}(z) \right) \cdot y dy dx = \\ &= \int_{-h}^h \int_{-b}^b y^2 \sigma_{33}^{1**}(z) dy dx = 2b \cdot \frac{2h^3}{3} \sigma_{33}^{1**}(z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$M_{22} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \sigma_{33} \cdot x dx dy = 2h \cdot \frac{2b^3}{3} \sigma_{33}^{1*}(z), \quad (3.4)$$

$$L_{31} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \mu_{31} dx dy = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \mu_{31}(z) dx dy = 2h \cdot 2b \cdot \mu_{31}(z), \quad (3.5)$$

$$L_{32} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \mu_{32} dx dy = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \mu_{32}(z) dx dy = 2h \cdot 2b \cdot \mu_{32}(z). \quad (3.6)$$

Из формул (3.1)-(3.6), определяя $\sigma_{13}^0(z)$, $\sigma_{23}^0(z)$, $\sigma_{33}^{1*}(z)$, $\sigma_{33}^{1**}(z)$, $\mu_{31}(z)$, $\mu_{32}(z)$ и подставляя их в формулы (2.28), (2.29), (2.15), придем к следующим уравнениям равновесия прикладной моментной теории со стесненным вращением для изгибной деформации тонкой балки:

$$N_{13}(z) - \frac{dM_{22}(z)}{dz} = q_{23} \cdot 2h \cdot 2b, \quad N_{23}(z) - \frac{dM_{11}(z)}{dz} = q_{13} \cdot 2h \cdot 2b,$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_{31}(z)}{dz} + N_{23}(z) - N_{32}(z) &= 0, & \frac{dL_{32}(z)}{dz} + N_{31}(z) - N_{13}(z) &= 0, \\ \frac{dN_{31}(z)}{dz} + 2h \cdot q_{11}(z) &= 0, & \frac{dN_{32}(z)}{dz} + 2b \cdot q_{22}(z) &= 0.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Отметим, что последние два уравнения равновесия получены на основе уравнений (2.17), (2.18), с применением к ним интегрального оператора $\int_{-h}^h \int_{-b}^b (\cdot) dx dy$ с учетом граничных условий для σ_{11} при $x = \pm b$, для σ_{22} при $y = \pm h$.

Соотношения упругости для прикладной модели тонкой балки получим на основании формул (2.14), (2.13), (2.12). Таким образом,

$$\begin{aligned}N_{13} + N_{31} &= 2G_{13} \cdot F \cdot \Gamma_{13}, \quad N_{23} + N_{32} = 2G_{23} \cdot F \cdot \Gamma_{23}, \quad M_{11} = E_3 \cdot J_{11} \cdot K_{11}, \\ M_{22} &= E_3 \cdot J_{22} \cdot K_{22}, \quad L_{31} = (k_1 \lambda_{31} - k_2 \lambda_{32}) \cdot F, \quad L_{32} = (k_1 \lambda_{32} - k_2 \lambda_{31}) \cdot F.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Геометрическими соотношениями прикладной теории тонкой балки будут служить соотношения (2.10).

Таким образом, построена математическая модель изгибной деформации тонкой балки по моментной теории упругости со стесненным вращением, основную систему уравнений которой представляют уравнения равновесия (3.7), физические соотношения упругости (3.8) и геометрические условия (2.10). К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия при $z = 0$ и $z = l$. Легко подсчитать, что количество уравнений в этой модели – 18, а неизвестных: $u_1(z)$, $u_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\Gamma_{13}(z)$, $\Gamma_{23}(z)$, $K_{11}(z)$, $K_{22}(z)$, $\lambda_{31}(z)$, $\lambda_{32}(z)$, $N_{13}(z)$, $N_{23}(z)$, $N_{31}(z)$, $N_{32}(z)$, $M_{11}(z)$, $M_{22}(z)$, $L_{31}(z)$, $L_{32}(z)$ – тоже 18.

Решая 3-е и 4-е уравнения из системы уравнений равновесия (3.7) с первыми двумя уравнениями из соотношений упругости (3.8), определим N_{13}, N_{31} и N_{23}, N_{32} . Подставляя их в первые два и последние два уравнения равновесия из (3.7) и используя геометрические соотношения (2.10), придем к системе из четырех уравнений относительно функций $u_1(z)$, $u_2(z)$, $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$.

В силу принятых гипотез из (1.6) для плотности потенциальной энергии деформации прикладной теории тонкой балки по моментной теории со стесненным вращением имеем

$$\begin{aligned}\tilde{W}_0 &= \frac{1}{2} \{ C_{33}^{33} J_x K_{11}^2(z) + C_{33}^{33} J_y K_{22}^2(z) + F (C_{13}^{13} \cdot \Gamma_{13}^2(z) + C_{23}^{23} \cdot \Gamma_{23}^2(z) + \\ &+ k_1 \lambda_{31}^2(z) + k_1 \lambda_{32}^2(z) - 2k_2 \lambda_{31}(z) \lambda_{32}(z)) \},\end{aligned}\quad (3.9)$$

а полная потенциальная энергия в балке будет

$$\tilde{U}_0 = \int_0^l \tilde{W}_0(z) dz.$$

В случае динамической задачи основные уравнения прикладной теории микрополярной тонкой балки со стесненным вращением выводятся аналогично статической (только все величины будут также функциями от

t). В итоге уравнения движения примут вид (3.7) с учетом инерционных членов, а соотношениями упругости и геометрическими соотношениями будут служить соответственно формулы (3.8), (2.10).

4. Задачи о равновесии и свободных колебаниях изгибной деформации тонких балок по моментной теории со стесненным вращением. Рассмотрим конкретные примеры изгиба балки: статическую задачу и задачу о свободных колебаниях, когда ее оба конца шарнирно оперты и балка загружена в плоскости x_2x_3 равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = q_2(z) = \text{const}$ (при свободных колебаниях $q \equiv 0$). Шарнирное опирание означает, что на концах балок ($z = 0$ и $z = l$) в плоскости yz равны нулю u_2 , M_{11} и L_{31} , а в плоскости xz – u_1 , M_{22} и L_{32} , т.е.

в плоскости yz : $u_2 = 0, M_{11} = 0, L_{31} = 0$, при $z = 0$ и $z = l$;

в плоскости xz : $u_1 = 0, M_{22} = 0, L_{32} = 0$, при $z = 0$ и $z = l$.

Поставленные задачи будем решать методом разделения переменных.

Решение системы уравнений (3.7), (3.8), (2.10) представим в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \sin \frac{m\pi z}{l}, & u_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \sin \frac{m\pi z}{l}, \\ \psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{1m} \cos \frac{m\pi z}{l}, & \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{2m} \cos \frac{m\pi z}{l}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где U_{1m} , U_{2m} , Ψ_{1m} , Ψ_{2m} – коэффициенты рядов – неизвестные постоянные числа. Отметим, что решение в виде (4.1) автоматически удовлетворяет колебаниям под суммой в каждую формулу из (4.1) необходимо добавить множитель $e^{ip_m t}$.

В статической задаче нагрузку $q_2 = q = \text{const}$ тоже необходимо представить в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье.

Данные задачи: $l = 100 \text{ нм (нанометр)}$, $2h = 2b = 1 \text{ нм}$, $q_2 = 0.5 \cdot 10^3 \frac{\text{кгс}}{\text{м}^2}$,

$C_{11}^{11} = 18.1 \text{ ГПа}$, $C_{22}^{22} = 17.3 \text{ ГПа}$, $C_{33}^{33} = 193 \text{ ГПа}$, $C_{22}^{11} = 11 \text{ ГПа}$, $C_{33}^{11} = 4 \text{ ГПа}$,
 $C_{33}^{22} = 5 \text{ ГПа}$, $C_{12}^{12} = 8.63 \text{ ГПа}$, $C_{13}^{13} = 0.75 \text{ ГПа}$, $C_{23}^{23} = 2.18 \text{ ГПа}$, $k_1 = 200 \text{ Н}$,
 $k_2 = 200 \text{ Н}$.

Результаты численных вычислений таковы:

а) статическая задача:

$W_{1\text{max}}^{\text{мом}} = -2.07 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, $W_{2\text{max}}^{\text{мом}} = 2.07 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, $W_{1\text{max}}^{\text{кл}} = 0$, $W_{1\text{max}}^{\text{кл}} = 4.125 \cdot 10^{-11} \text{ м}$,

б) свободные колебания:

$p_{11\text{мом}}^1 = 4.314 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, $p_{11\text{кл}}^1 = 3.987 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$.

Как можно убедиться, учет моментности в статической задаче приводит к повышению жесткости балки, а частоты колебаний находятся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RF-063 и 15-53-05093 соответственно.

¹Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

²Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН

**А. А. Саркисян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
Л. И. Маневич, С. А. Тиман**

**Прикладная теория изгибной деформации упругой тонкой балки
на основе моментной теории со стесненным вращением
и ее приложение к полимерам**

Построена модель изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки со стесненным вращением. Установлена формула для вычисления плотности потенциальной энергии деформации. Решены задачи о статическом равновесии и свободных колебаниях микрополярной балки и показаны специфические эффекты учета моментных напряжений. Даны рекомендации применения построенной модели для полимеров.

**Ա. Հ. Սարգսյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Օ. Սարգսյան,
Լ. Ի. Մանևիչ, Ս. Ա. Տիման**

**Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային տեսության հիման վրա
առաձգական բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական
տեսությունը և նրա կիրառությունը պոլիմերների մոտ**

Կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի կաշկանդված պտույտներով մոդելը: Հաստատվում է բանաձև դեֆորմացիայի պոտենցիալ էներգիայի խտությունը հաշվելու համար: Լուծված են միկրոպոլյար ձողի հավասարակշռության և սեփական տատանումների խնդիրները, և ցույց են տրված մոմենտային լարումների հաշվառման էֆեկտիվ յուրահասկությունները: Կառուցված մոդելի կիրառության վերաբերյալ պոլիմերների մոտ տրվում է երաշխավորություն:

**A.H. Sargsyan, corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan,
L. I. Manevich, S. A. Timan**

**Applied Theory of Bending Deformation of an Elastic Thin Bar Based on
Moment Theory with Constrained Rotation and
Its Application to Polymers**

A model of bending deformation of micropolar elastic thin bar with constrained rotation is constructed. A formula is established for calculation of the density of the potential energy deformation. The problems of static equilibrium and free oscillations of micropolar bar are solved and specific effects of moment stresses are shown. Recommendation is given to apply the constructed model to polymers.

Литература

1. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.* – Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
2. *Потапов А. И., Лисина С. А., Павлов И. С. и др.* Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижегород. гос. техн. ун-т им Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород. 2010. 303 с.
3. *Gendelman O.V., Manevitch L. I.* – Inter. J. of Solids and Structures. 1996. V. 33. P. 1781-1798.
4. *Бровко Г. Л.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 75-91.
5. *Бровко Г. Л., Иванова О. А.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 22-36.
6. *Саркисян С. О., Маневич Л. И., Тиман С. А.* В: Сб. трудов XVII ежегодной науч. конф. отдела полимеров и композитных материалов. Москва. 15-17 февраля 2016. Полимеры 2016. Изд-во ИХФ РАН. 2016. С. 128-129.
7. *Саркисян С. О., Стрельников И. В., Мазо М.А., Зубова Е. А., Маневич Л. И., Берлин А. А.* – Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. химия. 2016. № 1. С. 33-39.
8. *Зубова Е. А., Стрельников И. А., Балабаев Н. К., Савин А. В., Мазо М. А., Маневич Л. И.* – Высокомолекулярные соединения. Сер. А. 2017. Т. 59. №1. С. 101-110.
9. *Берлин А. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* – ДНАН РА. 2016. Т. 116. № 3. С. 210-218.
10. *Саркисян С. О.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
11. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
12. *Sargsyan S. H.* – J. of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. № 1. P. 98-108.
13. *Саркисян С. О.* – В: Упругость и неупругость. Матер. Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. М. Изд-во МГУ. 2011. С. 231-235.
14. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
15. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. М. ВИНТИ. 1973. Т. 5. 199 с.

УДК 209 645

М. Е. Вейсман¹, Н. Е. Андреев^{1,2}
 член-корреспондент НАН РА Г. Г. Матевосян³, О. С. Ароян³

Широкодиапазонная диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов

(Представлено 28/VI 2017)

Ключевые слова: *столкновительная плазма; диэлектрическая проницаемость; идеальная, вырожденная, лазерная плазма.*

1. Введение. Проблема взаимодействия интенсивных лазерных импульсов с плазмой и твердотельными мишенями имеет фундаментальное значение при изучении различных аспектов поведения вещества в поле интенсивного лазерного излучения, а также имеет ряд практических применений, например, в сценарии быстрого поджига [1], для разработки новых источников излучения в рентгеновском диапазоне волн и для получения плотных и горячих состояний вещества [2], для ускорения частиц [3], а также для генерации ударных волн с применением лазеров. За последние десятилетия различные аспекты взаимодействия излучения с плазмой исследовались во многих работах (см., например, [4-7]). В настоящее время различные модели этих взаимодействий широко обсуждаются в литературе (см., например, [8-13] и приведенную там литературу). Ключевой физической величиной, характеризующей взаимодействие излучения с плазмой, а также оптические свойства вещества, является диэлектрическая проницаемость (ДП) $\varepsilon(\omega)$, определяющая электромагнитный отклик системы на малые возмущения. Таким образом, разработка теоретических моделей для ДП, пригодных в широких диапазонах параметров плазмы, важна как с точки зрения фундаментальных исследований, так и различных прикладных задач.

Диэлектрическая проницаемость плазмы хорошо изучена в двух противоположных предельных случаях – бесстолкновительного [5-7] и сильностолкновительного гидродинамического пределов [14, 15]. Важным шагом в создании слабостолкновительной теории явилась работа [16].

В последние годы широко используется упрощенная модель столкновительной плазмы, основанная на двух разновидностях модельного инте-

грала столкновений Батнагара–Гросса–Крука (БГК) [17] в кинетическом уравнении для электронов, сохраняющего или не сохраняющего локальное число частиц [7, 18-23]. Кроме того, стандартное БГК-приближение можно обобщить таким образом, чтобы сохранялись локальное число и энергия частиц [24, 25], а также число, импульс и энергия частиц [26, 27]. В случае полностью ионизованной плазмы модельная ДП в рамках БГК-приближения и вытекающая из нее модель Друде для поперечной ДП [7, 21-23], приводят к значительным отклонениям от известных предельных случаев в области умеренных и сильных столкновений [28-30]. Значительное улучшение теории достигается в рамках лоренцевой модели плазмы [30-32], не обеспечивающей, однако, удовлетворительную точность описания ДП плазмы даже с высокой степенью ионизации. Следует также отметить работу [33], где применялось упрощенное кинетическое уравнение Фоккера – Планка с постоянными (и заданными) кинетическими коэффициентами. Было показано, что вытекающая из этой модели ДП почти не отличается от ДП Мермина [18], сохраняющей локальное число частиц. Получены также выражения для ДП бесстолкновительной квантовой плазмы [34], пригодные и в области релятивистских температур.

В случае плазмы с большим зарядом ионов $Z \gg 1$, когда электрон-электронный интеграл столкновений учитывается только в уравнении для симметричной части функции распределения электронов, продольная и поперечная ДП получены в работах [35] и [29] соответственно. Для обобщения этих результатов на случай произвольного Z необходимо учесть интеграл электрон-электронных столкновений и для анизотропной части функции распределения. Данная проблема была рассмотрена недавно в работе [36] без каких-либо ограничений на рассматриваемые параметры на базе линеаризованного кинетического уравнения для электронов с интегралом столкновений в форме Ландау. Таким образом, развитая теория справедлива для произвольного заряда ионов Z и для произвольного значения величин $k\lambda_{ei}$, ω/kv_{th} и ω/v_{ei} , где λ_{ei} – длина свободного пробега электрона по отношению к столкновениям с ионами, k – волновой вектор возмущения, v_{ei} – частота электрон-ионных столкновений, v_{th} – тепловая скорость электронов. Однако следует отметить, что использование предложенной в [36] точной модели в практических целях чрезвычайно затруднительно, поскольку данная теория не определяет ДП в явном виде через параметры плазмы. Поэтому разработка более упрощенных, но вместе с тем пригодных в широких диапазонах параметров плазмы моделей является актуальной задачей. Кроме того, в работе [36] рассмотрен случай идеальной и невырожденной плазмы, что значительно сужает область применений результатов этой работы для описания взаимодействия лазерного излучения с веществом.

В работе [37] нами было предложено альтернативное и более простое решение кинетического уравнения для электронов с интегралом столкновений в форме Ландау, справедливое при произвольных Z . Модель учитывает как электрон-ионные столкновения, так и столкновения подтепловых (холодных) электронов с тепловыми. Как было показано в работе [16],

вклад последних в интеграл столкновений может оказаться существенным, позволяющим получить в [37] сравнительно простое выражение для интеграла электрон-электронных столкновений, содержащее, однако, некоторый свободный параметр. Далее этот параметр подбирается таким образом, чтобы при низких и высоких частотах получить известные значения для стационарной [36, 38] и высокочастотной проводимости (или ДП) соответственно. Более того, наша модель допускает простое обобщение полученных результатов для случаев вырожденной и/или неидеальной плазмы, что в свою очередь позволяет применение этой модели для изучения оптических свойств плазмы в широких диапазонах температур и плотностей. Таким образом, работа [37] обобщает хорошо известную модель Ли-Мора [39] для стационарной проводимости и ее динамическое обобщение [40] на случай произвольных Z . Хотя в работе [37] проводилось детальное сопоставление предложенной модели с известными ранее результатами, подробный анализ полученной ДП в зависимости от параметров плазмы отсутствует. Целью настоящей работы является изучение общих свойств полученной в [37] ДП в широком диапазоне параметров плазмы, представляющих потенциальный интерес для современных и планируемых теоретических и экспериментальных работ по взаимодействию лазерного излучения с веществом.

2. Теоретическая модель. Рассмотрим высокочастотные и длинноволновые малые возмущения в однородной и столкновительной электронной плазме, предполагая, что $kv_{th} \ll \omega$, $k\lambda_{ei} \ll 1$ и $k\lambda_{ee} \ll 1$, где k^{-1} – длина волны возмущений, ω^{-1} – характерное время, λ_{ei} и λ_{ee} – длины свободного пробега электронов по отношению к столкновениям с ионами и электронами соответственно.

Эволюция электронной компоненты плазмы определяется кинетическим уравнением Фоккера – Планка для функции распределения электронов $f(v, t)$. Предполагается, что функция распределения ионов задана и имеет вид $f_i(v, t) = \delta(v)$. В случае длинноволновых возмущений можно игнорировать пространственную неоднородность функции распределения электронов, а кинетическое уравнение в этом случае принимает вид [5, 6]

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m} E \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = J[f] = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial}{\partial v_j} - F_i f \right), \quad (2.1)$$

где $J[f] = J_{ee}[f] + J_{ei}[f]$ – полный интеграл столкновений, содержащий интегралы электрон-электронных ($J_{ee}[f]$) и электрон-ионных ($J_{ei}[f]$) столкновений, E – самосогласованное электрическое поле, D_{ij} и F – тензор диффузии и сила трения в пространстве скоростей соответственно.

Рассматривая интеграл столкновений $J[f]$ в форме Ландау [5, 6], тензор диффузии и силу трения в пространстве скоростей можно записать в виде

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{h}{2} \left[\frac{1}{Z} \int f(v', t) g_{ij}(u) dv' + g_{ij}(v) \right], \\
F_i &= \frac{h}{2} \left[\frac{1}{Z} \int f(v', t) \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u_j} dv' + \frac{m}{m_i} \frac{\partial g_{ij}(v)}{\partial v_j} \right]_i,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u = v - v'$,

$$g_{ij}(v) = \frac{1}{v} \left(\delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{v^2} \right), \tag{2.3}$$

$\partial g_{ij}(v) / \partial v_j = -2v_i / v^3, \delta_{ij}$, – единичный тензор, $h = 3\sqrt{\pi/2} v_{ei} v_{th}^3$,

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi} n_e Z e^4}{3(mT^3)^{1/2}} \Lambda \tag{2.4}$$

– эффективная частота электрон-ионных столкновений и $v_{th} = \sqrt{T/m}$ – тепловая скорость электронов. Здесь e, m, n_e и Z_e, m_i, n_i – соответственно заряды, массы и равновесные плотности электронов и ионов, T – температура электронов (в единицах энергии), Λ – кулоновский логарифм, который задается в явном виде ниже. Предполагается, что равновесные плотности удовлетворяют условию квазинейтральности $n_e = Z n_i$, а ионы плазмы имеют произвольный и конечный заряд Z .

Первые и вторые слагаемые в выражениях (2.2) соответствуют электрон-электронным и электрон-ионным столкновениям соответственно. В дальнейшем будем пренебрегать последним слагаемым в F_i , описывающим обмен энергии между электронами и ионами и пропорциональным малому параметру $\sim m/m_i \ll 1$. В выражениях (2.2) все члены, описывающие электрон-электронные столкновения, пропорциональны величине Z^{-1} . Поэтому вклад электрон-электронных столкновений мал в пределе больших степеней ионизации ионов, $Z \gg 1$, что в свою очередь приводит к лоренцевой модели плазмы [21], часто применяемой в различных гидродинамических численных кодах [9-13], благодаря относительной простоте.

Лоренцева модель применима только в случае высокой степени ионизации ионов с $Z > 10$. В обратном случае, когда $Z < 10$, электрон-электронные столкновения должны быть учтены для более точных численных расчетов, хотя из-за сохранения импульса частиц (т.е. $\int v J_{ee} [f] dv = 0$) прямой вклад таких столкновений в плотность индуцированного тока отсутствует. Тем не менее, электрон-электронные столкновения модифицируют функцию распределения и таким образом влияют на значение ДП. Строгая кинетическая теория таких процессов, учитывающая электрон-электронные столкновения, а также нелокальный перенос в плазме, была предложена в работе [36].

В настоящей работе предлагается более упрощенная, но физически мотивированная модель для ДП столкновительной плазмы, учитывающая вклад электрон-электронных столкновений, а также позволяющая дальнейшие обобщения на случай квантовой и/или неидеальной плазмы. Что-

бы вывести ДП в данной модели, заметим, что согласно работе [16] эффективная частота столкновений подтепловых (холодных) электронов (со скоростями $v \ll v_{th}$) с тепловыми (со скоростями $v \sim v_{th}$) ведет себя как $\nu_{c,ee} \sim (v_{th}/v)^3 \gg \nu_{ee}$ и таким образом значительно превышает аналогичную частоту столкновений $\nu_{c,ee}$ тепловых электронов. Поэтому даже в слабо-столкновительной плазме холодные электроны могут испытывать интенсивные столкновения с тепловыми электронами и, следовательно, привносить значительный вклад в кинетические коэффициенты (2.2). Учитывая этот факт, будем ограничивать верхние пределы интегрирования по скоростям в выражениях (2.2) некоторой величиной $v_m \leq v_{th}$.

Линеаризованное кинетическое уравнение для возмущения функции распределения f_1 получаем из (2.1), предполагая, что $f = f_0 + f_1$ (где $f_1 \ll f_0$). Чтобы найти решение уравнения для временной фурье-компоненты $f_{1\omega}$ функции распределения f_1 , удобно ввести новую изотропную функцию $\Phi_\omega(v)$ посредством

$$f_{1\omega}(v) = \frac{e}{m\omega} (E_\omega \cdot v) \Phi_\omega(v). \quad (2.5)$$

Фурье-компонента тока $j_{1\omega}$, индуцированного в плазме электрическим полем E_ω , определяется формулой

$$j_{1\omega} = -\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} \int v (E_\omega \cdot v) \Phi_\omega(v) v, \quad (2.6)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m$ – электронная плазменная частота. Используя это выражение, можно найти тензор проводимости и, следовательно, тензор ДП столкновительной электронной плазмы, который можно представить в виде $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} K_0(\omega), \\ K_0(\omega) &= \frac{4\pi i}{3} \int_0^\infty \Phi_\omega(v) v^4 dv. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полученное выражение вместе с функцией распределения Φ_ω определяет высокочастотную диэлектрическую проницаемость столкновительной плазмы для произвольных эффективных зарядов ионов плазмы $Z_* = Z / \chi$ – некоторый эффективный заряд ионов плазмы и $\chi = \frac{4\pi}{3} v_m^3 f_0(0)$ [37].

Это выражение для диэлектрической проницаемости можно упростить, используя решение Φ_ω и интегрируя по частям. После этих преобразований окончательно получим

$$K_0(\omega) = \frac{i\chi Z_2}{\xi_\omega} \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} v_{th}^3 \int_0^\infty F(1; \alpha_Z; i\beta_Z \xi^3) \xi^6 f_0'(\xi) d\xi, \quad (2.8)$$

где введены следующие обозначения: $\xi = v/\sqrt{2}v_{th}$, $\xi_\omega = (3\sqrt{\pi}/4)(\nu_{ei}/\omega)$, $\alpha_Z = (Z_* + 8)/3$, $\beta_Z = Z_*/3\xi_\omega$, $\chi_{Z_*} = (1 + 5/Z_*)^{-1}$, а $F(a; b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Приведенные результаты получены в пренебрежении квантовыми эффектами. Строго говоря, чтобы обобщить полученные результаты, и в частности ДП (2.8), на случай квантовой плазмы, необходимо рассматривать квантовое кинетическое уравнение. Однако анализ, проведенный в работе [37], показывает, что возможно более простое обобщение формулы (2.8), с применением метода, аналогичного предложенному в работах [39, 40] при обобщении лоренцевой модели на случай квантовой плазмы.

В самом общем случае частично вырожденной плазмы равновесная функция распределения $f_0(\xi)$ в формуле (2.8) задается фермиевским распределением $f_0(\xi) = B_0 f_F(\xi)$, где

$$f_F(\xi) = \left[1 + \exp(\xi^2 - \varepsilon_\mu) \right]^{-1}, \quad (2.9)$$

$B_0 = (3/4\pi)(m/2E_F)^{3/2}$ – нормировочная константа, $\varepsilon_\mu = \mu/T$, μ – химический потенциал. Подставляя функцию распределения (2.9) в выражение (2.8), для частично вырожденной электронной плазмы получим

$$K_0(\omega) = \frac{-2i\chi Z_*}{\xi_\omega} \Theta^{3/2} \int_0^\infty F(1; \alpha_Z; i\beta_Z \xi^3) f_F(\xi) [1 - f_F(\xi)] \xi^7 d\xi. \quad (2.10)$$

Важно отметить, что в безразмерные параметры ξ_ω и β_Z в полученной формуле (2.10) входит частота электрон-ионных столкновений (2.4), в которой под Λ надо понимать квантовое выражение для кулоновского логарифма.

Безразмерный химический потенциал ε_μ в выражении для f_F можно найти посредством формулы

$$\varepsilon_\mu = X_{1/2} \left(\frac{2}{3\Theta^{3/2}} \right). \quad (2.11)$$

Здесь $\Theta = T/E_F$, E_F – энергия Ферми, $X_{1/2}$ – функция, обратная интегралу

Ферми $F_{1/2}(x)$, где $F_\alpha(x) = \int_0^\infty t^\alpha (1 + e^{t-x})^{-1} dt$ для $\alpha > -1$. Для численных расчетов с применением формулы (2.11) полезно воспользоваться чрезвычайно аккуратным приближением, предложенным в работе [50] для интегралов Ферми и обратных им функций.

3. Численные результаты. Результаты численных расчетов для различных частот излучения ω (в атомных единицах $= 4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$), отвечающие как квантовому, так и больцмановскому (классическому) пределу электронного газа, показаны на рис. 1–4 для $Z = 1$ и в широких диапазонах плотности и температуры плазмы. Результаты были получены с помощью выражений (2.9) – (2.11).

В численных расчетах использованы следующие значения плотности и температуры плазмы: $n_e = T/E_F \text{ см}^{-3}$, 10^{22} см^{-3} и $T = 10^{-2} \text{ эВ}$, $T = 1 \text{ эВ}$,

$T = 10^2$ эВ. Соответствующие значения энергии Ферми указаны на рисунках. Для каждой пары значений параметров T и E_F степень вырождения электронной плазмы характеризуется величиной $\Theta = T / E_F$, которая, как видно из рисунков, варьируется в широком диапазоне значений.

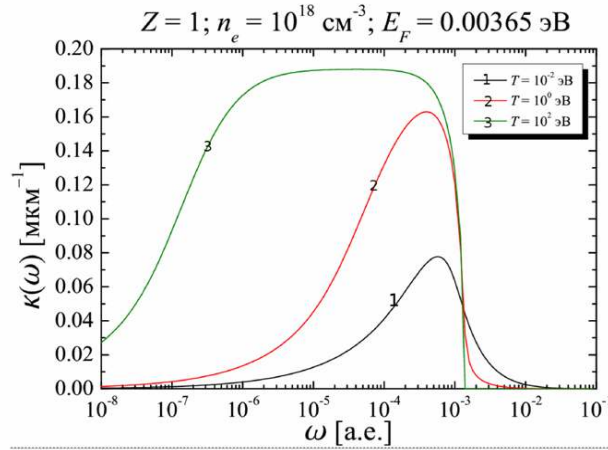


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения $\kappa(\omega)$ от частоты излучения ω (в атомных единицах $= 4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$) для $Z=1$ и при $n_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^{-2}$ эВ, $T = 1$ эВ, $T = 10^2$ эВ.

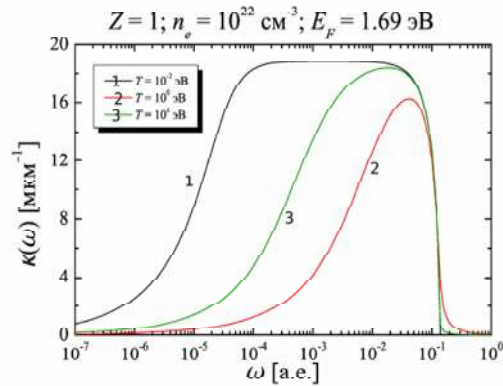


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения $\kappa(\omega)$ от частоты излучения ω (в атомных единицах $= 4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$) для $Z=1$ и при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^{-2}$ эВ, $T = 1$ эВ, $T = 10^2$ эВ.

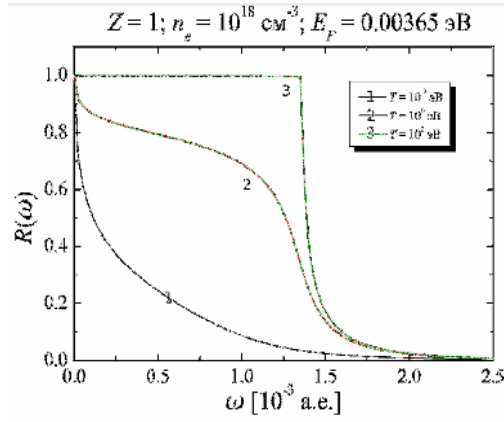


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения $R(\omega)$ от частоты излучения ω (в атомных единицах $4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$) для $Z = 1$ и при $n_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^{-2} \text{ эВ}$, $T = 1 \text{ эВ}$, $T = 10^2 \text{ эВ}$.

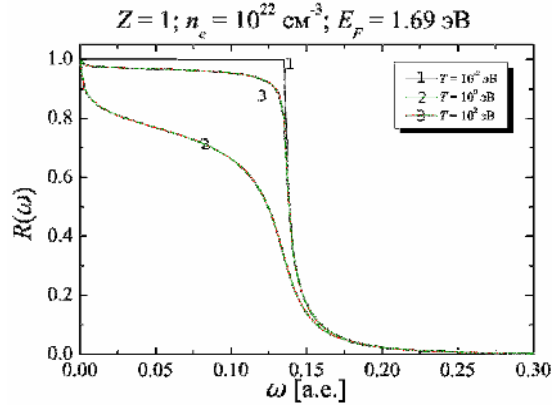


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения $R(\omega)$ от частоты излучения ω (в атомных единицах $4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$) для $Z = 1$ и при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^{-2} \text{ эВ}$, $T = 1 \text{ эВ}$, $T = 10^2 \text{ эВ}$.

Для этих значений параметров плазмы коэффициенты поглощения ($\kappa(\omega)$) и отражения $R(\omega)$ электромагнитного излучения показаны на рис. 1, 2 и 3, 4 соответственно, где

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} N_-(\omega), \quad R(\omega) = \frac{[1 - N_+(\omega)]^2 + N_-^2(\omega)}{[1 + N_+(\omega)]^2 + N_-^2(\omega)}, \quad (3.1)$$

$$N_{\pm}(\omega) = \sqrt{\frac{|\epsilon(\omega)| \pm \text{Re}[\epsilon(\omega)]}{2}}. \quad (3.2)$$

Важно также отметить, что данная модель для диэлектрической проницаемости слабо зависит от подгоночных параметров C и s в выражении для эффективного заряда $Z_0 = Z/\kappa$ [37]. Численный анализ показывает, что диэлектрическая проницаемость меняется незначительно при варьировании вышеуказанных параметров в интервале $C, s \in [0.5; 2]$. Кроме того, в случае плазмы с многозарядными ионами, $Z > 10$, предложенная модель переходит в лоренцеву модель плазмы. При значениях $\Theta < 10$ параметр вырожденности плазмы близок к единице. Это означает, что в случае умеренного или сильного вырождения электронного газа роль электрон-электронных столкновений сильно уменьшается и, следовательно, функция $K_0(\omega)$ не зависит от заряда ионов плазмы Z . Дополнительно предполагая, что $1 < \Theta < 10$, зависимость функции $K_0(\omega)$ от частоты излучения оказывается близкой той, что получается в случае невырожденной плазмы с многозарядными ионами $Z > 10$.

4. Заключение. Для полностью ионизованной столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов в работе было найдено решение линеаризованного кинетического уравнения Фоккера – Планка с интегралом столкновений в форме Ландау. Учитываются как электрон-ионные столкновения, так и столкновения подтепловых (холодных) электронов с тепловыми.

В предложенной модели вклад электрон-электронных столкновений в ДП учитывается посредством параметра $\kappa(Z, \omega)$, который рассматривается как функция заряда ионов Z и частоты возмущений ω . Кроме того, при определении $\kappa(Z, \omega)$ рассматривается низкочастотный ($\omega \rightarrow 0$) предел ДП, где последняя должна совпадать с известным выражением для стационарной проводимости. С другой стороны, при высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$) параметр κ должен стремиться к нулю, $\kappa(Z, \omega) \rightarrow 0$, что соответствует нулевому вкладу электрон-электронных столкновений в ДП в рассматриваемом пределе. Важной особенностью данной модели является возможность обобщения полученных результатов на случаи вырожденной и/или неидеальной плазмы. Причем в первом случае появляется дополнительное ограничение, $\hbar k^2 2m \ll \omega$, на длину волны возмущений.

Главной целью данной работы являлась разработка простой, но физически мотивированной аналитической модели для расчета диэлектрической проницаемости, пригодной в широких диапазонах параметров плазмы и для моделирования широкого круга экспериментальных работ по взаимодействию лазерного излучения с веществом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Армении в рамках научного проекта No 15T-1C231 и программы Президиума РАН.

¹ ОИВТ РАН

² Московский физико-технический институт

³ Институт радиофизики и электроники НАН РА

**М. Е. Вейсман, Н. Е. Андреев,
член-корреспондент НАН РА Г. Г. Матевосян, О. С. Ароян**

**Широкодиапазонная диэлектрическая проницаемость
столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов**

На основе решения линеаризованного кинетического уравнения Фоккера – Планка для электронов с интегралом столкновений в форме Ландау предложено аналитическое выражение для диэлектрической проницаемости полностью ионизованной плазмы с произвольным зарядом ионов, пригодное для описания высокочастотных, длинноволновых возмущений в плазме. Обоснована пригодность предложенной модели в широком диапазоне параметров плазмы, а также частоты электромагнитного излучения. Кроме того, модель обобщается на случаи неидеальной и/или вырожденной плазмы. Численно проанализировано поведение полученной диэлектрической проницаемости в широком диапазоне плотностей и температур плазмы.

**Մ. Ե. Վեյսման, Ն. Ե. Անդրեև,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Հ. Հ. Մաթևոսյան, Օ. Ս. Հարոյան**

**Բախումային պլազմայի լայնատիրություն դիէլեկտրիկական
թափանցելիությունն իոնների կամայական լիցքի դեպքում**

Լանդաուի ձևի բախումների ինտեգրալով էլեկտրոնների համար Ֆոկեր-Պլանկի գծայնացված կինետիկական հավասարման լուծման հիման վրա առաջարկվել է պլազմայում բարձր հաճախականության, երկարալիք գրգռումների նկարագրության համար պիտանի անալիտիկ արտահայտություն իոնների կամավոր լիցքով լիովին իոնիզացված պլազմայի դիէլեկտրիկ թափանցելիության համար: Հիմնավորված է առաջարկվող մոդելի պիտանելիությունը պլազմայի պարամետրերի, ինչպես նաև էլեկտրամագնիսական ճառագայթման հաճախականության լայն տիրույթում: Ամփոփված են ոչ իդեալական և/կամ այլասերված պլազմայի դեպքերը: Թվային ձևով վերլուծված է ստացված դիէլեկտրիկ թափանցելիության վարքը պլազմայի խտությունների և ջերմաստիճանների լայն տիրույթում:

**M. E. Veysman, N. E. Andreev,
corresponding member of NAS RA H. H. Matevosyan, H. S. Haroyan**

**Wide-Range Permittivity of the Collisional Plasma
with an Arbitrary Ionic Charge**

On the base of the solution of a linearized Fokker-Planck kinetic equation for electrons with a Landau collision integral an analytical expression is proposed for the dielectric permittivity of completely ionized plasma with an arbitrary ionic charge applicable for the description of high-frequency long-wave perturbations in plasma. Suitability of the offered model is proved in a wide range of plasma parameters as well

as the frequency of the electromagnetic radiation. Moreover, the model permits a generalization for the cases of nonideal and/or degenerate plasmas. The behavior of the obtained dielectric permittivity is analyzed numerically in a wide range of plasma densities and temperatures.

Литература

1. Kitagawa Y., Fujita H., Kodama R., Yoshida H., Matsuo S., Jitsuno T., Kawasaki T., Kitamura H., Kanabe T., Sakabe S. et al. – IEEE J. Quantum Electron. 2004. V. 40. P. 281.
2. Zastrau U., Audebert P., Bernshtam V., Brambrink E., Kämpfer T., Kroupp E., Loetzsch R., Maron Y., Ralchenko Y., Reinholz H. et al. – Phys. Rev. 2010. V. E 81. P. 026406.
3. Carroll, O. Tresca, R. Prasad, L. Romagnani, P. S. Foster, P. Gallegos, S. Ter-Avetisyan, J. S. Green, M. J. V. Streeter, N. Dover et al. – New J. Phys. 2010. V. 12. 045020.
4. В. П. Силин Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М. Наука, 1973. 288 с.
5. Силин В. П., А. А. Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. 3-е изд. М. Либроком. 2013. 243 с.
6. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. 3-е изд. М. УРСС. 2013. 344 с.
7. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.. Основы электродинамики плазмы. М. Высшая школа. 1988. 423 с.
8. Pukhov A. – Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 47.
9. Андреев Н. Е., Вейсман М. Е., Ефремов В. П., Фортков В. Е. – Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. С. 679.
10. Veysman M. E., Cros B., Andreev N. E., Maynard G. – Phys. Plasmas. 2006. V. 13. P. 053114.
11. Veysman M. E., Agranat M. B., Andreev N. E., Ashitkov S. I., Fortov V. E., Khishchenko K. V., Kostenko O. F., Levashov P. R., Ovchinnikov A. V., Sitnikov D. S., – J. Phys. V. B 41. P. 125704 (2008).
12. Povarnitsyn M. E., Andreev N. E., Apfelbaum E. M., Itina T. E., Khishchenko K. V., Kostenko O. F., Levashov P. R., Veysman M. E. – Appl. Surf. Sci. 2012. V. 258. P. 9480.
13. Povarnitsyn M. E., Andreev N. E., Levashov P. R., Rosmej O. N. – Phys. Plasmas. 2012. V. 19. P. 023110.
14. Braginskii S. I. In: Review of Plasma Physics. Vol. 1. Ed. by M. A. Leontovich. New York, Consultants Bureau. 1965. P. 205.
15. Shkarofsky I. P., Johnston T. W., Bachynski M. P. The Particle Kinetics of Plasmas. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1966).
16. Силин В. П. – УФН. 2002. Т. 172. С. 1021.
17. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. – Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511.
18. Mermin N. D. – Phys. Rev. 1970. V. B 1. P. 2362.
19. Nersisyan H. B., Das A. K. – Phys. Rev. 2004. V. E 69, P. 046404.
20. Nersisyan H. B., Das A. K. In: Advances in Plasma Physics Researches, ed. by F. Gerard. New York. Nova Science. 2008. V. 6. Chap. 2. P. 81.
21. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. 2-е изд. М. Физматлит. 2002. 536 с.
22. Clemmow P. C., Dougherty J. P. Electrodynamics of Particles and Plasmas. (Addison-Wesley, Redwood City. CA, (1990).

23. *Opher M., Morales G. J., J. N. Leboeuf J. N.* – Phys. Rev. 2002. V. E 66. P. 016407.
24. *Fried B. D., Kaufman A. N., Sachs D. L.* – Phys. Fluids. 1966. 9. P. 292.
25. *Selchow A., Röpke G., Morawetz K.* – Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. 2000. V. A 441. P. 40.
26. *Morawetz K., Fuhrmann U.* – Phys. Rev. 2000. V. E 61. P. 2272.
27. *Atwal G. S., Ashcroft N. W.* – Phys. Rev. 2002.. V. B 65. P. 115109.
28. *Brantov A. V., Bychenkov V. Y., Rozmus W., Capjack C. E.* – IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. V. 34. P. 738.
29. *Bychenkov V. Y., Tikhonchuk V. T., Rozmus W.* – Phys. Plasmas. 1997. 4, P. 4205.
30. *Быченко В. Ю.* – Физика плазмы. 1998. Т. 24. С. 862.
31. *Koch R. A. Horton W., Jr.* – Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 861.
32. *Peñano J. R., Morales G. J., Maggs J. E.* – Phys. Plasmas. 1997 4. P. 555.
33. *Selchow A., Morawetz K.* – Phys. Rev. 1999. V. E 59. P. 1015; 2004. V. 69. P. 039902.
34. *Bobilev Yu. V., Kuzelev M. V.* – Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 417; 2014, Т. 40. С. 429.
35. *Brantov A. V., Bychenkov V. Y., Rozmus W., Capjack C. E.* – Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 125002; ЖЭТФ. 2005. Т. 127. С. 1317.
36. *Брантов А. В., Быченко В., Розмус В.* – ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 1123.
37. *Nersisyan H. B., Veysman M. E., Andreev N. E., Matevosyan H. H.* – Phys. Rev. 2014. V. E 89. P. 033102.
38. *Balescu R.* – Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 52.
39. *Lee Y. T., More R. M.* – Phys. Fluids 1984. V. 27. P. 1273.
40. *Kostenko O. F., Andreev N. E.* – GSI Annual Report 2007 (GSI-2008-2) (2008).
41. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. ФМЛ. 1963. 1100 с.
42. *Reinholz H., Röpke G.* – Phys. Rev. 2012. V. E 85. P. 036401.
43. *Lampe M.* – Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 306; Phys. Rev. 1968. V. 174. P. 276.
44. *Flowers E., Itoh N.* – Astrophys. J. 1976. V. 206. P. 218.
45. *Shternin P. S., Yakovlev D. G.* – Phys. Rev. 2006. V. D 74. P. 043004.
46. *Lindhard J.*, K. Dan. Vidensk. – Selsk. Mat. Fys. Medd. 1954. V. 28. P. 1.
47. *Esser A., Redmer R., Röpke G.* – Contrib. Plasma Phys. 2003. V. 43. P. 33.
48. *Adams J. R., Shilkin N. S., Fortov V. E., Gryaznov V. K., Mintsev V. B., Redmer R., Reinholz H., Röpke G.* – Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 062303.
49. *Stygar W. A., Gerdin G. A., Fehl D. L.* – Phys. Rev. 2002. V. E 66. P. 046417.
50. *Antia H. M.* – Astrophys. J. Suppl. Ser. 1993. V. 84. P. 101.
51. *Ziman J. M.* – Philos. Mag. 1961. V. 6. P. 1013.
52. *Gouedard C., Deutsch C.* – J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 32.
53. *Arista N. R., Brandt W.* – Phys. Rev. 1984. V. A 29. P. 1471.
54. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. 4-е изд. М. Физматлит. 2005. 651 с.

менения оптического увеличителя и чувствительности микроскопа. Аппаратура работает в непрерывном режиме, фиксирует медленные процессы и позволяет исследовать динамику деформаций земной коры.

Измерение деформации проводится кварцевым штанговым деформографом (ДШ) в штольне обсерватории с общей длиной 375 м, установленным перпендикулярно простиранию Вохчабердской толщи, имеет направление С-Ю, В-З и под 45° пересекает ствол шахты. Одно плечо ДШ установлено строго на С-Ю от портала штольни на расстояние 150 м с базой 43 м, а второе, длиной 47 м, – строго на В-З на расстояние 200 м. Они находятся на глубине 67 м от поверхности. На концах штанги выведены бетонные постаменты, надежно связанные с породой. В деформографе применялся индуктивный датчик смещений [2], позволяющий измерять деформации с точностью 10^{-6} - 10^{-8} , а также дающий возможность проводить замеры до 10^{-10} , 10^{-11} , т.е. длиннопериодные колебания, связанные с сильными сейсмическими событиями. Чувствительность прибора прямой регистрации по смещениям 0,25 мк на 1 мм, по деформациям 10^{-8} на 1 мм. Пороговая величина регистрируемых смещений- 0.05 мк.

Наклономерно-деформографические наблюдения выполняются в штольне Гарнийской геофизической обсерватории ($40^{\circ}12$ с.ш., $44^{\circ}72$ в.д.). К косвенным эффектам относятся диапазон наклона и деформации земной поверхности, вызванные сезонными и суточными изменениями в регионе температуры, атмосферного давления, атмосферных осадков, уровня грунтовых вод [3]. При установке наблюдений в Гарнийской обсерватории были учтены следующие природные факторы:

нахождение обсерватории вблизи активного сейсмогенного Гарнийского глубинного разлома не является благоприятным фактором для наклономерно-деформографических измерений, однако это обстоятельство способствует изучению геодинамических процессов и интерпретации данных измерений;

обсерватория удалена от побережья оз. Севан на достаточное расстояние, чтобы исключить воздействие так называемых «морских эффектов», тем не менее при сильных озерных штормах наблюдаются микросейсмы, вызванные подобным явлением;

географическая широта также определяет ту или иную группу приливных волн, так как их амплитуда достаточно велика и предпочтительна для измерений;

нахождение в районе обсерватории глыбовых сильно трещиноватых пород Вохчабердской толщи способствует распространению интенсивных температурных колебаний на большую глубину [4]. Во избежание воздействия подобного эффекта наклономер установлен в конце штольни на глубине 67 м от поверхности и удален по осевой линии портала штольни на расстояние 200 м. В штольне обсерватории круглогодично сохраняется температура воздуха 14°C , а суточные колебания температуры воздуха не превышают 0.5°C , давление в штольне не превышает 0.1 мбр. Завышение влажности в штольне недопустимо.

Наклономерные наблюдения. Фактический материал наклонномерных наблюдений представляется в виде суточных временных рядов накл-

лона в направлении С-Ю и В-З, рядов приливов обоих направлений и базовых значений прибора, с шагом дискретизации по времени 60 и 30 мин.

Суточный наклон V_t представлен в виде уравнения $V_t = A \sin \left(\frac{2\pi}{24}t + \varphi \right)$. Далее, после подстановки в это уравнение среднемесячных почасовых значений суточного наклона V_t , полученных из фактического материала наблюдений, составляется система из 24 уравнений, решение которой дает возможность определить параметр суточного хода наклонов – амплитуду A в секундах дуги и сдвиг фазы φ относительно 0 ч по гринвичскому времени. Сдвиг фазы задается в уравнения через каждые 15° ($\varphi \leq 180^\circ$).

По материалам наблюдений в Гарнийской геофизической обсерватории за 2015-2016 гг. по каждой составляющей наклономерной установки для каждого календарного месяца описанным способом вычислен параметр суточного хода наклонов – амплитуда A . Амплитуда суточного хода от месяца к месяцу меняется. Особенности в ходе изменения амплитуды суточного наклона в общем виде проявляются на всех составляющих и имеют сезонный характер с значительным увеличением в весенне-летние месяцы, затем уменьшением до минимума в сентябре. По данным A и φ рассчитываются и строятся диаграммы суточного хода наклонов для каждого месяца, которые отражают картину суточного хода наклонного процесса, рассматривая их от месяца к месяцу. Выявлены некоторые закономерности сезонных изменений этого процесса. Векторные диаграммы суточных ходов наклонов имеют форму эллипсов, величины осей которых и их соотношение меняются от месяца к месяцу. В этих изменениях отмечается сезонная цикличность. В весенне-летние месяцы оси эллипсов увеличиваются (май-июнь), эллипсы наименьших размеров наблюдаются в октябре.

Отметим, что, имея данные наклономеров и других измерительных приборов, а также данные о строении земной коры исследуемой местности (толщина, плотность, постоянные упругости и теплопроводности слоев), можно определить напряженно-деформированное состояние этого участка земной коры и проследить за его изменением во времени [5].

Результаты наклономерных измерений и их корреляция с сейсмичностью. Общепринятой формой представления информации являются график хода наклонов и деформации по отдельным составляющим во времени, графики приливов по составляющим, а также векторная диаграмма хода наклона [6]. В работе [6] рассмотрены данные наклономерных измерений за 2015-2016 гг., по которым построены суточные, среднесуточные графики наклонов соответствующих направлений. Данные по наклономерным и деформографическим наблюдениям приводятся на рис. 1-3. На рис.2 видно, что график суточного хода наклонов, построенный по программе наименьших квадратов (линия 2), хорошо совпадает с графиком суточного хода, полученным непосредственно из данных наблюдений

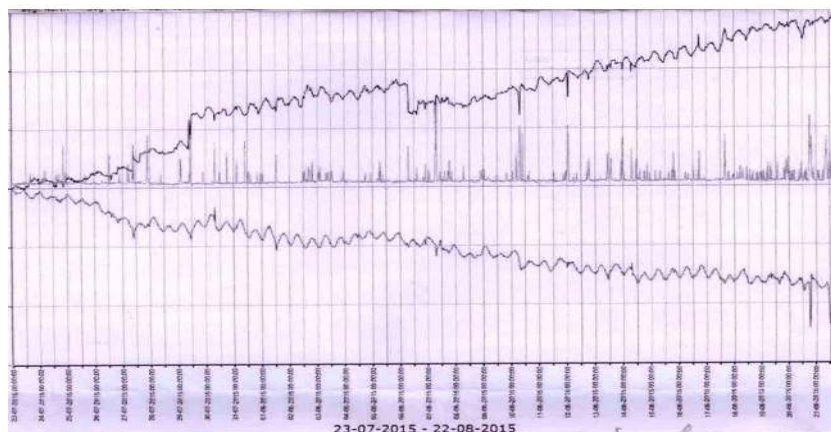


Рис. 1. Данные накломера, установленного в Гарнийской геофизической обсерватории (показана вариация по направлениям В-З и С-Ю с 23.07.2015 по 22.08.2015).

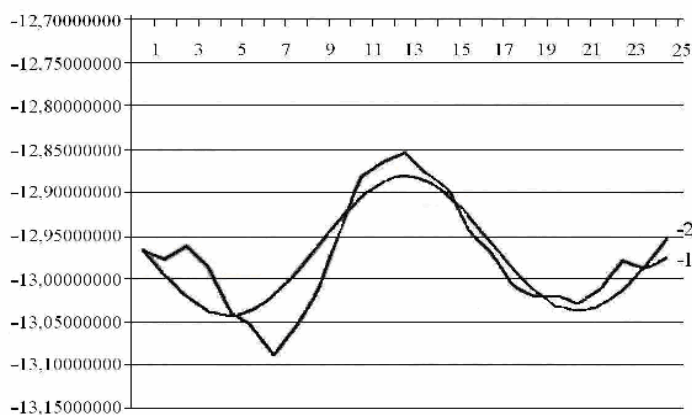


Рис. 2. Суточный ход накломера: 1 – исходный ряд; 2 – ряд, обработанный методом наименьших квадратов

(линия 1). Таким образом, суточный ход наклона земной поверхности, полученный на выходе, необходимо аппроксимировать в кривую, близкую к синусоиде с экстремальными точками: 6 ч утра и 18 ч вечера.

На рис. 3 показан ход деформации в направлении С-Ю и В-З в Гарнийской обсерватории за период с мая по сентябрь 2016 г. Максимальное смещение по компоненту С-Ю (а) 37 мк. В течение первых трех месяцев с начала регистрации наблюдается более высокая скорость изменения деформации по сравнению с последующим временем. Можно предположить,

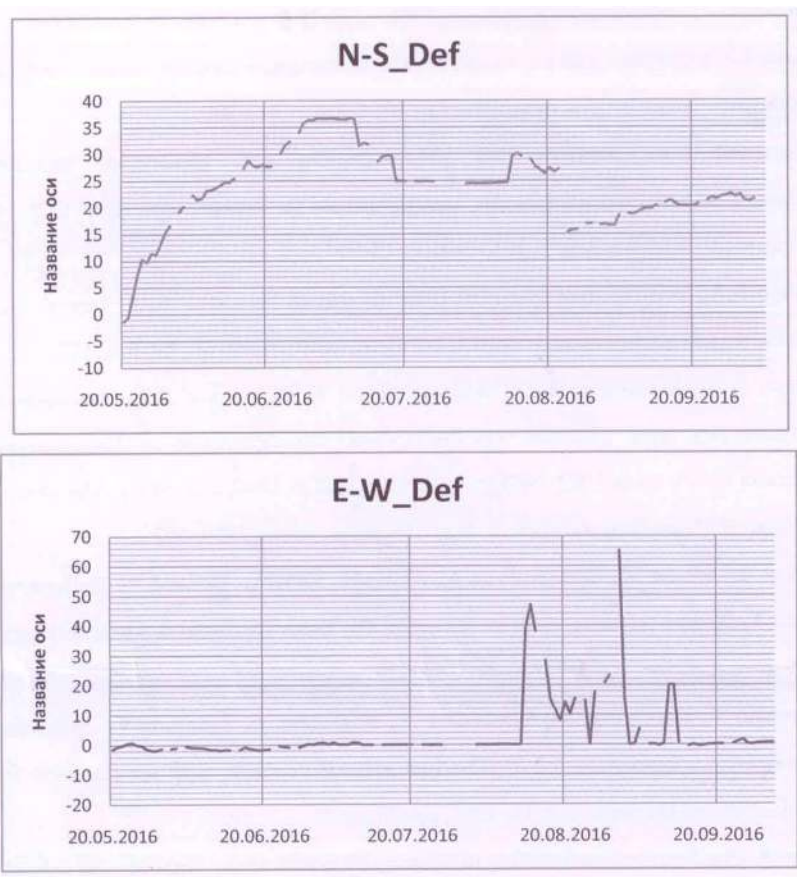


Рис. 3. Запись деформации в направлении С-Ю (а), В-З (б).

что это связано с процессами стабилизации в опорных постаментях. Последние два месяца (август-сентябрь) наблюдается резкое падение, и скорость смещения доходит до 15 мк. Кривая б отражает ход деформации во времени в направлении В-З. Отмечается, хоть и неотчетливо и, как видно из графика (б), уже начиная с 25 июня до 10 июля сбой, с 15 июля по 25 сентября – разброс с достаточными амплитудами, достигающими от 49 до 64 мк, а начиная с 15.09 до 20.09, по-видимому, компонент В-З не работает. Можно предположить, что причина заключается в повышении влажности в штольне.

Для сопоставления полученных данных с сейсмичностью региона построены карта сейсмичности и карта напряженно-деформационного состояния земной коры территории РА за исследуемый период (рис. 4, 5). На карту сейсмичности нанесены эпицентры землетрясений с $M > 2$. Скопление землетрясений наблюдается на Джавахетском нагорье, по Гарнийско-му разлому и в центральной части региона. По карте деформации струк-

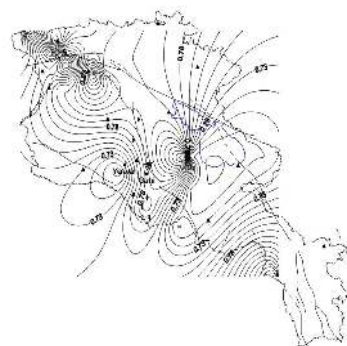


Рис. 4. Карта сейсмичности Армении.

Рис. 5 Карта деформации земной коры.

- –эпицентры землетрясений.

$\{\tilde{\Gamma}\}$ – изолинии деформации.

тура сжатия отражается на севере и в центральной части региона. Землетрясения с $M > 4$ произошли на севере региона и в районе оз. Севан. Для корреляции наклономерно-деформографических наблюдений в Гарнийской обсерватории и параметров произошедших землетрясений составлена табл. 1

Таблица 1

Дата землетря- сения	Координаты землетря- сений		Маг- ни- туда, М	Эпицент- ральное расстояние Δ , км	Наблю- дательный пункт	Расчетная деформа- ция, $\mathcal{E}$
	φ	λ				
03.03.2015	39.86	44.72	2.2	28.80	Гарни	$2.33 \cdot 10^{-10}$
03.24.2015	41.04	43.87	3.8	139.32	- //-	$1.98 \cdot 10^{-10}$
04.06.2015	40.27	45.15	3.6	50.25	- //-	$2.38 \cdot 10^{-9}$
04.06.2015	40.22	45.07	4.1	40.09	- //-	$1.95 \cdot 10^{-8}$
04.19.2015	40.10	44.49	2.3	25.96	- //-	$4.23 \cdot 10^{-10}$
06.15.2016	40	44.82	1.7	17.07	- //-	2.6910^{-10}
07.12.2016	41.37	44.04	48	158.18	- //-	$2.34 \cdot 10^{-9}$
07.21.2016	39.98	44.85	2.1	20.92	- //-	$4.57 \cdot 10^{-10}$

В таблицу включены сейсмические события, которые проявляются на записях наклонов земной поверхности; приводятся величины расчетной деформации $\mathcal{E}$ земной коры в районе Гарни. Хотелось бы отметить, что величина расчетной деформации на два порядка выше реальной [7]. Корреляция полученных данных показала, что чем выше магнитуда (M) произошедшего землетрясения, тем значительнее величина деформации и на большее эпицентральное расстояние (Δ) распределяется деформация.

На рис. 6 показан график суточного хода наклона земной поверхности, который построен с шагом дискретизации по времени 1 ч, за 24 марта 2015 г, стрелкой указано землетрясение. График среднесуточного хода наклономера за март 2015 г. показан на рис. 7.

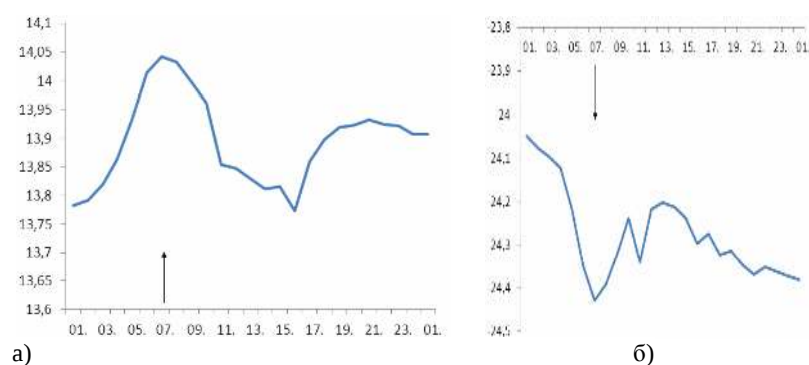


Рис. 6 Запись наклонов земной поверхности в направлении С-Ю (а) и В-З (б).

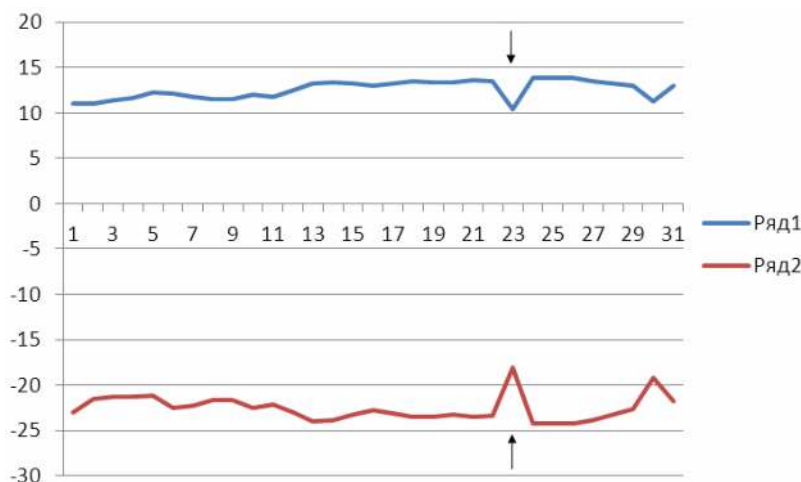


Рис. 7. График хода наклона земной поверхности в направлении С-Ю (ряд 1) и В-З (ряд 2), стрелкой указано землетрясение 24.03.15 г., $M=3.8$.

Запись среднесуточного хода наклономера отражает вариации составляющих в соответствующих направлениях. Вариации по составляющей В-З более значительны по сравнению с составляющей С-Ю, но аномалия, соответствующая дате 24.03.15, наблюдается в записи обоих рядов (рис.7). Возможно, аномалия вызвана землетрясением, произошедшим в это время (табл. 1).

Таким образом, для дальнейшей обработки данных и получения результатов по наклономерным и деформографическим измерениям необхо-

димы создание пакетов программ, мониторинговых наблюдений и интерпретация их, с целью выявления метода изучения геодинамических процессов земной коры и прогноза землетрясений.

Выводы. Метод наклономерно-деформографических измерений позволяет получать информацию о характере современных движений земной коры в регионе, а также отражает процессы сейсмической активации.

Изучение параметров суточного хода наклона земной поверхности и вычисление значений амплитуды A и фазы смещения ϕ для каждого календарного месяца позволят построить векторные диаграммы наклонов.

В дальнейшем наблюдения над горизонтальными деформациями приливного характера позволят определить упругие константы Земли: число Лява h и число Шиды L с учетом рельефа поверхности, так как изучение приливных деформаций и определение локальных значений упругих констант дают возможность вносить поправки, связанные с особенностями строения участка, где проводятся наклономерно-деформографические наблюдения.

¹Президиум НАН РА

²Институт геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА

³Институт общей и неорганической химии им. М.Манвеляна НАН РА

**Академик Л. А. Агаловян, Л. А. Ахвердян,
Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян**

О результатах измерений наклонов и деформаций земной поверхности в Гарнийской геофизической обсерватории

Приводятся данные по наклономерно-деформационным наблюдениям, проведенным в штольне Гарнийской геофизической обсерватории за 2015-2016 гг., по которым построены графики суточных и среднесуточных смещений земной коры по направлениям С-Ю и В-З. В результате сопоставления с сейсмичностью региона выявлены возможные современные движения земной коры территории Армении.

**Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Լ. Ա. Հախվերդյան,
Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան**

Գառնիի երկրաֆիզիկական դիտարանում երկրային մակերևույթի թեքությունների և դեֆորմացիաների չափման արդյունքները

Ներկայացվել են Գառնիի երկրաֆիզիկական դիտարանի հորատանցքում 2015-2016 թվականներին ստացված թեքաչափական-դեֆորմացիոն դիտարկումների տվյալները: Կատարվել է դիտարկումների մշակում, որի նպատակն է ստեղծել երկրակեղևի օրական և միջին օրական տեղաշարժերի գծապատկերները հյուսիս-հարավ և արևելք-արևմուտք ուղղություններով: Տարածաշրջանի սեյսմիկության հետ համեմատության արդյունքում բացահայտվել են ՀՀ տարածքում երկրակեղևի այժմեական հավանական շարժումները:

**Academician L. A. Agalovyan, L. A. Hakhverdyan, R. A Pashayan,
L.V. Harutyunyan**

**Results of Measurement of Tides and Deformations of the Earth
Surface in the Garni Geophysical Observatory**

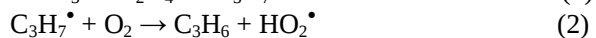
The data on tiltmeter-deformational observations carried out in the adit of Garni Geophysical Observatory were given for the period of 2015-2016. The primary processing of tiltmeter-deformational observations aiming to create charts of daily and average daily movements of earth crust in the N-S and E-W direction is done. Potential modern movements of earth crust in the territory of Armenia were revealed as a result of correlation with seismicity of the region.

Литература

1. *Бончковский В.Ф., Кармалеева Р. М.* – Изв.АН СССР. 1957. N 8. С.1061-1069.
2. *Островский А. Е.* Деформация земной поверхности по наблюдениям наклонов. М. Наука. 1978.184 с.
3. *Иванова М. В., Перцев Б. П.* В кн.: Методика измерений земных приливов и медленных деформаций земной поверхности. М. 1970. С. 113-121.
4. *Попов В. В.* – Изв.АН СССР. Физика Земли. 1961. N 7. С.3-10.
5. *Агаловян Л. А.* В кн.: Материалы XI Международной сейсмологической школы «Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных». 2016. Обнинск. С. 19-23.
6. *Тимофеев В. Ю., Гриднев Д. Г., Сарычева Ю. К. и др.* Исследования по созданию научных основ прогноза землетрясений в Сибири (Оперативная инф., вып.4). Иркутск. ИЗК СОАН. 1990. С.43-48.
7. *Киссин И. Г.* Флюиды в земной коре. Геофизические и тектонические аспекты М. Наука. 2015. 328 с.

Ранее было показано, что переход от традиционного термического пиролиза пропана к его окислительному пиролизу позволяет значительно повысить выход пропилена [7, 8]. Интересные результаты были также получены при совместном окислении этилена с метаном [9], а также пропана с метаном [5], которые показали заметное увеличение выхода пропилена по мере увеличения концентрации метана или этилена в смеси.

В работе [9] было показано, что совместное окисление этилена и метана в двухсекционном проточном реакторе приводит к образованию значительной концентрации пропилена; при этом присутствие метана при окислении этилена оказывает заметное влияние на состав образующихся продуктов. В частности, отмеченное повышение выхода пропилена объясняется реакцией присоединения образующихся в присутствии метана метильных радикалов $\text{CH}_3^\bullet$ с этиленом по реакции (1) с последующими реакциями (2) и (3):



Сам факт заметного влияния метана на процессы окисления его более тяжёлых гомологов при температурах, при которых ещё не наблюдается окисления самого метана, ранее отмечался в [10, 11] и представляет несомненный интерес для процессов переработки сложных смесей природных углеводородных газов и вовлечения огромных ресурсов метана в процессы получения промышленно важных химических продуктов.

Эти результаты показывают перспективность сопряжённого окисления лёгких углеводородов, которое можно рассматривать как потенциально эффективный метод получения пропилена, а также более тяжёлых олефинов и ряда других продуктов. Переход с дорогостоящей нефти на недорогое газовое сырьё позволит существенно удешевить и быстро нарастить производство пропилена.

В данном сообщении приводятся результаты исследования процессов сопряжённого окисления газообразных углеводородов – метана, этилена и пропана как возможных эффективных методов получения пропилена и бутенов.

Экспериментальная часть. Эксперименты проводили в проточных условиях в двухсекционном кварцевом реакторе. Длины первой и второй секций реактора составляли 160 и 170 мм соответственно. Диаметр обеих секций был одинаков и равен 45 мм. С целью разделения процессов, протекающих в секциях реактора, и предотвращения диффузии продуктов реакции из второй секции в первую секции были отделены друг от друга перегородкой, представляющей собой пакет кварцевых трубок с внутренним диаметром 3 мм и длиной 40 мм. Реактор снабжён торцевыми вводами для термопар, помещённых в предварительно пассивированные борной кислотой кварцевые чехлы. Через эти же отводы без нарушения герметичности реактора отбирались пробы для хроматографического анализа исходных реагентов и продуктов реакции.

Идентификацию и количественное определение исходных реагентов и продуктов реакции проводили хроматографически. Анализ метанола, ацетальдегида, диоксида углерода, оксида этилена, бутана и бутилена осуществляли на колонке, заполненной полисорбом-I ($l = 5$ м, $d = 3$ мм, объёмная скорость газа-носителя $Q = 30$ см³/мин). Анализ метана, водорода, кислорода и монооксида углерода проводили на колонке с молекулярными ситами 5А ($l = 3$ м, $d = 3$ мм, $Q = 30$ см³/мин.), а разделение пропилена, этилена и этана – на колонке с силикагелем ($l = 3$ м, $d = 3$ мм, $Q = 30$ см³/мин). Температура всех колонок составляла 371 К. В качестве детектора использовали катарометр.

Все эксперименты проводили при давлении $P = 660$ Торр. Более подробно схема установки и методика проведения экспериментов описаны в [9].

В отмеченной выше работе [9] изучалось влияние температуры на процесс совместного окисления метана и этилена, однако влияние таких параметров, как концентрации реагентов, на состав продуктов окисления исследовано не было. Ниже представлены экспериментальные данные о влиянии метана на окисление этилена и влиянии этилена на окисление метана, необходимые для оптимизации условий получения целевых ценных продуктов – пропилена и бутиленов.

Результаты и обсуждение. Поскольку в работе [9] было показано, что в диапазоне 870-950 К выход основных продуктов окисления смеси метана и этилена слабо зависит от температуры, то для исследования концентрационной зависимости реакции была выбрана температура 893 К в средней части этого диапазона.

Зависимость выхода продуктов реакции от концентрации метана в исходной смеси приведена на рис. 1. По мере уменьшения парциального давления метана парциальное давление пропилена и этана уменьшается, а давление СО, пропана, бутана и бутиленов растёт. Растёт также конверсия этилена. При этом кислород расходуется практически полностью.

Следует отметить, что в присутствии метана в продуктах реакции окисления этилена из C₃-углеводородов образуется в основном пропилен, а содержание пропана незначительно. Это находится в согласии со схемой, включающей реакции (1)-(3). Необходимо также обратить внимание на присутствие бутана и бутиленов в продуктах реакции совместного окисления метана и этилена (рис. 1). Причём при снижении концентрации метана в смеси концентрация бутиленов увеличивается.

Результаты, полученные при исследовании влияния этилена на процесс его сопряжённого окисления с метаном, представлены на рис. 2. Эксперименты проводили со смесями $\text{CH}_4 : (\text{C}_2\text{H}_4 + \text{N}_2) : \text{O}_2 = 4 : 2 : 1$. В ходе экспериментов азот постепенно замещали этиленом и следили за изменением состава продуктов, в частности, выходом целевых продуктов – пропилена и бутиленов.

Таким образом, показано, что сопряжённое окисление метана с этиленом может быть использовано для получения пропилена.

Представлялось также перспективным изучить возможность применения рассматриваемого способа сопряжённого окисления для получения

олефинов на примере других углеводородных систем. В качестве объекта исследования были выбраны смеси пропана с этиленом. Эксперименты проводили с двумя разными наборами реагентов: в первой группе экспериментов изучали окисление пропана в присутствии азота (смеси состава $N_2 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$ и $4,5:8:1$), а во второй – окисление пропана при замещении азота таким же количеством этилена (смеси состава $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$ и $4,5:8:1$). Экспериментальные данные, полученные для смесей

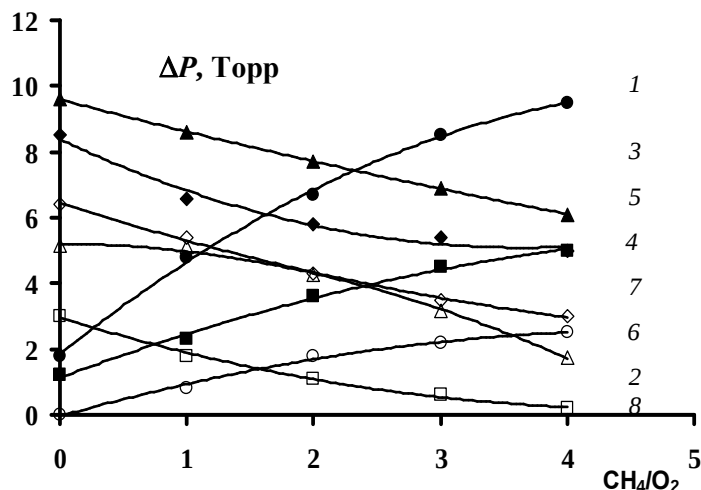


Рис. 1. Влияние содержания метана в реакционной смеси на состав продуктов сопряжённого окисления метана с этиленом при $T=893$ К, $(CH_4+N_2):C_2H_4:O_2 = 4:2:1$. 1 – C_3H_6 (●), 2 – H_2 ($\times 10^{-1}$) (Δ), 3 – CO ($\times 10^{-1}$) ($\blacktriangle$), 4 – C_2H_6 ($\blacksquare$), 5 – $\Delta[C_2H_4]$ ($\times 10^{-1}$) ($\blacklozenge$), 6 – $\Delta[CH_4]$ ($\times 10^{-1}$) ($\circ$), 7 – C_4H_8 ($\diamond$), 8 – C_3H_8 ($\square$).

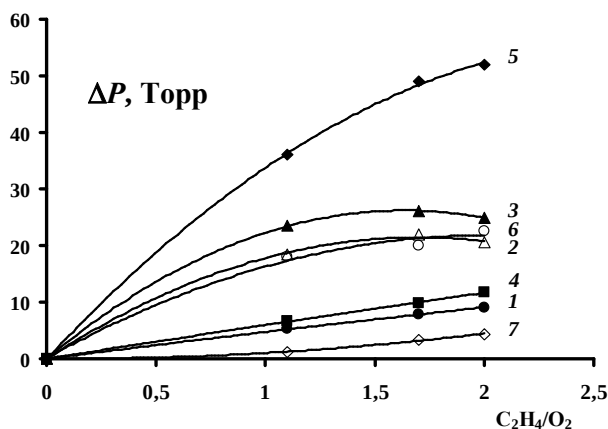


Рис. 2. Влияние содержания этилена в реакционной смеси на состав продуктов сопряжённого окисления метана с этиленом при $T=893$ К, $CH_4:(C_2H_4+N_2):O_2 = 4:2:1$. 1 – C_3H_6 (●), 2 – H_2 (Δ), 3 – CO ($\blacktriangle$), 4 – C_2H_6 ($\blacksquare$), 5 – $\Delta[C_2H_4]$ ($\blacklozenge$), 6 – $\Delta[CH_4]$ ($\circ$), 7 – C_4H_8 ($\diamond$).

состава $N_2 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$ и $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$, представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1
Температурная зависимость конверсии пропана и концентрации
образовавшихся продуктов (моль %) при окислении смеси состава
 $N_2 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$

T, °C	C ₂ H ₆	C ₃ H ₆	C ₂ H ₄	C ₄ H ₁₀	C ₄ H ₈	H ₂	CH ₄	CO	C ₂ H ₄ O	S _{C₃H₆} , %	K _{C₃H₈} , %
490	0.12	4.24	5.23	0.18	0	1.23	6.14	4.27	0.42	31.8	27.1
526	0.23	5.07	6.32	0.38	0	2.12	7.70	4.73	0.41	32.7	32.7
567	0.38	6.14	7.65	0.52	0	4.03	9.47	5.35	0.36	32.9	39.2
624	0.61	6.94	9.39	0.57	0.04	5.61	11.77	5.06	0.30	32.2	46.0
674	0.68	7.61	10.38	0.54	0.07	7.07	13.64	5.06	0.23	32.6	51.2
726	0.91	7.73	12.14	0.36	0.26	9.62	16.44	4.83	0.08	30.5	61.4
780	1.06	5.74	14.56	0.18	0.71	12.76	22.27	4.94	0.03	20.5	85.2

S_{C₃H₆} – селективность образования пропилена.

K_{C₃H₈} – конверсия пропана.

Таблица 2
Температурная зависимость конверсии пропана и концентрации
образовавшихся продуктов (моль %) при окислении смеси состава
 $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 3:5:1$

T, °C	C ₂ H ₆	C ₃ H ₆	C ₄ H ₁₀	C ₄ H ₈	H ₂	CH ₄	CO	C ₂ H ₄ O	K _{C₂H₄} , %	K _{C₃H₈} , %	Δ[C ₂ H ₄]
485	0.45	5.76	0.41	0.03	0.94	5.23	4.54	0.91	8.7	1.97	19.1
538	0.76	6.64	0.48	0.10	1.62	6.71	5.35	0.77	8.9	2.44	19.6
574	1.06	7.12	0.54	0.15	2.45	7.79	5.50	0.91	8.9	2.83	19.6
622	1.35	7.83	0.62	0.18	3.86	10.29	5.65	0.74	9.3	3.54	20.5
674	1.80	8.62	0.58	0.27	5.10	11.77	6.59	0.68	11.3	3.88	24.8
726	2.26	9.04	0.39	0.64	8.20	15.39	6.82	0.36	12.0	4.80	26.3
777	2.64	7.65	0.18	1.29	12.27	21.06	6.59	0.03	13.6	6.41	29.9

Как видно из сопоставления данных табл. 1 и 2, в присутствии этилена конверсия пропана снижается. Хотя качественный состав продуктов реакции окисления пропана в присутствии и в отсутствие этилена одинаков, этилен существенно влияет на соотношение углеродсодержащих продуктов реакции. При добавлении этилена в исходную реагирующую смесь выходы пропилена, бутана и бутенов увеличиваются. Следует отметить, что как в присутствии, так и в отсутствие этилена в исходной смеси выходы таких кислородсодержащих продуктов, как метиловый спирт, уксусный альдегид, формальдегид, пренебрежимо малы. С повышением температуры конверсия как пропана, так и этилена закономерно увеличивается.

Поскольку при окислении пропана этилен является одним из продуктов реакции, представлялось интересным подобрать такой состав смеси, при котором в ходе процесса расход этилена на образование продуктов реакции компенсировался бы его образованием при конверсии пропана. В этом случае при циклической организации процесса с промежуточным

выделением продуктов (за исключением этилена) не было бы необходимости вводить этилен в исходную смесь, поскольку его постоянное присутствие обеспечивалось бы за счёт окисления более дешёвого пропана.

Нами экспериментально было показано, что смесь с мольным отношением $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 4.5:8:1$ обеспечивает вышеуказанное условие, т.е. при окислении такой смеси при выбранных нами условиях концентрации этилена до и после реакции практически одинаковы. Этот результат демонстрируется данными табл. 3.

Таблица 3

Температурная зависимость конверсии пропана и концентрации образовавшихся продуктов (моль %) при окислении смеси состава $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 4.5:8:1$

9	C_2H_6	C_2H_4	C_3H_6	C_4H_{10}	C_4H_8	H_2	CH_4	CO	C_2H_4O	$K_{C_3H_8}, \%$	$S_{C_3H_6}, \%$
492	0.18	32.6	4.01	0.45	0	0.30	2.73	1.97	0.30	12.6	54.5
523	0.30	32.4	4.86	0.51	0	0.44	3.38	2.30	0.35	16.9	52.0
567	0.45	32.1	5.73	0.59	0.08	1.09	4.95	2.30	0.47	20.7	52.7
625	1.07	32.6	7.29	0.70	0.08	2.21	7.07	2.97	0.61	28.9	51.2
673	1.65	32.1	8.21	0.64	0.15	3.70	9.20	3.18	0.45	35.1	50.2
728	1.88	32.4	8.77	0.52	0.50	7.48	13.27	3.62	0.18	46.1	47.8
768	2.11	31.7	7.42	0.23	0.85	10.84	19.29	3.85	0	59.0	38.3

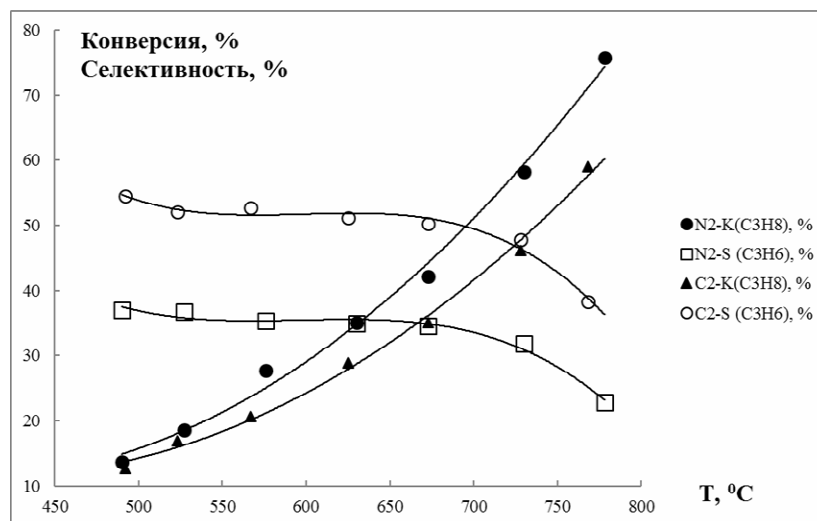


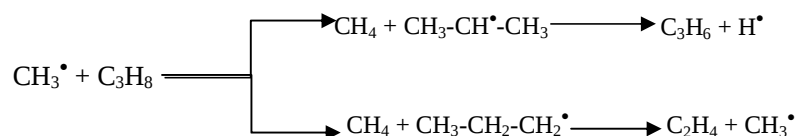
Рис. 3. Температурная зависимость конверсии пропана и селективности образования пропилена при окислении смесей состава $N_2 : C_3H_8 : O_2 = 4.5:8:1$ и $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 4.5:8:1$. $P = 660$ Торр, $\tau = 4.5$ с.

На рис. 3 представлена температурная зависимость конверсии пропана и селективности образования пропилена при окислении смесей состава $N_2 : C_3H_8 : O_2 = 4,5:8:1$ и $C_2H_4 : C_3H_8 : O_2 = 4,5:8:1$.

Как видно из представленных данных, с повышением температуры происходит увеличение конверсии пропана и выхода таких продуктов реакции, как этилен, этан, бутилен, метан и водород, а выход пропилена и бутана проходит через максимум. Причём максимальные концентрации указанных веществ достигаются при разных температурах, что вполне естественно, так как они образуются в результате различных стадий сложного свободно-радикального процесса.

Снижение концентрации бутана и увеличение концентрации бутилена начинаются приблизительно при одной и той же температуре (табл. 3). Этот факт свидетельствует о взаимосвязи процессов образования и расхода этих соединений.

Рост выхода метана и этилена можно рассматривать как результат превращения пропана по следующей схеме реакции:



При этом состав продуктов определяется конкуренцией реакций отрыва атома водорода метильными радикалами от первичной и вторичной С-Н связей молекулы пропана.

С повышением температуры снижение концентрации пропилена после максимума, очевидно, объясняется тем, что скорость его расхода в результате последующего окисления начинает превосходить скорость образования.

Важный результат этой работы заключается в том, что при определённых условиях концентрации этилена до и после реакции практически одинаковы, а расходуется только более доступный и дешёвый углеводород пропан, т.е. этилен в этом процессе выступает в качестве гомогенного катализатора окислительного превращения пропана в пропилен. Таким образом, в результате процесса с высоким выходом образуются пропилен, а также такие ценные продукты, как бутилены и оксид этилена.

Как показывают результаты, представленные на рис. 3, хотя конверсия пропана в смеси, содержащей этилен, ниже конверсии пропана в смеси с азотом, селективность образования пропилена в присутствии этилена заметно выше.

При температурах до 943 К селективность образования пропилена в обеих смесях изменяется незначительно. Но дальнейшее повышение температуры при увеличении конверсии пропана приводит к их синхронному снижению. Снижение селективности образования пропилена, по всей вероятности, объясняется тем, что с повышением температуры увеличива-

ется как доля превращения пропана в побочных реакциях, так и скорость процессов окисления пропилена.

Таким образом, окислительный пиролиз пропана в присутствии этилена, практически не расходуемого в процессе, может рассматриваться как перспективное направление для создания высокоселективной технологии получения пропилена непосредственно из дешёвого и доступного пропана.

Авторы выражают благодарность М. Дж. Погосяну и Л. Н. Стрековой за плодотворное обсуждение результатов.

¹Институт химической физики им. А.Б. Налбандяна НАН РА

e-mail: tavadyan@ichph.sci.am; narek-poghosyan@mail.ru

²Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН

**Н. М. Погосян, С. Д. Арсентьев, В. С. Арутюнов,
академик Л. А. Тавадян**

Сопряжённое окисление лёгких углеводородов как источник получения пропилена и более тяжёлых олефинов

Экспериментально показано, что окислительное превращение смесей метана с этиленом, метана с пропаном, а также пропана с этиленом может служить источником пропилена. При этом в случае пропан-этиленовых смесей процесс может быть организован так, что этилен в нём практически не расходуется, т.е. фактически выступает в роли катализатора образования пропилена, что открывает возможность создания высокоселективного процесса получения пропилена непосредственно из пропана.

**Ն. Մ. Պողոսյան, Ս. Դ. Արսենտև, Վ. Ս. Հարությունով,
ակադեմիկոս Լ. Ա. Թավադյան**

Թեթև ածխաջրածինների գուգորդված օքսիդացումը՝ որպես պրոպիլենի և ավելի ծանր օլեֆինների ստացման աղբյուր

Փորձնականորեն ցույց է տրվել, որ մեթանի ու էթիլենի, մեթանի ու պրոպանի, ինչպես նաև պրոպանի ու էթիլենի խառնուրդների օքսիդային փոխարկումը կարող է ծառայել որպես պրոպիլենի ստացման աղբյուր: Պրոպանի ու էթիլենի խառնուրդի դեպքում պրոցեսը կարելի է կազմակերպել այնպես, որ դրանում էթիլենը գործնականում չծախսվի, այսինքն՝ փաստորեն այն հանդես է գալիս պրոպիլենի առաջացման կատալիզատորի, դերում ինչը հնարավորություն է ընձեռում իրականացնելու անմիջապես պրոպանից պրոպիլենի ստացման բարձր ընտրողականությամբ գործընթաց:

**N. M. Poghosyan, S. D. Arsentev, V. S. Arutyunov,
academician L. A. Tavadyan**

The Conjugated Oxidation of Light Hydrocarbons as a Source of Propylene and Higher Olefines Production

It has been experimentally shown that the processes of noncatalytic oxidative conversion of methane-ethylene, methane-propane as well as propane-ethylene mixtures may serve as a new effective method for propylene and higher olefines production. At

this, the process of conversion of propane-ethylene mixtures can be arranged in such a manner that the ethylene will not be noticeably consumed, i.e., it will actually act as a propylene formation catalyst. This arrangement opens up a possibility to design a selective process for producing propylene directly from propane.

Литература

1. *Weitkamp J., Raichle A., Traa Y., Rupp M., Fuder F.* – Chem. Commun. 2000. №5. P. 403.
2. *True W. R.* – O&GJ. 2012. Jul. 2, P. 78
3. *Craig R.G., Penny S.J., Schwartz W.A.* – Oil Gas J., Techn. 1983. V. 81. № 30. P. 161
4. *Арутюнов В. С., Крылов О. В.* – Успехи химии. 2005. Т. 74. Вып. 3. С. 1216.
5. *Погосян М. Дж.* – Хим. журнал Армении. 2006. Т. 59. № 1. С. 12
6. *McEnally C.S., Pfefferle L.D., Atakan B., Kohse-Hoinghaus K.* – Prog. En. Comb. Sci. 2006. V. 32. P. 247
7. *Погосян Н. М., Погосян М. Дж., Арсентьев С. Д., Тавадян Л. А., Арутюнов В. С.* – Хим. журнал Армении. 2015. Т. 68. № 1. С. 11
8. *Погосян Н. М., Погосян М. Дж., Арсентьев С. Д., Стрекова Л. Н., Тавадян Л. А., Арутюнов В. С.* – Хим. физика. 2015. Т. 34. № 4. С. 29–34
9. *Погосян Н. М., Погосян М. Дж.* – Хим. журнал Армении. 2009. Т. 62. № 3-4. С. 316-323.
10. *Mackie J.C., Smith J.G., Nelson P.F., Tyler R.J.* – Energy & Fuels 1990. 4. P. 277.
11. *Магомедов Р.Н., Прошина А.Ю., Пешиев Б.В., Арутюнов В.С.* – Кинетика и катализ. 2013. Т. 54. № 4. С. 413.

ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՏԴ [57+61]:539.1.04:577.123.383:34.49.47

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Ի. Հակոբյան, Լ. Ս. Ներսեսովա,
Մ. Ս. Պետրոսյան, Մ. Գ. Գազարյանց

**Ca-մոդիֆիկացված երկպարույր ՌՆԹ-ն՝ որպես
ռադիոպաշտպանիչ միջոց**

(Ներկայացված է 14/IV 2017)

Առանցքային բառեր. *Ca-մոդիֆիկացված երկպարույր ՌՆԹ (Ca-dsՌՆԹ), ռադիոպաշտպանիչներ, իոնիզացնող ճառագայթում, ապրել-ունակություն, Կապլան-Մեյերի ապրելունակության մոդել:*

Ներկայումս գոյություն ունեցող քիմիական ռադիոպաշտպանիչների կողմնակի տոքսիկ էֆեկտները և բնական ծագման ռադիոպաշտպանիչների ազդեցության կարճ տևողությունը հիմք հանդիսացան կենսաբանական ծագման միացությունների ռադիոպաշտպանիչ հատկությունների ուսումնասիրության համար: Բուսական ծագման մի շարք ռադիոպաշտպանիչներ, ինչպիսիք են օրինակ՝ *Aloe Vera*-ն, քրքումը (*curcumin*) ունեն կողմնակի էֆեկտներ, որոնք մասնավորապես կարող են դրսևորվել ալերգիկ ռեակցիաներով և մարսողական համակարգի խանգարումներով [1-3], իսկ քիմիական ռադիոպաշտպանիչների կիրառումը հաճախ սահմանափակվում է նրանց բարձր տոքսիկության, արտահայտված կողմնակի էֆեկտների պատճառով, ինչի մասին հիշատակվում է մի շարք հեղինակավոր ամսագրերում [4]: Բնական ռադիոպաշտպանիչներն այն նյութերն են, որոնք ունեն առավել մեծ պաշտպանիչ էֆեկտ ճառագայթումից որոշ ժամանակ առաջ ներմուծման դեպքում: Կենսաբանորեն ակտիվ նյութերի ոլորտում վերջին տասնամյակների ուսումնասիրություններով հայտնաբերվել է Ca-dsՌՆԹ-ի արտակարգ կարևոր դերն անբարենպաստ ազդեցությունների նկատմամբ օրգանիզմի ռեզիստենտության կարգավորման և իմունոդեֆիցիտ վիճակների շտկման հարցում: Այս էֆեկտների հիմքում ընկած են օրգանիզմում ինտերֆերոնի ակտիվ խթանման մեխանիզմները [5, 6]: Նրանք ունակ են հանդես գալու որպես

իմունոմոդուլյատորներ, պատվաստման դեպքում՝ իմունոադյուվանտներ, հակամուտագեններ և ռադիոպաշտպանիչ հատկություններ ունեցող միացություններ [7,8]: Կենսաբանորեն ակտիվ նյութերի հիման վրա պատրաստուկների ստեղծումը, որոնք ունակ են առանց տոքսիկ ազդեցություն թողնելու բարձրացնել օրգանիզմի ռադիոռեզիստենտությունը, հակաճառագայթային պաշտպանության արդյունավետ միջոցների որոնումներում հեռանկարային ուղղություն է: Քանի որ իմունային դիստեգուլյացիան որոշիչ դեր է խաղում ռադիացիոն սթրեսի պայթզենեզում, տեսական և գործնական հետաքրքրություն էր ներկայացնում մեր լաբորատորիայի կողմից ստեղծված (ՀՀ ԳԱԱ մոլեկուլային կենսաբանության ինստիտուտ, մոլեկուլային էնզիմաբանության լաբորատորիա) բարձր արդյունավետությամբ օժտված պատրաստուկի՝ Ca-մոդիֆիկացված երկպարույր ՌՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ հատկությունների ուսումնասիրությունը:

Նյութեր և մեթոդներ: Ca-dsՌՆԹ-ն կարելի է ստանալ նատրիումի նուկլեինատից («Բիոսինթեզ» ԲԲԸ, ք. Պենզա, ՌԴ) կամ անջատել *Saccharomyces cerevisiae* քիլլերային խմորասնկերից՝ Ca-ով նրա հետագա մոդիֆիկացումով [6]: Պատրաստուկը ջրում հեշտ լուծվող դեղնամոխրագույն փոշի է: Այն պարունակում է 13.6% ազոտ (N), 7.8% ֆոսֆոր (P), 01գ սպիտակուց՝ ըստ չոր զանգվածի, N/P հարաբերակցությունը կազմում է 1.74: Ca-ով մոդիֆիկացիան կատարվել է կալցիումի քլորիդի ստերիլ լուծույթի ավելացմամբ, մինչև 40 րոպեի ընթացքում կայուն օպալեսցենցիայի ի հայտ գալը: Լուծույթում պատրաստուկն ակտիվ է 30 օր 4-10 °C ջերմաստիճանում: Ինտերֆերոնի ինդուկտորը (պայմ. անվանումը՝ իմունամոդուլյատոր), որը պարունակում է *Saccharomyces cerevisiae* քիլլերային խմորասնկերից անջատված երկպարույր ՌՆԹ-ի Ca-ձևափոխված ածանցյալը, մեր կողմից նախկինում օգտագործվել է որպես կանխարգելիչ միջոց խոշոր եղջերավոր անասունների դաբաղի և ընտանի թռչունների նյութապի հիվանդության դեմ [9, 10]: Տվյալ աշխատանքի նպատակը Ca-dsՌՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ հատկությունների ուսումնասիրությունն է 630Ռ միանվագ ընդհանուր իոնիզացնող ճառագայթման ժամանակ:

Փորձերն իրականացվել են սպիտակ, 200-220 գ քաշով 40 արու առնետների վրա: Կենդանիները պահվել են ստանդարտ սննդակարգով, նրանց ամենօրյա կերաբաժինը պարունակել է սպիտակուցներ, ճարպեր, ածխաջրեր և վիտամիններ: Փորձնական խմբի կենդանիներին իոնիզացնող ճառագայթումից 24 ժ առաջ ներորովայնային ներարկվել է ստերիլ 1մլ թորած ջրում լուծված Ca-dsՌՆԹ՝ 40 մգ/200 գ կենդանու կշռին դրոպով, իսկ համապատասխան ստուգիչ խմբի կենդանիներին՝ կալցիումի քլորիդի լուծույթ:

Իոնիզացնող ճառագայթումը կատարվել է ՀՀ ԱՆ Ճառագայթային բժշկության և այրվածքների գիտական կենտրոնում: Խմբերում հավասարաչափ բաշխված կենդանիները (n=20) ենթարկվել են միանվագ ընդհանուր ճառագայթման "PVM-17" ռենտգենյան սարքի միջոցով՝ 630 R սուբլետալ դոզայով, $L\Gamma_{50/30}$ -630 R (դոզայի հզորությունը՝ 178Ռ/րոպե, լարումը՝ 200 կՎ, հոսանքի ուժը՝ 20 մԱ, Cu-Al ֆիլտր, կիզակետային հեռավորությունը՝ 50 սմ): Կենդանիների ապրելունակությունը դիտարկվել է իոնիզացնող ճառագայթումից հետո՝ 30-օրյա ժամկետում (դիտարկման ժամանակահատված): Տվյալների վիճակագրական մշակման համար կիրառվել է SPSS STATISTICS 16 ծրագրային փաթեթի Կապլան-Մեյերի ապրելունակության մոդելը: Տվյալները համարվել են հավաստի $p<0,05$ -ի դեպքում:

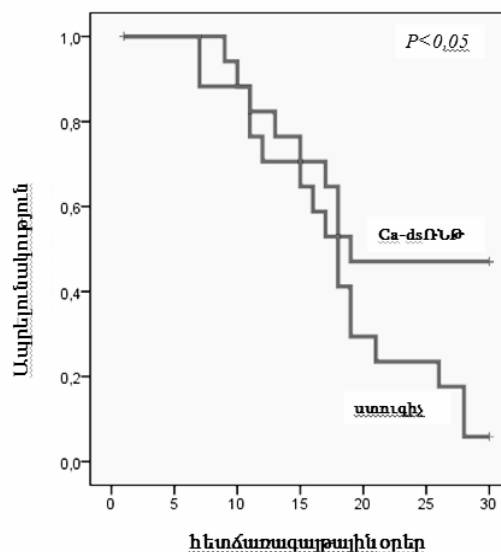
Ստացված արդյունքները և դրանց քննարկումը: Ca-մոդիֆիկացված dsԲՆԹ-ն օժտված է բարձր կենսաբանական ակտիվությամբ. այս առավելությունը պայմանավորված է նրա՝ մեմբրանով ներթափանցելու հատկությունների բարձրացմամբ և էնդոնուկլեազների նկատմամբ կայունությամբ՝ շնորհիվ Ca^{2+} իոնի առկայության [9-13]: Քանի որ շնորհիվ Ca-ով մոդիֆիկացիայի Ca-dsԲՆԹ-ի թափանցելիությունը բարձր է, ուստի առավել արձյունավետ է նաև յուրացվում ներմուծվող պատրաստուկի դոզան: dsԲՆԹ-ի արտակարգ կարևոր դերը օրգանիզմի ռեգիստենտության կարգավորման համար պայմանավորված է նրա էնդոգեն β ինտերֆերոնի ակտիվ խթանումով:

Ca-dsԲՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտը իոնիզացնող ճառագայթման ժամանակ ցույց է տրվել առաջին անգամ: Կապլան - Մեյերի ապրելունակության մոդելի միջոցով ստացված վիճակագրական տվյալները ներկայացված են աղյուսակում և նկարում:

Ստուգիչ և փորձնական խմբերի կենդանիների ապրելունակությունը ճառագայթումից հետո՝ 30-օրյա ժամկետում

Կենդանիներ խմբեր	Կենդանիների քանակը	Ca-ds-ՌՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ հնարավորությունները																													
		Կենդանիների ապրելունակությունը դիտարկման ժամանակահատվածում (30 օր)																													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ca-ճՌԹ	20	20	20	20	20	20	20	20	19	18	16	15	15	15	15	15	14	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
ստուգիչ	20	20	20	20	20	20	18	18	18	17	17	16	16	14	13	12	10	9	9	8	8	8	8	8	7	7	5	4	4	4	4

Ինչպես երևում է աղյուսակից և նկարից, որտեղ ներկայացված են փորձի արդյունքները ճառագայթումից հետո՝ 30-օրյա դիտարկման ժամանակահատվածում, կենդանիների մահացությունը ստուգիչ խմբում ճառագայթումից հետո սկսվում է արդեն իսկ 7-րդ օրվանից, այն դեպքում, երբ փորձնական խմբում կենդանիների անկումը սկսվում է 2 օրով ավելի ուշ՝ 9-րդ օրվանից, ինչը վկայում է ճառագայթման նկատմամբ փորձնական խմբի կենդանիների դիմադրության մասին: Ավելին, ստուգիչ խմբում կենդանիների մահացությունը շարունակվում է ընդհուպ մինչև 28-րդ հետճառագայթային օրը, այն դեպքում, երբ փորձնական խմբում նրանց անկումը դադարում է ճառագայթումից հետո՝ 18-րդ օրը: 19-րդ օրվանից կենդանիների ապրելունակությունը կայունանում է, վերականգնվում են ֆիզիկական ակտիվությունը, բնականոն կենսագործունեությունը, այսինքն՝ դիտվում է կենդանիների ֆիզիկական վիճակի կայունացում: Այս տվյալները վկայում են այն մասին, որ Ca-dsՌՆԹ ստացած առնետների հարմարվողականությունը պատճառված սթրեսային գործոնի նկատմամբ ավելի բարձր է, քան համապատասխան ստուգիչ խմբինը: Ճառագայթումից հետո ամենահաճախակի մահացությունը երկու խմբերում էլ դիտվել է 13-17 հետճառագայթային օրերին: Մտուգիչ խմբում, որտեղ 20 առնետներից ապրել են միայն 4-ը, մահացությունը գերազանցել է փորձնական խմբին, որտեղ 20 առնետներից ողջ են մնացել 11-ը:



Ca-dsՌՆԹ (փորձնական խումբ) և կալցիումի քլորիդի լուծույթ (ստուգիչ խումբ) ստացած կենդանիների ապրելունակությունը ճառագայթումից հետո՝ 30 օրվա ընթացքում (դիտարկման ժամանակահատված):

Համաձայն Կապլան-Մեյերի ապրելունակության մոդելի՝ Ca-dsՌՆԹ-ն ցուցաբերել է 40% ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտ, ինչը նշանակալի գերազանցում է մի շարք բնական ռադիոպաշտպանիչների արդյունավետությունը, որոնք միջինում ցուցաբերում են 15-30% ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտ [14]: Ներկայումս հայտնի են տարբեր ռադիոպաշտպանիչ նյութեր, որոնք փորձարկվել են առնետների ապրելունակության մոդելների վրա, որոնցից կարելի է նշել օրինակ՝ գենիստեինը [15]: Այն բուսական ծագման իզոֆլավոնների դասին պատկանող օրգանական նյութ է, որն ունի բարձր ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտ, սակայն, համաձայն գրականության աղբյուրների, այն օժտված է նաև բացասական կողմնակի ազդեցությամբ, մասնավորապես մարսողական համակարգի վրա և խթանիչ ազդեցություն ունի օրգանիզմում առկա ուռուցքների աճի վրա [16]:

Այսպիսով, Ca-dsՌՆԹ-ն կարելի է բնորոշել որպես արդյունավետ, արագ ազդող և երկարաժամկետ էֆեկտիվություն ունեցող ռադիոպաշտպանիչ նյութ: Այն օժտված է արտահայտված ռադիոպաշտպանիչ հատկություններով և կարող է բարձրացնել օրգանիզմի ռեզիստենտությունն իոնիզացնող ճառագայթման նկատմամբ:

ՀՀ ԳԱԱ մոլեկուլային կենսաբանության ինստիտուտ

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Ի. Հակոբյան, Լ. Ս. Ներսեսովա,
Մ. Ս. Պետրոսյան, Մ. Գ. Գազարյանց**

**Ca-մոդիֆիկացված երկաթուրյր ՌՆԹ-ն՝ որպես
ռադիոպաշտպանիչ միջոց**

Ստեղծվել է նոր պատրաստուկ՝ Ca-մոդիֆիկացված dsՌՆԹ-ն (Ca-dsՌՆԹ), որը օժտված է բարձր կենսաբանական ակտիվությամբ, ինչը պայմանավորված է նրա մեմբրան-պենետրացիոն հատկությունների բարձրացմամբ և էնդոնուկլեազների նկատմամբ կայունությամբ: Ուսումնասիրվել են Ca-dsՌՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ հատկությունները 630 Ռ միանվագ ընդհանուր իոնիզացնող ճառագայթման ժամանակ: Ստացված տվյալների համեմատական վերլուծությունը ցույց տվեց, որ Ca-dsՌՆԹ ստացած կենդանիների խմբում ճառագայթումից հետո մահացությունը սկսվում է ավելի ուշ և դադարում ավելի վաղ, քան համապատասխան ստուգիչ խմբում, իսկ ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտն կազմում է 40%: Ca-dsՌՆԹ-ի ռադիոպաշտպանիչ էֆեկտը իոնիզացնող ճառագայթման ժամանակ ցույց է տրվել առաջին անգամ: Այսպիսով, Ca-dsՌՆԹ-ն օժտված է նշանակալի ռադիոպաշտպանիչ հատկություններով և ունակ է բարձրացնելու օրգանիզմի ռեզիստենտությունն ու հարմարվողականությունն իոնիզացնող ճառագայթման նկատմամբ:

**Член-корреспондент НАН РА Ж. И. Акопян, Л. С. Нерсесова,
М. С. Петросян, М. Г. Газарянц**

**Са-модифицированная двуспиральная РНК в качестве
радиопротекторного средства**

Создан новый препарат – Са-модифицированная дсРНК (Са-дсРНК), который обладает большой биологической активностью, что обусловлено повышением ее пенетрационных свойств и устойчивости к эндонуклеазам. Исследованы радиопротекторные свойства Са-дсРНК при однократном общем ионизирующем облучении в дозе 630Р. Показано, что в группе животных, получивших препарат, гибель начинается позже и прекращается значительно раньше, чем в контрольной группе, а радиозащитный эффект Са-дсРНК равен 40%. Выявлен радиопротекторный эффект препарата Са-дсРНК при ионизирующем облучении. Таким образом, можно заключить, что Са-дсРНК обладает значительными радиозащитными свойствами, повышая резистентность и адаптательность организма к ионизирующему облучению.

**Corresponding member of NAS RA J. I. Akopian, L. S. Nersesova,
M. S. Petrosyan, M. G. Gazaryants**

Ca-modified Double-Stranded RNA as a Radioprotective Agent

Ca-modified dsRNA (Ca-dsRNA), the preparation created by us, has a high biological activity, which is conditioned by an increase in its penetration properties and the resistance to endonucleases. The objective of this work is to study the radioprotective properties of Ca-dsRNA against a one-time total ionizing irradiation with the dose of 630R. The comparative analysis of the obtained data have shown that in the preparation received animals group the animals death begins later and stops noticeably earlier, than in the control group and the radioprotective effect of Ca-dsRNA is 40%. The radioprotective effect of the preparation of Ca-dsRNA against ionizing irradiation was revealed for the first time. Thus, we can conclude that Ca-dsRNA has significant radioprotective properties increasing the resistance and adaptability of the organism against the ionizing irradiation.

Գրականություն

1. *Surjushe A., Vasani R., Saple D.* – Indian J. Dermatol. 2008. V. 53. № 4. P. 163-66.
2. *Nagpal1 M., Sood Sh,* – J. Nat. Sci. Biol. Med. 2013. V. 4. № 1. P. 3-7
3. *Maurya D. K., Devasagayam T. P.* – Indian J. Exp. Biol. 2006. V. 44. № 2. P. 93-114.
4. *Mathew T. L.* – Def. Sci. Journal. 2005. V. 55. № 4. P. 403-25.
5. *Karpala A. J., Doran T. J., Bean A. G.* – Immunol. and Cell Biol. 2005. V. 83. № 3. P. 211-6.
6. *Саркисян Х. В., Газарянц М. Г., Маркосян Т. А., Акопян Ж. И и др.* – Вет. патол. 2015. № 1 (51). С. 19-23.

7. *Акопян Ж. И., Погосян Л. Г., Маркосян Т. А., Газарянц М. Г., Мкртчян З. С., Нерсесова Л. С.* – Эпизоотол., иммунобиол., фармакол., санитария. 2009. № 1. С.15-19.
8. *Аликин Ю. С., Ноздрин Г.Н., Шмидт Ю. Д., Луконина Н. В.* - <http://vettorg.net/articles/article-443/>. 2011.
9. Արտոնագիր N 2213 А, *Հակոբյան Շ., Գազարյանց Մ., Մկրտչյան Զ., Ներսեսովա Լ., Պողոսյան Լ., Մելիքսեթյան Գ., Մարկոսյան Տ.,* ՀՀ, <<Ինտերֆերոնի ինդուկտոր>>, 01.09.2008 թ.
10. Արտոնագիր N 2393 А, *Հակոբյան Շ., Գազարյանց Մ., Մկրտչյան Զ., Ռուխկյան Լ., Մարկոսյան Տ.,* ՀՀ, <<Ինտերֆերոնի ինդուկտորի կիրառումը որպես ընտանի թռչունների նյութալ հիվանդության կանխարգելիչ միջոց>>, 26.07.2010 թ.
11. Անասնաբուժական դեղամիջոցի գրանցման հավաստագիր N 00040 Թռչունների սուր վարակիչ հիվանդությունների կանխարգելման նկատմամբ <<Իմունոմոդուլյատոր>> իմունախթանիչ հակավիրուսային պատրաստուկ, 2014 թ.
12. Անասնաբուժական դեղամիջոցի գրանցման հավաստագիր N 00057 Խոզերի սուր վարակիչ հիվանդությունների կանխարգելման նկատմամբ <<Իմունոմոդուլյատոր>> իմունախթանիչ հակավիրուսային պատրաստուկ, 2014 թ.
13. Անասնաբուժական դեղամիջոցի գրանցման հավաստագիր N 00067 Խոշոր եղջերավոր անասունների համար իմունախթանիչ հակավիրուսային <<Իմունոմոդուլյատոր>> պատրաստուկ, 2014 թ.
14. *Aljanabi, S. M., Al-Laham S., Ekhtiar A. M.E.* – Asian J. Pharm. Clin. Res. 2013. V. 6. № 1. P. 82-86.
15. Patent. Radioprotective agents WO 2001095901 A1, Publication date 20 Dec 2001.
16. *de Lemons M.L.* – Ann. Pharmac. other. 2001. V. 35(9). P. 1118-21.

Материалы и методы исследования. Антибактериальная активность литиевых солей салицилиден-аминокислот (1-12) изучена методами «диффузии в агаре» и «двукратных серийных разведений» на мясопептонном бульоне (рН=7.2-7.4) [6, 7], при бактериальной нагрузке 20 млн. микробных тел на 1 мл среды. В экспериментах использовали стандартные эталонные штаммы микроорганизмов (Государственный контрольный институт медицинских и биологических препаратов им. Л.А. Тарасевича, Россия), 2 штамма грамположительных стафилококков, отличающиеся по чувствительности к антибактериальным препаратам (*Staphylococcus aureus* 209P, *Staphylococcus aureus* 1), и грамотрицательные палочки (*Shigella flexneri* 6858, *Escherichia coli* 0-55). При диффузионном методе растворы соединений и контрольного препарата готовили в ДМСО в разведении 1:20. В чашки Петри одинакового диаметра разливали расплавленные среды в два слоя. Для нижнего слоя использовали незасеянные среды в количестве 10 мл, для верхнего слоя – агаровую среду с предварительно засеянной соответствующей тест-культурой. После застывания засеянного агара на его поверхности расставляли стерильные цилиндрики из нержавеющей стали одинакового размера (6x10 мм). В цилиндрики каждой чашки одновременно наносили пипеткой 0.1 мл раствора испытуемых веществ. Учет результатов производили по диаметру (d, мм) зоны отсутствия роста микробов на месте нанесения веществ после суточного выращивания тест-культур в термостате при 37° С.

В методе серийных разведений на каждый подопытный микроорганизм составляли ряды по 7-8 пробирок, содержащие питательную среду с различными концентрациями испытуемых веществ начиная с 1 мкг/мл. Пробирки засеивали одинаковым количеством бактериальной взвеси, приготовленной из 18-часовой культуры микроорганизмов. Результаты опытов учитывали визуально по наличию и интенсивности роста микробов после суточной инкубации в термостате при 37° С. За действующую дозу принимали ту наименьшую концентрацию вещества в мкг/мл, которая в состоянии ингибировать рост микроорганизмов (минимальная ингибирующая концентрация – МИК). В качестве положительного контроля в аналогичных условиях использовали лекарственный препарат фуразолидон [8].

Результаты и обсуждение. Исследования антибактериальной активности литиевых солей салицилиден-аминокислот методом «диффузии в агаре» показали, что все изученные соединения обладают противомикробными свойствами. При этом литиевая соль β-аланина проявляет высокую активность, подавляя рост всех использованных микроорганизмов в зоне диаметром 25-27 мм (табл. 1). Остальные соединения, в структурах которых присутствуют различные аминокислоты, проявляют выраженную активность (d=17-25 мм). Исключение составляет производное пара-аминобензойной кислоты (10), которое в отличие от соединения мета-аминобензойной кислоты (11) оказывает слабое антибактериальное действие (d=12-14 мм).

В опытах по методу двукратных серийных разведений также использовали вышеуказанные 4 штамма. Исследования показали, что испытуе-

мые вещества, за исключением №10, подавляют рост *Shigella flexneri* 6858 в концентрации 500-1000 мкг/мл (табл. 2). На остальных штаммах данные вещества проявляют активность в основном при более высоких концентрациях (МИК>1000 мкг/мл). Следует отметить, что изучаемые вещества, за исключением соединений № 8, по активности уступают контрольному препарату фуразолидону (d=24-25 мм, МИК=31.2 мкг/мл).

Таблица 1

**Антибактериальная активность литиевых солей
салицилиден-аминокислот**

	Соединение	Диаметр зоны задержки роста микроорганизмов, мм			
		<i>Staphylococcus aureus</i>		<i>Shigella flexneri</i> 6858	<i>Escherichia coli</i> 0-55
		209 p	1		
1	Литиевая соль салицилиден DL-валина	20	22	23	18
2	Литиевая соль салицилиден β-фенил-β-аланина	18	18	23	20
3	Литиевая соль салицилиден DL-β-фенил-α-аланина	19	20	22	18
4	Литиевая соль салицилиден DL-β-фенил-β-аланина	19	20	22	18
5	Литиевая соль салицилиден DL-триптофана	17	19	23	18
6	Литиевая соль салицилиден ε-аминокапроновой кислоты	22	20	25	20
7	Литиевая соль салицилиден L-триптофана	21	22	25	18
8	Литиевая соль β-аланина	27	26	26	25
9	Литиевая соль салицилиден D-β-фенил-α-аланина	26	19	20	20
10	Литиевая соль салицилиден пара-аминобензойной кислоты	14	13	12	13
11	Литиевая соль салицилиден мета-аминобензойной кислоты	24	18	20	20
12	Литиевая соль салицилиден 5-аминосалициловой кислоты	18	18	20	20
Фуразолидон		25	25	24	24

Таблица 2

**Минимальная ингибирующая концентрация литиевых солей
салицилиден-аминокислот**

	Соединение	Диаметр зоны задержки роста микроорганизмов, мм			
		<i>Staphylococcus aureus</i>		<i>Shigella flexneri</i> 6858	<i>Escherichia coli</i> 0-55
		209 p	1		
1	Литиевая соль салицилиден DL-валина	>1000	1000	500	>1000
2	Литиевая соль салицилиден β-фенил-β-аланина	>1000	>1000	500	>1000
3	Литиевая соль салицилиден DL-β-фенил-α-аланина	>1000	>1000	500	>1000
4	Литиевая соль салицилиден DL-β-фенил-β-аланина	>1000	>1000	1000	>1000
5	Литиевая соль салицилиден DL-триптофана	>1000	>1000	1000	>1000
6	Литиевая соль салицилиден ε-аминокапроновой кислоты	>1000	>1000	500	1000
7	Литиевая соль салицилиден L-триптофана	>1000	>1000	500	>1000
8	Литиевая соль β-аланина	1000	1000	500	1000
9	Литиевая соль салицилиден D-β-фенил-α-аланина	>1000	>1000	>1000	>1000
10	Литиевая соль салицилиден пара-аминобензойной кислоты	>1000	>1000	1000	>1000
11	Литиевая соль салицилиден мета-аминобензойной кислоты	1000	>1000	1000	>1000
12	Литиевая соль салицилиден 5-аминосалициловой кислоты	>1000	>1000	1000	>1000
Фуразолидон		31,2	31,2	31,2	31,2

Таким образом, на основании полученных данных можно заключить, что целесообразно продолжать поиски новых высокоэффективных веществ в ряду литиевых производных салицилиден-аминокислот.

Научно-технологический центр органической и
фармацевтической химии НАН РА,
Институт тонкой органической химии им. А. Л. Мнджояна
e.mail: sedrham@yahoo.com

**С. А. Казарян, Г. М. Степанян, Р. В. Пароникян,
К. П. Григорян**

**Антибактериальная активность литиевых солей некоторых
салицилиден-аминокислот**

Показано, что испытываемые литиевые соли салицилиден-аминокислот обладают выраженными антибактериальными свойствами как в отношении грамположительных (*Staphylococcus aureus* 209p, 1), так и грамотрицательных (*Sh. flexneri* 6858, *Escherichia coli* 0-55) микроорганизмов. При этом наивысшую активность в эксперименте показала литиевая соль салицилиден-β-аланина, незначительно уступающая применяемому в медицине фуразолидону.

**Ս. Հ. Ղազարյան, Հ. Մ. Ստեփանյան, Ռ. Վ. Պարոնիկյան,
Կ. Պ. Գրիգորյան**

**Որոշ սալիցիլիդեն-ամինաթթուների լիթիումական աղերի
հակաբակտերիալ ակտիվությունը**

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ուսումնասիրված սալիցիլիդեն ամինաթթուների լիթիումական աղերը ցուցաբերում են արտահայտված հակաբակտերիալ ազդեցություն թե՛ գրամդրական (*Staphylococcus aureus* 209p, 1) և թե՛ գրամբացասական (*Sh. flexneri* 6858, *Escherichia coli* 0-55) բակտերիաների նկատմամբ: Պարզվել է, որ այդ շարքում արտահայտված ամենաբարձր հակաբակտերիալ ակտիվություն ցուցաբերում է սալիցիլիդեն-β-ալանինի լիթիումական աղը, որը, սակայն, աննշան զիջում է բժշկական պրակտիկայում կիրառվող ֆուրազոլիդոնին:

**S. H. Ghazaryan, H. M. Stepanyan, R.V. Paronikyan,
K. P. Grigoryan**

**Antibacterial Activity of Lithium Salts of Some
Salicylidene Amino Acids**

The antibacterial activity of some Lithium salts of salicylideneaminoacids was tested both on gram-positive (*Staphylococcus aureus* 209p, 1) and gram-negative (*Sh. flexneri* 6858, *Escherichia coli* 0-55) bacteria. In so doing, the lithium salt salicylidene-β-alanine shows the highest activity in the experiment, but it slightly yielded to “Phurazolidone” that used in medicine.

Литература

1. *Ghangbin Wang; Ma Shikim, Jinling Wang, Fangming Mino* – Synth. React. Inorg. Met-Org. Chem, 199. V. 19. № 6. P.1023-1031.
2. *Minasyan S. H., Ghazaryan S. H., Tonoyan V. J., Bajinyan S. A., Grigoryan K. P., Greenaway F. T., Sorenson J. R. J.* – Synthesis and Reactivity in Inorganic, Metal-Organic and Nanometal Chemistry. 2006. V. 36. № 5. P. 425-434.

3. *Crouch P. K., Kensler T. W., Oberley L. W., Sorenson J. R. J.* In: Karlin K.D., Zubietta, J. Eds. *Biological J. Inorganic Copper Chemistry*. Guilderland, New York. Adenine Press. 1985. P. 139-157.
4. *Sorenson J. R. J.* In: *Biology of copper complexes, Synthesis and Biological Activity of Some Copper-Tridentate Schiff Bases*. 1985. P. 533-540.
5. *Казарян С. А., Пароникян Р. Г., Экмекджян Э. А., Тадевосян А. А., Григорян К. П., Карапетян А. Г.* – *Кровь*. 2012. № 1(13). С. 46-49,
6. *Першин Г. Н.* Методы экспериментальной химиотерапии. М. Медицина. 1971. С. 507-533.
7. *Руководство по проведению доклинических исследований лекарственных средств*. Под ред. Миронова А.Н. М. Медицина. 2012. С. 509-524.
8. *Машиковский М. Д.* Лекарственные средства. М. Новая волна. 2010. С. 851.

ներ և էնտերոկոկեր [1, 2, 6, 7]: Սակայն ավելի ուշ հրատարակված աշխատանքներում նշվում է, որ կրծքի կաթը պարունակում է պրոբիոտիկ ներուժ ունեցող տարբեր տեսակի լակտոբացիլներ, լակտոկոկեր և այլ կաթնաթթվային բակտերիաներ [3, 8, 9]: Այս միկրոօրգանիզմների առկայությունը մայրական կաթում նորածինների աղիքային միկրոֆլորայի գաղութացման հիմնական պայմանն է: Այն փաստը, որ առողջ կանանց կրծքի կաթից անջատված նշված բակտերիաները մեկուսացվել են տարբեր երկրներում, վկայում է նրանց տարածվածության մասին: Հետևաբար՝ դրանք պետք է դիտարկել որպես մայրական կաթի և կաթնագեղձերի բնականոն միկրոբիոտա, այլ ոչ թե ադոպտվածություն:

Այսպիսով, մայրական կաթը համարվում է պրոբիոտիկ բակտերիաների աղբյուր [1-3], որը պաշտպանում է նորածիններին զանազան ինֆեկցիոն հիվանդություններից: Ցույց է տրվել, որ եթե հղիության 6 – րդ ամսից սկսած կինը պարբերաբար պերորալ ընդունի որոշակի պրոբիոտիկ շտամի պատրաստուկ, ապա այն հետագայում հայտնաբերվում է կրծքի կաթում [2, 3]:

Տվյալ աշխատանքի խնդիրն է ուսումնասիրել մայրական կաթից անջատված բակտերիաների պրոբիոտիկ հատկությունները՝ հետագայում նրանց բժշկության մեջ կիրառելու նպատակով:

Նյութը և մեթոդները: Հետազոտության նյութը հայաստանաբնակ կանանց մայրական կաթից մեր կողմից անջատված լակտոբացիլների (*Lactobacilli*) և լակտոկոկերի (*Lactococci*) շտամներն են, ինչպես նաև *Escherichia coli* MDC 5003 O157:H7, *Candida albicans* MDC 8013 թեստ-շտամները, որոնք ստացվել են ՀՀ ԳԱԱ «Հայկենսատեխնոլոգիա» ԳԱԿ-ի Մանրէների ավանդադրման կենտրոնից:

Աշխատանքում օգտագործվել են հետևյալ միջավայրերը՝ LAPTg ազար և արգանակ [10], տրիպտոգ ազար (Ferak Berlin), լիարժեք արգանակ՝ Nutrient broth standart 1 (Serva), Էյկմանի միջավայրը [9] և նյութերը՝ մեթիլեն կապույտ, լեդի (Micromaster), Գրամի ներկման հավաքածու (Gram Staining Set, Ghatran, IIR), ջրածնի պերօքսիդ (H_2O_2), օքսիդազային սկավառակներ (HiMedia), յուղագերծ կաթ, L-արգինին (Sigma), NaCl, NaOH, Նեսսլերի լուծույթ և ստերջ թղթե սկավառակներ: ԿԹԲ շտամների կայունությունը 20%-անոց լեղու, 2.0 – 6.5 % NaCl-ի և NaOH-ի տարբեր խտությունների նկատմամբ ուսումնասիրվել են LAPTg արգանակում, արգինինից ամոնիակի անջատումը Նեսսլերի լուծույթով, իսկ աճը 0.1% մեթիլեն կապույտում՝ յուղագերծ կաթում:

Հակամանրեային ակտիվությունը որոշվել է գիշերային կուլտուրաների վերնստվածքային հեղուկներում թրջված թղթե սկավառակների տեղադրումով թեստ-կուլտուրաներով ինոկուլացված տրիպտոգ

ագարի վրա: Հաջորդ օրը՝ թեստ կուլտուրաների ինկուբացումից հետո, չափվել են աճի ճնշման գոտիները:

Պրոտեոլիտիկ ակտիվությունը որոշվել է կաթնաթթվային բակտերիաների (ԿԹԲ) շտամների վերնաստվածքային հեղուկներով թրջված թղթե սկավառակների տեղադրումով Էյկմանի ագարային միջավայրի մակերեսին:

Անջատված բակտերիաները ներկվել են ըստ Գրամի և ուսումնասիրվել ՄԲԻ – 3 լուսային մանրադիտակով ֆազոկոնտրաստի կիրառմամբ: Շտամների կատալազային և օքսիդազային ակտիվությունները ստուգվել են հայտնի մեթոդներով [1]:

Արդյունքները և դրանց քննարկումը: Հայաստանաբնակ կանանց մայրական կաթից անջատված 44 կուլտուրաներից նախնական ուսումնասիրությունների արդյունքում առանձնացվել են Գրամ դրական, կատալազա և օքսիդազա բացասական 8 լակտոբացիլներ և 10 լակտոկոկեր, որոնց մոտ ուսումնասիրվել են պրոբիոտիկ միկրոօրգանիզմներին բնութագրող աճը հիմնային (9.2) և թթվային (pH 2.0) միջավայրերում, կայունությունը կերակրի աղի (NaCl 2.0 -6.5 %) և լեղու 20% խտությունների նկատմամբ, ինչպես նաև կուլտուրալ և ֆերմենտատիվ հատկությունները:

Լակտոբացիլների կուլտուրալ և ֆիզիոլոգիական հատկությունները ներկայացված են (աղ. 1-ում):

Աղյուսակ 1

Լակտոբացիլների աճը և կայունությունը միջավայրի տարբեր պայմաններում

ԼՐ շտամ	Աճը տաքբեր -C-ում			Աճը NaCl-ում		Աճը pH-ում		20% լեղիով կաթում	Արգինինից NH3 առաջացում	0.1% ՄԿ կաթում
	10	45	50	2.0	6.5	2	9,2			
LH14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
LH15	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-
LH25	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
LH26	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
LH27	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
LH28	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-
LH29	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-
LH32	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-

Ինչպես երևում է աղյուսակ 1-ից, 10°C-ում աճը բացակայում է լակտոբացիլների երեք կուլտուրայի, 45°C և 50°C ջերմաստիճանների տիրույթում աճում են բոլոր կուլտուրաները բացի 1-ից, 2% NaCl-ի, pH 2 – 9.2-ի և 20% լեդիով կաթում կայուն են փորձարկված լակտոբացիլների բոլոր շտամները, ինչպես նաև արգինինից ամոնիակ առաջացնում են նույնպես բոլոր լակտոբացիլները: 0.1% մեթիլեն կապույտ պարունակող կաթում աճում է միայն մեկ կուլտուրա, իսկ լակտոբացիլների երկու կուլտուրա զգայուն են 6.5% NaCl-ի հանդեպ:

Աղյուսակ 2

Լակտոկոկերի աճը և կայունությունը միջավայրի տարբեր պայմաններում

ԼԿ շտամ	Աճը տաքեղ °C-ում			Աճը NaCl. %		Աճը pH-ում		20% լեդիով կաթում	Արգինինից NH3 առաջացում	0.1% ՄԿ կաթում
	10	45	50	2.0	6.5	2	9,2			
LH1	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
LH4	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-
LH8	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
LH21	-	+	-	+	+	+	+	+	+	-
LH24	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-
LH34	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-
LH35	-	+	-	+	+	+	+	+	-	-
LH38	-	+	-	+	-	+	+	+	-	-
LH42	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-
LH44	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Աղյուսակ 2-ում ներկայացված են լակտոկոկային շտամների ուսումնասիրության արդյունքները: Ինչպես երևում է ներկայացված տվյալներից, 10°C-ում աճում են բոլոր կոկերը, բացառությամբ 4-ի, 45°C-ում՝ բոլորը, բացի 1-ից, իսկ 50°C-ում աճում է միայն մեկ կոկ: Բոլոր լակտոկոկային կուլտուրաները կայուն են 2% NaCl-ի, pH 2 և pH 9.2-ի, 20% լեդու նկատմամբ: 6.5% NaCl-ի միջավայրում չեն աճում 2 կուլտուրա: Արգինինից ամոնիակ չեն առաջացնում 4 կուլտուրա: 0.1% մեթիլեն կապույտ պարունակող կաթում աճում են 3 լակտոկոկային կուլտուրա:

Անջատված ԿԹԲ-ի մեծամասնության կայունությունը լեդու, բարձր խտության կերակրի աղի և pH-ի լայն տիրույթի հանդեպ վկա-

յում է աղեստամոքսային համակարգում նրանց կենսունակության պահպանման մասին:

Պրոբիոտիկներին առաջադրվող կարևորագույն հատկանիշ է համարվում նրանց բարձր հակաբակտերիալ ակտիվությունը:

Անջատված լակտոբացիլների և լակտոկոկների շտամների գիշերային կուլտուրաների վերնստվածքային հեղուկների հակամանրէային ակտիվությունն ուսումնասիրվել է *E. coli* O157:H7 և *C. albicans* ախտածին թեստ կուլտուրաների հանդեպ (աղյուսակ 3) :

Աղյուսակ 3

Լակտոբացիլների և լակտոկոկների հակամանրէային ակտիվությունը

ԿԹԲ շտամներ	Վերնստվածքային հեղուկներով թեստ կուլտուրաների աճի ճնշման գոտիները, մմ	
	<i>E. coli</i>	<i>C. albicans</i>
LH14, LH27, LH29	10-14	13-15
LH15, LH25, LH26, LH28, H32	15-25	16-23
<u>Լակտոկոկների շտամներ</u>		
LH1, LH34	5-8	6-8
LH4, LH8, LH35, LH42,	9-14	8-15
LH21, LH24, LH38, LH44	14-25	16-25

Աղյուսակ 3-ից երևում է, որ 5 լակտոբացիլային և 4 կոկային կուլտուրաներ օժտված են հակաբակտերիալ բարձր ակտիվությամբ: Նրանց վերնստվածքային հեղուկները ճնշում են *E. coli* և *C. albicans* թեստ-շտամների աճը՝ առաջացնելով 14-25 մմ ճնշման գոտիներ:

Կաթում կաթնաթթվային բակտերիաների բազմացման համար անհրաժեշտ են ամինաթթուներ, որոնց աղբյուրը կաթի կազեինն է: ԿԹԲ շտամների պրոտեոլիտիկ ակտիվությամբ է պայմանավորված նրանց կողմից կաթի մակարդման արդյունավետությունը: Պրոտեոլիտիկ ակտիվությամբ օժտված շտամների առկայությունը կրծքի կաթում մանկան կողմից մայրական կաթի, ինչպես նաև հետագայում մանկական կաթնային խառնուրդների յուրացման գրավականն է: Այն իր հերթին կնպաստի կովի կաթի սպիտակուցների ալերգիկ ազդեցությունները նվազեցնելուն:

Կաթի հիմքով պատրաստած էյկմանի միջավայրի վրա տեղադրված ԿԹԲ-ի գիշերային կուլտուրաների վերնստվածքային հեղուկներով թաթախված թղթե սկավառակների շուրջ կազեինների պրոտե-

ոլիզի արդյունքում առաջացած թափանցիկ գոտիները վկայում են նրանց պրոտեոլիտիկ ակտիվության մասին (աղ. 4):

Ինչպես երևում է աղյուսակից, մայրական կաթից անջատած կուլտուրաներն օժտված են արտահայտված պրոտեոլիտիկ ակտիվությամբ՝ հասնելով մինչև 25 մմ-ի:

Աղյուսակ 4

Լակտոզերի և լակտոբացիլների պրոտեոլիտիկ ակտիվությունը

Շտամներ	Թափանցիկ գոտիները, մմ
LH1, LH20, LH36	2-10
LH4, LH8, LH14, LH21, LH27, LH34, LH 35, LH42	11-20
LH15, LH24, LH25, LH26, LH32, H38, LH44	21-25

Այսպիսով, կատարված աշխատանքի արդյունքում ցույց է տրվել, որ մայրական կաթից անջատված կաթնաթթվային բակտերիաներն օժտված են բարձր հակամանրէային և պրոտեոլիտիկ ակտիվությամբ, իսկ նրանց կայունությունն աղի, լեղու և pH-ի ծայրահեղ արժեքների նկատմամբ ԿԹԲ-ին ապահովում է նրանց կենսունակությունն աղեստամոքսային համակարգում:

ՀՀ ԳԱԱ «Հայկենսատեխնոլոգիա» ԳԱԿ
e.mail: 20mar02@mail.ru; hhov@sci.am

Լ.Վ. Դանիելյան, Հ. Գ. Հովհաննիսյան

Մայրական կաթի կաթնաթթվային բակտերիաների պրոբիոտիկ հատկությունները

Ուսումնասիրվել են մայրական կաթից անջատած կաթնաթթվային բակտերիաների կուլտուրալ, բիոքիմիական և պրոբիոտիկ հատկությունները՝ հակամանրէային ակտիվությունը և կայունությունն աղեստամոքսային համակարգի պայմաններում: Անջատված կաթնաթթվային բակտերիաների մեծամասնությունն օժտված են բարձր հակամանրէային ակտիվությամբ *E. coli* O157: H7 և *C. albicans* հարուցիչների հանդեպ, կայունությամբ լեղու, աղի բարձր խտության նկատմամբ և կենսունակությամբ pH 2 - 9.2-ի տիրույթում: Որոշ կաթնաթթվային բակտերիաներ օժտված են նաև բարձր պրոտեոլիտիկ ակտիվությամբ, որն անհրաժեշտ է կաթի սպիտակուցների արդյունավետ

յուրացման համար: Եզրակացություն է արվել, որ մայրական կաթը պրոբիոտիկ շտամների պոտենցիալ աղբյուր է:

Л. В. Даниелян, Г. Г. Оганесян

Пробиотические свойства молочнокислых бактерий грудного молока

Определены культуральные, биохимические и пробиотические свойства выделенных из грудного молока молочнокислых бактерий, – антибактериальная активность и устойчивость к желудочно-кишечным условиям. Большинство выделенных молочнокислых бактерий обладало высокой антимикробной активностью по отношению к таким возбудителям, как *E. coli* O157: H7, *C. Albicans*, и устойчивостью к высоким концентрациям желчи и соли, и сохраняло жизнеспособность в интервале pH от 2.0 до 9.2. Некоторые лактобактерии также обладали высокой протеолитической активностью, необходимой для эффективного усваивания молочных белков. Установлено, что грудное молоко является источником потенциальных пробиотических штаммов.

L. V. Danielyan, H. G. Hovhannisyan

Probiotic Properties of Lactic Acid Bacteria from Human Milk

Cultural, biochemical, and probiotic properties of lactic acid bacteria isolated from breast milk, such as antibacterial activity and resistance to gastrointestinal conditions are defined. Most of the isolated lactic acid bacteria had high antimicrobial activity against such pathogens as *E. coli* O157: H7, *C. albicans*, and are resistant to high concentrations of bile and salt and retained viability in the pH range from 2.0 to 9.2. Some lactobacilli also had high proteolytic activity, which is necessary for effective digestion of milk proteins. Thus, it can be concluded that breast milk is a source of potential probiotic strains.

Գրականություն

1. Bhatt V. D., Vaidya Y. H., Kunjadia P. D., Kunjadia A. P. – Inter. Journal of pharmaceutical science and health care. 2012. V. 3. Issue 2.
2. Fernández L., Langa S., Martín V., Maldonado A., Jiménez E., Martín R., Rodríguez J. M. – Pharmacol. Res. 2013. V. 69 (1). P. 1-10.
3. Martín R., Olivares M., Marín M.L., Fernández L., Xaus J., Rodríguez J. M. – *Journal of Human Lactation*. 2005. V. 21. P. 8 –17.
4. Heikkila M.P., Saris P.E. – *Journal of Applied Microbiology*. 2003. P. 471-478.
5. Martín R., Langa S., Reviriego C., Jimenez E., Marin L.M., Xaus J., Fernandez L., Rodríguez J.M. – *The Journal of Pediatrics*. 2003. V. 143. P. 754-758.
6. Beasley S. S., Saris P. E. – *Appl. Environ. Microbiol.* 2004. V. 70(8). P. 5051–5053.
7. Jara S., Sanchez M., Vera R., Cofre J., Castro E. – *Anaerobe*. 2011. V. 17. P 474-477.

8. *Martín R., Langa S., Reviriego C., Jimenez E., Marin L.M., Olivares M., Boza J., Jimenez J., Fernandez L., Xaus J., Rodriguez J. M.* – Trends in Food Science&Technology. 2004. V. 15. P. 121-127.
9. *Лабинская А. С.* Микробиология с техникой микробиологических исследований. М. Медицина. 1978. 355 с.
10. *Vanengelgem F., Zamfir M., Adriany T., De Vuyst L.* – J. Appl. Microbiol. 2004. V. 97. P. 1257-1273.

жителей (подкрепленные фотоматериалами) о произрастании *A. tinctoria* близ с. Артаниш. Настоящий гербарный сбор является первым достоверным свидетельством произрастания *A. tinctoria* на северо-западном побережье оз. Севан.

BRASSICACEAE

***Chorispora tenella* DC.** Syunik Province, abandoned village “Verin Vardanidzor”, ruderals, N 38°59’57”, E 046°14’43”, h 1960 m, leg. 2016.04.28. Stepanyan-Gandilyan N. P., det. 2016.05.19 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190975.

Произрастание *Ch. tenella* приводится во «Флоре Армении» [3] и в новейшей обработке семейства для готовящегося к публикации определителя сосудистых растений Армении Е. М. Аветисян для Лорийского, Ереванского и Зангезурского флористических районов (до среднего горного пояса). Настоящими сборами он был выявлен в Мегрийском флористическом районе. От указанных ранее литературных данных отличается не только район произрастания, но и высотная приуроченность вида, поскольку *Ch. tenella* был обнаружен в субальпийском горном поясе.

***Neslia paniculata* (L.) Desv.** Aragatsotn Province, Aparan District, near v. Sadunz, edge of the field, N 40°38’54”, E 044°12’55”, h 2102 m, leg. 2014.07.16. Stepanyan-Gandilyan N. P., Hovsepyan R. A., det. 2016.02.23 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190976.

Данный сбор из Апаранского флористического района (близ границы с Арагацским) является первой находкой для приведенного района не только вида *N. paniculata*, но и в целом рода *Neslia* Desv., поскольку ранее во «Флоре Армении» [4] и в новейшей обработке семейства Аветисян ни один из видов олиготипического рода *Neslia* (*N. paniculata* и *N. apiculata* Fischl, C. A. Mey. & Avé-Lall.) в Апаранском (как и в Арагацском) флористическом районе зафиксирован не был.

LAMIACEAE

***Marrubium catariifolium* Desr.** Armenia, Syunik province, SSE Sisian, small road below v. Vorotan, at bridge and below; 1375 m s.m., N 39°29’1”, E 46°8’18”, leg. 2007.06.14. M. Oganessian, H. Ter-Voskanyan, E. Vitek, det. 2016.01.18 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190982.

Во «Флоре Армении» [5] и в последней обработке таксона Н. С. Ханджян *M. catariifolium* приводился для Ахурянского, Лорийского, Иджеванского и Севанского флористических районов. Для южной Армении (Зангезурский флористический район) вид приводится впервые.

***Marrubium propinquum* Fisch. & A. C. Mey.** Арм. ССР, Иджеванский район, окр. с. Салах, на сухих каменистых склонах, 1200-1300 м над ур. м., leg. 11.07.1990, Ханджян Н., det. 09.03.2017, Степанян-Гандилян Н., ERE 190977.

В гербарии ERE присутствует только один образец *M. propinquum* со следующими этикетными данными: «Transcaucasica Armenia distr Alexandropole prope st ferr Sanain. 14 июля 1919, legit /et/ teste: A. Grossheim» (ERE 12901). По-видимому, при написании «Флоры Армении» [5] и в готовящейся к публикации обработке Н. С. Ханджян имело место невер-

ное понимание контекста упоминания этих старых топонимов, написанных на латинском, от руки и к тому же несколько неразборчиво. Очевидно, упоминание Александрополя (старое название Ленинакана, современного Гюмри) натолкнуло авторов на мысль, что растение произрастает близ города Ленинакана. Во «Флоре Армении» ([5], с. 34) относительно областей произрастания *M. propinquum* указывается следующее: «Ширак (Ленинакан); указывается для Севана и Иджеванского флористического района (Гроссг. 1967, Фл. Кавк. 7: карта 363)». В последней обработке семейства данная информация повторяется, однако она нуждается в пересмотре. Полагаем, что указанное на этикетке место сбора нужно перевести с латинского на русский следующим образом: «Закавказье, Армения, Александропольский уезд, близ железнодорожной станции Санаин». При предложенном выше прочтении этикетки становится ясно, что данный образец был собран А. Гроссгеймом не в Ширакском, а в Иджеванском флористическом районе, близ границы с Лорийским. Такое понимание согласуется с указанием Гроссгеймом *M. propinquum* в первом (прижизненном) издании «Флоры Кавказа» [6] для области Лори, а не для Ширака, а также с обозначением им ареала вида в «Определителе растений Кавказа» ([7], с.329) как «ЮЗ (на севере)».

Позднее, во втором издании «Флоры Кавказа» [8], пункт близ Санаина на карте ареалов С. Я. Тер-Хачатуровой указывается, но при этом имеется также и обозначение пункта близ Ленинакана, что, возможно, является следствием той же ошибки – неверного прочтения этикетки. Эта карта и послужила одним из оснований для указания *M. propinquum* в нескольких флористических районах [5].

Со времени сборов, произведенных Гроссгеймом, последующие сборы *M. propinquum* коллекторами флоры Армении нам не известны, и лишь настоящей находкой спустя десятилетия подтверждается произрастание вида в Иджеванском флористическом районе. Очевидно, дальнейшие наблюдения в природе, а также просмотр гербарных коллекций (LE, TBI и пр.) дадут более ясную картину об ареале *M. propinquum*. По имеющимся на сегодняшний день данным, вид является редким и, возможно, заслуживает включения в следующее издание Красной книги Армении.

***Marrubium vulgare* L.** Арегунийское побережье оз. Севан, между сс. Цовагюх и Шоржа, южный каменистый склон. leg. 1957.07.22. Я. Мулкиджанян, В. Аветисян, det. 2016.01.18. Степанян-Гандилян Н. ERE 190978. Во «Флоре Армении» [5] и в новейшей обработке рода Ханджян обработках рода [6, 7] *M. vulgare* указывается для Лорийского (Сарчапет), Иджеванского и Зангезурского флористических районов. Произрастание вида в Севанском флористическом районе зарегистрировано впервые.

***Salvia armeniaca* (Bordz.) Grossh.** Armenia, Shirak province, Amasia district, at lake Arpilich, NW of village Paghakn, 2033 m s.m., N 41°04'06", E 43°39'08", leg. 31.08.2005 M. Oganessian, H. Ter-Voskanyan, E. Vitek, det. 2016.01.13 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190983.

Статус данного вида во «Флорах» понимается по-разному. Во «Флоре Армении» Ю. Л. Меницкий ([9], с. 124) *S. armeniaca* рассматривает в каче-

стве подвида *S. staminea* Montbr. et Auch. ex Benth. subsp. *armeniaca* Bordz., указывая для последнего следующий ареал: «Кавказ (Южн. Закавказье), М. Азия (вост.), Сев. и Сев.-Зап. Иран. Описан из Армении (LT: “in montem Alagez ad pagum Kipczak (6500’), 6. VII. 1906, E. Bordz”, LE)».

Во «Flora of Turkey» [10] *S. armeniaca* указывается как синоним *S. staminea* Montbr. et Auch. ex Benth. Во «Flora Iranica» тот же автор ([11], с. 469)] относительно *S. staminea* отмечает: «Less polymorphic in our area than in E Turkey and the Caucasus» и приводит *S. armeniaca* в качестве подвида *S. staminea*. Во «Флоре СССР» Е. Г. Победимова ([12], с. 356) рассматривает *S. armeniaca* как отдельный вид, указывая в примечании, что в Иране «распространен замещающий вид *S. staminea*».

В последней обработке семейства *Lamiaceae* [7] Н. С. Ханджян также приводит *S. armeniaca* в статусе вида, указывая при этом: «сомнительный вид, трудно отличимый от *S. staminea*». При этом *S. armeniaca* приводится для ряда флористических районов: Арагацский, Апаранский, Севанский, Гегамский. Настоящая находка, а также более ранние сборы, хранящиеся в гербарии ERE, свидетельствуют о произрастании вида также в Верхне-Ахурянском флористическом районе.

На основании изучения материалов *S. armeniaca* и *S. staminea* в гербарии ERE полагаем вполне оправданным рассмотрение *S. armeniaca* в статусе вида, поскольку он существенно отличается от *S. staminea* рядом признаков, а именно: характером опушения и высотой растения, краем листовой пластинки, шириной верхней губы венчика. Отличается и эколого-географическая приуроченность *S. armeniaca*, произрастающего на больших высотах, чем *S. staminea* – выше 2000 м над ур. м. и в более влажных местообитаниях.

По-видимому, *S. armeniaca* является эндемиком Армянского нагорья, однако для уточнения его фенотипических особенностей и ареала необходим просмотр возможно большего числа гербарных коллекций, и в частности, материалов из северо-западных областей Ирана.

***Salvia nemorosa* L.** Kotayk province, to the NE from the v. Hanqavan, mountain meadow, N 40°42'85", E 044°28'52", h 2626 m, leg. 2014.07.19. Stepanyan-Gandilyan N. P., Hovsepyan R. A., det. 2016.01.12 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190979.

Широко распространенный в мире *S. nemorosa* представлен в Армении во всех флористических районах, произрастая здесь, судя по материалам гербария ERE, от нижнего горного пояса до субальпийских высот. Ханджян указывает для вида высоты 700 – 1800 (2000) м. Настоящим сбором *S. nemorosa* зафиксирован в альпийском горном поясе.

***Ziziphora raddei* Juz.** Armenia, Shirak province, Amasia district, road Pakhahn – Amasia, c. 8,5 km from Pakhahn, rocks near small pass, 2210 m s.m., N 41°00'22", E 43°43'51", leg. 31.08.2005 M. Oganessian, H. Ter-Voskanyan, E. Vitek, det. 2016.01.20 Stepanyan-Gandilyan N. P. ERE 190981.

В последней обработке семейства Ханджян *Z. raddei* приводится для следующих флористических районов: Арагацский, Апаранский, Гегам-

ский, Зангезурский. Настоящим сбором *Z. raddei* впервые зафиксирован в Верхне-Ахурянском флористическом районе.

Автор выражает искреннюю благодарность докт. биол. наук М. Э. Оганесян за просмотр рукописи и ценные замечания.

Экспедиционные сборы частично осуществлены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-6F457.

Институт ботаники НАН РА
e-mail: ninastep.gand1@gmail.com

Н. П. Степанян-Гандилян

Новые данные к географическому распространению ряда видов флоры Армении

Отмечены новые местонахождения для некоторых видов флоры Армении: *Cynanchum acutum* (Asclepidaceae), *Anthemis tinctoria* (Asteraceae), *Neslia paniculata*, *Chorispora tenella* (Brassicaceae), *Marrubium catariifolium*, *M. propinquum*, *M. vulgare*, *Salvia armeniaca*, *S. nemorosa*, *Ziziphora raddei* (Lamiaceae).

Ն. Պ. Ստեփանյան-Դանդիլյան

Նոր տվյալներ Հայաստանի ֆլորայի մի շարք տեսակների աշխարհագրական տարածվածության վերաբերյալ

Տրվում են նոր աճելավայրեր Հայաստանի ֆլորայի մի շարք տեսակների համար. *Cynanchum acutum* (Asclepidaceae), *Anthemis tinctoria* (Asteraceae), *Neslia paniculata*, *Chorispora tenella* (Brassicaceae), *Marrubium catariifolium*, *M. propinquum*, *M. vulgare*, *Salvia armeniaca*, *S. nemorosa*, *Ziziphora raddei* (Lamiaceae).

N. P. Stepanyan-Gandilyan

New Data on the Geographical Distribution of Some Species of the Armenian Flora

New localities for some species of the Armenian flora have been found: *Cynanchum acutum* (Asclepidaceae), *Anthemis tinctoria* (Asteraceae), *Neslia paniculata*, *Chorispora tenella* (Brassicaceae), *Marrubium catariifolium*, *M. propinquum*, *M. vulgare*, *Salvia armeniaca*, *S. nemorosa*, *Ziziphora raddei* (Lamiaceae).

Литература

1. Аветисян Е. М. В кн.: Флора Армении. Т. 7. Ереван. Изд. АН АрмССР. 1980. С. 20.
2. Ханджян Н. С. В кн.: Флора Армении. Т. 9. Ереван. Изд. 1995. С. 545 – 560.
3. Аветисян Е. М. В кн.: Флора Армении. Т. 5. 1966. Ереван. Изд. АН АрмССР. С. 151 – 152.
4. Аветисян Е. М. В кн.: Флора Армении. Т. 5. Ереван. Изд. АН АрмССР. 1966. С. 236 – 238.

5. Меницкий Ю. Л. В кн.: Флора Армении. 1987. Т. 8. Ереван. Изд. АН АрмССР. С. 30 – 34.
6. Гроссгейм А. А. Флора Кавказа, 1-е изд. Т. 3. 1932. С. 287-290.
7. Гроссгейм А. А. Определитель растений Кавказа. М. Сов. наука. 1949. 747 с.
8. Тер-Хачатурова С. Я. В кн.: Флора Кавказа, 2-е изд. Т. 7. Ред. А. А. Гроссгейм, отв. ред. Ан. А. Федоров. Л. 1967. С. 325 – 326. Карта 363.
9. Меницкий Ю. Л. В кн.: Флора Армении. Т. 8. 1987. Ереван. Изд. АН АрмССР. С. 104 – 127.
10. Hedge I. C. In: Flora of Turkey. 1984. V. 7. P. 400 – 562.
11. Hedge I. C. In: Flora Iranica. 1982. N 150. P. 430 – 476.
12. Победимова Е. Г. В кн.: Флора СССР. 1954. Т. 21. М. Изд. АН СССР. С. 244 – 363.