

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵՎՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2017

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ս. ԹԱՎԱԴՅԱՆ,
ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի
տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԲՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս
Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН,
академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам.
главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик Л. А.
ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, corresponding member of NAS RA L. M.
AROUTIUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding
member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician L. A. TAVADYAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone: (37410)56-80-67 *URL:* <http://elib.sci.am> *e-mail:* rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2017
©Издательство “Гитутюн”
НАН РА. 2017

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ռ. Վ. Դալլաքյան</i> – Որոշ խնդիրներ Ջրբաշյանի արտադրյալների մասին	7
<i>Կ. Ա. Քեռյան</i> – R -ի վրա զրո միջին ունեցող օրթոնորմալ սպլայն համակարգերի $H^1(R)$ -ում բազիսության վերաբերյալ	14
<i>Գ. Գ. Գևորգյան, Կ. Ա. Նավասարդյան</i> – Վիլենկինի և Հաարի համակարգերով շարքերի գումարման մի մեթոդի մասին	20

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

<i>Հ. Ա. Սահակյան</i> – Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության մոտարկում	26
<i>Գ. Է. Հարությունյան</i> – Թեստավորման արդյունավետ մոտեցում նանոչափական հիշող սարքերի համար	35

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Է. Վ. Բելուբեկյան, Ա. Զ. Դարբինյան, Ա. Ա. Սահակյան</i> – Կոմպոզիտային շերտավոր կողավոր սալի ծոման ջերմաառաձգական խնդիրը	44
<i>Լ. Ա. Աղալովյան</i> - Մարմինների և մասնիկների՝ ավելի հզոր, քան նյութոսկանը, կենտրոնական փոխազդեցության մասին	52

ԱՌԱՋԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Վ. Վ. Թազվորյան</i> - Շերտավոր սալերի համար առաձգականության տեսության մեկ ոչ դասական եզրային խնդրի մասին	60
---	----

ՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Հ. Սարգսյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Սարգսյան</i> - 5-վինիլտետրազոլի և մեթակրիլաթթվի հիման վրա պոլիմերային ծածկույթների էլեկտրասինթեզ	68
--	----

ԿԵՆՍԱՖԻԶԻԿԱ

<i>Պ. Հ. Վարդևանյան, Ա. Պ. Անտոնյան, Մ. Ա. Փարսադանյան, Վ. Գ. Սահակյան</i> – ԴՆԹ-ի հետ ակրիդինային նարնջագույնի և էթիդիումի բրոմիդի համատեղ կապման ուսումնասիրությունը	74
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Р. В. Даллакян</i> – Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна	7
<i>К. А. Керян</i> – О базисности в $H^1(R)$ ортонормальных систем сплайнов на R с нулевыми средними	14
<i>Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян</i> – Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара	20

ИНФОРМАТИКА

<i>А. А. Саакян</i> – Аппроксимация последовательности степеней вершин гиперграфа	26
<i>Г. Э. Арутюнян</i> – Эффективный подход к тестированию нанометрических устройств памяти.....	35

МЕХАНИКА

<i>Э. В. Белубекян, А. З. Дарбинян, А. А. Саакян</i> – Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки	44
<i>Л. А. Агаловян</i> – О более мощном, чем ньютоново, центральном взаимодействии тел и частиц	52

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>В. В. Тагворян</i> – Об одной неклассической краевой задаче теории упругости для слоистых пластин	60
--	----

ХИМИЯ

<i>С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян</i> – Электросинтез полимерных покрытий на основе 5-винилтетразола и метакриловой кислоты	68
---	----

БИОФИЗИКА

<i>П. О. Вардеванян, А. П. Антонян, М. А. Парсаданян, В. Г. Саакян</i> – Исследование совместного связывания акридинового оранжевого и бромистого этидия с ДНК	74
--	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>R. V. Dallakyan</i> – Some Problems about Products of Djrbashyan	7
<i>K. A. Keryan</i> – Orthonormal Spline Systems on $\mathcal{R}$ with Zero Means as Bases in $H^1(\mathcal{R})$	14
<i>G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan</i> – On a Summation Method for Series with Respect to Vilenkin and Haar Systems	20

INFORMATICS

<i>H. A. Sahakyan</i> - Hypergraph Degree Sequence Approximation	26
<i>G. E. Harutyunyan</i> – An Efficient Test Approach for Modern Nanoscale Memory Devices	35

MECHANICS

<i>E. V. Belubekyan, A. Z. Darbinyan, A. A. Sahakyan</i> – Thermoelasticity Problem of Bending of the Composite Laminated Ribbed Plate	44
<i>L. A. Aghalovyan</i> – On More Powerful than Newton Central Interaction of Bodies and Particles	52

ELASTICITY THEORY

<i>V. V. Tagvoryan</i> – On a Non-Classic Boundary Problem of the Theory of Elasticity for Layered Plates	60
--	----

CHEMISTRY

<i>S. H. Sargsyan, K. S. Margaryan, A. S. Sargsyan</i> – Electrosynthesis of Poly- meric Coatings Based on 5-vinyltetrazole Methacrylic Acid.....	68
--	----

BIOPHYSICS

<i>P. O. Vardevanyan, A. P. Antonyan, M. A. Parsadanyan, V. G. Sahakyan</i> – Study of Joint Binding of Acridine Orange and Ethidium Bromide with DNA	74
--	----

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна

(Представлено академиком В. С. Захаряном 14/XII 2016)

Ключевые слова: оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведения Бляшке и Джрбашяна, классы гармонических в единичном круге функций U_α , γ -емкость множества E .

Введение. Пусть $\mathcal{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $-1 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$, $z_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |z_n|)^{1+\alpha} < +\infty. \quad (1)$$

В книге [1] (гл. IX) произведение $B_\alpha(z; \{z_n\})$, $z \in \mathcal{D}$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом:

$$B_\alpha(z; \{z_n\}) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \left\{ -W_\alpha(z; z_n) \right\},$$

где для $\xi \in \mathcal{D}$

$$W_\alpha(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \bar{\xi}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} z^k.$$

В [1] (с. 625) доказано, что в специальном случае $\alpha = 0$ эти произведения превращаются в произведения Бляшке

$$B_0(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \frac{|z_n|}{z_n}.$$

В работе [2] отмечено следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями B_α , $(-1 < \alpha < 0)$ и B .

Теорема. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда

$$B_{\alpha}(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\alpha}(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\},$$

где

$$S_{\alpha}(z) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, |z| < 1,$$

$\omega(\theta)$ – некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

Отметим, что для любой функции $\omega(x)$ из класса Ω (см. [3], гл. 1) М. М. Джрбашьяном также определены классы N_{ω} и произведения B_{ω} . Подобные классы и произведения определены М. М. Джрбашьяном и на верхней полуплоскости (см. [4]).

По теореме Фростмана (см. [5], с. 54) для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi} - z_n|} < +\infty.$$

Для произведений B_{α} ($-1 < \alpha < 0$) известно, что если имеет место условие типа Фростмана (см. [6], с. 139)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi} - z_n|} \right)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный и отличный от нуля предел произведения B_{α} . Вопрос о справедливости обратного утверждения пока остается открытым.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0, 2\pi]$. Будем называть мерой μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т.е. $\mu([0, 2\pi]) = 1$. Будем говорить, что мера сосредоточена на B и писать $\mu \prec B$, если $\mu(B) = 1$, т.е. если

$$\int_B d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = 1.$$

Скажем, что множество E , измеримое по Борелю, имеет положительную γ -емкость ($0 < \gamma < 1$), если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x; z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{|e^{it} - re^{ix}|^\gamma}$$

остаётся равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1-0$, т. е., если при некотором $\mu \prec E$ имеем

$$V_\gamma(\mu) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 2\pi} V_\gamma(x; r) \right\} < +\infty.$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$, то скажем, что E имеет γ -емкость, равную нулю, и напомним $\text{cap}_\gamma E = 0$.

В работе [6] доказано, что если последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и имеет место $(1+\alpha)$ – условие типа Фростмана ($-1 < \alpha < 0$), то везде на $[0, 2\pi]$ существуют конечные радиальные значения (отличные от нуля) произведения $B_\alpha(z; \{z_n\})$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$ -емкость которого равна нулю: $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$.

Более того, если точка $z = e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$, то произведение $B_\alpha(z; \{z_n\})$ непрерывно в некоторой окрестности точки $z = e^{i\varphi}$ ($|z| \leq 1$).

Если последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1), то для произведения Бляшке также везде на $[0, 2\pi]$ существует радиальный предел (по модулю равный единице) кроме некоторого множества E , для которого $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$ (см. [7]).

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} D^{-\alpha} \{\varphi(r)\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \text{ если } 0 < \alpha < +\infty, \\ D^0 \{\varphi(r)\} &= \varphi(r), \\ D^{-\alpha} \{\varphi(r)\} &= \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} \{\varphi(r)\}, \text{ если } -1 < \alpha < 0. \end{aligned}$$

Обозначим через U_α ($-1 < \alpha < +\infty$) класс гармонических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |u_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} < +\infty,$$

где при данном α

$$u_\alpha(re^{i\varphi}) \equiv r^{-\alpha} D^{-\alpha} u(re^{i\varphi}).$$

Известно, что если $u(z)$ - гармоническая в единичном круге функция, то при любом $\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$ ассоциированная с ней функция $u_\alpha(z)$ также будет гармонической (см. [1], с. 649).

Класс аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле D_0^2 определяется как множество тех аналитических в единичном круге функций f , для которых

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2 dr d\theta < +\infty.$$

Основные результаты. Сначала доказывается утверждение о граничной функции бесконечного произведения B_α .

Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и бесконечная последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда граничная функция $B_\alpha(e^{i\theta}; \{a_n\})$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ не может совпадать с функцией ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

Из доказанной теоремы и из того факта, что абсолютно непрерывная функция является функцией конечной вариации, следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и бесконечная последовательность комплексных чисел $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда граничная функция $B_\alpha(e^{i\theta}; \{a_n\})$ не может являться абсолютно непрерывной функцией на $[0, 2\pi]$.

Теперь рассмотрим одну из задач, поставленных академиком В. С. Захаряном еще в семидесятые годы прошлого века: пусть множество нулей $\{a_n\}$ произведения М. М. Джрбашяна удовлетворяют условию

$$a_n = (1 - q^n) e^{i\varphi}, n = 1, 2, \dots, 0 < q < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

удовлетворяют ли коэффициенты Тейлора произведения $B_\alpha(z; \{a_n\})$ при $-1 < \alpha < 0$ следующему условию:

$$|\hat{B}_\alpha(n)| = O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{\ln q}}}\right), \quad (2)$$

и, вообще, существует ли непрерывное в замкнутом круге $|z| \leq 1$ произведение $B_\alpha(z; \{a_n\})$.

Пусть коэффициенты Тейлора бесконечного произведения $B_\alpha(z; \{a_n\})$ удовлетворяют условию (2). Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{B}_\alpha(n)|^2 n \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}} < +\infty.$$

Отсюда, так как $f(z) = \sum a_n z^n \in D_0^2$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_n|^2 n < +\infty$, следует, что $B_\alpha(z; \{a_n\}) \in D_0^2$. Это противоречие и показывает, что первая из поставленных задач имеет отрицательный ответ. Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда, если

$$|\hat{B}_\alpha(n)| = \frac{\gamma_n}{n},$$

где $\{\gamma_n\}$ – ограниченная последовательность, то

$$\sum |\hat{B}_\alpha(n)| = +\infty.$$

Перейдем к анализу второй из выше поставленных задач. Так как (см. [11], с. 52) существует аналитическая в $\mathbb{D}$ и непрерывная в замкнутом круге $\mathbb{D}$ функция $f(z) = \sum b_n z^n$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = +\infty$, то из теоремы 3 еще не следует, что утверждение второй из этих задач также неверно. В этом направлении отметим следующий результат.

Теорема 4. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$, последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и для некоторого значения $\varphi \in [0; 2\pi]$ имеет место условие типа Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} \right)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Тогда, если $e^{i\varphi}$ является точкой сгущения последовательности $\{a_n\}$, то в этой точке произведение $B_\alpha(z; \{a_n\}); |z| \leq 1$ имеет разрыв.

Замечание. Хотя и утверждение теоремы очевидное, однако автору не удалось найти эту теорему в других работах.

Из теоремы 4 следует, что для того чтобы произведение $B_\alpha(z; \{a_n\}); -1 < \alpha < 0$, было непрерывным в замкнутом круге $|z| \leq 1$, необходимо, чтобы во всех точках $e^{i\varphi}$ сгущения последовательности $\{a_n\}$ имело место условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} \right)^{1+\alpha} = +\infty.$$

Как отмечено во введении, произведение B_α ($-1 < \alpha < 0$) определено везде на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ кроме, быть может, некоторого исключительного множества E такого, что $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$. Докажем, что на множестве $\partial\mathbb{D} \setminus E$ модуль произведения B_α ($-1 < \alpha < 0$) не может быть постоянным. Отметим, что по теореме Фростмана (см. [5], с. 54) модуль произведения Бляшке везде на $\partial\mathbb{D}$ равен единице, кроме, быть может, точек $e^{i\varphi}$ сгущения последовательности нулей.

Теорема 5. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и

$$E = \left\{ e^{i\varphi}; \varphi \in [0; 2\pi], \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} \right)^{1+\alpha} = +\infty \right\}.$$

Тогда модуль произведения $B_\alpha(z; \{a_n\})$ на множестве $\partial\mathbb{D} \setminus E$ не может быть постоянным.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Национальный политехнический университет Армении

Р. В. Даллакян

Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна

Пользуясь аппаратом интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс функций, мероморфных в единичном круге N Р. Неванлинны, введя в рассмотрение классы N_α ($-1 < \alpha < +\infty$). Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения B_α , которые в специальном случае $\alpha = 0$ превращаются в произведения Бляшке. В статье приведен анализ и решены некоторые задачи о произведениях B_α ($-1 < \alpha < 0$) М. М. Джрбашяна, которые были поставлены в семидесятые годы прошлого века.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Որոշ խնդիրներ Ջրբաշյանի արտադրյալների մասին

Օգտվելով Ռիման-Լիուվիլլի ինտեգրո-դիֆերենցման ապարատից, Մ. Մ. Ջրբաշյանը ընդհանրացրել է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլինայի N դասը, ներմուծելով N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) դասերը: Այդ դասերի ուսումնասիրության ժամանակ իրենց հիմնարար դերն ունեն B_α արտադրյալները, որոնք հատուկ $\alpha = 0$ դեպքում վեր են ածվում բլաշկեի արտադրյալների: Այս աշխատանքում լուծված են

$B_\alpha (-1 < \alpha < 0)$ արտադրյալների մասին խնդիրներ, որոնք դրվել են նախորդ դարի յոթանասունական թվերին:

R.V. Dallakyan

Some Problems about Products of Djrbashyan

Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator M. M. Djrbashyan generalized the class N_- meromorphic functions in the unit circle R. Nevanlinna, introducing classes $N_\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$. During investigations of these classes essential role have products $B_\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$, which in the special case of $\alpha = 0$ coincide with the Blaschke product. In this article, some problems are solved about products $B_\alpha (-1 < \alpha < 0)$ proposed at 70-s last century.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. Заметки. 1968. Т. 4, N 1. С. 3-10.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 213 с.
4. *Djrbashian A. M.* Functions of α -Bounded Type in the Half-Plane.- Springer Science+Business Media, ins. 2005.
5. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312с.
6. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР, Математика. 1968. Т. 3. N 4, 5. С. 288-300.
7. *Broman A.* On two classes of trigonometrical series. Thesis. University of Uppsala. 1947.
8. *Захарян В. С., Даллакян Р. В., Оганисян И. В.* – Научные ведомости БелГУ (математика, физика). 2016. N6 (227). Вып. 42. С. 5-11.
9. *Kim M. O.* – Pacific Journal of Math. 1984. V. 114. N 1.
10. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. Мир. 1984. 169 с.
11. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York and London, Ac. Press. 1970. 260 p.
12. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.34

К. А. Керян

**О базисности в $H^1(R)$ ортонормальных систем сплайнов
 на R с нулевыми средними**

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 28/XII 2016)

Ключевые слова: *сплайн система, базисность, пространство Харди.*

Детальное изучение ортонормальных сплайн систем начато З. Чисельским [1, 2] в 1960-х гг. Эти системы с двоичными узлами являются базисами или безусловными базисами в некоторых пространствах, таких как $L^p[0,1], 1 \leq p < \infty$, $C[0,1]$, $H^p[0,1], 0 < p \leq 1$, в пространствах Соболева $W^{p,k}[0,1]$. Эти результаты получены в работах З. Чисельского, Ж. Домсты, С. Бочкарева, П. Войтащчика, П. Щелина, Ж.-О. Стромберга (более подробные ссылки см. в [3-5]).

Эти результаты для ортонормальных сплайн систем с произвольными узлами получили распространение со случая системы Франклина, т. е. с ортонормальной системы сплайнов второго порядка. Безусловная базисность в $L^p[0,1]$, для $1 < p < \infty$, системы Франклина, соответствующая произвольной последовательности узлов, доказана в [6]. Г. Г. Геворкян и А. Камонт [4] получили простую геометрическую характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Случай сплайнов высшего порядка гораздо сложнее. Отметим, что гипотеза де Боора о равномерной оценке норм ортогональных проекторов на пространство сплайнов порядка r , выдвинутая в 1973 г. [7], получила положительный ответ в общем случае Ю. Щадриним в 2001 г. [8]. Недавно М. В. Голитчек дал более простое и короткое доказательство этой теоремы [9]. Из теоремы Щадрина немедленно следует, что если последовательность узлов всюду плотна в $[0,1]$, то соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является базисом в $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

и $C[0,1]$. Более того, З. Чисельский получил несколько следствий результата Щадрина, в частности, оценки для обратной от матрицы Грамма B -сплайнов [10]. Используя эти оценки, Г. Г. Геворкян и А. Камонт [5] распространили часть их результатов из [4] для ортонормальных сплайн систем любого порядка и получили характеризацию последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормальная сплайн система порядка r является базисом в $H^1[0,1]$. Недавно М. Пассенбруннер доказал, что для всякой всюду плотной последовательности узлов соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является базисом в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$ [11]. А в [12] получена характеризация последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Г. Г. Геворкян и К. Керян получили характеризацию последовательностей узлов, для которых соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними является базисом в $H^1(R)$ [13]. Далее автор получил характеризацию последовательностей, для которых последняя система является безусловным базисом в $H^1(R)$ [14]. Отметим, что условия полученные в этих работах, не совпадают с полученными для интервала $[0,1]$ в [4].

Главным результатом настоящей работы является характеризация тех последовательностей, для которых соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r , состоящая из функций с нулевыми средними, является базисом в $H^1(R)$.

Дадим необходимые определения.

Определение 1. Последовательность (разбиение) $T = \{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой (на R), если T всюду плотно в R и $t_i \neq t_j$, когда $i \neq j$.

Зафиксируем натуральное число r . Для допустимой последовательности $T = \{t_n : n \geq 0\}$ и $n \geq 1$ обозначим $T_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой:

$$\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}, \quad \pi_n = T_n.$$

Обозначим $\tau_i^n := \tau_1^n$ для $-r+2 \leq i \leq 0$ и $\tau_i^n := \tau_{n+r+1}^n$ для $n+r+2 \leq i \leq n+2r$. Пусть $(N_{n,i})_{i=-r+2}^{n+r}$ последовательность B -сплайнов порядка r , соответствующая $(\tau_i^n)_{i=-r+2}^{n+2r}$. Известно, что функции $N_{n,i}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{supp } N_{n,i} = [\tau_i^n, \tau_{i+r}^n], N_{n,i} \geq 0, \int_R N_{n,i}(t) dt = \frac{v_{n,i}}{r}, \sum_{i=-r+2}^{n+r} N_{n,i}(t) = 1_{\Delta_n}(t),$$

где $v_{n,i} := \tau_{i+r}^n - \tau_i^n$, $\Delta_n := [\tau_1^n, \tau_{n+r+1}^n]$, а 1_E – характеристическая функция множества E .

Через $S_n^{(r)}$ обозначается пространство кусочно-полиномиальных функций на R , соответствующих последовательности узлов π_n , т. е. $S_n^{(r)}$ – пространство $r-2$ раза непрерывно дифференцируемых на R функций f с носителем $\Delta_n = [\tau_1^n, \tau_{n+r+1}^n]$, которые являются полиномами степени меньше r на каждом отрезке $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$, $i = 1, 2, \dots, n+r$. Очевидно, что $S_n^{(r)}$ является линейной оболочкой функций $(N_{n,i})_{i=1}^{n+1}$, и они формируют базис в $S_n^{(r)}$, следовательно $\dim S_n^{(r)} = n+1$. Заметим, что функции $N_{n,i} \notin S_n^{(r)}$ для $i = -r+2, \dots, 0$ и $i = n+2, \dots, n+r$.

Определение 2. Пусть $S_n^{r,0}$ – подпространство всех функций из $S_n^{(r)}$, чьи интегралы по R равны нулю.

Ясно, что $S_n^{r,0}$ имеет коразмерность 1 в $S_n^{(r)}$, откуда $\dim S_n^{r,0} = n$. Так как $S_{n-1}^{r,0} \subset S_n^{r,0}$, следовательно, для $n \geq 1$ существует (с точностью до знака) единственная функция $F_n^{(r)} \in S_n^{r,0}$, которая ортогональна $S_{n-1}^{r,0}$ и $\|F_n^{(r)}\|_2 = 1$.

Система функций $(F_n^{(r)})_{n=1}^\infty$ называется ортонормальной системой сплайнов с нулевыми средними на R , соответствующей последовательности T .

Понятия регулярности последовательностей сыграли важную роль при исследовании системы Франклина ($r=2$) на $[0,1]$ и общей системы Франклина функций с нулевыми средними на R .

Дадим определения регулярных последовательностей.

Определение 3. Пусть T – допустимая последовательность. Назовем T **r -регулярной** с параметром $\gamma \geq 1$, если для $n \geq 1$ и $i = 1, 2, \dots, n$ имеют место неравенства

$$\gamma^{-1} \leq \frac{v_{n,i+1}}{v_{n,i}} \leq \gamma.$$

Определение 4. Пусть T – допустимая последовательность. Назовем T **r -регулярной на R** с параметром $\gamma \geq 1$, если T r -регулярна и для $n \geq 1$ имеют место неравенства

$$\gamma^{-1} \leq \frac{v_{n,1}}{|\Delta_n|}, \quad \gamma^{-1} \leq \frac{v_{n,n+1}}{|\Delta_n|}.$$

Главный результат этой статьи – характеристизация последовательностей, для которых $(F_n^{(r)})_{n=1}^\infty$ является базисом в $H^1(R)$.

Теорема 1. Пусть $T = \{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность на R , тогда соответствующая ей система $(F_n^{(r)})_{n=1}^\infty$ является базисом в $H^1(R)$ тогда и только тогда, когда T r -регулярна на R с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

Введем следующие обозначения. Через $D_n(t, s)$ и $K_n(t, s)$ обозначим ядра (Дирихле) ортогональных проекций P_n и P_n из $L^1(R)$ в $S_n^{r,0}$ и $S_n^{(r)}$ соответственно.

Теорема 1 доказывается с применением лемм 1-6. Эти леммы найдут применение при дальнейшем исследовании системы $(F_n^{(r)})_{n=1}^\infty$.

Лемма 1. Для ядра $D_n(t, s)$ имеет место следующее разложение:

$$D_n(t, s) = K_n(t, s) - \frac{\int_R K_n(x, s) dx}{\iint_{R^2} K_n(x, y) dx dy} \cdot \int_R K_n(t, x) dx.$$

Лемма 2. Пусть последовательность T r -регулярна на R с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, тогда существуют постоянная $C_\gamma > 0$, зависящая только от γ, r , и постоянная $q \in (0, 1)$, зависящая только от r так, что для любых $x \in [\tau_i^n, \tau_{i+r}^n]$, $y \in [\tau_j^n, \tau_{j+r}^n]$ имеет место

$$|K_n(x, y)| \leq C_\gamma \frac{q^{|j-i|}}{\max\{v_{n,k}; \min(i, j) \leq k \leq \max(i, j)\}}.$$

Лемма 3. Существует постоянная $c_r > 0$, зависящая только от r такая, что ядро $K_n(x, y)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\iint_{R^2} K_n(x, y) dx dy \geq c_r |\Delta_n|.$$

Лемма 4. Существует постоянная $C_r > 0$, зависящая только от r такая, что для $n \geq 1$ имеют место неравенства

$$\int_R |D_n(t, s)| ds \leq C_r, \quad \forall t \in R.$$

Необходимость r -регулярности на R последовательности T в теореме 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 5. Существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\sup \|P_n(f)\|_{H^1} > C_1 \ln M - C_2,$$

где $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{v_{n,i+1}}{v_{n,i}}, \frac{v_{n,i}}{v_{n,i+1}} \right\}$, а супремум взят по всем атомам f .

Лемма 6. Пусть последовательность T r -регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$. Если существует постоянная $\theta > 0$ такая, что для любой функции $F \in H^1(R)$ имеет место неравенство

$$\|P_n(F)\|_{H^1} \leq \theta \cdot \|F\|_{H^1},$$

то существует постоянная $C_{\gamma, \theta} > 0$ такая, что

$$\frac{v_{n,1}}{|\Delta_n|} > C_{\gamma, \theta}, \quad \frac{v_{n,n+1}}{|\Delta_n|} > C_{\gamma, \theta}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006.

Ереванский государственный университет
e-mail: karenkeryan@ysu.am

К. А. Керян

**О базисности в $H^1(R)$ ортонормальных систем сплайнов
на R с нулевыми средними**

Получена геометрическая характеристика последовательностей, для которых соответствующая ортонормированная система сплайнов порядка r с нулевыми средними является базисом в пространстве Харди $H^1(R)$.

Կ. Ա. Քերյան

**R -ի վրա զրո միջին ունեցող օրթոնորմալ սպլայն համակարգերի
 $H^1(R)$ -ում բազիսության վերաբերյալ**

Ստացվել է երկրաչափական բնութագրություն բոլոր այն հաջորդականությունների համար, որոնց համապատասխան R -ի վրա զրո միջին ունեցող r -րդ կարգի օրթոնորմալ սպլայն համակարգերը բազիս են Հարդիի $H^1(R)$ տարածությունում:

K. A. Keryan

**Orthonormal Spline Systems on R with Zero Means
as Bases in $H^1(R)$**

Geometric characterization of knot sequences for which the corresponding orthonormal spline system of arbitrary order r with zero mean is a basis in Hardy space $H^1(R)$ is received.

Литература

1. Ciesielski Z. – Studia Math. 1963. V. 23. P. 141-157.
2. Ciesielski Z. – Studia Math. 1966. V. 27. P. 289-323.
3. Gevorkyan G. G., Kamont A. – Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) 1998. V. 374. P. 1-59.
4. Gevorkyan G. G., Kamont A. – Studia Math. 2005. V. 167. P. 259 -292.
5. Gevorkyan G. G., Kamont A. – East J. Approx. 2008. V. 14. P. 161-182.
6. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, – Studia Math. 2004. V. 164. P. 161 - 204.
7. de Boor C. Approximation Theory (Austin, TX, 1973). Academic Press, New York, 1973. P. 269-276.
8. Shadrin A. – Acta Math. 2001. V. 187. P. 59-137.

9. v. *Golitschek M.* – J. Approx. Theory. 2014. V. 181. P. 30-42.
10. *Ciesielski Z.* – Function spaces (Poznan, 1998). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 213. Dekker. New York. 2000. P. 133-140.
11. *Passenbrunner M.* – Studia Math. 2014. V. 222. P. 51-86.
12. *Gevorkyan G. G., Kamont A., Keryan K., Passenbrunner M.* – Studia Math. 2015. V. 226. P. 123-154.
13. *Gevorkyan G. G., Keryan K.* – J. Contemp. Math. Anal. 2016. V, 51. N 2. P. 68-78.
14. *Keryan K. A.* – J. Contemp. Math. Anal. 2016. V, 51. N 6. P. 269-288.

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян

Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара

(Представлено 19/ I 2017)

Ключевые слова: метод суммирования, мажоранта частичных сумм, теорема единственности, ряд Фурье.

Сначала напомним определения систем Виленкина и Хаара, порожденных последовательностью натуральных чисел $p_k \geq 2$, $k \in N$. Положим $m_0 = 1$, $m_{k+1} = m_k p_{k+1}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \text{ где } n_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}, k \in N.$$

Любое число $x \in [0, 1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \text{ где } x_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}, k \in N,$$

и для бесконечно многих $k \in N$ имеет место $x_k \neq p_k - 1$. Обобщенные функции Радемахера определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right), \text{ где } i := \sqrt{-1}.$$

Система Виленкина $\psi := \{\psi_n : n \in N\}$ определяется по правилу

$$\psi_0(x) \equiv 1 \text{ и } \psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right) \text{ для } n \in N. \quad (1)$$

В случае $p_k = 2$, $k \in N$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Как система Уолша связана с системой Хаара, так и система Виленкина связана с одним обобщением системы Хаара.

Для $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s - 1$, где $0 \leq r \leq m_k - 1$, $1 \leq s \leq p_{k+1} - 1$, положим

$$\chi_n(x) := \chi_{r,s}^k(x) := \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp\left(2\pi i \frac{x_{k+1}}{p_{k+1}} s\right), & \text{когда } x \in \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, & \text{когда } x \notin \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right). \end{cases} \quad (2)$$

Полагая $\chi_0(x) \equiv 1$, получим обобщенную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, порожденную последовательностью натуральных чисел $p_k \geq 2$, $k \in N$. При $p_k = 2$, $k \in N$, эта система совпадает с классической системой Хаара.

Эти системы определены в [1] и в математической литературе хорошо изучены. При выполнении условия $\sup_k p_k < \infty$ система Виленкина по своим свойствам очень близка системе Уолша, а обобщенная система Хаара близка системе Хаара. При $\sup_k p_k = \infty$ системы, определенные формулами (1), (2), сильно отличаются от систем Уолша и Хаара.

В настоящей работе для рядов по системам (1), (2) определяется один линейный метод суммирования, который применяется для доказательства теорем единственности рядов по этим системам.

Обозначим

$$\mathfrak{Z}_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_{k+1}}, \frac{j+1}{m_{k+1}} \right) : j = 0, 1, \dots, m_{k+1} - 1 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для интервала $J \in \mathfrak{Z}_k$ обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\mathfrak{Z}_{k-1}$, который содержит J . Определим интервалы J_l следующим образом:

$$1. J_l \subset \tilde{J}, \quad J_0 = J,$$

2. правый конец интервала J_l совпадает с левым концом интервала J_{l+1} , причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т. е. если правый конец интервала J_l есть $\frac{j}{m_k}$, то левый конец интервала J_{l+1} будет $\frac{j-1}{m_k}$.

Положим

$$J^q = \bigcup_{l=-q}^q J_l, \quad \text{для } q \in \left\{ 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{p_{k+1}}{2} \right] - 1 \right\}.$$

Ясно, что $J^0 = J$.

Пусть $k \in N$ и $q \in \left\{ 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{p_{k+1}}{2} \right] - 1 \right\}$. Для $x \in [0, 1)$, $k \in N$, через $I_{k,x}$ обозначим интервал со свойствами: $I_{k,x} \in \mathfrak{Z}_k$ и $x \in I_{k,x}$. Для $q > 0$ обозначим

$$\varphi_{k,x}^q(t) = \begin{cases} \frac{m_{k+1}}{q} \left(1 - \frac{|l|}{q} \right), & \text{когда } t \in (I_{k,x})_l, |l| \leq q, \\ 0, & \text{когда } t \notin I_{k,x}^q. \end{cases} \quad (3)$$

Далее будем считать, что $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — одна из систем (1), (2). Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (4)$$

Учитывая определения систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, очевидно, что при любом $\varphi_{k,x}^q$, имеем

$$(f_n, \varphi_{k,x}^q) := \int_0^1 f_n(t) \varphi_{k,x}^q(t) dt = 0, \text{ когда } n \geq m_{k+1}.$$

Поэтому для любого ряда (4) и любого $x \in [0, 1)$ при любых k и q определены суммы

$$S_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 f_n(t) \varphi_{k,x}^q(t) dt. \quad (5)$$

Положим

$$S^*(x) = \sup_{k,q} |S_{k,q}(x)|. \quad (6)$$

Исходя из определений систем (1), (2) и функций (3) нетрудно заметить, что формулами (5) определяется некоторый линейный метод суммирования, т.е.

$$\begin{aligned} 1. S_{k,q}(x) &= \sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} \alpha_n^{k,q} a_n \psi_n(x), \text{ когда } \{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \\ 2. S_{k,q}(x) &= \sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} \beta_n^{k,q} a_n \chi_n(x), \text{ когда } \{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}, \end{aligned}$$

где числа $\alpha_n^{k,q}$, $\beta_n^{k,q}$ не зависят от последовательности коэффициентов a_n .

Для этого метода суммирования верны следующие теоремы.

Теорема 1. Если ряд (4) в точке x сходится к числу σ , то $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,q}(x) = \sigma$.

Теорема 2. Существует постоянная $C > 0$, не зависящая от последовательностей a_n , $n \in N$, и p_k , $k \in N$, такая, что

$$S^*(x) < C \cdot \sup_m \left| \sum_{n=0}^m a_n f_n(x) \right|.$$

Теорема 3. Если ряд (4) является рядом Фурье интегрируемой функции f по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, то для любого $\lambda > 0$ имеют место

$$\text{mes}\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda\} \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|, \quad (7)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,q}(x) = f(x), \text{ п.в. на } [0, 1). \quad (8)$$

В работах [2, 3] доказаны теоремы единственности для простых рядов по обобщенной системе Хаара, порожденной ограниченной последовательностью p_k , $k \in N$, и кратных рядов по классической системе Хаара, мажоранты частичных сумм которых удовлетворяют некоторому условию.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема А. Пусть система $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ порождена ограниченной последовательностью p_k , $k \in N$. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} a_n f_n(x)$ п.в. сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_v \uparrow \infty$ выполняется

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v \cdot \text{mes} \left\{ x \in [0,1) : \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_v \right\} = 0, \quad (9)$$

то для всех n имеют место

$$a_n = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[f(x) \overline{f_n(x)} \right]_{\lambda_v} dx, \quad (10)$$

где

$$[g(x)]_{\lambda} = \begin{cases} g(x), & \text{когда } |g(x)| \leq \lambda, \\ 0, & \text{когда } |g(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В той же работе [2] приведен пример систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденных неограниченной последовательностью p_k , $k \in N$, для которых теорема А неверна.

Напомним, что функция g называется A -интегрируемой на множестве X , если

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot \text{mes} \{ x \in X : |g(x)| > \lambda \} = 0$$

и существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_X [g(x)]_{\lambda} = (A) \int_X g(x) dx.$$

Оказывается, если требовать сходимость всей последовательности частичных сумм $S_n(x)$ и выполнение условия (9) для мажоранты всей последовательности частичных сумм $S_n(x)$, коэффициенты ряда (4) можно вычислить по формулам (10). А именно верна следующая теорема.

Теорема 4. Если частичные суммы $S_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n f_n(x)$ п.в. сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_v \uparrow \infty$ выполняется

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v \cdot \text{mes} \left\{ x \in [0,1) : \sup_m \left| \sum_{n=0}^m a_n f_n(x) \right| > \lambda_v \right\} = 0, \quad (10)$$

то для всех n имеют место

$$a_n = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[f(x) \overline{f_n(x)} \right]_{\lambda_v} dx. \quad (11)$$

Эта теорема следует из более общей теоремы.

Теорема 5. Если суммы $S_{k,q}(x)$ по мере сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_v \uparrow \infty$ выполняется

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v \cdot \text{mes} \{ x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda_v \} = 0, \quad (12)$$

то для всех n имеют место формулы (11).

Из этой теоремы следует

Теорема 6. Если суммы $S_{k,q}(x)$ по мере сходятся к некоторой функции $f(x)$ и выполняется

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \text{mes} \{x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda\} = 0, \quad (13)$$

то для всех n имеют место

$$a_n = (A) \int_0^1 f(x) \overline{f_n(x)} dx. \quad (14)$$

Ясно, что если функция f интегрируема по Лебегу, то в формулах (14) A -интеграл можно заменить интегралом Лебега, т.е. верна следующая

Теорема 7. Если суммы $S_{k,q}(x)$ по мере сходятся к некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ и выполняется

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \text{mes} \{x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda\} = 0,$$

то ряд (4) является рядом Фурье функции f по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Из теорем 3 и 7 легко выводится

Теорема 8. Для того чтобы ряд (4) был рядом Фурье интегрируемой функции f , необходимо и достаточно, чтобы суммы $S_{k,q}(x)$ по мере сходились $f(x)$ и выполнялось (12) для некоторой последовательности $\lambda_v \uparrow \infty$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41.

Ереванский государственный университет
e-mail: ggg@ysu.am, knavasard@ysu.am

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян

Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара

Определяется новый метод суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара. Доказываются теоремы единственности для рядов, суммируемых этим методом и удовлетворяющих некоторому необходимому условию. Установлены также формулы восстановления коэффициентов таких рядов.

Ակադեմիկոս Գ.Գ. Գևորգյան, Կ.Ա. Նավասարդյան

Վիլենկինի և Հաարի համակարգերով շարքերի գումարման մի մեթոդի մասին

Սահմանվում է Վիլենկինի և Հաարի համակարգերով շարքերի գումարման մի նոր մեթոդ: Ապացուցվում են միակության թեորեմներ մի անհրաժեշտ պայմանի

բավարարող և այդ մեթոդով գումարվող շարքերի համար: Գտնված են նաև վերականգնման բանաձևեր այդպիսի շարքերի գործակիցների համար:

Academician G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan

**On a Summation Method for Series with Respect to Vilenkin
and Haar Systems**

A new method of summation of series with respect to Vilenkin and Haar systems is defined. Uniqueness theorems for series summarized by this method and satisfied some necessary condition are proved. Renewal formulas for such series are also found.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* - Изв. АН СССР, сер. мат. 1947. Т. 11. N 4. С. 363-400.
2. *Костин В. В.* - Мат. заметки. 2004. Т. 76. N 5. С. 740-747.
3. *Геворкян Г. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N 5. С. 7-21.

INFORMATICS

УДК 519

H. A. Sahakyan

Hypergraph Degree Sequence Approximation

(Submitted by corresponding member of NAS RA L.H.Aslanyan 1/XI 2016)

Keywords: *hypergraph degree sequence, (0,1)-matrices, approximation algorithms, greedy algorithm.*

Necessary and sufficient conditions for the existence of a simple hypergraph with given degree sequence is one of the known open problems in the graph theory domain [1-10]. The problem has its interpretation in terms of binary matrices. Existence/construction issues of related matrices with the given parameters/constraints were investigated and an approximation algorithm is constructed [11-12]. In this paper we achieve the performance assessment of that algorithm applying the random set cover technique.

Introduction. A hypergraph H is a pair (V, E) , where $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ is the vertex set of H , and E , the set of hyperedges, is a collection of non-empty subsets of V . A hypergraph H is simple if it has no repeated hyper-edges. The degree $d(v)$ of a vertex v of H is the number of hyperedges in H containing v . $d(H) = (d(v_1), \dots, d(v_n))$ is the degree sequence of hypergraph H .

The question of simple necessary and sufficient conditions for the existence of a simple hypergraph with the given degree sequence is a long-standing open problem. The problem has its interpretation in terms of binary matrices. We code the hyper-edges of H with $(0,1)$ sequences of length n such that j -th component of the sequence equals 1 if and only if j -th vertex of the hypergraph belongs to the given hyper-edge. Hence we get a $(0,1)$ matrix, where the numbers of 1's in rows are cardinalities of hyper-edges; the number of 1s in j -th column is the degree of j -th vertex. Thus, the problem is equivalent to the existence of $(0,1)$ -matrices with distinct rows and with given column sums (number of 1s in the columns). In general, $(0,1)$ -matrices with prescribed row and column sums is a classical object, which appears in many branches of applied mathematics. For example, in Discrete Tomography $(0,1)$ matrices

serve for representation of discrete sets [13-15]. The projections of a matrix by the horizontal and vertical directions correspond to the row and column sums of the matrix. There is a known result by Ryser, who obtained a necessary and sufficient condition for a pair of vectors being the row and column sums of a (0,1)-matrix ([16]), and a polynomial algorithm that constructs the matrix itself. The requirement of non-repetition of rows makes the problem hard. For such matrices both cases: existence of a (0,1) matrix with a given column sum and with or without row sum, - are algorithmically open problems [17],[18]. We consider an optimization version of the problem – to find a (0,1) matrix with a given column sum and with maximal number of pairs of distinct rows, - this leads to a matrix with distinct rows in case when such matrix exists. To find an approximate solution of the problem a greedy algorithm is constructed in [11], which is optimal in local steps. Several properties of the algorithm and experimental results are given in [12]. In this research we estimate the performance of the algorithm using the greedy and randomized set cover technique.

The paper is organized as follows: a brief description of the greedy algorithm is given in Section 2 below. Section 3 is devoted to the evaluation of the algorithm's performance using the greedy set cover technique.

Approximation greedy algorithm for constructing (0,1)-matrices with distinct rows. Consider a (0,1)-matrix of size $m \times n$. Let $S = (s_1, \dots, s_n)$ denote the column sum vector of the matrix, where s_j is the number of 1's in j -th column. $U(S)$ denotes the set of all (0,1)-matrices which have m distinct rows and have the column sum vector $S = (s_1, \dots, s_n)$. Now we formulate two versions of the problem: existence and optimization.

(P1) Existence of a matrix in $U(S)$. Consider a matrix A of $U(S)$. Clearly any interchange of rows of A keeps the matrix in $U(S)$. Applying certain set of row interchanges we can transform A into another matrix of $U(S)$, in which s_1 ones of the first column are situated in the first $1, \dots, s_1$ positions, and thus form an interval. Then in the same way we can transform the obtained matrix into another one where s_2 ones of the second column compose two intervals (say $s_{2,1}$ and $s_{2,2}$ lengths, where $s_2 = s_{2,1} + s_{2,2}$) situated in the $1, \dots, s_{2,1}$ and $s_1 + 1, \dots, s_{2,2}$ positions, respectively. Continuing this process we obtain alternating 1 and 0 intervals (possibly of 0 lengths) in each column. Rows i and j taken from different intervals are distinct, and rows within the same interval coincide with each other. We call this construction matrix of partitioned form. An illustration is in Figure 1 below.

Thus, if $U(S)$ is not empty then it contains at least one matrix of partitioned form. We will search solution of **(P1)** among the matrices of partitioned form, constructing the matrix column-by-column, and providing in each column the given number of ones. If in the last column the matrix has all one length intervals, then all rows are different. Generally, partitioning of intervals can be arbitrary, but it is reasonable to have some objective, for

example certain quantitative characteristics leading to the matrix with distinct rows.

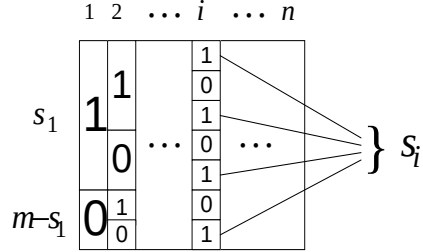


Figure1. The step-by-step partition matrix.

Let $U(S)$ denote the class of $(0,1)$ -matrices of size $m \times n$ which have the column sum vector $S = (s_1, \dots, s_n)$. In this way $U(S) \subseteq U(S)$. For a given $A \in U(S)$ let $D(A)$ denote the number of pairs of distinct rows of A .

Consider the following optimization problem:

$$(P2) \text{ Find } A_{opt} \in U(S) \text{ such that } D(A_{opt}) = \max_{A \in U(S)} D(A)$$

Obviously $\binom{m}{2}$ is the lowest upper bound for $D(A)$ and it is achievable for matrices of $U(S)$ only. Therefore if $U(S)$ is not empty, then solutions of $(P2)$ are also solution of the existence problem $(P1)$. In this way $(P2)$ is not easier than $(P1)$.

Below we give a brief description of the greedy algorithm G introduced in [11] for solving $(P2)$. G constructs a matrix column-by-column starting from the first column and adding a column in each step.

Algorithm G . Without loss of generality we assume that $s_i \geq m - s_i, i = 1, \dots, n$.

Step 1. Construction of the first column: we place s_1 ones in the first s_1 positions followed by $m - s_1$ zeros. We get two intervals: s_1 -length interval of ones, and $(m - s_1)$ -length interval of zeros. We denote these intervals by $d_{1,1}^G$ and $d_{1,2}^G$. Hereafter the first sub-index will indicate the number of column and the second – the number of interval within the column. Intervals with odd numbers contain all ones, and intervals with even numbers contain all zeros. Thus the

construction of the first column is in unique way: $\begin{cases} d_{1,1}^G = s_1 \\ d_{1,1}^G + d_{1,2}^G = m \end{cases}$. At this point

we get $d_{1,1}^G \cdot d_{1,2}^G = s_1(m - s_1)$ pairs of differing (by the first position) rows.

Let we have constructed the first $k-1$ columns. In general, $(k-1)$ -th column consists of 2^{k-1} intervals. Among them 0-length intervals are possible,-

these intervals cannot be used any longer. Assume that $(k-1)$ - th column consists of p non-zero length intervals denoted by $d_{k-1,1}^G, d_{k-1,2}^G, \dots, d_{k-1,p}^G$. Recall that the rows coincide within the intervals and differ otherwise. If in some column j we get all one length intervals, then at this moment non repetition of all rows, and hence the maximum number of pairs of different rows is already provided. Further constructions can be arbitrary.

Step k . Construction of the k -th column: each $d_{k-1,i}^G$ -length interval is partitioned into $d_{k-1,i,0}^G$ and $d_{k-1,i,1}^G$ -length intervals filled by zeros and ones respectively such that $\sum_{i=1}^p d_{k-1,i,0}^G = m - s_k$ and $\sum_{i=1}^p d_{k-1,i,1}^G = s_k$.

The increase of objective function during the k -th step is:

$$\sum_{i=1}^p d_{k-1,i,1}^G \cdot d_{k-1,i,0}^G.$$

We will realize partitions having the goal to minimize length differences of intervals. The idea is in the following: if $s_k = m - s_k, k = 1, \dots, n$, then in each step we would split every interval into 2 equal (± 1) parts and fill by zeros and ones respectively; this would lead to all one length intervals in logarithmic number (minimum possible [19]) steps. Furthermore, among all integer partitions of $d_{k-1,i}^G = d_{k-1,i,0}^G + d_{k-1,i,1}^G$, the largest product $d_{k-1,i,0}^G \cdot d_{k-1,i,1}^G$ is achieved when $d_{k-1,i,0}^G = d_{k-1,i,1}^G$. Thus following this strategy would bring to the goal, but in general at each step k we have $s_k - (m - s_k)$ extra ones. Trying to be closer to equal lengths of intervals we 1) distribute the extra ones among intervals keeping a “homogeneous” distribution; and then 2) split each of the remaining intervals into 2 equal parts – putting equal number of zeros and ones.

Theorem 1 [11]

(1) Algorithm G is optimal in local steps: it provides the maximum increase of the objective function – pairs of differing rows;

(2) All optimal constructions of each column are those according to G .

Performance estimation of the algorithm G . In this section we will use the *greedy set cover technique* to evaluate the performance of G . Consider column-by-column constructions of a $(0,1)$ -matrix of size $m \times n$, with s_i ones in

the i -th column. There are $\binom{m}{s_i}$ possible placements of s_i ones in i -th column.

Each placement will produce the same $s_i(m - s_i)$ number of pairs of different rows (differing by the i -th column). We enumerate these placements as:

$1, 2, \dots, \binom{m}{s_i}$. By the other hand $\binom{m}{2}$ is the maximum number of distinct pairs of

rows. Enumerate these pairs as: $1, 2, \dots, \binom{m}{2}$.

Now we construct (0,1)-matrix P in the following way: P has $\sum_{i=1}^n \binom{m}{s_i}$ rows grouped by $P_1, P_2, \dots, P_n$ blocks/submatrices. Each block P_i consists of $\binom{m}{s_i}$ rows, corresponding to the placements of s_i ones in i -th column. P has $\binom{m}{2}$ columns corresponding to the distinct pairs of rows of M (by the placements). Figure 2 below illustrates the construction.

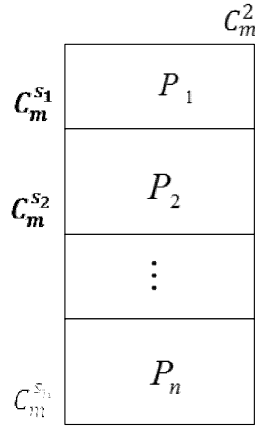


Figure 2. Structure of matrix P .

Let $p_{i,j,k}$ denote the element of (j,k) -th position (j -th row and k -th column) of submatrix P_i :

$$p_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{if the } k\text{-th pair of rows of } M \text{ is differing by the } i\text{-th column, and namely by the } j\text{-th placement of } s_i \text{ ones} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

In this way j -th row in P_i indicates the pairs which are differing by the j -th placement of s_i ones. Therefore, the number of ones in each row of P_i equals $s_i(m-s_i)$.

k -th column in P_i indicates those placements of s_i ones, which make distinct the k -th pair of rows of M . Therefore, the number of ones of k -th column is the number of placements of s_i ones making k -th pair of rows distinct by i -th position. Any pair of rows is distinct by i -th position if one the rows has 1, and the other has 0 in this position; or vice versa. In other positions the placement of ones is arbitrary. Thus, the number of ones in every column of P_i equals $2C_{m-2}^{s_i-1}$.

We get the following relation:

$$s_i(m-s_i)C_m^{s_i} = 2C_{m-2}^{s_i-1}C_m^2.$$

Now we construct a matrix M , and consider the corresponding construction in P . The construction of each column of M is simply a selection of a row in P_i .

Construction of the first column of M means selection of a certain placement among all $\binom{m}{s_i}$ placements of s_i ones. As a result certain pairs of rows will be differing, and in this way the corresponding row of P_1 will be selected. Ones in this row will indicate $s_i(m-s_i)$ distinct pairs of rows in M . We separate this part in P and exclude it from the further considerations.

Suppose that $i-1$ columns of M are constructed with $s_1 s_2, \dots, s_{i-1}$ ones, and as a result certain pairs of rows are already differing. In Figure 3 these pairs are in the dashed part (without loss of generality, the differing rows are shown in the first part of P). At this moment outside the dashed part there is no 1s. Let t_{i-1} denote the number of row pairs of M which are not yet distinct after the first $i-1$ steps. Now we construct i -th column of M in P , namely, in P_i .

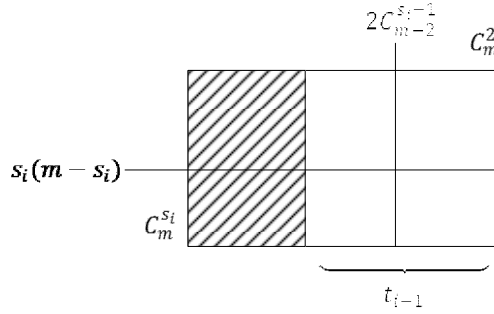


Figure 3. Construction of sub-matrix P_i .

We calculate the number of ones that the not-dashed part should contain, this

equals to $t_{i-1} 2C_{m-2}^{s_i-1}$. Therefore, $\frac{t_{i-1} 2 \binom{m-2}{s_i-1}}{\binom{m}{s_i}}$ is the average number of ones in

rows. It follows that there is a row with at least $\frac{t_{i-1} 2 \binom{m-2}{s_i-1}}{\binom{m}{s_i}}$ ones (or

$\left\lceil \frac{t_{i-1} 2 \binom{m-2}{s_i-1}}{\binom{m}{s_i}} \right\rceil$ ones, since we deal with integer numbers). We select this row as

a construction of i -th column of M . This means that the construction of i -th

column of M will produce at least $\left[\frac{t_{i-1} 2 \binom{m-2}{s_i-1}}{\binom{m}{s_i}} \right]$ new pairs of distinct

rows. Thus:

$$t_{i-1} - t_i \geq \frac{t_{i-1} 2 \binom{m-2}{s_i-1}}{\binom{m}{s_i}} = t_{i-1} \frac{2(m-2)! s_i! (m-s_i)!}{(s_i-1)! (m-s_i-1)! m!} = t_{i-1} \frac{s_i(m-s_i)}{\binom{m}{2}}$$

The achieved important property is stated by the following lemma.

Lemma. Let we construct a matrix M in column-by-column manner, and at i -the step we have:

- a) first $i-1$ columns /by some constructions/. Let t_{i-1} denote the number of pairs of rows in M which are not yet differentiated,
- b) s_i - the number of ones in i -th column of M , then there is a placement of s_i ones in the i -th column such that new pairs of rows will compose at least $\frac{s_i(m-s_i)}{\binom{m}{2}}$ part of t_{i-1} .

We notice that the result does not depend on the constructions of the first $i-1$ columns, as well as on the order of components of the vector S . Summarizing, we achieve the following estimate of the greedy algorithm:

Theorem 2. For a given vector $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ let M be a binary matrix of size $m \times n$ with the column sum S , constructed by the greedy algorithm G .

Then the part of not differentiated pairs of rows M is at most $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, where $\xi_i = 1 - \frac{s_i(m-s_i)}{\binom{m}{2}}$.

Further examples are considered in order to understand how tight the estimate is.

Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA
e-mail: hsahakyan@sci.am

H. A. Sahakyan

Hypergraph Degree Sequence Approximation

Necessary and sufficient conditions for the existence of a simple hypergraph with the given degree sequence is one of the known open problems in the graph theory domain. The problem has its interpretation in terms of binary matrices.

Existence/construction issues of related matrices with the given parameters/constraints were investigated and an approximation algorithm is constructed in earlier works. In this paper we achieve the performance assessment of that algorithm applying the random set cover technique.

Հ. Ա. Սահակյան

Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության մոտարկում

Տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ գտնելու խնդիրը գրաֆների տեսության հայտնի բաց խնդիրներից մեկն է: Խնդիրը ունի իր մեկնաբանումը բինար մատրիցների տերմիններով: Նախորդող աշխատանքներում հետազոտվել են տրված սահմանափակումներով մատրիցների գոյության / կառուցման հարցերը և կառուցվել է ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ: Ներկա աշխատանքում տրվում է այդ ալգորիթմի աշխատանքի գնահատականը բազմությունների ծածկույթի մեթոդի կիրառմամբ:

А. А. Саакян

Аппроксимация последовательности степеней вершин гиперграфа

Задача нахождения необходимых и достаточных условий существования простого гиперграфа по данной последовательности степеней вершин является известной открытой задачей теории графов. Задача имеет простую интерпретацию в терминах бинарных матриц. В предыдущих работах были исследованы задачи существования и построения бинарных матриц с данными ограничениями и построен аппроксимационный алгоритм. В данной статье приводится оценка работы аппроксимационного алгоритма путем привлечения метода покрытия множеств.

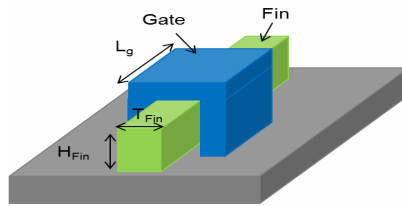
References

1. *Berge C* Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets, North-Holland, 1989.
2. *Colbourn Charles J., Kocay W.L., Stinson D. R.* – Discrete Applied Mathematics. 1986. V. 14. P. 239-254.
3. *Billington D.* – The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 1988. 3. P. 71-91.
4. *Bhanu Murthy N. L., Murali K. Srinivasan.* –Linear Algebra Appl.2002. V. 350. P. 147–170
5. *Kocay William, Li Pak Ching* – Ars Combin. 2007. V. 82. P. 145–157. MR 2292314 (2007k:05049)
6. *Behrens S, Erbes C., Ferrara M., Hartke S., Reinger B., Spinoza H., Tomilson Ch.* – Electronic Journal of Combinatorics 2013. V. 20. N. 4.
7. *Aslanyan L., Sahakyan H.* – Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2006 V. 27. P. 3-4/110.
8. *Sahakyan H.* – Discrete Applied Mathematics, 2009. V. 157. P. 2191-2197.
9. *Sahakyan H.* – Discrete Applied Mathematics. 2014. V. 163, part 2. P. 205-213.

10. *Sahakyan H.* – Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9. N. 5. P. 243-253.
11. *Sahakyan H.* – Information Theories and Applications. 2010-11. V. 17. N 2. P. 124-137.
12. *Sahakyan H., Aslanyan L.* – Information Technologies & Knowledge. 2011. V.5. N 1. P. 55-66.
13. *Gardner R. J., Gritzmann P.*, – Transactions of the American Mathematical Society, 1997. V. 349. N 6. P 2271-2295. S 0002-9947(97)01741-8.
14. *Herman, G.T., Kuba, A.* (eds.): Advances in Discrete Tomography and its Applications. Birkhäuser. Boston. 2007.
15. *Barcucci, E., Del Lungo, A., Nivat, M., Pinzani, R.* –Theor. Comput. Sci. 1996.V. 155. P. 321–347.
16. *Ryser.* Combinatorial Mathematics. 1966.
17. *Sahakyan H.* – Ninth International Conference on Computer Science and Information Technologies, Revised Selected Papers. IEEE conference proceedings. November. 2013.
18. *Aslanyan L., Gronau H.-D., Sahakyan H., Wagner P.* –CSIT 2015, Revised Selected Papers, IEEE conference proceedings, P. 47-52, **DOI**:10. 1109/CSITechnol.2015.7358249.
19. *Knuth D.* The Art of Computer Programming. V.3. Sorting and Searching, Addison-Wesley Publishing Company. 1973.

րից անցում է կատարվել դեպի եռաչափ ինտեգրալ սխեմաներ [3], որտեղ սխեման իրականացնող շերտերը դրվում են իրար վրա՝ միմյանց կապելով ուղղահայաց կապերով, որոնք թույլ են տալիս ստանալ ավելի կարճ միացումներ, քան հորիզոնական կապերը:

2. Եռաչափ տրանզիստորներ և դրանցում հանդիպող անսարքությունները: Արդի նանոչափական հիշող սարքերում լայնորեն օգտագործվող եռաչափ տրանզիստորներից առավել մեծ տարածում ունեն



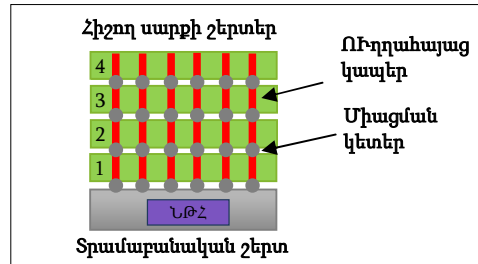
Նկար 1. ՖինՖԵՏ տրանզիստորի կառուցվածքը

ՖինՖԵՏ տրանզիստորները [4], որում մասնակցում են մեկ ֆին (անգլերեն՝ fin) և երեք դարպասներ, որոնք երեք կողմից պատում են ֆինին՝ դրանով իսկ մեծացնելով տրանզիստորի աշխատանքի արդյունավետությունը (տե՛ս նկար 1):

Քանի որ եռաչափ տրանզիստորներն ունեն յուրահատուկ կառուցվածք, հետևաբար, այնտեղ կարող են ի հայտ գալ այդ տեխնոլոգիային հատուկ ֆիզիկական այնպիսի թերություններ, որոնք բացակայում են դրան նախորդող տեխնոլոգիաներում: Եռաչափ տրանզիստորների անսարքությունների մոդելավորման համար ստեղծվել է միջավայր, որի միջոցով հնարավոր է կատարել ֆիզիկական թերությունների սիմուլյացիա (կեղծում), և դրանց հիման վրա՝ անսարքությունների մոդելավորում [5]: Հետազոտությունների արդյունքում մոդելավորվել են ՖինՖԵՏ եռաչափ տրանզիստորներին հատուկ անսարքությունների տիպեր հետևյալ ֆիզիկական թերությունների հիման վրա՝ բացվածք տրանզիստորի ֆինի վրա, կարճ միացում տրանզիստորի ֆինի երկու բևեռների միջև, կարճ միացում տրանզիստորի դարպասի և ֆինի միջև:

3. Եռաչափ հիշող սարքերի անսարքությունները: Օգտագործելով ուղղահայաց կապերի տեխնոլոգիան՝ ստեղծվել են եռաչափ ինտեգրալ սխեմաները, որոնք հնարավորություն են տալիս տեխնոլոգիաների չափերի փոքրացմանը զուգընթաց ապահովելու բարձր արագագործություն: Եռաչափ ինտեգրալ սխեմաներից ամենատարածվածներից են եռաչափ հիշող սարքերը, որոնց կառուցվածքը բերված է նկար 2-ում: Եռաչափ հիշող սարքի հիմնական բաղադրիչներն են՝ ա) *հիշող*

սարքի շերտերը, որոնք միմյանց հետ միացված են *ուղղահայաց կապերով*, իսկ միացումը կատարվում է հատուկ նյութից պատրաստված *միացման կետերով*, բ) տրամաբանական շերտը, որտեղ ընդգրկված է նաև *ներկառուցված թեստավորման համակարգը (ՆԹՀ)*, որը թեստավորում է *հիշող սարքի շերտերը*:



Նկար 2. Եռաչափ հիշող սարք

Եռաչափ հիշող սարքերի անսարքությունները բաժանվել են 4 հիմնական դասերի [6].

ա) *մեկ կապի անսարքություն*, բ) *երկու կապերի անսարքություն*,
գ) *հիշող սարքի մեկ բջջանոց անսարքություն*, դ) *հիշող սարքի երկու բջջանոց անսարքություն*:

4. Անսարքությունների պարբերական աղյուսակ: [7-8] աշխատանքներում առաջարկվել է հիշող սարքերի անսարքությունների ներկայացման նոր ձև՝ անսարքությունների պարբերական աղյուսակի տեսքով (տե՛ս աղյուսակ 1): Մասնավորապես այդ աշխատանքներում առաջարկվել է.

- անսարքությունները ներկայացնել մեկ ընդհանուր աղյուսակով, որը ստացել է «անսարքությունների պարբերական աղյուսակ» անվանումը,
- թեստային ալգորիթմները կառուցել $MTT(x, S)$ «թեստային ալգորիթմների շաբլոնի» միջոցով:

«Անսարքությունների պարբերական աղյուսակում» սյուները համապատասխանում են անսարքության մեջ ընդգրկված բջիջների քանկին (C1 սյունը պարունակում է բոլոր մեկ բջջանոց անսարքությունները, C2 սյունը՝ երկու բջջանոց անսարքությունները և այլն), իսկ տողերը համապատասխանում են անսարքությունն ակտիվացնող գործողությունների քանակին (FF0 տողերը պարունակում են 0 գործողությամբ ակտիվացող, այսինքն՝ վիճակի անսարքությունները, FF1 տողերը պարունակում են 1 գործողությամբ ակտիվացող անսարքությո-

Անսարքությունների պարբերական աղյուսակ

	C1	C2	C3	...
FF0	$FG_1(0, \emptyset)$	$FG_2(0, \emptyset)$	$FG_3(0, \emptyset)$	
	$FG_1(1, \emptyset)$	$FG_2(1, \emptyset)$	$FG_3(1, \emptyset)$	
	$FG_1(0, W0)$	$FG_2(0, W0)$	$FG_3(0, W0)$	
	$FG_1(1, W1)$	$FG_2(1, W1)$	$FG_3(1, W1)$	
FF1	$FG_1(0, W1)$	$FG_2(0, W1)$	$FG_3(0, W1)$	
	$FG_1(1, W0)$	$FG_2(1, W0)$	$FG_3(1, W0)$	
	$FG_1(0, R0)$	$FG_2(0, R0)$	$FG_3(0, R0)$	
	$FG_1(1, R1)$	$FG_2(1, R1)$	$FG_3(1, R1)$	
FF2	$FG_1(0, WM1)$	$FG_2(0, R0:R0)$		
	$FG_1(1, WM0)$	$FG_2(1, R1:R1)$		
	$FG_1(0, W0W0)$	$FG_2(0, W0W0)$		
	$FG_1(1, W1W1)$	$FG_2(1, W1W1)$		
...	$FG_1(0, W0W1)$	$FG_2(0, W0W1)$		
	$FG_1(1, W1W0)$	$FG_2(1, W1W0)$		
	$FG_1(0, R0R0)$	$FG_2(0, R0R0)$		
	$FG_1(1, R1R1)$	$FG_2(1, R1R1)$		

$\langle 0W1; 0/1/- \rangle$
 $\langle 0W1; 1/0/- \rangle$
 $\langle 0; 0W1/0/- \rangle$
 $\langle 1; 0W1/0/- \rangle$

յունները և այլն): Աղյուսակում մոխրագույնով նշված դատարկ վանդակները համապատասխանում են դեռևս չհետազոտված (չհայտնաբերված) անսարքություններին:

«Անսարքությունների պարբերական աղյուսակի» վանդակներում նշված են անսարքությունների խմբեր՝ $FG_i(x, S)$, որտեղ i -ն անսարքությունում մասնակցող բջիջների քանակն է, x -ը՝ բջջի արժեքը նախքան դրանում անսարքության ակտիվացումը, S -ը՝ անսարքությունն ակտիվացնող գրել/կարդալու գործողությունների հաջորդականությունը: Օրինակ՝ $FG_2(0, W1) = \{\langle 0W1; 0/1/- \rangle, \langle 0W1; 1/0/- \rangle, \langle 0; 0W1/0/- \rangle, \langle 1; 0W1/0/- \rangle\}$: Անսարքությունները նկարագրված են $\langle S/F/R \rangle$ հայտնի նշանակմամբ [9], որտեղ S -ն անսարքությունն ակտիվացնող գործողությունների հաջորդականությունն է, F -ն անսարքության ակտիվացման արդյունքում հիշող սարքի բջջում առաջացած սխալ արժեքն է, իսկ R -ը կիրառելի է, երբ S հաջորդականության վերջին գործողությունը կարդալ գործողությունն է, և այն վերադարձնում է այդ կարդալ գործողության արդյունքը: Օրինակ՝ $\langle R1R1/0/0 \rangle$ նշանակում է հետևյալը. երկու հաջորդական $R1$ կարդալու գործողության արդյունքում հիշող սարքի բջիջն ընդունում է 0 արժեք, և 2-րդ կարդալու գործողության վերադարձրած արժեքը 0 է:

5. ՖինՖԵՏ տեխնոլոգիայի անսարքությունների թեստավորում:

Ինչպես արդեն նշվել է հոդվածի 2-րդ բաժնում, հետազոտությունները ցույց են տվել, որ կան անսարքությունների տիպեր, որոնք հաստուկ են միայն ՖինՖԵՏ տեխնոլոգիային: Աղյուսակ 2-ում բերված են [5] աշխատանքում առաջարկված մեթոդի միջոցով մոդելավորված ՖինՖԵՏ տեխնոլոգիայի անսարքությունները: Աղյուսակում անսարքությունները դասավորված են վերևից ներքև՝ ըստ անսարքությունն ակտի-

վացնող գործողությունների քանակի աճման կարգի: Հեշտ է նկատել, որ անսարքությունների միջև կան որոշակի սիմետրիկություն և պարբերականություն: Օրինակ՝ dRDF1 սիմետրիկ է dRDF0-ին, այսինքն՝ անսարքություններն ունեն նույն վարքագիծը, և միակ տարբերությունը տվյալի արժեքի մեջ է. մի դեպքում այն 0 է, մյուս դեպքում՝ 1: Իսկ dDRDF-x և dDRDF1-y անսարքությունների միջև գոյություն ունի պարբերականություն, այսինքն՝ այդ անսարքություններն իրենց կառուցվածքով նույնն են, սակայն անցում կատարելով dDRDF- x-ից dDRDF1-y-ին՝ անսարքությունն ակտիվացնող գործողությունների քանակն ավելանում է (y-x)-ով:

Փաստը, որ աղյուսակ 2-ի անսարքությունները պարբերական են,

Աղյուսակ 2

ՖինՖԵՏ տեխնոլոգիայի անսարքություններ

Անուն	Նկարագիր	Անուն	Նկարագիր	Անուն	Նկարագիր	Անուն	Նկարագիր
dRDF1	<R1R1/0/0>	dRDF0	<R0R0/1/1>	dDRDF1	<R1R1/0/1>	dDRDF0	<R0R0/1/0>
dRDF1-3	<R1 ³ /0/0>	dRDF0-3	<R0 ³ /1/1>	dDRDF1-3	<R1 ³ /0/1>	dDRDF0-3	<R0 ³ /1/0>
dRDF1-4	<R1 ⁴ /0/0>	dRDF0-4	<R0 ⁴ /1/1>	dDRDF1-4	<R1 ⁴ /0/1>	dDRDF0-4	<R0 ⁴ /1/0>
dRDF1-5	<R1 ⁵ /0/0>	dRDF0-5	<R0 ⁵ /1/1>	dDRDF1-5	<R1 ⁵ /0/1>	dDRDF0-5	<R0 ⁵ /1/0>
dRDF1-6	<R1 ⁶ /0/0>	dRDF0-6	<R0 ⁶ /1/1>	dDRDF1-6	<R1 ⁶ /0/1>	dDRDF0-6	<R0 ⁶ /1/0>
dRDF1-7	<R1 ⁷ /0/0>	dRDF0-7	<R0 ⁷ /1/1>	dDRDF1-7	<R1 ⁷ /0/1>	dDRDF0-7	<R0 ⁷ /1/0>
dRDF1-8	<R1 ⁸ /0/0>	dRDF0-8	<R0 ⁸ /1/1>	dDRDF1-8	<R1 ⁸ /0/1>	dDRDF0-8	<R0 ⁸ /1/0>

մեկ անգամ ևս հաստատեց [7]-[8]-ում սահմանված կանոնավորություն 1-ը, ըստ որի նոր տեխնոլոգիաների անսարքություններն ունեն նմանատիպ վարքագիծ, ինչ գոյություն ունեցող անսարքությունները: Աղյուսակ 2-ի անսարքությունները հնարավոր եղավ տեղավորել «անսարքությունների պարբերական աղյուսակում», ինչպես նաև հնարավոր եղավ կառուցել աղյուսակ 2-ի անսարքությունները հայտնաբերող թեստային ալգորիթմ՝ օգտագործելով «թեստային ալգորիթմների շարքը»: Կառուցված թեստային ալգորիթմը March FF-ն է, որը համարվում է ՖինՖԵՏ տեխնոլոգիային հատուկ անսարքություններ հայտնաբերող թեստային ալգորիթմ: Այն ունի 24N բարդություն, որտեղ N-ը հիշող սարքի հասցեների քանակն է: Փորձարկումների միջոցով, իսկ այնուհետև մաթեմատիկորեն հիմնավորվել է, որ March FF թեստային ալգորիթմն ունի նվազագույն բարդություն:

6. Եռաչափ հիշող սարքերի անսարքությունների թեստավորում:

Եռաչափ հիշող սարքերի անսարքությունների մեջ նույնպես նկատվել են պարբերականության և սիմետրիկության հատկություններ, և փորձ է արվել այդ անսարքությունները նույնպես տեղավորելու «անսար-

Աղյուսակ 3

Ընդլայնված անսարքությունների պարբերական աղյուսակ

	C0	C1	C2	C3	...
FF0	FG ₀ (0, 0)	FG ₁ (0, 0)	FG ₂ (0, 0)	FG ₃ (0, 0)	
	FG ₀ (1, 0)	FG ₁ (1, 0)	FG ₂ (1, 0)	FG ₃ (1, 0)	
	FG ₀ (0, W0)	FG ₁ (0, W0)	FG ₂ (0, W0)	FG ₃ (0, W0)	
	FG ₀ (1, W1)	FG ₁ (1, W1)	FG ₂ (1, W1)	FG ₃ (1, W1)	
FF1	FG ₀ (0, W1)	FG ₁ (0, W1)	FG ₂ (0, W1)	FG ₃ (0, W1)	
	FG ₀ (1, W0)	FG ₁ (1, W0)	FG ₂ (1, W0)	FG ₃ (1, W0)	
	FG ₀ (0, R0)	FG ₁ (0, R0)	FG ₂ (0, R0)	FG ₃ (0, R0)	
	FG ₀ (1, R1)	FG ₁ (1, R1)	FG ₂ (1, R1)	FG ₃ (1, R1)	
FF2	FG ₀ (0, WM1)	FG ₁ (0, WM1)	FG ₂ (0, R0:R0)		
	FG ₀ (1, WM0)	FG ₁ (1, WM0)	FG ₂ (1, R1:R1)		
	FG ₀ (0, W0W0)	FG ₁ (0, W0W0)	FG ₂ (0, W0W0)		
	FG ₀ (1, W1W1)	FG ₁ (1, W1W1)	FG ₂ (1, W1W1)		
FF3	FG ₀ (0, W0W1)	FG ₁ (0, W0W1)	FG ₂ (0, W0W1)		
	FG ₀ (1, W1W0)	FG ₁ (1, W1W0)	FG ₂ (1, W1W0)		
	FG ₀ (0, R0R0)	FG ₁ (0, R0R0)	FG ₂ (0, R0R0)		
	FG ₀ (1, R1R1)	FG ₁ (1, R1R1)	FG ₂ (1, R1R1)		
FF4	FG ₀ (0, R0 ³)	FG ₁ (0, R0 ³)	FG ₂ (0, R0 ³)		
	FG ₀ (1, R1 ³)	FG ₁ (1, R1 ³)	FG ₂ (1, R1 ³)		
FF5	FG ₀ (0, R0 ⁴)	FG ₁ (0, R0 ⁴)	FG ₂ (0, R0 ⁴)		
	FG ₀ (1, R1 ⁴)	FG ₁ (1, R1 ⁴)	FG ₂ (1, R1 ⁴)		
FF6	FG ₀ (0, R0 ⁵)	FG ₁ (0, R0 ⁵)	FG ₂ (0, R0 ⁵)		
	FG ₀ (1, R1 ⁵)	FG ₁ (1, R1 ⁵)	FG ₂ (1, R1 ⁵)		
FF7	FG ₀ (0, R0 ⁶)	FG ₁ (0, R0 ⁶)	FG ₂ (0, R0 ⁶)		
	FG ₀ (1, R1 ⁶)	FG ₁ (1, R1 ⁶)	FG ₂ (1, R1 ⁶)		
...					

քությունների պարբերական աղյուսակում»: Դիտարկումները ցույց են տվել, որ հոդվածի 3-րդ բաժնում թվարկված գ) և դ) դասերի անսարքություններն արդեն իսկ գոյություն ունեն «անսարքությունների պարբերական աղյուսակում», իսկ ա) և բ) դասերի անսարքությունները, որոնք նկարագրում են կապերի անսարքությունները, պահանջեցին պարբերական աղյուսակում ավելացնել նոր սյուն և այդ անսարքությունները տեղավորել այդ սյան մեջ: Աղյուսակ 3-ը ներկայացնում է ընդլայնված «անսարքությունների պարբերական աղյուսակը», իսկ նոր ավելացված սյունը C0-ն է (այսինքն՝ անսարքության մեջ մասնակցում է 0 քանակի բջիջ), որը նախատեսված է այնպիսի անսարքությունների համար, որոնք կապված չեն հիշող սարքի բջիջների հետ և առնչվում են հիշող սարքերի կապերին, բջիջների շուրջ գոյություն ունեցող սխեմաներին (հասցեների վերձանիչ, գրելու/կարդալու ղեկավարող բլոկ և այլն):

[7-8]-ում ապացուցվել է (տես թեորեմ 1), որ «թեստային ալգորիթմների շաբլոնով» ստացված թեստային ալգորիթմները հայտնաբերում են սկզբնական (ոչ ընդլայնված) «անսարքությունների պարբերական աղյուսակի» համապատասխան անսարքությունների խմբերը: Դիտարկումները ցույց են տվել, որ նույն պնդումը կարելի է կատարել նաև ընդլայնված «անսարքությունների պարբերական աղյուսակի»

համար, որը ներառում է եռաչափ տեխնոլոգիաների անսարքությունները:

Պնդում: $MTT(x, S)$ «թեստային ալգորիթմների շաբլոնով» ստացված թեստային ալգորիթմը հայտնաբերում է $FG(x, S)$ և $FG(\sim x, \sim S)$ խմբերի բոլոր անսարքությունները:

Ապացույց: «Թեստային ալգորիթմների շաբլոնով» ստացված թեստային ալգորիթմների բոլոր հնարավոր տարբերակները բաժանվում են 4 դեպքերի՝ կախված x -ի և S -ի արժեքներից (բաժանումը կատարվում է նույն կերպ, ինչպես արված է [7-8]-ում): Այնուհետև յուրաքանչյուր դեպքի համար ցույց է տրվում, որ ստացված թեստային ալգորիթմները հայտնաբերում են $FG(x, S)$ և $FG(\sim x, \sim S)$ խմբերի բոլոր անսարքությունները: Դա կատարվում է հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր անսարքության համար նշվում է, թե թեստային ալգորիթմի որ գործողությամբ է ակտիվանում և որ գործողությամբ է հայտնաբերվում տվյալ անսարքությունը:

7. Եզրակացություն: Այս աշխատանքում հետազոտվել են արդի նանոչափական հիշող սարքերում տեղի ունեցող կառուցվածքային փոփոխությունները, ինչպիսիք են եռաչափ տրանզիստորները և եռաչափ հիշող սարքերը: Մշակվել է թեստավորման արդյունավետ մեթոդ այդ փոփոխություններից բխող անսարքությունների մոդելավորման և դրանց թեստավորման համար: Մասնավորապես առաջարկվել է ընդլայնել գոյություն ունեցող անսարքությունների պարբերական աղյուսակը՝ ընդգրկելու եռաչափ տեխնոլոգիաների անսարքությունները: Ստացված անսարքությունների պարբերական աղյուսակն ունի մի շարք առավելություններ, դրանցից են.

- կանխատեսել նոր անսարքություններ՝ հիմնվելով անսարքությունների պարբերական հատկությունների վրա,
- կառուցել համապիտանի ներդրված թեստավորում իրականացնող պրոցեսոր (օրինակ՝ բարելավելով [10]-ում ներկայացված պրոցեսորը), որը կապահովի նանոչափական հիշող սարքերը թեստավորող արդյունավետ ալգորիթմների ծրագրավորելիություն:

SS կրթական և հետազոտական կենտրոն
Երևանի պետական համալսարան
e-mail: gurgen.harut@gmail.com

Գ. Է. Հարությունյան

Թեստավորման արդյունավետ մոտեցում նանոչափական հիշող սարքերի համար

Պատմականորեն մինչև վերջին ժամանակներն ինտեգրալ սխեմաների արագագործության բարելավումը հիմնականում կատարվում էր դրանց չափերի փոքրացման

հաշվին: Սակայն արդի սխեմաների չափերի փոքրացման ընթացքը դարձել է շատ դժվար՝ պայմանավորված դրանց չափերի փոքրացման ֆիզիկական սահմանափակումներով: Այդ խնդիրը լուծելու համար արդի ինտեգրալ սխեմաներում անցում են կատարում դեպի եռաչափ տեխնոլոգիաներ: Ինչպես տրանզիստորները, այնպես էլ ինքնին ինտեգրալ սխեմաները սկսել են արտադրել եռաչափ կառուցվածքով: Այս աշխատանքում հետազոտվել են նշված եռաչափ տեխնոլոգիաներից բխող հիշող սարքերի անսարքությունները, և դրանց հայտնաբերման համար առաջարկվել է թեստավորման արդյունավետ մեթոդ:

Г. Э. Арутюнян

Эффективный подход к тестированию нанометрических устройств памяти

Исторически до последнего времени улучшение производительности интегральных схем в основном осуществлялось за счет уменьшения их размеров. В то же время современные процессы, связанные с уменьшением размеров современных схем, сильно усложнились в силу различных новых физических ограничений. Для решения этой задачи в современных интегральных схемах был произведен переход к трехмерной технологии – трехмерным структурам проектирования как транзисторов, так и интегральных схем. В настоящей статье исследованы и классифицированы неисправности запоминающих устройств, вытекающие из особенностей трехмерной технологии, и предложен эффективный метод обнаружения этих неисправностей.

G. E. Harutyunyan

An Efficient Test Approach for Modern Nanoscale Memory Devices

Historically till the latest times the performance improvement of integrated circuits was mainly done based on shrinking their size. But the shrinking process of modern integrated circuits became a difficult task due to limitations on physical properties of circuits. In modern integrated circuits 3D technologies are used for solving that problem. The transistors as well as integrated circuits are being produced using 3D structures. In this paper faults caused due to 3D technologies are investigated and a new test method is proposed for their detection.

Գրականություն

1. *Ranade P., Choi Y.-K., Ha D., Takeuchi H., King T.-J.* - International AVS Conference on Microelectronics and Interfaces. 2003. P. 131-133.
2. *Cheng H.-W., Li Y.* - International Symposium on Next-Generation Electronics, 2010. P. 32-35.
3. *Deutsch S., Chakrabarty K.* - IEEE International Test Conference, 2015. P. 1-10.
4. *Jurczak M., Collaert N., Veloso A., Hoffmann T., Biesemans S.* - IEEE International SOI Conference, 2009, P. 1-4.
5. *Harutyunyan G., Tshagharyan G., Vardanian V., Zorian Y.* - IEEE VLSI Test Symposium. 2014. P. 49-54.

6. *Harutyunyan G., Zorian Y.* - IEEE International On-Line Testing Symposium, 2015, P. 168-170.
7. *Harutyunyan G., Shoukourian S., Zorian Y.*- Reports of National Academy of Sciences of Armenia. 2012. V. 112, N. 3. P. 229-238.
8. *Harutyunyan G., Shoukourian S., Vardanian V., Zorian Y.* - IEEE VLSI Test Symposium, 2013, P. 71-76.
9. *Hamdioui S., Al-Ars Z., van de Goor A. J.* - IEEE VLSI Test Symposium. 2002. P. 395-400.
10. *Hakhumyan A., Harutyunyan G.* - Computer Science and Information Technologies. 2011. P. 287-290.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Յ. Վ. Белубекян¹, А. З. Дарбинян², А. А. Саакян¹

Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.С. Аветисяном 3/XI 2016)

Ключевые слова: *слоистая пластинка, композит, поперечная нагрузка, изменение температуры, ребро жесткости.*

Введение. Исследованию напряженно-деформированного состояния ребристых пластин, изготовленных из композиционных материалов, посвящен довольно широкий круг работ. Определенный интерес представляют задачи изгиба таких пластин при наличии температурного поля. Для случая однослойной пластинки такая задача рассмотрена в работе [1].

В настоящей работе решается задача изгиба многослойной ребристой пластинки из композиционного материала при одновременном действии поперечной нагрузки и температурного поля. На основе уравнений и соотношений, приведенных в работах [2] и [3], получены выражения прогибов и внутренних усилий. Проведен численный анализ полученных результатов.

Постановка задачи. Рассматривается задача изгиба прямоугольной пластинки размерами $a \times b \times h$, шарнирно опертой по продольным кромкам $y = 0$, $y = b$ и подкрепленной ребрами жесткости сечением $\gamma h_r \times h_r$ на свободных краях $x = \pm a/2$ (рис. 1), под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$ при наличии стационарного температурного поля $T(x, y, z)$. Предполагается, что пластинка составлена из нечетного числа $(2n+1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости пластинки (рис. 2). Слои пластинки изготовлены из монослоев композиционного материала (КМ), поочередно уложенных под углами φ_s ($s = 1, 2n+1$) к оси x , а в ребрах монослой КМ уложены вдоль оси y .

Ставится задача определения напряженно-деформированного состояния пластинки при изгибе под действием поперечной нагрузки и при изменении температуры.

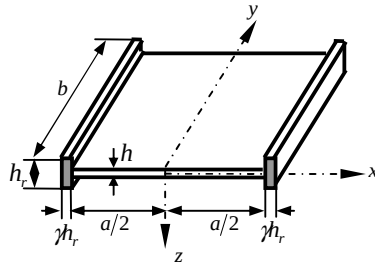


Рис. 1. Расчетная схема пластинки.

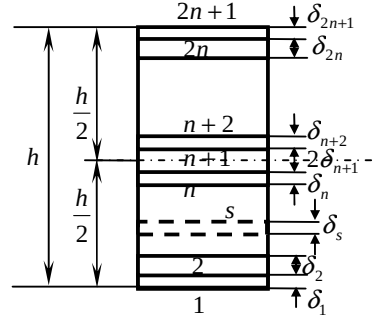


Рис. 2. Структура пластинки.

Решение задачи. Рассматриваемую пластинку можно считать слоистой ортотропной, для которой уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [2, 3]

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + D_{22} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 R_{1t}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_{2t}(x, y)}{\partial y^2} = q(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} h_{n+1}^3 + \sum_{s=1}^n B_{ik}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right] \quad (i, k = 1, 2, 6), \quad (2)$$

$$h_s = \frac{h}{2} - \sum_{j=1}^{s-1} \delta_j,$$

$$R_{it}(x, y) = 2 \left[B_{it}^{n+1} \int_0^{h_{n+1}} [T(x, y, z) - T_*] z dz + \sum_{s=1}^n B_{it}^s \int_{h_{s+1}}^{h_s} [T(x, y, z) - T_*] z dz \right] \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

T_* – температура, при которой пластина не испытывает температурных напряжений.

Упругие характеристики слоев пластинки в ее главных геометрических направлениях B_{ik}^s ($i, k = 1, 2, 6$) определяются через характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по формулам [2]:

$$\begin{aligned} B_{11}^s &= B_{11}^0 \cos^4 \varphi_s + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + B_{22}^0 \sin^4 \varphi_s, \\ B_{22}^s &= B_{22}^0 \cos^4 \varphi_s + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + B_{11}^0 \sin^4 \varphi_s, \\ B_{12}^s &= B_{12}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s], \\ B_{66}^s &= B_{66}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s]. \end{aligned}$$

где

$$B_{11}^0 = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{22}^0 = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{12}^0 = \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{66}^0 = G.$$

$E_1, E_2, G = G_{12}, \nu_1 = \nu_{21}, \nu_2 = \nu_{12}$ – модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона ортотропного КМ.

Коэффициенты B_{it}^s ($i=1,2$) определяются по формулам [4]:

$$B_{1t}^s = (B_{11}^0\alpha_{1t} + B_{12}^0\alpha_{2t})\cos^2\varphi_s + (B_{12}^0\alpha_{1t} + B_{22}^0\alpha_{2t})\sin^2\varphi_s,$$

$$B_{2t}^s = (B_{11}^0\alpha_{1t} + B_{12}^0\alpha_{2t})\sin^2\varphi_s + (B_{12}^0\alpha_{1t} + B_{22}^0\alpha_{2t})\cos^2\varphi_s.$$

где α_{1t} и α_{2t} – коэффициенты температурного линейного расширения КМ.

Предполагая, что изменение температуры по толщине пластины следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остается постоянной, т. е.

$$T(x, y, z) - T_* = 2zT_0 / h, \quad (4)$$

выражение (3) приведет к виду

$$R_{it} = 2 \frac{T_0}{h} D_{it}, \quad (i=1,2), \quad (5)$$

где

$$D_{it} = \frac{2}{3} \left[B_{it}^{n+1} h_{n+1}^3 + \sum_{s=1}^n B_{it}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right] \quad (i=1,2), \quad (6)$$

Рассматривая ввиду симметрии правую половину пластинки ($0 \leq x \leq a/2$), граничные условия задачи запишутся в виде:

- условия шарнирного опирания на кромках $y=0, y=b$

$$w=0, \quad D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R_{2t} = 0 \quad \text{при } y=0, y=b, \quad (7)$$

- условия симметрии на линии $x=0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad (8)$$

- условия упругого опирания на ребра жесткости

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_{1t},$$

$$E_1 J \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

при $x = \frac{a}{2}, \quad (9)$

где $C = G\gamma h_r^4 \beta$ – жесткость ребра при кручении, $J = \gamma h_r^4 / 12$ – момент инерции ребра, $\beta = \gamma^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \gamma \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{\pi n}{2\gamma} \right]$.

Предполагая, что функция нагрузки q зависит только от y , и разложив ее в ряд

$$q(y) = \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y, \quad q_k = \frac{2}{b} \int_0^b q \sin \lambda_k y dy, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b},$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (7), представляется в виде [3]

$$w = 0.5 \frac{R_{2t}}{D_{22}} y(b-y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{D_{22} \lambda_k^4} \sin \lambda_k y + \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x) \sin \lambda_k y. \quad (10)$$

Подстановка (10) в уравнение (1) приводит к следующим последовательным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно искомых функций $f_k(x)$:

$$D_{11} f_k^{IV} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_k^2 f_k'' + D_{22} \lambda_k^4 f_k = 0. \quad (11)$$

Решение уравнений (11) представляется в виде

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^4 C_{ik} e^{r_i \lambda_k x}. \quad (12)$$

Здесь r_i – корни соответствующего характеристического уравнения

$$D_{11} r^4 - 2D_3 r^2 + D_{22} = 0, \quad (13)$$

где $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$.

В зависимости от значений жесткостей пластинки r_i могут принимать как вещественные, так и комплексные значения, и соответственно решение однородного уравнения (11) будет иметь различные представления:

1) при $D_3^2 - D_{11} D_{22} < 0$, $r = \pm(\alpha \pm i\beta)$, где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11} D_{22}} + D_3}{2D_{11}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11} D_{22}} - D_3}{2D_{11}}},$$

выражение (12) с учетом (8) представится в виде

$$f_k(x) = c_{1k} \operatorname{sh} \alpha \lambda_k x \sin \beta \lambda_k x + c_{2k} \operatorname{ch} \alpha \lambda_k x \cos \beta \lambda_k x; \quad (14)$$

2) при $D_3^2 - D_{11} D_{22} > 0$, $r_{1,2} = \pm m_1$, $r_{3,4} = \pm m_2$, где

$$m_1 = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{11}}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{11}}},$$

$$f_k(x) = c_{1k} \operatorname{ch} m_1 \lambda_k x + c_{2k} \operatorname{ch} m_2 \lambda_k x; \quad (15)$$

3) при $D_3^2 - D_{11} D_{22} = 0$, $r_i = \pm m_0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), где $m_0 = \sqrt{D_3/D_{11}}$,

$$f_k(x) = c_{1k} \operatorname{ch} m_0 \lambda_k x + c_{2k} x \operatorname{sh} m_0 \lambda_k x. \quad (16)$$

Коэффициенты c_{1k} и c_{2k} определяются из граничных условий (9), которые с учетом (10) и разложения

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \lambda_k y, \quad a_k = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k]$$

приводятся к виду

$$D_{11} f_k'' + C \lambda_k^2 f_k' - D_{12} \lambda_k^2 f_k = \frac{q_k}{\lambda_k^2} \frac{D_{12}}{D_{22}} + \left(\frac{D_{12}}{D_{22}} R_{2t} - R_{1t} \right) a_k \quad \text{при } x = \frac{a}{2}, \quad (17)$$

$$D_{11} f_k''' - (D_{12} + 4D_{66}) \lambda_k^2 f_k' - E_1 J \lambda_k^4 f_k = E_1 J \frac{q_k}{D_{22}}$$

где функция $f_k(x)$, в зависимости от значения $D_3^2 - D_{11} D_{22}$, определяется из выражений (14) – (16).

После определения коэффициентов c_{1k} и c_{2k} функция прогибов определится из (10), а внутренние усилия – по формулам

$$M_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_{1t}\right), \quad M_y = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_{2t}\right), \quad H = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$N_x = -\left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right], \quad N_y = -\left[D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]. \quad (18)$$

Здесь M_x и M_y – изгибающие моменты, H – крутящий момент, N_x и N_y – поперечные силы.

Численные результаты и выводы. Численные расчеты проведены для квадратной ($a=b$) трехслойной ($\delta_1=\delta_3=0.15h$, $2\delta_2=0.7h$) пластины, усиленной ребрами размерами $h_r=0.2b$, $\gamma=0.2$ при постоянной нагрузке $q=q_0$, изготовленной из монослоев однонаправленного КМ KEVLAR49/DER332/JEFFAMINE®T-403 ($\phi_1=\phi_3=0^\circ$, $\phi_2=90^\circ$), для которого принято [5]: $E_1=81.8\text{ GPa}$, $E_2=5.1\text{ GPa}$, $G=1.82\text{ GPa}$, $\nu_{12}=0.31$, $\nu_{21}=0.019$, $\alpha_{1t}=-4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{2t}=79 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (при базовой температуре $T_* = 25^\circ\text{C}$).

В табл. 1 для различных значений приведенной толщины пластинки $\bar{h}=h/b$ и меры изменения температуры T_0 приведены максимальные значения приведенных прогибов пластинки $\bar{w}=w/h$ и изгибающих моментов $\bar{M}_x=M_x/q_0b^2$, $\bar{M}_y=M_y/q_0b^2$ в центре $\bar{x}=x/a=0$, $\bar{y}=y/b=0.5$ ($\bar{w}_1$, $\bar{M}_{x1}$, $\bar{M}_{y1}$) и в середине кромки $\bar{x}=0.5$, $\bar{y}=0.5$ ($\bar{w}_2$, $\bar{M}_{x2}$, $\bar{M}_{y2}$) пластинки. На рис. 3 показаны эпюры приведенных прогибов и внутренних усилий для случая $\bar{h}=0.025$ и $T_0=30^\circ$.

Таблица 1

Значения прогибов и внутренних усилий пластинки

$\bar{h}$	T_0	$\bar{w}_1$	$\bar{w}_2$	$\bar{M}_{x1}$	$\bar{M}_{x2}$	$\bar{M}_{y1}$	$\bar{M}_{y2}$
0.050	40°	0.0185	0.0184	0.1188	-0.0027	0.0099	0.0051
	30°	0.0148	0.0139	0.1091	-0.0030	0.0203	0.0055
	20°	0.0111	0.0094	0.0994	-0.0034	0.0306	0.0059
	0°	0.0037	0.0005	0.0800	-0.0041	0.0512	0.0067
	-20°	0.0037	0.0084	0.0607	-0.0049	0.0718	0.0075
	-30°	-0.0074	-0.0123	0.0509	-0.0053	0.0822	0.0079
	-40°	-0.0111	-0.0174	0.0412	-0.0056	0.0925	0.0083
0.025	40°	0.1077	0.0721	0.0866	-0.0200	0.0309	-0.0007
	30°	0.0922	0.0543	0.0832	-0.0215	0.0328	-0.0005
	20°	0.0766	0.0366	0.0797	-0.0231	0.0347	-0.0004
	0°	0.0456	0.0011	0.0728	-0.0262	0.0386	-0.0001
	-20°	0.0145	-0.0343	0.0659	-0.0293	0.0425	0.0002
	-30°	-0.0011	-0.0521	0.0624	-0.0309	0.0445	0.0004
	-40°	-0.0166	-0.0698	0.0590	-0.0324	0.0464	0.0006

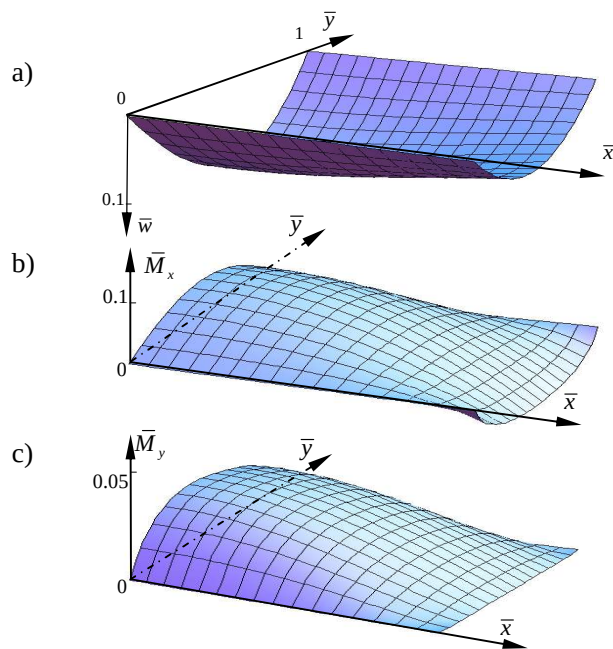


Рис. 3. Эпюры: а) прогибов $\bar{w}$, б) изгибающих моментов $\bar{M}_x$, в) изгибающих моментов $\bar{M}_y$.

Как следует из полученных результатов, изменение температуры оказывает значительное влияние на величины как прогибов, так и изгибающих моментов. При этом при $T_0 > 0$ увеличение температуры приводит к увеличению прогибов и уменьшению изгибающих моментов $\bar{M}_y$ как в центре пластинки, так и в середине ее кромки, в то время как величины изгибающих моментов $\bar{M}_x$ в центре пластинки увеличиваются, а на кромке уменьшаются (по абсолютной величине). При увеличении отрицательной температуры прогибы уменьшаются по всей поверхности пластинки, меняя свой знак при определенных значениях температуры, а изгибающие моменты $\bar{M}_x$ и $\bar{M}_y$ по абсолютной величине увеличиваются.

Несложно определить значения температуры, при которых прогибы пластинки в центре и в середине края пластинки получаются равными или прогиб пластинки в центре равен нулю.

Так, для случая $\bar{h} = 0.05$ прогибы в центре и в середине края пластинки становятся равными при $T_0 = 43^\circ$. При этом $\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0.197$ и форма изогнутой поверхности пластинки приближается к цилиндрической. При $T_0 = -10.1^\circ$ прогиб пластинки в центре равен нулю, $\bar{w}_1 = 0$, а на конце он

принимает весьма малое отрицательное значение $\bar{w}_2 = -0.004$, т. е. Срединная поверхность пластинки практически не изгибается.

Закключение. Анализ результатов исследования показывает, что наличие температурного поля при поперечном изгибе пластинки оказывает существенное влияние на ее напряженно-деформированное состояние. При этом соответствующим выбором величины изменения температуры можно регулировать форму изогнутой срединной поверхности пластинки. Следует также отметить, что на основе решения данной задачи можно исследовать вопросы оптимального выбора геометрических и физических параметров пластинки, а также действующей нагрузки и температуры, наиболее полно удовлетворяющих условиям эксплуатации конструкции.

¹Институт механики НАН РА

²Мурманский государственный технический университет

Э. В. Белубекян, А. З. Дарбинян, А. А. Саакян

Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки

Рассматривается многослойная прямоугольная пластинка, изготовленная из композиционного материала и усиленная по двум противоположным кромкам ребрами жесткости. Определяется напряженно-деформированное состояние пластинки при одновременном действии поперечной нагрузки и температурного поля. Произведена численная реализация задачи.

Է. Վ. Բելուբեկյան, Ա. Ջ. Դարբինյան, Ա. Ա. Սահակյան

Կոմպոզիտային շերտավոր կողավոր սալի ծովան ջերմատառձգական խնդիրը

Դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և երկու հանդիպակաց կողմերով կոշտության կողերով ուժեղացված բազմաշերտ ուղղանկյուն սալ: Լայնական բեռի և ջերմային դաշտի համատեղ ազդեցության դեպքում որոշվում է սալի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը: Կատարված են թվային հաշվարկներ:

E. V. Belubekyan, A. Z. Darbinyan, A. A. Sahakyan

Thermoelasticity Problem of Bending of the Composite Laminated Ribbed Plate

The multi-layer rectangular plate made of a composite material and reinforced by two opposite edges by stiffening ribs is examined. The stress-strain state of the plate by

the action of transverse load and temperature field is determined. Numerical implementation of the problem is produced.

Литература

1. *Дарбинян А. З.* В кн.: Труды 2-й междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 4-8 октября 2010, Дилижан, Армения. Ер. Изд. ЕГУАС. 2010. Т. 1.-364 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
3. *Белубекян М. В., Саргсян М. Г., Саноян Ю. Г.* – Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т. 6. № 2. С. 255-261.
4. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М. Машиностроение. 1988. 272 с.
5. Справочник по композиционным материалам. Под ред. Дж. Любина. Кн. 1. М. Машиностроение. 1988. 448 с.

великолепный каталог данных исключительно точных наблюдений по движению планет, в особенности данные по Марсу, сформулировал три своих знаменитых закона о движении планет. Согласно первому закону Кеплера любая планета движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с Солнцем в одном из фокусов эллипса (тем самым была опровергнута птолемеевская модель движения). Согласно второму закону любая планета движется по орбите с постоянной секториальной скоростью. Третий закон Кеплера устанавливает связь между большой полуосью (a) эллипса и периодом (T), за которое планета завершает полный оборот

$$\left(\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \right), G - \text{гравитационная постоянная.}$$

Законы Кеплера – эмпирические. Несколько десятилетий спустя Ньютон математически вывел законы Кеплера и сформулировал знаменитый закон всемирного тяготения. Согласно закону Ньютона сила всемирного тяготения – центральная, каждая масса m притягивается другой массой M во Вселенной с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между массами, и направлена по линии, соединяющей центры масс. Ньютон сделал гораздо больше, доказав, что орбитой тел, движущихся вокруг Солнца, может являться любая из кривых семейства конических сечений (окружность, эллипс, парабола, гипербола). В последующие десятилетия и столетия закон всемирного тяготения Ньютона получил множество убедительных и ярких подтверждений. Пользуясь этим законом, Вильям Гершель в 1781 г. открыл планету Уран, в 1840-х гг. Адамс в Англии и Леверье во Франции открыли планету Нептун. В XVIII в. были открыты комета Галлея и множество малых планет-астероидов. Однако несмотря на огромное множество успехов некоторые явления были трудно объяснимы по закону Ньютона. В 1859 г. Леверье обнаружил некоторое расхождение орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий в перигее с результатами наблюдений. Не найдя убедительных объяснений этого факта, Симон Ньюкомб в 1895 г. высказал мнение, что, возможно, закон обратных квадратов Ньютона не выполняется точно на малых расстояниях. В 1917 г. факту, связанному с аномалией орбиты Меркурия, было дано объяснение на основе общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, и противоречие казалось исчерпанным. Однако в 1965 г. Р. Дикке и М. Голденбергом было доказано, что Солнце не является шарообразным и его полярный диаметр на 35 км меньше, чем экваториальный, что позволяло объяснить остаточное смещение перигелия Меркурия примерно на 10%. Это ставило под сомнение уже согласие ОТО с результатами наблюдений [1-3]. Различные варианты центральных сил, при которых решение уравнения движения приводится к квадратурам, рассмотрены Якоби, Бертрамом, Дарбу, Альфеном. Однако ими не описано хоть одно реально существующее движение [4]. Основные типы реально существующих на сегодняшний день в природе и атомной физике сил указаны в [1, 5].

Вторая особенность создавшегося положения связана с вопросом существования «тёмных тел» (по современной терминологии «чёрные дыры»). В 1783 г. английский астроном-любитель Джон Митчелл, в после-

дующем один из основателей сейсмологии, а в 1795 г. известный французский математик и механик Лаплас независимо друг от друга на основе закона тяготения Ньютона высказали мнение, что в природе должны существовать тела, для которых необходимая для преодоления их притяжения скорость превышает скорость света (c). Поэтому такие тела должны быть «тёмными». Подобные тела невидимы, и их можно обнаружить косвенным путем – гравитационным воздействием на другие тела. Митчелл и Лаплас вывели радиус «тёмного тела» r_g (гравитационный радиус) при заданной его массе, используя понятие второй космической скорости ($r_g = 2GM/c^2$). После построения ОТО рассуждения Митчелла и Лапласа были подвергнуты критике в том плане, что при близких к скорости света скоростях формулы классической механики не применимы, хотя по обеим теориям получается одно и то же значение для гравитационного радиуса. Оппоненты же ОТО утверждают, что она не применима, поскольку решение уравнений этой теории содержит особенность (сингулярность), недопустимую при описаниях естественных явлений.

Приведённые выше факты обуславливают актуальность затронутого Ньюкомбом вопроса, а именно: существует ли такое центральное взаимодействие, которое при малых расстояниях отличается от ньютоновского (оно более сильное), а при больших совпадает с ним. Ниже мы дадим положительный ответ на поставленный вопрос.

1. О более мощном центральном взаимодействии тел и частиц.

Рассмотрим вариант центрального взаимодействия тел, который при коротких расстояниях описывает более сильное, по сравнению с ньютоновым гравитационным, взаимодействие, а при сравнительно больших расстояниях практически совпадает с ним. Пусть имеем тела (частицы) с массами m , M . Поместим начало полярных координат (r, θ) в центре тела с массой M . Центральную силу взаимодействия будем задавать в виде

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{k/r}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (1.1)$$

или

$$F = -GmM \frac{e^{k/r}}{r^2}, \quad (1.2)$$

где G – гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$). Показатель k будет характеризовать мощность (интенсивность) центра притяжения. При $k = 0$ взаимодействие (1.1) совпадает с ньютоновым. Если же $k > 0$, оно будет более мощным, чем ньютоново. Очевидно, что k имеет размерность длины. О её значениях поговорим чуть позже.

Поскольку процессы, происходящие во Вселенной, как правило, являются периодическими, ниже докажем возможность существования периодического решения и при взаимодействии (1.1).

Поле, создаваемое силой F , задаваемой по формуле (1.1), является потенциальным с потенциалом

$$U = -\frac{GmM}{k} e^{k/r} + \text{const} , \quad (1.3)$$

который существенно сильнее потенциала ньютонова поля ($U = -GmM/r$).

Поскольку сила $\vec{F}$ – центральная, траектория материальной точки – плоская кривая, и имеет место закон площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C , \quad (1.4)$$

где C равна величине момента начальной скорости относительно центра притяжения. Учитывая (1.4), скорость точки траектории определяется по формуле

$$v^2 = C^2 \left(\left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right). \quad (1.5)$$

Используя теорему о кинетической энергии $\left(\frac{dmv^2}{2} = Fdr \right)$, имеем

$$v^2 = \frac{2GM}{k} e^{k/r} + h , \quad (1.6)$$

где постоянная интегрирования h определяется из начального условия: при $r = r_0$, $v = v_0$.

Обозначим $\psi = 1/r$, тогда

$$V^2 = C^2 \left(\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + \psi^2 \right) \quad (1.7)$$

и из (1.6), (1.7) следует

$$\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{2GM}{k} e^{k\psi} + h \right) \frac{1}{C^2} - \psi^2. \quad (1.8)$$

Определение траектории движения в полярной системе (r, θ) приводится к вычислению интеграла

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2GM}{k} e^{k\psi} + h \right) \frac{1}{C^2} - \psi^2}}. \quad (1.9)$$

Для выяснения формы траектории разложим функцию $\exp(k\psi)$ в ряд Маклорена и ограничимся пока первыми тремя слагаемыми

$$e^{k\psi} \approx 1 + k\psi + \frac{1}{2} k^2 \psi^2; \quad (1.10)$$

согласно (1.8) будем иметь

$$\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 = \delta_1 \left[k_2^2 - (\psi - k_1)^2 \right], \quad (1.11)$$

где

$$\delta_1 = 1 - \frac{GMk}{C^2}, \quad k_1 = \frac{GM}{C^2 \delta_1}, \quad (1.12)$$

$$k_2^2 = k_1^2 + (2GM + kh) \frac{1}{kC^2 \delta_1} = \frac{1}{kC^2 \delta_1^2} [GM + (GM + kh)\delta_1].$$

Будем считать $\delta_1 > 0$, ибо лишь при этом решение будет периодическим, а траектория будет коническим сечением. Вводя обозначение $\psi - k_1 = k_2 \rho$, уравнение (1.11) приведем к виду

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \delta_1 (1 - \rho^2), \quad (1.13)$$

откуда следует

$$\rho = \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \alpha). \quad (1.14)$$

Вернувшись к первоначальным обозначениям, получим

$$\psi = k_1 - k_2 \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \theta_0),$$

$$r = \frac{1/k_1}{1 - \frac{k_2}{k_1} \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \theta_0)}, \quad (1.15)$$

т.е. траектория движения является коническим сечением, с параметрами

$$p = \frac{1}{k_1} = \frac{C^2}{GM} - k, \quad (1.16)$$

$$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{C^2}{MGk} - 1 \right) \left(2 + \frac{hk}{MG} \right)}.$$

Поскольку $\delta_1 > 0$, то $\left(\frac{C^2}{MGk} - 1 \right) - 1 > 0$. Для получения эллипса необходимо, чтобы $2 + \left(\frac{hk}{MG} \right) < 0$, т.е.

$$h < -\frac{2GM}{k}. \quad (1.17)$$

Траектория движения будет эллипсом, если

$$-1 < \left(\frac{C^2}{MGk} - 1 \right) \left(2 + \frac{hk}{MG} \right) < 0, \quad (1.18)$$

откуда следует

$$-\frac{MG}{k} \left(1 + \frac{C^2}{C^2 - MGk} \right) < h < -\frac{2GM}{k}. \quad (1.19)$$

Полуоси эллипса определяются по формулам

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (1.20)$$

При

$$h = -\frac{MG}{k} \left(1 + \frac{C^2}{C^2 - MGk} \right) \quad (1.21)$$

траектория является окружностью, при $h = -2GM/k$ – параболой, а при $h > -2GM/k$ – гиперболой. Постоянная интегрирования h , как всегда, определяется из начального условия: при $r = r_0$ $v = v_0$. Согласно (1.6)

$$h = v_0^2 - \frac{2GM}{k} e^{\frac{k}{r_0}}, \quad (1.22)$$

и условие (1.17) запишется в виде

$$v_0^2 < \frac{2GM}{r_0} \left(\frac{e^{\frac{k}{r_0}} - 1}{k/r_0} \right) = v_*^2, \quad (1.23)$$

следовательно, при $v_0 < v_*$ траектория является эллипсом, при $v_0 = v_*$ – параболой, а при $v_0 > v_*$ – гиперболой. $\lim_{k \rightarrow 0} v_*^2 = \frac{2GM}{r_0} = v_{*0}^2$, $v_{*0} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ – вторая космическая скорость по теории Ньютона, т.е. начальная скорость, при которой тело преодолевает притяжение тела с массой M . Если же $k > 0$, согласно (1.23) $v_* > v_{*0}$, т.е. вторая космическая скорость при взаимодействии (1.1) больше классической, чего и следовало ожидать.

Отметим также, что сохранение в ряде Маклорена функции $\exp k\psi$ больше слагаемых, чем в (1.10), приводит к вычислению эллиптических интегралов и несущественным поправкам к параметрам траектории.

2. О гравитационном радиусе «тёмного тела» («чёрной дыры»). Тело с массой M будет тёмным (невидимым, или «чёрной дырой»), если любое тело (частица) с массой m и начальной скоростью, даже равной скорости света c , не может преодолевать поле притяжения массы M . Возникает естественный вопрос – каков гравитационный радиус R_g при взаимодействии (1.1). Для определения гравитационного радиуса R_g в формуле (1.23) начальными условиями будут: при $r_0 = R_g$ $v_* = c$. Имеем

$$\frac{2GM}{R_g} \left(\frac{e^{\frac{k}{R_g}} - 1}{k/R_g} \right) = c^2. \quad (1.24)$$

Обозначив $\lim_{k \rightarrow 0} R_g = r_g$ и перейдя в (1.24) к пределу при $k \rightarrow 0$, получим

$$\frac{2GM}{r_g} = c^2 \quad \text{или} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.25)$$

т.е. радиус r_g – известный гравитационный радиус при классическом центральном взаимодействии Ньютона. Обозначим $\gamma = k/R_g$, тогда из (1.24) с учётом (1.25) следует

$$R_g = r_g \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \quad (1.26)$$

или

$$\frac{R_g}{r_g} = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}. \quad (1.27)$$

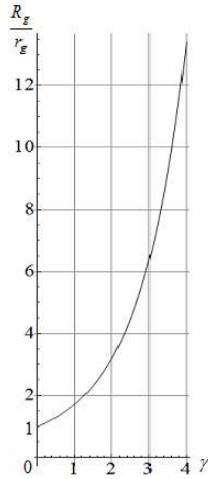


Рис.1

$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{R_g}{r_g} = 1$, при $\gamma > 0$, $R_g > r_g$, а из графика функции R_g/r_g (рис.1) следует, что гравитационный радиус R_g при взаимодействии (1.1), по сравнению с ньютоновым гравитационным радиусом r_g может быть сколь угодно большим. Из формул (1.24), (1.26) следует, что параметр k пропорционален гравитационному радиусу R_g ($k = \gamma R_g$). Задав значение γ , из графика (рис.1), или по формуле (1.27) определится R_g/r_g , т.е. сам гравитационный радиус R_g и наоборот.

Например, при $\gamma = 1$ (т.е. $k = R_g$) $R_g = 1.718r_g$; $\gamma = 3$ ($k = 3R_g$) $R_g = 6.362r_g$; $\gamma = 5$, $R_g = 29.483r_g$; $\gamma = 10$, $R_g = 2202.547r_g$; $\gamma = 100$, $R_g = 2.689 \cdot 10^{41}r_g$

Если же $R_g/r_g = 1$, то $\gamma = 0$, $k = 0$; при $R_g = 5r_g$ $\gamma = 2.66$ ($k = 2.66R_g$); $R_g = 10r_g$, $\gamma = 3.615$; $R_g = 100r_g$, $\gamma = 6.475$; $R_g = 1000r_g$, $\gamma = 9.118$.

Полученные выше результаты позволяют сделать вывод, что могут существовать «тёмные тела» со сколь угодно большим гравитационным радиусом R_g ; притяжение «тёмного тела» не подчиняется классическому (ньютоновому) закону притяжения, а подчиняется закону существенно мощного центрального притяжения (1.1). Может существовать множество «тёмных тел».

Институт механики НАН РА

Академик Л. А. Агаловян

О более мощном, чем ньютоново, центральном взаимодействии тел и частиц

Установлен вариант центрального взаимодействия тел ((1.1)), который при коротких расстояниях описывает более мощное, по сравнению с ньютоновым, гравитационное взаимодействие. Выведены условия, при которых траектория

движения является коническим сечением. Установлена связь центрального взаимодействия (1.1) с гравитационным радиусом R_g «тёмного тела» («чёрной дыры»). Показано, что гравитационный радиус R_g «тёмного тела» может быть сколь угодно большим.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան

**Մարմինների և մասնիկների՝ ավելի հզոր, քան նյութոտյանը,
կենտրոնական փոխազդեցության մասին**

Բացահայտված է մարմինների կենտրոնական փոխազդեցության այնպիսի տարբերակ, որը կարճ հեռավորությունների դեպքում էապես հզոր է, քան նյութոտյան կենտրոնական փոխազդեցությունը: Արտածված են պայմաններ, որոնց դեպքում շարժման հետագիծը կոնական հատույթ է: Կապ է հաստատված (1.1) կենտրոնական փոխազդեցության և «մութ մարմնի» («սև խոռոչ») գրավիտացիոն R_g շառավղի միջև: Ցույց է տրված, որ «մութ մարմնի» գրավիտացիոն շառավիղը կարող է լինել ցանկացած մեծ չափի:

Academician L. A. Aghalovyan

**On More Powerful than Newton Central Interaction
of Bodies and Particles**

A variant of central interaction of bodies which at short distances describes more powerful, comparing with Newton one, gravitational interaction, is established. Conditions, under which the trajectory of the movement is a conic section, are derived. The connection of the central interaction with the gravitational radius R_g of “the dark body” (“black holes”) is established. It is shown that the gravitational radius R_g of the “dark body” can be arbitrarily big. There may be a lot of “black holes”.

Литература

1. Куттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. М. Наука. 1975. 480 с.
2. Layzer D. Constructing the Universe. New York. Scientific American Books. Inc. 1984 (Лейзер Д. Создавая картину Вселенной. М. Мир. 1988. 324 с.)
3. Kaufman W. The cosmic frontiers of general relativity. Boston. Toronto. 1977. By Little, Brown and Co. (Кауфман У. Космические рубежи теории относительности. М. Мир. 1981. 350 с.)
4. Анпель П. Теоретическая механика. Т.1. М. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1960. 515 с.
5. Wichmann. Quantum Physics. Berkeley Physics Course. Vol. IV. 1967. Mc GRAW-HILL Book Comp. (Вихман Э. Квантовая физика. М. Наука. 1977. 416 с.).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. В. Тагворян

Об одной неклассической краевой задаче теории упругости для слоистых пластин

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 26/XII 2016)

Ключевые слова: *литосферная плита, слоистость, упругость, трехмерная неклассическая задача, асимптотическое решение.*

1. Введение. Современная наука возникновения сильных землетрясений связывает с тектоникой литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1-3].

Связанные с землетрясениями процессы принято делить на два состояния: медленные (вековые) и скачкообразные (быстротечные). Вековые движения могут длиться десятки лет. В результате в литосферной плите и земных блоках накапливаются деформации, которые, достигнув порядка 10^{-4} , а по Рикитаке порядка $4.7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению – землетрясению. Основная часть накопленной потенциальной энергии выделяется в виде объемных Р (продольных или первичных) и сдвиговых S (вторичных) волн, которые распространяются со скоростями V_P , V_S , где всегда $V_P > V_S$. Фиксируя время прихода этих волн, по их разности удастся установить расстояние очага землетрясения от заданной станции, а по данным трех станций – расположение очага землетрясения.

Помимо продольных и поперечных волн возникают также поверхностные волны Релея и Лява. Быстрые (скачкообразные) движения возникают в результате форшока, самого землетрясения и афтершока. Таким образом, землетрясение есть результат глобального разрушения. Следовательно, для предсказания землетрясений необходимо найти напряженно-деформированные состояния литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры и проследить за их изменением во времени. В шестидесятые годы XX столетия было обнаружено изменение геометрии лицевой поверхности земной коры до землетрясений. Тогда встал вопрос: можно ли найти напряженно-деформированное состояние, имея структуру местности (слоистость, толщина и упругие характеристики, плотность слоев) и используя значения перемещений точек лицевой поверхности, как данные сейсмостанций, GPS систем, наклономеров?

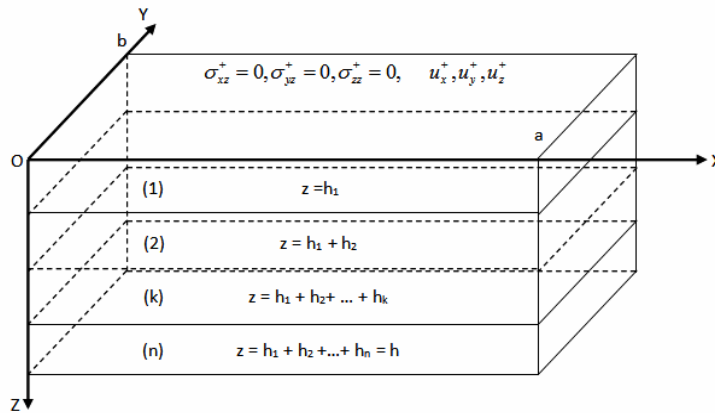
Возникающая задача оказалась неклассической задачей теории упругости, поскольку на лицевой поверхности приходится ставить шесть условий: поверхность свободна, т. е. три компоненты тензора напряжений равны нулю, но известны значения перемещений этой поверхности (три условия). В классической же задаче теории упругости на поверхности ставятся три условия. Доказано, что сформулированная выше неклассическая задача всегда имеет решение, более того, всегда существует классическая краевая задача, решением которой она является [4].

Для слоистых пластин, когда между слоями выполняются условия полного контакта, неклассическая краевая задача определения напряженно-деформированных состояний литосферных плит Земли решена в [5].

Проследивая за изменением во времени напряженно-деформированного состояния слоистого пакета, можно фиксировать такое состояние, которое приводит к отрыву контакта между отдельными слоями, после чего необходимо изучить напряженно-деформированное состояние, когда имеет место отрыв.

В настоящей работе решена неклассическая задача теории упругости для слоистого пакета, когда контакт между первым и вторым слоями неполный, т.е. произошел отрыв. Найденное решение можно обобщить на случай отрыва между слоями с номерами $(k-1)$ и k .

2. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Рассмотрим пакет из n ортотропных пластин, занимающий область $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, h = h_1 + h_2 + \dots + h_n, \min(a, b) = l, h \ll l\}$, где h_k – толщины пластин (рисунок).



Требуется найти решение системы уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости с учетом объемных сил (в нашем случае вес) и температурного поля по модели Дюгамеля – Неймана при граничных условиях при $z = 0$:

$$\sigma_{je}(x, y, 0, t) = 0, u_j(x, y, 0, t) = u_j^+(x, y, t), j = x, y, z, \quad (1)$$

где время t входит как параметр; при условиях неполного контакта между первым и вторым слоями при $z = h_1$:

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= \sigma_{jz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad j = x, y, z, \\ u^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1) - u^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= k_1 \sigma_{xz}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\ v^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1) - v^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= k_2 \sigma_{yz}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\ w^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= w^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad \zeta_1 = h_1 / h,\end{aligned}\tag{2}$$

и при условиях полного контакта между остальными слоями:

$$\sigma_{jz}^{(k)} = \sigma_{jz}^{(k-1)}, \quad u_j^{(k)} = u_j^{(k-1)}, \quad \zeta_{k-1} = (h_1 + h_2 + \dots + h_{k-1}) / h, \quad j = x, y, z, \quad k \geq 3.\tag{3}$$

Условия на боковых поверхностях $x = 0, a; y = 0, b$ не будем конкретизировать, для данного класса неклассических краевых задач ими обусловлен пограничный слой.

3. Общее асимптотическое решение задачи. В случае медленных движений литосферных плит процесс квазистатический (время t входит как параметр). Чтобы решить сформулированную выше задачу, перейдем к безразмерным переменным и перемещениям по формулам:

$$\xi = x / l, \quad \eta = y / l, \quad \zeta = z / h = \varepsilon^{-1} z / l, \quad u = u_x / l, \quad v = u_y / l, \quad w = u_z / l, \quad \varepsilon = h / l\tag{4}$$

В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \zeta} + l F_x^{(k)} &= 0, \quad (x, y, \xi, \eta) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial \zeta} + l F_z^{(k)} &= 0, \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \xi} &= e_1^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \eta} = e_2^{(k)} + \alpha_{22}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta} = e_3^{(k)} + \alpha_{33}^{(k)} \theta^{(k)}, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}, \\ e_m^{(k)} &= a_{1m}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{2m}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{3m}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad m = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $F_j^{(k)}$ – компоненты объемной силы, $\theta^{(k)}$ – изменение температурного поля, которое считается известным, индекс " k " означает номер слоя. Система (5) сингулярно возмущена малым параметром ε , и решение складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b) [6]. Решение внутренней задачи ищем в виде

$$I_k^{\text{int}} = \varepsilon^{q_i + s} I^{(k, s)}, \quad s = \overline{0, N}\tag{6}$$

После подстановки (6) в (5) и приравнивания в каждом уравнении коэффициентов при одинаковых степенях ε получим непротиворечивую систему для определения коэффициентов $I^{(k, s)}$, если $q_{u, v, w} = 0$, $q_{\sigma_{ij}} = -1$. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_x^{(k,s)} = 0, \quad (x, y, \xi, \eta), \\
& \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_z^{(k,s)} = 0, \quad F_j^{(k,0)} = \varepsilon^2 l F_j, \quad F_j^{(k,s)} = 0, \quad s \neq 0, \\
& \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} = e_1^{(k,s)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k,s)}, \quad \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} = e_2^{(k,s)} + \alpha_{22}^{(k)} \theta^{(k,s)}, \\
& \frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \zeta} = e_3^{(k,s)} + \alpha_{33}^{(k)} \theta^{(k,s)},
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s)}, \quad \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s)}, \\
& \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)},
\end{aligned}$$

$$\theta^{(k,0)} = \varepsilon \theta^{(k)}, \quad \theta^{(k,s)} = 0 \text{ при } s \neq 0.$$

Из системы (7) следуют:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{jz}^{(k,s)} = \sigma_{jz0}^{(k,s)} + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\
& \sigma_{xx}^{(k,s)} = -\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
& \sigma_{yy}^{(k,s)} = -\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
& \sigma_{xy}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \\
& u^{(k,s)} = a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
& v^{(k,s)} = a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
& w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{zz0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
& \sigma_{jz*}^{(k,s)} = -\int_0^\zeta \left[F_j^{(k,s)} + \frac{\partial \sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad j = x, y, z \\
& \sigma_{xx*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right], \\
& \sigma_{yy*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{11}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right], \\
& u_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{55}^{(k)} \sigma_{xz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta, \quad v_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{44}^{(k)} \sigma_{yz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta,
\end{aligned}$$

$$w_*^{(k,s)} = \int_0^{\zeta} \left[a_{13}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s)} \right] d\zeta, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)} \right)^2, & A_{13}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}, \\ A_{23}^{(k)} &= a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}, & A_{33}^{(k)} &= a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)}, \\ \gamma_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{22}^{(k)}, & \gamma_{22}^{(k)} &= a_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{11}^{(k)}, \\ B_{11}^{(k)} &= a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)}, & Q^{(k,m)} &\equiv 0 \text{ при } m < 0. \end{aligned}$$

Решение (6), (8) содержит $6k$ неизвестных функций $\sigma_{xz0}^{(k,s)}(\xi, \eta)$, $\sigma_{yz0}^{(k,s)}(\xi, \eta)$, $\sigma_{zz0}^{(k,s)}(\xi, \eta)$, $u_0^{(k,s)}(\xi, \eta)$, $v_0^{(k,s)}(\xi, \eta)$, $w_0^{(k,s)}(\xi, \eta)$, которые однозначно определяются из $6k$ граничных условий, включая условия полного и неполного контакта. Отметим, что время t в граничных условиях играет роль параметра и характеризует состояние лицевой поверхности пакета на заданный момент $t = t_i$.

Используя решение (6), (8), (9) и удовлетворив условиям для первых двух слоев, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{jz0}^{(1,s)} &= 0, \quad \sigma_{jz}^{(1,s)} = \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\ u_0^{(1,s)} &= u^{+(s)}, \quad u^{(1,s)} = u^{+(s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v), \\ w_0^{(1,s)} &= w^{+(s)}, \quad w^{(1,s)} = w^{+(s)} + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} d\zeta + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ \sigma_{jz0}^{(2,s)} &= \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{jz}^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad \zeta_1 = h_1 / h, \\ \sigma_{jz}^{(2,s)} &= \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{jz}^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \sigma_{jz}^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ u_0^{(2,s)} &= u^{+(s)} + k_1 \sigma_{xz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - a_{55}^{(2)} \zeta_1 \sigma_{xz0}^{(2,s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - u_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\ u^{(2,s)} &= u^{+(s)} + a_{55}^{(2)} \sigma_{xz0}^{(2,s)}(\zeta - \zeta_1) + k_1 \sigma_{xz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \\ &\quad - u_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + u_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; k_1, k_2), \\ w_0^{(2,s)} &= w^{+(s)} + \int_0^{\zeta_1} \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \theta^{(2,s)} \right) d\zeta - \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \zeta_1 \sigma_{zz0}^{(2,s)} + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - w_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\ w^{(2,s)} &= w^{+(s)} + \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\zeta - \zeta_1) + \int_0^{\zeta_1} \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \theta^{(2,s)} \right) d\zeta + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \theta^{(2,s)} d\zeta + \\ &\quad + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - w_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + w_*^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (10)$$

а для слоя с произвольным номером $k \geq 3$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{jz0}^{(k,s)} &= \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \sigma_{jz}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}), \\ \sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \sigma_{jz}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \sigma_{jz}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ u_0^{(k,s)} &= u^{+(s)} + k_1 \sigma_{xz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - a_{55}^{(k)} \zeta_{k-1} \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}), \\ u^{(k,s)} &= u^{+(s)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + k_1 \sigma_{xz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \\ &\quad - u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; k_1, k_2), \\
& w_0^{(k,s)} = w^{+(s)} + \int_0^{\zeta_{k-1}} \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} - \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} \right) d\zeta - \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_{k-1} \sigma_{zz0}^{(k,s)} + \\
& + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}), \\
& w^{(k,s)} = w^{+(s)} + \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} (\zeta - \zeta_{k-1}) + \int_0^{\zeta_{k-1}} \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} - \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} \right) d\zeta + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + \\
& + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{11}$$

Используя формулы (6), (10), (11), можно решение внутренней задачи определить с заранее заданной точностью. Если входящие в граничные условия функции u^+, v^+, w^+ являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается, и получаем математически точное решение внутренней задачи. Решение пограничного слоя экспоненциально убывает при удалении от боковых поверхностей во внутрь пластинки. Поскольку продольные размеры a и b литосферных плит достаточно велики, пограничные слои в глобальном смысле не будут представлять практический интерес. В качестве иллюстрации приведем решение внутренней задачи при $u_j^+ = \text{const}$, $\theta^{(k)} = \text{const}$, $F_z^{(k)} = \rho_k g$:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{xz}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{yz}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(k)} = \varepsilon^{-1} \zeta_{k-1} (F_z^{(k,0)} - F_z^{(1,0)}) - \varepsilon^{-1} \zeta F_z^{(k,0)}, \quad F_z^{(k,0)} = \varepsilon^2 l \rho_k g, \\
& \sigma_{xx}^{(k)} = -\varepsilon^{-1} \frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_{k-1} (F_z^{(k,0)} - F_z^{(1,0)}) - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k)} + \varepsilon l \frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} F_z^{(k)} \zeta, \\
& \sigma_{yy}^{(k)} = -\varepsilon^{-1} \frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_{k-1} (F_z^{(k,0)} - F_z^{(1,0)}) - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k)} + \varepsilon l \frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} F_z^{(k)} \zeta, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = 0, \\
& u_x^{(k)} = u^+, \quad u_y^{(k)} = v^+, \quad u_z^{(k)} = w^+ + l \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_{k-1} (F_z^{(k,0)} - F_z^{(1,0)}) (\zeta - \zeta_{k-1}) + \\
& + l \varepsilon \zeta_{k-1} \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1)} - \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k)} \right) + l \varepsilon \zeta \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k)} + l w_*^{(1,0)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \\
& - l w_*^{(k,0)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + l w_*^{(k,0)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \sigma_{zz0}^{(k)} = \zeta_{k-1} (F_z^{(k,0)} - F_z^{(1,0)}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что при $\theta^{(k)} = \text{const}$ и $F_z^{(k)} = \rho_k g = \text{const}$ условие неполного контакта (2) становится условием полного контакта, потому что в этом случае всегда $\sigma_{xz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \equiv 0$, $\sigma_{yz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \equiv 0$.

Институт механики НАН РА

В. В. Тагворян

Об одной неклассической краевой задаче теории упругости для слоистых пластин

Напряженно-деформированные состояния литосферных плит Земли и отдельных участков земной коры, которые являются слоистыми пакетами из пла-

стин, можно определять асимптотическим методом и следить за изменениями напряженно-деформированных состояний во времени. Возможна такая ситуация, когда происходит нарушение полного контакта между определенными слоями (отрыв). Решена соответствующая задача, когда отрыв произошел между первым и вторым слоями. Асимптотическим методом построен итерационный процесс для определения напряженно-деформированного состояния такого пакета. Выявлены случаи, когда решение становится математически точным. В качестве иллюстрации приведено решение соответствующей частной задачи.

Վ. Վ. Թագվորյան

Շերտավոր սալերի համար առաձգականության տեսության մեկ ոչ դասական եզրային խնդրի մասին

Երկրագնդի լիտոսֆերային սալերի և երկրակեղևի առանձին հատվածների, որոնք սալերից բաղկացած շերտավոր փաթեթներ են, լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակները կարելի է որոշել ասիմպտոտիկ մեթոդով և հետևել լարվածադեֆորմացիոն վիճակների փոփոխության ըստ ժամանակի: Հնարավոր է այնպիսի իրավիճակ, որ տեղի ունենա որոշ շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի խախտում (պոկում): Լուծված է համապատասխան խնդիրը, երբ պոկումը տեղի է ունեցել առաջին և երկրորդ շերտերի միջև: Ասիմպտոտիկ մեթոդով կառուցված է իտերացիոն պրոցես՝ այդպիսի սալ-փաթեթի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը որոշելու համար: Նշված են այն դեպքերը, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, բերված է համապատասխան մասնավոր խնդրի լուծումը:

V. V. Tagvoryan

On a Non-Classic Boundary Problem of the Theory of Elasticity for Layered Plates

The intense deformed conditions of the lithospheric plates of the Earth and the individual segments of the Earth's crust, which are layered packages of plates, can be determined by an asymptotic method and follow the stress-strain state change according to the time. A solution is possible, where the full connection between the layers is violated (separation). The appropriate problem is solved, when the violation was occurred between the first and the second layers. An iterative process is structured by the asymptotic method for determining of plate-package stress-strain state. The cases are mentioned, when the solution becomes mathematically correct. The appropriate solution for this problem is given.

Литература

1. *Rikitake T.* Earthquake Prediction. Amsterdam. Elsevier. 1976. (*Րիկիտակե Թ.* Предсказание землетрясений. М. Мир. 1979):
2. *Kasahara K.* Earthquake Mechanics. Cambridge Univers. Press, Cambridge. 1981. (*Կասահարա Կ.* Механика землетрясений. М. Мир. 1985):

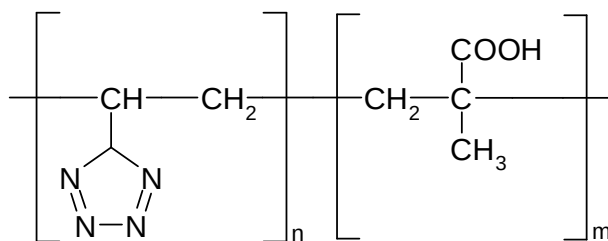
3. *Pichon H. Le, Francheteau J., Bonnin J.* Plate tectonics. Elsevier. 1973. (*Пишон К. Л., Фрэнкето Ж., Боннин Ж.* Тектоника плит. М. Мир. 1977):
4. *Aghalovyan L. A.* – Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. V. 155. P. 3-10.
5. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С., Гулгазрян Л. Г.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112. №3. С. 264 – 272.
6. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore – London. World Scientific. 2015. 376 p. (*Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.)

Электрохимическая сополимеризация происходит на поверхности электрода с образованием равномерной пленки толщиной 5-60 мкм. После сушки полимерное покрытие становится нерастворимым; по-видимому, происходит дополнительная сшивка полимерной сетки.

В ИК-спектрах сополимерных пленок имеются полосы поглощения, соответствующие валентным и деформационным колебаниям тетразольного кольца ($1080, 1260, 1475, 1570 \text{ см}^{-1}$), а также полосы с характерным расщеплением в области $1700\text{-}1750 \text{ см}^{-1}$, обусловленные карбонильной группой, участвующей в образовании водородной связи. В сополимерных покрытиях отсутствуют деформационные и валентные ($980, 1650 \text{ см}^{-1}$) колебания $\text{C}=\text{C}$ связи винильной группы.

Наличие факта сополимеризации подтверждается данными элементного, термогравиметрического анализов, а также плавным ходом кривых турбидиметрического титрования.

Полученные в работе данные свидетельствуют о том, что получается сополимер следующего строения:



Полученные таким образом полимерные покрытия имеют ровную поверхность. Их адгезионная прочность, определяемая методом решетчатых надрезов, соответствует одному баллу. Прочность покрытия при ударе превышает $4.8 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а пористость, определенная химическим методом, равняется одному баллу.

Как и в работе [4], синтезированные сополимеры благодаря наличию в структуре ионогенных $-\text{COOH}$ и $>\text{N}-\text{H}$ групп проявляют свойства полиэлектролитов, выражающиеся в аномальном возрастании приведенной вязкости их растворов в диметилформамиде с разбавлением в экстремальном характере зависимости приведенной вязкости от pH среды, причем с увеличением содержания ВТ в сополимере наблюдается сдвиг максимума кривой в сторону меньших значений pH (рис. 1).

Образование полимерной пленки практически начинается после включения тока, со временем увеличиваются масса и толщина покрытия, но при $\tau_{эл} = 4\text{--}5$ мин увеличение массы и толщины вследствие блокировки металла полимером замедляется. При увеличении плотности тока ($j > 12\text{--}15 \text{ мА/см}^2$) на катоде усиливается процесс выделения водорода, который ухудшает качество покрытий (рис. 2).

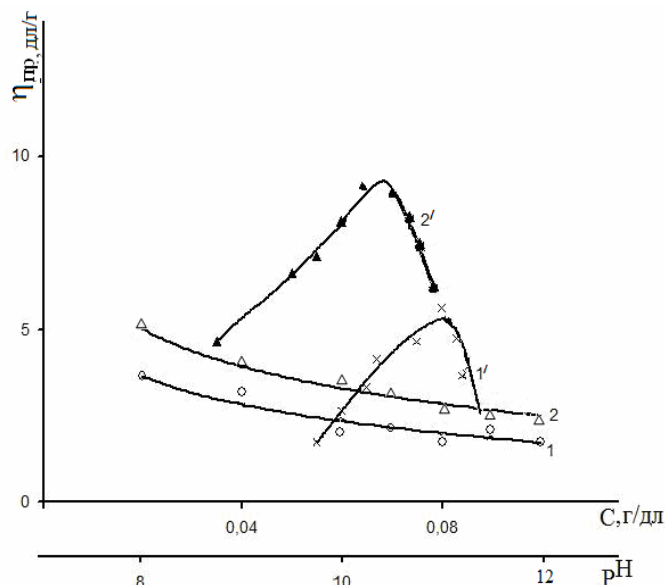


Рис. 1 Зависимость приведенной вязкости сополимеров от концентрации (1, 2) и от pH среды (1', 2'). Содержание ВТ в сополимере (мол. доли): 0,3(1, 1'), 0,4(2, 2').

Высокая степень конверсии мономеров наблюдается на медном электроде (рис. 2, кр. 2), что обнаружено и авторами [7] при изучении электровосстановления солей арилдиазония на различных металлах.

Для первичной оценки физиологической активности полимерных веществ исследованы антиоксидантные и антикоагулянтные свойства. Для хорошей растворимости сополимера в водные растворы добавляли NaOH.

Антиоксидантные свойства полимера изучали по их способности тормозить реакции перекисного окисления липидов, инициированные ионами Fe^{+2} [8]. Обнаружено, что сополимеры начинают проявлять антиоксидантные свойства, уменьшая скорость окисления; начиная с концентрации 0.02 мг/мл полное ингибирование процесса окисления липидов наблюдается при концентрации 0.18 мг/мл.

Опыты *in vitro* показали, что метахроматическая активность сополимера в концентрации 10 мг/мл составляет 60% от активности гепарина. Тромбиновое время значительно увеличивается (с 6 до 35 мин) по сравнению с полимером на основе 5-винилтетразола [9].

Следовательно, введение гидрофобной метильной группы в каждое звено макромолекулы поли-5-винилтетразола обуславливает усиление антикоагуляционного эффекта.

Экспериментальная часть. Электрохимическое инициирование полимеризации проводили в стеклянном электролизере без диафрагмы. В качестве источника питания использовали гальваностат ТЕС-23, для регистрации потенциалов – потенциостат марки П-5827М. Электродом сравнения служил хлорсеребряный электрод ЭВЛ-1М1. Толщину покрытий

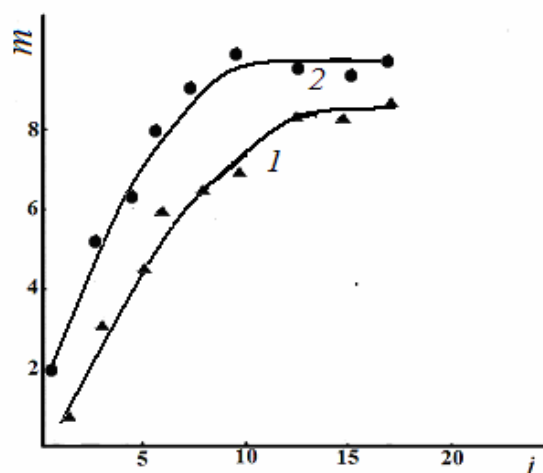


Рис. 2 Зависимость удельной массы $m(\text{мг} \cdot \text{см}^{-1})$ полимерного покрытия на основе сополимер ВТ и МАК от плотности тока $j(\text{мА}/\text{см}^2)$ на железном (1) и медном (2) электродах

определяли микрометрическим (марки ИЧ 10 МН) и магнитным (ИТП-1) методами. ИК спектры полимеров снимали на спектрометре Specord M-80, используя мелкодисперсные порошки, запрессованные в таблетки с КВг, или свободные пленки. Используемый в работе 5-винилтетразол (т.п. 126 °С) синтезировали по методике, описанной в работах [10, 11]. МАК получали и очищали стандартными методами [12]. Соли диазония получали согласно процедуре, описанной в [13]. Адгезию определяли методом решетчатого надреза, прочность на удар – на приборе "У-1А" [14]. Измерение вязкостей растворов сополимеров проводили в вискозиметре Убеллоде при 25°С.

Общая методика получения полимерного покрытия. Электролиз водного, водно-этанольного раствора ВТ и МАК проводили в стеклянной электролитической ячейке емкостью 50 мл при 20-23°С. В качестве катода использовали пластину из чистого железа или из стали и меди площадью 0.2-1 см², а в качестве анода – стеклоуглеродные или платиновые пластины. Чисто железные и стальные пластинки перед употреблением зашкуривали, обезжиривали ацетоном или эфиром и тщательно промывали дистиллированной водой. После окончания электролиза снимали электрод с образовавшимся покрытием, тщательно промывали дистиллированной водой и сушили до постоянной массы.

¹Национальный политехнический университет Армении

²Ереванский государственный медицинский университет имени М. Гераци

С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян

**Электросинтез полимерных покрытий на основе
5-винилтетразола и метакриловой кислоты**

В результате электрополимеризации 5-винилтетразола с метакриловой кислотой сформированы полимерные покрытия на чисто железном, стальном и медном электродах. Установлено, что синтезированный полимер имеет полиэлектролитное свойство. Найдены оптимальные условия синтеза качественных полимерных покрытий и намечены пути их применения.

Ս. Հ. Մարգարյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Մարգարյան

**5-վինիլտետրազոլի և մեթակրիլաթթվի հիման վրա պոլիմերային
ծածկույթների էլեկտրասինթեզ**

5-վինիլտետրազոլի և մեթակրիլաթթվի էլեկտրաստպոլիմերման հիման վրա ձևավորվել են պոլիմերային ծածկույթներ մաքուր երկաթի, պողպատի և պղնձի էլեկտրոդների վրա: Հաստատվել է, որ այդ ստպոլիմերն ունի պոլիէլեկտրոլիտի հատկություն: Գտնվել են որակյալ պոլիմերային ծածկույթների ստացման ամենաբարենպաստ պայմանները, և նախանշված են նրանց օգտագործման ուղիները:

S. H. Sargsyan, K. S. Margaryan, A. S. Sargsyan

**Electrosynthesis of Polymeric Coatings Based on 5-vinyltetrazole
Methacrylic Acid**

As a result of electropolymerization of 5-vinyltetrazole with methacrylic acid, polymer coatings on pure iron, steel and copper electrodes are formed. It is established that the synthesized polymer has a polyelectrolytic property. The optimal conditions for the synthesis of high-quality polymer coatings are found and the ways of their application are planned.

Литература

1. Круглова В. А., Анненков В.В., Верещагин Л. И. и др. – Хим.-фарм. ж. 1987. № 2. С. 159-163.
2. Полимеры медицинского назначения: Под. ред. Манабу С. М. Медицина. 1981. 248 с.
3. Hodnett E.M. – Polym. News. 1982. V. 8, № 5. P. 162-167.
4. Круглова В. А., Ворopaева Е. Ф., Анненков В. В., Кижняев В. И. – Изв. вузов. Хим. и хим. технология. 1987. Т. 30. № 12. С. 105-109.
5. Саргисян С.А., Маргарян К.С., Саркисян А.С. – Хим. ж. Армении. 2012. Т. 65. № 1. С. 126.
6. Маргарян К. С. – Хим. ж. Армении. 2013. Т. 66. № 2. С. 333-338
7. Ковальчук Е. П., Ганущак Н. И., Копылец В. И. – ЖОХ. 1982. Т. 52. С. 2540.
8. Владимиров Ю. А., Арчаков А. Н. – Перекисное окисление липидов в биологических мембранах Под. ред. Франк Г.М. М. Наука. 1972. 252 с.
9. Круглова В. А., Анненков В. В., Москвитина Л. Т., Бойко Н.М., Бузилова С.Р.,

- Казимировская В. Б., Кижняев В. Н., Левина М. Н.* – Хим.-фарм. ж. 1989. № 2. С. 195-198.
10. *Arnold C., Thatcher D.N.* – J. Org. Chem. 1969. –V. 34. № 4. P. 1141.
 11. *Бузилова С.Р. и др.* – Химия гетероциклических соедин. 1981. № 9. С. 1279
 12. *Платэ Н.А., Сливинский Е.В.* Основы химии и технологии мономеров: Учебное пособие для студентов старших курсов и аспирантов вузов. М. Наука. 2002. 696 с.
 13. *Сидорина Н. Е., Климочкин Ю. Н.* Диазо- и азосоединения: Практикум. Самара. Самар. гос. тех. ун-т. 2009. 118 с.
 14. *Карякина М. И.* Лабораторный практикум по испытанию лакокрасочных материалов и покрытий. М. Химия, 1977. 238 с.

БИОФИЗИКА

УДК 577.113.6

Ս. Օ. Варdevանյան, А. П. Антонян, М. А. Парсаданян,
В. Г. Саакян

Исследование совместного связывания акридинового
оранжевого и бромистого этидия с ДНК

(Представлено академиком Л.А. Тавадяном 15/XII 2016)

Ключевые слова: ДНК, акридиновый оранжевый, бромистый этидий, тройная система, температура плавления, ширина интервала плавления.

ДНК является “самой главной молекулой” жизнедеятельности клетки [1]. Биологические свойства ДНК проявляются в присутствии различных низкомолекулярных соединений (лигандов), с которыми ДНК образует различные типы комплексов (см [2]), что придает актуальность таким исследованиям. Эти исследования важны и с точки зрения конструирования новых препаратов, имеющих фармакологическое значение. При этом особую важность приобретает выяснение молекулярных механизмов взаимодействия различных низкомолекулярных веществ с ДНК [3].

В настоящее время исследования комплексов ДНК-лиганд становятся актуальными еще и в связи с тем, что огромное прикладное значение приобретают ДНК-биосенсоры, которые функционируют как поверхностный рецептор. Одним из важнейших направлений приготовления данных биосенсоров является улучшение селективности и чувствительности этих “приборов”, что будет способствовать возрастанию электрического сигнала и стабильности пробной мишени. Стабильность ДНК в биосенсоре строго зависит от условий среды: pH, ионной силы, лигандов и т. п. Селективность, а также чувствительность ДНК-сенсоров можно увеличить, используя электрохимически активные соединения с более высоким сродством к ДНК. Такие соединения могут увеличить стабильность ДНК и в то же время амплитуду генерированного сигнала, что может приводить к возрастанию чувствительности ДНК-биосенсора. Среди таких лигандов важное место занимают интеркаляторы, которые, имея плоскую гетероциклическую структуру, хорошо подходят к нуклеиновым кислотам и меняют локальную структуру ДНК [4, 5]. С этой точки зрения исследования

комплексов ДНК-лиганд являются важными в контексте совершенствования ДНК-биосенсоров, обнаруживая эффект влияния лигандов на ее термодинамику и кинетику расплетения.

Установлено, что многие лиганды влияют на биологические функции ДНК, поскольку образуют медленно диссоциирующие комплексы с ней. При этом большинство из них могут ингибировать процессы репликации или транскрипции, создавая затруднения для расплетания ДНК [6-8]. Интеркаляторы бромистый этидий (БЭ), акридиновый оранжевый (АО) и др. имеют широкое применение [7-13]. Исследования последних лет указывают на то, что многие лиганды с ДНК могут связываться более чем одним способом, вследствие чего их влияния на ее структуру и функции могут быть противоположными [14,15]. В частности, и БЭ, и АО могут связываться как с двухцепочечной (дц), так и одноцепочечной ДНК и в зависимости от сродства к этим участкам стабилизировать или дестабилизировать ее нативную структуру. В связи с этим особый интерес представляет изучение совместного связывания двух лигандов с ДНК [5,7-13]. Целью настоящей работы стало исследование совместного связывания двух интеркаляторов – БЭ и АО с ДНК.

Материалы и методы. В работе были использованы: ДНК тимуса теленка (Sigma, США), АО (Sigma, США), БЭ (Serva, Германия), NaCl, Натритрат, ЭДТА (этилендиаминтетраацетат), химически чистые. Все препараты были использованы без дополнительной очистки. Концентрации ДНК, БЭ и АО определялись спектрофотометрически, с использованием следующих коэффициентов поглощения: $\epsilon_{260}=6600 \text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ для ДНК т.т., $\epsilon_{420}=5800 \text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ для БЭ и $\epsilon_{490}=35000 \text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ для АО. Исследования проводились при ионной силе раствора $\mu=0.02 \text{ M}$, $\text{pH}=7.0$.

Плавнение комплексов ДНК с лигандами, а также спектрофотометрическое измерение поглощения растворов препаратов осуществлялись на спектрофотометре PYE Unicam-SP8-100 (Англия). Нагрев растворов комплексов осуществлялся при помощи программного устройства SP 876 Series 2. Для спектрофотометрических измерений использовали кварцевые кюветы, герметически закрытые тефлоновыми пробками, объемом 3 мл и длиной оптического пути 1 см. Плавление осуществлялось при длине волны $\lambda=260 \text{ nm}$, соответствующей поглощению ДНК. Значения поглощений комплексов при плавлении выводились на монитор ПК с помощью программы, разработанной в среде LabView; на их основании построены кривые плавления комплексов (см. [5] и цит. там).

Комплексы ДНК с лигандами готовились с учетом концентрационного соотношения $r=[C]/[P]$, где C – концентрация лиганда (БЭ или АО, или совместно БЭ и АО), P – концентрация фосфатных групп ДНК. Значения r менялись в интервале $0 < r \leq 0.33$. В случае совместного связывания БЭ и АО с ДНК концентрация каждого лиганда была взята вдвое меньше для обеспечения тождества значений r с этими же значениями, соответствующими комплексам БЭ-ДНК и АО-ДНК.

Результаты и обсуждение. Связыванию различных лигандов с ДНК посвящено множество теоретических и экспериментальных работ, в кото-

рых изучены разные аспекты молекулярных механизмов взаимодействия между ними. Основная часть этих исследований относится к связыванию одного лиганда с ДНК, и полученные данные указывают на то, что большинство из изученных лигандов с различными структурами ДНК могут связываться более чем одним способом. Из литературных данных также следует, что проявление того или иного способа связывания лиганда с определенными структурами ДНК зависит от концентрации этих веществ [5, 14-18]. С этой точки зрения определенный интерес представляет исследование взаимодействия двух различных, однако связывающихся одинаковым механизмом лигандов с ДНК. Исходя из этого нами исследована тройная система ДНК-БЭ-АО, поскольку основным способом связывания и БЭ, и АО является интеркаляция. Необходимо отметить, что БЭ является классическим интеркалятором и подходящим объектом для моделирования молекулярных механизмов взаимодействия различных соединений с ДНК, так как для комплексов БЭ-ДНК разработана теоретическая модель структурного перехода спираль – клубок, которая позволяет с помощью зависимости изменения T_m и ΔT от концентрации лиганда рассчитать значение теплоты ΔH^0 и проводить термодинамический анализ образовавшихся комплексов ДНК с этим лигандом (см. [19]). С помощью этой модели теоретически было обосновано, а в дальнейшем экспериментально показано, что БЭ, а также другие лиганды (МС, Hoechst 33258, актиномицин Д) могут связываться с ДНК несколькими способами. В частности, в случае БЭ обнаруживается три способа связывания с двухцепочечной ДНК – интеркаляционный, полуинтеркаляционный и электростатический, которые к тому же универсальны и проявляются независимо от ионной силы раствора, рН или других внешних факторов [5, 20, 21]. Этот факт позволяет систему ДНК-БЭ применить в качестве фундамента в исследованиях по взаимодействию различных лигандов с ДНК. В частности, эта модель может стать информативной как для исследований по взаимодействию других интеркаляторов с ДНК, так и для исследований совместного взаимодействия двух лигандов с ней.

Для выяснения особенностей совместного связывания БЭ и АО с ДНК проведено сравнение экспериментальных результатов по взаимодействию одного из этих лигандов в отсутствие другого с ДНК с аналогичными данными, полученными для комплексов ДНК-БЭ-АО. Исследования комплексов ДНК-лиганд осуществлялись методом УФ плавления при ионной силе раствора 0.02 М, получены кривые плавления (кривые не приводятся). Из этих данных определены значения температуры (T_m) и ширины интервала плавления (ΔT) ДНК и ее комплексов с лигандами и на их основании определены значения изменений этих параметров – $\delta(1/T_m)$ и $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r .

На рис. 1 приведены кривые зависимости $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r , полученные при ионной силе раствора 0.02 М. Из рисунка видно, что эта зависимость приобретает колоколообразную форму в случае комплексов БЭ-ДНК (кривая 1), поскольку возрастает при низких концентрациях лиганда, затем, достигая своего максимального значения при $r=0.1$, с увеличением концентраций БЭ начинает уменьшаться. В случае комплексов АО-ДНК имеет

место возрастание зависимости $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r при низких концентрациях лиганда ($0 < r \leq 0.1$) (кривая 2). При дальнейшем увеличении концентрации АО эта кривая выходит на плато. Иная ситуация наблюдается в случае совместного связывания БЭ и АО с ДНК (кривая 3), поскольку она, как и кривая 1, колоколообразная. Аналогичная с кривой 1 кривая получается при математическом сложении значений $\delta(\Delta T/T_m^2)$ комплексов ДНК-БЭ и ДНК-МС при соответствующих значениях r (кривая 4).

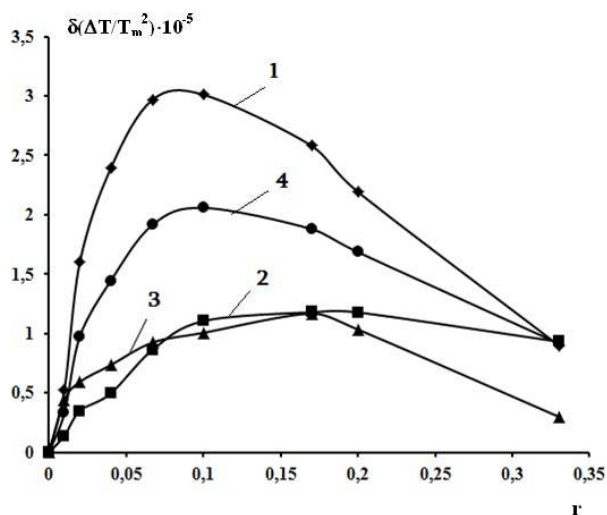


Рис. 1. Кривые зависимости $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r комплексов БЭ-ДНК (1); АО-ДНК (2), БЭ-ДНК-АО (3) и ДНК-БЭ + ДНК-АО (4), при ионной силе створа 0.02 М. Кривая 4 является математической суммой значений $\delta(\Delta T/T_m^2)$ комплексов ДНК-БЭ и ДНК-АО, при соответствующих значениях r .

Интеркаляционный механизм связывания БЭ вносит основной вклад в стабилизацию дц-структуры ДНК (см. [19]). При низких концентрациях этого лиганда места для интеркаляции не насыщены, и по ходу плавления имеет место перераспределение связанных молекул БЭ с денатурированными на еще не денатурированные участки. Это приводит к увеличению значения ΔT комплексов по сравнению с ΔT ДНК. С увеличением концентрации БЭ по мере насыщения интеркаляционных мест перераспределение прекращается, вследствие чего величина $\delta(\Delta T/T_m^2)$ достигает своего максимума, а при дальнейшем увеличении концентрации БЭ начинает уменьшаться. Этот факт обусловлен тем, что молекулы БЭ начинают связываться с ДНК полуинтеркаляционным и электростатическим способами. В то же время величина $\delta(1/T_m)$ в зависимости от r возрастает, поскольку БЭ является стабилизатором двухцепочечной структуры ДНК. Стабилизирование дц-структуры ДНК обнаруживается и при интеркаляционном способе связывания АО с ней. Тем не менее, этот эффект намного сильнее проявляется в случае БЭ, что может быть результатом того, что сродство БЭ с

дц-ДНК существенно больше, чем АО. Несмотря на это, при совместном связывании обоих лигандов значения $\delta(\Delta T/T_m^2)$ практически совпадают с аналогичными значениями, полученными для комплексов АО-ДНК.

Известно, что величина ΔT является мерой гетерогенности стекинг взаимодействий между АТ-АТ, АТ-ГЦ и ГЦ-ГЦ парами (см. [5] и цитируемую там лит.). Учитывая это, мы заключаем, что при связывании лиганда гетерогенность стекинг взаимодействий между парами оснований возрастает, при этом при интеркаляции БЭ проявляется некоторая предпочтительность к ГЦ парам. Исходя из того, что в случае ДНК-АО и ДНК-БЭ-АО значения $\delta(\Delta T/T_m^2)$ меньше, чем в случае ДНК-БЭ, мы полагаем, что имеет место уменьшение гетерогенности стекинг взаимодействий между указанными парами. Этот эффект является результатом того, что оба интеркалятора практически одинаково влияют на гетерогенность стекинг взаимодействий между парами оснований (в интервале $0 < r \leq 0.01$ значения $\delta(\Delta T/T_m^2)$, полученные для комплексов ДНК-АО и ДНК-БЭ, практически не отличаются), вследствие чего ΔT тройной системы близка к значениям этого параметра, соответствующего свободной ДНК, в то время как в случае отдельных комплексов этих лигандов с ДНК величина ΔT значительно больше. Из полученных данных мы заключаем, что при относительно низких концентрациях обоих лигандов между ними не возникает конкуренции за места связывания. По мере увеличения концентраций обоих лигандов значения ΔT , несмотря на то, что в случае их отдельных комплексов продолжают возрастать, начинают расходиться, и при этих значениях r ΔT тройной системы все еще остается меньше. При дальнейшем увеличении r ($0.04 < r \leq 0.17$) значения $\delta(\Delta T/T_m^2)$ тройной системы ДНК-АО-БЭ и двойной системы ДНК-АО практически совпадают. Это указывает на то, что в этих условиях гетерогенность тройной системы приобретает свое максимальное значение, которое близко к таковому, соответствующему ДНК-АО системе. Интересным является то, что кривая 4 не совпадает с кривой 3, из чего следует, что влияние АО и БЭ на ширину интервала плавления ДНК при их совместном связывании с ДНК не является простой суммой их влияний при отдельном связывании.

Полученные данные также выявляют, что АО, по всей вероятности, связывается с ДНК двумя способами. На это указывает то, что кривая зависимости $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r , возрастая при низких концентрациях АО, выходит на плато с увеличением значения r . Аналогичные результаты были получены для комплексов ДНК-МС. МС является акридиновым красителем и аналогом АО и при ионной силе раствора 0.02 М связывается с ДНК двумя способами – полуинтеркаляционным и электростатическим (см. [5]). При дальнейшем увеличении концентраций обоих лигандов интеркаляция молекул БЭ, а также АО прекращается, и БЭ начинает связываться с ДНК полуинтеркаляционным способом, что приводит к понижению значений $\delta(\Delta T/T_m^2)$. В этих условиях АО или не связывается с ДНК, или же связывается слабым (электростатическим) способом.

На рис. 2 приведены кривые зависимости $\delta(1/T_m)$ от r комплексов БЭ-ДНК (кривая 1), АО-ДНК (кривая 2), ДНК-БЭ-АО (кривая 3) и БЭ-

ДНК+АО-ДНК (кривая 4). Из рисунка видно, что и в случае БЭ, и в случае АО кривые зависимости $\delta(1/T_m)$ от Γ возрастают с увеличением концентраций лигандов в растворе. Это указывает на то, что оба лиганда стабилизируют дц-структуру ДНК в интервале изменения $0 < \Gamma \leq 0,33$. При этом стабилизирующее влияние БЭ на нативную структуру ДНК намного значительнее, чем АО. При совместном же связывании этих лигандов с ней значения $\delta(1/T_m)$ меньше, чем при отдельном связывании БЭ, однако кривые 3 и 4 совпадают, что указывает на то, что совместное влияние связанных молекул БЭ и АО на температуру плавления ДНК практически является математической суммой их влияний на этот параметр при отдельном связывании. Необходимо отметить, что в случае МС при аналогичных условиях обнаруживается иная картина – молекулы БЭ и МС конкурируют за места связывания полуинтеркаляционным способом, поскольку при ионной силе раствора 0.02 М МС полностью не интеркалирует в ДНК [5].

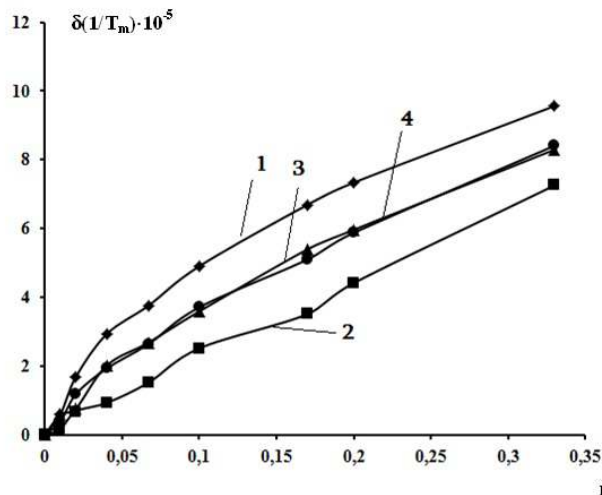


Рис. 2. Кривые зависимости $\delta(1/T_m)$ от Γ комплексов БЭ-ДНК (1); АО-ДНК (2), БЭ-ДНК-АО (3) и ДНК-БЭ + ДНК-АО (4), при ионной силе раствора 0.02 М. Кривая 4 является математической суммой значений $\delta(1/T_m)$ комплексов ДНК-БЭ и ДНК-АО при соответствующих значениях Γ .

Полученные данные также указывают на то, что в случае АО полуинтеркаляционный тип связывания с дц-ДНК отсутствует. Исходя из этого полагаем, что колоколообразное изменение зависимости $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от Γ в случае БЭ обусловлено тремя способами связывания этого лиганда с ДНК – интеркаляционным, полуинтеркаляционным и электростатическим, в случае же совместного с АО связывания – проявлением интеркаляционного и электростатического способов связывания обоих лигандов. При этом константа связывания АО интеркаляционным способом, по всей вероятности, отличается от таковой БЭ, вследствие чего в данном случае влияние обоих лигандов на зависимость величины $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от Γ аналогична этой

же зависимости для случая связывания одного лиганда с ДНК тремя способами.

Закключение. Таким образом, полученные данные указывают на то, что АО и БЭ, являясь интеркаляторами, по-разному влияют на ширину интервала плавления ДНК. С другой стороны, оба лиганда являются стабилизаторами дц-структуры ДНК. При этом интеркаляционный способ связывания БЭ превалирует над интеркаляцией АО. Также выявлено, что в противоположность БЭ полуинтеркаляционный способ связывания АО с ДНК не обнаруживается.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15Т-1F105.

Ереванский государственный университет

П. О. Вардеванян, А. П. Антонян, М. А. Парсаданян, В. Г. Саакян

Исследование совместного связывания акридинового оранжевого и бромистого этидия с ДНК

Проведено исследование тройной системы ДНК-БЭ-АО при ионной силе раствора 0.02М, в интервале изменения концентрационного соотношения лиганд/ДНК $0 < r \leq 0.33$ и определены значения изменений параметров (температуры плавления $\delta(1/T_m)$) и ширины интервала плавления $\delta(\Delta T/T_m^2)$ этих комплексов. Из полученных данных следует, что зависимость $\delta(1/T_m)$ от r , полученная для тройной системы, по форме совпадает с аналогичными кривыми, полученными для комплексов БЭ-ДНК. Аналогичная зависимость получается и при математическом суммировании значений $\delta(1/T_m)$, полученных для комплексов ДНК-БЭ и ДНК-АО. Зависимость $\delta(\Delta T/T_m^2)$ от r , полученная для тройной системы, по форме совпадает с аналогичными кривыми, полученными для комплексов БЭ-ДНК, а также с помощью математического суммирования значений $\delta(\Delta T/T_m^2)$, полученных для комплексов ДНК-БЭ и ДНК-АО, однако не является их простой суммой.

**Պ. Ն. Վարդևանյան, Ա. Պ. Անտոնյան, Մ. Ա. Փարսադանյան ,
Վ. Գ. Սահակյան**

ԴՆԹ-ի հետ ակրիդինային նարնջագույնի և եթիդիումի բրոմիդի համատեղ կապման ուսումնասիրությունը

Ուսումնասիրվել է ԴՆԹ-ԷԲ-ԱՆ եռակի համակարգը լուծույթի 0.02 Մ իոնական ուժի պայմաններում, լիգանդ/ԴՆԹ կոնցենտրացիոն հարաբերության $0 < r \leq 0.33$ փոփոխության միջակայքում և որոշվել են այդ կոմպլեքսների հալման պարամետրերի (հալման ջերմաստիճանի $\delta(1/T_m)$) և հալման միջակայքի լայնության $\delta(\Delta T/T_m^2)$) փոփոխությունների արժեքները: Ստացված տվյալներից հետևում է, որ եռակի համակարգի դեպքում $\delta(1/T_m)$ կախվածությունը r -ից համընկնում է ԴՆԹ-ԷԲ և ԴՆԹ-ԱՆ կոմպլեքսների համար ստացված $\delta(1/T_m)$ մաթեմատիկական գումարը ներկայացնող

կորի հետ: r -ից $\delta(\Delta T/T_m^2)$ -ի կախվածությունը, որը ստացվել է եռակի համակարգի համար, իր ձևով համապատասխանում է համանման կորերին, որոնք ստացվել են ԴՆԹ-ԷԲ կոմպլեքսների, ինչպես նաև ԴՆԹ-ԷԲ և ԴՆԹ-ԱՆ կոմպլեքսների $\delta(\Delta T/T_m^2)$ արժեքների մաթեմատիկական գումարման միջոցով, սակայն եռակի համակարգերի դեպքում այդ կախվածությունը չի համընկնում վերջինիս հետ:

P. O. Vardevanyan, A. P. Antonyan, M. A. Parsadanyan, V. G. Sahakyan

Study of Joint Binding of Acridine Orange and Ethidium Bromide with DNA

The study of the triple system DNA-EtBr-AO at 0.02 M ionic strength of a solution and $0 < r \leq 0.33$ interval of ligand/DNA concentration ratio change has been carried out and the values of changes of parameters (melting temperature ($\delta(1/T_m)$) and melting interval width ($\delta(\Delta T/T_m^2)$)) of these complexes were determined. From the obtained data it is followed that $\delta(1/T_m)$ dependence on r for the triple system coincides by its form with analogous curves obtained for DNA-EtBr complexes. Analogous dependence was obtained at mathematical sum of $\delta(1/T_m)$ values for DNA-EtBr and DNA-AO complexes as well. Dependence of $\delta(\Delta T/T_m^2)$ on r obtained for the triple system coincides with analogous curves obtained for DNA-EtBr complexes by its form as well as with that obtained through mathematical sum of $\delta(\Delta T/T_m^2)$ values for DNA-EtBr and DNA-AO complexes.

Литература

1. Франк-Каменецкий М. Д. Век ДНК. М. КДУ. 2004. 240 с.
2. Gowda K.R.S, Blessy B.M., Sadhamani C.N., Naik H.S.B – Biomedicine and Biotechnology. 2014. V. 2. N 1. P. 1-9.
3. Tsuboi M., Benevides J.M., Thomas G.J.Jr. – Biophysical Journal. 2007. V. 92. P. 928-934.
4. Pasternack R. F., Goldsmith J. I., Szep S., Gibbs E. J. – Biophys J. 1998. V. 75. P. 1024-1031.
5. Vardevanyan P., Antonyan A., Parsadanyan M., Torosyan M., Karapetian A. – J. of Biomol. Struct. and Dyn. 2015. V. 34. P. 1377-1382.
6. Nafisi Sh, Saboury A. A., Keramat N., Neault J.-F., Tajmir-Riahi H.-A. – Journal of Molecular Structure. 2007. V. 827. P. 35-43.
7. Kusuzaki K., Murata H., Matsubara T., Miyazaki Sh., Shintani K., Seto M., Matsumine Ak., Hosoi H., Sugimoto T., Uchida A. – Photochemistry and Photobiology. 2005. V. 81. P. 705-709.
8. Kapuscinski J., Darzynkiewicz Z., Melamed M. R. Biochemical Pharmacology, 1983, 32, p. 3679-3693.
9. Lantukh Yu. D., Pashkeich S. N., Letuta S. N., Alidzhanov E. K., Kul'sarin A. A. – Optics and Spectroscopy. 2013. V. 114. P. 283-287.
10. Lantukh Yu. D., Pashkeich S. N., Letuta S. N., Alidzhanov E.K., Kul'sarin A. A. – Optics and Spectroscopy. 2011. V. 110. P. 880-884.
11. Lai Sh., Chang X., Tian L., Wang S., Bai Yu., Zhai Yu. Micrichim. Acta, 2007, 156, p. 225-230.
12. Rawtani D., Agrawai Y. K. – BioNanoSci. 2013. V. 3. P. 52-57.
13. Rohs R., Sklenar H. – J. Biomol. Struct. Dyn. 2004. J. Biomol. Struct. and Dyn. V. 21. P. 699-711.

14. *Hossain M., Giri P., Kumar G. S.* – DNA and Cell Biology. 2008. V. 27. P. 81-90.
15. *Zhao G.C., Zhu J.J., Zhang J. J., Chen H. Y.* – Anal. Chim. Acta. 1999. V. 394. P. 337-344.
16. *Han F., Taulier N., Chalikian T.* – Biochemistry. 2005. V. 44. P. 9785-9794.
17. *Ismail M.A., Rodger P.M., Rodger A.* – J. Biomol. Struct. Dyn., 2000, 11, p. 335-348.
18. *Karapetian A.T., Mehrabian N.M., Terzikian G.A., Vardevanian P.O., Antonian A.P., Borisova O.F., Frank-Kamenetskii M.D.* – J. Biomol. Struct. Dyn. 1996. V. 14, P. 275-283.
19. *Suh D.* – Exp. and Mol. Medicine. 2000. V. 32. P. 204-209.
20. *Xinhui H., Wang Q., Pingang H., Fang Y.* – Analytical Sciences. 2002. V. 18. P. 645-650.
21. *Tang Tz.Ch., Huang H-J.* – Electroanalysis. 1999. Electroanalysis. 1999. V. 11. P. 1185-1190.