

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2016

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год
Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ,
ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա.
ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ.
ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս
Յու. Հ. ՇՈՒԲՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ.
քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е.
БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р.
МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М.
СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв.
секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E.
BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member
of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г
Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.ame-mail: mas@sci.am>

©НАН РА. Президиум. 2016

©Издательство “Титутюн” НАН РА. 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Կ. Ա. Քեռյան – Միակության թեորեմ Չիսելսկու բազմապատիկ շարքերի վերաբերյալ...	263
Կ. Լ. Ավետիսյան, Ա. Բ. Պետրոսյան – Նորմալ կշիռներով $\mathbb{C}^n$ -ի գնդում Բերգմանի տեսքի որոշ օպերատորների մասին	270
Պ. Է. Մելիք-Ադամյան – Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համար Կալկինի վերածող օպերատորի մասին	278
Լ. Ջ. Գևորգյան – Անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարումների լուծման Ռամանուջանի եղանակի մասին	284

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ. Մ. Գրիգորյան, Մ. Մ. Մկրտչյան, Մ. Մ. Մխիթարյան – Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար խառը եզրային երկու խնդիրների մասին	291
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Ռ. Հ. Ալանալյան – Ֆերմիոնների ծնումը e^+e^- -բախումներում	301
---	-----

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Մ. Մարտիրոսյան – $C_2H_5O_2$ ռադիկալների ալդեհիդի հետ հետերոգեն փոխազդեցության հնարավորության մասին	312
--	-----

ՔԻՄԻԱ

Ս. Հ. Սարգսյան, Կ. Մ. Մարգարյան, Ա. Մ. Սարգսյան – Մետաղ պարունակող պոլիմերային ծածկույթների ձևավորման միափուլ մեթոդ	317
---	-----

ԿԵՆՍԱԹԵՄԻԱ

Գ. Ա. Գևորգյան, Ա. Ս. Հակոբյան, Հ. Ա. Մովսեսյան, Ա. Ա. Աղաբաբովա – Առնետների աղիների միկրոբիոտան ամֆետամինի ազդեցությամբ	321
--	-----

ՄԱՆԴԵԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Մ. Մնացականյան, Ա. Հ. Թռչունյան – Ծակոտկեն հանքային տուֆից և արծաթի նանոմասնիկներից բաղկացած նանոկոմպոզիտ գոլիչի հակամանրէային ակտիվությունը գրամ-դրական և գրամ-բացասական բակտերիաների նկատմամբ. տարբեր էֆեկտներ և կախվածություն արծաթի կոնցենտրացիայից	327
--	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ս. Մ. Չոբանյան, Հ. Հ. Մկրտչյան, Ա. Լ. Գրիգորյան, Ա. Ա. Մելքոնյան – Սինապտիկ փոխանցման մաթեմատիկական մոդել՝ երկարատև պոտենցիալից	335
---	-----

Բովանդակություն 116-րդ հատորի	342
-------------------------------------	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>К. А. Керян</i> – Теорема единственности для кратных рядов Чисельского	263
<i>К. Л. Аветисян, А. И. Петросян</i> - О некоторых операторах типа Бергмана с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$	270
<i>П. Э. Мелик-Адамян</i> - Об операторе приведения Калкина для обратимых симметрических операторов	278
<i>Л. З. Геворгян</i> - О методе Раманужана решения уравнений с аналитическими функциями	284

МЕХАНИКА

<i>М. С. Григорян, М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян</i> - О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя при антиплоской деформации	291
--	-----

ФИЗИКА

<i>Р. А. Аланакян</i> – Рождение фермионов в e^+e^- -столкновениях	301
--	-----

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

<i>А. С. Мартиросян</i> - О возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом	312
---	-----

ХИМИЯ

<i>С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян</i> - Одностадийный метод формирования металлсодержащих полимерных покрытий	317
---	-----

БИОХИМИЯ

<i>Г. А. Геворгян, А. М. Акопян, О. А. Мовсисян, А. А. Агабабова</i> - Микробиота кишечника крыс под воздействием амфетамина	321
--	-----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>Н. С. Мнацаканян, А. А. Трчунян</i> - Антибактериальная активность против грамположительных и грамотрицательных бактерий нанокompозитного фильтра на основе пористого минерала туфа и наночастиц серебра: различные эффекты и зависимость от концентрации серебра	327
--	-----

ФИЗИОЛОГИЯ

<i>А. С. Чобанян, О. А. Мкртчян, А. Л. Григорян, А. А. Мелконян</i> - Компьютерное моделирование долгодлящейся потенциации	335
--	-----

Содержание 116-го тома.....	342
-----------------------------	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

K. A. Keryan – Uniqueness Theorem for Multiple Ciesielski Series	263
K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan – On Some Bergman Type Operators with Normal Weights Over the Ball in $\mathbb{C}^n$	270
P. E. Melik-Adamyanyan - On the Calkin Reduction Operator for Invertible Symmetric Operators	278
L. Z. Gevorgyan - On Ramanujan Method of Solution of Equations with Analytic Functions	284

MECHANICS

M. S. Grigoryan, M. S. Mkrtchyan, S.M. Mkhitarian – On Two Mixed Boundary Value Problems for an Elastic Layer under Antiplane Deformation	291
---	-----

PHYSICS

R. H. Alanakyan – Production of Fermions in e^+e^- -collisions	301
--	-----

CHEMICAL PHYSICS

A. S. Martirosyan - About the Possibility of the Heterogeneous Interaction of $C_2H_5O_2$ Radicals with Aldehyde	312
--	-----

CHEMISTRY

S. H. Sargsyan, K. M. Margaryan, A. S. Sargsyan – One-Step Method for the Formation of Metal-Polymer Coatings	317
---	-----

BIOCHEMISTRY

G. A. Gevorgyan, A. M. Hakobyan, H. A. Movsesyan, A. A. Agababova - Intestinal Microbiota in Rats under the Influence of Amphetamine	321
N. S. Mnatsakanyan, A. H. Trchounian - Antibacterial Activity of the Nanocomposite Filter Based on Porous Mineral Tuff and Silver Nanoparticles Against Gram-Positive and Gram-Negative Bacteria : the Different Effects and Dependence on the Concentration of Silver	327

PHYSIOLOGY

A. S. Chobanyan, H. A. Mkrtchian, A. L. Grigoryan, A. A. Melkonyan - Mathematical Model of Synaptic Transmission:Long-Term Potentiation	335
---	-----

Contents of 116 th volume	342
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Керян

Теорема единственности для кратных рядов Чисельского

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 15/VI 2016)

Ключевые слова: система Чисельского, единственность, мажоранта частных сумм.

А. Б. Александровым получена теорема о восстановлении по своим граничным значениям при помощи А-интеграла для функций из $H^p(D)$ ($p < 1$) [1]. Далее Г. Г. Геворкян получил необходимое и достаточное условие для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье интегрируемой функции [2]. Для рядов Франклина в [3] им получена следующая

Теорема А. Для того, чтобы ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(x)$ был рядом Фурье – Франклина некоторой интегрируемой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд почти всюду сходил к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0, 1] : \sup_N \left| \sum_{m=0}^N a_m f_m(x) \right| > \lambda \right\} = 0.$$

Г. Г. Геворкян в [4] получил формулы, выражающие коэффициенты ряда Франклина, п.в. сходящегося к функции $f(x)$ через функцию $f(x)$ при помощи А-интеграла. В работах [5-8] получены также теоремы восстановления при помощи А-интеграла для систем Хаара, Виленкина, для аддитивных функций интервала, а также параллелепипедов.

В настоящей работе исследуется вопрос единственности кратных рядов по системе Чисельского. Ортонормальная система Чисельского состоит из кусочно-полиномиальных функций и является базисом в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций [9]. Важным частным случаем системы Чисельского является система Франклина, состоящая из кусочно-линейных функций.

Г. Г. Геворкяном получена теорема единственности для кратных рядов по системе Франклина. Основной целью настоящей работы является обобщение указанной теоремы для кратных рядов по системе Чисельского.

Во-первых, дадим необходимые определения, далее приведем формулировки и доказательства некоторых вспомогательных лемм.

Пусть $n = 2^v + j$, где $v \geq 0, 1 \leq j \leq 2^v$. Обозначим через

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^v + 1}, & \text{для } 0 \leq i \leq 2^v, \\ \frac{i - v}{2^v}, & \text{для } 2^v \leq i \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство полиномиальных сплайнов порядка r с узлами $s_{n,i}$, $i = 0, \dots, n$, т.е. пространство функций, являющихся полиномами степени меньше r на каждом из отрезков $[s_{n,i}, s_{n,i+1}]$, для $i = 0, \dots, n-1$ и с непрерывными производными порядка $r-2$ на $[0,1]$. Ясно, что $\dim S_n = \dim S_{n-1} + 1$, поэтому существует единственная с точностью до знака функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} , и $\|f_n\|_2 = 1$. Далее, пусть $f_n, -r+2 \leq n \leq 1-r$ — система ортогональных полиномов в $L^2[0,1]$ и степень f_n равна $n+r-2$. Система функций $\{f_n\}_n^\infty = -r+2$ называется системой Чисельского порядка r .

Пусть k — некоторое натуральное число. Зафиксируем r . В тех случаях, где r будет переменной, в индексах соответствующих функций r не будет опущен.

Рассмотрим кратные ряды Чисельского

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^k} a_m f_m(x), \quad (1)$$

где $\mathbb{N}^k = \{-r+2, -r+1, \dots\}^k$, $a_m = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ — вектор с целочисленными координатами, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in [0,1]^k$ и $f_m(x) = f_{m_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{m_k}(x_k)$.

Обозначим через $\sigma_v(x)$ кубические частичные суммы ряда (1) с номерами 2^v , т.е.

$$\sigma_v(x) = \sum_{m: m_i \leq 2^v} a_m f_m(x), \quad (2)$$

где $m = (m_1, \dots, m_k)$. Положим

$$\sigma^*(x) = \sup_v |\sigma_v(x)|. \quad (3)$$

Введем следующие обозначения: $t_j^v = \frac{j}{2^v}$ для $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{N}_j^v$ — В-сплайны порядка r , соответствующие узлам $t_j^v, \dots, t_{j+r}^v$, $N_j^v = \hat{N}_j^v \cdot 1_{[0,1]}$ для $-r+1 \leq j \leq 2^v-1$, где 1_E — характеристическая функция множества E , а $\delta_{v,j}^r \subset [t_j^v, t_{j+r}^v]$ — носитель функции N_j^v .

Для натурального v положим $\mathbb{N}_v^k = \{-r+1, \dots, 2^v-1\}^k$. Для вектора $j = (j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}_v^k$ обозначим

$$\Delta_j^v = \delta_{v, j_1}^r \times \dots \times \delta_{v, j_k}^r, \quad t_j^v = (t_{j_1}^v, \dots, t_{j_k}^v)$$

и

$$N_j^v(t) = N_j^v(t_1, \dots, t_k) = N_{j_1}^v(t_1) \dots N_{j_k}^v(t_k).$$

Известно, что $\sum_{j=-r+1}^{2^v-1} N_j^v(t) = 1$, когда $t \in [0, 1]$, следовательно

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_v^k} N_j^v(t) = 1, \quad \text{когда } t \in [0, 1]^k \text{ и } \operatorname{supp} N_j^v = \Delta_j^v.$$

Нетрудно убедиться, что система функций $\{N_j^v(t)\}_{j \in \mathbb{N}_v^k}$ образует базис в линейном пространстве

$$S_\nu := \left\{ \sum_{m: m_i \leq 2^v} a_m f_m(x) : a_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому верна следующая

Лемма 1. Если $G \subset S_\nu$ и $G \neq 0$, то существует $j \in \mathbb{N}_v^k$ такое, что

$$(G, N_j^\nu) := \int_{[0,1]^k} G(t) N_j^\nu(t) dt \neq 0.$$

Имеем также

$$\int_{[0,1]^k} N_j^\nu(t) dt = \int_{\Delta_j^v} N_j^\nu(t) dt = \prod_{i=1}^k \int_{\delta_{j_i}^v} N_{j_i}^\nu(t_i) dt_i = \frac{\mu(\Delta_j^\nu)}{r^k}.$$

Обозначив

$$M_{v,j}^r(t) = \frac{r}{\mu(\delta_{v,j}^r)} N_j^v(t) \text{ для } t \in [0, 1] \text{ и } M_j^\nu(t) = \frac{r^k}{\mu(\delta_j^\nu)} N_j^\nu(t) \text{ для } t \in [0, 1]^k,$$

получим

$$\int_0^1 M_{v,j}^r(t) dt = \int_{[0,1]^k} M_j^\nu(t) dt = 1.$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2. Для любых $M_{j_0}^{\nu_0}(t)$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа α_j такие, что

$$M_{j_0}^{\nu_0}(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_v^k} \alpha_j M_j^\nu(t),$$

причем

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_v^k} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \text{ и } \alpha_j = 0, \text{ если } \Delta_j^\nu \not\subset \Delta_{j_0}^{\nu_0}$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лемму в случае $k=1$. Докажем по индукции на r -ранг сплайнов. Случай $r=2$

рассмотрен Г. Геворкяном. Допустим, что $M_{\nu_0, j_0}^r(t) = \sum_{j=-r+1}^{2^r-1} \alpha_j M_{\nu, j}^r(t)$ и коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j=-r+1}^{2^r-1} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \text{ и } \alpha_j = 0, \text{ если } \delta_{\nu, j}^r \notin \delta_{\nu_0, j_0}^r.$$

Известно, что

$$\frac{d}{dt} \left(M_{\nu, j}^{r+1}(t) \right) = \frac{r}{\mu(\delta_{\nu, j}^{r+1})} \left(M_{\nu, j}^r(t) - M_{\nu, j+1}^r(t) \right). \quad (4)$$

Отсюда, используя предположение индукции и положив $s = \min(j : \delta_{\nu, j}^r \subset \delta_{\nu_0, j_0}^r)$, $t = \max(j : \delta_{\nu, j}^r \subset \delta_{\nu_0, j_0}^r)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(M_{\nu_0, j_0}^{r+1}(t) \right) &= \frac{r}{\mu(\delta_{\nu_0, j_0}^{r+1})} \sum_{j: \delta_{\nu, j}^r \subset \delta_{\nu_0, j_0}^r} \alpha_j \left(M_{\nu, j}^r(t) - M_{\nu, j+2^{v-v_0}}^r(t) \right) = \\ &= \frac{r}{\mu(\delta_{\nu_0, j_0}^{r+1})} \sum_{j: \delta_{\nu, j}^r, \delta_{\nu, j+1}^r \subset \delta_{\nu_0, j_0}^{r+1}} \beta_j \left(M_{\nu, j}^r(t) - M_{\nu, j+1}^r(t) \right), \end{aligned}$$

где

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_s + \dots + \alpha_j, & \text{при } s \leq j < s + 2^{v-v_0} \\ \alpha_{j-2^{v-v_0}+1} + \dots + \alpha_j, & \text{при } s + 2^{v-v_0} \leq j \leq t \\ \alpha_{j-2^{v-v_0}+1} + \dots + \alpha_t, & \text{при } t < j \leq t + 2^{v-v_0} - 1. \end{cases}$$

Заметим, что все коэффициенты $\beta_j \geq 0$ ввиду индукционного предположения. Следовательно, используя (4), получим, что для некоторых $c_j \geq 0$ имеет место

$$\frac{d}{dt} \left(M_{\nu_0, j_0}^{r+1}(t) \right) = \sum_{j: \delta_{\nu, j}^{r+1} \subset \delta_{\nu_0, j_0}^{r+1}} c_j \frac{d}{dt} \left(M_{\nu, j}^{r+1}(t) \right),$$

откуда получим $M_{\nu_0, j_0}^{r+1}(t) = \sum_{j: \delta_{\nu, j}^{r+1} \subset \delta_{\nu_0, j_0}^{r+1}} c_j M_{\nu, j}^{r+1}(t) + C$. Взяв $t \notin \delta_{\nu_0, j_0}^{r+1}$, из последнего равенства получим, что $C = 0$. Проинтегрировав по $[0, 1]$ и воспользовавшись равенством $\int_0^1 M_{\nu, j}^r(t) dt = 1$, получим $\sum_j c_j = 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть g является полиномом степени не больше r на $[\alpha, \beta]$ и $l := \max_{t \in [\alpha, \beta]} |g(t)|$, тогда

$$\mu \left\{ t \in [\alpha, \beta] : |g(t)| > \frac{l}{2} \right\} \geq \frac{\beta - \alpha}{4r^2}.$$

Доказательство. Согласно неравенству Маркова $|g'(t)| \leq \frac{2r^2}{\beta - \alpha} \cdot l$ для $t \in [\alpha, \beta]$. Следовательно, если $|g(t_0)| = l$ для некоторого $t_0 \in [\alpha, \beta]$, то $|g(t) - g(t_0)| \leq \frac{l}{2}$ для всех $t_0 \in \left[t_0 - \frac{\beta - \alpha}{4r^2}, t_0 + \frac{\beta - \alpha}{4r^2}\right] \cap [\alpha, \beta]$. Из последнего вытекает необходимая оценка.

Лемма 4. Пусть функция G определена на $\Delta = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k]$, $k \in \mathbb{N}$ и G является полиномом степени не больше r по каждой переменной. Тогда если $L = \max_{t \in \Delta} |G(t)|$, то

$$\mu \left\{ t \in \Delta : |G(t)| > \frac{L}{2^k} \right\} \geq \frac{\mu(\Delta)}{(4r^2)^k}.$$

Доказательство. Докажем методом индукции по k . Для $k = 1$ утверждение совпадает с леммой 3. Допустим, что утверждение верно для k , и докажем для $k + 1$. Пусть $L = |G(t_0)| = |G(t_1^0, \dots, t_{k+1}^0)|$ где $t_0 \in \Delta$. Из леммы 3 следует, что

$$\mu(A_{k+1}) \geq \frac{\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}}{4r^2}, \text{ где } A_{k+1} = \left\{ t_{k+1} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] : |G(t_1^0, \dots, t_k^0, t_{k+1})| > \frac{L}{2} \right\}.$$

Из этого, применяя индукционное предположение для всякого $t_{k+1} \in A_{k+1}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \tilde{t} \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k] : |G(\tilde{t}, t_{k+1})| > \frac{L}{2^{k+1}} \right\} \geq \\ & \geq \mu \left\{ \tilde{t} \in [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k] : |G(\tilde{t}, t_{k+1})| > \frac{\max_{\tilde{t}} |G(\tilde{t}, t_{k+1})|}{2^k} \right\} \geq \\ & \geq \frac{\mu([\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k])}{(4r^2)^k}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\mu \left\{ t \in \Delta : |G(t)| > \frac{L}{2^{k+1}} \right\} \geq \mu(A_{k+1}) \cdot \frac{\mu([\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k])}{(4r^2)^k} \geq \frac{\mu(\Delta)}{(4r^2)^{k+1}}.$$

Используя метод, разработанный Г. Геворкяном, и предыдущие леммы, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Если суммы (2) по мере сходятся к нулю и выполняется условие

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0,1]^k : \sigma^*(x) > \lambda \right\} = 0 ,$$

то все коэффициенты ряда (1) равны нулю.

Теорема 2. Если ряд (1) является рядом Фурье – Чисельского некоторой функции $f \in L\left([0,1]^k\right)$, то суммы (2) сходятся п.в. к f и выполняется

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0,1]^k : \sigma^*(x) > \lambda \right\} = 0 .$$

Теорема 3. Ряд (1) является рядом Фурье – Чисельского некоторой функции $f \in L\left([0,1]^k\right)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. суммы $\sigma_v(x)$ по мере сходятся к $f(x)$,
2. $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0,1]^k : \sigma^*(x) > \lambda \right\} = 0 .$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006.

Ереванский государственный университет
e-mail: karenkeryan@ysu.am

К. А. Керян

Теорема единственности для кратных рядов Чисельского

Доказывается теорема единственности для кратных рядов по системе Чисельского, сходящихся по мере, мажоранта кубических частичных сумм с номерами 2^n которой удовлетворяет некоторому условию.

Կ. Ա. Քերյան

Միակության թեորեմ Զիսելսկու բազմապատիկ շարքերի վերաբերյալ

Ապացուցվում է Զիսելսկու պատիկ շարքերի համար միակության թեորեմ, որոնք զուգամիտում են ըստ չափի, և որոնց 2^n համարներով խորանարդային մասնակի գումարների մաժորանտը բավարարում է որոշակի պայմանի:

K. A. Keryan

Uniqueness Theorem for Multiple Ciesielski Series

The uniqueness theorem for multiple Ciesielski series converging in measure with majorant of the cubic 2^n partial sums satisfying some condition is proved.

Литература

1. *Александров А. Б.* - Мат. заметки. 1981. Т. 30. N1. С. 59–72.
2. *Геворкян Г. Г.* - Мат. сб. 1989. Т. 180. N11. С.1462–1474.
3. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 1989. Т. 46. N2. С. 51–58.
4. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 1996. Т. 59. N4. С. 521–545.
5. *Галстян С. Ш.* - Мат. заметки. 1994. Т. 56. N 4. С. 38–47.
6. *Геворкян Г. Г.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N 5. С. 7-21.
7. *Костин В. В.* -Мат. заметки. 2015. Т. 73. N 5. С. 704-723.
8. *Керян К. А.*- Мат. заметки. 2015. Т. 97. N 3. С. 382–396
9. *Ciesielski Z.* - Studia Math. 1975. V. 53. P. 277-302.
10. *Геворкян Г. Г.* - Мат. заметки. 2015. Т. 98, N 5. С. 786-789.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.550

К. Л. Аветисян, А. И. Петросян

**О некоторых операторах типа Бергмана
 с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$**

(Представлено академиком Н.У.Аракеляном 13/VII 2016)

Ключевые слова: нормальная весовая функция, нормальная пара, пространства со смешанной нормой, операторы Бергмана.

1. Введение и обозначения. В заметке рассмотрены введенные Шилдсом и Вильямсом операторы типа Бергмана, зависящие от нормальной пары весовых функций. Доказано, что существуют значения параметра β , при которых эти операторы ограничены на пространствах $L(p, q, \beta)$ со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пусть $B = B_n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и $S := \partial B$ – его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$, $z, w \in \mathbb{C}^n$. Всюду далее будем полагать $z = r\zeta$, $w = \rho\eta \in B$, $0 \leq r, \rho < 1$, $\zeta, \eta \in S$, $r = |z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$.

Множество всех голоморфных функций в шаре B обозначим через $H(B)$. Для функции $f(z) = f(r\zeta)$, заданной в шаре B , ее интегральные средние порядка p на сфере $|z| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(f; r) = \|f(r \cdot)\|_{L^p(S; d\sigma)}, \quad 0 \leq r < 1, 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ – $(2n-1)$ -мерная поверхностная мера Лебега на сфере S , нормированная так, что $\sigma(S) = 1$. Класс функций $f \in H(B)$ с «нормой»

$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(f; r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B . Определим банахово пространство $L(p, q, \beta)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций

$f(z) = f(r\zeta)$ в шаре B , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L(p, q, \beta)} := \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\beta q - 1} M_p^q(f; r) dr \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty \\ \text{ess sup}_{0 < r < 1} (1-r)^\beta M_p(f; r), & q = \infty \end{cases}$$

Подпространства $L(p, q, \beta)$, состоящие из голоморфных функций, обозначим через $H(p, q, \beta) := H(B) \cap L(p, q, \beta)$, $\beta > 0$. При $p = q < \infty$ пространства $H(p, p, \beta) = A_{\beta^{p-1}}^p$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их часто называют весовыми пространствами Харди.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1, 2] и развиты в дальнейшем Флеттом [3] (см, также монографии [4, 5], посвященные весовым пространствам Бергмана $H(p, p, \beta)$ в единичном круге. Много работ посвящено пространствам $L(p, q, \beta)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $H(p, q, \beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, например, в работах [6-10], а для голоморфных и n -гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например, в [11]. Символы $C(\alpha, \beta, \dots), C_\alpha$ и т. п. всюду будут обозначать положительные постоянные, различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Через dV обозначим лебегову меру на B , нормированную так, что $V(B) = 1$. В полярных координатах будем иметь $dV(z) = 2nr^{2n-1}drd\sigma(\zeta)$.

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями.

Определение 1 (нормальная весовая функция [12]). Положительная непрерывная функция $\varphi(r)$, $0 \leq r < 1$, называется *нормальной*, если найдутся постоянные $0 < a < b$ и $0 \leq r_0 < 1$ такие, что

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \uparrow +\infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1^-, \quad r_0 \leq r < 1. \quad (1)$$

Здесь и далее монотонность функций всегда подразумевается в широком, нестрогом смысле. Индексы a и b для нормальной функции $\varphi(r)$ определяются неоднозначно. Типичными примерами нормальных функций являются функции вида

$$\varphi_{c,d}(r) = (1-r)^c \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^d, \quad c > 0, \quad d \in \mathbb{R},$$

причем при $c = 0$ функция $\varphi_{0,d} = \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^d$ уже не будет нормальной.

Определение 2 (нормальная пара функций [12]). Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ составляет *нормальную пару*, если функция φ нормальна и существует число α (индекс пары), $\alpha > b - 1$, такое, что

$$\varphi(r)\psi(r) = (1-r^2)^\alpha, \quad 0 \leq r < 1. \quad (2)$$

Ввиду условия $a > b - 1$ вторая функция ψ будет интегрируемой на интервале $(0,1)$. Как показано в [12], для нормальной функции φ всегда найдется ее нормальная пара, а при более строгом условии $\alpha > b$ функция ψ сама также будет нормальной с индексами $\alpha - b$ и $\alpha - a$. Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B , положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r)$, $\psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

Посредством нормальных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] в единичном круге $D = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B определены в работах А.И. Петросяна [13, 14] в виде

$$P_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\varphi(z)\psi(w)}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} f(w) dV(w), \quad z \in B, \quad (3)$$

(4)

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} f(w) dV(w), \quad z \in B, \quad (5)$$

$$\tilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{|1-\langle z, w \rangle|^{n+1+\alpha}} f(w) dV(w), \quad z \in B. \quad (6)$$

Операторы (3), (4) в предельном случае $\varphi \equiv 1$, $\psi(r) = (1-r^2)^\alpha$, а также операторы (5), (6) в частном случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\alpha$, $\psi \equiv 1$ сводятся к классическим проекторам Бергмана P_α (см. [4-10]),

$$P_\alpha(f)(z) := \gamma_{\alpha,n} \int_B \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} f(w) dV(w), \quad z \in B, \quad \alpha > -1, \quad (7)$$

где $\gamma_{\alpha,n} := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$. В случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\lambda$, $\psi(r) = (1-r^2)^\gamma$, $\lambda + \gamma = \alpha$, операторы типа Бергмана (3)-(6) также хорошо известны (см. [7-11]). Для проекторов P_α в шаре B имеет место представление

$$f(z) = P_\alpha(f)(z), \quad z \in B, \quad \alpha > -1, \quad (8)$$

которое справедливо для всех голоморфных функций f класса $H(1,1,\alpha+1) = A_\alpha^1$ или класса $H(p,q,\delta)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < \delta < \alpha + 1$.

Мы доказываем, что существуют значения параметра β , при которых общие операторы (3)-(6) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B . Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема типа Форелли – Рудина.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\{\varphi, \psi\}$, – нормальная пара функций с индексами a и b ($0 < a < b$) и с индексом пары $\alpha > b - 1$ в смысле определений 1, 2.

(i) Если $-a < \beta < 1 + \alpha - b$, то операторы $P_{\varphi,\psi}$ и $\tilde{P}_{\varphi,\psi}$ ограниченно действуют из пространства $L(p,q,\beta)$ в себя, т.е.

$$P_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \rightarrow L(p, q, \beta), \quad (9)$$

$$\tilde{P}_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \rightarrow L(p, q, \beta). \quad (10)$$

(ii) Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то операторы $Q_{\varphi,\psi}$ и $\tilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограниченно действуют из пространства $L(p, q, \beta)$ в себя, т. е.

$$Q_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \rightarrow L(p, q, \beta), \quad (11)$$

$$\tilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \rightarrow L(p, q, \beta). \quad (12)$$

Замечание 1. В частном случае, когда $p = q = \infty$, $\beta = 0$, т. е. для класса $L(\infty, \infty, 0) = L^\infty(B)$ существенно ограниченных функций в шаре, соотношения (9) и (10) доказаны в [13]. В случае $1 \leq p = q = 1/\beta < \infty$, т. е. для невесового пространства $L(p, p, 1/p)$, соотношения (11) и (12) доказаны в [13, 14], но другим методом с использованием так называемого теста Шура [4-7], который не подходит в нашем случае. Более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в [5-11].

Замечание 2. Фактически в теореме 1 мы обобщаем результат из [13, 14] в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения $1 \leq p \leq \infty$, во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, рассматриваем гораздо более общие пространства $L(p, q, \beta)$ со смешанной нормой.

2. Неравенства Харди и другие интегральные неравенства. В этом разделе приведем те леммы, которые необходимы для доказательства основной теоремы 1.

Широко известны классические неравенства Харди (см., например, [3, 15]),

$$\int_0^1 x^{-\beta-1} \left(\int_0^x h(t) dt \right)^p dx \leq C(p, \beta) \int_0^1 x^{p-\beta-1} h^p(x) dx, \quad (13)$$

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta-1} \left(\int_0^r h(t) dt \right)^p dx \leq C(p, \beta) \int_0^1 (1-r)^{p+\beta-1} h^p(x) dx, \quad (14)$$

$$\int_0^1 (1-r)^{-\beta-1} \left(\int_r^1 h(t) dt \right)^p dx \leq C(p, \beta) \int_0^1 (1-r)^{p-\beta-1} h^p(x) dx, \quad (15)$$

где $1 \leq p < \infty$, $\beta > 0$, $h(r) \geq 0$.

Отметим, что неравенство (15) выводится из (13) линейной заменой переменных интегрирования. Для последующих доказательств нам понадобятся также обобщения неравенств (14) и (15).

Лемма 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $h(r) \geq 0$. Для положительной непрерывной функции $\varphi(r)$, $0 \leq r < 1$, найдутся постоянные $a, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma + pa > 0$, и

$0 \leq r_0 < 1$ такие, что $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \downarrow$ при $r_0 \leq r < 1$. Тогда

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-1} \varphi^p(r) \left(\int_0^r h(t) dt \right)^p dr \leq C(p, \gamma, a, r_0) \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-1} \varphi^p(r) h^p(r) dr. \quad (16)$$

Замечание 3. Схожее с неравенством (16) другое неравенство типа Харди с участием нормальных весовых функций можно найти в [10].

Нам понадобится также другая разновидность неравенства (16).

Лемма 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $h(r) \geq 0$. Для положительной непрерывной функции $\varphi(r)$, $0 \leq r < 1$, найдутся постоянные $b, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma + pb < 0$, и

$0 \leq r_0 < 1$ такие, что $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \uparrow$ при $r_0 \leq r < 1$. Тогда

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-1} \varphi^p(r) \left(\int_r^1 h(t) dt \right)^p dr \leq C(p, \gamma, b, r_0) \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-1} \varphi^p(r) h^p(r) dr.$$

Следующая лемма является вариантом схожих оценок из [9, 12-14].

Лемма 3. Пусть $\{\varphi, \psi\}$ – нормальная пара функций с индексами a и b ($0 < a < b$) и с индексом пары $\alpha > b-1$ в смысле определений 1-2. Если $-a < \beta < 1 + \alpha - b$, то

$$\int_0^1 \frac{\psi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha} (1-\rho)^\beta} d\rho \leq C(\alpha, \beta, a, b, r_0) \frac{\psi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Нижеследующие леммы аналогичны леммам 1-3.

Лемма 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $h(r) \geq 0$. Для положительной непрерывной функции $\varphi(r)$, $0 \leq r < 1$, найдутся постоянные $b, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma - pb > 0$, и

$0 \leq r_0 < 1$ такие, что $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \uparrow$ при $0 \leq r_0 < 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_0^r h(t) dt \right)^p dr \leq C(p, \gamma, b, r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)} h^p(r) dr.$$

Лемма 5. Пусть $1 \leq p < \infty$, $h(r) \geq 0$. Для положительной непрерывной функции $\varphi(r)$, $0 \leq r < 1$, найдутся постоянные $a, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma - pa < 0$, и

$0 \leq r_0 < 1$ такие, что $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \downarrow$ при $r_0 \leq r < 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_r^1 h(t) dt \right)^p dr \leq C(p, \gamma, a, r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)} h^p(r) dr.$$

Лемма 6. Пусть φ – нормальная функция с индексами a и b ($0 < a < b$) и с индексом пары $\alpha > b-1$ в смысле определений 1-2. Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha} (1-\rho)^\beta} d\rho \leq C(\alpha, \beta, a, b, r_0) \frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

3. Ограниченность операторов типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой. Оценки операторов (3)-(6) начинаем с оценок их интегральных средних.

Лемма 7. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1$, $\{\varphi, \psi\}$ – пара положительных весовых функций. Тогда имеют место оценки

$$M_p(\tilde{P}_{\varphi, \psi}(f); r) \leq C(p, n, \alpha) \varphi(r) \int_0^1 \frac{\psi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}} M_p(f; \rho) d\rho, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$M_p(\tilde{Q}_{\varphi, \psi}(f); r) \leq C(p, n, \alpha) \psi(r) \int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}} M_p(f; \rho) d\rho, \quad 0 \leq r < 1.$$

После того как доказана ограниченность операторов (3)-(6), оказывается, что $P_{\varphi, \psi}$ и $Q_{\varphi, \psi}$ не только ограниченные операторы, действующие в $L(p, q, \beta)$, но и ограниченные проекторы.

Определим новые, более общие пространства со смешанной нормой:

$$H_{\beta}^{p, q}(\varphi) := \left\{ f \in H(B) : \|f\|_{p, q, \beta, \varphi}^q := \int_0^1 (1-r)^{\beta q - 1} \varphi^q(r) M_p^q(f; r) dr < +\infty \right\},$$

где $1 \leq p, q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, φ – некоторая (нормальная) весовая функция. В случае $q = \infty$ вместо интегральной нормы, как обычно, подразумеваем равномерную норму

$$\|f\|_{p, \infty, \beta, \varphi} := \sup_{0 < r < 1} (1-r)^{\beta} \varphi(r) M_p(f; r), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что при $\varphi \equiv 1$ имеем $H_{\beta}^{p, q}(1) = H(p, q, \beta)$.

Введем оператор умножения функции φ на функции класса $H_{\beta}^{p, q}(\varphi)$ и обозначим полученный в результате этого класс,

$$\Pi_{\varphi}(g) := \varphi g, \quad g \in H_{\beta}^{p, q}(\varphi), \quad \Pi_{\varphi} H_{\beta}^{p, q}(\varphi) = \varphi \cdot H_{\beta}^{p, q}(\varphi).$$

Легко видеть, что $\Pi_{\varphi} H_{\beta}^{p, q}(\varphi) \subset L(p, q, \beta)$.

Действительно, по определениям данных классов имеем

$$f \in \Pi_{\varphi} H_{\beta}^{p, q}(\varphi) \Leftrightarrow f = \varphi g, \quad g \in H_{\beta}^{p, q}(\varphi) \Leftrightarrow f = \varphi g \in L(p, q, \beta), \quad g \in H(B).$$

Теорема 2. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\{\varphi, \psi\}$ – нормальная пара функций с индексами a и b ($0 < a < b$) и с индексом пары $\alpha > b - 1$ в смысле определений 1-2.

(i) Если $-a < \beta < 1 + \alpha - b$, то оператор $P_{\varphi, \psi}$ ограниченно проектирует пространство $L(p, q, \beta)$ на $\Pi_{\varphi} H_{\beta}^{p, q}(\varphi)$,

$$P_{\varphi, \psi} : L(p, q, \beta) \xrightarrow{\text{onto}} \Pi_{\varphi} H_{\beta}^{p, q}(\varphi).$$

(ii) Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то оператор $Q_{\varphi, \psi}$ ограниченно проектирует пространство $L(p, q, \beta)$ на $\Pi_{\psi} H_{\beta}^{p, q}(\psi)$, $Q_{\varphi, \psi} : L(p, q, \beta) \xrightarrow{\text{onto}} \Pi_{\psi} H_{\beta}^{p, q}(\psi)$.

Настоящая работа первым автором выполнена при финансовой поддержке Центра математических исследований Ереванского государственного университета.

Ереванский государственный университет,
e-mails: avetkaren@ysu.am, apetrosyan@ysu.am

К. Л. Аветисян, А. И. Петросян

О некоторых операторах типа Бергмана с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$

Рассмотрены введенные Шилдсом и Вильямсом операторы типа Бергмана, зависящие от нормальной пары весовых функций. Доказано, что существуют значения параметра β , при которых эти операторы ограничены на пространствах $L(p, q, \beta)$ со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Более того, эти операторы также являются ограниченными проекторами, при этом найдены образы $L(p, q, \beta)$ при проекциях.

Կ. Լ. Ավետիսյան, Ա. Ի. Պետրոսյան

Նորմալ կշիռներով $\mathbb{C}^n$ -ի գնդում Բերգմանի տեսքի որոշ օպերատորների մասին

Դիտարկված են Շիլդսի և Վիլյամսի կողմից ներմուծված Բերգմանի տեսքի օպերատորներ, որոնք կախված են նորմալ կշռային ֆունկցիաների զույգից: Ապացուցված է, որ գոյություն ունեն β պարամետրի արժեքներ, որոնց համար այդ օպերատորները սահմանափակ են խառը նորմով $L(p, q, \beta)$ տարածությունների վրա $\mathbb{C}^n$ -ի միավոր գնդում: Ավելին, այդ օպերատորները նաև սահմանափակ պրոյեկտորներ են, ընդ որում գտված են $L(p, q, \beta)$ դասերի պատկերները պրոյեկցիաների դեպքում:

K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan

On Some Bergman Type Operators with Normal Weights Over the Ball in $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n$ -generalizations of Bergman type operators introduced by Shields and Williams depending on a normal pair of weight functions are studied. We find the values of parameter β for which these operators are bounded on mixed norm spaces $L(p, q, \beta)$ over the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Moreover, these operators are also bounded projectors, and the images of $L(p, q, \beta)$ under the projections are found.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. – Math. Z. 1932. V. 34. P. 403-439.
2. Hardy G.H., Littlewood J.E. – Quart. J. Math. (Oxford). 1941. V. 12. P. 221-256.
3. Flett T.M. – J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 38. P. 746-765.
4. Djrbashian A.E., Shamoian F.A. Topics in the Theory of A_{α}^p Spaces. Teubner - Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig. 1988.
5. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg. 2000.
6. Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1980.
7. Zhu K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate Texts in Mathematics, 226, Springer-Verlag. New York. 2005.
8. Jevtić M. – Complex Variables Theory Appl. 1987. V. 8. P. 293-301.
9. Ren G., Shi J. – Chinese Ann. Math., Ser. B. 1997. V. 18. N 3. P. 265-276.
10. Shi J.H., Ren G.B. – Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 3553-3560.
11. Avetisyan K. – J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 291. P. 727-740.
12. Shields A.L., Williams D.L. – Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 287-302.
13. Петросян А. И. – Изв. НАН Армении, Математика. 2011. V. 46. N 5. P. 53-64.
14. Petrosyan A. I., Gapoyan N. T. – Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci. 2013. N 1. P. 17-23.
15. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. Мир. 1974.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.46

П. Э. Мелик-Адамян

Об операторе приведения Калкина для обратимых симметрических операторов

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 28/VII 2016)

Ключевые слова: *симметрический оператор, точка регулярного типа, оператор приведения Калкина, самосопряженное расширение, граничные операторы Вишика.*

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ рассматривается простой замкнутый симметрический оператор T с областью определения $\mathcal{D}(T)$, плотной в $\mathfrak{H}$, так что определен и сопряженный оператор T^* с областью $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}(T)$.

Через $[\mathfrak{H}]$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а ядро, образ и резольвентное множество оператора – через $\mathcal{K}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ соответственно.

В работе предполагается, что для оператора T существует ограниченный обратный T^{-1} , так что $\mathcal{R}(T)$ является подпространством и $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$, $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$, $\|T^{-1}\| < \infty$. Тогда справедливо ортогональное разложение

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{K}(T^*), \quad (1)$$

и пусть $P_{\mathcal{R}}$, $P_{\mathcal{K}}$ – соответствующие ортогональные проекторы в $\mathfrak{H}$.

Поскольку точка 0 является точкой регулярного типа для T и множество таких его точек открыто, то дефектные числа оператора T равны, $n_+ = n_- = \dim \mathcal{K}(T^*)$, следовательно, он обладает самосопряженными расширениями. Предполагается, что $\dim \mathcal{K}(T^*) = \infty$.

В работе Дж. Калкина [1] доказано существование самосопряженного расширения S оператора T такого, что $0 \in \rho(S)$, т. е. определен всюду на $\mathfrak{H}$ ограниченный оператор S^{-1} , являющийся самосопряженным расширением оператора T^{-1} . Посредством S^{-1} представлен и оператор приведе-

ния для T^* – объект, введенный им же в [2] для описания максимальных расширений симметрических операторов.

В настоящей работе предложен подход к расширениям оператора T , несколько отличный от [1]. Здесь оператор приведения для T^* строится на основе определенного прямого разложения области $\mathcal{D}(T^*)$, с помощью которого приводится описание множества самосопряженных расширений оператора T методом Калкина [2]. Такой подход позволяет достаточно просто выделить те из них, для которых точка 0 является регулярной точкой.

1. Прямое разложение области $\mathcal{D}(T^*)$. Поскольку оператор T^{-1} ограничен, то $\mathcal{R}(T^*) = \mathfrak{H}$ и, более того, для любого $h \in \mathfrak{H}$ найдется единственный в силу (1) вектор $g_h = Tf_h \in \mathcal{D}(T)$ такой, что $T^*g_h = h$ (см. [3] с. 563). Обозначая $\mathcal{R}_*(T) = \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$, имеем $\mathfrak{H} = T^*\mathcal{R}_*(T)$. Из (1) также следует, что $\mathcal{R}_*(T) \neq \mathcal{R}(T)$, а из плотности $\mathcal{D}(T)$ в $\mathfrak{H}$ нетрудно видеть, что $\mathcal{R}_*(T)$ плотно в $\mathcal{R}(T)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$\check{T}^* = T^*|_{\mathcal{R}_*(T)}, \quad (2)$$

обратный к которому $\check{T}^{-*}$ существует, определен на $\mathfrak{H}$, значит существует и оператор $(\check{T}^{-*})^*$.

Предложение 1. Пусть симметрический оператор T имеет ограниченный обратный. Тогда $(\check{T}^{-*})^* = T^{-1}P_{\mathcal{R}}$, и оператор $\check{T}^{-*}$ ограничен

$$\|\check{T}^{-*}\| = \|(\check{T}^{-*})^*\| = \|T^{-1}\|.$$

Доказательство. Для произвольного вектора $h \in \mathfrak{H}$ из определения

(2) следует, что $\check{T}^{-*}h = Tf_h$, где $f_h \in \mathcal{D}(T)$ – единственный вектор такой, что $Tf_h \in \mathcal{D}(T^*)$ и $T^*Tf_h = h$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\check{T}^{-*}h\|^2 &= \langle Tf_h, Tf_h \rangle = \langle f_h, T^*Tf_h \rangle = \langle f_h, h \rangle = \\ &= \langle T^{-1}\check{T}^{-*}h, h \rangle \leq \|T^{-1}\| \|\check{T}^{-*}h\| \|h\|, \end{aligned}$$

следовательно $\|\check{T}^{-*}\| \leq \|T^{-1}\|$.

Если $\hat{h} = P_{\mathcal{R}}\hat{h} + P_{\mathcal{K}}\hat{h} = Tf_0 + P_{\mathcal{K}}\hat{h} \in \mathfrak{H}$, то

$$\langle \check{T}^{-*}h, \hat{h} \rangle = \langle Tf_h, \hat{h} \rangle = \langle Tf_h, Tf_0 \rangle = \langle h, f_0 \rangle = \langle h, T^{-1}P_{\mathcal{R}}\hat{h} \rangle,$$

и доказано, что $(\check{T}^{-*})^* = T^{-1}P_{\mathcal{R}}$.

Очевидно, оператор $(\check{T}^{-*})^*$ является расширением оператора T^{-1} , так что $\|\check{T}^{-*}\| \geq \|T^{-1}\|$ и из $\|\check{T}^{-*}\| = \|(\check{T}^{-*})^*\|$ следует доказываемое предложение.

Введем линейное многообразие

$$\mathcal{L}(T^*) = \check{T}^{-*}\mathcal{K}(T^*) \subset \mathcal{R}_*(T). \quad (3)$$

Основой настоящей работы является следующий факт.

Теорема 1. Пусть симметрический оператор T имеет ограниченный обратный. Тогда область определения сопряженного оператора допускает прямое разложение

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \dot{+} \mathcal{K}(T^*) \dot{+} \mathcal{L}(T^*). \quad (4)$$

Доказательство. Из определения (3) имеем $\mathcal{K}(T^*) \perp \mathcal{L}(T^*)$, а из обратимости оператора T следует, что $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{K}(T^*) = \{0\}$.

Пусть $f_0 \in \mathcal{D}(T)$, $k \in \mathcal{K}(T^*)$, $l \in \mathcal{L}(T^*)$. Так как $T^*l \in \mathcal{K}(T^*)$, то, предполагая, что $f_0 + k = l$, получим противоречивое $Tf_0 = T^*l$, следовательно, и $[\mathcal{D}(T) \dot{+} \mathcal{K}(T^*)] \cap \mathcal{L}(T^*) = \{0\}$.

Рассмотрим вектор $f \in \mathcal{D}(T^*)$, не принадлежащий $\mathcal{D}(T)$.

Если $P_{\mathcal{K}}T^*f = 0$, то $T^*f = Tf_0$ и $f = f_0 + k$, если же $P_{\mathcal{R}}T^*f = 0$, то $T^*f = k$ и $f = l$, в согласии с доказываемой формулой.

Пусть $T^*f = Tf_0 + k_0$, где $f_0 \neq 0$, $k_0 \neq 0$.

Очевидно, что $f - \check{T}^{-*}T^*f \in \mathcal{K}(T^*)$ и $f = \check{T}^{-*}T^*f + k_1$, где не исключается, что $k_1 = 0$. Отсюда имеем

$$f = \check{T}^{-*}(Tf_0 + k_0) + k_1 = \check{T}^{-*}Tf_0 + l_0 + k_1, \quad l_0 = \check{T}^{-*}k_0. \quad (5)$$

Из определения (2) следует, что $\check{T}^{-*}Tf_0 = Tf'_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ и $T^*Tf'_0 = Tf_0$.

Если $Tf'_0 \in \mathcal{D}(T)$, то $Tf'_0 = f_0$ и из (5) следует требуемое.

Если $Tf'_0 \notin \mathcal{D}(T)$, то $T^*(Tf'_0 - f_0) = 0$, так что $Tf'_0 - f_0 = k_2$, $k_2 \neq 0$, и из (5) окончательно получим

$$f = Tf'_0 + l_0 + k_1 = f_0 + l_0 + (k_1 + k_2),$$

доказывая теорему.

Из приведенного доказательства и предложения 1 следует, что слагаемые вектора $f \in \mathcal{D}(T^*)$ в представлении (4) определяются формулами

$$f_0 = T^{-1}P_{\mathcal{R}}T^*f = (\check{T}^{-*})^*T^*f, \quad k = P_{\mathcal{K}}[f - (\check{T}^{-*})^*T^*f],$$

$$l = \check{T}^{-*}P_{\mathcal{H}}T^*f. \quad (6)$$

2. Метод Калкина для оператора T . В основе теории, предложенной Калкиным в [2] для расширений симметрических операторов, лежит следующее понятие, которое приводится здесь с допущением определенной вольности (см. [2], опр.1.1).

Пусть T – простой замкнутый симметрический оператор с областью определения $\mathcal{D}(T)$, плотной в $\mathfrak{H}$, и $\mathcal{H}$ – некоторое гильбертово пространство.

Оператор Γ с $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(T^*)$, $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{H}$, $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{D}(T)$ называется ограниченным оператором приведения для T^* , если существует унитарный оператор $J \in [\mathcal{H}]$ такой, что $J^* = -J$, $J^2 = -I_{\mathcal{H}}$ и для любых $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$ имеет место тождество (тождество Лагранжа)

$$\{f, g\} := \langle T^*f, g \rangle - \langle f, T^*g \rangle = \langle J\Gamma f, \Gamma g \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (7)$$

Показано, что если $\mathcal{H}_{\pm}$ – собственные подпространства оператора J , отвечающие собственным значениям $\pm i$, то $\dim \mathcal{H}_{\pm} = n_{\pm}$, где $n_{\pm}$ – дефектные числа оператора T (см. [2], т.3.7). Если $\dim \mathcal{H}_{+} = \dim \mathcal{H}_{-}$, то

существуют подпространства $\mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{H}$, которые называются гипермаксимальными J -симметрическими (нейтральными), такие, что $J\mathcal{H}_\delta = \mathcal{H}_\delta^\perp$, и формула

$$T_\delta = T^* \upharpoonright \mathcal{D}(T_\delta), \quad \mathcal{D}(T_\delta) = \{f \in \mathcal{D}(T^*); \Gamma f \in \mathcal{H}_\delta\} \quad (8)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами всех гипермаксимальных нейтральных подпространств и всех самосопряженных расширений симметрического оператора T (см. [2], т.2.2).

Пусть $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$ и, согласно разложению (3),

$$f = f_0 + k_f + \check{T}^{-*}k'_f, \quad g = g_0 + k_g + \check{T}^{-*}k'_g. \quad (9)$$

Предложение 2. Для симметрического оператора с ограниченным обратным тождество Лагранжа допускает представление в форме

$$\{f, g\} = \langle k'_f, k_g \rangle - \langle k_f, k'_g \rangle. \quad (10)$$

Доказательство этой формулы сводится к прямым вычислениям с учетом симметричности оператора T и ортогональности $\mathcal{H}(T^*) \perp \mathcal{L}(T^*)$, поскольку $\check{T}^{-*}k'_f, \check{T}^{-*}k'_g \in \mathcal{L}(T^*)$.

Обозначим через $\mathcal{H}_0$ гильбертово пространство $\mathcal{H}(T^*)$, введем новое

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 = \{[k_1, k_2]; k_1, k_2 \in \mathcal{H}_0\}$$

и определим операторы Γ и J как

$$\begin{aligned} \Gamma f &= [k_f, k'_f], \quad f = f_0 + k_f + \check{T}^{-*}k'_f \in \mathcal{D}(T^*); \\ J[k_1, k_2] &= [k_2, -k_1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь формула (10) представится в форме (7), так что удовлетворены все условия, определяющие оператор приведения для T^* .

Пусть P_U – ортогональный проектор в $\mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что P_U проектирует $\mathcal{H}$ на гипермаксимальное нейтральное подпространство тогда и только тогда, когда

$$JP_U + P_UJ = J.$$

Несложно проверить, что это условие равносильно следующему.

Предложение 3. Подпространство $\mathcal{H}_U \subset \mathcal{H}$ является гипермаксимальным нейтральным тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{H}_U = \{[k_1, k_2]; (U + iI_0)k_1 = i(U - iI_0)k_2, k_1, k_2 \in \mathcal{H}_0\}, \quad (12)$$

где I_0 – единичный оператор в $\mathcal{H}_0$, а оператор $U \in [\mathcal{H}_0]$ является унитарным.

Таким образом, формулой (12) дается описание множества гипермаксимальных нейтральных подпространств в терминах унитарных операторов в $\mathcal{H}_0$.

Ограничимся рассмотрениями тех случаев, когда или $i \in \rho(U)$, или $-i \in \rho(U)$. Тогда соответствующие преобразования Кэли

$$A = -i(U + iI_0)(U - iI_0)^{-1}, \quad \text{или} \quad B = i(U - iI_0)(U + iI_0)^{-1}$$

являются самосопряженными операторами в $[\mathcal{H}_0]$ и подпространства

$$\mathcal{H}_{IA} = \{[k_1, Ak_1]; k_1 \in \mathcal{H}_0\}, \quad \text{или} \quad \mathcal{H}_{IB} = \{[Bk_2, k_2]; k_2 \in \mathcal{H}_0\} \quad (13)$$

являются гипермаксимальными нейтральными.

Отметим, что обратные преобразования

$$U = -i(A - iI_0)(A + iI_0)^{-1} \text{ или } U = i(B + iI_0)(B - iI_0)^{-1}$$

определены для любых самосопряженных операторов $A, B \in [\mathcal{H}_0]$, следовательно, подпространства, задаваемые формулой (13), являются гипермаксимальными нейтральными для любых таких операторов.

Если $i \in \rho(U)$, и $-i \in \rho(U)$, то оператор B имеет ограниченный обратный, $B^{-1} = A$ и подпространства в (13) совпадают.

Итогом изложенного выше является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть симметрический оператор T имеет ограниченный обратный. Тогда он обладает самосопряженными расширениями следующих типов:

$$T_{IA}f = Tf_0 + k, f = f_0 + \check{T}^{-*}k + Ak \in \mathcal{D}(T_{IA});$$

$$T_{BI}f = Tf_0 + Bk, f = f_0 + \check{T}^{-*}Bk + k \in \mathcal{D}(T_{BI})$$

таких, что $0 \in \rho(T_{IA})$ для любого A , и $0 \notin \rho(T_{BI})$, если $0 \notin \rho(B)$.

Доказательство следует из верхних формул, являющихся другой формой записи формулы (8), поскольку в силу (1) очевидно, что $\mathcal{R}(T_{IA}) = \mathfrak{H}$.

Среди указанных расширений можно выделить "крайние" – те, которые отвечают случаям $U = -iI_0$ и $U = iI_0$, или, соответственно $A = 0$ и $B = 0$. Тогда

$$T_{I0}f = Tf_0 + k, f = f_0 + \check{T}^{-*}k \text{ и } T_{0I}f = Tf_0, f = f_0 + k.$$

Сравнение с работой [1] показывает, что $T_{I0} = S$, где S – построенное там самосопряженное расширение оператора T .

Очевидно, что для расширения T_{0I} имеем $\mathcal{H}(T_{0I}) = \mathcal{H}(T^*)$.

В заключение заметим следующее.

Доказательство теоремы Калкина приведено и в ([3], с .629), где расширение T_{I0} получено отличным от [1] путем.

В работе [1], с теми же $\mathcal{H}$ и $J \in [\mathcal{H}]$, оператор $\Gamma: \mathcal{D}(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$ определен формулой

$$\Gamma f = [f - S^{-1}T^*f, P_{\mathcal{H}}T^*f], f \in \mathcal{D}(T^*). \quad (14)$$

Очевидно, $T^*S^{-1}h = h, h \in \mathfrak{H}$, откуда следует, что $f - S^{-1}T^*f = k$ и, если $T^*f = Tf_0 + k', k' = P_{\mathcal{H}}T^*f$, то $S^{-1}T^*f = S^{-1}(Tf_0 + k') = f_0 + S^{-1}k'$, значит

$$f = f_0 + S^{-1}k' + k, f \in \mathcal{D}(T^*). \quad (15)$$

Эта формула известна как разложение Вишика, а операторы, отображающие $\mathcal{D}(T^*)$ на $\mathcal{H}(T^*)$ формулами $\Gamma_1 f = k', \Gamma_2 f = k$, – как граничные операторы Вишика (см. [4, 5]).

Из соотношений (9) и (6) следует, что в (15) имеем

$$k = k_f, k' = k'_f.$$

Таким образом, определение оператора приведения для T^* формулой (11) совпадает с определением (14) из работы [1].

Институт механики НАН РА
maperch@gmail.com

П. Э. Мелик-Адамян

**Об операторе приведения Калкина для обратимых
симметрических операторов**

Получено некоторое разложение в прямую сумму для области определения оператора, сопряженного к обратимому симметрическому, позволившее определить оператор приведения Калкина. С его помощью представлено множество ограничено обратимых самосопряженных расширений рассматриваемого оператора.

Պ. Է. Մելիք-Ադամյան

**Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համար Կալկինի
վերածող օպերատորի մասին**

Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համալուծի որոշման տիրույթի համար ստացված է նրա որոշակի վերլուծությունը ուղիղ գումարի, ինչը հնարավորություն է տվել սահմանելու Կալկինի վերածող օպերատորը: Նրա միջոցով ներկայացված է դիտարկվող օպերատորի հակադարձելի ինքնահամալուծ ընդլայնումների բազմությունը:

P. E. Melik-Adamyan

**On the Calkin Reduction Operator for Invertible Symmetric
Operators**

For an invertible symmetric operator a certain direct sum decomposition of its adjoint's domain is obtained. This allowed to define the Calkin reduction operator, and, with its help, to present the set of invertible self-adjoint extensions of a given symmetric operator.

Литература

1. *Calkin J.W.*, Duke Math.J., 7, 1940, 504-508.
2. *Calkin J.W.*, Trans.Amer.Math.Soc., 45, 1939, 365-442.
3. *Смирнов В.И.*, Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, Москва. 1959.
4. *Белишев М.И., Демченко М.Н.*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, 409. 2012, 17-39.
5. *Вишик М.И.*, Труды ММО, 1, 1952, 187-246.

MATHEMATICS

УДК 517.615

L. Z. Gevorgyan

On Ramanujan Method of Solution of Equations with Analytic Functions

(Submitted by academician V.S. Zakaryan 15/VIII 2016)

Keywords: *transcendental equation, approximate root, Ramanujan method, meromorphic function.*

Introduction and preliminaries. Let f be analytic in a circle $D(0, R) = \{z : |z| < R\}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ and $z_0 (|z_0| < R)$ be a simple root of equation

$$f(z) = 1. \quad (1)$$

It is assumed that all other roots of equation (1) have moduli strictly greater than $|z_0|$. In this case the function $g(z) = \frac{1}{1-f(z)}$ will be analytic at least in some domain $D(0, |z_0| + \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ ($0 < \varepsilon$) and z_0 will be a simple pole of g .

Let $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ be the power series expansion of g . It is easy to see that $c_1 = 1$ and

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k c_{n-k}. \quad (2)$$

According to ([1], p. 42) “Ramanujan's discourse is characteristically brief; he gives (2) and claims, with no hypotheses, that $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ approaches a root of (1)”.

Let

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n-1}}{c_n} = s. \quad (3)$$

Formulas (2) and (3) form the base of the Ramanujan method [4].

The following assertions should be proved.

1. All the coefficients $\{c_n\} \neq 0$ (at least starting from some positive integer).

2. The sequence $\left\{ \frac{c_{n-1}}{c_n} \right\}$ converges.

3. The limit (3) is a root of (1).

Some progress in justification of this method is achieved in [1].

By Fabry's theorem [2] condition (3) implies that s is a singular point of the function g .

As in the considered above case the only singularity of g in the circle $D(0, |z_0| + \varepsilon)$ is the simple pole at z_0 , we get $z_0 = s$.

Remark. As shows the example of dilogarithm function $Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ the point

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n-1)^2} = 1$$

is not a pole.

More convincing (and independent of Fabry's theorem) justification of Ramanujan method (for an isolated pole of arbitrary order) may be obtained, using a slight generalization of the following result ([5], Ch.2, Ex.14).

Assertion. Suppose that g is holomorphic in an open set containing the closed unit disc, except for a pole at z_0 on the unit circle. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n-1}}{c_n} = z_0.$$

We intend to address in the next section all three challenges above in more general situation and supply exhaustive clarifications.

Auxiliary results. Let u and v be analytic in some domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ functions and $z \in \mathcal{D}$.

Definition. We say that the function u is stronger at z than v (noted as $u \succ_z v$) if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = 0. \quad (4)$$

Lemma 1. Let $a, b \in \mathbb{C}; A, B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; m, p \in \mathbb{N}$ and

$$u(z) = \frac{A}{(a-z)^m}, v(z) = \frac{B}{(b-z)^p}.$$

Then

1. If $|z-a|=|z-b|$ and $m > p$, then $u \succ_z v$ for any $z \neq a, z \neq b$.
2. If $0 < |z-a| < |z-b|$, then $u \succ_z v$.

Proof. 1. We have

$$u^{(n)}(z) = A \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)(a-z)^{m+n}}$$

and

$$\frac{v^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = \frac{B}{A} \cdot \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{(a-z)^m}{(b-z)^p} \cdot \left(\frac{a-z}{b-z} \right)^n \cdot \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+m)}.$$

All the terms of this product are bounded. According to Stirling's formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+m)} = 0$$

implying

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = 0.$$

2. By the same way

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = \frac{B}{A} \cdot \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{(a-z)^m}{(b-z)^p} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+m)} \cdot \left(\frac{a-z}{b-z} \right)^n = 0.$$

Lemma 2. For function u from above

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{u^{(n-1)}(z)}{u^{(n)}(z)} = a - z.$$

Proof. We have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{u^{(n-1)}(z)}{u^{(n)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)(a-z)^{m+n-1}} \cdot \frac{\Gamma(m)(a-z)^{m+n}}{\Gamma(m+n)} = a - z.$$

Note that if $m=1$ the fraction $n \frac{u^{(n-1)}(z)}{u^{(n)}(z)}$ is equal to $a-z$ for any n .

Proposition 3. Let h be a function analytic in a domain $\mathcal{D}$, $z \in \mathcal{D}$. Denote by $D(z, r)$ the circle of convergence of the power series expansion of h centered at z and $a \in D(z, r)$. Let $u(t) = \frac{1}{a-t}$. Then $u \succ_z h$.

Proof. For any $t \in D(z, r)$ we have

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z)}{n!} (t-z)^n.$$

As a lies in the circle of convergence of h , the general term of its Taylor series expansion tends to zero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^{(n)}(z)}{n!} (a-z)^n = 0.$$

On the other hand

$$\frac{h^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = \frac{h^{(n)}(z)}{n!} (a-z)^{n+1}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^{(n)}(z)}{u^{(n)}(z)} = 0.$$

Proposition 4. Let $\{f_n\}_0^N$ be a set of comparable (in the sense of the above definition) functions, f_0 be the unique strongest among them and

$$F = \sum_{n=0}^N f_n.$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{F^{(n-1)}(z)}{F^{(n)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{f_0^{(n-1)}(z)}{f_0^{(n)}(z)}.$$

Proof. Equality

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(z)}{f_0^{(n)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{f_k^{(n)}(z)}{f_0^{(n)}(z)} \right) = 1$$

implies $F^{(n)}(z) \neq 0$ at least starting from some positive integer.

Further

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{F^{(n-1)}}{F^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n-1)}}{f_0^{(n-1)}} \cdot n \frac{f_0^{(n-1)}}{f_0^{(n)}} \cdot \frac{f_0^{(n)}}{F^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{f_0^{(n-1)}}{f_0^{(n)}}.$$

Generalization of Ramanujan method. The equation to be solved is now

$$f(z) = 0, \quad (5)$$

where f is an analytic in some domain $\mathcal{D}$ function, having a set of (not obligatory simple) zeros.

Let $z \in \mathcal{D}$, $f(z) \neq 0$. Denote

$$P_0(z) = 1/f(z) \text{ and } P_n(z) = \left(d^n \frac{1}{f} \right)(z), n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

where d is the differentiation operator.

Remark ([3], formula (2.2).) If P_n is expensive to calculate, one may use the recurrences

$$P_n(z) = -\frac{1}{f(z)} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_k(z) f^{(n-k)}(z), n \geq 1. \quad (7)$$

Theorem. Let P_0 be meromorphic in $\mathcal{D}$, $z \in \mathcal{D}$, $f(z) \neq 0$. The formula

$$a = z + \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)} \quad (8)$$

defines the nearest to z zero of f . If there are many such zeros, then a is the zero of the highest order. The limit does not exist if there are many concurrent zeros of the highest order in the same distance from z .

Proof. Let $\{a_k\}$ be nearest to z set of zeros of f . Subtracting the principal parts of the Laurent series of P_0 we get a function

$$h(z) = P_0(z) - \sum_{j,k} \frac{A_{jk}}{(a_k - z)^{m_{jk}}},$$

analytic in a circle $D(z, r)$. The proof may be completed, recalling Lemmas 1 and 2, Propositions 3 and 4.

Denote by E the set of mediatrices $E = \{z : |z - z_k| = |z - z_m|\}$, where z_k, z_m are all pairs of different zeros of f . According to section 2, the limit in (8) exists at least for any $z \in \mathbb{C} \setminus E$, i.e. almost everywhere.

So formulas (6) (or (7)) and (8) describe the generalized Ramanujan algorithm of solution of (5).

In [3] the author says "In the present study, we give analytic proof of his (Ramanujan's) method and generalize this to approximate a root of nonlinear equation with the arbitrary order of convergence" and supposes that $f(\alpha) = 0, |z - \alpha| < 1, f'(z) \neq 0$.

Let

$$H_n(z) = z - \alpha + n \frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)}.$$

The author writes "Since $|z - \alpha| < 1$ and letting $n \rightarrow \infty$, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) = 0."$$

The next examples show that the last assertion is erroneous.

Example 1. Let $f(z) = 6z^2 - z - 1$. Then $\alpha_1 = -1/3, \alpha_2 = 1/2$ and

$$\frac{1}{6z^2 - z - 1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z - 1/2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z + 1/3}.$$

We have

$$\frac{nP_{n-1}(z)}{P_n(z)} = - \frac{\frac{n!}{(z - 1/2)^n} - \frac{n!}{(z + 1/3)^n}}{\frac{n!}{(z - 1/2)^{n+1}} - \frac{n!}{(z + 1/3)^{n+1}}}.$$

For $z_1 = 0$

$$\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nP_{n-1}(0)}{P_n(0)} = -\frac{1}{3}.$$

Choosing $z_2 = 1/4$ we get

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nP_{n-1}(1/4)}{P_n(1/4)} = \frac{1}{2}.$$

Note that for both choices $|z_2 - \alpha_1| = 7/12 < 1$ and $|z_1 - \alpha_2| = 1/2 < 1$.

It is easy to see that the attraction basin of the root α_1 is the left half-plane

$$\Pi_- = \left\{ z : \operatorname{Re} z < \frac{1}{12} \right\} \text{ and for } \alpha_2 - \text{the right half-plane } \Pi_+ = \left\{ z : \operatorname{Re} z > \frac{1}{12} \right\}.$$

Example 2. In the figure below the attraction basins of four roots of equation $z^4 - z = 0$ are plotted. For $z_0 = 0$ the attraction basin is the inner triangle, marked by the letter Z. For roots $z_{k+1} = \exp(i2\pi k/3), k = 0, 1, 2$ the corresponding domains (marked by letters A, B, C respectively) are bounded by two rays and a side of the triangle.

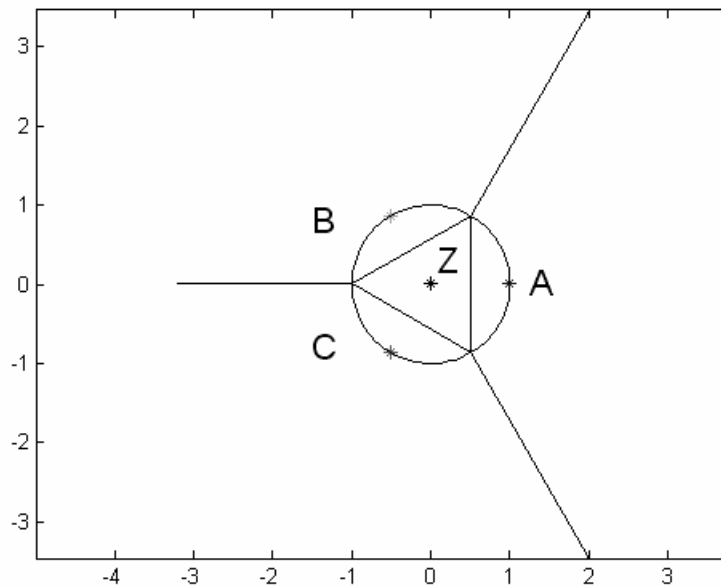


Fig. 1. Attraction basins for the roots of equation $z^4 - z = 0$.

Remark. If α is a simple root of equation (5) then the error of iterations (8) tends to zero as a geometric progression, otherwise the n -th error is of the magnitude $1/n$.

National Polytechnic University of Armenia
e-mail:levgev@hotmail.com

L. Z. Gevorgyan

On Ramanujan Method of Solution of Equations with Analytic Functions

We recall the Ramanujan method of solution of equations with analytic functions and mention some results which may be used for justification of it. Some auxiliary notions are introduced and pertinent propositions are proved. Then the general case is

treated. A formula is proposed, permitting to find the nearest to given starting point zero of the function. If there are many such zeros, then the zero of the highest order is found and the limit does not exist if there are many concurrent zeros of the highest order in the same distance from the starting point. A description of admissible starting values of iterations is supplied.

Լ. Չ. Գևորգյան

Անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարումների լուծման Ռամանուջանի եղանակի մասին

Հիշեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարումների լուծման Ռամանուջանի եղանակը, և ներկայացվում են որոշ արդյունքներ, որոնք կարող են օգտագործվել դրա հիմնավորման համար: Ներմուծվում են նոր հասկացություններ, և ապացուցվում են յուրահատուկ պնդումներ: Քննարկվում է Ռամանուջանի եղանակը ամենաընդհանուր դրվածքով: Առաջարկվում է հաշվարկային բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու ֆունկցիայի՝ նախապես ընտրված կետին ամենամոտ զրոն: Եթե դրանք մի քանիսն են, ապա գտնվում է ամենաբարձր կարգի զրոն, և սահմանը գոյություն չունի, եթե ամենաբարձր կարգի և միևնույն հեռավորության վրա գտնվող զրոները մի քանիսն են: Նկարագրվում են նաև իտերացիաների թույլատրելի սկզբնական մոտավորությունները:

Л. З. Геворгян

О методе Раманужана решения уравнений с аналитическими функциями

Приводятся метод Раманужана решения уравнений с аналитическими функциями и некоторые результаты, которые могут быть использованы для его обоснования. Вводятся некоторые понятия и доказываются специальные утверждения. Обсуждается метод Раманужана в наиболее общей постановке. Приводится расчетная формула, позволяющая найти корень функции, наиболее близкий к заранее выбранной точке. Если ближайших точек несколько, то находится корень наивысшей кратности, а если имеется несколько ближайших корней наивысшей кратности, то предела не существует. Описаны также допустимые начальные значения итераций.

References

1. *Berndt B.*, Ramanujan's notebooks. Part-1. 1985. Springer-Verlag. USA.
2. *Fabry E.* - Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1896. V. 13. P. 367-399.
3. *Muthumalai R. K.*, Generalization of Ramanujan method of approximating root of an equation, ar Xiv:1112. 5092v1.
4. *Sastry S. S.* Introductory methods of numerical analysis, Prentice-Hall of India. New Delhi. 2006.
5. *Stein E. M., Shakarchi R.* Complex analysis, Princeton University Press. 2003.

УДК 539.3

**М. С. Григорян, М. С. Мкртчян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян**

**О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя
при антиплоской деформации**

(Представлено 19/IX 2016)

Ключевые слова: *упругий слой, антиплоская деформация, смешанные граничные задачи, гармонические функции, интегральные уравнения.*

Контактные и смешанные граничные задачи математической теории упругости составляют одну из обширных областей механики деформируемого твердого тела. Ввиду их важного теоретического и практического значения они стали предметом исследования многих авторов. Многочисленные результаты исследований в этой области подытожены в [1-6]

В настоящей статье рассматриваются две смешанные граничные задачи математической теории упругости для упругого слоя, находящегося в условиях антиплоской деформации. Такие задачи возникают в геомеханике в расчетах напряженно-деформированного состояния горных массивов, подверженных сдвиговым деформациям, которые при оползнях грунтов или землетрясениях значительно отличаются от других типов деформаций. Эти задачи математически формулируются в виде смешанных граничных задач теории гармонических функций, и их решения сводятся к решениям интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическими ядрами, допускающих точные решения. Рассматриваемые здесь задачи тесно примыкают к граничным задачам теории установившейся фильтрации жидкости под гидротехническими сооружениями типа плотин в пористом грунтовом слое [7-9].

1. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругий слой $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; -H \leq y \leq 0\}$ модуля сдвига G и высоты H в направлении оси Oz находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). В первой смешанной граничной задаче для слоя Ω предположим, что на его верхней

грани на участке $\omega_- = \{-\infty < x < -a; y = 0; -\infty < z < \infty\}$ заданы постоянные перемещения w_0 в положительном направлении оси Oz , участок $\omega_+ = \{a < x < \infty; y = 0; -\infty < z < \infty\}$ жестко защемлен, на центральном участке $\omega_0 = \{-a < x < a; y = 0; -\infty < z < \infty\}$ в отрицательном направлении оси Oz действуют касательные силы интенсивности $f(x)$, а нижняя грань слоя свободна от внешних сил.

Основные уравнения теории упругости при антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy состоят из одного уравнения равновесия и закона Гука. Они имеют, соответственно, вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial u_z}{\partial y};$$

где τ_{xz} и τ_{yz} – компоненты касательных напряжений, а $u_z = u_z(x, y)$ – единственная отличная от нуля компонента перемещений в направлении оси Oz .

Вводя в рассмотрение функцию $\varphi(x, y) = G u_z(x, y)$, обнаружим, что эта функция, а также функция $u_z(x, y)$, в базовой полосе $\omega = \{-\infty < x < \infty; -H < y < 0\}$ являются гармоническими функциями. Далее при помощи условий Коши – Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ((x, y) \in \omega) \quad (1.1)$$

введем сопряженную с $\varphi(x, y)$ гармоническую функцию $\psi(x, y)$. Тогда

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Очевидно, что линии $\varphi(x, y) = \text{const}$ представляют собой линии равных приведенных перемещений. Линии же $\psi(x, y) = \text{const}$ представляют собой траектории касательных напряжений. Действительно, можем записать

$$\psi(x, y) = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow -\tau_{yz} dx + \tau_{xz} dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}.$$

Функция $\psi(x, y)$ – аналог функции тока в гидродинамике.

Теперь описанную выше первую смешанную граничную задачу для упругого слоя Ω математически можем сформулировать в виде следующей граничной задачи для гармонической функции $\varphi_1(x, y) = G u_z^{(1)}(x, y)$ в базовой полосе ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \omega) \\ \varphi_1(x, y)|_{y=-0} = w_0 G & (-\infty < x < a); \quad \varphi_1(x, y)|_{y=-0} = 0 & (a < x < \infty); \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=-0} = -f(x) & (-a < x < a); \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=-H} = 0 & (-\infty < x < \infty). \end{cases} \quad (1.2)$$

Граничная задача (1.2) эквивалентна следующей смешанной граничной задаче для сопряженной с $\varphi_1(x, y)$ функции $\psi_1(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \omega) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_{y=-0} = 0 & (|x| > a); \quad \psi_1(x, y)|_{y=-H} = 0 & (-\infty < x < \infty); \\ \psi_1(x, y)|_{y=-0} = \int_{-a}^x f(s) ds + c_1 & (-a \leq x \leq a); \end{cases} \quad (1.3)$$

где c_1 – постоянная, подлежащая определению.

Во второй смешанной задаче для упругого слоя Ω прежние условия на участках ω_- и ω_0 останутся неизменными, а на участке ω_+ теперь задаются постоянные перемещения w_0 в отрицательном направлении оси Oz и грань $y = -H$ слоя жестко закреплена. Эта задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи для функции $\varphi_2(x, y) = G u_z^{(2)}(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \omega) \\ \varphi_2(x, y)|_{y=-0} = -G w_0 \operatorname{sign} x & (|x| > a); \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=-0} = -f(x) & (|x| \leq a); \\ \varphi_2(x, y)|_{y=-H} = 0 & (-\infty < x < \infty). \end{cases} \quad (1.4)$$

Граничная задача (1.4) при помощи условий (1.1) преобразуется в следующую смешанную граничную задачу для сопряженной функции $\psi_2(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \omega) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{y=-0} = 0 & (|x| > a); \quad \psi_2(x, y)|_{y=-0} = \int_{-a}^x f(s) ds + c_2; & (|x| \leq a); \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{y=-H} = 0 & (-\infty < x < \infty); \end{cases} \quad (1.5)$$

где c_2 – постоянная, подлежащая определению.

2. Решения задач (1.2)-(1.5) можно построить при помощи интегрального преобразования Фурье. Но удобно сначала построить

решения граничных задач (1.3) и (1.5), а затем из условий (1.1) найти сопряженные гармонические функции $\varphi_k(x, y)$ ($k=1, 2$).

Приступим к решению граничной задачи (1.3), сводя ее решение к решению интегрального уравнения. С этой целью для функции $\psi_1(x, y)$ предварительно рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \omega) \\ \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = g(x); \quad \psi_1|_{y=-H} = 0 & (-\infty < x < \infty); \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > a); \\ \chi_1(x) & (|x| < a); \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\chi_1(x)$ – искомая расчетная функция. Теперь применив к граничной задаче (2.1) интегральное преобразование Фурье, придем к следующей одинарной граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\psi}_1}{dy^2} - \lambda^2 \bar{\psi}_1 = 0 & (-H < y < 0) \\ \left. \frac{d \bar{\psi}_1}{dy} \right|_{y=0} = \bar{g}(\lambda); \quad \bar{\psi}_1|_{y=-H} = 0; \end{cases} \quad \{\bar{\psi}_1(\lambda, y); \bar{g}(\lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_1(x, y); g(x)\} e^{i\lambda x} dx. \quad (2.2)$$

Решение граничной задачи (2.2) имеет вид

$$\bar{\psi}_1(\lambda, y) = \text{sh}(\lambda(y+H)) \bar{g}(\lambda) / \lambda \text{ch}(\lambda H) \quad (-H \leq y \leq 0),$$

откуда по формуле обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_1(|x-s|, y) \chi_1(s) ds \quad ((x, y) \in \omega) \\ K_1(x, y) &= \int_0^\infty \text{sh}(\lambda(y+H)) \cos(\lambda x) d\lambda / \lambda \text{ch}(\lambda H). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда

$$\psi_1(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \left(\text{cth} \left(\frac{\pi|x-s|}{4H} \right) \right) \chi_1(s) ds, \quad (2.4)$$

где использовано выражение известного косинус-интеграла Фурье из [10] (с. 530, формула 4.116.2). При помощи (2.4), реализуя третье условие задачи (1.3), относительно функции $\chi_1(x)$ придем к следующему определяющему интегральному уравнению (ИУ) Фредгольма первого рода:

$$\int_{-a}^a \ln \left(\text{cth} \left(\frac{\pi|x-s|}{4H} \right) \right) \chi_1(s) ds = h_1(x) = \pi h(x) + \pi c_1; \quad h(x) = \int_{-a}^x f(s) ds. \quad (2.5)$$

Далее решение ИУ (2.5) при правой части $h(x)$ обозначим через $\omega(x)$, а при правой части 1 – через $q_1(x, a)$. Тогда будем иметь $\chi_1(x) = \pi \omega(x) + \pi c_1 q_1(x, a)$ ($-a < x < a$) и, следовательно, (2.3) можно записать в виде

$$\psi_1(x, y) = \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)} \cos(\lambda(x-s)) d\lambda \quad ((x, y) \in \omega). \quad (2.6)$$

Отсюда по первой формуле условий Коши – Римана (1.1) получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)} \cos(\lambda(x-s)) d\lambda \quad ((x, y) \in \omega).$$

После интегрирования по x этого равенства будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) = & \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)} \sin(\lambda(x-s)) d\lambda + \\ & + p_1(y) \quad ((x, y) \in \omega), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $p_1(y)$ – пока произвольная функция. Отсюда

$$\varphi_1(x, 0) = \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \sin(\lambda(x-s)) \frac{d\lambda}{\lambda} + p_1(0) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2.8)$$

Приняв во внимание значение второго интеграла (разрывного интеграла Дирихле), обсудим следующие случаи: 1) $-\infty < x < -a$. В этом случае $x-s < 0$ и на основании первого условия граничной задачи (1.2) из (2.8) получим

$$p_1(0) - (\pi Q_1/2) c_1 = Gw_0 + (\pi/2) \Omega_1; \quad Q_1 = \int_{-a}^a q_1(s, a) ds, \quad \Omega_1 = \int_{-a}^a \omega_1(s) ds. \quad (2.9)$$

2) $a < x < 2$. Тогда $x-s > 0$ и по второму условию граничной задачи (1.2) из (2.8) получим

$$p_1(0) + (\pi Q_1/2) c_1 = -(\pi/2) \Omega_1. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) находим

$$p_1(0) = Gw_0/2, \quad c_1 = -(\pi \Omega_1 + w_0 G)/\pi Q_1. \quad (2.11)$$

Отметим, что если второе граничное условие задачи (1.2) заменить условием $\varphi_1(x, -0) = -w_0 G (a < x < \infty)$, то вместо (2.11) будем иметь $p_1(0) = 0$, $c_1 = -(\pi \Omega_1 + 2w_0 G)/\pi Q_1$.

Продолжая задачу определения функции $\varphi_1(x, y)$, обратимся ко второму условию Коши – Римана (1.1). Тогда по (2.6) и (2.7) можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = & \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)} \sin(\lambda(x-s)) d\lambda + p_1'(y) = \\ = & -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{ch(\lambda H)} \sin(\lambda(x-s)) d\lambda \quad ((x, y) \in \omega). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $p_1'(y) = 0 \Rightarrow p_1(y) \equiv const \Rightarrow p_1(y) \equiv p_1(0) = Gw_0/2$.

Следовательно, окончательно будем иметь

$$\varphi_1(x, y) = \int_{-a}^a [\omega_1(s) + c_1 q_1(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)} \sin(\lambda(x-s)) d\lambda + \frac{Gw_0}{2} \quad ((x, y) \in \omega).$$

Обращаясь к граничным задачам (1.4) и (1.5), совершенно аналогичным образом придем к следующему определяющему ИУ:

$$\int_{-a}^a \ln \left(1 / 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi |x-s|}{2H} \right) \right) \chi_2(s) ds = h_2(x) = \pi h(x) + \pi c_2 q_2(x, a), \quad h(x) = \int_{-a}^x f(s) ds. \quad (2.12)$$

Обозначим, как выше, решение ИУ (2.12) при правой части $h(x)$ через $\omega_2(x)$, а при правой части 1 – через $q_2(x, a)$. Тогда будем иметь $\chi_2(x) = \pi \omega_2(x) + \pi c_2 q_2(x, a)$ ($-a < x < a$) и

$$\begin{aligned} \psi_2(x, y) &= \int_{-a}^a [\omega_2(s) + c_2 q_2(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{ch(\lambda(y+H))}{\lambda sh(\lambda H)} \cos(\lambda(x-s)) d\lambda; \quad ((x, y) \in \omega); \\ \varphi_2(x, y) &= \int_{-a}^a [\omega_2(s) + c_2 q_2(s, a)] ds \int_0^\infty \frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda sh(\lambda H)} \sin(\lambda(x-s)) d\lambda; \end{aligned}$$

$$p_2(0) = 0, \quad c_2 = -(\pi \Omega_2 + 2Gw_0)/\pi Q_2; \quad \Omega_2 = \int_{-a}^a \omega_2(s) ds; \quad Q_2 = \int_{-a}^a q_2(s, a) ds,$$

где приняты соответствующие первой граничной задаче обозначения.

3. Приступив к решению ИУ (2.5) и (2.12), сначала в них положим

$$\begin{aligned} \xi &= \pi x/H, \quad \eta = \pi s/H; \quad \alpha = \pi a/H; \\ \chi_k^0(\xi) &= (H/\pi) \chi_k(H\xi/\pi); \quad h_k^0(\xi) = h_k(H\xi/\pi) \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

В результате они примут, соответственно, вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \operatorname{cth} \left(\frac{|\xi - \eta|}{4} \right) \chi_1^0(\eta) d\eta = h_1^0(\xi); \quad (3.1)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left(1 / 2 \operatorname{sh} \left(\frac{|\xi - \eta|}{2} \right) \right) \chi_2^0(\eta) d\eta = h_2^0(\xi); \quad (-\alpha < \xi < \alpha); \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} h_k^0(\xi) &= \pi h(H\xi/\pi) + \pi c_k; \quad \chi_k^0(\xi) = \pi \omega_k^0(\xi) + \pi c_k q_k^0(\xi, \alpha); \\ \omega_k^0(\xi) &= \omega_k(H\xi/\pi) \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Здесь $q_1^0(\xi, \alpha)$ и $q_2^0(\xi, \alpha)$ – решения, соответственно, ИУ

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \operatorname{cth} \left(\frac{|\xi - \eta|}{4} \right) q_1^0(\eta, \alpha) d\eta = 1; \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left(1 / 2 \operatorname{sh} \left(\frac{|\xi - \eta|}{2} \right) \right) q_2^0(\eta, \alpha) d\eta = 1.$$

Эти функции даются формулами [11] (с. 245)

$$\begin{aligned} q_1^0(\xi, \alpha) &= \left[\pi Q_{-1/2}(ch\alpha) \sqrt{2(ch\alpha - ch\xi)} \right]^{-1}; \\ q_2^0(\xi, \alpha) &= \pi^{-1} M_0(\alpha) ch(\xi/2) [2(ch\alpha - ch\xi)]^{-1/2}; \quad M_0(\alpha) = [\ln(1/sh(\alpha/2))]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $Q_{-1/2}(x)$ – функция Лежандра второго рода. В прежних переменных будем иметь

$$\begin{aligned} q_1(x, \alpha) &= \left[H Q_{-1/2}(ch(\pi a/H)) \sqrt{2(ch(\pi a/H) - ch(\pi x/H))} \right]^{-1}; \\ q_2(x, \alpha) &= (M(a)/H) ch(\pi x/2H) \{ 2[ch(\pi a/H) - ch(\pi x/H)] \}^{-1/2}; \\ M(a) &= -(\ln(sh(\pi a/2H)))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь при помощи (3.4) можно вычислить величины Q_1 и Q_2 :

$$Q_1 = P_{-1/2}(ch(\pi a/H)) / Q_{-1/2}(ch(\pi a/H)); \quad Q_2 = M(a) = [\ln(1/sh(\pi a/2H))]^{-1},$$

где $P_{-1/2}(x)$ – функция Лежандра первого рода.

Решения ИУ (3.1) и (3.2) можно построить различными методами. На основании (3.3) их решения можно получить по формулам М.Г. Крейна [11] (гл. IV, §8). Далее дифференцированием обеих частей (3.1) и (3.2) по ξ приходим к следующим сингулярным интегральным уравнениям:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \chi_1^0(\eta) d\eta / sh((\eta - \xi)/2) = 2[h_1^0(\xi)]'; \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} ch((\eta - \xi)/2) \chi_2^0(\eta) d\eta = 2[h_2^0(\xi)]';$$

формулы решений которых приведены в [12].

Решения этих ИУ можно найти также методом ортогональных многочленов. А именно, решение ИУ (3.1) этим методом можно получить при помощи установленных в работе [13] спектральных соотношений. Чтобы этим же методом решить и ИУ (3.2), известные спектральные соотношения [14]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = \begin{cases} \frac{1}{n} T_n(x) & (n=1, 2, \dots); \\ \ln 2 & (n=0), \end{cases} \quad (-1 < x < 1) \quad (3.5)$$

где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода, преобразуем в соответствующие соотношения для ядра ИУ (3.2). С этой целью в (3.5) при $n = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) положим

$$x = sh(\xi/2)/sh(\alpha/2), \quad s = sh(\eta/2)/sh(\alpha/2) \quad (-\alpha < \xi, \eta < \alpha),$$

а при $n = 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) –

$$x = th(\xi/2)/th(\alpha/2), \quad s = th(\eta/2)/th(\alpha/2) \quad (-\alpha < \xi, \eta < \alpha).$$

После несложных преобразований приходим к следующим спектральным соотношениям:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left[1 / 2sh \left(\frac{|\xi - \eta|}{2} \right) \right] \frac{T_{2m} \left(\frac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)} \right) ch(\eta/2) d\eta}{\sqrt{2(ch\alpha - ch\eta)}} = \begin{cases} \frac{1}{2m} T_{2m} \left(\frac{sh(\xi/2)}{sh(\alpha/2)} \right) & (m=1, 2, \dots); \\ \ln \frac{1}{sh(\alpha/2)} & (m=0); \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left[1 / 2sh \left(\frac{|\xi - \eta|}{2} \right) \right] \frac{T_{2m+1} \left(\frac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)} \right) d\eta}{ch(\eta/2) \sqrt{2(ch\alpha - ch\eta)}} = \frac{T_{2m+1} \left(\frac{th(\xi/2)}{th(\alpha/2)} \right)}{(2m+1)ch(\alpha/2)} \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

При этом условия ортогональности многочленов Чебышева первого рода с указанными видоизмененными аргументами имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} T_{2m} \left(\frac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)} \right) T_{2n} \left(\frac{sh(\eta/2)}{sh(\alpha/2)} \right) \frac{ch(\eta/2) d\eta}{\sqrt{2(ch\alpha - ch\eta)}} = \begin{cases} \pi & (m=n=0); \\ \frac{\pi}{2} & (m=n \neq 0); \\ 0 & (m \neq n); \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} T_{2m+1} \left(\frac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)} \right) T_{2n+1} \left(\frac{th(\eta/2)}{th(\alpha/2)} \right) \frac{d\eta}{ch(\eta/2) \sqrt{2(ch\alpha - ch\eta)}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} ch(\alpha/2) & (m=n); \\ 0 & (m \neq n). \end{cases} \quad (3.9)$$

Далее решение ИУ (3.2) разложим на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\begin{aligned} \chi_2^0(\xi) &= \chi_+(\xi) + \chi_-(\xi), \quad h_2^0(\xi) = h_+(\xi) + h_-(\xi); \\ \chi_{\pm}(-\xi) &= \pm \chi_{\pm}(\xi); \quad h_{\pm}(-\xi) = \pm h_{\pm}(\xi). \end{aligned}$$

В результате приходим к следующим ИУ:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left[1 / 2sh \left(\frac{|\xi - \eta|}{2} \right) \right] \chi_{\pm}(\eta) d\eta = h_{\pm}(\xi) \quad (-\alpha < \xi < \alpha). \quad (3.10)$$

Теперь решения ИУ (3.10) представим в форме бесконечных рядов

$$\chi_+(\xi) = \frac{ch(\xi/2)}{\sqrt{2(ch\alpha - ch\xi)}} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^+ T_{2m} \left(\frac{sh(\xi/2)}{sh(\alpha/2)} \right); \quad (-\alpha < \xi < \alpha) \quad (3.11)$$

$$\chi_-(\xi) = \frac{1}{ch(\xi/2) \sqrt{2(ch\alpha - ch\xi)}} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^- T_{2m+1} \left(\frac{th(\xi/2)}{th(\alpha/2)} \right) \quad (3.12)$$

с неизвестными коэффициентами $X_m^{\pm}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Подставляя (3.11) в ИУ (3.10) со знаком “+”, а (3.12) – в ИУ (3.10) со знаком “-” и воспользовавшись спектральными соотношениями (3.6) и (3.7), а также условиями ортогональности (3.8) и (3.9), после простых преобразований находим

$$\begin{aligned} X_0^+ &= -h_0^+ / \pi^2 \ln sh(\alpha/2); \quad X_m^+ = 4mh_m^+ / \pi^2 \quad (m = 1, 2, \dots); \\ X_m^- &= 2\pi^{-2} (2m+1) ch(\alpha/2) h_m^- \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} h_m^+ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} h_+(\xi) \frac{T_{2m}(sh(\xi/2)/sh(\alpha/2)) ch(\xi/2) d\xi}{\sqrt{2(ch\alpha - ch\xi)}} \\ h_m^- &= \int_{-\alpha}^{\alpha} h_-(\xi) \frac{T_{2m+1}(th(\xi/2)/th(\alpha/2)) d\xi}{ch(\xi/2) \sqrt{2(ch\alpha - ch\xi)}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Таким образом, получено точное решение ИУ (3.2) в форме бесконечных рядов (3.11) и (3.12) с коэффициентами (3.13).

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitarian39@rambler.ru

**Մ.Ս. Григорян, Մ.Ս. Մկրտչյան,
член-корреспондент НАН РА С.М. Мхитарян**

**О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя
при антиплоской деформации**

Рассматриваются две смешанные граничные задачи математической теории упругости для упругого слоя при антиплоской деформации. Такие задачи встречаются в геомеханике в расчетах горных массивов, подверженных сдвиговым деформациям. Решения обсуждаемых задач сводятся к решениям интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическими ядрами, допускающих точные решения.

**Մ. Ս. Գրիգորյան, Մ. Ս. Մկրտչյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան**

**Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար
խառը եզրային երկու խնդիրների մասին**

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար դիտարկվում են առաձգականության մաթեմատիկական տեսության խառը եզրային երկու խնդիրներ: Այդպիսի խնդիրներ հանդիպում են գեոմեխանիկայում՝ սահքի դեֆորմացիաների ենթարկված լեռնային զանգվածների հաշվարկներում: Քննարկվող խնդիրների լուծումները հանգեցվում են ճշգրիտ լուծումներ թույլատրող սիմետրիկ կորիզներով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծումներին:

**M. S. Grigoryan, M. S. Mkrtchyan,
corresponding member of NAS RA S.M. Mkhitaryan**

**On Two Mixed Boundary Value Problems for an Elastic
Layer under Antiplane Deformation**

This paper considers two mixed boundary problems of mathematical theory of elasticity for the elastic layer at antiplane deformation. Such problems occur in geomechanics calculations of mountainous masses, subject to shear deformations. Problem of considered solutions reduce Fredholm first kind integral equations solutions for symmetric kernels that permit to obtain exact solutions.

Литература

1. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехтеориздат. М.—Л. 1949. 270 с.

2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. Наука. 1980. 304 с.
3. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. Наука. 1974. 456 с.
4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М. Мир. 1989. 509 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
6. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М. Физматлит. 2001. 670 с.
7. *Фильчаков П.Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т. 1–2. Киев. Изд-во АН УССР. 1959–1960. 308–256 с.
8. *Mkhitaryan M.S.* - Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2011. V. 155. P. 55-72.
9. *Мхитарян С.М., Григорян М.С.* В кн.: Избр. труды междунар. научн. конф. «Образование, наука и экономика в вузах». 26–30 сентября. Ереван. 2012. С. 134–144.
10. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Наука. 1971. 1108 с.
11. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М. Наука. 1967. 508 с.
12. *Чибрикова Л.И.* - Уч. зап. Казанского гос.ун-та. 1962. Т. 122. Кн. 3. С. 95-125.
13. *Мхитарян С.М.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 6. С. 3 – 18.
14. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М. Наука. 1982. 344 с.

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

А. С. Мартиросян

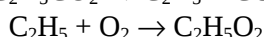
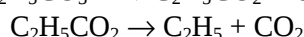
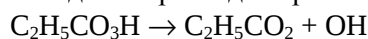
О возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом

(Представлено академиком НАН РА И. А. Варданян 20/X 2016)

Ключевые слова: пероксидные радикалы, поверхность, альдегид.

В настоящее время возможность гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с альдегидом и углеводородами не вызывает сомнения [1-4]. Однако прямых сведений о подобной реакции в отношении радикалов $C_2H_5O_2$ в литературе не приводится. В представленной работе сделана попытка отыскать подобные доказательства в кинетических данных, полученных при изучении влияния природы поверхности (H_3BO_3 , KCl) реакционного сосуда на процесс окисления пропионового альдегида [5].

Известно, что эта реакция протекает по цепному вырожденно-разветвленному механизму, и стадией разветвления при относительно низких температурах является гетерогенный радикальный распад перпропионовой кислоты, а ведущими активными центрами – радикалы $C_2H_5CO_3$. Со временем развития процесса окисления возрастает вклад радикалов $C_2H_5O_2$, образующихся вследствие распада перкислоты:



В связи с этим на рис. 1 и 2 представлены кинетические кривые расходования пропионового альдегида и накопления некоторых продуктов реакции – пероксидных радикалов, перпропионовой кислоты и гидропероксида $C_2H_5O_2H$, полученные в вышеуказанных двух реакторах [5].

В табл. 1 представлены значения концентраций ряда продуктов реакции при температуре $291^\circ C$ и времени реакции 1 мин в реакторах, обработанных борной кислотой и хлористым калием [5], необходимых для решения поставленной в данной работе задачи.

Согласно данным [5] баланс по углероду с учетом остальных продуктов реакции – C_2H_5OH , CO и CH_3CHO соблюдается с точностью до 10-15%.

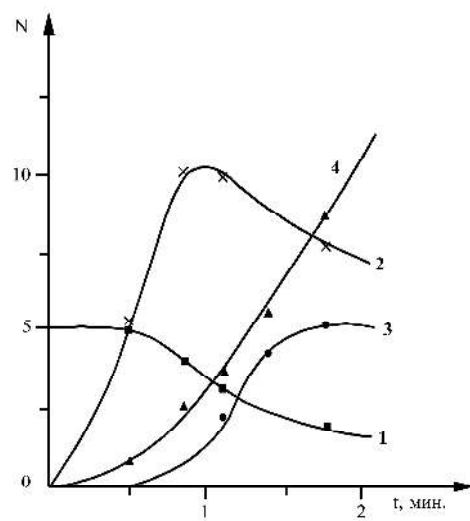


Рис. 1. Кинетические кривые расходования C_2H_5CHO (1) и накопления пероксидных радикалов (2), RCO_3H (3), RO_2H (4) при $T=291^\circ C$ в реакторе, обработанном борной кислотой. $[C_2H_5CHO] = N \times 10^{17}$, $[радикал] = N \times 10^{12}$, $[RCO_3H]$ и $[RO_2H] = N \times 10^{16}$ част.см $^{-3}$.

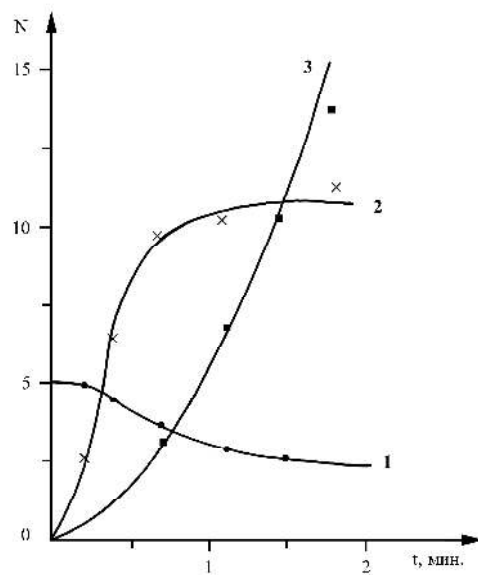


Рис. 2. Кинетические кривые расходования C_2H_5CHO (1) и накопления пероксидных радикалов (2), RO_2H (3) при $T=291^\circ C$ в реакторе, обработанном KCl. $[C_2H_5CHO] = N \times 10^{17}$, $[радикал] = N \times 5 \cdot 10^{11}$, $[RO_2H] = N \times 2 \cdot 10^{16}$ част.см $^{-3}$.

Таблица 1

Значения концентраций продуктов реакции при температуре 291°С и времени реакции t=1 мин в реакторах, обработанных борной кислотой и хлористым калием; $[C_2H_5CHO]_0 = 5 \times 10^{17}$ част/см²

	KCl (част/см ³)	H ₃ BO ₃ (част/см ³)
$[C_2H_5CHO]_t$	3×10^{17}	3.6×10^{17}
$[RCO_3H]$	-	1.5×10^{16}
$[RO_2H]_t$	1.07×10^{17}	3.2×10^{16}
$[RCO_3]_t$	5.2×10^{12}	1.02×10^{13}
$[C_2H_4]_t$	2.3×10^{16}	-
$[CO_2]_t$	2.04×10^{17}	3×10^{16}

Из данных следует, что характеристики процесса сильно зависят от природы поверхности. Это касается как состава продуктов реакции, так и абсолютных значений концентраций продуктов.

Обращает на себя внимание отсутствие $C_2H_5CO_3H$ в реакторе, обработанном KCl. В данном случае это связано с большей скоростью гетерогенного радикального распада перкислоты на поверхности KCl по сравнению с поверхностью H₃BO₃ [6]. Об этом свидетельствует также высокий выход CO₂, образующегося при распаде перкислоты в реакторе, обработанном KCl.

В связи с этим процесс в реакторе, обработанном KCl, начинается раньше, чем в реакторе, обработанном H₃BO₃, и уже при t=1 мин расходование альдегида превышает таковое в реакторе, обработанном борной кислотой, в 1.4 раза.

Примечательно, что концентрация пероксидных радикалов в объеме меньше примерно в 2 раза. Этот факт является четким указанием на то, что значительная часть альдегида в реакторе, обработанном KCl, расходуется на поверхности реактора. Причем выход гидропероксида почти в 3 раза выше, чем в реакторе, обработанном борной кислотой.

По всей видимости, значительный вклад в образование гидропероксида дает гетерогенное взаимодействие радикалов $C_2H_5O_2$ с пропионовым альдегидом. Наличие этилена в реакторе, обработанном KCl, и отсутствие его в реакторе, обработанном борной кислотой, также указывает на большее количество образовавшихся радикалов C_2H_5 в первом реакторе. При этом надо иметь в виду, что реакции радикалов C_2H_5 являются источником как этилена, так и радикалов $C_2H_5O_2$.

Что касается поверхности H₃BO₃, то поскольку известно, что скорость гетерогенного радикального распада перпропионовой кислоты на ней намного меньше, чем на поверхности KCl, то ясно, что на поверхности H₃BO₃ количество образовавшихся радикалов $C_2H_5O_2$ будет значительно меньше. Поэтому меньше и выход гидропероксида.

Из сравнения кинетических кривых накопления пероксидных радикалов в обоих реакторах и учитывая значительные количества $C_2H_5CO_3H$ в

реакторе, обработанном борной кислотой, следует, что соотношение концентраций радикалов $C_2H_5CO_3$ и $C_2H_5O_2$ больше в реакторе, обработанном борной кислотой.

Анализ кинетических данных окисления пропионового альдегида в зависимости от природы поверхности с достаточной достоверностью свидетельствует о возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом – C_2H_5CHO . Сделано заключение, что взаимодействие пероксидных радикалов с органическим соединением носит более общий характер и, возможно, не только для радикалов $C_2H_5O_2$.

Институт химической физики им. А. Н. Налбандяна НАН РА

А. С. Мартirosян

О возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом

Сделана попытка отыскать доказательства возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом в кинетических данных, полученных при изучении влияния природы поверхности (H_3BO_3 , KCl) реакционного сосуда на процесс окисления пропионового альдегида. Эти данные с достаточной достоверностью свидетельствуют о возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $C_2H_5O_2$ с альдегидом – C_2H_5CHO . Сделано заключение, что взаимодействие пероксидных радикалов с органическим соединением носит более общий характер и возможно не только для радикалов CH_3O_2 .

Ա. Ս. Մարտիրոսյան

$C_2H_5O_2$ ռադիկալների ալդեհիդի հետ հետերոգեն փոխազդեցության հնարավորության մասին

Փորձ է արվել փնտրել կինետիկ տվյալներում՝ ստացված պրոպիոնալդեհիդի օքսիդացման պրոցեսում ռեակցիոն անոթի մակերևույթի բնույթի (H_3BO_3 , KCl) ազդեցության ուսումնասիրության ժամանակ, ապացույցներ ալդեհիդի հետ $C_2H_5O_2$ ռադիկալների հետերոգեն փոխազդեցության հնարավորության մասին: Ստացված տվյալները բավարար հավաստիությամբ վկայում են $C_2H_5O_2$ ռադիկալների ալդեհիդի՝ C_2H_5CHO -ի հետ հետերոգեն փոխազդեցության հնարավորության մասին: Եզրակացություն է արվել, որ օրգանական միացության հետ պերօքսիդային ռադիկալների փոխազդեցությունը կրում է ավելի ընդհանուր բնույթ և հնարավոր է ոչ միայն CH_3O_2 ռադիկալների համար:

A. S. Martirosyan

About the Possibility of the Heterogeneous Interaction of $C_2H_5O_2$ Radicals with Aldehyde

An attempt to find evidence of the possibility of the heterogeneous interaction of $C_2H_5O_2$ radicals with aldehyde in the kinetic data, obtained when studying the influence of the nature of the surface (H_3BO_3 , KCl) of the reaction vessel on the propionaldehyde

oxidation process is made. These data are sufficiently reliable evidence of the possibility of the heterogeneous interaction of $C_2H_5O_2$ radicals with aldehyde- C_2H_5CHO . It is concluded that the interaction between peroxide radicals with an organic compound is more general and is possible not only for CH_3O_2 radicals.

Литература

1. *Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* – International Journal of Chemical Kinetics. 2004. V. 36 №1 P. 591-595,
2. *Арустамян А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112. №2. С. 194-199.
3. *Vardanyan I. A., Manucharova L. A., Jalali H. A., Tsarukyan S. V.* – Chem. J. of Armenia 2012. V. 65. №1. P. 132-136.
4. *Vardanyan I. A., Arustamyan A. M., Martirosyan A. S., Tsarukyan S. V.* – Russian Journal of Physical Chemistry A. 2016. V. 90. №4. P. 744-747.
5. *Оганесян Эм. А.* Влияние природы и состояния поверхности реакционного сосуда на кинетику окисления пропионового альдегида. Канд. дис. ИХФ АН АрмССР, Ереван. 1978.
6. *Багдасарян Г. О., Оганесян Эм. А., Варданян И. А., Сачян Г. А., Налбандян А. Б.* – Арм. хим. журн. 1976. Т. 29. №11. С. 899-903.

ХИМИЯ

УДК 541.138:512.952

С. А. Саргисян¹, К. С. Маргарян², А. С. Саркисян²

Одностадийный метод формирования металлсодержащих полимерных покрытий

(Представлено чл.-кор. НАН РА С.П. Давтяном 26/X 2016)

Ключевые слова: *нанокомпозиты, полимеры, электрохимические полимерные покрытия, платина, электроокисление.*

Нанокомпозиты, содержащие наночастицы металлов, обладают уникальными свойствами и перспективны для медицины, нанофотоники, электроники и катализа [1-6]. Разработка новых методов синтеза гибридных полимер/металл нанокомпозитов является актуальным направлением в химии высокомолекулярных соединений и физической химии.

Свойства наночастиц металла (размерность, распределение, стабильность и др.) существенно зависят как от природы полимера, так и от условий формирования наночастиц в гибридном материале.

Основными способами формирования композитов полимер/наночастицы металлов являются химическая или электрохимическая полимеризация металлсодержащих мономеров или включение частиц благородных металлов (Pt, Rh, Pd, Au, Ag) в электропроводящие полимеры химическим либо электрохимическим методом.

Однако такие технологии являются многостадийными. В таких композитах металл химически связан с молекулами полимера, что может приводить к снижению активности катализатора.

Одностадийный электрохимический способ разработан в работах [7, 8]. Но для Pt- и золотосодержащих полимерных покрытий способ не очень эффективен. Недавно нами [9] были синтезированы серебросодержащие полимерные покрытия на основе 1-винилимидазола и акриламида в присутствии AgNO_3 . Однако электролиз той же мономерной системы в присутствии $\text{H}_2\text{PtCl}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ не дал удовлетворительных результатов: снижалась скорость формирования полимерных пленок. Добавление вещества, которое может вызывать появление интерполимерных комплексов с обра-

зовавшимся сополимером 1-винилимидазола (ВИ) с акриламидом (АА), позволит ускорить процесс пленкообразования.

Таким веществом оказался хитозан, который образует интерполимерные комплексы за счет протонированных амидных групп. Добавление хитозана в композицию, состоящую из ВИ-АА- $\text{H}_2\text{PtCl}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и инициатора полимеризации пероксидного типа (например 4-tert-бутилперокси-4-оксобутановой кислоты), при потенциале $-0,9 \div -1,1$ В(х.с.э.) на чистом железном и стальном электродах, приводило к образованию покрытия сложного фазового состава с включением платины в полимерную матрицу. Методом сканирующей электронной микроскопии и элементным анализом установлено, что содержание платины в пленке возрастает с увеличением концентрации хлорплатината от 2 до 8 ммоль/л. Снятые рентгенограммы (рис. 1) показывают, что включенная в пленку Pt является рентгеноаморфной как в присутствии хитозана (кр. 1), так и без него (кр. 2).

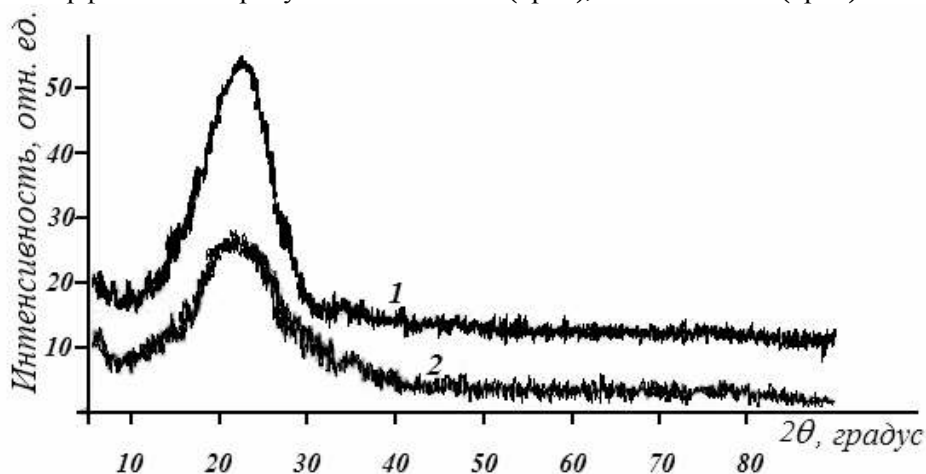


Рис. 1. Рентгенограммы полимеров с частицами платины: 1 – в присутствии хитозана, 2 – без хитозана

В ИК-спектрах сформированных пленок обнаружены серия полос поглощения в областях $635, 680, 920 \text{ см}^{-1}$ – плоскостные деформационные колебания имидазольного кольца: $1080, 1280, 1440, 1550 \text{ см}^{-1}$ – скелетное колебание гетерокольца [10], а также исчезновение $\text{C}=\text{C}$ связи винильной группы при 1650 см^{-1} , что свидетельствует о протекании сополимеризации с раскрытием двойной связи.

Металлсодержащие полимерные покрытия были испытаны в качестве катализаторов электрохимического окисления этилового спирта. Сравнение циклических вольтамперограмм (ЦВА) в присутствии этилового спирта, на электроде из чистого железа и на композитном электроде Fe/полимер/Pt, показало, что на чистом железе не происходит электроокисления этилового спирта (кр. 1), тогда как на нанокompозитной пленке наблюдается пик при $E=0.24-0.25$ В, соответствующий окислению этилового спирта (рис. 2). Макромолекулы могут в этом случае не только стабилизиро-

вать дисперсные системы, но и принимать непосредственное участие в их формировании [11].

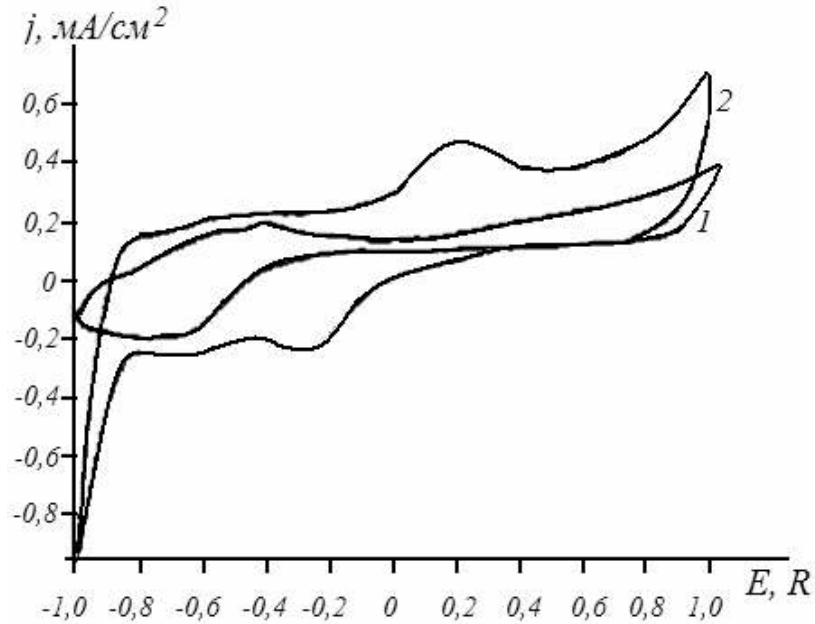


Рис. 2. ЦВА для композитов полимер/платина. Скорость развертки потенциала 100 мВ/с: 1 – на железе, 2 – на нанокompозитной пленке.

Национальный политехнический университет Армении
Ереванский государственный медицинский университет.

С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян

Одностадийный метод формирования металлсодержащих полимерных покрытий

Разработан одностадийный электрохимический метод формирования платиносодержащих нанокompозитных полимерных покрытий на чисто железном и стальном электродах. Исследована каталитическая активность синтезированных пленок на примере электроокисления этилового спирта.

Ս. Հ. Մարգարյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Մարգարյան

Մետաղ պարունակող պոլիմերային ծածկույթների ձևավորման միափուլ մեթոդ

Մշակվել է մեկ փուլանոց՝ պլատին պարունակող պոլիմերային թաղանթների սինթեզ էլեկտրաքիմիական եղանակով մաքուր երկաթի և պողպատյա էլեկտրոդների

մակերևույթին: Էթանոլի էլեկտրաօքսիդացման օրինակի վրա ցույց է տրվել դրանց էլեկտրակատալիզի ակտիվությունը:

S. H. Sargsyan, K. S. Margaryan, A. S. Sargsyan

One-Step Method for Formation of Metal-Polymer Coatings

The one-step electrochemical method for formation of platinum nano-composite polymer coatings on pure iron and steel electrodes is developed. The catalytic activity of the synthesized films on the example of electrooxidation of ethanol is investigated.

Литература

1. Rao C. N. R., Müller A., Cheetham A. K. The Chemistry of Nanomaterials: Synthesis, Properties and Applications. Wiley, VCH Verlag. 2004. 761 p.
2. Карпов С. В., Слабко В. В. Оптические и фотофизические свойства фрактально-структурированных золей металлов. Новосибирск. Изд-во СО РАН. 2003. 265 с.
3. Крутяков Ю. А., Кудринский А. А., Оленин А. Ю., Лисичкин Г. В. – Успехи химии. 2008. Т. 77. С. 242-269
4. Cao D., Sun L., Wang G., Lv Y., Zhang M. – J. of Electroanalytical Chemistry. 2008. V. 621. P. 31-37.
5. Кондратьев В. В., Бабкова Т. А., Елисеева С. Н. – Электрохимия. 2012. Т. 48. № 2. С. 226-233.
6. Поздняков А.С., Емельянов А.И., Кузнецова Н.П., Ермакова Т.Г., Прозорова Г.Ф. – Изв. АН РФ. 2016. № 2. С. 498-501
7. Саргисян С. А., Маргарян К. С. – ЖОХ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 493-495.
8. Шитовский Е. В., Колзунова Л. Т. In: 4th International Conference NFMHT, 4-6 Jule 2016. Tivat, Montenegro. P. 7-8.
9. Маргарян К. С., Саргисян С. А., Саркисян А. С. – ЖПХ. 2016. Т. 89. Вып. 8. С. 1011-1014.
10. Саргисян С.А., Маргарян К.С., Саркисян А.С. – Хим. журн. Армении. 2012. Т. 65. № 1. С. 126-131
11. Изаак Т. И., Бабкина О. В., Лямина Г. В., Светличный В. А. – Журн. физической химии. 2005. Т. 82. № 12. С. 2341-2347.

БИОХИМИЯ

УДК 619:616-981.48-07:636.4

Г. А. Геворкян, А. М. Акопян, О. А. Мовсесян, А. А. Агабабова

Микробиота кишечника крыс под воздействием амфетамина

(Представленно академиком Ю.Т. Алексаняном 12/VII 2016)

Ключевые слова: *микробиота, кишечно-мозговая ось, морфология, нервная система, толстая кишка, воспалительный процесс.*

Изучение взаимоотношений между кишечником и мозгом, так называемой кишечно-мозговой оси (КМО), по-прежнему актуально. КМО – бинаправленная коммуникативная система, посредством которой мозг модулирует функции желудочно-кишечного тракта (ЖКТ), и наоборот. В основе КМО лежат нейронные, эндокринные и иммунологические механизмы, связанные друг с другом на организменном, органном, клеточном и молекулярном уровне [1].

Взаимоотношения между мозгом и микрофлорой кишечника (микробиота) являются одним из примеров кооперации нервной и иммунной систем, значение которых для организма в норме и при патологии трудно переоценить.

Еще в начале XX в. И. И. Мечников сравнивал микробиоту кишечника с функцией печени, предлагая рассматривать микробиоту кишечника как отдельный орган [2]. Сто лет спустя, в 2006 г., О’Хара и Шанахан также отнесли микробиоту к дискретному органу [3].

В настоящее время для обозначения всего генетического материала, содержащегося в микробиоте, принят термин «микробиом» [4, 5]. Численность генов микробиома на три порядка выше собственных генов организма человека, что послужило основанием для рассмотрения совокупности всех микроорганизмов в качестве «надорганизма» [6], суперорганизма [7]. Микробиоту кишечника можно отнести к важному элементу эндокринной системы, выполняющей ферментативную трансформацию сложных стероидных соединений и производных азота, относимых к классу прогормонов. Установлена связь между активностью микробиоты и функциональными особенностями нервной системы, которая может реализо-

ваться через взаимодействие низкомолекулярных метаболитов бактерий, входящих в состав нормального микробиоценоза с чувствительными нервными окончаниями в области синапса их с эпителиальными клетками слизистой. Сигнал в результате такого взаимодействия передается в центральную нервную систему для формирования соответствующих реакций всего организма [6, 8].

Желудочно-кишечный тракт иннервируется сложной и обширной периферической нервной системой. Кишечная нервная система организована как комплексная структура, которая контролирует перистальтику, кровоснабжение, потребление пищи, секрецию, иммунологические и воспалительные процессы в кишечнике.

Целью настоящей работы явилось исследование влияния с комплексных позиций d-амфетамина (Sigma, St. Louis, Mo.) как реакционного психоактивного стимулятора ЦНС на организм крыс, в частности на отдельные участки мозга, КМО, кишечную микробиоту.

Опыты проводились в динамике, но мы остановимся на отдельных конкретных, повторяющихся результатах.

Материалы и методика. Опыты осуществляли с соблюдением правил содержания и обращения с животными, изложенных в Директивах парламента и Совета Европейского Союза от 22.09.2010 (2010/63/ЕС), одобренных комитетом по биомедицинской этике при Институте биохимии им. Г. Бунятяна НАН РА. Эксперименты проводили на половозрелых 3-месячных белых крысах-самцах линии Вистар массой 100-140 г, которые содержались в виварии в условиях естественного освещения и свободного доступа воды и пищи. Животные были разделены на группы (по 18 животных в группе): I – контрольная группа (здоровые крысы), II и III – опытные группы, в которых животные ежедневно (кроме выходных) в течение 9 дней получали одноразовую внутрибрюшинную инъекцию (0.2 мл; 18 инъекций) d-амфетамина (Sigma, St. Louis, Mo.) в возрастающих нетоксических дозах: 4 мг/кг (II группа) и 6 мг/кг. Животных исследовали сразу и через 3 недели после прекращения введения АМРН. Поведение животных, включая локомоторную и ориентировочно-исследовательскую активность, оценивали в тестах «открытое поле» (ОП) и «приподнятый крестообразный лабиринт» (ПКЛ). Крысу помещали в ОП и в течение первых 3 мин наблюдения визуально регистрировали двигательную активность (горизонтальную и вертикальную), число актов очищения (груминг) и дефекаций [9]. Сразу после теста ОП животных помещали на открытую площадку ПКЛ и в течение первых 3 мин регистрировали число заходов в открытые и закрытые рукава, а также число оценок «риска» (число свешиваний с открытых рукавов лабиринта), стоек, груминга и дефекаций [10].

Результаты и обсуждение. Были проделаны морфологические исследования, материалом для которых служили резецированные ткани мозга размером около 0.6x0.6x0.4 см и ткани толстой кишки, взятые у экспериментальных крыс. Морфологическое исследование материала проводилось по общепринятой схеме с последующей заливкой в парафин и пригото-

нием серийных срезов. Срезы окрашивали гематоксилин-эозином. Обзорная характеристика срезов давалась при увеличении микроскопа с окуляром E-PL-10 и объективом A-Plan 10/025 и A-Plan20/0,25.

При изучении мозговой ткани у крыс отмечались отек, пролиферация нейроцитов, появление атипичных клеток (рис. 3), в некоторых случаях незначительные кровоизлияния (рис.1). При гистологическом исследовании препаратов мозга наблюдались дистрофические изменения ткани (рис. 2). Что касается кишечника, была выявлена очаговая пролиферация желез слизистой толстой кишки. При такой морфогистохимической картине в условиях амфетаминового воздействия естественно возникает вопрос, что же происходит на другом конце оси КМО, в микробиоте кишечника, как реагируют условно патогенные и провоспалительные микробы, есть ли изменения в индигенной составляющей микробиоты, возможны ли варианты транслокации микробов.

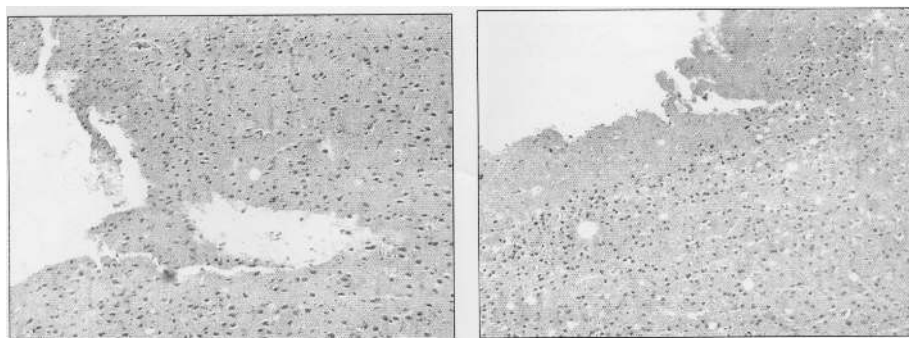


Рис. 1. Слабо выраженный отек, незначительное кровоизлияние. Окраска гематоксилин-эозином. X100.

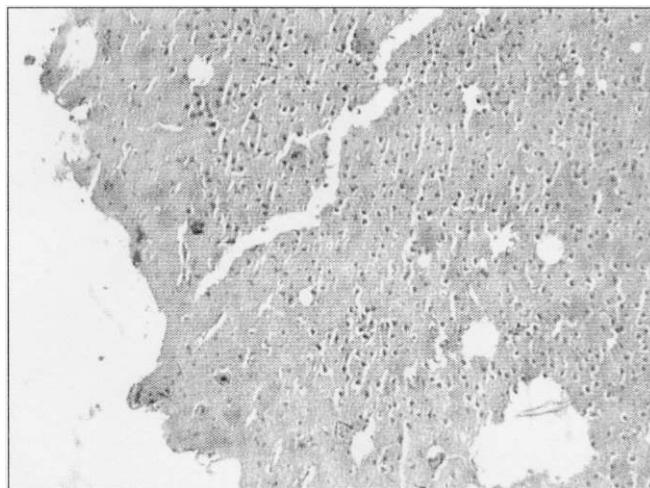


Рис. 2. Дистрофически измененная ткань мозга, отек. Окраска гематоксилин-эозином. X200.

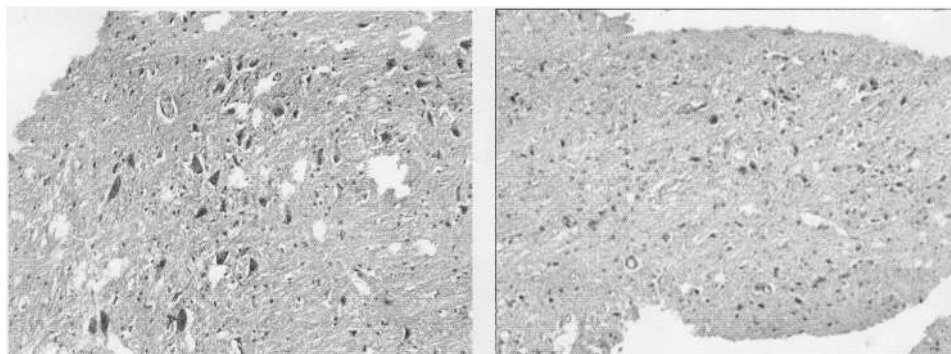


Рис. 3. Пролиферация нейроцитов, появление атипичных клеток. Окраска гематоксилин-эозином. X100.

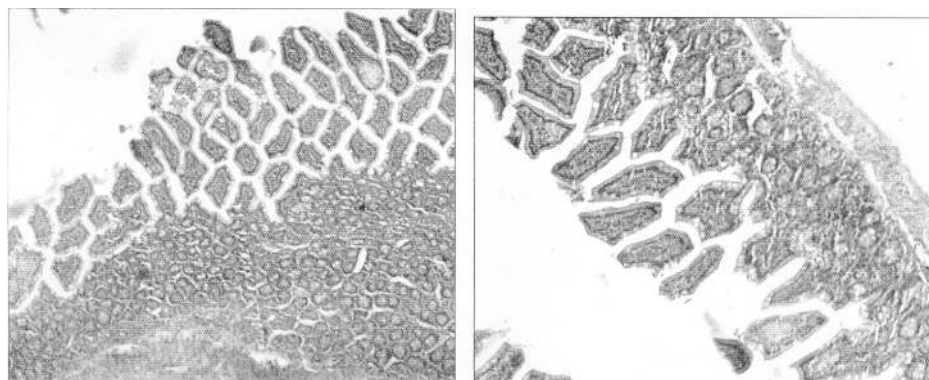


Рис. 4. Очаговая пролиферация желез слизистой толстой кишки. Окраска гематоксилин-эозином. X100.

Последующая цель данной работы – выявление некоторых оппортунистических микробов, в частности *E. coli*., провоспалительных *St. aureus*, соответственно грибов рода *Candida*.

Бактериологические исследования проводили согласно методическим рекомендациям по микробиологической диагностике заболеваний, вызываемых энтеробактериями [4]. Выделяли следующие микроорганизмы: кишечную палочку (*E. coli*), золотистый стафилококк (*St. aureus*) и дрожжевые грибки рода *Candida* (*Candida albicans*). Количество выделенных микроорганизмов выражали в ед. КОЕ/г массы биологического материала. Брались смывы с мозга и содержимое толстой кишки.

На пике введения доз амфетамина наблюдались изменения и в поведении животных: истощенный вид (при нормальном питании) и сверхактивность. При вскрытии брюшина была тонкая, цианичная. В смывах головного мозга крыс были обнаружены единичные колонии *E. coli* и грибов рода *Candida albicans*. В крови на 10-й день после инкубации также обнаружены отдельные колонии кишечной палочки. Что касается каловых

масс, из них высевался золотистый стафилококк, до $(4.4 \pm 0.3) \times 10^5$, кроме того наблюдались гемолизированные *E. coli* $(2.1 \pm 0.5) \times 10^2$. Резко увеличилось количество кишечных штаммов *E. coli* от нормы $(3.04 \pm 0.2) \times 10^3$ до $(4.5 \pm 0.6) \times 10^6$. Грибки рода *C. albicans* также отмечались в значительном количестве, норма $(1.8 \pm 0.3) \times 10^3$, высевалось $(5.6 \pm 0.8) \times 10^3$.

В настоящее время известно, что депрессия сопровождается активацией системы воспаления и что провоспалительные цитокины и ЛПС могут индуцировать депрессивные симптомы [8].

Нарушения проницаемости слизистой ЖКТ приводило к повышенной транслокации бактерий и ЛПС, определяя важнейшую роль в патофизиологии депрессии [1, 11]. В наших исследованиях налицо изменения патофизиологического состояния животных, наличие воспалительного процесса, о чем свидетельствуют значительное количество *St. aureus*, резкое возрастание количества *E. coli*, соответственно, увеличение выброса количества ЛПС (эндотоксина) в кровь, кроме того, отмечается явление транслокации *E. coli*, о чем свидетельствует наличие её в крови и головном мозге. Состояние макроорганизма накладывает определенный отпечаток на характер формирующихся бактериально-хозяйинных взаимодействий, и, на наш взгляд, симбиотическая поливалентность *E. coli* в первую очередь обусловлена выраженным полиморфизмом данных бактерий по комплексу биологических характеристик.

Роль микрофлоры кишечника в развитии воспалительных заболеваний кишечника (ВЗК), атеросклерозе и ожирении, стала очевидной благодаря исследованиям с использованием ОМИК-технологий [5, 12]. Изменение состава кишечной флоры способно спровоцировать симптомы раздраженного кишечника, при котором наблюдается не только увеличение количества некоторых индигенных микробов, в частности *Veilonella* и *Lactobacillus*, но также превышение уровня уксусной и пропионовой кислот, наличие которых коррелировало с тяжестью болезни, нарушением качества жизни и появлением негативных эмоций, в том числе депрессией [8]. Кишечная флора оказывает влияние на сенсорные, моторные и иммунные функции кишечника а также взаимодействует с высшими нервными центрами.

Коммуникации кишечника и мозга не ограничиваются потреблением пищи и насыщением, синтезом орексигенных и анорексигенных гормонов. Эти взаимоотношения, во многом зависящие от микрофлоры кишечника, формируют целостность барьерной функции кишечника и мозга, что реализуется с участием микроглии астроцитов [1, 2]. Барьерная дисфункция ЖКТ не только способствует развитию патологии кишечника, но также может приводить к мозговым нарушениям.

Институт биохимии им. Г. Бунятяна НАН РА

Գ. Ա. Գեորգյան, Ա. Մ. Ակոբյան, Օ. Ա. Մովսեսյան, Ա. Ա. Ագաբովա

Микробиота кишечника крыс под воздействием амфетамина

Кишечная флора оказывает влияние на сенсорные, моторные и иммунные функции кишечника, а также взаимодействует с высшими нервными центрами. Эти взаимоотношения во многом зависят от микрофлоры кишечника и формируют целостность барьерной функции кишечника и мозга. Барьерная дисфункция желудочно-кишечного тракта не только способствует патологии кишечника, но также может приводить к мозговым нарушениям.

**Գ. Ա. Գևորգյան, Ա. Մ. Հակոբյան, Օ. Ա. Մովսեսյան,
Ա. Ա. Աղաբաբովա**

Առնետների աղիների միկրոբիոտան ամֆետամինի ազդեցությամբ

Աղիքային ֆլորան գործում է աղիների սենսոր, մոտոր, իմունային ֆունկցիաների վրա, ինչպես նաև փոխազդում բարձրագույն նյարդային կենտրոնների հետ: Այդ փոխհարաբերությունները շատ անգամ կախված են աղիքային միկրոֆլորայից, նրանք ձևավորում են աղիների և գլխուղեղի պատնեշային ֆունկցիայի ամբողջականությունը: Աղեստամոքսային տրակտի պատնեշային դիսֆունկցիան ոչ միայն նպաստում է աղիների ախտաբանությանը, այլև կարող է բերել ուղեղային խանգարումների:

**G. A. Gevorgyan, A. M. Hakobyan, H. A. Movsesyan,
A. A. Agababova**

Intestinal Microbiota in Rats under the Influence of Amphetamine

Gut flora affects the sensory, motor and immune functions of the intestine, and interacts with the higher nerve centers as well. These relationships depend on the intestinal microflora in many respects; they formulate the integrity of the barrier function of the gut and the brain. Barrier dysfunction of the gastrointestinal tract not only promotes intestinal pathology, but also leads to brain disorders.

Литература

1. Augustsson H., Meyerson B. - *Physiol.* 2004. V. 814. P. 685-698.
2. Бондаренко В. М., Рябиченко Е. В. - *ЖМЭИ* 2013, N 2. С. 112-120.
3. Бондаренко В.М., Лиходед В.Г. - *Журн. микробиол.* 2012,N3, С. 82-89.
4. Буреш Я., Бурешова О., Хьюстон П. Методики и основные эксперименты по изучению мозга и поведения. М. Высш. шк. 1991. 399 с.
5. WilisC.L - *Toxicol. Pathol.* 2011. V. 39(1). P. 172-185.
6. Neufeld K.M., Kang N. et al. – *Neurogastroenterol Motil.* 2011. V. 25. P. 255-264.
7. O`Hara A. M.,Shanahan F., *EMBO*, 2006. 7(7). P. 688-6938.
8. Парфенов А.И., Бондаренко В.М. – *Архив патологии* 2012. N2. С. 21-25.
9. Покровский М. А. Методические рекомендации. М. 1984. 10.
10. Plughoeft K.Y., Versalaive Y. - *Ann. Rex. Pathoe Mech.Dis.* 2012. 7. P. 99-122.
11. TurubaughP.Y., Ley R.E. - *Nature.* 2006. V. 444(7122). P. 1027-1031.
12. Шендеров Б.А. – *Вестник воспт. мед.* 2012. N 3(49). С. 70-78.

МИКРОБИОЛОГИЯ

УДК 579.63

Н. С. Мнацаканян¹,
член-корреспондент НАН РА А. А. Трчунян²

Антибактериальная активность против грамположительных и грамотрицательных бактерий нанокompозитного фильтра на основе пористого минерала туфа и наночастиц серебра: различные эффекты и зависимость от концентрации серебра

(Представлено 15/1 2016)

Ключевые слова: обработка воды, фильтрация, наночастицы Ag, антимикробная активность, *E. coli*, *E. faecalis*.

Введение. В течение тысячелетий качество вод постоянно ухудшалось и ныне достигло таких уровней загрязнения, что использование воды в разных целях сильно ограничилось и поставило под угрозу здоровье человека. По оценкам Всемирной организации здравоохранения, 80% заболеваний обусловлены недостаточным качеством и антисанитарным состоянием воды [1]. От заболеваний, связанных с антисанитарным состоянием воды, на земном шаре страдает около 500 млн. человек. Ежегодно около 25 млн. человек умирают от заболеваний, которые разносит вода.

Актуальным становится вопрос фильтрации и обеззараживания от микроорганизмов воды, используемой человеком в разных целях. Сейчас выпускаются множество бытовых фильтров. Они сильно отличаются и по степени очистки, и по методу фильтрации, и по удобству применения. Фильтры, которые осуществляют лишь механическую очистку воды, сами становятся источником заражения воды микроорганизмами, которые могут накапливаться и размножаться в фильтрах. В этом случае их количество в питьевой воде может существенно увеличиваться. Решить эту проблему позволяет дополнительное обеззараживание питьевой воды или использование фильтров, которые обладают бактерицидными свойствами.

Обеззараживание воды осуществляется химическими и физическими методами. Среди физических методов обеззараживания известны кипячение; ультразвуковое воздействие; воздействие электрическим разрядом;

ультрафиолетовое облучение [2]. Химические методы обеззараживания включают обработку воды сильными окислителями: озоном, хлорсодержащими веществами; олигодинамию (воздействие ионами тяжелых металлов – Ag, Cu и др.) [3]. Обычно для очистки питьевой воды используют комбинацию вышеописанных методов.

Были осуществлены исследования, направленные на усовершенствование способов очистки воды, которые включали бы в себе сразу несколько методов обработки воды, в частности обеззараживание. Для этого использовался фильтрующий картридж, изготовленный из экологически чистого природного пористого минерала туфа. Фильтр, изготовленный в соответствии с техническим регламентом [4], имеет упорядоченно структурированную пористость с размерами пор до 1 мкм, т.е. осуществляет *механическую* фильтрацию. Но вместе с тем туф является минералом, имеющим высокие сорбционные свойства, в результате чего фильтрация осуществляется также за счет *сорбции* вредных веществ, растворенных в воде.

Ещё с древних времён известны бактерицидные свойства Ag и его соединений [5]. Показано подавляющее действие Ag на бактерии, причем это действие Ag сильнее, чем других металлов [6 – 8]. Имеются также данные о том, что чувствительность разных микроорганизмов к Ag неодинакова [7, 9, 10]. Добавление к фильтру наночастиц Ag может привести к получению нанокомпозитного фильтра, который вместе с вышеперечисленными фильтрующими свойствами будет обладать ещё и *бактерицидными* свойствами, исследование которых и является целью настоящей работы.

Материал и методика. Фильтры и их получение. В исследованиях использовали фильтрующие картриджи, изготовленные из экологически чистого природного пористого минерала туфа (Ервандакертское месторождение, Армения) в соответствии с техническим регламентом [4]. Картриджи имеют гигиенический сертификат (Минздрав РА, № 72 от 22.09.99 г.), прошли сертификацию в НИИ экологии человека и гигиены окружающей среды им. А.Н. Цыцина РАМН (Россия) и получили Санитарно-эпидемиологическое заключение (РФ, 77.99.10.234.Д.004597.06.04). Это заключение касается возможности применения фильтра из природных пород в практике хозяйственно-питьевого водоснабжения для доочистки питьевой воды из артезианских скважин от повышенной мутности, цветности и железа. Однако данные фильтры не осуществляют микробиологическую очистку.

Во время технологического процесса изготовления фильтрующего картриджа **добавляли** наночастицы Ag, которые встраивались и фиксировались в структуру природного минерала.

Бактерии. Из-за невозможности изучения влияния нанокомпозитного фильтра на весь спектр микроорганизмов выбор микроорганизмов был произведен исходя из особенностей строения клеточной стенки и плазматической мембраны бактерий. Выяснено, что степень воздействия Ag на грамположительные (Гр+) и грамотрицательные (Гр-) бактерии разная [9, 10]. Исходя из этого, эксперимент был проведен как на Гр+ бактерии *Enterococcus faecalis* ATCC 29212 (штамм дикого типа), так и на Гр– бак-

терии *Escherichia coli* ATCC 25922 (штамм дикого типа). Кроме разницы в строении клеточной стенки, эти бактерии интересны также тем, что являются санитарными показателями качества питьевой воды [11].

Взаимодействие наночастиц Ag с фильтром. Для определения прочности взаимодействия наночастиц Ag с фильтром через фильтр пропускали дистиллированную воду и после фильтрации 5, 10 или 20 л воды отбирали образцы, которые вместе с исходной пробой воды проверяли на содержание Ag пламенным методом (ацетилен – воздух) с помощью атомно-абсорбционного спектрофотометра (Shimadzu серии AA-7000/ААС, Япония). Результаты анализа показали отсутствие даже следовых количеств Ag во всех фильтрах. Нижний предел чувствительности спектрофотометра составляет 0.2 мкг/мл.

Изучение обеззараживающих свойств фильтра по отношению к определенным микроорганизмам. В лабораторных условиях была собрана фильтрационная система, через которую пропустили 5 л воды, зараженной *E. coli*, и 5 л воды, зараженной *E. faecalis*. Из суточной бактериальной культуры готовили бульон мутностью 0.5 ед. МакФарленд, из которого путем 10-кратных разбавлений получили разведение 10^5 колониеобразующих единиц (КОЕ)/мл. В итоге получили воду, зараженную *E. coli* с нагрузкой 100 КОЕ/мл. Эту воду фильтровали через нанокompозитный фильтр и весь фильтрат собирали в стерильную тару. Далее по 1 мл воды до и после фильтрации вносили в чашки Петри диаметром 90 мм и заливали 20 мл неселективной питательной среды [12], охлажденной до 40-45°C. Из каждого образца делали посев на среды параллельно в шести чашках, которые инкубировали при температуре 37°C в течение 24-48 ч. После подсчитывали число выросших колоний до и после фильтрации с помощью счетчика колоний. Вычисляли также степень бактерицидности фильтра по отношению к *E. coli* и *E. faecalis*.

Эксперименты проводили в трёхкратной повторности для каждого штамма бактерий в отдельности; приведены средние значения результатов со стандартной ошибкой.

Результаты и обсуждение. При фильтрации воды, зараженной *E. coli* ATCC 25922 через фильтр с Ag, эффективность фильтрации составила в среднем 97.09% (табл.1, рис. 1). В случае с *E. faecalis* ATCC 29212 бактерицидность фильтра с Ag упала до 33.34%. При увеличении количества наночастиц Ag в фильтрующем картридже в 3 раза увеличили бактерицидность нанокompозитного фильтра по отношению к *E. faecalis* до 92.18% (табл. 1, рис. 2).

Разность бактерицидного эффекта фильтра по отношению к *E. coli* и *E. faecalis*, вызванная одинаковым количеством Ag, в данном случае составляет 63.75% (рис. 3). Разность бактерицидного эффекта фильтра по отношению к *E. faecalis*, вызванная увеличением количества Ag в три раза, составляет 58.84% (рис. 4) Известно, что высвобождающиеся из окисленных наночастиц Ag ионы летальны для бактерий. Среди теорий, объясняющих механизм действия Ag на микроорганизмы, распространенной является адсорбционная теория, согласно которой клетка теряет жизнеспособ-

ность в результате взаимодействия электростатических сил, возникающих между клетками бактерий, имеющих отрицательный заряд, и положительно заряженными ионами Ag при адсорбции последних бактериальной клеткой [13]. Они могут воздействовать на активность ключевых транспортных систем и ферментов мембраны [7] и допускают ингибирование трансмембранного транспорта H^+ , Na^+ и Ca^{2+} и активности протонной АТФазы, вызываемое Ag [14].

Таблица 1

Результаты подсчёта колоний до и после фильтрации воды, зараженной *E. coli* и *E. faecalis* через фильтр с Ag

<i>E. coli</i> ATCC 25922	I опыт		II опыт		III опыт	
	Количество КОЕ/мл		Количество КОЕ/мл		Количество КОЕ/мл	
	до фильтр.	после фильтр.	до фильтр.	после фильтр.	до фильтр.	после фильтр.
Среднее значение	102	0	119	6	145	6
В %	100	0	100	4.92	100	3.80
Фильтруе- мость, %	100		100 - 4.92 = 95.08		100 - 3.80 = 96.20	
Фильтруемость = 97.09 ± 1.94%						
<i>E. faecalis</i> ATCC 29212	I опыт		II опыт		III опыт	
	Количество КОЕ/мл		Количество КОЕ/мл		Количество КОЕ/мл	
	до фильтр.	после фильтр.	до фильтр.	после фильтр.	до фильтр.	после фильтр.
Среднее значение	108	10	112	8	116	9
В %	100	8.84	100	6.81	100	7.78
Фильтруе- мость, %	100 - 8,84 = 91,16		100 - 6,81 = 93.18		100-778 = 92.21	
Фильтруемость = 92.18± 0.68%						
Общая фильтруемость = 94.63±1.3 %						

Некоторые исследователи особое значение придают физико-химическим процессам; в частности, окислению компонентов цитоплазмы бактерий и ее разрушению кислородом, растворенным в воде, причем Ag играет роль катализатора [15]. Имеются данные, свидетельствующие об образовании комплексов нуклеиновых кислот с тяжелыми металлами, вследствие чего нарушается стабильность ДНК и, соответственно, жизнеспособность

бактерий [13,16]. Существует также мнение, что Ag не оказывает прямого воздействия на ДНК клеток, а действует косвенно, увеличивая количество внутриклеточных свободных радикалов, которые снижают концентрацию внутриклеточных активных соединений кислорода [3]. Доказано, что наночастицы Ag сами по себе менее токсичны для бактерий, чем ионы, высвобождаемые при окислении наночастиц Ag [17].

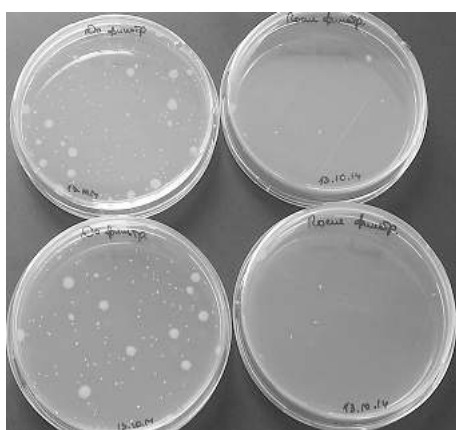


Рис. 1.

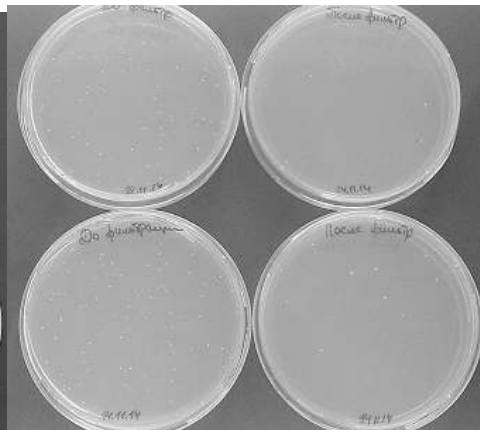


Рис. 2.

Рис. 1. Чашки Петри с посевами воды, зараженной *E. coli* в неселективную питательную среду. В первых двух чашках Петри (левая верхняя и левая нижняя) сделан посев воды до фильтрации, в двух других чашках Петри – после фильтрации через фильтр с Ag.

Рис. 2. Чашки Петри с посевами воды, зараженной *E. faecalis* в неселективную питательную среду. В первых двух чашках Петри (левая верхняя и левая нижняя) сделан посев воды до фильтрации, в двух других чашках Петри – после фильтрации через фильтр с Ag.

Таким образом, механизмы действия наночастиц Ag на микробную клетку включают разные процессы, обеспечивающие выраженный антимикробный эффект.

Закключение. Обобщая полученные результаты, можно сделать выводы о том, что Ag в составе фильтра по-разному воздействует на микроорганизмы, которые отличаются друг от друга строением клеточной стенки. При одинаковом содержании Ag антимикробное воздействие нанокомпозитного фильтра по отношению к *E. coli* (Гр-) на 63.75% превышает антимикробное воздействие против *E. faecalis* (Гр+). Однако при увеличении концентрации серебра (в три раза) в фильтре можно усилить антимикробное воздействие нанокомпозитного фильтра по отношению к *E. faecalis* на 58.84%.

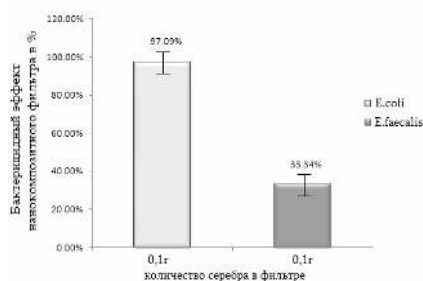


Рис. 3.

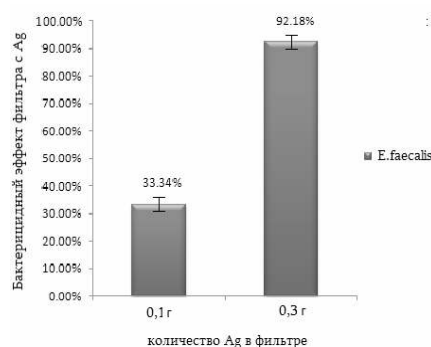


Рис. 4.

Рис. 3. Разница бактерицидного эффекта фильтра с Ag по отношению к *E. coli* и *E. faecalis*.

Рис. 4. Бактерицидный эффект фильтра с разным содержанием Ag по отношению к *E. faecalis*.

Исследования проведены в испытательной лаборатории «ТОНУС-ЛЕС» ООО «ЭФДИЭЙ ЛАБ» при поддержке генерального директора «ТОНУС-ЛЕС» ООО Л. С. Акопян.

¹«ТОНУС-ЛЕС» ООО «ЭФДИЭЙ ЛАБ»

e.mail: narine.mnatsakanyan@fdalab.am

²Ереванский государственный университет

Н. С. Мнацаканян, член-корреспондент НАН РА А. А. Трчунян

Антибактериальная активность против грамположительных и грамотрицательных бактерий нанокompозитного фильтра на основе пористого минерала туфа и наночастиц серебра: различные эффекты и зависимость от концентрации серебра

Сорбцией наночастиц Ag, полученных методом электрофореза в матрицу бытового фильтра, состоящего из пористого минерала туфа и изготовленного в соответствии с техническим регламентом (ТУ РА 23477755.1918-99), и их последующим химическим осаждением получены нанокompозитные фильтры, которые обладают высокой биологической активностью. Показано различное антибактериальное влияние нанокompозитного фильтра с наночастицами Ag на грамположительные (*Enterococcus faecalis*) и грамотрицательные (*Escherichia coli*) бактерии, при этом увеличение концентрации Ag в фильтре может усилить антимикробный эффект нанокompозитного фильтра против *E. faecalis*.

Ն. Ս. Մնացականյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Հ. Թռչունյան

**Ծակոտկեն հանքային տուֆից և արծաթի նանոմասնիկներից
բաղկացած նանոկոմպոզիտ գոիչի հակամանրէային ակտիվությունը
գրամ-դրական և գրամ-բացասական բակտերիաների նկատմամբ.
տարբեր էֆեկտներ և կախվածություն արծաթի կոնցենտրացիայից**

Էլեկտրաֆորեզի եղանակով ստացված Ag նանոմասնիկների սորբցիայի շնորհիվ և նրանց հետագա քիմիական նստեցմամբ կենցաղային գոիչի մատրիցայի մեջ, որը բաղկացած է ծակոտկեն հանքային տուֆից և արտադրվում է համաձայն ՀՀ ՏԿ 23477755.1918-99 տեխնիկական կանոնակարգի, ստացվել են նանոկոմպոզիտ գոիչներ, որոնք ունեն բարձր կենսաբանական ակտիվություն: Ներկայացված է Ag նանոմասնիկներ պարունակող նանոկոմպոզիտ գոիչի հակամանրէային ակտիվությունը գրամ- դրական (*Enterococcus faecalis*) և գրամ-բացասական (*Escherichia coli*) մանրէների վրա, ընդ որում Ag նանոմասնիկների կոնցենտրացիայի ավելացումը կարող է ուժեղացնել գոիչի հակամանրէային ակտիվությունը *E. faecalis*-ի նկատմամբ:

**N. S. Mnatsakanyan,
corresponding member of NAS RA A. H. Trchounian**

**Antibacterial Activity of the Nanocomposite Filter Based on Porous
Mineral Tuff and Silver Nanoparticles against Gram-Positive and Gram-
Negative Bacteria : the Different Effects and Dependence on the
Concentration of Silver**

Nanocomposite filters, having high biological activity, were developed by sorption of Ag nanoparticles (obtained by electrophoresis) into matrix of household filter consisting of porous mineral tuff (manufactured in accordance with the technical regulations (TC RA 23477755.1918-99)), and their subsequent chemical deposition. The various antibacterial effect of nanocomposite filter with Ag nanoparticles on Gram-positive (*Enterococcus faecalis*) and Gram-negative (*Escherichia coli*) bacteria was shown, while increasing the concentration of Ag in the filter can enhance the antimicrobial effect of the nanocomposite filter against *E. faecalis*.

Литература

1. Техническое руководство по эпидемиологическому надзору за болезнями, связанными с водой. Европейское региональное бюро. Всемирная организация здравоохранения. 2011.
2. Хохрякова Е. Современные методы обеззараживания воды. М. Изд. центр «Аква-Терм». 2014. 55 с.
3. Pradeep T., Anshup – Thin Solid Films 2009. V. 517. P. 6441–6478.
4. Технические условия ТУ РА 23477755.1918-99. Фильтр бытовой, для питьевой воды из природных пород.

5. *Кульский Л. А.* Серебряная вода. Киев. Наукова думка, изд. 9-е, перераб. и доп. **1987**. 134 с.
6. *Lemire J.A., Harrison J.J., Turner R.J.* – Nature Reviews Microbiology. 2013. V. 11. P. 371–384.
7. *Vardanyan Z., Gevorgyan V., Ananyan M., Vardapetyan H., Trchounian A.* – J. of Nanobiotechnology. 2015. V. 13. P. 69.
8. *Zhou Yan, Kong Ying, Kundu Subrata, Cirillo D. Jeffrey, Liang Hong* – J. of Nanobiotechnology. 2012. V. 10. P. 19.
9. *Feng Q.L., Wu J., Chen G.Q., Cui F.Z., Kim T.N., Kim J.O.* – J. of Biomedical Materials Research. 2000. V. 52. P. 662-668.
10. *Woo Kyung Jung, Hye Cheong Koo, Ki Woo Kim, Sook Shin, So Hyun Kim, Yong Ho Park* – Applied and Environmental Microbiology. 2008. V.74. P. 2171-2178.
11. Guidelines for drinking-water quality, 2nd ed . V. 3. Surveillance and control of community supplies. World Health Organization, Geneva, 1997.
12. ISO 6222:1999. Water quality – Enumeration of culturable micro-organisms – Colony count by inoculation in a nutrient agar culture medium.
13. *Meiwan Chen, Zhiwen Yang, Hongmei Wu, Xin Pan, Xiaobao Xie, Chuanbin Wu* – International Journal of Nanomedicine. 2011.V. 6. P. 2873–2877.
14. *Mikihiro Yamanaka, Keita Hara, Jun Kudo* – Applied and Environmental Microbiology. 2005. V. 71. P. 7589–7593.
15. *Díaz-Visurraga J., Gutiérrez C., von Plessing C., García A.* – FORMATEX 2011.
16. *Rahn R.O., Landry L. C.* - Photochemistry Photobiology. 1973. V.18. P. 29–38.
17. *Xiu Zong-ming, Zhang Qing-bo, Puppala L. Hema, Colvin L. Vicki , Alvarez J. J. Pedro* – Nano Letters. 2012. V. 12. P. 4271-4275.

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.8.52-50

А. С. Чобанян, О. А. Мкртчян, А. Л. Григорян, А. А. Мелконян

Компьютерное моделирование долгодлящейся потенциации

(Представлено чл.-кор. НАН РА Л.Р. Манвеляном 2016)

Ключевые слова: *синаптическая передача, астроцит, долгодлящаяся потенция.*

Согласно современным нейрофизиологическим исследованиям синаптическая пластичность является основой обучения и памяти в нейронных сетях головного мозга [1, 2]. Основной задачей современной нейрофизиологии является понимание механизмов долгодлящейся синаптической пластичности. Поскольку биохимические механизмы неизвестны, важное значение приобретают теоретические исследования, в частности компьютерное моделирование работы химического синапса, воспроизводящего долгодлящую синаптическую пластичность. Результаты численного моделирования долгодлящейся синаптической пластичности сделают возможной интерпретацию результатов физиологических экспериментов.

Согласно большинству исследователей глиальные клетки, а именно астроциты, играют важную роль в синаптической передаче и являются основным механизмом долгодлящейся синаптической пластичности [2-4]. Целью настоящей работы является разработка математической модели долгодлящейся потенциации.

Материал и методы. На рис. 1 представлена функциональная схема модели синаптической передачи. Модель состоит из пресинаптической части, постсинаптической части и астроцита, служащего в качестве обратной связи. Для математического описания динамики распределения передатчика в отдельных пулах пресинапса модели и описания процессов, протекающих в постсинаптической зоне, нами использованы уравнения, представленные в работе [5].

Обратная связь модели синаптической передачи. Если в процессе подачи высокочастотной тетанической стимуляции концентрация Ca^{2+} в постсинаптической зоне становится выше порога, срабатывает обратная связь, в результате чего происходит активация астроцита. Соответственно

внутриклеточным кальциевым колебаниям постсинаптической зоны возникают экстраклеточные кальциевые колебания, которые являются их симметричным отражением [6]. Экстраклеточные кальциевые колебания вызывают активацию метаболитических кальций-чувствительных рецепторов (CaRs) мембраны астроцита [7]. Активация этих рецепторов приводит к образованию второго мессенджера – IP_3 [8], что ведет к активации кальциевых каналов мембраны запаса кальция астроцита – IP_3R [9] и, следовательно, к выходу Ca^{2+} из запаса астроцита, т. е. к образованию кальциевых колебаний внутри астроцита [10].

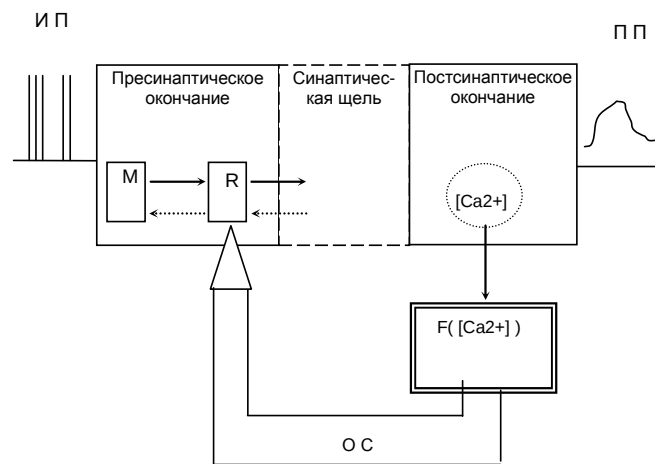


Рис. 1. Функциональная схема модели синаптической передачи:

- выброс и мобилизация;
 ← восполнение и демобилизация;

И П – импульсная последовательность; R – готовое к высвобождению состояние;
 П П – постсинаптический потенциал; М – мобилизационное состояние; О С – обратная связь

Представим математическое описание процессов, протекающих в астроците в результате срабатывания обратной связи.

В случае высокочастотной тетанической стимуляции изменение $[Ca^{2+}]$ в астроците перед применением $k+1$ -го импульса описывается следующим уравнением:

$$Ca_{\text{Аст}}(t_{k+1}^-) = (Ca_{\text{Аст}}(t_k^-) + K_1 * (Ca_{\text{пост}}(t_{k+1}^-) - 1)) * (\exp(-dt/\tau_c)),$$

где t_k^- – значение времени перед подачей k -го пресинаптического импульса; t_k^+ – значение времени после подачи k -го пресинаптического импульса; $dt = t_k - t_{k-1}$; $Ca_{\text{Аст}}(t_k^-)$ – $[Ca^{2+}]$ в астроците перед подачей k -го импульса; $Ca_{\text{пост}}(t_{k+1}^-)$ – $[Ca^{2+}]$ в постсинаптическом нейроне; τ_c – постоянная времени спада $[Ca^{2+}]$ в астроците; K_3 – коэффициент.

Активация астроцита приводит к выделению глутамата из астроцита в экstrasинаптическое пространство. Количество глутамата перед применением $k+1$ -го импульса описывается следующим уравнением:

$$\text{Глут}(t_{k+1}) = (\text{Глут}(t_k) + K_2 * \text{Ca_Аст}(t_k^+)) * \exp(-dt/\tau_{GL}),$$

где $\text{Глут}(t_k)$ – количество глутамата в экstrasинаптическом пространстве перед поступлением k -го импульса; $\text{Ca_Аст}(t_k^+) = [\text{Ca}^{2+}]$ в астроците после поступления k -го импульса; τ_{GL} – постоянная времени спада количества глутамата в экstrasинаптическом пространстве; K_2 – коэффициент

Процессы, происходящие в пресинаптической части модели под воздействием обратной связи. Под воздействием глутамата, выделенного астроцитом, происходит увеличение $[\text{Ca}^{2+}]$ внутри пресинапса [11]. Увеличение $[\text{Ca}^{2+}]$ в пресинапсе выше порога приводит к активации протеинкиназы А (ПКА) [12]. Изменение активности ПКА (АПКА) выше порога приводит к увеличению медиатора в М пуле [13]. Изменение АПКА перед применением $k+1$ -го импульса описывается следующим уравнением:

$$\text{АПКА}(t_{k+1}) = (\text{АПКА}(t_k) + K_3 * \text{Глут}(t_k^+)) * \exp(-dt/\tau_A),$$

где $\text{АПКА}(t_k)$ – АПКА перед поступлением k -го импульса; $\text{Глут}(t_k^+)$ – концентрация глутамата в экstrasинаптическом пространстве после подачи k -го импульса; τ_A – постоянная времени спада АПКА; K_3 – коэффициент.

Согласно разработанной модели имеет место модификация М пула пресинапса перед приходом каждого пресинаптического импульса. Количество передатчика, передаваемого в М пул из запасного пула в моменты времени t_k , зависит от значения АПКА в моменты времени непосредственно перед поступлением k -го пресинаптического импульса. Если АПКА меньше порога, то количество передатчика в готовом к высвобождению пуле R перед применением $k+1$ -го импульса описывается следующим уравнением:

$$R(t_{k+1}) = R_0 - E(t_{k+1}) + M(t),$$

где R_0 – количество передатчика в R пуле в состоянии покоя; $E(t_{k+1})$ – количество передатчика в промежуточном пуле E до подачи $k+1$ -го импульса, $M(t)$ – изменение количества передатчика в М пуле по отношению к начальному уровню.

Если же значения АПКА больше порога, то количество передатчика, передаваемого из запасного пула в М пул (V_k) описывается следующим уравнением:

$$V_k = K_4 * \text{АПКА}(t_{k+1}),$$

где $\text{АПКА}(t_{k+1})$ – АПКА до подачи $k+1$ -го импульса; K_4 – коэффициент.

В этом случае количество передатчика в R пуле перед применением $k+1$ -го импульса описывается следующим уравнением:

$$R(t_{k+1}) = R_0 - E(t_{k+1}) + M(t) + V_k * \exp(-dt/\tau_z),$$

где τ_z – постоянная времени восстановления медиатора в запасном пуле. После высокочастотной тетанической стимуляции количество медиатора в R пуле описывается следующим уравнением:

$$R(T - t_k) = (R_0 - E(t_k^+) * \exp(-(T - t_k)/\tau_R)) + M(t_k^+) * \exp(-(T - t_k)/\tau_{DM}) + V_k * \exp(-(T - t_k)/\tau_z),$$

где T – время после прекращения стимуляции; τ_R – постоянная времени высвобождения; τ_{DM} – постоянная времени демобилизации. Тогда синаптический вес, который является нормализованным высвобождением медиатора (W_k), описывается следующим выражением:

$$W_k = R(T - t_k) / R_0.$$

Результаты и обсуждение. В настоящей работе представлены результаты математического моделирования ДДП при раздражении пресинаптического нейрона тетанической стимуляцией высокой частоты (50 импульсов с частотой 100 гц). На рис. 2, А представлена динамика изменения $[Ca^{2+}]$ постсинаптической зоны как во время высокочастотной тетанической стимуляции, так и после прекращения стимуляции. Как видно из рис. 2, А, в процессе тетанической стимуляции происходит постепенный рост $[Ca^{2+}]$ в постсинаптической зоне. И если $[Ca^{2+}]$ становится выше порога, то срабатывает обратная связь, происходит активация астроцита, что приводит к образованию кальциевых колебаний внутри астроцита. Активация астроцита приводит к выделению глутамата в экстрасинаптическое пространство [14, 15] .

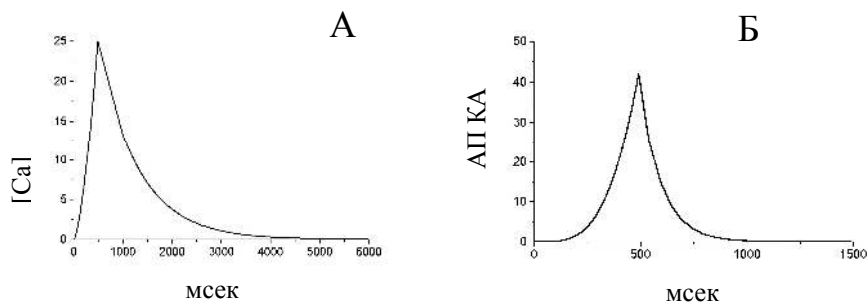


Рис. 2. А – зависимость $[Ca^{2+}]$ постсинаптической зоны от времени как во время тетанической высокочастотной стимуляции, так и после прекращения стимуляции; Б – зависимость активности ПКА от времени как во время тетанической высокочастотной стимуляции, так и после прекращения стимуляции.

Выделенный астроцитом глутамат приводит к увеличению АПКА в пресинаптическом нейроне (рис. 2, Б), и если АПКА становится выше порога, то происходит увеличение количества медиатора в М пуле, что в свою очередь приводит к увеличению готового к высвобождению медиатора в Р пуле. После прекращения тетанической стимуляции происходит уменьшение $[Ca^{2+}]$ и АПКА до исходного значения (рис. 2, А, Б).

На рис. 3 представлена кривая синаптического веса $W(k)$ после прекращения высокочастотной тетанической стимуляции. Как видно из рис. 3, значение $W(k)$ после прекращения стимуляции довольно длительное время

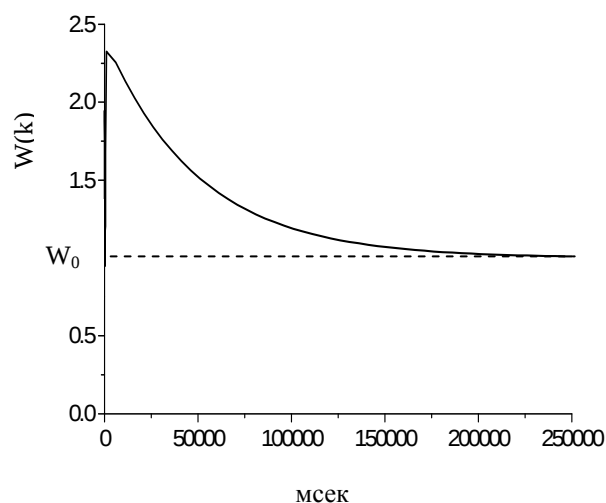


Рис.3. ДДП в ответ на высокочастотную тетаническую стимуляцию.

остается выше исходного уровня W_0 , что говорит о наличии ДДП.

Результаты моделирования ДДП получены с использованием параметров, представленных в таблице.

Значения параметров модели, используемых в компьютерном моделировании

Пресинаптические параметры		Постсинаптические параметры		Параметры обратной связи	
P_R	0.1	K_5	5	K_1	0.001
τ_R	150	K_6	0.1	K_2	0.1
P_M	0.7	τ_G	1000	K_3	0.1
τ_M	2.0	τ_I	100	K_4	0.1
τ_{DM}	17			τ_C	1000
R_0	0.3			τ_{GL}	1000
M_0	0.7			τ_A	100
				τ_Z	50000

На сегодняшний день нейронные сети различных структур мозга, вовлеченные в процессы обучения и памяти, являются объектом большого внимания. Поэтому выявление механизмов ДДП имеет важное значение. Поскольку биохимические механизмы неизвестны, разработка математических моделей химического синапса, моделирующих ДДП, является весьма актуальной.

Модель, представленная в настоящей работе, основана на модели классического синапса [5] и на использовании астроцита, служащего в ка-

честве обратной связи между постсинаптическим и пресинаптическим нейронами [13, 14]. В модели существует реципрокная взаимно-обратная связь между пресинаптическим и постсинаптическим нейронами и астроцитом. Работа астроцита управляется концентрацией кальция в постсинапсе [5]. При подаче высокочастотной тетанической стимуляции в постсинапсе получаем внутриклеточные кальциевые колебания выше порогового уровня. Соответственно внутриклеточным кальциевым колебаниям постсинаптической зоны получают экстраклеточные кальциевые колебания, которые являются их симметричным отражением. Экстраклеточные кальциевые колебания вызывают активацию метаболитических кальций-чувствительных рецепторов мембраны астроцита, что приводит к образованию кальциевых колебаний внутри астроцита. Активация астроцита вызывает выделение глутамата из астроцита в экstrasинаптическое пространство. Выделенный астроцитом глутамат приводит к образованию кальциевых колебаний внутри пресинапса. Если уровень $[Ca^{2+}]$ в пресинапсе выше порога, то происходит активация ПКА. Если АПКА становится выше порога, то в моменты подачи пресинаптических импульсов определенное количество медиатора из запасного пула перемещается в мобилизационный пул М. Изменение количества медиатора в М пуле приводит к увеличению количества медиатора в R пуле. После прекращения высокочастотной тетанической стимуляции количество медиатора в пуле R достаточно длительное время остается выше W_0 , что говорит о наличии ДДП.

Разработанная модель ДДП может быть использована для исследования процессов в нейронных сетях различных структур мозга, вовлеченных в процессы обучения и памяти.

Институт физиологии им. Л. Орбели НАН РА

А. С. Чобанян, О. А. Мкртчян, А. Л. Григорян, А. А. Мелконян

Математическая модель синаптической передачи: долгодлящаяся потенцияция

Представлена математическая модель синаптической передачи, основанная на модели химического синапса и астроцита, служащего в качестве обратной связи между постсинаптическим и пресинаптическим нейронами. Разработанная модель воспроизводит долгодлящуюся потенцияцию и может быть использована для изучения нейронных сетей различных структур мозга, вовлеченных в процессы обучения и памяти.

Ա. Ս. Չոբանյան, Ն. Ն. Մկրտչյան, Ա. Լ. Գրիգորյան, Ա. Ա. Մելքոնյան

Մինապտիկ փոխանցման մաթեմատիկական մոդել՝ երկարատև պոտենցիացիա

Ներկայացված է սինապտիկ փոխանցման մաթեմատիկական մոդել, որն օգտագործում է քիմիական սինապսի մոդելը և աստրոցիտը իբրև հետադարձ կապ

նախասինապտիկ և հետսինապտիկ նեյրոնների միջև: Մշակված մոդելը նկարագրում է երկարատև պոտենցիացիան և կարող է օգտագործվել ուսուցման և հիշողության պրոցեսում ընդգրկված նեյրոնային ցանցերի հետազոտման համար:

**A. S. Chobanyan, H. A. Mkrtchian, A. L. Grigoryan,
A. A. Melkonyan**

Mathematical Model of Synaptic Transmission: Long-Term Potentiation

The mathematical model of synaptic transmission has been presented, using the model of chemical synapse and astrocyte, which serves as a feedback between the post- and presynaptic neurons. The elaborated model incorporates the long-term potentiation and can be used for studying neural networks in different brain structures, involved in learning and memory.

Литература

1. *De Pitta M., Brunel N., Volterra A.* – Neurosci. 2016. V. 323. P. 43-61.
2. *Ben Achour S., Pascual O.* – Neurochemistry international. 2010. V.57. P. 440-445.
3. *Perez-Alvarez A., Araque A.* – Current Drug Targets. 2013.V. 14.P. 1220-1224.
4. *Volterra N., Meldolesi.* – J. Nat.Rev.Neurosci. 2005. V .6. P. 626–640.
5. *Sargsyan A.R. et al.* – Neural networks. 2003. V.16. P. 1161-1177.
6. *Torres A. et al.* – Neurosci. 2012. V. 5. P. 1-11.
7. *Hofer A.M. et al.* – Cell Biology. 2003. V. 2. P. 392-397.
8. *Bazargani N., Attwell D.* – Nature Neurosci. 2016. V.19. P.182–189.
9. *De Young .G. W., Keizer J.-* – Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1992. V. 89. P. 9895–9899.
10. *Rusakov D.A. et al.* – Neurosci. 2011. 2011. V. 11. P. 1-11.
11. *Perea G., Yang A.,et al.* – Nature Communications. 2014. V. 5. P. 32-62.
12. *Castillo P.E., Janz R., Thomass C. et al.* – Nature. 1997. V. 388, P. 7.
13. *Santello M.and Volterra A.* – Neurosci. 2009. V. 158. P. 253–259.
14. *Jourdain P., Bergersen L. H., Bhaukaurally K. et al.* – Nature Neurosci. 2007. V. 10. P. 331–339.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 116-րդ ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Վ. Ս. Ջաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան, Բ. Վ. Հովհաննիսյան</i> – B_α արտադրյալների եզրային արժեքների մասին	7
<i>Ա. Ռ. Նազարյան</i> – Նորմալ հարթ երկու կոաչափի ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմություններ ռեգուլյարության և սինգուլյարության միավոր ինդեքսով .	13
<i>Ա. Հ. Առաքելյան</i> – Սֆերաների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն կորության տարածություններում	91
<i>Պ. Է. Մելիք-Աղամյան</i> – Իրական ռեգուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորների մասին	103
<i>Վ. Ս. Ջաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան</i> – Ջրբաշյանի և Բյաշկեի արտադրյալների հարաբերության եզրային արժեքների մասին	187
<i>Ա. Յու. Շահվերդյան</i> – Դիսկրետ ունակություն և բինար Մարկովի շղթայից վերցրած բարձր կարգի տարբերությունները	195
<i>Կ. Ա. Քեռյան</i> – Միակության թեորեմ Զիսելսկու բազմապատիկ շարքերի վերաբերյալ	263
<i>Կ. Լ. Ավետիսյան, Ա. Բ. Պետրոսյան</i> – Նորմալ կշիռներով $\mathbb{C}^n$ -ի գնդում Բերգմանի տեսքի որոշ օպերատորների մասին	270
<i>Պ. Է. Մելիք-Աղամյան</i> – Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համար Կալկինի վերածող օպերատորի մասին	278
<i>Լ. Զ. Գևորգյան</i> – Անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարումների լուծման Ռամանուջանի եղանակի մասին	284

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ա. Ա. Չուբարյան, Ա. Ս. Ճիտոյան, Ա. Ա. Խամիսյան</i> – Բազմարժեք տրամաբանություններում արտածման որոշ համակարգերի և նրանցում արտածման բարդությունների վերաբերյալ	108
--	-----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ս. Պ. Ստեփանյան</i> – Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի ջերմաառաձգականության խնդիրը առաձգական ամրակցման հենարանի առկայությամբ	26
<i>Ս. Հ. Մարգարյան, Մ. Վ. Խաչատրյան</i> – Դասական առաձգականության տեսությամբ ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ առաձգական հարթ կոր ձողի (շրջանային) մաթեմատիկական մոդելը	34
<i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան</i> – Լարումները տիեզերական վերելակի կոնաձև խողովակում	43
<i>Ռ. Մ. Կիրակոսյան</i> – Առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման ոչ դասական խնդիրը	115
<i>Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան</i> – Առաձգական հիմքի վրա հենվող առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման խնդիրը	120
<i>Ս. Մ. Մխիթարյան</i> – Կրիլովի և Բոգոլյուբովի մեթոդի կիրառությունը առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը	128

<i>Մ. Մ. Մխիթարյան</i> – Գաուսի քառակուսացման բանաձևերի կիրառությունը առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը	202
<i>Ա. Ա. Բեռլին, Լ. Ի. Մաննիչ, Ս. Հ. Մարգարյան, Ս. Ա. Տիման</i> – Պոլիէթիլենային բյուրեղի համար կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսությունը	210
<i>Մ. Մ. Գրիգորյան, Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիթարյան</i> - Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական շերտի համար խառը եզրային երկու խնդիրների մասին	291

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ռ. Կ. Ալեքսանյան, Վ. Մ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Բելուբեկյան</i> – Խորանարդ համաչափությամբ անիզոտրոպ նյութից պիեզոէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետում եզակիությունները	136
--	-----

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ա. Ե. Տոնոյան</i> – ^{41}K ատոմի վիճակների վարքի տեսական հետազոտությունը ուժեղ մագնիսական և π բևեռացմամբ լազերային դաշտում	48
<i>Կ. Հ. Ահարոնյան, Ն. Բ. Մարգարյան</i> – Մեկկողմանի դիէլեկտրական ուժեղացմամբ էկրանավորված էքսիտոնի կապի էներգիան կիսահաղորդչային քվանտային փոստում	57
<i>Ռ. Հ. Ալանակյան</i> - Ֆերմիոնների ծնումը e^+e^- -բախումներում	301

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

<i>Գ. Ն. Մարգարյան</i> - Օրգանական նյութերի ջերմային ակտիվացմամբ մոնոմոլեկուլային քայքայման քվանտաքիմիական հիմնավորումը և մեխանիզմի մոդելավորումը: Վինիլային եթերների ինքնաքայքայման արագության հաստատունի հաշվարկը: 2	64
<i>Ա. Ս. Մարտիրոսյան, Ս. Վ. Ծառուկյան</i> – Թթվածնի ներկայությամբ ակտիվ և պասիվ մակերևութային վրա CH_3O_2 ռադիկալների օրգանական միացության հետ փոխազդեցության մոդելի ուսումնասիրությունը	219
<i>Ա. Ս. Մարտիրոսյան</i> – $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2$ ռադիկալների ալդեհիդի հետ հետերոգեն փոխազդեցության հնարավորության մասին	312

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

<i>Վ. Յու. Բուրմին, Ա. Մ. Ավետիսյան</i> – Սպիտակի երկրաշարժի հետցնցումային պրոցեսների ուսումնասիրությունը մոտակա դիտակայանների տվյալներով	225
---	-----

ՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Հ. Մարգարյան, Կ. Ս. Մարգարյան, Ա. Ս. Մարգարյան</i> - Մետաղ պարունակող պոլիմերային ծածկույթների ձևավորման միափուլ մեթոդ	317
--	-----

ԵՐԿՐԱՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Վ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան</i> - Հայաստանի տարածքի երկրադինամիկական գործընթացների հիդրոերկրաբանական դիտարկումների արդյունքները	141
--	-----

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

<i>Վ. Օ. Թոփուզյան, Տ. Ս. Խաչատրյան</i> - Ցածր տրիոդոթիրոնինի սինդրոմի շտկումը առնետների մոտ N-տեղակալված- α , β -դեհիդրոամինաթթուների խոլինի եթերի միջոցով	148
<i>Տ. Ս. Խաչատրյան, Վ. Օ. Թոփուզյան</i> - Կենսաբանական ակտիվ նյութերի գերցածր չափաբաժինների ազդեցության համեմատական վերլուծությունը առնետների մոտ ցածր տրիոդոթիրոնինի սինդրոմի պայմաններում	233
<i>Գ. Ա. Գևորգյան, Ա. Մ. Հակոբյան, Հ. Ա. Մովսեսյան, Ա. Ա. Աղաբաբովա</i> - Առնետների աղիների միկրոբիոտան ամֆետամինի ազդեցությամբ.....	321

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Լ. Հ. Հակոբյան, Ն. Մ. Հարությունյան, Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Թռչունյան</i> - Ավանդական հայկական կաթնամթերքներ՝ մածունի, յուղորդի մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունները	154
<i>Ն. Ս. Մնացականյան, Ա. Հ. Թռչունյան</i> - Ծակոտկեն հանքային տուֆից և արծաթի նանոմասնիկներից բաղկացած նանոկոմպոզիտ գոիչի հակամանրէային ակտիվությունը գրամ-դրական և գրամ-բացասական բակտերիաների նկատմամբ. տարբեր էֆեկտներ և կախվածություն արծաթի կոնցենտրացիայից	327

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

<i>Ք. Վ. Ղազարյան, Շ. Գ. Մարգարյան</i> - Միգրոտիների տարբեր օրգանների ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության համեմատական վերլուծությունը	69
<i>Լ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Մ. Նատյան, Դ. Օ. Թերզյան, Ա. Վ. Մարգարյան</i> - Գորտի ուղեղիկացանցային պրոյեկցիոն համակարգի նեյրոնալ մեխանիզմները	76
<i>Ա. Ս. Չոբանյան, Հ. Հ. Մկրտչյան, Ա. Լ. Գրիգորյան, Ա. Ա. Մելքոնյան</i> - Սինապտիկ փոխանցման մաթեմատիկական մոդել՝ երկարատև պոտենցիալի .	335

ԲՈՒՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ժ. Հ. Վարդանյան</i> - Հայաստանի բնության հատուկ պահպանվող տարածքների դենդրոֆլորաների տաքսոնոմիական կազմի համեմատական վերլուծություն	168
<i>Ժ. Հ. Վարդանյան, Մ. Մ. Գրիգորյան</i> - Ծառաբույսերի պարտիզային ձևերի տաքսոնոմիական բազմազանությունը և դրանց ներմուծման հնարավորությունները Հայաստանում	239

ԲԱՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ա. Ս. Սահակյան</i> - Տապանակիր լեռան ավանդապատումը և Հայաստանի սրբազնացումը	246
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ 116-го ТОМА

МАТЕМАТИКА

<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян</i> – О граничных значениях произведения B_α	7
<i>А. Р. Назарян</i> – Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности	13
<i>А. Г. Аракелян</i> – Конфигурации сфер в пространствах постоянной кривизны	91
<i>П. Э. Мелик-Адамян</i> – О симметрических операторах с вещественной точкой регулярного типа	103
<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян</i> – О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке	147
<i>А. Ю. Шахвердян</i> – Дискретная емкость и разности высшего порядка от Марковских цепей с двумя состояниями	195
<i>К. А. Керян</i> – Теорема единственности для кратных рядов Чисельского	263
<i>К. Л. Аветисян, А. И. Петросян</i> – О некоторых операторах типа Бергмана с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$	270
<i>П. Э. Мелик-Адамян</i> – Об операторе приведения Калкина для обратимых симметрических операторов	278
<i>Л. З. Геворгян</i> – О методе Раманужана решения уравнений с аналитическими функциями	284

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян</i> – О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них	108
--	-----

МЕХАНИКА

<i>С. П. Степанян</i> – Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры	26
<i>С. О. Саркисян, М. В. Хачатрян</i> – Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций	34
<i>С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян</i> – Напряжения в конической трубке космического лифта	43
<i>Р. М. Киракосян</i> – Неклассическая задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки полями	115
<i>Р. М. Киракосян, С. П. Степанян</i> – Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание	120
<i>С. М. Мхитарян</i> – Применение метода Крылова и Боголюбова к решению интегральных уравнений одного класса контактных задач теории упругости	128
<i>С. М. Мхитарян</i> – Применение квадратурных формул Гаусса к решению интегральных уравнений одного класса контактных задач теории упругости	202
<i>А. А. Берлин, Л. И. Маневич, С. О. Саркисян, С. А. Тиман</i> – Континуальная моментная теория упругости стесненного вращения для кристалла полиэтилена	210
<i>М. С. Григорян, М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян</i> – О двух смешанных граничных задачах для упругого слоя при антиплоской деформации	291

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян* – Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии ... 136

ФИЗИКА

- А. Е. Тоноян* – Теоретическое исследование поведения ^{41}K атомов в π -поляризованном лазерном излучении в присутствии сильного магнитного поля..... 48
- К. Г. Агаронян, Н. Б. Маргарян* – Энергия связи экранированного экситона в полупроводниковой квантовой яме с односторонним диэлектрическим усилением .. 57
- Р. А. Аланакян* – Рождение фермионов в e^+e^- -столкновениях 301

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Г. Н. Саргсян* – Квантово-химическое обоснование и моделирование механизма мономолекулярного распада органического соединения при термической активации. Расчет констант скорости мономолекулярного спонтанного распада виниловых эфиров. 2 64
- А. С. Мартиросян, С. В. Царукян* – Исследование модели взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в присутствии кислорода на активной и пассивной поверхностях 219
- А. С. Мартиросян* – О возможности гетерогенного взаимодействия радикалов $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2$ с альдегидом 312

ГЕОФИЗИКА

- В. Ю. Бурмин, А. М. Аветисян* – Сравнительный анализ афтершокового процесса Спитакского землетрясения по наблюдениям близких станций 225

ХИМИЯ

- С. А. Саргисян, К. С. Маргарян, А. С. Саркисян* – Одностадийный метод формирования металлосодержащих полимерных покрытий 317

ГЕОХИМИЯ

- С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян* – Результаты гидрогеологического мониторинга геодинамических процессов территории Армении 141

БИОХИМИЯ

- В. О. Топузян, Т. С. Хачатрян* – Коррекция синдрома низкого трийодтиронина у крыс посредством холиновых эфиров N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот ... 148
- Т. С. Хачатрян, В. О. Топузян* – Сравнительный анализ воздействия сверхмалых доз биологически активных веществ в условиях синдрома низкого трийодтиронина у крыс 233
- Г. А. Геворкян, А. М. Акопян, О. А. Мовсисян, А. А. Агабабова* – Микробиота кишечника крыс под воздействием амфетамина 321

МИКРОБИОЛОГИЯ

- Л. Г. Акопян, Н. М. Арутюнян, К. В. Арутюнян, А. А. Трчунян* – Микробиологические и адгезивные свойства традиционных армянских кисломолочных продуктов мацун и йогурт 154
- Н. С. Мнацаканян, А. А. Трчунян* - Антибактериальная активность против грамположительных и грамотрицательных бактерий нанокompозитного фильтра на основе пористого минерала туфа и наночастиц серебра: различные эффекты и зависимость от концентрации серебра 327

ФИЗИОЛОГИЯ

- К. В. Казарян, Ш. Г. Маргарян* – Сравнительный анализ характеристик спонтанной электрической активности различных органов мочевого тракта крысы 69
- Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян, А. В. Маркарян* – Нейронные механизмы мозжечково-ретикулярной проекционной системы лягушки 76

<i>А. С. Чобанян, О. А. Мкртчян, А. Л. Григорян, А. А. Мелконян</i> - Компьютерное моделирование долгодлящей потенции	335
БОТАНИКА	
<i>Ж. А. Варданян</i> – Сравнительный анализ таксономического состава дендро-флор особо охраняемых и природных территорий Армении.....	168
<i>Ж. А. Варданян, М. М. Григорян</i> – Таксономическое разнообразие садовых форм древесных растений и возможности их интродукции в Армении	239
ФИЛОЛОГИЯ	
<i>А. С. Саакян</i> – Легенда о горе ковчега и сакрализация Армении	246

CONTENTS of 116th VOLUME

MATHEMATICS

V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan, I. V. Hovhannisyan – On the Boundary Values of the Product B_α	7
A. R. Nazaryan – Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimension Two with Unity Indexes of Regularity and Singularity	13
A. H. Arakelyan – Configurations of Spheres in Spaces of Constant Curvature	91
P. E. Melik-Adamyany – On Symmetric Operators with a Real Point of Regular Type	103
V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan – On Boundary Properties of Partial Products of Djrbashyan and Blaschke	187
A. Yu. Shahverdian – A Discrete Capacity and Higher-Order Differences of Two-State Markov Chains	195
K. A. Keryan – Uniqueness Theorem for Multiple Ciesielski Series	263
K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan – On Some Bergman Type Operators with Normal Weights Over the Ball in $\mathbb{C}^n$	270
P. E. Melik-Adamyany – On the Calkin Reduction Operator for Invertible Symmetric Operators	278
L. Z. Gevorgyan - On Ramanujan Method of Solution of Equations with Analytic Functions	284

APPLIED MATHEMATICS

A. A. Chubaryan, A. S. Tchitoyan, A. A. Khamisyan – On Some Proof Systems for Many-Valued Logics and on Proof Complexities in It	108
--	-----

MECHANICS

S. P. Stepanyan – Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support	26
S. H. Sargsyan, M. V. Khachatryan – Mathematical Model of Elastic Plane Curve Beam (Circular) with Consideration of Shear Deformations on the Basis of the Classical Theory of Elasticity	34
S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan - Stresses in a Tapered Space Elevator Tube	43
R. M. Kirakosyan - The Non-Classical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Orthotropic Round Plate	115
R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan – The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation	120
S. M. Mkhitarian – Application of the Krylov-Bogolyubov Method for Solving Integral Equations of a Class of Contact Problems of the Theory of Elasticity	128
S. M. Mkhitarian – Application of Gauss Quadrature Formulas to the Solution of Integral Equations of One Class of Contact Problems of Elasticity Theory.....	202
A. A. Berlin, L. I. Manevich, S. H. Sargsyan, S. A. Timan – Continual Moment Theory of Elasticity with Constrained Rotation for Polyethylene Crystal	210
M. S. Grigoryan, M. S. Mkrtchyan, S.M. Mkhitarian - On Two Mixed Boundary Value Problems for an Elastic Layer under Antiplane Deformation	291

ELASTICITY THEORY

R. K. Aleksanyan, V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan – Singularities in the Corner Points of the Elastic Wedge from the Piezoelectric Material of the Cubic Symmetry.....	136
---	-----

PHYSICS

- A. Y. Tonoyan – Theoretical Investigation of ^{41}K States Behavior under Strong Magnetic Field and π Polarized Laser Field 48
- K. H. Aharonyan, N. B. Margaryan – Binding energy of the one-sided dielectrically enhanced screened exciton in semiconductor quantum well 57
- R. H. Alanakyan – Production of Fermions in e^+e^- -collisions 301

CHEMICAL PHYSICS

- G. N. Sargsyan - Quantum-chemical Explanation and Modeling of Mechanism of Unimolecular Decay of Organic Compounds under Thermal Activation. Calculation of the Constant of Rate of Vinyl Ethers. 2 64
- A. S. Martirosyan, S. V. Tsarukyan – Investigation of a Model of Interaction between Organic Compound and CH_3O_2 Radicals in the Presence of Oxygen on the Active and Passive Surfaces 219
- A. S. Martirosyan – About the Possibility of the Heterogeneous Interaction of $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2$ Radicals with Aldehyde 312

GEOPHISICS

- V. Yu. Burmin, A. M. Avetisyan – Comparative Analysis of the Aftershock Process of Spitak Earthquake on Observations Close Stations 225

CHEMISTRY

- S. H. Sargsyan, K. M. Margaryan, A. S. Sargsyan – One-Step Method for the Formation of Metal-Polymer Coatings 317

GEOCHEMISTRY

- S. V. Grigoryan, R. A. Pashayan, L. V. Arutyunyan - The Results of Hydrogeological Monitoring of Hydrodynamic Processes of the Territory of Armenia 141

BIOCHEMISTRY

- V. O. Topuzyan, T. S. Khachatryan – N-Substituted- α , β -Dehydroaminoacids Choline Ethers in Low Triiodothyronine Syndrome in Rats 148
- T. S. Khachatryan, V. O. Topuzyan - The Comparative Analysis of the Action of Ultra-Low Doses of Biologically Active Substances in the Conditions of a Low Triiodothyronine Syndrome in Rats 233
- G. A. Gevorgyan, A. M. Hakobyan, H. A. Movsesyan, A. A. Agababova - Intestinal Microbiota in Rats under the Influence of Amphetamine 321

MICROBIOLOGY

- L. H. Hakobyan, N. A. Harutyunyan, K. V. Harutyunyan, A. H. Trchounian - Microbiological and Adhesive Properties of Armenian Traditional Fermented Milk Products, Matsun and Yogurt 154
- N. S. Mnatsakanyan, A. H. Trchounian – Antibacterial Activity of the Nanocomposite Filter Based on Porous Mineral Tuff and Silver Nanoparticles Against Gram-Positive and Gram-Negative Bacteria : the Different Effects and Dependence on the Concentration of Silver 327

PHYSIOLOGY

- K. V. Kazaryan, Sh. G. Margaryan – Comparative Analysis of the Characteristics of Spontaneous Electrical Activity in Various Organs of the Urinary Tract 69
- L. R. Manvelyan, A. M. Nasoyan, D. O. Terzyan, A. V. Margaryan - Neuronal Mechanisms of the Cerebello-Reticular Projection System in Frog 76
- A. S. Chobanyan, H. A. Mkrtchian, A. L. Grigoryan, A. A. Melkonyan - Mathematical Model of Synaptic Transmission: Long-Term Potentiation 335

BOTANY

Zh. H. Vardanyan – Comparative Analysis of the Taxonomic Composition of Dendroflora in Specially Protected Natural Areas of Armenia 168

h. H. Vardanyan, M.M. Grigoryan – Taxonomical Diversity of Garden forms of Woody Plants and Options for Their Introduction into Armenia 239

PHILOLOGY

A. S. Sahakyan - The Legend about the Mount of Ark and Sacralization of Armenia..... 246