

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы
R E P O R T S

2017

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԿԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ,
ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի
տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԳՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս
Դ. Ս. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН,
академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам.
главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А.
ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, corresponding member of NAS RA L. M.
AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding
member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.am>*e-mail:* rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2017

©Издательство “Гитутюн”

НАН РА. 2017

ՔՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ֆ. Ա. Թալալյան</i> – Տարամետ թվային ենթաշարքերին վերաբերող մի թեորեմի մասին ...	91
<i>Վ. Ա. Միրզոբյան, Գ. Ս. Մաչկալյան</i> – Կամայական կոչափի ոչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների մի դասի երկրաչափությունը Էվկլիդյան տարածություններում ...	95
<i>Վ. Կ. Լեոնտև, Դ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան</i> – Բազմությունների գումար բուլյան տարածության մեջ.....	106

ՄԵՖԱՆԻԿԱ

<i>Ա. Ա. Ավետիսյան, Վ. Վ. Ավետիսյան</i> – Էլեկտրամեխանիկական համակարգի սահմանափակ դեկավարման կառուցման մասին	121
<i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելոբրեկյան</i> - «Օրտոտրոպ» էլեկտրահաղորդությամբ մարմնի էլեկտրամագնիսաառաձգականության հիմնախնդրի մասին	132
<i>Հ. Ա. Մաթևոսյան</i> - Դիրիխլե–Ռոբենի խնդրի վերաբերյալ՝ առաձգականության տեսության համակարգի համար	139
<i>Ա. Հ. Մարգարյան, Լ. Ի. Մաննիչ, Ս. Ա. Տիման</i> - Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային տեսությամբ օրթոտրոպ բարակ սալի մոդելը և կիրառությունները պոլիմերային նյութերի համար	145

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ղ. Ս. Օսիպյան, Հ. Հ. Մաթևոսյան, Հ. Ս. Արոյան</i> - Հիբրիդային PIC-մոդելավորման ծրագրային համակարգերի կառուցում	154
---	-----

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

<i>Բ. Ա. Վարդանյան</i> – Ազատ ռադիկալներով հարուցված ացետալդեհիդ-թթվածին գազային խառնուրդների բոցավառման մեխանիզմի մասին	162
--	-----

ՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Հ. Մարգարյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Մարգարյան</i> - Պինձ պարունակող նանոկոմպոզիտային պոլիմերային ծածկույթների սինթեզ 1-վինիլ-1,2,4-տրիագոլի և N-վինիլպիրոլիդոնի հիման վրա	166
--	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

<i>Ք. Վ. Ղազարյան, Ռ. Գ. Չիբուխյան, Հ. Խ. Մկրտչյան</i> – Միզապարկի ինքնաբուխ ակտիվության և նրան հարակից օրգանների ութմավարտության միջև փոխադարձ կապը	172
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	
<i>Ф. А. Талалян</i> – Об одной теореме о подрядах расходящихся числовых рядов..	91
<i>В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян</i> – Геометрия одного класса риччи-полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности в евклидовых пространствах	95
<i>В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян</i> – Сумма множеств в булевом пространстве	106
МЕХАНИКА	
<i>А. С. Аветисян, В. В. Аветисян</i> – О построении ограниченного управления электромеханической системой	121
<i>С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян</i> – О проблеме электромагнитоупругости тел с «ортотропной» электропроводностью	132
<i>О. А. Матевосян</i> - О задаче Дирихле–Робена для системы теории упругости ..	139
<i>А. А. Саркисян, С. О. Саркисян, Л. И. Маневич, С. А. Тиман</i> – Модель ортотропной тонкой пластинки по моментной теории со стесненным вращением с приложениями к полимерным материалам.....	145
ФИЗИКА	
<i>Д. А. Осипян, Г. Г. Матевосян, О. С. Ароян</i> - Построение гибридных программных систем РС-моделирования	154
ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	
<i>И. А. Варданян</i> - О механизме инициированного свободными радикалами воспламенения ацетальдегид-кислородных газовых смесей	162
ХИМИЯ	
<i>С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян</i> – Синтез медьсодержащих нанокompозитных полимерных покрытий на основе 1-винил-1,2,4-триазола и N-винилпирролидона	166
ФИЗИОЛОГИЯ	
<i>К. В. Казарян, Р. Г. Чибухчян, Э. Х. Мкртчян</i> – Взаимосвязь спонтанной активности мочевого пузыря и ритмогенеза приграничных к нему органов	172

CONTENTS

MATHEMATICS	
<i>F. A. Talalyan</i> – On a Theorem about Subseries of Divergent Numerical Series	91
<i>V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan</i> – The Geometry of One Class of Riemannian Semisymmetric Submanifolds of Arbitrary Codimension in Euclidean Spaces	95
<i>V. Leontiev, G. Movsisyan, Zh. Margaryan</i> – On Addition of Sets in Boolean Space	106
MECHANICS	
<i>A. S. Avetisyan, V. V. Avetisyan</i> – On the Formulation of a Limited Control of Electromechanical System	121
<i>S. A. Ambartsumian, M.V. Belubekyan</i> – On the Electromagnetoelasticity Problem of the Body with “Orthotropic” Electroconductivity	135
<i>H. A. Matevosian</i> - On the Dirichlet–Robin Problem for the Elasticity System .	139
<i>A. H. Sargsyan, S. H. Sargsyan, L. I. Manevich, S. A. Timan</i> - Model of Orthotropic Thin Plate with Constrained Rotation by Moment Theory and with Application for Polymer Materials	145
PHYSICS	
<i>D. A. Osipyan, H. H. Matevosyan, H. S. Aroyan</i> - Building Hybrid PIC-Simulation Codes	154
CHEMICAL PHYSICS	
<i>I. A. Vardanyan</i> - On the Mechanism of Radical Initiation of Acetaldehyde-Oxygen Mixtures Ignition at Room Temperature	162
CHEMISTRY	
<i>S. H. Sargsyan, K. S. Margaryan, A. S. Sargsyan</i> – Synthesis of Copper Containing Nanocomposite Polymer Coating Based on 1-Vinyl-1,2,4-Triazole and N-Vinylpyrrolidone	166
PHYSIOLOGY	
<i>K. V. Kazaryan, R. G. Chibukhchyan, H. KhMkrtychyan</i> – Interrelation Between Spontaneous Activity of the Bladder and Rhythmogenesis of Organs Bordering with It	172

В настоящей работе мы доказываем теорему о последовательностях измеримых множеств, эквивалентную теореме 1. При доказательстве однородностью мы не пользуемся. Вместо нее наряду с теоремой Фубини мы пользуемся леммой Бореля – Кантелли о последовательностях независимых событий.

Очевидно, D_n независимы, и так как $m(D_n) = \frac{1}{2}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то $\sum_{n=1}^{\infty} m(D_n) = \infty$. Этим свойством обладают и все подпоследовательности D_n . Поэтому в силу второй леммы Бореля – Кантелли ([5], с.69)

$$m(\limsup D_{n_i}) = 1 \text{ для всех } \{n_i\} \in S. \quad (1)$$

Это простое наблюдение играет ключевую роль в доказательстве приводимой ниже теоремы 2.

Отметим, что в (1) через $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ обозначен верхний предел последовательности E_n . Таким образом

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Теорема 2. Пусть (X, P) – вероятностное пространство, E_n – произвольная последовательность событий в X , удовлетворяющая условию

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 1. \quad (2)$$

Тогда для почти всех $s = \{n_i\} \in S$ имеет место равенство

$$P\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} E_{n_i}\right) = 1. \quad (3)$$

Доказательство. Представим каждое $t \in T$ в виде необрывающегося двоичного разложения

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{2^k}. \quad (4)$$

Таким образом, для каждого $t \in T$ $\alpha_k(t) = 0$ или $\alpha_k(t) = 1$, причем $\alpha_k(t) = 1$ для бесконечно многих k , следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) = \infty, t \in T. \quad (5)$$

Пусть χ_E – характеристическая функция множества E . Для каждого $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ последовательность $\chi_{E_n}(x)$ содержит бесконечно много единиц. Номера этих единиц обозначим $n_i(x)$. Тогда для каждого $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \alpha_n(t) = \infty \text{ при } t \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n. \quad (6)$$

Действительно, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \alpha_n(t) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_{n_i}(x)}(x) \alpha_{n_i}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n_i}(t) = \infty,$$

так как в силу условия $t \in \limsup_{i \rightarrow \infty} D_{n_i(x)}$ последняя сумма содержит бесконечно много единиц.

В силу (1) и (2) утверждение (б) мы можем сформулировать так: для почти всех $x \in \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \alpha_n(t) = \infty \text{ для почти всех } t \in (0,1]. \quad (7)$$

Теперь применим теорему Фубини к произведению вероятностных пространств (X, P) и $((0,1], m)$. Получим, что почти для всех $t \in (0,1]$ ряд (7) расходится P -почти всюду по x на X .

Объясним это чуть подробнее. Пусть

$$Q = \left\{ (x, t) : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \alpha_n(t) = \infty \right\}.$$

Тогда по теореме Фубини

$$\int_0^1 \left(\int_X \chi_Q(x, t) dx \right) dt = \int_X \left(\int_0^1 \chi_Q(x, t) dt \right) dx. \quad (8)$$

Из (7) легко следует, что интеграл в правой части (8) равен единице. Тогда

$$\int_0^1 \left(\int_X \chi_Q(x, t) dx \right) dt = 1. \quad (9)$$

Из (9) получаем, что для почти всех $t \in (0,1]$ равенство $\chi_Q(x, t) = 1$ выполняется для почти всех $x \in X$, т. е. для почти всех $t \in (0,1]$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \alpha_n(t) = \infty \quad (10)$$

для почти всех $x \in X$.

Это эквивалентно утверждению теоремы 2, так как для каждого $t \in T$ номера n_i , при которых $\alpha_{n_i}(t) = 1$, определяют последовательность $s = \{n_i\}$ и условие (10) переходит в равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_{n_i}}(x) = \infty,$$

т. е. $x \in \limsup_{i \rightarrow \infty} E_{n_i}$, что и требовалось.

Теперь докажем эквивалентность теорем 1 и 2. Импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна. Она следует из теоремы Фубини. Докажем обратную импликацию $2 \Rightarrow 1$.

Пусть задан расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Надо доказать, что для почти

всех $t \in T$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(t)$ расходится. Без ограничения общности можно считать, что $0 < a_n, n = 1, 2, \dots$. Далее легко построить вероятностное

пространство (X, P) и последовательность независимых событий $E_n \subset X$ так, чтобы выполнялись равенства $P(E_n) = a_n, n = 1, 2, \dots$. В качестве такого (X, P) можно взять, например, произведение счетного числа вероятностных пространств, каждое из которых есть $[0, 1]$ с мерой Лебега (см. [6], с. 429).

Тогда, поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty$, согласно второй лемме Бореля – Кантелли имеем

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 1. \quad (11)$$

В силу теоремы 1 из (11) в силу той же леммы Бореля – Кантелли следует, что для почти всех $s = \{n_i\}$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_{n_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = \infty,$$

что и требовалось.

Институт математики НАН РА

Ф. А. Талалян

Об одной теореме о подрядах расходящихся числовых рядов

Приводится новое доказательство одного классического результата, касающегося расходящихся числовых рядов, в котором применяются вероятные соображения, в частности Бореля – Кантелли.

Ֆ. Ա. Թալալյան

Տարամետ թվային ենթաշարքերին վերաբերող մի թեորեմի մասին

Բերվում են տարամետ թվային շարքերին վերաբերող մի դասական արդյունքի նոր ապացույց մի կիրառվում են հավանականության դատողություններ, մասնավորապես Բորել – Կանտելլիի լեմման:

F. A. Talalyan

On a Theorem about Subseries of Divergent Numerical Series

A new proof of a classical result concerning divergent numerical series is adduced where probabilistic consideration, in particular the Borel-Cantelli lemmas used

Литература

1. *Auerbach H.* – *Studia Math.* 1930. N 2. P. 228-230.
2. *Hill J. D.* – *Bull. Amer. Math. Soc.* 1942. 48. P. 103-108.
3. *Pollard H.* – *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943. 49. P. 730-731.
4. *Pollard H., Buck R. C.* – *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943. 49. P. 924-931.
5. *Lukacs E.* *Stochastic Convergence.* D. C. Health and Company. 1968.
6. *Hewitt E., Stromberg K.* *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag. 1969.

условие означает, что группа $W^{(1)}$ (см. [8, 9]) регулярных главных векторов кривизны (г.в.к.) содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T'_x (см. [8, 9]) совпадают. Следовательно, подмногообразие M допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если T'_x является нулевым пространством, то M – эйнштейново подмногообразие. При $\dim T'_x \geq 1$ подмногообразие M является полуэйнштейновым.

Здесь мы рассмотрим случай, когда подмногообразие M имеет только два различных линейно независимых г.в.к. n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. В этом случае $\rho = |n_1|^2 - \langle H, n_1 \rangle = |n_2|^2 - \langle H, n_2 \rangle$, где ρ – единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, $H = p_1 n_1 + p_2 n_2$ – вектор средней кривизны, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E_n . Если $H = 0$, то векторы n_1, n_2 будут линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, в рассматриваемом случае подмногообразие не может быть минимальным. Подставляя значение H в приведённую выше формулу, получим

$$(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2 \rangle - (p_2 - 1)|n_2|^2 = 0. \quad (1)$$

Из этого равенства можем получить ряд следствий. Во-первых, отметим, что при $p_1 = p_2 = 1$ оно автоматически выполняется. Во-вторых, поскольку $\langle n_1, n_2 \rangle = |n_1||n_2|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами n_1 и n_2 , то из (1) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{(p_1 - 1)|n_1|^2 - (p_2 - 1)|n_2|^2}{(p_1 - p_2)|n_1||n_2|}.$$

Эта формула справедлива, если хотя бы одна из кратностей p_1, p_2 больше единицы и $p_1 \neq p_2$. Из этой формулы следует, что угол между векторами n_1 и n_2 вполне определяется их кратностями и отношением их модулей.

В третьих, если в (1) положить $p_1 = p_2 \geq 2$, то получим $|n_1| = |n_2|$. Верно и обратное, если $|n_1| = |n_2|$, то из (1) после необходимых преобразований будем иметь $(p_1 - p_2)(1 - \cos\varphi) = 0$. Так как векторы n_1, n_2 линейно независимы, то $1 - \cos\varphi > 0$ и, следовательно, $p_1 = p_2 \geq 2$. Итак, доказано, что условия $|n_1| = |n_2|$ и $p_1 = p_2 (\geq 2)$ эквивалентны.

Если в равенстве (1) положить $p_2 = 1$, то получим $(p_1 - 1)(|n_1|^2 - \langle n_1, n_2 \rangle) = 0$. Отсюда следует, что или $p_1 = 1$, или $p_1 \geq 2$ и $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$. Таким образом, необходимо рассмотреть всего три случая:

$$1) p_1 = p_2 = 1, \quad 2) p_1 \geq 2, p_2 = 1, |n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle, \quad 3) p_1 \geq 2, p_2 \geq 2.$$

В первом случае кодефектность подмногообразия M равна двум. Как известно, всякое подмногообразие кодефектности два является полуэйнштейновым. Примером рассматриваемого класса подмногообразий коде-

фектности два является прямое произведение двух одинаковых кривых и некоторой k -мерной плоскости. Третий случай был исследован в В. А. Мирзояном и Г. С. Мачкаляном [9]. Здесь мы рассмотрим только второй случай.

Итак, пусть $p_1 \geq 2$, $p_2 = 1$, $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$. Из последнего равенства следует, что $|n_1| = |n_2| \cos \varphi$. Следовательно, векторы n_1 и n_2 образуют острый угол. Вычисляя в настоящем случае ρ по приведённой выше формуле, получим $\rho = -p_1 |n_1|^2$. Следовательно, кривизна Риччи исследуемого подмногообразия отрицательна. Кроме того, легко видеть, что условие $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$ равносильно условию $\langle n_1, n_1 - n_2 \rangle = 0$, т.е. $n_1 \perp n_1 - n_2$ в каждой точке на подмногообразии M .

Пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(0)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам n_1 , n_2 и нулевому главному вектору кривизны в касательном пространстве $T_x(M)$. Поскольку $\dim T_x^{(n_1)} = p_1 = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, $\dim T_x^{(0)} = \mu$, то адаптированный ортономированный репер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ можем выбрать так, чтобы он был согласован со структурой прямой суммы $T_x(M) = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)} + T_x^{(0)}$, т.е.

$$e_a \in T_x^{(n_1)}, \quad e_{p+1} \in T_x^{(n_2)}, \quad e_r \in T_x^{(0)}, \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M),$$

где $T_x^\perp(M)$ – нормальное пространство к подмногообразию M в точке x , а индексы пробегает следующие значения:

$$a, b, c = 1, \dots, p, \quad r, s, t = p+2, \dots, m, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad \alpha, \beta = m+1, \dots, n.$$

При таком выборе репера $\lambda_a^\alpha = \lambda_b^\alpha$, $a \neq b$, $\lambda_r^\alpha = 0$. Поскольку $n_1 \perp n_1 - n_2$, то единичные векторы e_{m+1} , e_{m+2} можем выбрать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен вектору n_1 , а e_{m+2} – вектору $n_1 - n_2$. Тогда

$$n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}, \quad \lambda_a^{m+1} \neq 0, \quad \lambda_a^{m+2} = 0, \quad \lambda_a^\gamma = 0, \quad \gamma, \delta = m+3, \dots, n.$$

Далее, если $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + \lambda_{p+1}^\gamma e_\gamma$, то

$$n_1 - n_2 = (\lambda_a^{m+1} - \lambda_{p+1}^{m+1}) e_{m+1} - \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} - \lambda_{p+1}^\gamma e_\gamma.$$

Поскольку $n_1 - n_2 \parallel e_{m+2}$, то $\lambda_{p+1}^{m+1} = \lambda_a^{m+1}$, $\lambda_{p+1}^\gamma = 0$. Таким образом, для векторов n_1, n_2 и вектора средней кривизны H получаем следующие формулы:

$$n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}, \quad n_2 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}, \\ H = (p+1) \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}, \quad \lambda_{p+1}^{m+2} \neq 0.$$

В выбранном репере матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M имеют следующий вид:

$$\lambda_{p+1}^{m+2} \omega_{m+2}^\gamma = h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^\gamma \omega^{p+1}, \quad \omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0.$$

Если ввести обозначения

$$F_r = \frac{h_{aar}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}, \quad A = \frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}, \quad B = \frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},$$

$$G_a = \frac{h_{(p+1)(p+1)a}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}, \quad D = \frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_a^{m+1}} = \frac{\lambda_a^{m+2}}{\lambda_a^{m+1}} A, \quad E^\gamma = \frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^\gamma}{\lambda_{p+1}^{m+2}},$$

то приведенную выше дифференциальную систему можем преобразовать к виду

$$d \ln |\lambda_a^{m+1}| = F_r \omega^r, \quad d \ln |\lambda_{p+1}^{m+2}| = G_a \omega^a + (B - A) \omega^{p+1} + F_r \omega^r,$$

$$\omega_{p+1}^a = A \omega^a + G_a \omega^{p+1}, \quad \omega_a^r = F_r \omega^a, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D \omega^{p+1}, \quad (4)$$

$$\omega_{p+1}^r = F_r \omega^{p+1}, \quad \omega_{m+2}^\gamma = E^\gamma \omega^{p+1}, \quad \omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0.$$

Приступим к исследованию подмногообразия M . Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^\alpha = 0, \omega^{p+1} = 0, \omega^r = 0$, которая задает распределение $T^{(n)}$. Поскольку $d\omega^\alpha = 0, d\omega^{p+1} = 0, d\omega^r = 0$, то распределение $T^{(n)}$ интегрируемо. В силу $\omega_a^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a, \omega_a^{p+1} = -A \omega^a, \omega_a^r = F_r \omega^a$ интегральное многообразие является вполне омбилическим, т.е. представляет собой сферу (т.к. $\lambda_a^{m+1} \neq 0$) размерности p , которую будем обозначать через $S^p(R)$. Поскольку в настоящем случае

$$\omega_{m+1}^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_{m+2}^\gamma = \omega_r^{m+1} = \omega_r^{m+2} = \omega_{p+1}^r = \omega_{p+1}^\gamma = 0,$$

$$\omega_{p+1}^{m+1} = \lambda_{p+1}^{m+1} \omega^{p+1} = 0, \quad \omega_{p+1}^{m+2} = \lambda_{p+1}^{m+2} \omega^{p+1} = 0,$$

то векторные поля $e_{m+1}, e_{m+2}, e_{p+1}$ параллельны в нормальном расслоении сферы $S^p(R)$. Тогда в силу $\omega_i^\gamma = 0$ и приведённых выше равенств, подрасслоения нормального расслоения сферы $S^p(R)$, которые образуют линейные оболочки $((e_{p+2}, \dots, e_m))_x, ((e_{m+3}, \dots, e_n))_x$, также параллельны в нормальном расслоении. Так как нормальная связность сферы $S^p(R)$, как известно, плоская, то в этих подрасслоениях, в силу их параллельности, индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что векторные поля e_r, e_γ можем выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении сферы $S^p(R)$. Это равносильно тому, что на подмногообразии M дифференциальные формы $\omega_r^s, \omega_\gamma^\delta$ зависят только от форм ω^{p+1}, ω^r , т.е. $\omega_r^s = \Gamma_{r p+1}^s \omega^{p+1} + \Gamma_{rr}^s \omega^r, \omega_\gamma^\delta = \Gamma_{\gamma p+1}^\delta \omega^{p+1} + \Gamma_{\gamma r}^\delta \omega^r$. Далее, поскольку в настоящем случае первые два уравнения в (4) принимают вид $\lambda_a^{m+1} = \text{const} (\neq 0)$, $d \ln |\lambda_{p+1}^{m+2}| = G_a \omega^a$, то функция λ_{p+1}^{m+2} будет постоянной вдоль сферы $S^p(R)$ тогда и только тогда, когда $G_a = 0$.

Распределение $T^{(n_2)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0$. Легко проверить, что $d\omega^\alpha = 0, d\omega^a = 0, d\omega^r = 0$. Следова-

тельно, это распределение интегрируемо и поскольку оно одномерно, то его интегральное многообразие представляет собой кривую, которую будем обозначать через L . Покажем, что L не является прямой. Действительно, поскольку в этом случае

$$de_{p+1} = \left(\sum_a G_a e_a + \sum_r F_r e_r + \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} \right) \omega^{p+1}$$

и, как мы знаем, $\lambda_a^{m+1} \neq 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2} \neq 0$, то $de_{p+1} \neq 0$. Это значит, что вдоль кривой L вектор e_{p+1} не является постоянным. Отсюда следует, что кривая L

не является прямой. Далее, поскольку

$$de_a = (\Gamma_{a p+1}^b e_b - G_a e_{p+1}) \omega^{p+1}, \quad de_r = (-F_r e_{p+1} + \Gamma_{r p+1}^s e_s) \omega^{p+1},$$

$$de_{m+1} = (-\lambda_a^{m+1} e_{p+1} + D e_{m+2}) \omega^{p+1},$$

$$de_{m+2} = (-\lambda_{p+1}^{m+2} e_{p+1} - D e_{m+1} + E^\gamma e_\gamma) \omega^{p+1}, \quad de_\gamma = (-E^\gamma e_{m+2} + \Gamma_{\gamma p+1}^\delta e_\delta) \omega^{p+1},$$

то кривая L в общем случае, т.е. когда все функции, фигурирующие в этих формулах, отличны от нуля, не содержится ни в каком собственном подпространстве пространства E_n .

Распределение $T^{(0)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^{p+1} = 0$. Непосредственно проверяется, что оно также интегрируемо и поскольку в настоящем случае $\omega_r^\alpha = \omega_r^a = \omega_r^{p+1} = 0$, то его интегральное многообразие является вполне геодезическим в E_n , т.е. представляет собой плоскость размерности μ , которую будем обозначать через E_μ .

Таким образом, можем сказать, что подмногообразие M локально несёт ортогональную сопряжённую систему, состоящую из p -мерной сферы, некоторой кривой и μ -мерной плоскости.

Пусть в системе (4) $E^\gamma = 0$. Тогда $\omega_{m+1}^\gamma = \omega_{m+2}^\gamma = 0$. Отсюда следует, что подрасслоение нормального расслоения подмногообразия M , образуемое линейной оболочкой $((e_{m+1}, e_{m+2}))_x$ является параллельным в нормальном расслоении. Тогда его ортогональное дополнение, как подрасслоение нормального расслоения, образуемое линейной оболочкой $((e_{m+3}, \dots, e_n))_x$ также будет параллельным в нормальном расслоении подмногообразия M . В этом подрасслоении, в силу плоской нормальной связности подмногообразия M , индуцируется плоская связность. Это значит, что векторные поля e_{m+3}, \dots, e_n мы можем выбрать параллельными в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\delta^\gamma = 0$. Тогда легко проверить, что $de_\gamma = 0$ или $e_\gamma = const$. Это значит, что подмногообразие M находится в некотором евклидовом пространстве размерности $m+2$, т.е. имеет существенную ко-размерность два. Поэтому в дальнейшем будем считать, что среди функций E^γ имеются ненулевые.

Рассмотрим, теперь дифференциальную систему $\omega^\alpha = 0$, $\omega^r = 0$, которая задает распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$

прямую сумму $T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$. Это распределение фактически совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$. Поскольку $d\omega^\alpha = 0, d\omega^r = 0$, то распределение $T^{(1)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через \tilde{M} . Из формул $\omega_a^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a, \omega_{p+1}^\alpha = \lambda_{p+1}^\alpha \omega^a, \omega_a^r = F_r \omega^a, \omega_{p+1}^r = F_r \omega^{p+1}$ следует, что \tilde{M} является нормально плоским (т.к. все матрицы его второй фундаментальной формы имеют диагональный вид) в E_n и вполне омбилическим подмногообразием в M . Если вычислить г.в.к. $\tilde{n}_a, \tilde{n}_{p+1}$, вектор средней кривизны \tilde{H} и собственные значения $\tilde{\rho}_a, \tilde{\rho}_{p+1}$ тензора Риччи подмногообразия \tilde{M} , то получим

$$\begin{aligned}\tilde{n}_a &= \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \sum_r F_r e_r, \quad \tilde{n}_{p+1} = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + \sum_r F_r e_r, \\ \tilde{H} &= (p+1)\lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2} + (p+1)\sum_r F_r e_r, \\ \tilde{\rho}_a &= |\tilde{n}_a|^2 - \langle \tilde{H}, \tilde{n}_a \rangle = -p((\lambda_a^{m+1})^2 + \sum_r (F_r)^2), \\ \tilde{\rho}_{p+1} &= |\tilde{n}_{p+1}|^2 - \langle \tilde{H}, \tilde{n}_{p+1} \rangle = -p((\lambda_a^{m+1})^2 + \sum_r (F_r)^2).\end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует, что \tilde{M} является эйнштейновым подмногообразием в E_n . На основании результатов работы [4] заключаем, что в этом случае само подмногообразие M изометрично или цилиндру над \tilde{M} , или цилиндру с $(\mu-1)$ -мерными плоскими образующими над конусом, построенным над \tilde{M} .

Дифференцируя внешним образом первое и четвертое уравнения системы (4) и применяя лемму Картана, получим, соответственно,

$$dF_r - F_s \omega_r^s = F_{rs} \omega^s, \quad F_{rs} = F_{sr}, \quad dF_r - F_s \omega_r^s = F_r F_s \omega^s. \quad (*)$$

Следовательно, $F_{rs} = F_r \cdot F_s$ и в дальнейшем будем рассматривать только второе уравнение.

Рассмотрим подмногообразие \tilde{M} более подробно. На этом подмногообразии $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения, являются параллельными в силу $\omega^a = 0$. Поскольку \tilde{M} имеет плоскую нормальную связность, то, в силу параллельности $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$ в нормальном расслоении, в них индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что в $T^{(0)}$, как в подрасслоении нормального расслоения подмногообразия \tilde{M} , векторы e_r мы можем выбрать так, чтобы они были параллельны. Поскольку при $\omega^r = 0$, т.е. на \tilde{M} , векторное поле $\eta = \sum_r F_r e_r$ также является параллельным (это следует из (*)), то вектор e_m мы можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен вектору η . Тогда $\eta = F_m e_m, F_r = 0$ при $r \neq m$. Из (*) при $r \neq m$ следует, что $F_m \omega_r^m = 0$. Следовательно, мы должны рассматривать два случая: (а) $F_m = 0$, (б) $F_m \neq 0, \omega_r^m = 0$.

Рассмотрим случай (а). Пусть $F_m = 0$. Тогда $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0$ и, следовательно, распределения $T^{(1)} = T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$ и $T^{(0)}$ параллельны на M . Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M , то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = \tilde{M} \times E_\mu$. Выясним, что представляет собой подмногообразие \tilde{M} в случае, когда в системе (4) $G_a = 0$. Поскольку, кроме того, $\lambda_a^{m+1} = \text{const} \neq 0$, то из системы (4) для \tilde{M} получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} d \ln |\lambda_{p+1}^{m+2}| &= (B - A) \omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^a = A \omega^a, \\ \omega_{m+1}^{m+2} &= D \omega^{p+1}, \quad \omega_{m+2}^\gamma = E^\gamma \omega^{p+1}, \quad \omega_a^i = \omega_{p+1}^r = 0, \\ \omega_r^\alpha &= \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Сразу отметим, что внешнее дифференцирование последних шести уравнений этой системы не приводит к новым соотношениям. Далее, поскольку $d\omega^{p+1} = 0$, то $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} – координата по кривой L . Заметим, что в (5) коэффициент A должен быть отличен от нуля, поскольку в противном случае подмногообразие \tilde{M} будет прямым произведением сферы $S^p(R)$ и кривой L и тогда индекс дефектности \tilde{M} будет отличен от нуля. Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (5), применяя лемму Картана и учитывая независимость формы ω^a , получим $dA = -(\lambda_a^{m+1})^2 + A^2) \omega^{p+1}$. Интегрируя это уравнение, приходим к следующим соотношениям:

$$A = \lambda_a^{m+1} \text{tg}(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1}), \quad D = \lambda_{p+1}^{m+2} \text{tg}(c_2 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1}),$$

где c_1 – постоянная интегрирования. Из первого уравнения системы (5) имеем $\lambda_{p+1}^{m+2} = c_2 e^{\int (B-A) dx^{p+1}}$, где $c_2 (\neq 0)$ – постоянная интегрирования. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (5), получим $dB = \tilde{B} \omega^{p+1}$. Следовательно, B также является функцией от x^{p+1} . Дифференцируя внешним образом четвертое уравнение системы (5), получим $dE^\gamma + E^\delta \omega_\delta^\gamma = Q^\gamma \omega^{p+1}$. Поскольку $\omega_\gamma^\delta = \Gamma_{\gamma p+1}^\delta \omega^{p+1}$, то получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dE^\gamma}{dx^{p+1}} = Q^\gamma - E^\delta \Gamma_{\delta p+1}^\gamma,$$

которая, в предположении гладкости функций Q^γ и $\Gamma_{\delta p+1}^\gamma$, имеет решение.

Приступим к изучению кривой L . Так как на этой кривой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^r = 0$, то для векторов e_{p+1} , e_{m+1} , e_{m+2} , e_γ имеем

$$\begin{aligned} de_{p+1} &= (\lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}) \omega^{p+1} = n_2 \omega^{p+1}, \quad de_{m+1} = (De_{m+2} - \lambda_a^{m+1} e_{p+1}) \omega^{p+1}, \\ de_{m+2} &= (-\lambda_{p+1}^{m+2} e_{p+1} - De_{m+1} + E^\gamma e_\gamma) \omega^{p+1}, \quad de_\gamma = -E^\gamma \omega^{p+1} e_{m+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, кривая L находится в $(n - m + 1)$ -мерном евклидовом пространстве. Полученные уравнения описывают закон изменения репера

кривой L . Из этих уравнений следует, что векторы $e_{p+1}, e_{m+1}, e_{m+2}, e_\gamma$ изменяются только вдоль L .

Поскольку

$$\rho = |n_1|^2 - \langle n_1, H \rangle = |n_2|^2 - \langle n_2, H \rangle = -p(\lambda_a^{m+1})^2,$$

то подмногообразии \tilde{M} имеет отрицательную эйнштейнову константу. Условие $\langle n_1, n_2 \rangle = |n_1|^2$ равносильно тому, что секционные кривизны $k(e_a \wedge e_{p+1})$ положительны и постоянны. Последнее следует из того, что $|n_1|^2 = (\lambda_a^{m+1})^2 = \text{const}$. Если $B = A$, то $|n_2|$ также является постоянным, а n_2 образует с n_1 постоянный острый угол. Если $B \neq A$, то из условия $|n_1|^2 = \langle n_1, n_2 \rangle$ следует, что $|n_1| = |n_2| \cos \varphi$ (φ угол между векторами n_1 и n_2) и, следовательно, постоянным является произведение $|n_2| \cos \varphi$. Вектор $\lambda_a^{m+1} e_{m+1} - A e_{p+1}$ является вектором средней кривизны сферы $S^p(R)$. Следовательно, $R^2 = \left((\lambda_a^{m+1})^2 + A^2 \right)^{-1}$. Подставляя значение A и преобразуя, получим

$$R = \left| \frac{\cos(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1})}{\lambda_a^{m+1}} \right|.$$

Таким образом, радиус R изменяется вдоль кривой L . Подмногообразие \tilde{M} можем трактовать как каналовое подмногообразие.

Рассмотрим теперь случай (б), когда в системе (4) $F_m \neq 0$, $F_r = 0$, $r \neq m$, $\omega_s^m = 0$. Кроме того предположим также, что $G_a = 0$. Тогда система (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d \ln |\lambda_a^{m+1}| &= F_m \omega^m, & d \ln |\lambda_{p+1}^{m+1}| &= (B - A) \omega^{p+1} + F_m \omega^m, \\ \omega_{p+1}^a &= A \omega^a, & \omega_a^m &= F_m \omega^a, & \omega_{m+1}^{m+2} &= D \omega^{p+1}, & \omega_{p+1}^m &= F_m \omega^{p+1}, \\ \omega_{m+2}^\gamma &= E^\gamma \omega^{p+1}, & \omega_r^\alpha &= \omega_a^{m+2} = \omega_{m+1}^\gamma = \omega_i^\gamma = 0, & \omega_a^r &= \omega_{p+1}^r = 0, & r &\neq m. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega_s^m = 0$, $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0$, $r \neq m$, то распределение N , сопоставляющее каждой точке $x \in M$ линейную оболочку векторов e_{p+2}, \dots, e_{m-1} , является параллельным на M . Ортогональное дополнение N , т.е. распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$, где K – одномерное распределение, образуемое прямой с направляющим вектором e_m , также является параллельным на M . Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M , то M разлагается в прямое произведение их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения N представляет собой $(\mu - 1)$ -мерную плоскость $E_{\mu-1}$. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$ представляет собой $(p + 2)$ -мерное подмногообразие, которое будем обозначать через M' . Поскольку $de_m = -F_m (\omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1})$, то вектор e_m является постоянным при

$\omega^a = \omega^{p+1} = 0$. Отсюда следует, что M' является конусом (с исключенной точечной вершиной) над \tilde{M} . Итак, справедлива следующая

Теорема. Пусть тензор Риччи t -мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M индекса дефектности μ евклидова пространства E_n допускает только одно ненулевое собственное значение и пусть этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны ρ_1, ρ_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. Тогда μ совпадает с индексом относительной дефектности, а само M локально является или подмногообразием кодефектности два (если $p_1 = p_2 = 1$), или оно изометрично цилиндру с μ -мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым подмногообразием \tilde{M} или цилиндру с $(\mu - 1)$ -мерными плоскими образующими над конусом, построенному над \tilde{M} (если $p_1 \geq 2, p_2 = 1$). Подмногообразие \tilde{M} можно трактовать как каналое подмногообразие.

Национальный политехнический университет Армении

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Геометрия одного класса риччи-полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности в евклидовых пространствах

В евклидовых пространствах даётся геометрическое описание одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности с нулевым индексом сингулярности и двумя регулярными главными векторами кривизны, у одного из которых кратность равна единице, а у другого — больше единицы. Исследуется класс эйнштейновых подмногообразий, которые трактуются как каналовые подмногообразия.

Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան

Կամայական կոշափի ռիչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաբազմությունների մի դասի երկրաչափությունը Էվկլիդեսյան տարածություններում

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոշափի նորմալ հարթ ռիչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաբազմությունների երկրաչափական նկարագրությունը այն պայմանի դեպքում, որ ռեգուլյարության ինդեքսը հավասար է երկուսի, իսկ սինգուլյարության ինդեքսը՝ զրոյի: Ուսումնասիրվում է Էյնշտեյնյան ենթաբազմաբազմությունների դաս, որոնք մեկնաբանվում են որպես կանալային ենթաբազմաբազմություններ:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan

**The Geometry of One Class of Ric-Semisymmetric Submanifolds of
Arbitrary Codimension in Euclidean Spaces**

In Euclidean spaces the geometric description of a class of normally flat Ric-semisymmetric submanifolds of arbitrary codimension with zero index of singularity and two regular principal curvature vectors is given, in one of which the multiplicity is equal to one while in the other's it is more than one. The class of Einstein submanifolds which are treated as channel submanifolds is investigated.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer, 2009.- 306 p.
2. *Мирзоян В. А.* - Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В.А.* - Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65-80.
4. *Мирзоян В.А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. *Мирзоян В.А.* - Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В.А.* - Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.* - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
8. *Мирзоян В.А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 47-78.
9. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.*- Изв.вузов.Математика. 2012. № 9. С.19-31.
10. *Mirzoyan V. A.* - Reports of NAS RA. 2012. V.112. № 1. P. 19-29.
11. *Szabo Z.I.* - J.Differential Geom. 1982. V. 17. № 4. P. 531-582.
12. *Мирзоян В.А., Назарян А.Р.* – Математика. в высшей школе. Ереван. 2016. Т.12. № 1. С. 19-30.

Examples.

1. if $X \in 2^{B^n}, y \in B^n$, then $\{X + y\}$ is the ‘shift’ of the set X to the point y , and $|X + y| = |X|$.

2. if X is a subset in B^n , then $X + X = X$.

3. $X + B^n = B^n$ for any $X \in 2^{B^n}$.

Also, $\{X + Y\}$ can be interpreted as union of ‘shifts’ of the sets X onto points of the sets Y .

The family $(2^{B^n}, +)$, with an introduced Minkowski addition operation «+» forms a monoid with the neutral element $\{0^n\}$ which is a one member set having the zero element of B^n .

The following inequality is valid:

$$\max\{|X|, |Y|\} \leq |X + Y| \leq |X| \cdot |Y|.$$

Both limits are achievable here. The following statements describe the sets in which these limits are achieved.

Definition [2]. The pair (X, Y) is called additive if for any $x_i, x_j \in X$ and $y_s, y_r \in Y$ the following is valid:

$$x_i + x_j \neq y_s + y_r.$$

Statement 1. The upper limit is achieved if (X, Y) is an additive pair.

Corollary. If $|X + Y| = |X| \cdot |Y|$ then $|X_0 + Y_0| = |X_0| \cdot |Y_0|$ for all $X_0 \subseteq X, Y_0 \subseteq Y$.

We consider an arbitrary subgroup $G \subseteq B^n$ and the action of this subgroup on the family 2^{B^n} :

$$gX = \{x + g, x \in X\},$$

where $g \in G$. Thus, G acts on 2^{B^n} with shifts transferring the subset into its ‘shift.’

Definition [3]. A stabilizer of the set X with respect to the group G is the union of ‘shifts’ G_X from G , conserving X , i.e. $gX = X$ for all $g \in G_X$.

Statement 2. The lower limit is achieved if there exists $z \in B^n$ for which $X + z \subseteq G_Y$ or $Y + z \subseteq G_X$.

Corollary. If $|X + Y| = |X|$, then $|X + Z| = |X|$ for all $Z \subseteq Y$

Now let $X \subseteq B^n$ and $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Example.

1. If $G = \{v, 0\}$ is a group of shifts, then for $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ the following is valid:

$$g_1X = \{v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_m + v\}$$

In this case X has a non-obvious stabilizer if all constituents of X can be partitioned into the pairs $(x, x + v), x \in X$, i.e. $X = \{(v_i, v_i + v)\}$ with respect to $i = 1, 2, \dots, m/2$. For $m = 4$ we get $X = \{(v_1, v_1 + v), (v_2, v_2 + v)\}$. It is clear that in

this case $X + v = X$ and $v \in G_X$. Thus, all subsets of X , having a non-obvious stabilizers, are described above.

In the general form the stabilizer G_X for an arbitrary group G and an arbitrary set $X \subseteq B^n$ can be described in the following terms [3].

Statement 3. *The constituent $g \in G_X$ if the set X can be partitioned into the pairs (v_i, v_j) in such a way that $v_i + v_j = g$ for all pairs which are included in the partition.*

This statement can be obtained by analogical consideration for $G = B^n$ as in [4].

From the above statement one can construct the following algorithm for building the stabilizer G_X of an arbitrary set X for the subgroup $G \subseteq B^n$, acting on 2^{B^n} . And at the same time $|X| = 2m$.

1. First we build the multiset $C = X + X$.
2. Then we choose all the pairs in C having the multiplicity m .
3. Then we build all partitions in A out of these pairs.
4. If $\{P_X\}$ is the set of all partitions of X having the same weights in pairs $x \in C$, then $G_X = \{x\} \cup \{0\}$.

Example.

1. Let $G = B^4$

$$X = \{v_1 = (0011), v_2 = (1010), v_3 = (1110), v_4 = (0111)\}$$

Then:

$$v_1 + v_2 = (1001), v_1 + v_3 = (1101), v_1 + v_4 = (0100)$$

$$v_3 + v_4 = (1001), v_2 + v_4 = (1101), v_2 + v_3 = (0100).$$

This means that all pairs $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_1, v_4), (v_2, v_3)$, have the multiplicity 2 in the sum $X + X$. Then we have:

$$X = \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\} = \{v_1, v_4\} \cup \{v_2, v_3\}.$$

The sum of the pairs in each of the solutions is the same. Hence, the following set:

$$G_X = \{(v_1 + v_2), (v_1 + v_3), (v_1 + v_4), 0\} = \{(1001), (1101), (0100), (0000)\}$$

is a stabilizer for X .

Below we present the simple properties of the operation «+» – the addition in the sense of Minkowski, as it was mentioned above – which can be taken as properties of an algebraic system with basic set 2^{B^n} and those for operations of addition, union of sets, set intersection etc.

1. Associativity:

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

2. Commutativity:

$$X + Y = Y + X$$

3. Distributivity with respect to union:

$$(X \cup Y) + Z = (X + Z) \cup (Y + Z)$$

$$4. \bigcup_{i=1}^m (X + Y_i) = X + \bigcup_{i=1}^m Y_i$$

There are finitely many other relations connecting constituents of the algebraic system described above.

Sum of Spheres in B^n . Let $\rho(x, y) = \|x + y\|$ be the Hamming distance between the points $x, y \in B^n$ and $S_t(v)$ be the set of the points of the sphere of the radius t with the centre at the point $v \in B^n$. In other words, $S_t(v)$ is the sphere of the radius t having the point v as its centre. And at that, $S_n(v) = B^n$ for all $v \in B^n$.

Statement 4 [1].

$$S_t(v) = S_t(0) + v. \quad (2)$$

Statement 5.

$$\bar{S}_t(v) = S_{n-(t+1)}(\bar{v}) \text{ for } t \leq n-1$$

Here $\bar{S}_t(v)$ is the set complement of the sphere $S_t(v)$ in B^n and \bar{v} is the logic 'negation' of the binary set v . We assume that $S_t(v) = \emptyset$, for $t < 0$.

Example.

1. We consider the sphere $S_1(0)$. Then $\bar{S}_1(0) = S_{n-2}(11\dots 1)$.

Formula (2) in the preceding statement allows the following generalization connected with addition.

Let $M \in 2^{B^n}$ and $S_p(M)$ be the set of points belonging to the union of spheres of the radii p with the centres at the points M , that is:

$$S_p(M) = \bigcup_{x \in M} S_p(x)$$

$S_p(M)$ is the 'generalized' sphere of the radius p having its centre at the point M .

Statement 6 [1]. *The following presentation is valid:*

$$S_p(M) = M + S_p(0).$$

Corollary. *For $M_1, M_2 \subseteq B^n$ the following take place:*

$$1. S_p(M_1 + M_2) = S_p(M_1) + M_2 = S_p(M_2) + M_1 = S_p(0) + M_1 + M_2.$$

$$2. S_p(S_g(M_1)) = S_{p+g}(M_1).$$

Statement 7 [1]. *The following relation is valid:*

$$S_p(M_1) = S_g(M_2) = S_{p+g}(M_1 + M_2)$$

For $p + g \leq n$

and the next one is valid:

$$S_p(M_1) + S_g(M_2) = B^n$$

for $p + g \geq n$.

Corollary. *For $M_1, M_2 \subseteq B^n$ the following is valid:*

$$S_p(M_1) + S_g(M_2) = M_1 + M_2 + S_{p+g}(0)$$

The Sum of Facets in B^n . A facet, or sub-cube, or interval in B^n is the set of points satisfying the following condition [5-6]:

$$J = \{u \leq x \leq v\},$$

where (\leq) is a coordinate-wise partial order relation in B^n :

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = \overline{1, n}, \text{ where } x = (x_1 x_2 \dots x_n), y = (y_1 y_2 \dots y_n).$$

In other words, an interval can be given by a word of the length n in the alphabet $\{0, 1, c\}$, the letters of which are ordered linearly: $0 < 1 < c$.

Indeed, if:

$$J = \{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq x \leq \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n\},$$

then the code $\lambda(J)$ of the interval J is built in the following way.

Let $\lambda(J) = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$. Then:

$$\lambda_i = \begin{cases} \alpha_i = \beta_i, & \text{if } \alpha_i = \beta_i \\ c, & \text{if } \alpha_i < \beta_i \end{cases}$$

Examples.

1. If $J = \{0100 \leq x \leq 0111\}$, then $\lambda(J) = (01cc)$

2. If $J = B^n = \{00\dots 0 \leq x \leq 11\dots 1\}$, then $\lambda(B^n) = (cc\dots c)$.

If $\lambda(J) = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$ is the code of the interval J , then all points of the interval J are obtained from the code $\lambda(J)$ by replacing the letters in an arbitrary way by zeros or units.

Let $\lambda_1(J)$ and $\lambda_2(J)$ be the numbers of letters 1 and c , respectively included in $\lambda(J)$ which is the code of the interval J . It is clear that $\lambda_2(J)$ is the dimension of J , i.e. $\lambda_2(J) = \dim J$ and $|J| = 2^{\dim J}$.

If the operation «*» is introduced in the alphabet A by the following Caley table [7]:

*	0	1	c
0	0	1	c
1	1	0	c
c	c	c	c

then the sum of the intervals J of the system defined above as a sum of subsets is the interval the code of which is calculated by the codes of items (addends) using the above Caley table.

Statement 8 [1]. The sum $J_1 + J_2$ is an interval with the code $\lambda(J_1 + J_2) + \lambda(J_1) + \lambda(J_2)$ and dimension $\lambda(J_1 + J_2) + \lambda_2(J_1) + \lambda_2(J_2) - \lambda_2(J_1 \cap J_2)$.

Examples.

1. If $J_1 = \{(010), (011)\}$, $J_2 = (100)$, then $\lambda(J_1 + J_2) = (11c)$.

On the other hand, we get by definition:

$$J_1 + J_2 = \{(010) + (100), (011) + (100)\} = \{(110), (111)\},$$

i.e. $J_1 + J_2 = \{(11c), c \in \{0,1\}\}$.

2. If $J_1 = B^n$, then $J_1 + J_2 = B^n$ for any interval J_2 .

Statement 9 [1]. $\rho(J_1, J_2) = \lambda_1(J_1 + J_2)$, where ρ is the Hausdorff distance between the sets [8].

Thus, the distance between the intervals J_1 and J_2 is the number of occurrence of letters 1 in the code of their sum.

Sum of Layers in B^n . Let $B_p^n = \{x \in B^n, \|x\| = p\}$ be the p -th layer of an n -dimensional cube or sphere of the radius p and the centre at zero [9-10].

By definition $B_p^n + B_q^n$ is the sum of layers in B^n , consisting of the union of sums of the points one of which has the weight p and the second has the weight q . It is clear that the symmetrical group S_n operates on each layer in the following manner:

$$\text{if } g \in S_n, \text{ then } g(x_1 x_2 \dots x_n) = x_{g(1)} x_{g(2)} \dots x_{g(n)}.$$

Hence, g permutes the coordinates of the point x , leaving its Hamming weight unchanged.

At the same time the relation $g(x+y) = g(x) + g(y)$ is valid for $g \in S_n, x, y \in B^n$.

Thus, each layer B_p^n is a transitive set or an orbit of operation of the group S_n on the cube B^n

$$\text{Let } |p-g| = a, p+g = b.$$

Statement 10 [1]. The following formula is valid:

$$B_p^n + B_q^n = \bigcup_{2r \leq \min\{2n-b, b\} - a} B_{a+2r}^n. \quad (3)$$

For not large values of the layer the following table of addition is valid:

+	B_0^n	B_1^n	B_2^n
B_0^n	B_0^n	B_1^n	B_2^n
B_1^n	B_1^n	$B_0^n \cup B_2^n$	$B_1^n \cup B_3^n$
B_2^n	B_2^n	$B_1^n \cup B_3^n$	$B_0^n \cup B_2^n \cup B_4^n$

Note that formula (3) can be rewritten for any number of terms, using the above-mentioned property of distributivity.

Indeed, using (3), we get:

$$B_p^n + B_q^n + B_s^n = \bigcup_{2r \leq \min\{2n-b, b\} - a} B_{a+2r}^n + B_s^n = \bigcup_{2r \leq \min\{2n-b, b\} - a} (B_{a+2r}^n + B_s^n)$$

which makes possible to use (3) again.

Example.

1. Let us find the sum $B_1^n + B_2^n + B_4^n$. We have:

$$\begin{aligned} B_1^n + B_2^n + B_4^n &= (B_1^n \cup B_3^n) + B_4^n = (B_1^n + B_4^n) \cup (B_3^n + B_4^n) = \\ &= (B_3^n + B_5^n) \cup (B_1^n \cup B_3^n \cup B_5^n \cup B_7^n) = B_1^n \cup B_3^n \cup B_5^n \cup B_7^n. \end{aligned}$$

NB. As each layer B_p^n is a sphere of the radius p and the centre at zero point, then all the preceding formulae are rules of ‘sphere’ addition.

Sum of Subsets in B^n . If we take subspaces in B^n as terms of the sum $X+Y$, we will get a well-known object. Indeed, if X, Y is a subspace in B^n , then $(X+Y)$ is a subspace, too, and we have:

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y),$$

in terms of cardinality:

$$|X+Y| = \frac{|X| \cdot |Y|}{|X \cap Y|}$$

Thus, ‘theory of addition of subspaces,’ being a well-developed part of linear algebra, makes possible to answer many questions concerning the subject problem.

Sum of Spheres in B^n . The k -dimensional interval we denote by J^k .

According to statement 6, we have:

$$J^k + S_t^n(0) = \bigcup_{x \in J^k} S_t^n(x)$$

i.e. $J^k + S_t^n(0)$ is the union of all spheres of the radii t with centres at the points in the interval J^k , or:

$$J^k + S_t^n(0) = \bigcup_{x \in S_t^n(0)} (J^k + x)$$

Let $t_1 = \min(t, n-k)$

Statement 11. $J^k + S_t^n(0) = S_{t_1}^{n-k}(J^k)$.

For the cardinality of the set $J^k + S_t^n(0)$ the following is true:

Corollary. $|J^k + S_t^n(0)| = 2^k S_{t_1}^{n-k}$, where $S_{t_1}^{n-k}$ is the cardinality of the sphere of the radius t_1 in B^{n-k} .

Sum of a Layer and an Interval in B^n . Analogous to the preceding statement and corollary we get the sum of the sets $B_t^n + J^k$.

Statement 12. The following relation is valid:

$$B_t^n + J^k = S_{t_1}^{n-k}(J^k) \setminus S_{p-k-1}^{n-k}(J^k).$$

Corollary. The cardinality of the set $B_t^n + J^k$ is calculated as follows:

$$|B_t^n + J^k| = 2^k (S_{t_1}^{n-k} - S_{p-k-1}^{n-k}).$$

Sum of a Sphere and a Layer in B^n . **Statement 13.** The following is valid:

$$B_p^n + S_q^n(M) = S_{l_1}^n(M) \setminus S_{l_2}^n(M)$$

where $l_1 = \min(p+q, n)$, $l_2 = \max(0, p-q) - 1$.

§ 2. Equation in Sets. Let $(2^{B^n} +)$ be the monoid of all subsets with operation of addition (1) in B^n as was defined above. This monoid is of certain

interest both in classical discrete analysis [8] and for a number of problems connected with theory of information [4].

The ‘simplest’ equation in sets is as follows:

$$X + Y = A \quad (4)$$

where $X, Y, A \in 2^{B^n}$

It is clear that equation (4) always has the trivial solution $X = \{0\}, Y = A$.

Examples.

1.If $A = B^n$, then one can choose B^n for X , and any subset of B^n for Y .

2.If A is a subspace of B^n , then $A + A = A$ and, therefore, equation (4) has the solution $X = Y = A$

$$3. \{(11)\} + \{(01), (10)\} = \{(10), (01)\}; \{(10)\} + \{(00), (01)\} = \{(10), (11)\}.$$

Now, let:

$$\|X + Y\| = \min\{\|x\|, x \in X + Y\}$$

Then $\rho(X, Y) = \|X + Y\|$;

consequently, the Hausdorff distance between the sets X and Y :

$$\rho(X, Y) = \min_{\substack{x \in X \\ y \in Y}}(x, y)$$

is expressed by the norm of the sum of these solutions.

On the other hand, if:

$$R(X, Y) = \{\rho(x, y); x \in X, Y \in Y\}$$

then $R(X, Y)$ is the reciprocal spectrum of the distance between the points of the sets X and Y and:

$$R(X, X) = \{\|x + y\|, x \in X, y \in X\}$$

that is, $R(X, X) = R(X)$ is the spectrum of the distance between the points of the set X , or rather, the spectrum of X .

Thus, the set $X + X$ describes, to a considerable extent, the set of distances between the points of X or the spectrum of X .

In an additive channel of communication [4] the class of equivalence has one to one presentation by transitive sets of certain ‘generating’ channels. The problem is to order these transitive sets through cardinalities of ‘generating’ channels. We need the following numerical parameters, which depend on solutions of equation (4) and on the right hand side of A .

$$\text{Let } N(A) = \{(X, Y), X + Y = A\}.$$

We introduce the following parameters:

$$m(A) = \min_{(X, Y) \in N(A)} |X \cup Y|, \bar{m}(A) = \begin{cases} |A \cup \{0\}|, & \text{if } N(A) = \emptyset \\ \min_{(X, X) \in N(A)} |X| \end{cases}$$

$$M(A) = \max_{(X, Y) \in N(A)} |X \cup Y|, \bar{M}(A) = \begin{cases} |A \cup \{0\}|, & \text{if } N(A) = \emptyset \\ \max_{(X, X) \in N(A)} |X| \end{cases}$$

Introduction of such definitions as $\bar{m}(A)$ and $\bar{M}(A)$ is explained by the fact that the equation $X + X = A$ can sometimes have no solution (for instance, for $|A|=3, |A|=5$ or for $0 \notin A$), though the equation $X + Y = A$ always has a solution.

Then, for the minimal and maximal cardinality set $X \cup Y$, where $(X, Y) \in N(A)$ we get respective boundary values, which make possible to narrow the region $N(A)$ i.e. the region of the set of solutions of equation (4) (we shall see this below).

It is not hard to prove that:

$$m(A) \leq \bar{m}(A) \leq \bar{M}(A) \leq |A \cup \{0\}| \leq M(A).$$

As every solution (X, X) of the equation $X + X = A$ is a solution for (4), then we present the following useful statement which makes possible to obtain solutions of the equation $X + X = Y$ from solutions of the equation (4), under certain limitations.

Statement 14. *If (X_0, Y_0) is a solution of the equation $X + Y = A$, then $(X_0 \cup Y_0)$ is a solution of the equation $X + X = A$, iff $(X_0 + X_0) \subseteq A$ and $(Y_0 + Y_0) \subseteq A$.*

Statement 15. *For the subspace $A \subseteq B^n$ the following is valid:*

- a) $m(A) = \bar{m}(A)$;
- b) $M(A) = \bar{M}(A) = 2^{\dim A}$.

Statement 16. *The following estimations are valid:*

1. $m(A) \leq 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2}$ for the subspaces $A \subseteq B^n$, for $\dim A = k \geq 3$;

2. $m(A) \geq \frac{1}{2} \left((8|A| - 7)^{\frac{1}{2}} \right) + 1$, for $A \subseteq B^n$.

3. If $A \subseteq B^n$ is a subspace, then equality in $m(A) \geq \frac{1}{2} \left((8|A| - 7)^{\frac{1}{2}} \right) + 1$

takes place iff $\dim A = 1, 2$ or 4 .

Examples.

1. The pair (X_0, Y_0) where $X_0 = Y_0 = S_t^n(0)$ is a solution of the equation: $X + Y = B^n \setminus \{1^n\}$ for $n = 2t + 1$

2. The pair (X_1, Y_1) where $X_1 = S_t^n(0), Y_1 = S_t^n(0) \cup \{x, x \in B^n \setminus S_t^n(0)\}$ is a solution of the equation: $X + Y = B^n$ for $n = 2t + 1$

If we keep to these examples, then we can assume that there exists some monotonous dependence of the function $m(A)$ on the cardinality A . But one can manage to find the possible connection between the right hand side of equation (4) and the function $m(A)$ for the case if A is the halfspace.

Corollary. For the halfspace A, A_2 the inequality $\dim A_1 \geq \dim A_2$ is valid iff $m(A_1) \geq m(A_2)$.

The ‘seemingly obvious’ hypothesis that the upper limit of $m(A)$ is reached for all $k = \dim A$ is refuted by the following examples.

Examples.

1. Let $A = B^5$. In this case there is no solution of equation (4), satisfying the condition: $|X| = 9$. Consequently, since for $k = 5$ the following is valid:

$$2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 2 = 10 \geq m(A)$$

$m(A) = 10$, and the upper limit is reached in this example.

2. Let $A = B^7$. $X = \{(0 0 0 0 0 0 0), (0 0 0 0 1 0 0), (0 0 0 0 1 1 0), (0 0 0 1 1 0 1), (0 0 1 0 0 0 1), (0 0 1 0 1 1 1), (0 1 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 1 0 0), (0 1 1 0 1 0 0), (0 1 1 0 1 0 1), (0 1 1 1 0 1 1), (0 1 1 1 1 0 0), (0 1 1 1 1 1 0), (1 0 0 0 0 1 0), (1 0 0 1 1 0 1), (1 0 0 1 1 1 0), (1 0 1 0 0 0 0), (1 0 1 1 0 1 1), (1 1 0 0 1 0 1), (1 1 0 1 1 0 0)\}$.

We have: $X + X = A, m(A) = 22 < 24 = 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 2$. Consequently, the upper limit is not reached in this example.

Statement 17 [11]. If $A \setminus \{0\} \subseteq B_k^n$, then the solution of the equation $X + X = A$ is an equidistant code with a distance between any two points equal k , and $\bar{M}(A) \leq n+1$. At the same time $\bar{M}(A) = n+1$ iff there exists a Hadamard matrix of the order $n+1$ [12].

Consequently, the problem of constructing of an equidistant code with the distance k having the minimal cardinality can be formulated in terms of solvability of the equation $X + X = A$.

Definition. The set $A \in 2^{B^n}$ is called a quadrate if the following equation:

$$X + X = A \tag{10}$$

is solvable.

It is clear that a quadrate always contains the zero point.

Example.

1. If A is a halfspace in B^n , then, as it was mentioned above, $A + A = A$ and, therefore, A is a quadrate. If $A \setminus \{0\} \subseteq B_{2r+1}^n, r \in \{0, 1, \dots\}$, then A is a quadrate

$$\text{iff } |A| = 2 \text{ i.e. } A = \{0, x; x \in B_{2r+1}^n\}$$

The notion of ‘quadrate’ is connected with problems of equivalence of additive channels [4] where description of the class of equivalence is connected with finding of all solutions of the following equation:

$$X + X = A.$$

Let:

$$M(n, d) = \max_{N(A) \neq \emptyset} \left\{ \bar{M}(A); A \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{i=d}^n B_i^n \right\}$$

We denote by $A(n, d)$ the cardinality of the maximal code with the minimal distance d [6].

Statement 18. $M(n, d) = A(n, d)$.

From this and taking into account the known estimations $A(n, d)$ (the upper limit; see [6]) we get:

Statement 19. *The following inequality is valid:*

$$M(n, d) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}}, t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

At the same time equality takes place iff there exists a perfect code in B^n with the minimal distance d .

Consequently, the problem of constructing the code of maximal cardinality – in particular, a perfect code – is reduced to finding the solution of maximal cardinality for equation (10) among all quadrates of the union of layers $B_d^n \cup B_{d+1}^n \dots \cup B_n^n$.

Statement 20 [1]. *If A, B is a quadrate, then $(A+B)$ is a quadrate too.*

Corollary. *The preceding statement is valid for any number of summands.*

Now let $GL_2(n)$ be a group of invertible matrices having components in the field $F_2 = \{0, 1\}$.

Definition. *The set of matrices $G_A \subseteq GL_2(n)$ is called stabilizer of the set $A \in 2^{B^n}$ if all matrices in G_A conserve A , i.e. $gA = A$, where $g \in G_A$.*

At the same time, if $A = \{v_1, v_2 \dots v_m\}$, then $gA = \{gv_1, gv_2 \dots gv_m\}$.

Statement 21. *Let G_A be a stabilizer of the set $A \in 2^{B^n}$ and $G_A = \{g\}$. Then the pair X, gX is the solution of the equation $X + X = A$, as well.*

§ 3. Multisets. The second definition of addition of sets from 2^{B^n} is connected with multiplicity of containing each member into the sum $A+B$ [4].

Definition. *A multisum of two sets $A, B \in 2^{B^n}$ is called multiset:*

$$A+B = \{\alpha * (x+y), x \in A, y \in B\} \quad (11)$$

in which each member $(x+y)$ is counted as many times as it comes in sum (11), and α is the multiplicity of the member $(x+y)$.

Examples.

1. If $A = \{(01), (10)\} \in 2^{B^2}$, then $A+A = \{2*(00), 2*(11)\}$.

2. If

$$A_1 = B_1^3 = \{(001), (010), (100)\}, A_2 = B_2^3 = \{(110), (101), (011)\},$$

$$\text{then } A_1 + A_2 = \{3*(111), 2*(100), 2*(010), 2*(001)\}$$

It is clear that by definition $|A_1 + A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$, in which the cardinality of the multiset is the sum of the multiplicities of its members.

In particular, the following expression is valid:

$$\bigcup_{x \in B^n} \{C+x\} = |C| * B^n,$$

where C is an arbitrary subset in B^n and $|C|$ is the multiplicity of the constituent $y \in B^n$.

It follows from this that:

$$\left| \bigcup_{x \in B^n} \{C + a\} \right| = |C| \cdot 2^n$$

Let $a = |g - p|, b = g + p$

Statement 22. For the multiset $B_g^n + B_p^n$ the following formula is valid:

$$B_g^n + B_p^n = \bigcup_{2r \leq \min\{2n-b, b\} - \alpha} \alpha(\alpha + 2r) * B_{\alpha+2r}^n, \quad (12)$$

where $\alpha(\alpha + 2r) = \binom{a+2r}{r} \binom{n-a-2r}{\min(g, p) - r}$ is the multiplicity of the member of the multiset $B_p^n + B_g^n$ with the weight $(\alpha + 2r)$.

Corollary. For $g \leq p \leq n$ we have:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \binom{n}{g} \binom{n}{p} &= \sum_{2r=0}^{\min\{2n-b, b\} - a} \binom{n}{a+2r} \binom{a+2r}{r} \binom{n-a-2r}{g-r} \\ \text{b)} \quad \binom{n}{p} \binom{n}{g} &= \sum_{i=0}^{n-p} \binom{n}{p-g+2i} \binom{p-g+2i}{i} \binom{n-p+g-2i}{g-i} \end{aligned}$$

if $p + g \geq n$ and:

$$\text{c)} \quad \binom{n}{p} \binom{n}{g} = \sum_{i=0}^g \binom{n}{p-g+2i} \binom{p-g+2i}{i} \binom{n-p+g-2i}{g-i}$$

if $p + g \leq n$

Statement 23. For the multiset $S_t^n(v) + B_p^n$ the following is valid:

$$S_t^n(v) + B_p^n = \bigcup_{2r=\max(0, p-t)-l}^{\min\{p+t, n\}} \alpha(l+2r) * (B_{l+2r}^n + v)$$

Where $v \in B^n$; and at the same time:

$$\alpha(l+2r) = \sum_{i=0}^l \sum_{i=|r-p|} \binom{l+2r}{r} \binom{n-l-2r}{\min(i, p) - r}$$

is the multiplicity of the members of $(B_{l+2r}^n + v)$

Corollary. For $n \geq p, t \geq 0$ the following is valid:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \binom{n}{p} \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} &= \sum_{i=0}^{\min\{p, t\}} \sum_{r=0}^i \binom{n}{p+r} \binom{p+r}{i} \binom{i}{r} + \sum_{i=p+1}^t \sum_{r=0}^p \binom{n}{i+r} \binom{i+r}{p} \binom{p}{r}; \\ \text{b)} \quad \binom{n}{p} \binom{n}{g} &= \sum_{i=0}^g \binom{n}{p+i} \binom{p+i}{g} \binom{g}{i} \end{aligned}$$

Statement 24. For the multiset $S_{t_1}^n(v_1) + S_{t_2}^n(v_2)$ the following equality is valid:

$$S_{t_1}^n(v_1) + S_{t_2}^n(v_2) = \bigcup_{m=0}^{t_1+t_2} \alpha_m * (B_m^n + (v_1 + v_2)),$$

where $v_1, v_2 \in B^n$ and at the same time

$$\alpha_m = \sum_{i=0}^{t_1} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{\min(t_1-i, t_2-m+i)} \binom{n-m}{j}:$$

is the multiplicity of the members $x \in (B_m^n + (v_1 + v_2))$.

Corollary. For $n \geq t_1, t_2 \geq 0$ the following equality is valid:

$$\sum_{i=0}^{t_1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{t_2} \binom{n}{j} = \sum_{m=0}^{t_1+t_2} \binom{n}{m} \sum_{i=0}^{t_1} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{\min(t_1-i, t_2-m+i)} \binom{n-m}{j}$$

Statement 25. For the multiset $B_p^n + J^k$ the following formula is valid:

$$B_p^n + J^k = \bigcup_{x \in B^n} \alpha(x) * x.$$

Where $\alpha(x) = \binom{k}{t-\lambda_1(J^k+x)}$ is the multiplicity of x .

Corollary. For $n \geq p \geq 0$ the following is valid:

$$\binom{n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{n-k}{i} \binom{k}{p-i}.$$

Statement 26. For the multiset $S_t^n(v) + J^k$ the following formula is valid:

$$S_t^n(v) + J^k = \bigcup_{x \in B^n} \alpha(x) * (x+v)$$

where $v \in B^n$ and at the same time: $\alpha(x) = \sum_{i=0}^{t-\lambda_1(J^k+x)} \binom{k}{i}$ is the multiplicity of $x+v$.

Corollary. For $n \geq k \geq 0, n \geq t \geq 0$ the following is valid:

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^t \binom{n-k}{i} \sum_{j=0}^{t-i} \binom{k}{j}.$$

Statement 27. For the multiset $J^{k_1} + J^{k_2}$ the following is valid:

$$J^{k_1} + J^{k_2} = \alpha(J^{k_1}, J^{k_2}) * J^{k_3},$$

where $k_3 = k_1 + k_2 - \lambda_2(J^{k_1} \cap J^{k_2})$, J^{k_3} is the interval with the code: $\lambda(J^{k_1} + J^{k_2})$ and

$\alpha(J^{k_1}, J^{k_2}) = \lambda_2(J^{k_1} \cap J^{k_2})$ is the multiplicity of the members of J^{k_3}

Finally, we define the operation “-”, that is, subtraction for multisets.

Let $X = \{\alpha(x) * x; x \in B^n\}, Y = \{\alpha(y) * y; y \in B^n\}$.

Definition. $X \setminus Y = \{a(z) * z; \text{where } a(z) = \max\{\alpha(x) - \alpha(y), 0\}, z = x = y \in B^n\}$.

Example. We consider the multisets:

$$X = B_p^n + J^k = \left\{ \binom{k}{p-\lambda_1(J^k+x)} * x, x \in B^n \right\},$$

$$Y = B_p^n + J^k = \left\{ a(y) * y, y \in B^n, a(y) = \begin{cases} 1; & \text{if } \binom{k}{p-\lambda_i(j^k+y)} \geq 1 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \right\}.$$

From Statements 23 and 13 we get:

$$X \setminus Y = \left\{ \left(\binom{k}{p-\lambda_i(j^k+z)} - 1 \right) * z, z \in B^n \right\}$$

¹Moscow State University

²BIT Group, Moscow

³Yerevan State University

e.mail: vkleontiev@yandex.ru, garib@hkzap.ru, j.margaryan@ysu.am

V. K. Leontiev, G. L. Movsisyan, Zh. G. Margaryan

On Addition of Sets in Boolean Space

In many problems of combinatory analysis operations of addition of sets are used (sum, direct sum etc). In the present paper some properties of addition operation of sets (namely, Minkowski addition) in Boolean space B^n are presented. Also, sums and multisums of various “classical figures” as: sphere, layer, interval are considered. The obtained results make possible to describe multisums by such characteristics of summands as: the sphere radius, weight of layer, dimension of interval. Possible solutions of the equation $X + Y = A$, where $X, Y, A \subseteq B^n$, are considered. In spite of simplicity of the statement of the problem, complexity of its solutions becomes obvious at once, when the connection of solutions with constructions of equidistant codes or existence the Hadamard matrices is apparent.

Վ. Կ. Լեոնտև, Դ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան

Բազմությունների գումար բուլյան տարածության մեջ

Կոմբինատոր անալիզի շատ խնդիրներում օգտագործվում են բազմությունների գումար (գումար, ուղիղ գումար և այլն): Աշխատանքում ներկայացված են բազմությունների գումարի (գումար ըստ Մինկովսկու) որոշակի հատկություններ B^n բուլյան տարածության մեջ: Դիտարկվում են գումարներ և մուլտի գումարներ այնպիսի տարատեսակ դասական բազմությունների համար, ինչպիսին են գունդ, շերտ, միջակայք: Ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս նկարագրելու մուլտի գումարները, գումարելիների այնպիսի բնութագրիչներով, ինչպես օրինակ՝ գնդի շառավիղ, շերտի կշիռ, միջակայքի չափողականություն: Ուսումնասիրվում է $X + Y = A$ հավասարման հնարավոր լուծումների գոյությունը, որտեղ $X, Y, A \subseteq B^n$: Խնդրի դրվածքի պարզությամբ հանդերձ, հավասարման լուծումների գոյության խնդրի բարդությունը ակնհայտ է դառնում, երբ պարզվում է նրա կապը հավասարահեռ կոդերի կառուցման, Ադամարի մատրիցայի գոյության խնդիրների հետ:

В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян

Сумма множеств в булевом пространстве

Во многих задачах комбинаторного анализа используются операции сложения множеств (сумма, прямая сумма и т.п.). В данной работе приводятся некоторые свойства операции сложения множеств (сложения по Минковскому) в булевом пространстве B^n и рассматриваются суммы и мультисуммы различных «классических фигур», таких как шар, слой, интервал. Полученные результаты позволяют описать мультисуммы через такие характеристики слагаемых, как радиус шара, вес слоя, размерность интервала. Рассматриваются возможные решения уравнения $X + Y = A$, где $X, Y, A \subseteq B^n$. При этом несмотря на простоту постановки задачи сложность решения становится очевидной сразу, как только выявляется связь с построением эквидистантных кодов или существованием матриц Адамара.

References

1. *Leontiev V. K., Movsisyan G. L., Margaryan Zh. G.* – Open Journal of Discrete Mathematics (OJDM). 2016. V. 6, № 2. P. 25-40.
2. *Movsisyan G. L.* – Open Journal of Discrete Mathematics (OJDM). 2013. 3. P. 137-142.
3. *Sachkow W.N.* Combinatory Methods of Discrete Mathematics Moscow. Nauka 1977 (in Russian).
4. *Leontiev V. K., Movsisyan G. L., Osipyanyan A.* – Open Journal of Discrete Mathematics (OJDM). 2014. 4. P. 67-76.
5. *Leontiev V. K.* Selected problems of combinatorial analysis. Bauman Moscow State Technical University. Moscow, 2001 (in Russian).
6. *Leontiev V. K.* Combinatorics and information. Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT). Moscow. 2015 (in Russian).
7. *Lang, S.* Algebra. Moscow. Mir. 1968 (in Russian).
8. *Nigmatulin R. G.* Complexity of Boolean Functions. Moscow. Nauka. 1991. 240 p. (in Russian).
9. *Movsisyan G. L.* – Bulletin of MSU. Computing Math. and Cybernetics. 1982. V. 1. № 15. P. 64-69 (in Russian).
10. *Leontiev V. K., Movsisyan G. L., Margaryan Zh. G.* – Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2012. № 1. P. 16-19.
11. *McWilliams F. J., Sloane N. J. A.* The Theory of Error-Correcting Codes, parts I and II. North-Holland Publishing Company. 1977.
12. *Delsarte P.* – Info. and Control, 1973. 1973.V. 23. P. 407-438.

МЕХАНИКА

УДК 62-50

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян¹, В. В. Аветисян²

**О построении ограниченного управления
электрохимической системой**

(Представлено 10/III 2017)

Ключевые слова: *ограниченное управление, электрохимическая система.*

Введение. Рассматривается электрохимическая система второго порядка, которая приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Особенностью рассматриваемой системы является то, что в классе ограниченных управлений она управляема к состоянию покоя, но не управляема по отношению к произвольному состоянию, отличному от покоя. Для рассматриваемой модели манипулятора в [1] изучены задачи построения оптимального управления, обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя, в том числе при дополнительных ограничениях. Для некоторых систем более высокого порядка, в частности, для систем четвертого порядка со смешанными ограничениями, которые представляют собой модели механических и электрохимических систем, содержащих электрический двигатель, в [2-4] исследованы задачи построения ограниченного управления, приводящие систему из произвольного начального состояния в терминальное состояние покоя за конечное время. В настоящей статье, с использованием обобщенной схемы построения управления Калмана [2], учитывающей наличие ограничения на управление, в явном виде найдены управление и соответствующее конечное время, при которых осуществляется приведение системы из начального состояния покоя в любое конечное состояние покоя. В случае конечного состояния, отличного от состояния покоя, на фазовой плоскости системы получено условие в виде определенной области конечных состояний, приведение в которые за конечное время по

предлагаемому способу также происходит с ненарушением заданного ограничения на управление.

1. Расчетная модель электромеханической системы с одной степенью свободы и постановка задачи. Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твердого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закрепленным в его схвате. Движение описанной электромеханической системы определяется уравнениями [1]

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = n\mu, \quad (1.1)$$

$$Rj + kn\dot{\varphi} = u, \quad (1.2)$$

$$\mu = kj, \quad (1.3)$$

$$|u| \leq u_{\max}. \quad (1.4)$$

В (1.1)-(1.4) φ – угол поворота руки; I – момент инерции вместе с ведомой шестерней редуктора; J – момент инерции якоря электродвигателя вместе с ведомой шестерней редуктора; n – передаточное число редуктора; μ – момент электромагнитных сил, создаваемый двигателем; u – входное (управляющее) напряжение двигателя; j – ток в цепи якоря двигателя, R – электрическое сопротивление обмотки якоря двигателя; k – коэффициент пропорциональности; u_{\max} – максимально допустимое напряжение,

Уравнение (1.1) описывает динамику механической части системы, (1.2) – уравнение баланса напряжений в цепи якоря электродвигателя, если пренебречь явлением самоиндукции в обмотке якоря, равенство (1.3) отражает пропорциональность крутящего момента двигателя и тока в цепи его якоря. Пренебрежение явлением самоиндукции при описании динамики манипулятора возможно, если электромагнитная постоянная времени $\tau = L/R$ (L – индуктивность обмотки якоря) много меньше времени рабочей операции манипулятора. На практике это условие в большинстве случаев выполняется. Отметим, что система уравнений (1.1)-(1.3) приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется независимым приводом, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало (см., например, [1]).

Исключив переменную μ из совокупности уравнений (1.1)-(1.3), движение манипулятора можно описать следующей системой:

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = nkj, \quad Rj + kn\dot{\varphi} = u, \quad |u| \leq u_{\max}.$$

Переходя к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов)

$$t' = t / \bar{T}, \quad u' = u / u_{\max}, \quad k' = kn / (u_{\max} \bar{T}),$$

$$R' = RA / (knu_{\max} \bar{T}^2), \quad j' = (knu_{\max} \bar{T}^5 A^{-2})^{1/2} j,$$

где $A = I + Jn^2$, а $\bar{T} = nk / u_{\max}$ – единица измерения времени, получим

$$\ddot{\phi} = k^{1/2} j, \quad Rj + k^{1/2} \dot{\phi} = k^{-1/2} u, \quad |u| \leq 1.$$

Далее, исключив переменную j из последних двух уравнений, движение манипулятора можно описать одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$R\dot{\phi} + k\phi = u, \quad (1.5)$$

$$|u| \leq 1. \quad (1.6)$$

Для системы (1.1)-(1.4) или, что то же, (1.5), (1.6) рассмотрим следующую задачу управления: найти закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, который обеспечивает приведение манипулятора из начального состояния покоя

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (1.7)$$

в заданное конечное состояние

$$\phi(T) = \phi^1, \quad \dot{\phi}(T) = \dot{\phi}^1 \quad (1.8)$$

в некоторый момент времени $t = T$ при ограничении на управляющее напряжение (1.6) в цепи якоря электродвигателя привода.

Перейдем к новым переменным

$$v = u - k\dot{\phi}, \quad x_1 = R\phi, \quad x_2 = R\dot{\phi} \quad (1.9)$$

и запишем уравнение (1.5) с ограничением (1.6) в виде следующей системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v \quad (1.10)$$

$$|v + kR^{-1}x_2| \leq 1, \quad (1.11)$$

При этом начальные и конечные условия примут, соответственно, вид

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad (1.12)$$

$$x_1(T) = x_1^1 = R\phi^1, \quad x_2(T) = x_2^1 = R\dot{\phi}^1. \quad (1.13)$$

2. Построение закона изменения управляющего напряжения без учета ограничения. Найдем закон изменения управляющего напряжения $v(t)$, обеспечивающий переход системы (1.10) из начального состояния по-

коя (1.12) в конечное состояние (1.13) в некоторый момент времени T без учета ограничения (1.11).

Систему (1.10) запишем в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad x = (x_1, x_2)^T \quad (2.1)$$

с постоянными матрицами A, B и фундаментальной матрицей Φ соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Начальные (1.12) и конечные (1.13) условия представим в виде

$$x(0) = 0, \quad x(T) = x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T. \quad (2.3)$$

Запишем решение системы (2.1) с начальным условием из (2.3)

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau. \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) задача (2.1)-(2.3), ((1.10), (1.12), (1.13)) сводится к отысканию такого скалярного управления $v(t)$, при котором удовлетворяется условие

$$\int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)v(t)dt = \Phi^{-1}(T)x^1. \quad (2.5)$$

Искомое управление $v(t)$ ищется в виде [2]

$$v(t) = Q^T(t)C, \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t), \quad (2.6)$$

где постоянный вектор C определяется из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T) \cdot C = \Phi^{-1}(T)x^1, \quad R(T) = \int_0^T Q(t)Q^T(t)dt \quad (2.7)$$

единственным образом

$$C = R^{-1}(T) \cdot \Phi^{-1}(T)x^1, \quad (2.8)$$

так как система (2.1), (2.2) вполне управляема [5].

Подставив (2.7), (2.8) в (2.6), управление $v(t)$ можно представить следующим образом:

$$v(t) = F(t, T) \cdot (x^1)^T, \quad x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T, \quad (2.9)$$

где

$$F(t, T) = (\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) \quad (2.10)$$

– вектор-строка с двумя элементами

$$f_1 = -\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2}, \quad f_2 = \frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.3), (2.10), (2.11) искомый закон изменения управлений (2.9) можно представить в следующем виде:

$$v(t) = \sum_{i=1}^2 f_i(t, T)x_i^1 = \left(-\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2}\right)x_1^1 + \left(\frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T}\right)x_2^1 \quad (2.12)$$

3. Учет ограничения. Сначала рассмотрим частный случай.

А. Пусть конечное состояние (1.8) – состояние покоя: $\varphi(T) = \varphi^1$, $\dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}^1 = 0$ или в переменных (1.9)

$$x_1(T) = x_1^1, \quad x_2(T) = x_2^1 = 0. \quad (3.1)$$

Проинтегрировав второе уравнение (1.10) с начальными условиями (1.11) при построенном законе (2.12) с учетом (3.1), получим

$$x_2 = \left(-\frac{6}{T^3}t^2 + \frac{6}{T^2}t\right)x_1^1. \quad (3.2)$$

Используя выражения (2.12), (3.2), ограничение (1.11) можно представить в виде

$$\left| \left(-\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2}\right)x_1^1 + kR^{-1} \left(-\frac{6}{T^3}t^2 + \frac{6}{T^2}t\right)x_1^1 \right| \leq 1$$

или, что то же,

$$|g_1(t, T)| |x_1^1| \leq 1, \quad g_1(t, T) = -\frac{6kR^{-1}}{T^3}t^2 + \left(\frac{6kR^{-1}}{T^2} - \frac{12}{T^3}\right)t + \frac{6}{T^2}. \quad (3.3)$$

Так как

$$|g_1(t, T)| |x_1^1| \leq r^{-1}(T) |x_1^1|, \quad r(T) = \left[\max_{t \in [0, T]} |g_1(t, T)| \right]^{-1}, \quad (3.4)$$

то неравенство (3.3) будет выполнено при всех $t \in [0, T]$, если время окончания процесса управления T будет выбрано из условия

$$r(T) = |x_1^1|. \quad (3.5)$$

Определим функцию $r(T)$ из (3.4). Для этого подсчитаем максимальное значение модуля функции $g_1(t, T)$ (3.3) по $t \in [0, T]$.

Из (3.3) следует, что квадратичная функция $g_1(t, T)$ на оси t максимального значения достигает в точке $t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{1}{kR^{-1}}$. При этом имеются следующие два случая.

1) Если $t^* = \frac{T}{2} - \frac{1}{kR^{-1}} < 0$, т.е. $0 < T \leq \frac{2}{kR^{-1}}$, то функция $g_1(t, T)$ монотонно убывает на $[0, T]$, принимая на концах этого интервала максимальное и минимальное значения $g_1(0, T) = \frac{6}{T^2}$, $g_1(T, T) = -\frac{6}{T^2}$ соответственно. Следовательно,

$$r(T) = \left[\max_{t \in [0, T]} |g_1(t, T)| \right]^{-1} = \frac{T^2}{6}, \quad 0 < T \leq \frac{2}{kR^{-1}}. \quad (3.6)$$

2) Если $0 \leq t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{1}{kR^{-1}} < \frac{T}{2}$, т.е. $\frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty$, то на интервале $[0, T]$ максимальное значение функции $g_1(t, T)$ равно $g_1(t_1^*, T) = \frac{3kR^{-1}}{2T} + \frac{6}{T^3 kR^{-1}}$, а минимальное – $g_1(T, T) = -\frac{6}{T^2}$. При этом $|g_1(t_1^*, T)| > |g_1(T, T)|$, когда $T \in \left(\frac{2}{kR^{-1}}, \infty\right)$, и $|g_1(t_1^*, T)| = |g_1(T, T)|$, когда $T = T^* = \frac{2}{kR^{-1}}$. Следовательно,

$$r(T) = \left[\max_{t \in [0, T]} |g_1(t, T)| \right]^{-1} = \frac{2T^3 kR^{-1}}{3(kR^{-1})^2 T^2 + 12}, \quad \frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty. \quad (3.7)$$

В соответствии с рассмотренными случаями функцию $r(T)$ можно задавать таким образом:

$$r(T) = \begin{cases} r_1(T), & 0 < T \leq \frac{2}{kR^{-1}} = T^*, \\ r_2(T), & T^* = \frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty, \end{cases} \quad (3.8)$$

где

$$r_1(T) = \frac{T^2}{6}, \quad r_2(T) = \frac{2T^3 kR^{-1}}{3(kR^{-1})^2 T^2 + 12}. \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует, что функция $r(T)$ непрерывна и монотонно возрастает от 0 до ∞ при изменении T от 0 до ∞ . Следовательно, уравнение (3.5), записанное в виде

$$|x^1| = \begin{cases} r_1(T), & 0 < T \leq \frac{2}{kR^{-1}} = T^*, \\ r_2(T), & T^* = \frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty, \end{cases} \quad (3.10)$$

при любом $|x_1^1|$ имеет единственное решение.

Таким образом, для любого значения $|x_1^1| \neq 0$ искомое управление $v(t)$ (2.12), удовлетворяющее ограничению (1.11) и переводящее систему (1.10) из начального состояния покоя (1.12) в заданное конечное состояние покоя (3.1), можно построить, если сначала определить время T из условия (3.10) и подставить найденное в формулу (2.12) для управления v .

Остановимся на способе решения уравнения (3.10). Разобьем весь полубесконечный интервал времени T на две части: $(0, T^*]$, $[T^*, \infty)$, $T^* = \frac{2}{kR^{-1}}$, которым соответствуют два интервала изменения $|x_1^1|$: $(0, |x_1^1|^*]$, $[|x_1^1|^*, \infty)$, где значение $|x_1^1|^* = \frac{2}{3(kR^{-1})^2}$ определяется подстановкой $T = T^*$ в

правую часть одного из уравнений (3.10). После этого для заданного значения $|x_1^1|$ путем сравнения $|x^1|$ с $|x_1^1|^*$ определяем, какому из двух отрезков $(0, |x_1^1|^*)$ или $[|x_1^1|^*, \infty)$ принадлежит $|x^1|$. Если $|x^1| \in (0, |x_1^1|^*)$, то искомое время $T \in (0, T^*)$ определяется из первого уравнения (3.10) и равно

$$T = \sqrt{6|x^1|}, \quad |x^1| \leq |x_1^1|^*. \quad (3.11)$$

А если $|x^1| \in [|x_1^1|^*, \infty)$, то искомое время $T \in [T^*, \infty)$ определяется из второго уравнения (3.10) будучи приведенным к кубическому уравнению

$$aT^3 + bT^2 + d = 0, \quad a = 2kR^{-1} > 0, \quad b = -3(kR^{-1})^2 |x_1^1| < 0, \quad d = -12|x_1^1| < 0. \quad (3.12)$$

Так как дискриминант уравнения (3.12) отрицательный, то (3.12) имеет один действительный положительный корень, который определяется по формуле Кардано

$$T = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{b}{3a}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0, \quad (3.13)$$

$$p = -\frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a}, \quad \frac{b}{3a} = -\frac{kR^{-1}|x_1^1|}{2},$$

$$p = -\frac{3(kR^{-1})^2 |x_1^1|^2}{4} < 0, \quad q = -\frac{(kR^{-1})^4 |x_1^1|^3 + 24|x_1^1|}{4kR^{-1}} < 0.$$

Перейдя путем (1.9), (2.12), (3.2) к исходным переменным, для управления получим следующее выражение:

$$u = -\frac{6kR^{-1}}{T^3} x_1^1 t^2 + \left(\frac{6kR^{-1}}{T^2} - \frac{12}{T^3}\right) x_1^1 t + \frac{6}{T^2} x_1^1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

в котором время T определяется по формулам (3.11), (3.13) согласно вышеизложенному алгоритму.

В. Рассмотрим теперь общий случай (1.13). По аналогии со случаем А интегрируя один раз уравнение (1.10) с начальными условиями (1.11) при управлении (2.12), получим

$$x_2 = \left(-\frac{6}{T^3} t^2 + \frac{6}{T^2} t\right) x_1^1 + \left(\frac{3}{T^2} t^2 - \frac{2}{T} t\right) x_2^1. \quad (3.14)$$

Учитывая (2.12), (3.14), ограничение (1.11) запишем в виде

$$|g_1(t, T)x_1^1 + g_2(t, T)x_2^1| \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad (3.15)$$

где

$$g_2(t, T) = \frac{3}{T^2} kR^{-1} t^2 + \left(\frac{6}{T^2} - \frac{2}{T} kR^{-1}\right) t - \frac{2}{T}, \quad (3.16)$$

а $g_1(t, T)$ задается формулой (3.3).

Проведем оценки сверху левой части неравенства (3.15):

$$|g_1(t,T)x_1^1 + g_2(t,T)x_2^1| \leq |g_1(t,T)||x_1^1| + |g_2(t,T)||x_2^1|, \quad (3.17)$$

Оценим сверху максимум по $t \in [0, T]$ только входящей в (3.17) абсолютной величины функции $g_2(t, T)$, так как оценка сверху максимума функции $g_1(t, T)$, $t \in [0, T]$, уже проведена: А1), 2).

Из (3.16) следует, что квадратичная функция $g_2(t, T)$ на оси t экстремального значения достигает в точке $t_2^* = \frac{T^2}{3} - \frac{T}{kR^{-1}}$. При этом возможны два случая.

1) Если $t_2^* = \frac{T^2}{3} - \frac{T}{kR^{-1}} < 0$, т.е. $0 < T < \frac{3}{kR^{-1}}$, то функция $g_2(t, T)$ монотонно возрастает на $[0, T]$, принимая на концах этого интервала минимальное и максимальное значения $g_2(0, T) = -\frac{2}{T}$, $g_2(T, T) = kR^{-1} + \frac{4}{T}$ соответственно и поэтому

$$\max_{t \in [0, T]} |g_2(t, T)| = kR^{-1} + \frac{4}{T}, \quad 0 < T < \frac{3}{kR^{-1}}. \quad (3.18)$$

2) Если $0 \leq t_2^* = \frac{T^2}{3} - \frac{T}{kR^{-1}}$, т.е. $\frac{3}{kR^{-1}} \leq T < \infty$, то $\max_{t \in [0, T]} g_2(t, T) = g_2(T, T) = kR^{-1} + \frac{4}{T} > 0$, а

$$\min_{t \in [0, T]} g_2(t, T) = g_2(t_2^*, T) = \frac{kR^{-1}}{3} T^2 - 2(1 + \frac{kR^{-1}}{3})T - 2(1 + \frac{3}{kR^{-1}}) \frac{1}{T} + 4 + \frac{3}{kR^{-1}} < 0.$$

Вычисления с учетом определенных соотношений между параметрами k и R , свойственных для многих манипуляционных роботов [1], показывают, что $|g_2(t_2^*, T)| < g_2(T, T)$. Следовательно, и в этом случае

$$\max_{t \in [0, T]} |g_2(t, T)| = kR^{-1} + \frac{4}{T}, \quad \frac{3}{kR^{-1}} \leq T < \infty. \quad (3.19)$$

Исходя из (3.6), (3.7), (3.18), (3.19) оценим сверху правую часть неравенства (3.17) и представим неравенство (3.15) в виде

$$|g_1(t, T)||x_1^1| + |g_2(t, T)||x_2^1| \leq q_1(T)|x_1^1| + (kR^{-1} + \frac{4}{T})|x_2^1| \leq 1, \quad 0 < T < \infty, \quad (3.20)$$

где

$$q_1(T) = \begin{cases} \frac{6}{T^2}, & 0 < T < \frac{2}{kR^{-1}}, \\ \frac{3(kR^{-1})^2 T^2 + 12}{2T^3 kR^{-1}}, & \frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty. \end{cases} \quad (3.21)$$

Правое соотношение в (3.20) рассмотрим в случае равенства, записанного в виде

$$Q(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = 1 - kR^{-1}|x_2^1|, \quad 0 < T < \infty, \quad (3.22)$$

где

$$Q(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = \begin{cases} \frac{6}{T^2}|x_1^1| + \frac{4}{T}|x_2^1|, & 0 < T \leq \frac{2}{kR^{-1}} = T^*, \\ \frac{6}{kR^{-1}}|x_1^1| \frac{1}{T^3} + \left(\frac{3kR^{-1}}{2}|x_1^1| + 4|x_2^1| \right) \frac{1}{T}, & \frac{2}{kR^{-1}} \leq T < \infty. \end{cases} \quad (3.23)$$

Из положительности левой части (3.22) следует, что $|x_2^1| < k^{-1}R$. Далее, из (3.23) следует, что функция $Q(T, |x_1^1|, |x_2^1|)$ по T непрерывна и монотонно убывает от ∞ до 0 при изменении T от 0 до ∞ . Следовательно, неравенство (3.20) будет выполнено при всех $t \in [0, T]$, если время окончания процесса управления T будет выбрано из условия (3.22) для любой пары $(|x_1^1|, |x_2^1|) \in X$, где

$$X = \{(|x_1^1|, |x_2^1|) : |x_1^1| < \infty, |x_2^1| < k^{-1}R\}. \quad (3.24)$$

Таким образом, для любой пары $(|x_1^1|, |x_2^1|) \in X$ искомое управление $v(t)$ (2.12), удовлетворяющее ограничению (1.11) и переводящее систему (1.10) из начального состояния покоя (1.12) в заданное конечное состояние (1.13), можно построить, если сначала определить время T из условия (3.22) и подставить найденное в формулу (2.12) для управления v .

Перейдем к решению уравнения (3.22). Рассмотрим следующие два интервала: $(0, T^*]$ и $[T^*, \infty)$, $T^* = \frac{2}{kR^{-1}}$, которым соответствуют две области изменения пары $(|x_1^1|, |x_2^1|)$:

$$\begin{aligned} X_- &= \{(|x_1^1|, |x_2^1|) : 1.5(kR^{-1})^2|x_1^1| + 3kR^{-1}|x_2^1| \leq 1; |x_1^1| < \infty, |x_2^1| < k^{-1}R\}, \\ X_+ &= \{(|x_1^1|, |x_2^1|) : 1.5(kR^{-1})^2|x_1^1| + 3kR^{-1}|x_2^1| \geq 1; |x_1^1| < \infty, |x_2^1| < k^{-1}R\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если $(|x_1^1|, |x_2^1|) \in X_-$, то искомое время $T \in (0, T^*]$ следует определить из первого уравнения (3.22), (3.23), приведенного к квадратному уравнению

$$(1 - kR^{-1}|x_2^1|)T^2 - 4|x_2^1|T - 6|x_1^1| = 0 \quad (3.26)$$

и имеющего на интервале $(0, T^*]$ единственное решение

$$T = \left(2|x_2^1| + \sqrt{4|x_2^1|^2 + 6(1 - kR^{-1}|x_2^1|)|x_1^1|} \right) \cdot (1 - kR^{-1}|x_2^1|)^{-1}. \quad (3.27)$$

Если $(|x_1^1|, |x_2^1|) \in X_+$, то искомое время $T \in [T^*, \infty)$ и определяется из второго уравнения (3.22), (3.23), приведенного к кубическому уравнению (3.12) с коэффициентами

$$a = 2kR^{-1}(1 - kR^{-1})|x_2^1| > 0, \quad b = -(3kR^{-1}|x_1^1| + 8|x_2^1|)kR^{-1} < 0, \quad d = -12|x_1^1| < 0. \quad (3.28)$$

Так как дискриминант уравнения (3.12), (3.28) также отрицательный, то оно имеет один действительный положительный корень, который определяется с помощью формулы Кардано (3.13) с учетом коэффициентов (3.28).

Переходя с помощью (1.9), (2.12), (3.14) к исходным переменным, управляющую функцию $u(t)$ в каждый момент t можно вычислить по формуле

$$u(t) = \left(\frac{3kR^{-1}x_2^1}{T^2} - \frac{6kR^{-1}x_1^1}{T^3} \right) t^2 + \left[\frac{6x_2^1}{T^2} - \frac{12x_1^1}{T^3} + \left(\frac{6x_1^1}{T^2} - \frac{2x_2^1}{T} \right) kR^{-1} \right] t + \frac{6x_1^1}{T^2} - \frac{2x_2^1}{T}$$

в которой время T определяется с помощью (3.13), (3.27).

Заключение. Путем использования обобщенного метода Калмана в явном виде получены формулы, позволяющие вычислить время и соответствующее управление, которые обеспечивают перемещение электромеханической системы, моделирующей динамику однозвенного манипулятора, из начального состояния покоя в произвольное конечное состояние покоя за конечное время и гарантируют ненарушения заданного ограничения на управление в процессе перехода.

Получено также условие, которое на фазовой плоскости системы образует область конечных состояний, приход в которые происходит за конечное время с соблюдением заданного ограничения на управление.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного гранта 15Т-2С026.

¹Институт механики НАН РА
e-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

²Ереванский государственный университет
e-mail: vavetisyan@ysu.am

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. В. Аветисян

О построении ограниченного управления электромеханической системой

Рассматривается задача построения ограниченного управления для электромеханической системы с одной степенью свободы. Применяя обобщенную схему построения управления Калмана, распространяемую на случай наличия ограничения на управление, в явном виде найден закон управления, позволяющий перевести рассматриваемую систему за конечное время из заданного состояния покоя в произвольное конечное состояние покоя. Получено также условие, которое на фазовой плоскости системы образует определенную область конечных состояний, приведение системы в которые по предложенному способу происходит за конечное время с ненарушением заданного ограничения на управление.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Վ. Ավետիսյան

**Էլեկտրամեխանիկական համակարգի սահմանափակ
դեկլարման կառուցման մասին**

Դիտարկվում է ազատության մեկ աստիճանով օժտված էլեկտրամեխանիկական համակարգի համար սահմանափակ դեկլարում կառուցելու խնդիր: Ղեկավարման ֆունկցիայի վրա դրված սահմանափակման առկայության դեպքում, կիրառելով դեկլարման կառուցելու Կալմանի ընդհանրացված սխեման, բացահայտ տեսքով գտնվել է դիտարկվող համակարգը վերջավոր ժամանակում տրված հանգստի վիճակից կամայական վերջնական հանգստի վիճակի տեղափոխումն ապահովող դեկլարման օրենք: Ստացվել է նաև պայման, որը համակարգի ֆազային հարթության մեջ կազմում է վերջնական վիճակների որոշակի տիրույթ: Ցույց է տրվում, որ դեկլարման ֆունկցիայի վրա դրված սահմանափակման դեպքում առաջարկված եղանակով համակարգի բերումը այդ ֆազային տիրույթ տեղի է ունենում վերջավոր ժամանակում:

**Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan,
V. V. Avetisyan**

**On the Formulation of a Limited Control of Electromechanical
System**

The task of formulating a limited control for the electromechanical systems with one degree of freedom is considered. By applying the generalized scheme for constructing the Kalman controllability, a control law in explicit form is found that makes it possible to transfer the system under consideration from a given state of rest to an arbitrary finite state of rest in a finite time. A condition that forms a definite region of final states on the phase plane of the system is obtained. It is shown that the reducing of system by the proposed method in this phase region occurs in a finite time without a violation of the specified restrictions on the office.

Литература

1. *Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G.* Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. Boca Raton: CRC Press, 1994. 268 p.
2. *Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
3. *Аветисян В. В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 48-55.
4. *Аветисян В. В.* - Изв. НАН РА. Механика. 2002, Т. 55. №1. С. 68-74.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. Наука. 1968. 476 с.

Наконец, для полного замыкания системы уравнений с учетом «ортотропии» электропроводности «изотропного», «однородного» тела имеем новое представление вектора плотности электрического тока \bar{J}

$$\bar{J} = \sigma(1 - \alpha \operatorname{div} \bar{u}) \left(\bar{E} + \frac{\mu}{c} \bar{v} \times \bar{B} \right) + \rho_e \bar{v}, \quad (1.3)$$

где μ – магнитная проницаемость, σ – коэффициент электропроводности в условиях отсутствия деформации, ϵ – диэлектрическая проницаемость, \bar{v} – вектор скорости перемещения частиц тела \bar{u} , α – новая постоянная, характеризующая влияние деформированного состояния тела.

Рассматривая приведенные выше уравнения (1.1)-(1.3), можно констатировать, что здесь имеет место нечто новое – ортотропная электропроводность деформационного характера. Для полного замыкания системы (всех уравнений) приведем также соответствующие уравнения движения [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + R_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 = x, y, z, \\ \sigma_{ij} &= 2G \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность материала, $G = E/2(1 + \nu)$, $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ – постоянные Ламе, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, \bar{R}_i – объемная сила – сила Лоренца, которая при наличии электрического тока и электрического заряда имеет вид

$$\bar{R} = \frac{\mu}{c} (\bar{J} + \bar{B}) + \rho_e \bar{E}. \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим одномерную задачу. Одномерные уравнения электродинамики при пренебрежении токами смещения и членами типа $\rho_e \bar{v}$, что допустимо для хорошо проводящих материалов, при учете влияния деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 &= 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} J_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} J_3, \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t}, \Rightarrow B_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом материальные уравнения (1.3) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) E_1 \Rightarrow E_1 = 0, \\ J_2 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(E_2 - \frac{\mu}{c} v_1 H_3 \right), \\ J_3 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(E_3 + \frac{\mu}{c} v_1 H_2 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения движения (1.4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{c} (J_2 B_3 - J_3 B_2) \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наиболее простая одномерная задача – одномерная задача при наличии следующего электрического поля (рис. 1):

$$E_2 = E_{20} = \text{const}, \quad E_{10} = 0, \quad E_{30} = 0. \quad (2.4)$$

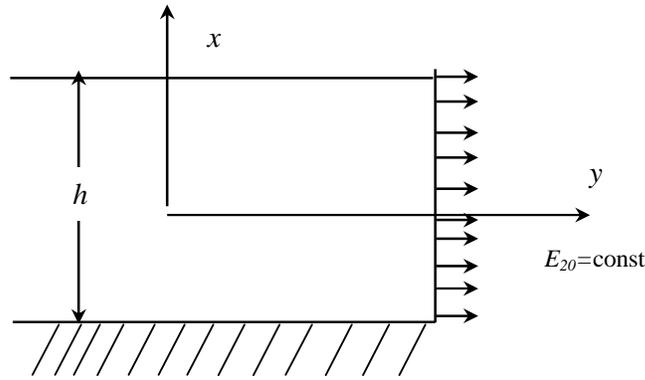


Рис. 1.

Из (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{\partial H_{30}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(1 - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) E_{20} \quad H_{20} = 0, \quad H_{30} = 0. \quad (2.5)$$

Ввиду симметричности относительно плоскости $x=0$ следует

$$u_{30} = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.5) с учетом (2.6) следует

$$H_{30} = -\frac{4\pi\sigma}{c} (x - \alpha u_1) = E_{20}. \quad (2.7)$$

Подставляя H_{30} из (2.7) в первое уравнение (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \left(x - \alpha u_1 - \alpha x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \quad (2.8)$$

где

$$A = \frac{4\pi\sigma^2 E_{20}^2}{c^2 (\lambda + 2G)}, \quad (2.9)$$

Таким образом, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами с нелинейным членом $u_1 du_1/dx$.

Задачу эту можно несколько упростить в предположении, что толщина рассматриваемого слоя мала и рассматриваются лишь малые упругие перемещения.

В этом случае исходное уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_\alpha u_1 = A_x \quad (2.10)$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{при } x=0, u_1=0; \text{ при } x=\frac{h}{2}, \sigma_{xx}=0. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид

$$u_1 = c_1 \sin \sqrt{A\alpha} x + c_2 \cos \sqrt{A\alpha} x + \frac{x}{\alpha}. \quad (2.12)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.11), из (2.12)

$$u_1 = -\frac{\sin \sqrt{A\alpha} x}{\alpha \sqrt{A\alpha} \cos \sqrt{A\alpha} \frac{h}{2}} + \frac{x}{\alpha}, \quad (2.13)$$

получим

$$u_1(0,5h) = -\frac{1}{\alpha \sqrt{A\alpha}} \operatorname{tg} \sqrt{A\alpha} \frac{h}{2} + \frac{h}{2\alpha}. \quad (2.14)$$

Безусловно, уравнение (2.8) можно решать, не прибегая к вышеприведенным упрощениям (не пренебрегая нелинейным членом и членом с переменным коэффициентом), при помощи метода Бубнова –Галеркина. Тогда можно получить результаты для достаточно широких слоев (для достаточно больших h). При этом эффекты изменения коэффициента электропроводности от напряженно-деформируемого состояния будут более существенными.

3. В работах [1, 2] приводятся результаты экспериментального исследования токонесущих проводников в случае, когда проводник находится под действием поперечно сжимающих нагрузок. В этом случае граничные условия (условия свободной границы) (2.11) несколько преобразуются и принимают вид

$$\text{при } x=0 \quad u_1=0; \text{ при } x=\pm \frac{h}{2} \quad \sigma_{xx} = \mp q. \quad (3.1)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), для упругого перемещения получим

$$u_1 = -\left(\frac{q}{\lambda + 2G} + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\sin \sqrt{A\alpha} x}{\sqrt{A\alpha} \cos\left(\sqrt{A\alpha} \frac{h}{2}\right)} + \frac{x}{\alpha}. \quad (3.2)$$

4. Рассмотрим случай, когда одна из плоскостей рассматриваемого слоя $x = -\frac{h}{2}$ закреплена, а другая $x = \frac{h}{2}$ равномерно нагружена сжимающим усилием q_0 (рис. 2).

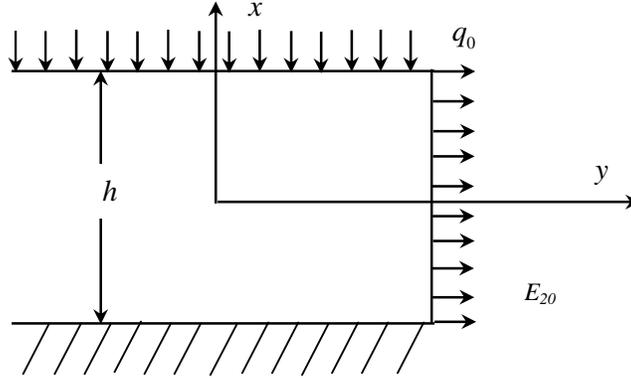


Рис. 2.

В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = -\frac{h}{2}, \quad u_1 = 0, \quad (4.1)$$

$$\text{при } x = \frac{h}{2}, \quad \sigma_{xx} = -q_0,$$

А для напряженности магнитного поля имеем

$$H_{30} = -\frac{4\pi\sigma}{c} [x - \alpha(u_1 - u_0)] E_0, \quad (4.2)$$

где

$$u_0 = u_1(0). \quad (4.3)$$

Согласно (4.2) уравнение статики упругого слоя (2.8) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = A \left(1 - \alpha \frac{du_1}{dx} \right) [x - \alpha(u_1 - u_0)]. \quad (4.4)$$

Пренебрегая, как и раньше, в уравнении (4.4) нелинейным членом и членом с переменным коэффициентом, получим

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + A\alpha u_0 \frac{du_1}{dx} + A\alpha u = A(\alpha u_1 + x). \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.5) имеет вид

$$u_1(x) = e^{-\varepsilon x} (c_1 \sin px + c_2 \cos px) + \alpha^{-1} x, \quad (4.6)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются согласно граничным условиям (4.1), а новые обозначения ε и p имеют вид

$$\varepsilon = \frac{u_0 A \alpha}{2}, \quad p = A \alpha \sqrt{1 - 0,25 u_0^2}. \quad (4.7)$$

Здесь следует иметь в виду, что в p входит неизвестное пока u_0 . При этом из (4.6) следует, что $u_1(0) = u_0 = c_0$. Т. е. после определения c_2 необ-

ходимо еще определить и u_0 . В общем случае для определения u_0 получается сложное трансцендентное уравнение.

Для определения u_0 , вообще говоря, можно воспользоваться приближением для тонкого слоя, т.е. следующими неравенствами:

$$\left(\frac{Ph}{2}\right)^2 \ll 1, \quad \frac{\epsilon h}{2} \ll 1. \quad (4.8)$$

С учетом этого приближения, удовлетворяя граничным условиям (4.1), получим

$$c_1 = -\frac{1}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{h}{22}(1-p). \quad (4.9)$$

С учетом (4.7) и равенства $c_2 = u_0$ для определения u_0 получим следующее алгебраическое уравнение:

$$2\alpha \frac{u_0}{h} = 1 - A\alpha\sqrt{1 - 0,25u_0^2}, \quad (4.10)$$

откуда с точностью принятого приближения (4.8) для u_0 получим уравнение

$$u_0 \approx \frac{h}{2\alpha}. \quad (4.11)$$

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

О проблеме электромагнитоупругости тел с «ортотропной» электропроводностью

Исследуется влияние изменения объемного расширения металлических материалов на величину удельного электрического сопротивления. Приводятся решения задач для токопроводов с учетом зависимости электропроводности от изменения поперечного сечения.

Ակադեմիկոս Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան

«Օրտոտրոպ» էլեկտրահաղորդչությամբ մարմնի էլեկտրամագնիսաառաձգականության հիմնախնդրի մասին

Հետազոտված է մետաղական նյութերի ծավալային ընդարձակման փոփոխության ազդեցությունը էլեկտրական տեսակարար դիմադրության մեծության վրա: Բերվում են խնդիրների լուծումներ հոսանքատարների համար՝ հաշվի առնելով հաղորդականության կախվածությունը ընդլայնական կտրվածքից:

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan

**On the Electromagnetoelasticity Problem of the Body with
“Orthotropic” Electroconductivity**

The influence of the volume divergence changes of the metal materials on the specific electrical resistance value is investigated. The solution of the current carrying problems with the account of the electroconductivity dependence on the cross section is given.

Литература

1. *Улыбин А. В.* – Инженерно-строительный журнал. 2010. №7. С.4-9.
2. *Созыкин С. А., Бескачко В. П.* – Вестник Южно-Уральского ун-ета. Серия матем., мех., физ. 2011. Вып. 5.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М. Наука. 1976. 388 с.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Колебание и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 123 с.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977 288 с.

МЕХАНИКА

УДК 517.95

О. А. Матевосян

**О задаче Дирихле–Робена для системы
 теории упругости**

(Представлено иностранным членом НАН РА А. П. Сейраняном 3/IV 2017)

Ключевые слова: *система теории упругости, задача Дирихле–Робена, пространство Соболева, весовой интеграл энергии.*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), $\Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega}$ – замыкание Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\bar{\Omega}$.

В Ω рассматривается стационарная линейная система теории упругости

$$Lu \equiv (Lu)_i = \sum_{j,k,h=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до n . Предполагается, что коэффициенты постоянные и выполнены условия:

$$a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{ih}^{kj}, \quad \lambda_1 |\xi|^2 \leq a_{kh}^{ij} \xi_k^i \xi_h^j \leq \lambda_2 |\xi|^2,$$

где ξ – произвольная симметрическая матрица $\{\xi_k^i\}$, $\xi_k^i = \xi_i^k$, $|\xi|^2 = \xi_k^i \xi_k^i$, λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

Для системы (1) будем рассматривать следующую краевую задачу: найти вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую системе (1) в Ω и однородным граничным условиям Дирихле–Робена

$$u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad (\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\Gamma_2} = 0, \quad (2)$$

где $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $mes_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u))$,
 $\sigma_i(u) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} v_k$, $i = 1, \dots, n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – единичный вектор внешней
нормали к $\partial\Omega$, $\tau(x)$ – бесконечно гладкая функция с равномерно ограни-
ченными производными на $\partial\Omega$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$.

Краевые задачи для системы теории упругости в ограниченных обла-
стях достаточно полно изучены. Изложение основных фактов этой теории
можно найти в монографии [1]. В [2, 3] для ограниченных и широкого
класса неограниченных областей установлены обобщения неравенств Кор-
на и Харди, с помощью которых исследованы основные краевые задачи
для системы теории упругости.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует
дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности.
Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла
Дирихле $D(u, \Omega)$ или интеграла энергии $E(u, \Omega)$, либо условие на характер
убывания модуля решения при $|x| \rightarrow \infty$.

В данной заметке изучаются свойства обобщенных решений задачи
Дирихле–Робена для системы теории упругости в Ω с условием ограни-
ченности интеграла энергии с весом:

$$E_a(u, \Omega) < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

При том же условии на поведение решения на бесконечности в раз-
ных классах неограниченных областей автором [4 - 6] изучены вопросы
единственности и найдены размерности пространства решений краевых
задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармони-
ческого) уравнения.

Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Кор-
на и Харди [2, 3], в данной статье удалось получить критерий единствен-
ности решений задачи Дирихле–Робена для системы теории упругости.

Введем обозначения. $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифферен-
цируемых функций в Ω и имеющих компактный носитель в Ω ;
 $H^1(\Omega, \Gamma)$, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$, – пространство функций, полученное пополнением мно-
жества функций $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ , по норме

$$\|u(x); H^1(\Omega, \Gamma)\| = \left(\int_{\Omega} \left(|u(x)|^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Если $\Gamma = \emptyset$, то $H^1(\Omega, \Gamma)$ будем обозначать $H^1(\Omega)$.

$\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по
норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}_{loc}^1(\Omega)$ – пространство функций в
 Ω , полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u(x); H^1(G_0)\|$,
где $G_0 \subset \bar{\Omega}$ – произвольный компакт.

Положим $\partial^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Обозначим через

$$D(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad D_a(u, \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\nabla u(x)|^2 dx, \quad |\nabla u(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2,$$

$$E(u, \Omega) = \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \quad E_a(u, \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |e(u)|^2 dx, \quad |e(u)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2.$$

Определение 1. Обобщенным решением системы (1) в Ω будем называть вектор-функцию $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ такую, что для всякой вектор-функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} a_{ij}^{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} dx = 0.$$

Лемма 1. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω , удовлетворяющее условию $E_a(u, \Omega) < \infty$. Тогда

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord} P(x) \leq m = \max\{1, 1 - n/2 - a/2\}$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение системы (1), $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$, $\beta \geq 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка:

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta}(a, u) |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}$$

для любого мультииндекса γ , $C_{\gamma\beta} = \text{const}$.

Замечание. Как известно [7], существует фундаментальное решение $\Gamma(x)$, для которого при $n > 2$ имеет место следующая оценка:

$$|\partial^\alpha \Gamma(x)| \leq C(\alpha) |x|^{2-n-|\alpha|}, \quad C(\alpha) = \text{const}.$$

В случае $n=2$ фундаментальное решение представляется в виде $\Gamma(x) = S(x) \ln|x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ квадратные матрицы порядка 2, элементы которых однородные функции порядка нуль [8].

Доказательство леммы 1. Рассмотрим вектор-функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \geq 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$. Продолжим $v(x)$ на \mathbb{R}^n , полагая $v(x) = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Тогда вектор-функция $v(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет системе

$$Lv(x) = F_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $F_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } F_i \subset \{x : |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $E_a(v, \mathbb{R}^n) < \infty$.

Если $a+n \neq 0$, то из неравенства Корна [2; § 3, неравенство (1)] следует, что $v(x) = w(x) + Ax$, где A – постоянная кососимметрическая матрица и $w(x)$ такова, что $D_a(w(x), \Omega) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [9], поскольку она основывается на лемме 2 из [9], в которой никаких ограничений на знак σ' нет. Следовательно, разложение

$$w(x) = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < \alpha \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + w^\beta(x)$$

справедливо для любого a , где $P_0(x)$ – многочлен, $\text{ord} P_0(x) \leq \max\{1, 1-n/2-a/2\}$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1-n/2+a/2$ и

$$|\partial^\gamma w^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Отсюда и из определения функции $v(x)$ следует равенство (3) с $P(x) = P_0(x) + Ax$.

Пусть теперь $a+n=0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$E_{-n-\varepsilon}(v, \mathbb{R}^n) \leq E_{-n}(v, \mathbb{R}^n) < \infty.$$

По неравенству Корна [2; § 3, неравенство (1)], существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_{-n-\varepsilon}(v - Ax, \mathbb{R}^n) \leq C E_{-n-\varepsilon}(v, \mathbb{R}^n) < \infty,$$

где постоянная C не зависит от $v(x)$. Следовательно, используя теорему 1 из [9], имеем

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < \alpha \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

причем $P_0(x)$ – многочлен, $\text{ord} P_0(x) \leq 1$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1-n/2+a/2$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Таким образом,

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < \alpha \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

откуда следует утверждение леммы при $a = -n$.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω , удовлетворяющее условию $E_a(u, \Omega) < \infty$ для некоторого $a \geq 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ имеет место равенство (3) с приведенной выше оценкой для $u^\beta(x)$, причем $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

Лемма 2 является прямым следствием леммы 1.

Определение 2. Обобщенным решением смешанной задачи Дирихле–Робена (1), (2) будем называть вектор-функцию $u(x)$ такую, что

$u \in \overset{\circ}{H}_{loc}^1(\Omega, \Gamma_1)$, и для любой вектор-функции $\varphi \in \overset{\circ}{H}_{loc}^1(\Omega, \Gamma_1) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx + \int_{\Gamma_2} \tau u \varphi ds = 0.$$

Теорема 1. Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием $E(u, \Omega) < \infty$ имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых решений, если $n \geq 3$, и одно линейно независимое решение, если $n = 2$.

Теорема 2. Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием $E_a(u, \Omega) < \infty$, имеет:

- i) только тривиальное решение при $n \leq a < \infty$;
- ii) $n(n-1)/2$ линейно независимых решений при $n-2 \leq a < n$;
- iii) $n(n+1)/2$ линейно независимых решений при $-n \leq a < n-2$.

Теорема 3. Задача Дирихле–Робена (1), (2) с условием $E_a(u, \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r-n \leq a < -2r-n+2$, где

$$k(r, n) = \begin{cases} n \left(\binom{r+n-1}{n-1} + \binom{r+n-2}{n-1} \right), & \text{если } n > 2 \\ 4r+2, & \text{если } n = 2 \end{cases}$$

причем $r > 0$, $k(0, n) = n$; $\binom{r}{s}$ – число сочетаний из r по s , $\binom{r}{s} = 0$, если $s > r$.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»,
 Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН;
 Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
 e-mail: hmatevossian@graduate.org

О. А. Матевосян

О задаче Дирихле–Робена для системы теории упругости

Изучаются свойства обобщенных решений смешанной задачи Дирихле–Робена для линейной системы теории упругости во внешности компактного множества в предположении, что обобщенные решения этой задачи обладают конечным интегралом энергии с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a получен критерий единственности решений смешанной задачи Дирихле–Робена, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этой же задачи.

Հ. Ա. Մաթևոսյան

Դիրիխլե–Ռոբենի խնդրի վերաբերյալ՝ առաձգականության տեսության համակարգի համար

Ուսումնասիրվել են Դիրիխլե–Ռոբենի խառը խնդրի ընդհանրացված լուծումների հատկությունները կոմպակտ բազմության արտաքինում, ենթադրությամբ, որ այդ խնդրի ընդհանրացված լուծումներն ունեն էներգիայի վերջնական ինտեգրալ՝

$|x|^a$. քաշով: Ստացվել է Գիրիլիկե–Ռոբերենի խառը խնդրի լուծումների միակերպության չափանիշը՝ նայած a պարամետրի արժեքին, և գտնվել են ճշգրիտ հավասարումներ նույն խնդրի լուծումների տարածության չափականության հաշվարկման համար:

H. A. Matevossian

On the Dirichlet–Robin Problem for the Elasticity System

The properties of generalized solutions of the mixed Dirichlet–Robin problem for the linear system of elasticity theory in the exterior of a compact set are studied under the assumption that the energy integral with weight $|x|^a$ is finite for such solutions. Depending on the value of the parameter a , a uniqueness criterion is established for solutions of the mixed Dirichlet–Robin problem, and exact formulae are obtained for the dimension of the space of solutions.

Литература

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М. Мир. 1974. 159 с.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* - УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
3. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* - Rend. Mat. Appl. Serie VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
4. *Matevosyan O. A.* - Russian J. Math. Physics. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
5. *Матевосян О. А.* - Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
6. *Matevossian H. A.* - Russian J. Math. Physics. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
7. *Бучукури Т. В., Гегелия Т. Г.* - Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1556–1565.
8. *Лопатинский Я. Б.* Теория общих граничных задач. Избранные труды. Киев:Наукова думка. 1984. 316 с.
9. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* - Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. s75–99.

УДК 539.3

А. А. Саркисян¹, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян¹,
 Л. И. Маневич², С. А. Тиман²

Модель ортотропной тонкой пластинки по моментной теории со стесненным вращением с приложениями к полимерным материалам

(Представлено 6/IV 2017)

Ключевые слова: модель, тонкая пластинка, моментная теория, полимеры.

Введение. Задача о количественной связи макроскопических механических свойств твёрдых тел с параметрами их микроструктуры, является основной в структурной механике [1, 2]. Соответственно, одной из главных задач микроскопической теории является вывод феноменологической (континуальной) теории [1]. В работе [3] на основе молекулярной модели кристалла полиэтилена построена трехмерная континуальная модель этого кристалла. В работе [4] показано, что эта модель соответствует моментной (микрополярной, несимметричной) теории упругости со стесненным вращением для ортотропного тела. В работах [5, 6] определены все упругие постоянные континуальной моментной теории упругости кристаллического полиэтилена.

В данной работе на основе континуальной моментной теории полиэтилена построена математическая модель тонкой пластинки из такого материала.

1. Постановка задачи. Основные уравнения феноменологической моментной теории упругости со стесненным вращением, наиболее точно описывающие упругие деформации кристалла полиэтилена, имеют вид [4]:

Уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} \right), & \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} \right), & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} + \sigma_{31} - \sigma_{13} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \right), & \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Определяющие (физические) соотношения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, & \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{\sigma_{13} + \sigma_{31}}{2c_{13}^{13}}, \\
 \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33}, & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{\sigma_{23} + \sigma_{32}}{2c_{23}^{23}}, \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2c_{12}^{12}}, \\
 \chi_{11} &= \frac{\mu_{11}}{2\gamma}, & \chi_{22} &= \frac{\mu_{22}}{2\gamma}, & \chi_{33} &= \frac{\mu_{33}}{2\gamma}, \\
 \chi_{21} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{21} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{12}, & \chi_{12} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{12} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{21}, \\
 \chi_{31} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{31} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{13}, & \chi_{13} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{13} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{31}, \\
 \chi_{32} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{32} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{23}, & \chi_{23} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{23} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{32}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{12} &= \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \\
 \chi_{11} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, & \chi_{22} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, & \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}, & \chi_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, & \chi_{21} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2},
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, & \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, & \bar{\omega} &= \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V}, \\
 \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right), & \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right), & \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь (V_1, V_2, V_3) – компоненты вектора перемещения; $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – компоненты вектора вращения; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ – компоненты тензора деформации; $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{33}, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{13}, \chi_{23}, \chi_{31}, \chi_{32}$ – компоненты тензора изгибов-кручений; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ – компоненты тензора силовых напряжений; $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}$ – компоненты тензора моментных напряжений; $E_1, E_2, E_3, \nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{31}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{32}, \gamma, \varepsilon$ или $c_{11}^{11}, c_{22}^{11}, c_{33}^{11}, c_{33}^{22}, c_{33}^{33}, c_{13}^{13}, c_{23}^{23}, c_{12}^{12}, \gamma, \varepsilon$ – упругие коэффициенты ортотропного материала; ρ – плотность материала.

Будем считать, что тело имеет форму пластинки толщиной $2h$. Координатная плоскость $x_1 x_2$ расположим в срединной плоскости пластинки.

Будем считать, что на лицевых плоскостях ($x_3 = \pm h$) заданы значения напряжений $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$, а на боковой поверхности, в общем случае, могут быть заданы: либо напряжения (силовые и моментные), либо перемещения и повороты, либо смешанные условия.

В случае динамической задачи будем считать заданными значения $V_1, V_2, V_3, \frac{\partial V_1}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial t}, \frac{\partial V_3}{\partial t}$ при $t = 0$.

Нашей целью является построение прикладной теории изгиба пластинки, считая, что пластинка тонкая. Отметим, что в задаче изгиба пластинки V_3, ω_1, ω_2 – четные по x_3 функции, а V_1, V_2, ω_3 – нечетные по x_3 функции.

Итак, рассмотрим задачу построения прикладной теории изгиба ортотропной пластинки по указанной трехмерной моментной теории упругости со стесненным вращением.

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты; деформации, изгиб-кручения; силовые и моментные напряжения. Примем следующие достаточно общие гипотезы [7]:

1) кинематическую гипотезу Тимошенко: в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной плоскости волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной срединной плоскости.

Запишем принятую гипотезу математически: тангенциальные перемещения распределены по толщине пластинки по линейному закону, а нормальное перемещение не зависит от поперечной координаты x_3 , т. е.

$$v_1 = x_3 \psi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2; \quad v_3 = w(x_1, x_2, t). \quad (7)$$

В этом случае для углов вращения точек тела получим

$$\begin{aligned} \omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right), & \omega_2 = \Omega_2(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2} \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \\ \omega_3 = x_3 \iota(x_1, x_2, t), & \quad \iota &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

2) силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука для $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} ;

3) в выражении для χ_{13} (из (3)) пренебрегаем моментным напряжением μ_{31} относительно μ_{13} ;

4) предполагаем, что пластинка тонкостенная (т.е. примем следующее приближенное равенство: $1 + \frac{2h}{a} \approx 1$, где $2h$ – толщина пластинки, a – линейный наименьший размер пластинки в плане);

5) для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} ($i = 1, 2$) примем:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(x_1, x_2, t) \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

После определения указанных величин значения σ_{3i} ($i=1,2$) окончательно определим, соответственно, как сумму значения (9) и результата интегрирования первого и второго из (1) уравнений равновесия (движения), для каждого из этих интегралов потребуется условие, чтобы усредненная по толщине пластинки величина была равна нулю.

Изучение изгиба микрополярной упругой ортотропной пластинки на основе принятых выше гипотез начнем с определения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений.

Исходя из формул для перемещений (7) и поворотов (8), используя выражения (4) и (5) для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= x_3 K_{11}, & \varepsilon_{22} &= x_3 K_{22}, & \varepsilon_{12} &= x_3 K_{12}, & \varepsilon_{13} &= \Gamma_{13}, & \varepsilon_{23} &= \Gamma_{23}, & \varepsilon_{33} &= 0, \\ \chi_{11} &= k_{11}, & \chi_{22} &= k_{22}, & \chi_{12} &= k_{12}, & \chi_{21} &= k_{21}, & \chi_{13} &= x_3 l_{13}, & \chi_{23} &= x_3 l_{23}, \\ \chi_{31} &= 0, & \chi_{32} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & K_{22} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, & K_{12} &= K_{21} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \Gamma_{13} &= \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, & \Gamma_{23} &= \psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ k_{11} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, & k_{22} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, & k_{12} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, & k_{21} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, & l_{13} &= \frac{\partial i}{\partial x_1}, & l_{23} &= \frac{\partial i}{\partial x_2}, & k_{33} &= i. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь перейдем к исследованию силовых и моментных напряжений в пластинке.

При помощи формул (9), используя гипотезы 2), 4) и выражения обобщенного закона Гука (2), (3), для силовых и моментных напряжений получим

$$\sigma_{11} = x_3 \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (K_{11} + \nu_{21}K_{22}), \quad \sigma_{22} = x_3 \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (K_{22} + \nu_{12}K_{11}), \quad (12)$$

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = 2G_{12}x_3K_{12}, \quad \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2G_{13}\Gamma_{13}, \quad \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2G_{23}\Gamma_{23}, \quad (13)$$

$$\mu_{11} = 2\gamma k_{11}, \quad \mu_{22} = 2\gamma k_{22}, \quad \mu_{33} = 2\gamma k_{33}, \quad \mu_{21} = (\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12},$$

$$\mu_{12} = (\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}, \quad \mu_{13} = x_3 \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \mu_{23} = x_3 \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}, \quad (14)$$

$$\sigma_{33} = -x_3 \left[\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \quad (15)$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^0 + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}^1}{\partial x_2} - \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (16)$$

$$\mu_{31} = -x_3 \left(\frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} \right) + x_3 \left(\sigma_{32}^0 - \sigma_{23}^0 \right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (17)$$

Легко убедиться, что используя выражения для напряжений $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$, можем удовлетворять граничным условиям на плоскостях $x_3 = \pm h$ (при изгибе):

$$\sigma_{33}|_{x_3=\pm h} = \pm \frac{1}{2}q_3, \sigma_{31}|_{x_3=\pm h} = \frac{1}{2}q_1 \quad (1 \rightarrow 2), \quad (18)$$

$$\mu_{31}|_{x_3=\pm h} = \pm \frac{1}{2}m_1 \quad (1 \rightarrow 2). \quad (19)$$

Для построения прикладной теории микрополярной пластинки введем интегральные по ее толщине усредненные характеристики: усилия, моменты и гипермоменты:

$$\begin{aligned} N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} dx_3, \quad M_{ii} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ii} dx_3, \quad H_{ij} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ij} dx_3, \\ L_{ii} &= \int_{-h}^h \mu_{ii} dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dx_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h x_3 \mu_{i3} dx_3, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

На основе формул для напряжений, удовлетворяя граничным условиям (19), приходим к уравнениям равновесия (движения) прикладной теории моментной упругости со стесненным вращением для тонкой пластинки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= \left(2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - q_3, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial x_2} - N_{31} = \left(\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) - q_1 h, \\ \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - N_{32} &= \left(\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right) - q_2 h, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = -m_1, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + N_{31} - N_{13} &= -m_2, \quad - \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right) + H_{21} - H_{12} = m_3 h. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что уравнения равновесия (движения) можно получить так же, если к трехмерным уравнениям равновесия (движения) (1), соответственно, применять интегральные операторы

$$\int_{-h}^h (\cdot) dx_3 \quad \text{или} \quad \int_{-h}^h x_3 (\cdot) dx_3$$

и понятия усредненных усилий, моментов и гипермоментов (20).

Соотношения упругости прикладной моментной теории изгиба тонких пластин со стесненным вращением получим на основе выражений закона Гука (2), (3):

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{2E_1 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} (K_{11} + \nu_{21} K_{22}), \quad M_{22} = \frac{2E_2 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} (K_{22} + \nu_{12} K_{11}), \\ H_{12} + H_{21} &= \frac{4G_{12} h^3}{3} K_{12}, \quad N_{13} + N_{31} = 4G_{13} h \Gamma_{13}, \quad N_{23} + N_{32} = 4G_{23} h \Gamma_{23}, \\ L_{11} &= 4\gamma h k_{11}, \quad L_{22} = 4\gamma h k_{22}, \quad L_{21} = 2h [(\gamma + \varepsilon) k_{21} + (\gamma - \varepsilon) k_{12}], \\ L_{12} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) k_{12} + (\gamma - \varepsilon) k_{21}], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения равновесия (движения) (21), соотношения упругости (22) и геометрические соотношения (11) определяют модель микрополярной упругой ортотропной тонкой пластинки со стесненным вращением. К этой

основной системе уравнений следует присоединить граничные условия и начальные условия (в случае динамики).

3. Уравнение баланса энергии статики прикладной моментной теории тонкой пластинки со стесненным вращением. На основе уравнений равновесия (1) моментной теории трехмерной упругости со стесненным вращением известным способом можем получить уравнение баланса энергии в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \left[\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \varepsilon_{12} + \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \varepsilon_{13} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \varepsilon_{23} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \right. \\
& \left. + \mu_{11} \chi_{11} + \mu_{21} \chi_{21} + \mu_{31} \chi_{31} + \mu_{12} \chi_{12} + \mu_{22} \chi_{22} + \mu_{32} \chi_{32} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23} \right] dv = \\
& = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3 + \mu_{12} \omega_2 + \mu_{13} \omega_3) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{21} u_1 + \sigma_{22} u_2 + \sigma_{23} u_3 + \mu_{21} \omega_1 + \mu_{23} \omega_3) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3 + \mu_{31} \omega_1 + \mu_{32} \omega_2) \right] dv.
\end{aligned} \tag{23}$$

Используя здесь соотношения упругости (2), уравнение баланса энергии представим в форме Лагранжа:

$$\iiint_{(V)} W dv = A, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \left[C_{11}^{11} \varepsilon_{11}^2 + C_{22}^{22} \varepsilon_{22}^2 + C_{33}^{33} \varepsilon_{33}^2 + 2C_{22}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2C_{33}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + 2C_{33}^{22} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + C_{12}^{12} \varepsilon_{12}^2 + \right. \\
& + C_{13}^{13} \varepsilon_{13}^2 + C_{23}^{23} \varepsilon_{23}^2 + 2\gamma (\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2) + (\gamma + \varepsilon) \chi_{21}^2 + (\gamma + \varepsilon) \chi_{12}^2 + 2(\gamma - \varepsilon) \chi_{12} \chi_{21} + \\
& + (\gamma + \varepsilon) \chi_{31}^2 + (\gamma + \varepsilon) \chi_{13}^2 + 2(\gamma - \varepsilon) \chi_{31} \chi_{13} + (\gamma + \varepsilon) \chi_{32}^2 + (\gamma + \varepsilon) \chi_{23}^2 + \\
& \left. 2(\gamma - \varepsilon) \chi_{32} \chi_{23} \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации для рассматриваемой моментной теории упругости, а A – работа внешних поверхностных силовых и моментных напряжений.

Если в уравнение баланса энергии трехмерной теории (23) примем гипотезы параграфа два или, что то же самое, применим законы для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений (7)-(17), а также понятия (20), можем получить уравнение баланса энергии прикладной моментной теории тонких пластин со стесненным вращением:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left[M_{11} K_{11} + \frac{1}{2} (H_{12} + H_{21}) K_{12} + \frac{1}{2} (N_{13} + N_{31}) \Gamma_{13} + \frac{1}{2} (N_{23} + N_{32}) \Gamma_{23} + \right. \\
& \left. + M_{22} K_{22} + L_{11} k_{11} + L_{21} k_{21} + L_{12} k_{12} + L_{22} k_{22} + \Lambda_{13} l_{13} + \Lambda_{23} l_{23} \right] dx_1 dx_2 = \\
& = \frac{1}{2} \iint_{(S)} (q_1 h \psi_1 + q_2 h \psi_2 + q_3 w + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + m_3 h i) dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} A_{\text{эф.}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Используя соотношения упругости (22), уравнение баланса энергии микрополярной тонкой пластинки можем представить в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left[\frac{2E_1 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{11}^2 + \frac{2E_2 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{22}^2 + \frac{2h^3 (E_1 \nu_{21} + E_2 \nu_{12})}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{11} K_{22} + \frac{2G_{12} h^3}{3} K_{12}^2 + \right. \\ & + 2G_{13} h \Gamma_{13}^2 + 2G_{23} h \Gamma_{23}^2 + 4\gamma h k_{11}^2 + 4\gamma h k_{22}^2 + 2h(\gamma + \varepsilon) k_{21}^2 + 2h(\gamma + \varepsilon) k_{12}^2 + \\ & \left. + 4h(\gamma - \varepsilon) k_{12} k_{21} + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}^2 + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}^2 \right] dx_1 dx_2 = \\ & = \frac{1}{2} \iint_{(S)} (q_1 h \psi_1 + q_2 h \psi_2 + q_3 w + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + m_3 h u) dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} A_{eiin}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} \left[\frac{2E_1 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{11}^2 + \frac{2E_2 h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{22}^2 + \frac{2h^3 (E_1 \nu_{21} + E_2 \nu_{12})}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} K_{11} K_{22} + \right. \\ & + \frac{2G_{12} h^3}{3} K_{12}^2 + 2G_{13} h \Gamma_{13}^2 + 2G_{23} h \Gamma_{23}^2 + 4\gamma h k_{11}^2 + 4\gamma h k_{22}^2 + 2h(\gamma + \varepsilon) k_{21}^2 + \\ & \left. + 2h(\gamma + \varepsilon) k_{12}^2 + 4h(\gamma - \varepsilon) k_{12} k_{21} + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}^2 + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}^2 \right] \end{aligned} \quad (28)$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации, $A_{ком}$ – работу контурных усилий.

4. Статическая задача и задача о свободных колебаниях, прямоугольной пластинки. Рассмотрим прямоугольную пластинку, шарнирно опертую по контуру и нагруженную распределенной нагрузкой интенсивностью $q(x, y)$. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси x_1 равен a в направлении оси x_2 – b .

Граничные условия шарнирного оперения имеют вид

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{112} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0, \quad \text{при } x_1 = 0, a;$$

$$w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad L_{221} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \Lambda_{23} = 0, \quad \text{при } x_2 = 0, a. \quad (29)$$

Решение системы уравнений (21), (22), (11) представим в виде двойных тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \\ \psi_1(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{1mn} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \\ \psi_2(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{2mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $W_{mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}$ – коэффициенты рядов – неизвестные постоянные числа; m, n – целые положительные числа. Отметим, что решение в виде (30) автоматически удовлетворяет граничным условиям шарнирного оперения (28). В случае задачи о свободных колебаниях под суммой формул (30) необходимо добавить еще множитель $e^{ip_{mn}t}$.

Разложив приложенную нагрузку $q(x, y)$, также в двойной ряд Фурье в прямоугольной области $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$, получим

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (31)$$

где

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2. \quad (32)$$

Результаты численных вычислений таковы: данные задачи: $2h = 1_{нм}$ (нанометр), $a = b = 100_{нм}$; $q = 0.5 \times 10^3 \frac{Кг}{М^2}$. Физические постоянные полиэтилена [5, 6]:

$$\begin{aligned} C_{11}^{11} &= 18.1 \text{ ГПа}, \quad C_{22}^{22} = 17.3 \text{ ГПа}, \quad C_{33}^{33} = 193 \text{ ГПа}, \\ C_{22}^{11} &= 11 \text{ ГПа}, \quad C_{33}^{11} = 4 \text{ ГПа}, \quad C_{33}^{22} = 5 \text{ ГПа}, \quad C_{12}^{12} = 8.63 \text{ ГПа}, \\ C_{13}^{13} &= 0.75 \text{ ГПа}, \quad C_{23}^{23} = 2.18 \text{ ГПа}, \quad \gamma = 400 \text{ Н}, \quad \varepsilon = 400 \text{ Н} . \\ W_{\max}^{мом} &= 2.6346 \times 10^{-13} \text{ М}, \quad W_{\max}^{кл} = 1.0913 \times 10^{-11} \text{ М} \\ p_{11мом}^1 &= 1.1008 \times 10^{11} \text{ ссК}^{-1}, \quad p_{11кл}^1 = 2.7839 \times 10^9 \text{ ссК}^{-1} \end{aligned}$$

Таким образом, учет моментности в статической задаче приведет к повышению жесткости пластинки, а для частот колебаний – к частотам, находящимся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RF-063 и 15-53-05093 соответственно.

¹Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна

²Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН

**А. А. Саркисян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
Л. И. Маневич, С. А. Тиман**

Модель ортотропной тонкой пластинки по моментной теории со стесненным вращением с приложениями к полимерным материалам

Построена модель ортотропной тонкой пластинки на основе моментной (микрополярной) теории упругости со стесненным вращением. Для этой модели пластинки получено выражение закона сохранения механической энергии. Теоретическим путем получены решения задач статики и свободных колебаний прямоугольной пластинки.

**Ս. Հ. Սարգսյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Յ. Սարգսյան,
Լ. Ի. Մանևիչ, Ս. Ա. Տիման**

Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային տեսությամբ օրթոտրոպ բարակ սալի մոդելը և կիրառությունները պոլիմերային նյութերի համար

Կառուցված է օրթոտրոպ բարակ սալի մոդելը կաշկանդված պտույտով մոմենտային տեսության հիման վրա: Սալի այս մոդելի համար ստացված է մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը: Տեսական ճանապարհով ստացված են ուղղանկյուն սալի հավասարակշռության և ազատ տատանումների խնդիրների լուծումները:

**A. H. Sargsyan, corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan,
L. I. Manevich, S. A. Timan**

Model of Orthotropic Thin Plate with Constrained Rotation by Moment Theory and with Application for Polymer Materials

A model of orthotropic thin plate is constructed based on the moment (micropolar) theory of elasticity with constrained rotation. The expression for the law of conservation of mechanical energy is obtained for this plate model. Problems of statics and free vibrations of rectangular plate are studied theoretically.

Литература

1. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородск. гос.технического ун-та им. Р. Е. Алексева. 2010. 303 с.
2. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. Под.ред. В. Е. Панина. Новосибирск. Наука. 1995. Т. 1. 298 с. Т. 2. 320 с.
3. *Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* В кн.: Континуальная моментная динамическая модель кристалла полиэтилена. Сб. трудов XVII ежегодной научной конференции отдела полимеров и композиционных материалов. Москва, 15-17 февраля 2016 М. Изд-во ин-та химической физики РАН им. Н.Н. Семенова. 2016. С. 128-129.
4. *Берлин А. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* – Доклады НАН Армении. 2016. Т. 116. № 3. С. 210-218.
5. *Стрельников И. А., Мазо М. А., Зубова Е. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Берлин А. А.* - Вестник Тверского гос. ун-та. Серия “Химия”. 2016. №1. С. 33-39.
6. *Зубова Е. А., Стрельников И. А., Балабаев Н. К., Савин А. В., Мазо М. А., Маневич Л. И.* -Высокомолекулярные соединения. 2017. Серия А. Т.59. №1. С. 101-110.
7. *Саркисян С. О.* -Упругость и неупругость. Материалы международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. 20-21 января 2011 года. М.:Изд-во МГУ. 2011. С. 231-235.

какой-либо процедуры интерполяции массы, заряда и скорости частиц на узлы пространственной сетки, покрывающей расчётную область.

На данный момент существует ряд эффективных реализаций метода частиц в ячейках [4]. Во многих из них в качестве описания начальных данных используется файл, содержащий параметры задачи в виде списка пар «ключ – значение». В таком формате задаются размеры расчётной области, начальная конфигурация электромагнитных полей, заряд и масса частиц, их распределение по координатам и скоростям, граничные условия, параметры алгоритма моделирования и диагностики. Фрагмент типичного файла входных данных выглядит следующим образом:

```
nx = 100           ; размер сетки вдоль оси X
ny = 100           ; размер сетки вдоль оси Y
nz = 150           ; размер сетки вдоль оси Z
mf = D             ; конфигурация магнитного поля.
                   ; D - поле магнитного диполя,
                   ; U - однородное магнитное поле.
m = 20             ; момент диполя если mf = D, иначе -
                   ; игнорируется.
mx = 50            ; x-координата магнитного диполя, если
mf = D,
                   ; x-компонента магнитного поля, если
mf = U
my = 50            ; y-координата магнитного диполя если
mf = D,
                   ; y-компонента магнитного поля, если
mf = U
mz = 50            ; z-координата магнитного диполя, если
mf = D,
                   ; z-компонента магнитного поля, если
mf = U
pq = 1.0           ; заряд иона в единицах заряда протона
pm = 1.0           ; масса иона в единицах массы протона
Np = 1.0e+16       ; количество ионов
```

Форматы файлов входных данных для большинства программ моделирования плазмы существенно сложнее приведённого выше примера. Они существенно отличаются друг от друга, и их описания представляют собой объёмные руководства. Основным недостатком такого описания задачи является ограниченность возможных начальных конфигураций полей и распределения частиц. Если в программе не предусмотрено, например, задание тороидального магнитного поля, то без изменения исходного кода такую конфигурацию добавить невозможно.

Коммерческие пакеты предоставляют определённую гибкость за счёт поддержки дополнительных синтаксических конструкций во входных файлах, однако это усложняет практическое использование программы.

Мы рассмотрим альтернативный способ задания начальных и граничных условий, основанный на использовании интерпретатора скриптового языка. Суть метода состоит в разделении расчётной программы на компи-

лируемый и интерпретируемый модули. В компилируемом модуле реализуются наиболее требовательные к вычислительным ресурсам алгоритмы и структуры данных: массивы для хранения частиц и полей, алгоритм решения уравнения движения частицы, газодинамических уравнений и уравнений Максвелла. Это расчётный модуль. В интерпретируемом модуле находятся функции задания начальных и граничных условий, которые, как правило, не требуют значительных ресурсов. Интерпретируемый модуль, таким образом, играет роль конфигурационного скрипта. Расчётный модуль предоставляет скрипту доступ к алгоритмам и структурам данных через интерпретатор скриптового языка. Это позволяет задавать в скрипте произвольные начальные условия задачи, но его возможности этим не ограничиваются. В конфигурационный скрипт легко добавить, например, управление вычислительным процессом. Подобные вычислительные системы, сочетающие в себе различные программные компоненты, называются гибридными. В следующем параграфе построение такой программы будет продемонстрировано на практическом примере.

2. Взаимодействие программ на языках C++ и Python. Большинство современных пакетов PIC-кодов реализовано на языке C++. Для научных вычислений широко используется также язык Python, для которого имеются бесплатно доступные интерпретаторы и обширная библиотека программ. В стандартный пакет Python входит также Python/C API [5] – множество подпрограмм на языке C для работы с интерпретатором языка Python, что позволяет использовать его в качестве интерпретатора конфигурационного скрипта в C++ программах. Существует два механизма взаимодействия C++ и Python: расширение и встраивание. В первом случае из Python вызываются элементы C++ программы. Для этого реализуется модуль расширения для Python, в который экспортируются элементы C++ программы. Этот модуль можно импортировать в Python с помощью стандартного оператора `import`. В пользовательской системе необходимо установить пакет Python и предусмотреть процедуру инсталляции модуля расширения. В случае встраивания в C++ программе создаётся интерпретатор Python, на выполнение которому передаётся скрипт. Интерпретатор является частью C++ программы, и устанавливать Python на компьютере пользователя не обязательно.

Для вычислительных задач типа метода частиц в ячейке более эффективным является комбинирование этих механизмов. В этом случае расчётный модуль предварительно создаёт модуль расширения Python, затем с помощью интерпретатора выполняет скрипт, использующий этот модуль. После выполнения скрипта, когда все начальные и граничные условия заданы, расчётный модуль приступает к выполнению алгоритма моделирования. В процессе работы расчётный модуль может обращаться к отдельным функциям конфигурационного скрипта. Например, после каждой итерации расчётный модуль может вызывать определённую функцию скрипта для инъекции частиц в расчётную область, вывода промежуточных данных, графиков и дополнительной диагностики, что существенно расширяет возможности программы. В зависимости от характера числен-

ного эксперимента в конфигурационном скрипте могут быть реализованы процедуры мониторинга вычислительного процесса, фильтрации шумов, обработки ошибок. Тогда, скрипт будет играть роль драйвера вычислительного процесса.

3. Реализация на языках C++ и Python. Продемонстрируем комбинирование встраивания интерпретатора языка Python и расширения на простом примере. Для связывания C++ и Python используем библиотеку Boost.Python [6], которая является обёрткой функций Python/C API, предназначенных для создания модулей расширения, инициализации интерпретатора и выполнения Python программ. В листинге 1 показаны основные этапы экспорта C++ структур в Python, что соответствует созданию модуля расширения Python, и выполнения скрипта.

Макрос BOOST_PYTHON_MODULE создаёт модуль расширения Python, содержащий структуры Vector и Particle. Класс boost::python::class_ и, в частности, его функция-член def() обеспечивают экспорт этих типов данных с помощью Python/C API. В строке 22 экспортируется массив частиц, который будет доступен в скрипте как переменная parts. На этом завершается создание модуля расширения, который, в соответствии с соглашением имён в Python [7], мы назвали pic. Аналогичным образом необходимо экспортировать расчётную сетку и другие объекты, настраиваемые для конкретной задачи.

```
1. #include <boost/python.hpp>
2. #include <vector>
3. struct Vector {
4.     double x;
5.     double y;
6.     double z;
7. }
8. struct Particle {
9. Vector r; // particle position
10. Vector v; // particle velocity
11. double q; // particle charge
12. double m; // particle mass
13. };
14. typedef std::vector<Particle> Particles;
15. Particles particles;
16. namespace py = boost::python;
17. BOOST_PYTHON_MODULE(pic) {
18. py::class_<Vector>("Vector")
        .def_readwrite("x", &Vector::x)
        .def_readwrite("y", &Vector::y)
        .def_readwrite("z", &Vector::z),
19. py::class_<Particle>("Particle")
        .def_readwrite("r", &Particle::r)
        .def_readwrite("v", &Particle::v)
        .def_readwrite("q", &Particle::q),
```

```

        .def_readwrite("m", &Particle::m),
20. py::class_<Particles>("Particles")
21. .def(py::vector_indexing_suite<Particles>());
22. py::import("__main__")
23. .attr("parts") = py::ptr(&particles);
24. }
25. int main() {
26. PyImport_AppendInittab("pic", initpic);
27. Py_Initialize();
28. py::object main_module = py::import("__main__");
29. py::dict
30. main_namespace = py::extract<py::dict>(
31. main_module.attr("__dict__"));
32. py::exec_file("init_pic.py", main_namespace,
33. main_namespace);
34. std::cout << particles.size()
35. << " particle(s) created initially."
36. << std::endl;
37. // На очередном шаге алгоритма моделирования
38. // производится инъекция новых частиц.
39. py::object
40. inject_parts = main_namespace["inject_parts"];
41. size_t
42. parts_num = py::extract<double>(inject_parts());
43. std::cout << parts_num
44. << " particle(s) after injection."
45. << std::endl;
46. }

```

Листинг 1. В функции main производится встраивание интерпретатора Python. Для этого модуль pic добавляется во множество импортируемых модулей, затем инициализируется интерпретатор Python и выполняется конфигурационный скрипт init_pic.py:

```

1. from pic import *
2. p = Particle()
3. p.r.x = p.r.y = p.r.z = 0
4. parts[:] = [p, p, p]
5. def inject_parts():
6. p = Particle()
7. p.r.x = p.r.y = p.r.z = 1
8. for i in range(0, 3):
9. i. parts.append(p)
9. return len(parts)

```

Листинг 2. На этом шаге, в результате выполнения строк 1 – 4 конфигурационного скрипта (листинг 2), массив частиц (parts) содержит три элемента. Это соответствует заданию начального распределения частиц по координатам и скоростям. Затем расчётная программа вызывает функцию

inject_parts() для модификации массива частиц, в данном случае – для добавления новых частиц в область моделирования.

Для обеспечения максимальной гибкости расчётная программа может вызывать функции конфигурационного скрипта перед выполнением и после завершения этапов моделирования. Стандартный набор вызываемых предопределённых функций может выглядеть так:

```
on_iteration_begin() -- перед очередной итерацией алгоритма
on_iteration_end()   -- после очередной итерации алгоритма
on_boundary_condition() -- для применения граничных условий
on_particles_moved() -- после продвижения частиц на очередной шаг по времени
```

В этих функциях удобно реализовать процедуры диагностики, сохранения данных в файлах, инжекции новых частиц, обновления переменных электромагнитных полей. Существует богатый выбор модулей расширений Python, предназначенных для анализа и визуализации данных, которые могут быть использованы в конфигурационном скрипте для создания полноценного инструмента моделирования на базе расчётного модуля. Библиотека Boost.Python позволяет легко добавить поддержку Python в имеющиеся расчётные программы. Возможно создание унифицированного интерфейса с Python для различных программ моделирования, что упростило бы их использование.

4. Заключение. Преимуществом описанной гибридной технологии по сравнению с использованием традиционного файла входных данных является возможность задания различных начальных и граничных условий, управления ходом численного эксперимента без внесения изменений в расчётный модуль. Выбор Python в качестве драйвера позволяет использовать имеющиеся для него библиотеки интерактивной визуализации, анализа и обработки результатов моделирования. Подобная техника реализована в разработанной в ИРФЭ НАН РА программе OpenPIC [8], предназначенной для исследования широкого класса нестационарных задач динамики бесстолкновительной плазмы. Предложенный механизм может быть использован также в других системах программного обеспечения, требующих мониторинга потока управления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1C231.

Институт радиофизики и электроники НАН РА
e-mail: sd_fund@sci.am

**Դ. Ա. Օսիպյան, Կենտրոնական Գ. Գ. Մատեվոսյան,
Օ. Ս. Արոյան**

Построение гибридных программных систем PIC-моделирования

Предложен способ разделения программы PIC-моделирования на компилируемый расчётный модуль и интерпретируемый конфигурационный скрипт, который задаёт начальные и граничные условия, а также взаимодействует с расчётным модулем на определённых этапах численного эксперимента. Показано преимущество данного подхода по сравнению с использованием традиционного файла входных данных. Приведён пример реализации описанной технологии на языках C++ и Python.

**Դ. Ա. Օսիպյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Հ. Հ. Մաթևոսյան,
Օ. Ս. Արոյան**

Հիբրիդային PIC-մոդելավորման ծրագրային համակարգերի կառուցում

Ներկայացված է PIC-մոդելավորման ծրագրային համակարգերի տարրալուծման եղանակ՝ հաշվարկային մոդուլի և ինտերպրետացվող կոնֆիգուրացիոն սկրիպտի, որը նկարագրում է նախնական և սահմանային պայմանները: Սկրիպտը նաև համագործակցում է հաշվարկային մոդուլի հետ թվային էքսպերիմենտի որոշակի փուլերում: Ցույց է տրված առաջարկված մոտեցման առավելությունն ավանդական մուտքագրման ֆայլի համեմատ: Բերված է C++ և Python լեզուների միջոցով նկարագրված տեխնոլոգիայի ծրագրային իրականացման օրինակ:

**D. A. Osipyan, corresponding member of NAS RA H. H. Matevosyan,
H. S. Aroyan**

Building Hybrid PIC-Simulation Codes

The decomposition method of PIC simulation codes into the compiled simulation module and the interpreted configuration script which sets initial and boundary conditions is presented. The script is also intended to interact with simulation module at certain stages of a numerical experiment. The benefit of this approach in comparison with the traditional input file usage is shown. The example of the described technique implementation in C ++ and Python is given.

Литература

1. *Harlow F. H.* A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems, Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956, 1955.
2. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М. Мир, 1987. 638 с.
3. *Birdsall C. K., Langdon A. B.* Plasma Physics via Computer Simulation. CRC Press. 2004. 504 p.

4. *Smith J.*, Advanced simulation tools for next generation particle acceleration: PIC and beyond. Advanced school on laser applications and accelerators, 2014.
5. Python/C API Reference Manual, <https://docs.python.org/2/c-api>
6. *Abrahams D., Grosse-Kunstleve Ralf W.* -, C/C++ Users Journal, 2003, July.
7. PEP 8, Style Guide for Python Code, <https://www.python.org/dev/peps/pep-0008>.
8. *Nersisyan H. B., Sargsyan K. A., Osipyany D. A., Sargsyan M. V., Matevosyan H. H.*- Armenian Journal of Physics. 2011. N 4 V. 2. P. 74-89.

В дальнейшем при изучении гетерогенного взаимодействия пероксидных радикалов с метаном и ацетальдегидом при комнатной температуре было показано, что скорость процесса на поверхности борной кислоты [6] намного превосходила таковую на поверхности, обработанной солями NaCl и KCl [7, 8], т.е. существует определенная корреляция между температурой воспламенения и скоростью гетерогенной радикальной реакции [6].

На поверхности борной кислоты было обнаружено размножение радикалов, приписанное протеканию цепной вырожденно-разветвленной реакции на твердой поверхности в присутствии ацетальдегида или метана [7, 9-12].

Обычно при температурах, указанных на рис.1, процессы окисления альдегида в реакторах, обработанных KCl, протекают с большей скоростью, чем в реакторах, обработанных борной кислотой, из-за большей скорости гетерогенного разветвления цепей на поверхности KCl [1].

Ясно, что принципиальным в наблюдаемой картине (рис. 1) инициированного воспламенения $\text{CH}_3\text{CHO} + \text{O}_2$ смесей является не скорость радикального распада пероксидного соединения, а скорость взаимодействия образовавшихся пероксидных радикалов с альдегидом на твердой поверхности. Кроме того, важно также большее количество радикалов вследствие их размножения, имеющего место на поверхности борной кислоты при подаче альдегида.

Если из сравнения кривых зависимости температуры воспламенения смеси $\text{CH}_3\text{CHO} + \text{O}_2$ от количества пероксида при его нагревании в реакторах, обработанных KCl и H_3BO_3 , вследствие его гетерогенного радикального распада четко следует гетерогенный характер воспламенения, то ясно, что основной причиной его являются не радикалы, перешедшие в объем. Известно [1], что в области низких температур (200°C) генерация радикалов в объем больше в случае KCl. Кроме того скорость медленной реакции окисления альдегида больше в реакторе, обработанном KCl, по сравнению с реактором, обработанным борной кислотой, т.е. понижение температуры воспламенения должно было быть больше в реакторе, обработанном KCl.

Принимая во внимание тот экспериментально установленный факт, что скорость реакции пероксидных радикалов с органическим соединением (углеводород, альдегид) на твердой поверхности H_3BO_3 [6] намного больше таковой на поверхности KCl [7], можно утверждать, что эта картина воспламенения конкретно определяется скоростью гетерогенной реакции пероксидных радикалов с альдегидом, т.е. очевидно, что генерация воспламенения происходит с поверхности. В случае H_3BO_3 размножение радикалов, образующихся при гетерогенном радикальном распаде органического пероксида вследствие взаимодействия их с альдегидом, является причиной более мощного воздействия на процесс воспламенения при комнатной температуре.

Кстати, этот вывод подтверждается и результатами опытов по инициированной пероксидными радикалами медленной реакции окисления смеси $\text{CH}_3\text{CHO} + \text{O}_2$ при очень малых временах реакции, когда разветвле-

нием можно пренебречь [3]. В случае KCl количество радикалов, инициирующих реакцию, было больше, баланс по углероду соблюдался лучше, чем в случае H_3BO_3 . Это расхождение результатов было приписано значительному вкладу гетерогенной реакции расходования альдегида в случае H_3BO_3 .

Таким образом, из сопоставления кинетических закономерностей окисления и воспламенения ацетальдегид-кислородных смесей в зависимости от природы поверхности реактора можно сделать вывод, что суть гетерогенного характера инициирования процесса воспламенения CH_3CHO+O_2 смесей заключается в поджиге смеси процессом, протекающим на поверхности.

Институт химической физики им. А. Б. Налбандяна НАН РА

Академик И. А. Варданян

О механизме инициированного свободными радикалами воспламенения ацетальдегид-кислородных газовых смесей

Проанализированы и обобщены экспериментальные результаты, полученные при исследовании воспламенения и окисления ацетальдегид-кислородных смесей в зависимости от природы поверхности реактора. Сделан вывод, что суть гетерогенного характера инициирования процесса воспламенения CH_3CHO+O_2 смесей заключается в поджиге смеси процессом, протекающим на поверхности.

Ավադեմիկոս Ի. Ա. Վարդանյան

Ազատ ռադիկալներով հարուցված ացետալդեհիդ-թթվածին գազային խառնուրդների բոցավառման մեխանիզմի մասին

Ամփոփված են փորձնական տվյալները՝ ստացված ռադիկալներով հարուցված ացետալդեհիդ-թթվածին խառնուրդների բոցավառման ընթացքում՝ կախված ռեակտորի մակերևույթի բնույթից: Եզրակացվել է, որ բոցավառման պրոցեսի հետերոգեն բնույթը պայմանավորված է մակերևույթի վրա ընթացող պրոցեսով:

Academician I. A. Vardanyan

On the Mechanism of Radical Initiation of Acetaldehyde-Oxygen Gas Mixtures Ignition

The experimental results obtained during the investigation of the ignition and oxidation of acetaldehyde-oxygen mixtures depending on the nature of the reactor surface were analyzed and generalized. It was concluded that the gist of the heterogeneous nature of the initiation of the ignition process of $CH_3CHO + O_2$ mixtures consists in setting on fire the mixture by a process going on the surface.

Литература

1. *Налбандян А. Б., Варданян И. А.* Современное состояние проблемы газофазного окисления органических соединений. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1986. 227 с.
2. *Doruntz A. G., Arustamyan A. M., Nalbandyan A. B.* – Combustion and Flames. 1987. V. 69. № 3. P. 251-255.
3. *Nalbandyan A. B., Vardanyan I. A., Arustamyan A. M., Oganesyan E. A., Doruntz A. G.* – Dynamic of Reactive Systems. Pt. 1: Flames. Progress in Astronautics and Aeronautics. 1988. V. 113. P. 58-630.
4. *Дорунц А. Г., Арустамян А. М., Варданян И. А., Налбандян А. Б.* – Химическая физика. 1988. Т. 7. № 12. С.1709-1712.
5. *Arustamyan A. M., Vardanyan I. A.* – Chem. Physics Reports. 1997. V. 16. № 11. P. 2035-2042.
6. *Варданян И. А., Арустамян А. М., Мартиросян А. С., Царукян С. В.* – Журнал физической химии. 2016. Т. 90. № 4. С. 522-525.
7. *Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* – Inter. J. Chem. Kinet. 2004. V. 36. №11. P. 591-595.
8. *Манучарова Л. А., Царукян С. В., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2007. Т. 107. № 3. С. 239-246.
9. *Арустамян А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112. № 2. С. 194-199.
10. *Vardanyan I. A., Manucharova L. A., Jalali H. A., Tsarukyan S. V.* – Chem. J. of Armenia. 2012. V. 65. №1. P. 132-136.
11. *Мартиросян А. С., Царукян С. В., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 3. С. 249-256.
12. *Jalali H. A., Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* – Russ. J. Phys. Chem. A. 2011. V. 85. № 3. P. 483-485.

Результаты сканирующей электронной микроскопии показывают, что сополимер ВТ-ВП имеет рыхлую, объёмную поверхностную структуру (рис. 3, а). Морфология поверхности полимерного нанокompозита с наночастицами меди в значительной степени меняется: она имеет более развитую пористую структуру, с множеством каналов, диаметр которых составляет от 5 до 20 мкм (рис. 3 б)

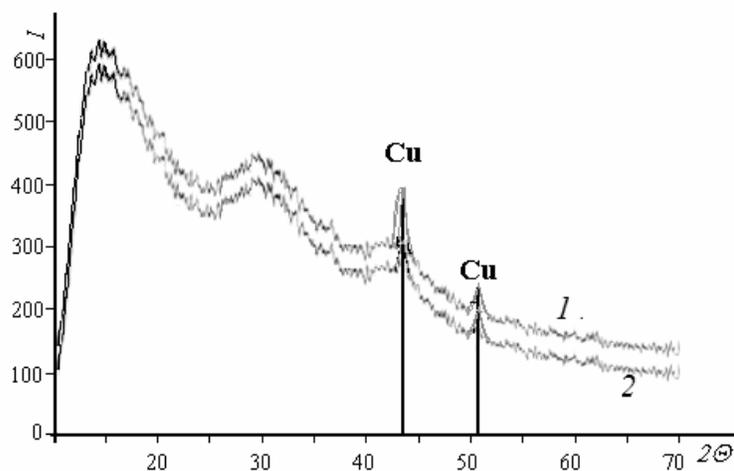


Рис. 2. Рентгеновская дифрактограмма полимерных нанокompозитов наночастицами меди: 1 – 9,4%; 2 – 8,3%, 2θ - угол Брегга (град.), I – интенсивность (отн. ед.)

Это может являться важной характеристикой для обеспечения транспорта реагентов в случае использования полученных нанокompозитов в качестве катализаторов различных химических реакций.

Нанокompозитные покрытия меди обладают электрической проводимостью $1,2 \cdot 10^{-9} - 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{см}^{-1}$, превышающей на 3-6 порядков электропроводность исходного сополимера ВТ-ВП ($2,3 \cdot 10^{-12} \text{ см} \cdot \text{см}^{-1}$).

Повышение электропроводности, по-видимому, обусловлено вкладом в общую электропроводность исследуемых образцов отдельных локальных туннельных токов, возникающих между электропроводящими наночастицами металлической меди, близко расположенными в диэлектрической полимерной матрице.

Исследование термических свойств полученных НП с наночастицами меди показывает, что в температурном интервале 280-320°C они менее термостабильны (на 30-40°C), чем исходный сополимер ВТ-ВП (рис. 4).

В интервале температур 300-530°C происходит полное разложение полимерной составляющей нанокompозитов с потерей массы $\approx 60 \%$. Характер термического разложения нанокompозитов значительно отличается от деструкции исходного сополимера ВТ-ВП, термодеструкция которого заканчивается при 770 °C. Наблюдаемые изменения, вероятно, являются следствием каталитических свойств металлических наночастиц, которые проявляются в понижении энергии активации термодеструкции и окислении полимерной матрицы

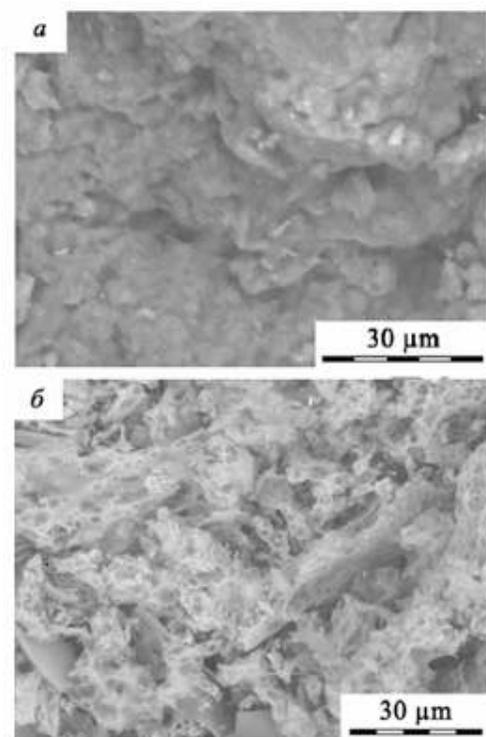


Рис. 3 Электронные микрофотографии исходного сополимера ВТ-ВП (а) и полимерного нанокомпозита с наночастицами меди (б)

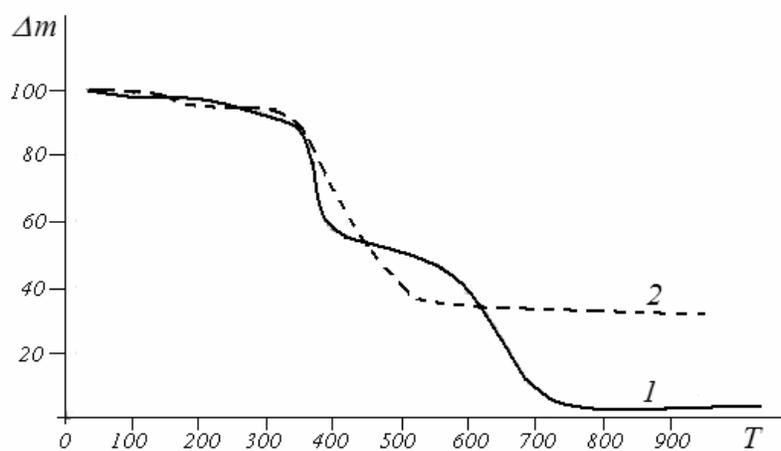


Рис. 4. Термогравиметрические кривые исходного сополимера ВТ-ВП (1) и полимерного нанокомпозита с наночастицами меди (2). Δm – потеря массы %, T – температура ($^{\circ}\text{C}$).

Экспериментальная часть. Элементный анализ выполняли на анализаторе FLASH EA 1112 Series. ИК-спектры полимеров снимали на спектрометрах SpecordM-80 и BrukerVertex 70, используя мелкодисперсные порошки, запрессованные в таблетки с KBr. Содержание металла в композициях определяли методом элементного и атомно-абсорбционного анализа на спектрометре PerkinElmer Analyst 200. Распределение наночастиц меди устанавливали на ПЭМ Leo 906 E (Германия). Термогравиметрический анализ выполняли на дериватографе фирмы MOM (Венгрия), скорость повышения температуры 5 град-мин⁻¹. Электрическую проводимость измеряли с использованием стандартного тераомметра Е6-13А.

Электронные микрофотографии получили на просвечивающем электронном микроскопе LEO 906 E («Zeiss», Германия) и сканирующем электронном микроскопе ТМ 3000 фирмы HITACHI. Рентгенофазовый анализ выполняли на порошковом дифрактометре 08 ADVANCE (Cu – изучения).

1-Винил-1,2,4,-триазол получили и очищали по методике, описанной в [11], а ВП – по методике [12].

Общая методика формирования металлополимерных покрытий методом контактного выделения металлов. Чисто железные или стальные пластинки размером 8*6*2, предварительно обезжиренные промывкой в ацетоне, погружали в реакционную среду на 40-70 мин при комнатной температуре (20-23°C). Концентрация ионов меди составляла 0,01 и 0,02 моль/л соответственно, концентрация ВТ и ВП 0,05-0,1 моль/л, персульфат калия 0,04-0,2 масс%.

После этого пластинку с образовавшимся покрытием вынимали и сушили сначала при комнатной температуре, затем в сушильном шкафу 10-30 мин при 50-80°C до постоянной массы.

¹Национальный политехнический университет Армении

²Ереванский государственный медицинский университет им. М. Гераци

С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян

Синтез медьсодержащих нанокompозитных полимерных покрытий на основе 1-винил-1,2,4-триазола и N-винилпирролидона

Методом контактного обмена металлов синтезированы медьсодержащие нанокompозитные покрытия на чистом железе и стали на основе 1-винил-1,2,4-триазола и N-винилпирролидона. Структура и состав медьсодержащих покрытий подтверждено методом ИК-спектроскопии, рентгенофазового анализа, электронной микроскопии, и элементным анализом.

Ս. Հ. Մարգարյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Մարգարյան

Պղինձ պարունակող նանոկոմպոզիտային պոլիմերային ծածկույթների սինթեզ 1-վինիլ-1,2,4-տրիազոլի և N-վինիլպիրրոլիդոնի հիման վրա

Մետաղների կոնտակտային փոխանակման մեթոդով սինթեզվել են պղինձ պարունակող նանոկոմպոզիտային պոլիմերային ծածկույթներ մաքուր երկաթի և պող-

պատի վրա: Ստացված թաղանթների կառուցվածքը և բաղադրությունը հաստատվել են սպեկտրասկոպիայի, ռենտգենաֆազային անալիզի, էլեկտրոնային միկրոսկոպիայի և էլեմենտ անալիզի մեթոդներով:

S. H. Sargsyan, K. S. Margaryan, A. S. Sargsyan

**Synthesis of Copper Containing Nanocomposite Polymer Coating
Based on 1-Vinyl-1,2,4- Triazole and N-Vinylpyrrolidone**

Metal exchange by contact synthesized copper-containing nanocomposite coatings on pure iron and steel on the basis of 1-vinyl-1,2,4-triazole and N-vinylpyrrolidone. The structure and composition of the copper coating was confirmed by infrared spectroscopy, X-ray diffraction, electron microscopy, and elemental analysis.

Литература

1. *Помогайло А. Д., Розенберг А. С., Уфлянд И. Е.* Наночастицы металлов в полимерах. М. Химия, 2000. 672 с.
2. *Rao C. N. R., Muller A., Cheetham A. K.* The Chemistry of Nanomaterials, Weinheim: Wiley; WCH-Verlag, 2004. 471 p.
3. *Holze R., Wu Y. P.* – Electrochim. Acta, 2014. V. 122, P. 93-107.
4. *Литманович О. Е., Литманович А. А., Паписов И. М.* – ВМС. Серия Б, 2005. Т. 42. № 9. С. 1602-1603.
5. *Зезин А. Б., Рогачева В.Б., Валуев С. П. и др.* – Российские нанотехнологии. 2006. Ф. 1. № 1-2, www.nanorf.ru
6. *Hirai H., Toshima N.* – Polymeric Materials Encyclopedia. L.: Press, 1996. V. 2. P. 1310-1312.
7. *Sato T.*, Stabilization of colloid dispersions by polymer adsorption. N.Y.: Marcell Dekker. 1980. 357 p.
8. *Макар О. М., Слободян З. В., Ковальчук Е. П., Бабей Ю. И.* – Физико-химическая механика материалов. 1982. № 1. С. 103.
9. *Саргисян С. А., Мирзоян А. В., Маргарян К. С.* – Хим. ж. Армении. 1999. Т. 52. № 1-2. С. 130-135.
10. *Margaryan K. S., Sargsyan S.H., Sargsyan A.S.* – Russian Journal of Applied Chemistry. 2016. V. 89. № 8. P. 1261-1264.
11. *Хачатрян С. Ф., Атнарян О. С., Мацоян М. С., Киноян Ф. С., Асратян Г.В.* – Хим. ж. Армении. 2005. Т. 58. № 4. С. 115-121.
12. *Платэ Н. А., Сливанский Е. В.* Основы химии и технологии мономеров. М. Наука. 2002. 696 с.

также миогенным и автономным по своей природе [11, 12], функционирует комбинированно с мочевым пузырем, контролируя его наполнение и опорожнение. Мочевой пузырь большую часть времени функционального цикла ведет себя как орган кумуляции мочи, при этом в различных областях мышечного слоя наблюдается аналогичный электрический базовый ритм. В этом же временном интервале уретра сокращается, препятствуя утечке мочи и создавая тем самым условия для продолжительного мышечного тонуса [6, 13]. Фаза опорожнения мочевого пузыря, обеспечиваемая синхронизацией пейсмекеров детрузор (мышечные слои) для формирования перистальтики органа, сопровождается кратковременной релаксацией мышц уретры [8, 14].

Исходя из присущей каждому из мочевыводящих органов собственной фоновой электрической активности возможно также наличие взаимосвязи таковой мочевого пузыря наряду с мочеточниками также и с ритмогенезом уретры для обеспечения интегративной деятельности всех мочевыводящих органов.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе проведен сравнительный анализ изменений электрофизиологических характеристик базовой активности мочевого пузыря при его изоляции от влияния ритмогенеза приграничных органов.

Работа выполнена в условиях *in situ* на крысах массой 250-300 г, наркотизированных внутрибрюшинно нембуталом (45-50 мг/кг). Денервация мочеточника, мочевого пузыря и уретры осуществлялась перерезкой корешков чревного, тазового, срамного, а также подчревного нервов [15]. Поскольку мочеточник является парным органом, то воздействие распространяющейся волны спонтанной активности на автоматизм мочевого пузыря при нормальных условиях, естественно, будет наблюдаться на каждую из сторон органа. Исходя из этого решение поставленной перед нами задачи требует пошагового исследования электрофизиологических свойств органов нижнего мочевого тракта. В настоящей работе регистрация активности проводилась из всех ритмогенных отделов мочеточника, мочевого пузыря и уретры, схематически представленных на рис. 1. 1-4. Спайковые разряды из околопочечной области мочеточника отводили биполярными электродами (расстояние между воспринимающими кончиками – 2 мм). Активность мочевого пузыря регистрировалась с внутренней поверхности проксимальной зоны органа. С этой целью предварительно проводился небольшой надрез в дистальном отделе мочевого пузыря, через который вводился электрод и осуществлялся отток мочи. Электрическая активность уретры также регистрировалась из ее проксимального отдела путем введения электрода через нижний сфинктер органа. Все эксперименты были острыми, и после завершения регистраций животные умерщвлялись введением дополнительного количества нембутала.

Анализ электрофизиологических регистраций проводился путем определения значений следующих параметров спонтанных потенциалов действия: частота (F), амплитуда (A), средняя скорость нарастания пика (V), продолжительность нарастания пика (T/2) (продолжительность увеличения амплитуды потенциала действия до максимального значения), полови-

на ширины (t) (время, за которое формируется верхняя часть пика начиная с уровня мембранной поляризации, соответствующей половине амплитуды потенциала действия при фазе нарастания до этого же уровня потенциала при фазе падения). Все отмеченные показатели определялись путем усреднения этих величин в пределе каждого эксперимента и далее всех экспериментов данной серии. На рисунках как единичные потенциалы действия, так и их суперпозиции представляют собой типичные формы усредненных потенциалов действия. Усреднение форм потенциалов действия также проводилось как в пределах каждого эксперимента, так и по всем экспериментам. Звездочками отмечены результаты достоверных различий.

Спонтанная электрическая активность регистрировалась на 4-канальном приборе, разработанном в Институте физиологии им. Л. Орбели НАН РА для оценки электрической активности гладкой мускулатуры [16]. Отношение сигнал-шум прибора осуществляет достоверную регистрацию отклонений сигналов с амплитудой до 10 мкВ. Полосовая фильтрация регистрируемых сигналов находится в диапазоне 3-30 Гц. Значения определяемых показателей представлены в виде среднестатистических данных \pm стандартный разброс. Статистический анализ характера зарегистрированных сигналов проводился с использованием пакета Origin 8.5. Оценка достоверности изменения полученных данных осуществлялась согласно t-критерию Стьюдента.

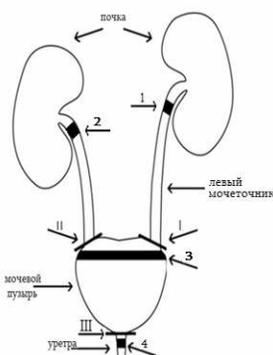


Рис. 1. Схематическое изображение мочеточников с почками, мочевого пузыря и уретры. 1-4 – соответственно области регистрации активности из околопочечных отделов мочеточников, проксимальной зоны мочевого пузыря и проксимальной же области уретры; I-III – области перерезок мочеточников.

Все эксперименты были проведены в соответствии с правилами Ереванского государственного медицинского университета по этике в области ухода и использования лабораторных животных. Эксперименты, а также уход за животными выполнены в соответствии с «Правилами и нормами гуманного обращения с объектами исследования».

Регистрация электрической активности проводилась одновременно из четырех областей, представленных на схеме органов мочевого тракта (рис. 1. 1-4). Из околопочечного локуса мочеточников регистрировались четко ритмичные потенциалы действия, активность же мочевого пузыря и уретры в отличие от последних имела несколько иную картину ритмогенеза (рис. 2, А). В соответствии с рисунком потенциалы действия как мочевого пузыря, так и уретры были более низкоамплитудными, ритмичность менее выражена и, более того, активность уретры возникала на фоне невысоких осцилляций мембранного потенциала. Об этом свидетельствуют также представленные на рис. 2, Б развернутые формы потенциалов действия для всех исследуемых областей.

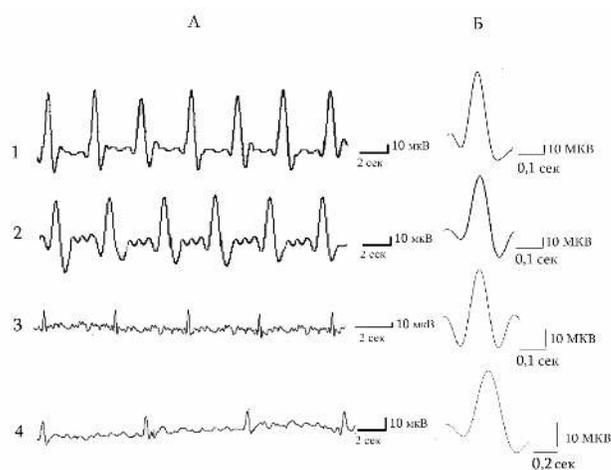


Рис. 2. Спонтанная электрическая активность мочеточников, мочевого пузыря и уретры. А. 1, 2 – спонтанные потенциалы действия из области регистрации соответственно левого и правого мочеточников; 3 – мочевого пузыря; 4 – уретры. Б. Единичные развернутые формы потенциалов действия из соответствующих областей. n=18.

Как видно из рис. 2, А. 1, 2, активности мочеточников, являющихся парными органами, характеризуются несколько отличными друг от друга значимостями показателей автоматизма. С целью более детального изучения данных различий нами проведен сравнительный анализ всех исследуемых в работе параметров, присущих каждому из мочеточников потенциалов действия (рис. 3, А). Согласно приведенному рисунку, если такие показатели активности, как амплитуда (А), скорость ее нарастания (V) и частота ритмогенеза (F) правого мочеточника, меньше таковых для потенциалов действия левого из этих органов соответственно на 17.9 мкВ, 37.3 мкВ/с, 4.38 колеб/с, то продолжительность ширины несколько продлевается (на 0.08 с). Продолжительность нарастания амплитуды (T/2) в этих условиях изменяется незначительно (на 0.03 с). Таким образом, несмотря на

аналогичность функциональной деятельности и характера ритмогенеза каждого из этих парных органов, между показателями их активностей имеются определенные различия.

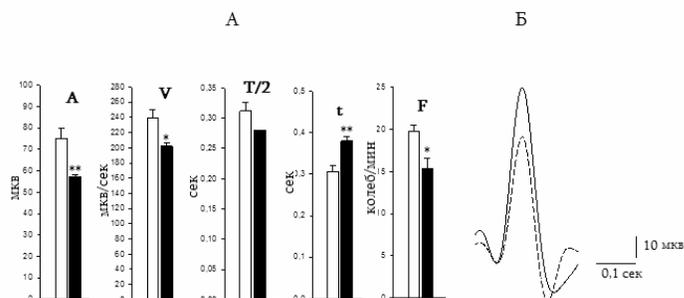


Рис. 3. Величины показателей активности мочеточников в норме. А – Параметры активности левого мочеточника (первые столбики для каждого показателя), правого мочеточника (вторые столбики для каждого показателя). Б – Положение друг на друга усредненных форм потенциалов действия мочеточников (левый мочеточник – сплошной контур, правый мочеточник – пунктирный контур). Контроль соответствует значению соответствующего показателя активности левого мочеточника. n=16.

Исходя из вышеизложенного основная функция мочеточников заключается в генезе перистальтически распространяющейся волны для проведения мочи вдоль органа до самого мочевого пузыря, чем обеспечивается возможность реализации функциональной фазы данного органа – кумулировать мочу до последующего опорожнения. Итак, несмотря на автономность возникновения электрической активности в каждом из этих органов нельзя исключить определенного влияния автоматизма мочеточников на активность мочевого пузыря. Наряду с мочеточниками, уретра также является органом, характеризующимся настолько тесной взаимосвязью с мочевым пузырем, что они функционируют комбинированно.

В следующей серии экспериментов изучалось влияние каждого из мочеточников и уретры на автономную спонтанную активность мочевого пузыря. Воздействие активности мочеточников нами проводилось при последовательном отсоединении от мочевого пузыря в первую очередь более активного, левого, из них и лишь потом правого мочеточника (рис. 1. I, II). После столь резкого травмирования и нарушения целостности ткани, сопутствующей перерезке, стабилизация активности устанавливалась через 10-15 мин. Последующая одновременная регистрация активности из всех исследуемых областей проводилась через данный промежуток времени.

Для наглядности все результаты представлены в процентном соотношении к норме. Согласно анализу изменений показателей активности мочевого пузыря при пересечении от него левого мочеточника в области его

соединения все пять исследуемых параметров активности остаются без изменений (рис. 4, А, левые столбики). Вместе с тем изоляция правого мочеточника приводит к уменьшению в пределах до 20% значений амплитуды, скорости ее нарастания и частоты ритмогенеза при небольших вариациях остальных показателей активности в пределах разброса (рис. 4, А, правые столбики). Таким образом, модуляция характеристик потенциалов действия мочевого пузыря наблюдается после пересечения правого мочеточника.

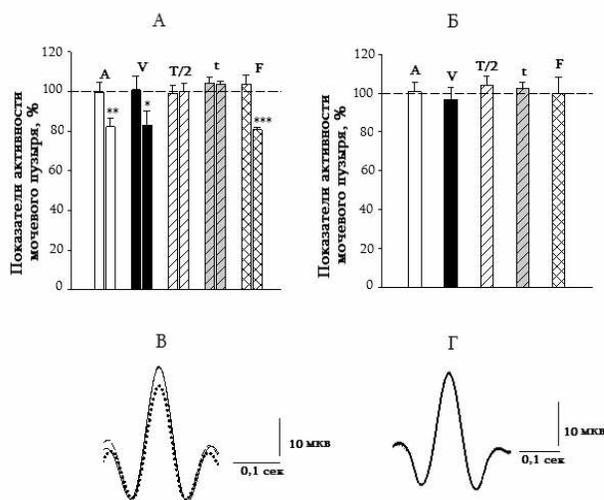


Рис. 4. Влияние последовательных перерезок мочеточников на активность мочевого пузыря. А – Процентное соотношение показателей активности мочевого пузыря после перерезки левого мочеточника (рис.1. I) (первые столбики соответственно для каждого показателя) и последующей перерезки правого мочеточника (рис.1. II) (вторые столбики соответственно для каждого показателя). Штриховая линия соответствует показателям активности мочевого пузыря в норме. Б – Процентное соотношение показателей активности мочевого пузыря после перерезки уретры (рис.1. III). Штриховая линия соответствует показателям активности мочевого пузыря после перерезки правого мочеточника. В – Наложение друг на друга усредненных форм потенциалов действия в норме (сплошной контур), после перерезки I (штрихпунктирный контур), после перерезки II (точечный контур). Наложение друг на друга усредненных форм потенциалов действия после перерезки II (точечный контур), после перерезки III (пунктирный контур). *** $P < 0.001$, ** $P < 0.01$, * $P < 0.05$. $n = 16$.

Последующее отсоединение от мочевого пузыря уретры (рис. 1. III) обеспечивало его полную изоляцию. Вместе с тем, согласно проведенному анализу показателей активности мочевого пузыря, при данной постановке эксперимента не были выявлены какие-либо изменения значений показателей его активности (рис. 4, Б). Таким образом, спонтанная базовая активность мочевого пузыря среди всех приграничных с ним органов модулируется влиянием автоматизма лишь правого мочеточника.

Исходя из вышеизложенных результатов изоляция мочевого пузыря от левого мочеточника, характеризующегося более высокими значениями таких параметров, как амплитуда и скорость ее нарастания, в отличие от правого мочеточника не влияет на базовую активность мочевого пузыря. Вместе с тем последующее отсечение правого мочеточника приводит к уменьшению аналогичных показателей активности потенциалов действия мочевого пузыря. Возможно, правый мочеточник в связи с наличием более устойчивых показателей активности (перерезка органа не влияет на их значения) способен компенсировать отсутствие влияния левого (активного) мочеточника. Уретра же, в отличие от мочеточников, являясь более пассивным и дистально расположенным по отношению к мочевому пузырю органом, полностью сама зависит от сменяющих друг друга его функциональных фаз [6, 14], и поэтому отсоединение уретры от мочевого пузыря не оказывает определенного влияния на его активность.

Институт физиологии им. Л. Орбели НАН РА

К. В. Казарян, Р. Г. Чибухчян, Э. Х. Мкртчян

Взаимосвязь спонтанной активности мочевого пузыря и ритмогенеза приграничных к нему органов

Проведены исследования параметров спонтанной электрической активности мочеточников и мочевого пузыря у крыс как в норме, так и при изоляции каждого из органов от влияния соседних. Показаны различия в показателях автоматизма мочеточников в норме: величина амплитуды, скорости ее нарастания и частоты генеза потенциалов действия левого мочеточника несколько выше таковых правого мочеточника. Выявлено также изменение этих же параметров ритмогенеза левого мочеточника в условиях его изоляции. Полная изоляция мочевого пузыря приводит к уменьшению характеристик его активности при последовательном отсоединении от него в первую очередь левого мочеточника, а затем правого. Таким образом, параметры потенциалов действия мочевого пузыря модулируются при отсечении от него второго, оставшегося, мочеточника.

Ք. Վ Ղազարյան, Ռ. Գ. Չիբուխյան, Է. Խ. Մկրտչյան

Միզապարկի ինքնաբուխ ակտիվության և նրան հարակից օրգանների ռիթմավարության միջև փոխադարձ կապը

Ուսումնասիրվել են միզապարկի և միզածորանների ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության պարամետրերը ինչպես նորմայում, այնպես էլ յուրաքանչյուր օրգանի՝ իր հարևան օրգանի ազդեցությունից մեկուսացման պայմաններում: Նորմայում միզածորանների ինքնավար ակտիվության ցուցանիշների միջև բացահայտվել են տարբերություններ: Ամպլիտուդայի մեծությունը, նրա վերելքի արագությունները և ձախ միզածորանի գործողության պոտենցիալների զենեզի հաճախականությունները որոշակի չափով գերազանցում են աջ միզածորանի այդ նույն պարամետրերը: Այդ նույն պարամետրերի փոփոխությունները բացահայտվել են նաև ձախ միզածորանի մեկու-

սացման պայմաններում: Միզապարկի ամբողջական մեկուսացումը, երբ հաջորդաբար նրանից առանձնացվում են առաջին հերթին ձախ միզածորանը, այնուհետև աջ միզածորանը և վերջում միզուկը, բերում է նրա ակտիվության բնութագրերի նվազմանը: Բացահայտվել է, որ միզապարկի գործողության պոտենցիալների պարամետրերը ձևավորվում են նրանից երկրորդ, մնացյալ միզածորանի մեկուսացումից հետո:

K. V. Kazaryan, R. G. Chibukhchyan, H. KhMkrtchyan

Interrelation between Spontaneous Activity of the Bladder and Rhythmogenesis of Organs Bordering with It

Studies of the ureters and bladder spontaneous electrical activity parameters in rats were conducted both in norm and after isolation of each organ from the influence of the neighboring with them organs.- Differences in indices of the ureters automatism in norm were shown. The magnitude of the amplitude, rate of its increase and the frequency of genesis of action potentials of the left ureter are slightly higher than those of the right one. The change of these parameters of the left ureteral rhythmogenesis in conditions of its isolation was also revealed. Complete isolation of the bladder leads to a decrease in the characteristics of its activity, when it is consistently detached, first of all, from the left ureter then from the right one and then from the urethra. Thus, the parameters of the bladders action potentials are modulating, when the second, remaining ureter is cutting off from the bladder.

Литература

1. *Hara J., Kubata M., Szurszewski J.* – J. Physiol. 1986. V.372. P.501-520.
2. *Santicioli P., Maggi C.A.* –Pharmacol Rev 1998. V. 50(4). P. 683-722.
3. *Osman F, Romics I, Nytrády P, Monos E, Nádasz G.L* – Ureteral motility.ActaPhysiol Hung. 2009. V. 96(4). P. 407-26.
4. *Lang R.J, Exintaris B., Teele M. E., Harvey J., Klemm M. F.* – ClinExpPharmacol Physiol. 1998.. V. 25(5). P. 310-21.
5. *Weiss R. M., Tamarkin F. J., Wheeler M. A.* –J. Smooth Muscle Res. 2006. V. 42(4). P. 103-115.
6. *Fry C.H.I, Meng E., Young J.S.* –Auton Neurosci1. 2010. V. 54(1-2). P. 3-13.
7. *Drake M. J., Harvey I. J., Gillespie J. I.* – Exp. Physiolog.2003. V. 88. P. 19-30.
8. *Andersson K.E., Arner A.* – Physiol Rev. 2004, V, 84(3). P. 935-86.
9. *Sibley G.N.* –J Physiol. 1984. V. 354. P. 431-43.
10. *Sui G., Fry C.H., Malone-Lee J., Wu C.* –Cell Calcium. 2009. V. 45(5). P. 456-64.
11. *Hashitani H.,VanHelden D.F., Suzuki H.* – Br J Pharmacol. 1996. V. 118(7). P. 1627-32.
12. *Hashitani H., Edwards F.R.* –J Physiol. 1999. V. 514 (Pt 2). P. 459-70.
13. *McHale N.G., Hollywood M.A, Sergeant G.P., Shafei M, Thornbury K.T., Ward S.M.* – J Physiol. 2006. V. 576 (Pt 3). P. 689-94.
14. *Brading A.F.* –J Physiol. 2006. V. 570(Pt 1). P. 13-22.2006.
15. *Moore K., Agur A.* In: Essential Clinical Anatomy. Third Edition, Lippincott Williams and Wilkins, Philadelphia, 2007. P. 227-228.
16. *Kazaryan K.V., Simonyan L.G., Chibukhchyan R.G.* –Ureter, Urinary,Bladder. Ross Fiziol ZhImI Sechenova. 2015. V. 101(4). P. 433-40.