

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՁԵՎՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2016

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год
Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ,
ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա.
ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ.
ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս
Յու. Հ. ՇՈՒԳՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ.
քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е.
БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р.
МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М.
СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв.
секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E.
BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member
of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г
Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.ame-mail: mas@sci.am>

©НАН РА. Президиум. 2016

©Издательство “Титутюн” НАН РА. 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան – Ջրբաշյանի և Բյաշկեի արտադրյալների հարաբերության եզրային արժեքների մասին 187

Ա. Յու. Շահվերդյան – Դիսկրետ ունակություն և բինար Մարկովի շղթայից վերցված բարձր կարգի տարբերությունները 195

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ս. Մխիթարյան – Գառուի քառակուսացման բանաձևերի կիրառությունը առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը 202

Ա. Ա. Բեռլին, Լ. Ի. Մաննիչ, Ս. Հ. Մարգարյան, Ս. Ա. Տիման – Պոլիէթիլենային բյուրեղի համար կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսությունը 210

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ս. Մարտիրոսյան, Ս.Վ. Ծառուկյան – Թթվածնի ներկայությամբ ակտիվ և պասիվ մակերևույթների վրա CH_3O_2 ռադիկալների օրգանական միացության հետ փոխազդեցության մոդելի ուսումնասիրությունը 219

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

Վ. Յու. Բուրմին, Ա. Ս. Ավետիսյան – Սպիտակի երկրաշարժի հետցնցումային պրոցեսների ուսումնասիրությունը մոտակա դիտակայանների տվյալներով 225

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

Տ. Ս. Խաչատրյան, Վ. Օ. Թովուզյան – Կենսաբանական ակտիվ նյութերի գերցածր չափաբաժինների ազդեցության համեմատական վերլուծությունը առնետների մոտ ցածր տրի-յոդթիրոնինի սինդրոմի պայմաններում 233

ԲՈՒՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ժ. Հ. Վարդանյան, Ս. Ս. Գրիգորյան – Ծառաբույսերի պարտիզային ձևերի տաքսոնոմիական բազմազանությունը և դրանց ներմուծման հնարավորությունները Հայաստանում 239

ԲԱՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ս. Սահակյան – Տապանակիր լեռան ավանդապատումը և Հայաստանի սրբազան-ցումը 246

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян</i> – О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке	187
<i>А. Ю. Шахвердян</i> – Дискретная емкость и разности высшего порядка от Марковских цепей с двумя состояниями	195

МЕХАНИКА

<i>С. М. Мхитарян</i> – Применение квадратурных формул Гаусса к решению интегральных уравнений одного класса контактных задач теории упругости	202
<i>А. А. Берлин, Л. И. Маневич, С. О. Саркисян, С. А. Тимман</i> – Континуальная моментная теория упругости стесненного вращения для кристалла полиэтилена	210

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

<i>А. С. Мартиросян, С. В. Царукян</i> – Исследование модели взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в присутствии кислорода на активной и пассивной поверхностях	219
---	-----

ГЕОФИЗИКА

<i>В. Ю. Бурмин, А. М. Аветисян</i> – Сравнительный анализ афтершокового процесса Спитакского землетрясения по наблюдениям близких станций	225
--	-----

БИОХИМИЯ

<i>Т. С. Хачатрян, В. О. Топузян</i> – Сравнительный анализ воздействия сверхмалых доз биологически активных веществ в условиях синдрома низкого трийодтиронина у крыс	233
--	-----

БОТАНИКА

<i>Ж. А. Вардамян, М. М. Григорян</i> – Таксономическое разнообразие садовых форм древесных растений и возможности их интродукции в Армении	239
---	-----

ФИЛОЛОГИЯ

<i>А. С. Саакян</i> – Легенда о горе ковчег и сакрализация Армении	246
--	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan* – On Boundary Properties of Partial Products of Djrbashyan and Blaschke..... 187
- A. Yu. Shahverdian* – A Discrete Capacity and Higher-Order Differences of Two-State Markov Chains 195

MECHANICS

- S. M. Mkhitarian* – Application of Gauss Quadrature Formulas to the Solution of Integral Equations of One Class of Contact Problems of Elasticity Theory..... 202
- A. A. Berlin, L. I. Manevich, S. H. Sargsyan, S. A. Timan* - Continual Moment Theory of Elasticity with Constrained Rotation for Polyethylene Crystal 210

CHEMICAL PHYSICS

- A. S. Martirosyan, S. V. Tsarukyan* – Investigation of a Model of Interaction between Organic Compound and CH_3O_2 Radicals in the Presence of Oxygen on the Active and Passive Surfaces 219

GEOPHISICS

- V. Yu. Burmin, A. M. Avetisyan* – Comparative Analysis of the Aftershock Process of Spitak Earthquake on Observations Close Stations 225

BIOCHEMISTRY

- T. S. Khachatryan, V. O. Topuzyan* – The Comparative Analysis of the Action of Ultra-Low Doses of Biologically Active Substances in the Conditions of a Low Triiodothyronine Syndrome in Rats 233

BOTANY

- Zh. H. Vardanyan, M. M. Grigoryan* – Taxonomical Diversity of Garden forms of Woody Plants and Options for Their Introduction into Armenia 239

PHILOLOGY

- A. S. Sahakyan* - The Legend about the Mount of Ark and Sacralization of Armenia 246

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке

(Представлено 29/ VI 2016)

Ключевые слова: оператор интегриродифференцирования Римана – Лиувилля, произведения Бляшке и Джрбашяна, класс гармонических в единичном круге функций U_α , α -емкость множества E .

Введение. Пусть $-1 < \alpha < +\infty$, $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}, z_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$ такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |z_n|)^{1+\alpha} < +\infty. \quad (1)$$

Бесконечное произведение $B_\alpha(z; \{z_n\}), z \in \mathbb{D}$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом (см. [1], гл. IX):

$$B_\alpha(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{-W_\alpha(z; z_n)\right\},$$

где для $\xi \in \mathbb{D}$

$$W_\alpha(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \bar{\xi}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} z^k.$$

В специальном случае $\alpha = 0$ эти произведения превращаются в произведения Бляшке (см. [1], с. 625):

$$B_0(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \frac{|z_n|}{z_n}.$$

В работе [2] доказано следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями $B_\alpha, (-1 < \alpha < 0)$ и B .

Теорема. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда

$$B_0(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\},$$

где

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1 + \alpha) \left\{ \frac{2}{(1 - z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, |z| < 1,$$

$\omega(\theta)$ – некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

Отметим, что для любой функции $\omega(x)$ из класса Ω (см. [3], гл. 1) М. М. Джрбашяном также определены классы N_ω и произведения B_ω . Подобные классы и произведения определены и верхом полуплоскости [4].

Как известно (см. [5], с. 54), для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - |z_n|}{|e^{i\varphi} - z_n|} < +\infty$$

Для произведений $B_0(-1 < \alpha < 0)$ доказано, что если имеет место условие типа Фростмана (см. [6], с. 139)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |z_n|}{|e^{i\varphi} - z_n|} \right)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный предел произведения B_α .

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0, 2\pi]$. Назовем мерой μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т. е. $\mu([0, 2\pi]) = 1$. Скажем, что мера сосредоточена на B , и запишем $\mu \prec B$, если $\mu(B) = 1$, т. е. если

$$\int_B d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = 1.$$

Множество E , измеримое по Борелю, имеет положительную γ -емкость ($0 < \gamma < 1$), если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x; z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{|e^{it} - re^{ix}|^\gamma}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1 - 0$, т. е. если при некоторой $\mu \prec E$

$$V_\gamma(\mu) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 2\pi} V_\gamma(x; r) \right\} < +\infty.$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$ то скажем, что E имеет γ -емкость, равную нулю, и запишем $\text{cap}_\gamma E = 0$.

В работе [6] доказано, что если последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) и имеет место $(1+\alpha)$ -условие типа Фростмана ($-1 < \alpha < 0$), то везде на $[0, 2\pi]$ существуют конечные радиальные значения (отличные от нуля) произведения $B_\alpha(z; \{z_n\})$, кроме некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$ -емкость которого равна нулю: $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$.

Более того, если точка $z = e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$, то произведение $B_\alpha(z; \{z_n\})$ непрерывно в некоторой окрестности точки $z = e^{i\varphi}$.

Если последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ удовлетворяет условию (1), то (см. [7]) для произведения Бляшке также везде на $[0, 2\pi]$ существует радиальный предел (по модулю равный единице) кроме некоторого множества E , для которого $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$.

Класс U_α ($-1 < \alpha < +\infty$) можно определить (см. [1], с. 650) как множество всех тех функций $u(z), z \in \mathcal{D}$, которые можно представить в следующем виде:

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_\alpha(\varphi - \theta; r) d\psi(\theta), \quad (z = re^{i\varphi}),$$

где

$$P_\alpha(\varphi; r) = \Gamma(1 + \alpha) \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{(1 - re^{i\varphi})^{1+\alpha}} - 1 \right\},$$

$\psi(\vartheta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

В работе [8] доказано, что если для некоторой точки $e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]$, при каком-либо $\alpha, -1 < \alpha < +\infty$ выполняется условие

$$\overline{\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}}} (1 - |z|)^{1+\alpha} |u(z)| = d > 0,$$

где $z \rightarrow e^{i\varphi}$ по касательному к единичной окружности пути, то $u(z)$ не принадлежит классу U_α .

Отметим, что это утверждение в специальном случае $\alpha = 0$ доказано Нафталевичем [9].

Основные результаты. В этой работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна и $n(r)$ – количество точек z_n , лежащих в круге $|z| \leq r < 1$. Тогда если

$$n(r) \leq \frac{\lambda(r)}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

где $\lambda(r)$ такая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \lambda(r) = 0,$$

то для любого значения $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| = 0.$$

Из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда, если для некоторого значения $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| = d > 0,$$

то существует последовательность $\{r_k\}$

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < r_k < \dots < 1, r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1,$$

такая, что

$$n(r_k) = \frac{c}{(1-r_k)^{1+\alpha}}.$$

Теорема 3. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и z стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$ касательным путем. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| = 0.$$

Следуя М. М. Джрбашяну (см. [2], с. 26), через Ω обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$.

2) $\omega(0) = 1, \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна, последовательность $\{r_k\}$

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < r_k < \dots < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 1,$$

такая, что

$$n(r_k) = \frac{c}{(1-r_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \omega(x) dx = +\infty,$$

где $\omega(x)$ – любая неубывающая функция из класса Ω , такая, что

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^\alpha} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} +\infty.$$

С учетом теоремы 4 из теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбабяна. Тогда если для некоторого значения $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}} (1-|z|)^{1+\alpha}} \left| \log \left| \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \omega(x) dx = +\infty,$$

где $\omega(x)$ – любая неубывающая функция из класса Ω , такая, что

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^\alpha} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} +\infty.$$

Далее нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна. Тогда если для некоторого значения $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \left| \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| \right| = d > 0,$$

то точка $e^{i\varphi}$ является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$.

Теорема 7. Пусть $-1 < \alpha < 0$, последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1) Бляшке – Джрбашяна и E – множество тех точек $e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]$, для которых

$$\overline{\lim_{z \leftrightarrow e^{i\varphi}}} (1-|z|)^{1+\alpha} \left| \log \left| \frac{B_\alpha(z; \{z_n\})}{B(z; \{z_n\})} \right| \right| = d > 0.$$

Тогда $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Национальный политехнический университет Армении
e-mail: dallakyan57@mail.ru, mathdep@seua.am

Академик В. С. Закарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях частного произведений Джрбашяна и Бляшке

Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций N Р. Неванлинны, вводя в рассмотрение классы N_α ($-1 < \alpha < \infty$). Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения B_α , которые в специальном

случае $\alpha = 0$ превращаются в произведения Бляшке. В настоящей статье исследуется граничное поведение частного произведений $B_{\alpha}, (-1 < \alpha < 0)$ и $B_0 \equiv B$ Бляшке.

Ակադեմիկոս Վ. Մ. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան

Ջրբաշյանի և Բլաշկեի արտադրյալների հարաբերության եզրային արժեքների մասին

Օգտվելով Ռիման-Լիուվիլի ինտեգրո-դիֆերենցման գաղափարից, Մ. Մ. Զրբաշյանը ընդհանրացրել է Նևանլինայի N դասերը, ներմուծելով միավոր շրջանում մորմորֆ ֆունկցիաների N_{α} դասերը: Այդ ուսումնասիրությունների մեջ էական դեր են խաղում B_{α} արտադրյալները, որոնք $\alpha = 0$ մասնավոր դեպքում վերածվում են Բլաշկեի արտադրյալների: Այս աշխատանքում հետազոտվում է Բլաշկեի $B_{\alpha}, (-1 < \alpha < 0)$ և $B_0 \equiv B$ արտադրյալների հարաբերության եզրային վարքը:

Academician V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan

On Boundary Properties of Partial Products of Djrbashyan and Blaschke

Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator, M. M. Djrbashyan generalized the class of Nevanlinna's meromorphic functions in the unit circle, introducing classes $N_{\alpha}, (-1 < \alpha < +\infty)$. Products B_{α} , which in special case $\alpha = 0$ coincide with the Blaschke product, play the essential role in these investigations. Boundary properties of partial products $B_{\alpha}, (-1 < \alpha < 0)$ and $B_0 \equiv B$ - products Blaschke are investigated.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. заметки. 1968. Т. 4. N 1. С. 3-10.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
4. *Djrbashian A. M.* Functions of α -Bounded Type in the Half-Plane. Springer Science+Business Media, ins. 2005.
5. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
6. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. N 4, 5. С. 288-300.
7. *Broman A.* On two classes of trigonometrical series. Thesis. University of Uppsala. 1947.
8. *Dallakyan R. V.* – Eurasian Math. Journal. 2013. V. 4. N 2. P. 57-63.
9. *Нафталевич А. Г.* – Уч. записки Вильнюсского ун-та. 1956. Т. 5. С. 5-27.
10. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.

2010 Mathematics Subject Classification: 31C40, 31C45, 31CD05, 60J10, 60J45

A. Yu. Shahverdian

Discrete Capacity and Higher-order Differences of Two-state Markov Chains

(Submitted by academician V. S. Zakaryan 10/V 2016)

Key words: Markov chain, Higher-order differences, Ergodic theorems, Wiener criterion

1. Introduction

In this paper an application of the suggested in [1]-[7] difference analysis to studying the two-state Markov chains is presented. The difference analysis is a method for studying irregular and random time series, based on consideration of higher-order absolute differences taken from the series' progressive terms. This method allowed us to reveal some new aspects in dynamical systems: *e.g.*, higher-order-difference version for Lyapunov exponent [3] and bistability of higher-order differences taken from periodic time series, have been established [6].

We study time-homogeneous Markov chains $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty$, whose state space $X = \{x\}$ consists of two different items; more precisely, we suppose that $X = \{0, 1\}$, that is, each component ξ_n of ξ (which describes the chain at the moment n) is a random binary variable.

The main result of this paper, Theorem 1, is a limiting theorem for such chains: it asserts the existence of limit of k th order absolute differences taken from progressive terms of a given series $(\xi_n)_{n=0}^\infty$, when k converges to ∞ remaining on "large" subsets $E \subseteq \mathbb{N}$ of natural series $\mathbb{N}$. The "size" of such sets E is described in terms of some

discrete capacity: such sets E are *thick* sets, defined by means of Wiener criterion type relation from potential theory (see, *e.g.*, [8] and [9]). The limiting process, whose existence asserts Theorem 1, is the equi-distributed random sequence.

The paper consists of three sections. The next Section 2 describes the statement of the considered problem, in Section 3 we present the definitions of discrete capacity, *thin* and *thick* sets, and formulate our Theorem 1.

2. Statement of the problem

Let us explain the statement of the problem which we study. Let

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$$

be some random sequence whose components ξ_n take binary values x from $X = \{0, 1\}$ with some positive probabilities $p_n(x)$, $P(\xi_n = x) = p_n(x)$ ($p_n(0) + p_n(1) = 1$). Then k th order ($k \geq 0$) absolute differences $\xi_n^{(k)}$, defined recurrently as: $\xi_n^{(0)} \equiv \xi_n$ and

$$\xi_n^{(k)} = |\xi_{n+1}^{(k-1)} - \xi_n^{(k-1)}| \quad (n \geq 0),$$

also take binary values with some probabilities $p_n^{(k)}(x)$,

$$P(\xi_n^{(k)} = x) = p_n^{(k)}(x) \quad (p_n^{(k)}(0) + p_n^{(k)}(1) = 1);$$

hence, one can consider k th order difference random binary sequence

$$\xi^{(k)} = (\xi_0^{(k)}, \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}, \dots).$$

We are interested in existence of the limit of $\xi^{(k)}$ when k goes to infinity. Let some infinite $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ be given; we say that $\xi^{(k)}$ converge to a random binary sequence $\xi^{(\infty)}$, if $p_n^{(k)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in X$) tend to some numbers $p_n^{(\infty)}(x)$ ($p_n^{(\infty)}(0) + p_n^{(\infty)}(1) = 1$) as $k \rightarrow \infty$ and $k \in \Lambda$ (convergence by probability on Λ). Given Λ the limiting process

$$\xi^{(\infty)} = \xi_\Lambda^{(\infty)} = (\xi_0^{(\infty)}, \xi_1^{(\infty)}, \dots, \xi_n^{(\infty)}, \dots)$$

(so-called *partial limit*) is defined as random sequence, whose components $\xi_n^{(\infty)}$ take the values $x \in X$ with the probabilities $p_n^{(\infty)}(x)$.

We study time-homogeneous Markov chains ξ , that is, when for $x, x_i, y \in X$

$$P(\xi_n = y | \xi_{n-1} = x, \xi_{n-2} = x_1, \dots, \xi_0 = x_{n-1}) = P(\xi_n = y | \xi_{n-1} = x) \quad (1)$$

(Markov property) and there is some function $\pi(x, y)$ on $X \times X$ such that

$$P(\xi_n = y | \xi_{n-1} = x) = \pi(x, y) \quad \text{for } n \geq 1 \text{ and } x, y \in X \quad (2)$$

(homogeneity). Some computations testify, that if for such ξ an infinite $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ is chosen arbitrarily, the limiting process $\xi_\Lambda^{(\infty)}$ may not exist; on the other hand, a theorem announced in [7] asserts that if $\Lambda = \{2^m - 1 : m \geq 0\}$, then $\xi_\Lambda^{(\infty)}$ exists. The problem which studies the present paper is the following (descriptively): how "large" can be the sets $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ which permit the existence of $\xi_\Lambda^{(\infty)}$, and how their "size" can be described? This paper considers the chains for which $\pi(x, y) > 0$ and

$$\pi(0, 0) \neq \pi(1, 1) \quad \text{and} \quad \pi(0, 0) + \pi(1, 1) \neq 1. \quad (3)$$

We claim that for time-homogeneous binary Markov chains the problem stated is resolved in terms of some discrete capacity defined on $2^\mathbb{N}$ and corresponding *thin* (*fine*) and *thick* sets. The capacity $\mathcal{C}$, considered here, is a modification of the discrete capacity used in [4]. The solution to our problem is given by Theorem 1, which is formulated in terms of thick sets, defined by means of well-known in potential theory Wiener criterion type relation.

3. Some definitions and main theorem

We consider binary Markov chains $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty$ whose state space X consists of two binary symbols, $X = \{0, 1\}$, and for which Eq. (1) holds. We assume that the chains ξ are time-homogeneous, which means that one-step transition probabilities $P(\xi_n = y | \xi_{n-1} = x)$ do not depend on time n , i.e., for some $\pi(x, y)$ Eq. (2) holds; it is also assumed that some initial distribution of probabilities $P(\xi_0 = x)$ on X is given.

To proceed to formulation of our Theorem 1, we first present the notions of discrete capacity $\mathcal{C}$ and associated with this capacity thin and thick sets. The capacity $\mathcal{C}$ is assigned on $2^\mathbb{N}$; to define it, we consider binary codes of natural numbers. Let $k \in \mathbb{N}$, ($k \geq 1$) and $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ be the binary code of k : $k = \sum_{i=0}^p \varepsilon_i 2^i$ where $p \geq 0$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ and $\varepsilon_p = 1$ (binary expansion of k). Let $\nu(k)$ denotes the maximal of such m ($0 \leq m \leq p$), for which all the coefficients ε_i , $0 \leq i \leq m$ of binary expansion of k are equal to 1.

Definition 1. For $e \subseteq \mathbb{N}$ we define

$$\mathcal{C}(e) = \sum_{k \in e} \nu(k). \quad (4)$$

A set $e \subseteq \mathbb{N}$ is called *thin* (or, *fine*) set ($\mathfrak{F}$ -set) if the relation

$$\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \mathcal{C}(e \cap K_p) < \infty, \quad (5)$$

where $K_p = \{k \in \mathbb{N} : 2^p \leq k < 2^{p+1}\}$, holds. If the set $e \subseteq \mathbb{N}$ is not thin (i.e., Eq. (5) is failed), e is called *thick* set ($\mathfrak{T}$ -set).

The $\mathcal{C}(e)$ from Eq. (4) can be expressed in terms of binomial coefficients as follows. Let (for given $k \geq 1$) $\mu(k)$ denotes the maximal of such m ($0 \leq m \leq k$), for which all the binomial coefficients $\binom{k}{i}$, $0 \leq i \leq m$ (first m entries of k th line $(\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \dots, \binom{k}{k})$ of the Pascale triangle), are odd numbers; one can prove that

$$\mu(k) = 2^{\nu(k)}$$

and, therefore,

$$\mathcal{C}(e) = \sum_{k \in e} \log_2 \mu(k).$$

Since for infinite collection of bounded sets $e \subset \mathbb{N}$ and some positive constant we have $\mathcal{C}(e) \leq \text{const} \cdot \mathcal{C}(\partial e)$ (cp. [4]; such inequality is mentioned also in [10] when defining a capacity of clusters from $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, used in some models [11]-[12] of self-organized criticality), which is a characteristic property of classical capacities (e.g., [13]), we call $\mathcal{C}$ a capacity. We note that $\mathcal{C}$ is differed from discrete capacity, considered in denumerable Markov chains and random walk (see, e.g., [13]).

The next Proposition 1 contains some formal properties of capacity $\mathcal{C}$ and fine and thick sets (which we abbreviate as $\mathfrak{F}$ -sets and $\mathfrak{T}$ -sets, respectively); we note that $\mathcal{C}(e) \geq 0$ for arbitrary $e \subseteq \mathbb{N}$.

Proposition 1. The next statements (a)-(f) are true: (a) $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$ and $\mathcal{C}(\mathbb{N}) = \infty$. (b) If $e_1 \subseteq e_2$ then $\mathcal{C}(e_1) \leq \mathcal{C}(e_2)$. (c) $\mathcal{C}(\{2^p \leq k < 2^{p+1}\}) = (1 + o(1))2^p$ ($p \rightarrow \infty$). (d) The $\mathbb{N}$ is $\mathfrak{T}$ -set. (e) Every finite subset of $\mathbb{N}$ is $\mathfrak{F}$ -set and finite union of $\mathfrak{F}$ -sets is $\mathfrak{F}$ -set. (f) If e is $\mathfrak{T}$ -set and e' is $\mathfrak{F}$ -set, then $e \cup e'$ and $e \setminus e'$ are $\mathfrak{T}$ -sets.

By using the next Proposition 2 one can construct more complicated examples of thin and thick subsets of $\mathbb{N}$.

Proposition 2. *Let for $p \geq 1$ the natural numbers $0 \leq s_p \leq p$, $s_p \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$) be given and $E \subseteq \mathbb{N}$ be defined as*

$$E = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{2^p \leq k < 2^{p+1} : \nu(k) \geq s_p\}. \quad (6)$$

Then E is $\mathfrak{F}$ -set if and only if for s_p the condition

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{s_p}{2^{s_p}} < \infty$$

holds.

Definition 2. *A number a is called thick limit point ($\mathfrak{T}$ -limit point or $\mathfrak{T}$ -cluster point) of a given infinite numerical sequence a_k , $k \geq 0$ if there is a $\mathfrak{T}$ -set $E \subseteq \mathbb{N}$ such that*

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in E}} a_k = a.$$

A random binary sequence $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ is called $\mathfrak{T}$ -limit process for a given infinite series of random binary sequences $\xi_k = (\xi_{n,k})_{n=0}^{\infty}$, $k \geq 0$ if for $x \in X$ and $n \geq 0$ the probability $P(\xi_n = x)$ is $\mathfrak{T}$ -limit point for the sequence of probabilities $P(\xi_{n,k} = x)$, $k \geq 0$.

The following Theorem 1 is the main result of this paper.

Theorem 1. *Let $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ be time-homogeneous binary Markov chain for which Eq. (3) holds. Then the equi-distributed random binary sequence is the $\mathfrak{T}$ -limit process for the sequence of higher-order differences $\xi^{(k)} = (\xi_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}$, $k \geq 0$. More precisely, for $x \in X$ and $n \geq 0$ there is a $\mathfrak{T}$ -set $E \subseteq \mathbb{N}$ of the form (6) with $\sum_{p=1}^{\infty} s_p 2^{-s_p} = \infty$, for which*

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in E}} P(\xi_n^{(k)} = x) = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

In certain sense, Theorem 1 can be treated as the higher-order-difference version of the classical ergodic theorem for finite (two-state) Markov chains, where some notions from potential theory are now involved.

To the end, we present some characteristics of sets E from Theorem 1 formulated in terms of their density in natural series. For $m \geq 1$ we denote $E_m = \{k \in E : 1 \leq k \leq m\}$ and consider the ratio $\rho_m(E) = \frac{|E_m|}{m}$ where $|E_m|$ denotes the cardinality of E_m .

Remark 1. The sets $E \subseteq \mathbb{N}$ defined by Eq. (6) in Proposition 2 and presented in formulation of Theorem 1 are of zero density in natural series: $\rho_m(E) \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$. The sets E defined by Eq. (6) can be such that the ratio $\rho_m(E)$ converges to 0 as slowly as we please: given $0 < \delta_m \leq 1$, $\delta_m \downarrow 0$ the $\mathcal{T}$ -set E from Theorem 1 can be constructed in such a way that $\rho_m(E) \geq \delta_m$ for all $m \geq 1$.

In addition we note, that for chains ξ for which $\pi(0,0) = \pi(1,1)$ as well as for chains ξ for which $\pi(0,0) + \pi(1,1) = 1$ (cp. Eq. (3)) the sets E from Eq. (7) are "larger": they are thick sets with respect to capacity considered in [4] and their density equals 1.

Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA

Email: svrdn@yerphi.am

REFERENCES

- [1] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* – Fractals. 1999. V. 7. N. 1. P. 93-103.
- [2] *Shahverdian A. Yu.*, – Fractals. 2000. V. 8. N. 1. P. 49-65.
- [3] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* – Comm. Nonlin. Sci. & Comput. Simul. 2007. V. 12. P. 233-242.
- [4] *Shahverdian A. Yu.* – Reports Armenian Natl. Acad. Sci. 2012. V. 112. N. 2. P. 160-169.
- [5] *Shahverdian A. Yu., Kilicman A., Benosman R. B.* – Adv. Difference Equations. 2012. V. 202. P. 1-10.
- [6] *Shahverdian A. Yu., Agarwal R. P., Benosman R. B.* – Adv. Difference Equations. 2014. V. 60. P. 1-9.
- [7] *Shahverdian A. Yu.* – Proc. Inter. Conf. CSIT-2015. Yerevan. P. 251-252 (reprinted in: IEEE Conference Ser., CSIT-2015. P. 137-138).
- [8] *Brelot M.* – Topologies and Boundaries in Potential Theory. Springer, Berlin, 1971.
- [9] *Shahverdian A. Yu.* – Computational Methods and Function Theory, 2011. V. 11. N. 1. P. 71-121.
- [10] *Shahverdian A. Yu.* – Reports Armenian Natl. Acad. Sci. 2011. V. 111. N. 3. P. 240-249.
- [11] *Shahverdian A. Yu.* – Fractals. 1997. V. 5. N. 2. P. 199-213.
- [12] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* – Comm. Math. Sci. 2008. V. 6. N. 1. P. 217-234.
- [13] *Dynkin E. B., Yushkevich A. A.* – Markov Processes: Theorems and Problems. Plenum Press, New York, 1969.

A. Yu. Shahverdian

Discrete capacity and higher-order differences of two-state Markov chains

The paper studies the time-homogeneous two-state Markov chains; the states are assumed to be binary symbols 0 and 1. The higher-order absolute differences taken from progressive states of a given chain are considered. A discrete capacity of subsets of natural series is defined and a limiting theorem for these differences, formulated in terms of Wiener criterion type relation, is presented.

Ա. Յու. Շահվերդյան

Դիսկրետ ունակություն և բինար Մարկովի շղթայից վերցված բարձր կարգի տարբերությունները

Հոդվածը վերաբերում է Մարկովի համասեռ շղթաներին, որոնց վիճակների բազմությունը կազմված է բինար 0 եւ 1 սիմվոլներից: Դիտարկվում են այդպիսի շղթայի հաջորդական վիճակներից վերցված բարձր կարգի բացարձակ տարբերությունները: Սահմանված է բնական շարքի ենթաբազմության դիսկրետ ունակություն եւ Վիների հայտանիշի տիպի տերմիններով ձևակերպված է սահմանային թեորեմ այդ տարբերությունների համար:

А. Ю. Шахвердян

Дискретная емкость и разности высшего порядка от Марковских цепей с двумя состояниями

В статье рассматриваются однородные Марковские цепи с двумя состояниями: предполагается, что это есть бинарные символы 0 и 1. Рассматриваются абсолютные разности высшего порядка, взятые от состояний цепи в последовательные моменты времени. Вводится понятие дискретной емкости подмножеств натурального ряда и в терминах типа критерия Винера формулируется предельная теорема для этих разностей.

MECHANICS

УДК 539.3

Corresponding member of the NAS RA S. M. Mkhitarian

Application of Gauss Quadrature Formulas to the Solution of Integral Equations of One Class of Contact Problems of Elasticity Theory

(Submitted 1/II 2016)

Keywords: *contact problems, contact pressure, a beam on an elastic base, integral equations, Gauss quadrature formulas, systems of linear equations.*

The quadrature formulas, especially Gauss quadrature formulas for common integrals, are widely used in solving Fredholm integral equations of the second kind [1-3], and analogous Gauss formulas for singular integrals with Cauchy kernel are used in solving singular integral equations [4-6]. The both types of the integral equations are usually met in boundary value problems of mathematical elasticity theory, hydrodynamics, mathematical physics, and in many other problems of applied analysis.

In the present paper which is the continuation of the author's previous paper [7], Gauss quadrature formulas on Chebyshev nodes and on the nodes, coinciding with Legendre polynomials roots, are applied to the solution of Fredholm integral equations of the second kind with symmetric kernels of certain structures. These kernels are represented by the sums of their principle parts in the form of a logarithmic function and regular parts in the form of different continuous functions. By such integral equations a sufficiently large class of contact problems of the theory of elasticity on bending of a beam of finite length on an elastic foundation in the form of a half-plane, strip, wedge in the framework of I.Ja. Shtaerman contact model [8] as well as other similar problems are described. Ultimately, the solutions of these problems are reduced to the solutions of the systems of linear algebraic equations (SLAE).

1. In [7], in a dimensionless form the following governing integral equation (GIE) of a contact problem on bending of a beam of finite length on an elastic half-plane, taking into account the factor of the surface structure of the foundation, is derived by I.Ja. Shtaerman contact model [8]:

$$p_0(\xi) + \int_{-1}^1 \left[\vartheta_0 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + \lambda_0 G_0(\xi, \eta) \right] p_0(\eta) d\eta = h_0(\xi) - \gamma_0 \xi - \alpha_0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (1.1)$$

$$G_0(\xi, \eta) = |\xi - \eta|^3; \quad h_0(\xi) = \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) q_0(\eta) d\eta.$$

Here $p_0(\xi)$ is the unknown dimensionless contact pressure of the beam on the foundation, $q_0(\xi)$ is the dimensionless intensity of the given vertical forces, acting on the upper face of the beam, ϑ_0 and λ_0 are some combinations of the elastic constants, and the parameters γ_0 and α_0 characterize, correspondingly, the rigid rotation angle and the settlement of the beam. The GIE (1.1) is considered under the conditions of the beam equilibrium:

$$\int_{-1}^1 p_0(\eta) d\eta = P_0, \quad \int_{-1}^1 \eta p_0(\eta) d\eta = M_0. \quad (1.2)$$

To solve the GIE (1.1) under the conditions (1.2), let us represent its solution, as in [7], in the form of

$$p_0(\xi) = A_0 \xi + B_0 + \sqrt{1 - \xi^2} \chi_0(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (1.3)$$

where A_0 and B_0 are unknown coefficients, and $\chi_0(\xi)$ is an unknown function continuous over the segment $[-1, 1]$. Substituting $\xi = \pm 1$ into (1.3), we find that after having determined A_0 and B_0 , the values of the contact pressure at the endpoints of the segment $-1 \leq \xi \leq 1$ will be determined by the formulas $p(\pm 1) = \pm A_0 + B_0$.

Further we put (1.3) in GIE (1.1) and calculate elementary integrals of the logarithmic function. We shall have

$$\left[\xi + \vartheta_0 I_2(\xi) + \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) \eta d\eta \right] A_0 + \left[1 + \vartheta_0 I_1(\xi) + \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) d\eta \right] B_0 +$$

$$+ \sqrt{1 - \xi^2} \chi_0(\xi) + \int_{-1}^1 \left[\vartheta_0 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + \lambda_0 G_0(\xi, \eta) \right] \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = h_0(\xi) - \gamma_0 \xi - \alpha_0 \quad (1.4)$$

$$I_1(\xi) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} d\eta = 2 - (1 - \xi) \ln(1 - \xi) - (1 + \xi) \ln(1 + \xi); \quad (1.5)$$

$$I_2(\xi) = \int_{-1}^1 \eta \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} d\eta = \frac{1}{2} \left[(1 + \xi)^2 \ln(1 + \xi) - (1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi) - 2\xi \right] + \xi I_1(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

We put the representation (1.3) into the conditions (1.2). As a result we come to the equations

$$2B_0 + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = P_0, \quad \frac{2}{3} A_0 + \int_{-1}^1 \eta \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = M_0. \quad (1.6)$$

Now in order to calculate the integrals in (1.4) and (1.6), we use Gauss quadrature formulas on Chebyshev nodes [9] and simultaneously choose inner and outer nodes. As the inner nodes we take roots of Chebyshev polynomials of the second kind $U_{N-1}(\eta)$, i. e. $\eta_r = \cos(\pi r / N)$ ($r = \overline{1, N-1}$), but as the outer nodes we take roots of Chebyshev polynomials of the

first kind $T_N(\xi)$, i.e. $\xi_m = \cos[(2m-1)\pi/2N]$ ($m = \overline{1, N}$), where N is an arbitrary natural number. It is evident, that $\eta_r < \xi_r < \eta_{r-1}$ ($r = \overline{1, N}$; $\eta_0 = 1$, $r_N = -1$).

As a result, the equations (1.4) and (1.6) will have, correspondingly, the form of

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\xi_n^2} \chi_0(\xi_n) + \left[\xi_n + \vartheta_0 I_2(\xi_n) + \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\xi_n, \xi_m) \xi_m \sqrt{1-\xi_m^2} \right] A_0 + \\ & + \left[1 + \vartheta_0 I_1(\xi_n) + \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\xi_n, \xi_m) \sqrt{1-\xi_m^2} \right] B_0 + \vartheta_0 \sum_{r=1}^{N-1} \ln \frac{1}{|\xi_n - \eta_r|} a_r \chi_0(\eta_r) + \\ & + \lambda_0 \sum_{r=1}^{N-1} G_0(\xi_n, \eta_r) a_r \chi_0(\eta_r) = h_0(\xi_n) - \gamma_0 \xi_n - \alpha_0 \quad (n = \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$2B_0 + \sum_{r=1}^{N-1} a_r \chi_0(\eta_r) = P_0; \quad \frac{2}{3} A_0 + \sum_{r=1}^{N-1} a_r \eta_r \chi_0(\eta_r) = M_0; \quad a_r = \frac{\pi}{N} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \right). \quad (1.8)$$

Then we take $\chi_0(\eta_r) = P_{N-1}(\eta_r)$ ($r = \overline{1, N-1}$), where

$$P_{N-1}(\eta) = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} T_k(\eta) T_k(\xi_m) \right] \chi_0(\xi_m)$$

is the Lagrange interpolation polynomial of the function $\chi_0(\eta)$ on Chebyshev nodes [10]. It is evident, that

$$\chi_0(\eta_r) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_{rm}^{(N)} \chi_0(\xi_m); \quad S_{rm}^{(N)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos \left(\frac{\pi k r}{N} \right) \cos \left[\frac{\pi k (2m-1)}{2N} \right]. \quad (1.9)$$

Using the well-known expression of the finite sum of cosines [11] (p. 44, formula 1.342.2), we have

$$\begin{aligned} S_{rm}^{(N)} &= \frac{\cos[\pi(2r+2m-1)(N-1)/4N] \sin[\pi(2r+2m-1)/4]}{\sin[\pi(2r+2m-1)/4N]} + \\ &+ \frac{\cos[\pi(2r-2m+1)/4] \sin[\pi(2r-2m+1)(N-1)/4N]}{\sin[\pi(2r-2m+1)/4N]} \quad (r = \overline{1, N-1}; \quad m = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Now, with the help of (1.9)–(1.10) it is easy to see that the equations (1.7) – (1.8) form a SLAE of $N+2$ equations in $N+4$ unknowns $A_0, B_0, \gamma_0, \alpha_0, \chi_0(\xi_m)$ ($m = \overline{1, N}$). The missing two equations will be obtained from (1.4), requiring that it was also satisfied at the endpoints $\xi = \pm 1$ of the segment $-1 \leq \xi \leq 1$. In this way we get the following two equations:

$$\begin{aligned} & \left[1 \mp \vartheta_0 I_2(\mp 1) \mp \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\mp 1, \xi_m) \xi_m \sqrt{1-\xi_m^2} \right] A_0 \mp \\ & \mp \left[1 + \vartheta_0 I_1(\mp 1) + \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\mp 1, \xi_m) \sqrt{1-\xi_m^2} \right] B_0 + \gamma_0 \mp \alpha_0 \pm \\ & \pm \vartheta_0 \sum_{r=1}^{N-1} \ln(1 \pm \eta_r) a_r \chi_0(\eta_r) \mp \lambda_0 \sum_{r=1}^{N-1} G_0(\mp 1, \eta_r) a_r \chi_0(\eta_r) = \mp h_0(\mp 1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Here, according to (1.5) $I_1(-1)=I_1(1)=2-\ln 4$, $I_2(-1)=-I_2(1)=-1$. Further we substitute the expressions $\chi_0(\eta_r)$ from (1.9)–(1.10) into the equations (1.7), (1.8) and (1.11), and introduce the following new unknowns and notations $(\xi_m = \cos[\pi(2m-1)/2N]; m=\overline{1, N})$

$$Y_1 = A_0, \quad Y_2 = B_0, \quad Y_3 = \gamma_0, \quad Y_4 = \alpha_0, \quad Y_{k+4} = X_k = \chi_0(\xi_k) \quad (k=\overline{1, N});$$

$$H_0^\pm = \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\pm 1, \xi_m) \sqrt{1-\xi_m^2}; \quad L_0^\pm = \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N G_0(\pm 1, \xi_m) \xi_m \sqrt{1-\xi_m^2}.$$

As a result, we come to the following SLAE:

$$\begin{aligned} Y_n + \sum_{m=1}^{N+4} K_{nm} Y_m &= c_n \quad (n=\overline{1, N+4}), \quad (1.12) \\ K_{1m} &= \begin{cases} 0 & (m=\overline{1, 4}); \quad m^* = m-4; \quad c_1 = \frac{3}{2} M_0; \\ \frac{3}{2N} \sum_{r=1}^{N-1} a_r \eta_r S_{rm}^{(N)} & (m=\overline{5, N+4}); \end{cases} \quad K_{2m} = \begin{cases} 0 & (m=\overline{1, 4}); \quad m^* = m-4; \quad c_2 = \frac{1}{2} P_0; \\ \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{N-1} a_r S_{rm}^{(N)} & (m=\overline{5, N+4}); \end{cases} \\ K_{3m} &= \begin{cases} 1 - \vartheta_0 I_2(-1) - \lambda_0 L_0^- & (m=1); \\ -[1 + \vartheta_0 I_1(-1) + \lambda_0 H_0^-] & (m=2); \\ 0 & (m=3); \quad -1 \quad (m=4); \quad c_3 = -h_0(-1) \\ \frac{1}{N} \left[\vartheta_0 \sum_{r=1}^{N-1} a_r \ln(1+\eta_r) S_{rm}^{(N)} - \lambda_0 \sum_{r=1}^{N-1} a_r G_0(-1, \eta_r) S_{rm}^{(N)} \right] & (m^* = m-4; \quad m=\overline{5, N+4}); \end{cases} \\ K_{4m} &= \begin{cases} 1 + \vartheta_0 I_2(1) + \lambda_0 L_0^+ & (m=1); \\ 1 + \vartheta_0 I_1(1) + \lambda_0 H_0^+ & (m=2); \\ 1 & (m=3); \quad 0 \quad (m=4); \quad c_4 = h(1); \end{cases} \\ K_{4m} &= -\frac{1}{N} \left[\vartheta_0 \sum_{r=1}^{N-1} a_r \ln(1-\eta_r) S_{rm}^{(N)} - \lambda_0 \sum_{r=1}^{N-1} a_r G_0(1, \eta_r) S_{rm}^{(N)} \right] \quad (m^* = m-4; \quad m=\overline{5, N+4}); \\ K_{nm} &= \begin{cases} \xi_n^* + \vartheta_0 I_2(\xi_n^*) + \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{p=1}^N G_0(\xi_n^*, \xi_p) \xi_p \sqrt{1-\xi_p^2} & (m=1); \\ 1 + \vartheta_0 I_1(\xi_n^*) + \frac{\pi \lambda_0}{N} \sum_{p=1}^N G_0(\xi_n^*, \xi_p) \sqrt{1-\xi_p^2} & (m=2); \\ \xi_n^* & (m=3); \quad 1 & (m=4); \quad c_n = h_0(\xi_n^*) \\ \frac{1}{N} \left[\vartheta_0 \sum_{r=1}^{N-1} a_r \ln \frac{1}{|\xi_n^* - \eta_r|} S_{rm}^{(N)} + \right. & (\xi_n^* = \xi_{n-4}) \\ \left. + \lambda_0 \sum_{r=1}^{N-1} G_0(\xi_n^*, \eta_r) a_r S_{rm}^{(N)} \right] + (\sqrt{1-\xi_n^2} - 1) \delta_{mn} & \\ (m^* = m-4; \quad m=\overline{5, N+4}); \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n); \\ 0 & (m \neq n). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

The main characteristics of the considered problem: dimensionless contact pressure $p_0(\xi)$, dimensionless bending moments $M_0(\xi)$ and transversal forces $Q_0(\xi)$ will be expressed through the solution of SLAE (1.12). According to (1.3) in nodes ξ_m we have

$$p_0(\xi_m) = Y_1 \xi_m + Y_2 + \sqrt{1 - \xi_m^2} Y_{m+4}; \quad (m = \overline{1, N}) \quad (1.13)$$

and the formulas for the bending moments and transversal forces in [7] for the given case will give

$$M_0(\xi) = \frac{Y_1}{2} \left[\xi(\xi^2 - 1) + \frac{2}{3}(1 - \xi^3) \right] + \frac{Y_2}{2}(1 + \xi^2) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-1} |\xi - \eta_r| a_r \chi_0(\eta_r) - f_0(\xi); \quad (1.14)$$

$$Q_0(\xi) = \frac{Y_1}{2}(\xi^2 - 1) + Y_2 \xi + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-1} \text{sign}(\xi - \eta_r) a_r \chi_0(\eta_r) - g_0(\xi), \quad (1.15)$$

where the values $\chi_0(\eta_r)$ in (1.9)–(1.10) should be expressed through $\chi_0(\xi_m) = X_m = Y_{m+4}$.

Thus, the calculation formulas of the discussed problem will be the formulas (1.13)–(1.15).

2. Due to the fact that the logarithmic term of GIE (1.1) on the diagonal $\eta = \xi$ of the square $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ turns into infinity, it was necessary above to choose the inner and outer node points differently. But this difficulty is easy to overcome and then we can take identical inner and outer node points, as it is done when applying Fredholm well known method [1, 2]. Namely, following [1], we transform the GIE (1) to the following form:

$$\begin{aligned} & [1 + \vartheta_0 I_1(\xi)] p_0(\xi) + \vartheta_0 \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} [p_0(\eta) - p_0(\xi)] d\eta + \\ & + \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) p_0(\eta) d\eta = h_0(\xi) - \gamma_0 \xi - \alpha_0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

It is evident, that the intergrand in the first integral at $\xi = \eta$ remains bounded.

GIE (2.1) under the conditions (1.2) is again reduced to SLAE, for the calculation of the integrals this time we use the Gauss quadrature formula on nodes, coinciding with the roots ξ_k of Legendre polynomials $P_N(\xi)$: $P_N(\xi_k) = 0$. As a result, we come to the following SLAE:

$$\begin{aligned} & X_m + \sum_{k=1}^N L_{mk} X_k = b_m \quad (m = \overline{1, N}); \quad (2.2) \\ & L_{mk} = \begin{cases} \vartheta_0 \left[I_1(\xi_m) - \sum_{k=1}^N A_k \ln \frac{1}{|\xi_m - \xi_k|} \right] + \lambda_0 A_m G_0(\xi_m, \xi_m) & (k = m); \\ \vartheta_0 A_k \ln \frac{1}{|\xi_m - \xi_k|} + \lambda_0 A_k G_0(\xi_m, \xi_k) & (k = 1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots, N); \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_k = \frac{2(1-\xi_k^2)}{N^2 P_{N-1}^2(\xi_k)} \quad (k=\overline{1, N}); \quad b_m = h_0(\xi_m) - \gamma_0 \xi_m - \alpha_0 \quad (m=\overline{1, N}); \quad X_k = p_0(\xi_k).$$

Here a prime mark on the summation symbol means a pass of the member with the number $k=m$. Note, that in case of the considered contact problem $G_0(\xi_m, \xi_m) = 0$.

Then the conditions (1.2) lead to the equations

$$\sum_{k=1}^N A_k X_k = P_0; \quad \sum_{k=1}^N A_k \xi_k X_k = M_0. \quad (2.3)$$

Now let the solution of SLAE (2.2) with the right-hand side $h_0(\xi_m)$ be denoted by $X_m^{(1)}$, with the right-hand side ξ_m by $X_m^{(2)}$ and with the right-hand side 1 by $X_m^{(3)}$. Then

$$X_m = X_m^{(1)} - \gamma_0 X_m^{(2)} - \alpha_0 X_m^{(3)} \quad (m=\overline{1, N}). \quad (2.4)$$

Taking into account (2.4), we get from (2.3) the following system of linear equations for parameters γ_0 and α_0 :

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_0 + a_{12}\alpha_0 = d_1; \\ a_{21}\gamma_0 + a_{22}\alpha_0 = d_2 \end{cases}; \quad d_1 = -P_0 + \sum_{k=1}^N A_k \xi_k^{(1)}; \quad d_2 = -M_0 + \sum_{k=1}^N \xi_k A_k X_k^{(1)}; \quad (2.5)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^N A_k X_k^{(2)}; \quad a_{12} = \sum_{k=1}^N A_k X_k^{(3)}; \quad a_{21} = \sum_{k=1}^N \xi_k A_k X_k^{(2)}; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^N \xi_k A_k X_k^{(3)}.$$

Thus, the solution of GIE (2.1) under the conditions (1.2) is reduced to the successive solution of SLAEs (2.2) and (2.5).

After solving these systems, the values of the dimensionless contact pressure at the node points ξ_m according to (2.4) will be determined by the formula

$$p_0(\xi_m) = X_m = X_m^{(1)} - \gamma_0 X_m^{(2)} - \alpha_0 X_m^{(3)} \quad (m=\overline{1, N}) \quad (2.6)$$

and the dimensionless bending moments $M_0(\xi)$ and transversal forces $Q_0(\xi)$ by the formulas

$$\begin{aligned} M_0(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |\xi - \xi_k| A_k X_k - f_0(\xi); \\ Q_0(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(\xi - \xi_k) A_k X_k - g_0(\xi). \end{aligned} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.7)$$

So, the main characteristics of the contact problem in the given case are expressed by the formulas (2.6)–(2.7). In the future the numerical analysis of these characteristics obtained by different methods will be carried out and the comparative analysis of obtained results will be conducted.

Institute of Mechanics of NAS RA

Corresponding member of NAS RA S.M. Mkhitaryan

Application of Gauss Quadrature Formulas to the Solution of Integral Equations of One Class of Contact Problems of Elasticity Theory

Gauss quadrature formulas on Chebyshev nodes and on the nodes, coinciding with Legendre polynomials roots, are applied to the solution of Fredholm integral equations of the second kind with symmetric kernels. These kernels are represented by the sums of their principle parts in the form of a logarithmic function and regular parts in the form of various continuous functions. A fairly wide class of contact problems on the bending of a beam of finite length on an elastic foundation in the form of half-plane, strip, wedge and other similar problems are described by such equations. Finally, the solutions of these problems are reduced to the solutions of the systems of linear algebraic equations.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

**Գաուսի քառակուսացման բանաձևերի կիրառությունը
առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի
ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը**

Չերիշևի և Լեժանդրի բազմանդամների արմատների հետ համընկնող հանգույցներով Գաուսի քառակուսացման բանաձևերը կիրառվում են սիմետրիկ կորիզներով, Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը: Այդ կորիզները ներկայացվում են լոգարիթմական ֆունկցիայի տեսքով իրենց գլխավոր մասի և տարրեր անընդհատ ֆունկցիաների տեսքով իրենց ռեգուլյար մասերի գումարներով: Այդպիսի հավասարումներով նկարագրվում է կիսահարթության, շերտի, սեպի տեսքով առաձգական հիմքերի վրա վերջավոր երկարության հեծանի ծոման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրների բավականաչափ լայն դաս: Արդյունքում այդ խնդիրների լուծումները բերվում են գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծումներին:

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

Применение квадратурных формул Гаусса к решению интегральных уравнений одного класса контактных задач теории упругости

Квадратурные формулы Гаусса по чебышевским узлам и по узлам, совпадающим с корнями многочленов Лежандра, применяются к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода с симметрическими ядрами. Эти ядра представляются суммами своих главных частей в виде логарифмической функции и регулярных частей в виде различных непрерывных функций. Такими уравнениями описывается достаточно широкий класс контактных задач об изгибе балки конечной длины на упругом основании в форме полуплоскости, полосы, клина. В конечном итоге решения этих задач сводятся к решениям систем линейных алгебраических уравнений.

References

1. *Verlan A. F., Sizikov V. S.* Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs, Reference Manual. Kiev. Naukova Dumka. 1986. 544 p.
2. *Kantarovich L.V., Krylov V. E.* Approximate methods of higher analysis. M. – L. Fizmatgiz. 1962. 708 p.
3. *Virghbitsky V. M.* Bases of numerical methods. M. High school. 2009. 848 p.
4. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T.S.* The numerical solution of singular integral equations. Methods of analysis and solution of crack problems. Nurdhoff Intern. Publ. 1973. P. 368-425.
5. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* – Quart. Appl. Math. 1977. V. 35. N 1. P. 173-185.
6. *Belotserkovsky S. M., Lifarov I. K.* Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, theory of elasticity and electrodynamics. M. Nauka. 1985. 256 p. (in Russian).
7. *Mkhitaryan S. M.* – Reports NAS RA. 2016. V. 116. N 2. P. 128-135.
8. *Staerman I. Y.* Contact Problem of Theory of Elasticity. M. – L. Gostekhizdat. 1949. 270 p. (in Russian).
9. *Krylov V. E., Bobkov V.V. Monastyrny P.E.* Calculation methods. V.1 M. Nauka, 1976. 304 p.
10. *Korn G., Korn T. M.* Mathematical Handbook. M. Nauka. 1968. 720 p. (in Russian).
11. *Gradshtein E. S., Ryghik E. M.* Table of integrals, Sums, Orders and Compositions. M. Nauka. 1971. 1108 p.

Известно, что для описания структурных свойств таких полимерных цепей кроме центрального взаимодействия необходимо учитывать моментное или так называемое торсионное взаимодействие. Это означает, что корректная теория упругости таких полимерных кристаллов, как полиэтилен, должна быть моментной, т. е. принадлежать классу теорий типа Коссера. В связи с этим в работах [8-10], по-видимому, впервые, высказывалось мнение о применимости к простейшему полимерному кристаллу – полиэтилену континуальной моментной теории, построение которой можно осуществлять непосредственно по молекулярной модели. Однако в этих работах полный анализ был проведен только для случая продольной динамики, в котором явно определенные моментные характеристики играли, как оказалось, подчиненную роль. В работе [11] эта проблема изучена в случае трансверсальной динамики. После построения молекулярной модели полиэтилена и перехода к континуальной модели (в длинноволновом приближении) показывается, что в дифференциальных уравнениях типа Ламе присутствуют четвертые производные от перемещений по продольной координате, а это означает, что в данном случае имеем дело с моментной теорией упругости. Весьма важно констатировать, что континуальные модули упругости в указанной работе могут быть вычислены через параметры (геометрические и силовые) молекулярной модели. Возникает весьма актуальный вопрос: с какой феноменологической моментной теорией упругости имеем дело в данном случае для кристалла полиэтилена.

2. Континуальная моментная теория упругости стесненного вращения для кристалла полиэтилена. То, что в континуальные уравнения типа Ламе [11] для полиэтилена входят четвертые производные от перемещений по продольной координате, приводит к предположению, что это – система уравнений моментной теории упругости именно со стесненным вращением. Определение этой системы и является основным вопросом данного исследования (отметим, что эта модель, так или иначе, будет частным случаем общей теории со стесненным вращением [12]). Далее, исходя из физического подхода к деформациям полимерных цепей типа зигзаг ясно, что изгиб цепи происходит в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и что соответствующие моментные напряжения (в континуальном приближении) взаимно связаны. Это означает, что упругие свойства (в том числе и моментные) континуального полиэтилена имеют характер ортотропии.

На рис. 1 приведено напряжённое состояние в произвольной внутренней точке континуального приближения полиэтилена. Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{32}, \sigma_{23}$ – обычные напряжения, а μ_{31} и μ_{13} – моментные напряжения. Моментные напряжения удобно изображать также векторами с двумя стрелками (рис. 1).

Применяя к указанному элементарному параллелепипеду уравнения равновесия (или движения, если рассматриваемое тело находится в движении, придерживаясь принципа Даламбера), запишем

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

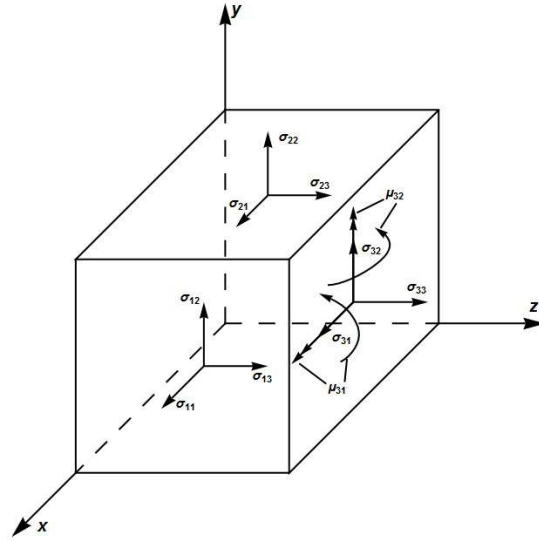


Рис. 1.

После раскрытия этих уравнений приходим к следующим дифференциальным уравнениям равновесия (или движения) моментной теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \mu_x}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) = 0 \quad \left(I \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \mu_y}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) = 0 \quad \left(I \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right), \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}. \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность материала полиэтилена, а I – константа, характеризующая инерционные свойства континуального полиэтилена при вращательном движении элементарного параллелепипеда (в дальнейшем инерционными моментами вращательного движения $I \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}$, $I \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2}$ будем пренебрегать).

Геометрические соотношения деформации выражаются формулами

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}, \quad \chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \quad (3)$$

где ω_1 и ω_2 – угол вращения элементарного параллелепипеда относительно осей x и y .

Так как имеем дело со стесненным вращением, указанные компоненты вектора вращения частиц связаны с перемещениями по известной векторной формуле классической теории упругости: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$.

В данном случае имеем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Физические соотношения упругости представляют соотношения упругости для ортотропного упругого тела, когда в напряженном состоянии участвуют также и моментные напряжения μ_{31}, μ_{32} :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{11} \varepsilon_{22} + c_{33}^{11} \varepsilon_{33}, & \sigma_{31} + \sigma_{13} = 2c_{13}^{13} \varepsilon_{13}, \\ \sigma_{22} = c_{22}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{22} \varepsilon_{33}, & \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2c_{23}^{23} \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{33} = c_{33}^{11} \varepsilon_{11} + c_{33}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}, & \mu_{31} = k_1 \chi_{31} - k_2 \chi_{32}, \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} = c_{12}^{12} \varepsilon_{12}, & \mu_{32} = k_1 \chi_{32} - k_2 \chi_{31}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь C_{ij}^{pq}, k_1 и k_2 – упругие константы континуального полиэтилена, которые в работе [11] выражаются через параметры молекулярной модели полиэтилена.

Подставляя (2), (3) (с учетом (4)) в формулы обобщенного закона Гука (5) и в полученные уравнения равновесия (1), приходим к уравнениям типа Ламе построенной феноменологической моментной теории упругости со стесненным вращением:

$$\begin{aligned} & \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_1 + (c_{22}^{11} + c_{12}^{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (c_{33}^{11} + c_{13}^{13}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} - \\ & - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (c_{12}^{12} + c_{22}^{11}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \left(c_{12}^{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{22}^{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{23}^{23} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_2 + (c_{33}^{22} + c_{23}^{23}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} + \\ & + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} - \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial z^3} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & (c_{13}^{13} + c_{33}^{11}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + (c_{23}^{23} + c_{33}^{22}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \left(c_{13}^{13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{23}^{23} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{33}^{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_3 + \\ & + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial y \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_2}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial z^2} - \\ & - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial y \partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Закон сохранения энергии. Чтобы получить уравнение баланса энергии (закон сохранения энергии), поступим следующим образом: умножим первые три уравнения равновесия из системы (1) соответственно на u_1, u_2, u_3 и сложим все эти равенства. Полученное равенство интегрируем по объёму тела и после некоторых преобразований придем к следующему равенству (с учетом формул (2), а также того, что $\sigma_{12} = \sigma_{21}$):

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \sigma_{31} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \sigma_{23} \frac{\partial u_3}{\partial y} + \sigma_{32} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{21} u_1 + \sigma_{22} u_2 + \sigma_{23} u_3) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом равенстве (в левой части) вместо $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ подставим их выражения по обобщенному закону Гука (5), а вместо $\sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ – по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_y}{\partial z}, \quad \sigma_{32} = c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_x}{\partial z}, \\ \sigma_{31} &= c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_y}{\partial z}, \quad \sigma_{23} = c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10)$$

которые получаются при решении следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} = \frac{\partial \mu_y}{\partial z}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right), \\ \sigma_{32} - \sigma_{23} = \frac{\partial \mu_x}{\partial z}. \end{cases} \quad (11)$$

В результате (с учетом формул (4) и (3)) получим закон сохранения энергии в построенной моментной теории упругости со стесненным вращением

$$W = A, \quad (12)$$

где W – потенциальная энергия деформации в теле,

$$W = \iiint_{(V)} W_0 dx dy dz, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} \left(c_{11}^{11} \varepsilon_{11}^2 + c_{22}^{22} \varepsilon_{22}^2 + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}^2 + c_{12}^{12} \varepsilon_{12}^2 + c_{13}^{13} \varepsilon_{13}^2 + c_{23}^{23} \varepsilon_{23}^2 + 2c_{22}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2c_{33}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \right. \\ & \left. + 2c_{33}^{22} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + k_1 \chi_{31}^2 + k_1 \chi_{32}^2 - 2k_2 \chi_{31} \chi_{32} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации; A – работа внешних поверхностных силовых и моментных напряжений:

$$R' = \frac{1}{2} \iint_{(S)} [(\sigma_{11}u_1 + \sigma_{12}u_2 + \sigma_{13}u_3) \cos \lambda + (\sigma_{21}u_1 + \sigma_{22}u_2 + \sigma_{23}u_3) \cos \mu + (\sigma_{31}u_1 + \sigma_{32}u_2 + \sigma_{33}u_3 + \mu_{31}\omega_1 + \mu_{32}\omega_2) \cos v] dS \quad (15)$$

Здесь λ, μ, ν — углы внешней нормали поверхности тела (S) с координатными осями x, y, z (далее будем считать, что тело имеет призматическую форму).

4. Вариационное уравнение. Функционал принципа типа Лагранжа (т. е. функционал принципа возможных перемещений) для данного случая можем записать так:

$$I = \iiint_{(V)} W_0 dx dy dz - \iint_{(S)} [(\sigma'_{11}u_1 + \sigma'_{12}u_2 + \sigma'_{13}u_3) \cos \lambda + (\sigma'_{21}u_1 + \sigma'_{22}u_2 + \sigma'_{23}u_3) \cdot \cos \mu + (\sigma'_{31}u_1 + \sigma'_{32}u_2 + \sigma'_{33}u_3 + \mu'_{31}\omega_1 + \mu'_{32}\omega_2) \cos v] dS. \quad (16)$$

Сам принцип Лагранжа имеет вид

$$\delta I = \delta W - \delta A = 0, \quad (17)$$

где

$$\delta A = \iint_{(S)} [(\sigma'_{11}\delta u_1 + \sigma'_{12}\delta u_2 + \sigma'_{13}\delta u_3) \cos \lambda + (\sigma'_{21}\delta u_1 + \sigma'_{22}\delta u_2 + \sigma'_{23}\delta u_3) \cos \mu + (\sigma'_{31}\delta u_1 + \sigma'_{32}\delta u_2 + \sigma'_{33}\delta u_3 + \mu'_{31}\delta \omega_1 + \mu'_{32}\delta \omega_2) \cos v] dS \quad (18)$$

(на поверхности (S) будем считать, что заданы значения силовых и моментных напряжений).

Составляя δW , после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta W = & \iint_{(S)} [(\sigma_{11}\delta u_1 + \sigma_{12}\delta u_2 + \sigma_{13}\delta u_3) \cos \lambda + (\sigma_{21}\delta u_1 + \sigma_{22}\delta u_2 + \sigma_{23}\delta u_3) \cos \mu + \\ & + (\sigma_{31}\delta u_1 + \sigma_{32}\delta u_2 + \sigma_{33}\delta u_3 + \mu_{31}\delta \omega_1 + \mu_{32}\delta \omega_2) \cos v] dS - \\ & - \iiint_{(V)} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right) \delta u_1 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \right) \delta u_2 + \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) \delta u_3 + \\ & + \left. \left(\frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \right) \delta \omega_1 + \left(\frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \right) \delta \omega_2 \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (19)$$

При выводе этой формулы были использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} c_{13}^{13} \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13} &= c_{13}^{13} \varepsilon_{13} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) = \\ &= (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \delta \omega_2 + \frac{\partial (\sigma_{13} \delta u_3)}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} \delta u_3 + \frac{\partial (\sigma_{31} \delta u_1)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \delta u_1 \end{aligned} \quad (20)$$

и, аналогично,

$$c_{23}^{23} \varepsilon_{23} \delta \varepsilon_{23} = (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \delta \omega_1 + \frac{\partial (\sigma_{23} \delta u_3)}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} \delta u_3 + \frac{\partial (\sigma_{32} \delta u_2)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \delta u_2.$$

Таким образом, принцип Лагранжа примет вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_S \left\{ [(\sigma_{11} - \sigma'_{11}) \delta u_1 + (\sigma_{12} - \sigma'_{12}) \delta u_2 + (\sigma_{13} - \sigma'_{13}) \delta u_3] \cos \lambda + [(\sigma_{21} - \sigma'_{21}) \delta u_1 + \right. \\ & + (\sigma_{22} - \sigma'_{22}) \delta u_2 + (\sigma_{23} - \sigma'_{23}) \delta u_3 + (\mu_{31} - \mu'_{31}) \delta \omega_1 + (\mu_{32} - \mu'_{32}) \delta \omega_2] \cos \nu \Big\} dS - \\ & - \iiint_{(V)} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \right) \delta u_2 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) \delta u_3 + \left[\frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \right] \delta \omega_1 + \\ & \left. + \left[\frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \right] \delta \omega_2 \right\} dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из этого вариационного уравнения следуют все шесть уравнений равновесия (1), а также естественные граничные условия (если тело имеет призматическую форму):

$$1) \lambda = 0^0, \quad \mu = 90^0, \quad \nu = 90^0$$

$$\iint_{(S)} [(\sigma_{11} - \sigma'_{11}) \delta u_1 + (\sigma_{12} - \sigma'_{12}) \delta u_2 + (\sigma_{13} - \sigma'_{13}) \delta u_3] dS = 0$$

$$1) \sigma_{11} = \sigma'_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma'_{12}, \quad \sigma_{13} = \sigma'_{13}.$$

$$2) \lambda = 90^0, \quad \mu = 0^0, \quad \nu = 90^0$$

$$\iint_{(S)} [(\sigma_{21} - \sigma'_{21}) \delta u_1 + (\sigma_{22} - \sigma'_{22}) \delta u_2 + (\sigma_{23} - \sigma'_{23}) \delta u_3] dS = 0$$

$$2) \sigma_{21} = \sigma'_{21}, \quad \sigma_{22} = \sigma'_{22}, \quad \sigma_{23} = \sigma'_{23}.$$

$$3) \lambda = 90^0, \quad \mu = 90^0, \quad \nu = 0^0$$

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} [(\sigma_{31} - \sigma'_{31}) \delta u_1 + (\sigma_{32} - \sigma'_{32}) \delta u_2 + (\sigma_{33} - \sigma'_{33}) \delta u_3 + \\ + (\mu_{31} - \mu'_{31}) \delta \omega_1 + (\mu_{32} - \mu'_{32}) \delta \omega_2] dS = 0 \end{aligned}$$

$$3) \sigma_{31} = \sigma'_{31}, \quad \sigma_{32} = \sigma'_{32}, \quad \sigma_{33} = \sigma'_{33}, \quad \mu_{31} - \mu'_{31}, \quad \mu_{32} = \mu'_{32}.$$

Таким образом, построена моментная теория ортотропного тела со стесненным вращением (как дифференциальная, так и вариационная формы) как адекватная континуальная теория полимера полиэтилена.

В дальнейшем к этой теории будем применять асимптотический метод (на основе физического малого параметра) работы [13] для построения наиболее простой трехмерной моментной теории со стесненным вращением и дальнейшего ее использования для решения конкретных задач в указанной моментной теории упругости, а также строить моментные теории со стесненным вращением (прикладные теории) для тонких стержней и пластин (на основе подхода, разработанного в работах [14-16]) и изуче-

ния на их основе различных задач статики, устойчивости и динамики для указанных тонких тел.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RS-063 и 15-53-05093 соответственно.

¹Институт химической физики им. Н.Н.Семенова РАН

²Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

**Иностранный член НАН РА, академик РАН А. А. Берлин,
Л. И. Маневич, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
С. А. Тиман**

**Континуальная моментная теория упругости стесненного
вращения для кристалла полиэтилена**

Построена континуальная моментная теория упругости со стесненным вращением, которая адекватна молекулярной теории кристаллического полиэтилена. Выведено уравнение баланса энергии и построен вариационный функционал указанной теории.

**ՀՀ ԳԱԱ արտասահմանյան անդամ, ՌԳԱ ակադեմիկոս Ա. Ա. Բերլին,
Լ. Ի. Մանևիչ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Ն. Սարգսյան, Ս. Ա. Տիման**

**Պոլիէթիլենային բյուրեղի համար կաշկանդված պտույտներով
մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսությունը**

Կառուցված է կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսություն, որը համարժեք է պոլիէթիլենային բյուրեղի մոլեկուլյար տեսությանը: Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ նշված առաձգականության տեսության համար դուրս է բերված էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը և կառուցված է այդ տեսության վարիացիոն ֆունկցիոնալը:

**Foreign member of NAS RA, academician of AS of Russian Federation
A. A. Berlin, L. I. Manevich, corresponding member of NAS RA
S. H. Sargsyan, S. A. Timan**

**Continual Moment Theory of Elasticity with Constrained Rotation
for Polyethylene Crystal**

In the present paper continual moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the molecular theory of crystalline polyethylene. Energy balance equation is obtained and variation functional of the above mentioned moment theory with constrained rotation is constructed.

Continual moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the molecular theory of crystalline polyethylene. Energy balance equation is obtained and variation functional of the above mentioned moment theory with constrained rotation is constructed.

Литература

1. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородск. гос. технич. ун-та им Р. Е. Алексеева. 2010. 303 с.
2. Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток. М. Изд-во иностр. лит. 1958. 488 с.
3. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. N 4. С. 57-74.
4. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. – Прикл. матем. и механика. 2007. Т.71. N4. С. 595-615.
5. Беринский И. Е., Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. N5. С. 6-16.
6. Павлов И. С., Потапов А. И. – Доклады РАН. 2008. Т. 421. N 3. С. 348-352.
7. Suiker A. S. I., Metrikine A. V., De Borst R. – Inter. J. Solids and Structures. 2001. V. 38. P. 1563-1583.
8. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Macromol. Theory Simul. 1998. V. 7. P. 579-589.
9. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Macromol. Theory Simul. 1998. V. 7. P. 591-598.
10. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Inter. J. Solids and Structures. 1996. V. 33. P. 1781-1798.
11. Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А. В кн.: Сборник трудов XVII ежегодной научной конференции отдела полимеров и композиционных материалов Института химической физики им. Н. Н. Семенова РАН. Москва. 15-17 февраля 2016 г. М. Изд-во ИХФ РАН. 2016. С. 128-131.
12. Койтер В. Т. – Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. N 3. С. 89-112.
13. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев. Вища школа. 1991. 132 с.
15. Sargsyan S. H. – Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. N1. P.98-108.
16. Саркисян С.О. – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-155.
17. Саркисян С. О., Айрапетян Г. С. – Учен. зап. Гюмрийского гос. пед. ин-та им. М. Налбандяна. 2015. Вып. А. N 1. С. 7-41.

С этой целью варьировались значения констант скорости k_3 , k_7 и k_6 . За ходом процесса в основном следили по расходу радикалов CH_3O_2 и органического соединения, а также по накоплению радикалов RO_2 , $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$, ROOH и суммы десорбированных радикалов CH_3O_2 и RO_2 .

Начальные условия: комнатная температура, $[\text{CH}_3\text{O}_2]_0 = 3 \times 10^{11}$, $[\text{RH}]_0 = 10^{12}$, $[\text{O}_2]_0 = 10^{12}$ частиц см^{-2} . Как показали расчеты, при варьировании k_7 в интервале $10^8 - 10^{14}$ заметных изменений в количествах израсходованных радикалов CH_3O_2 и RH по сравнению с исходным вариантом [6] на активной поверхности не наблюдается. То же самое имеет место в отношении кинетики накопления радикалов RO_2 , $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$, ROOH и суммы десорбированных радикалов CH_3O_2 и RO_2 . Однако картина меняется при уменьшении значений константы k_7 и k_3 от 10^6 и ниже. Сказанное иллюстрируют кинетические данные, представленные на рис. 1, 2.

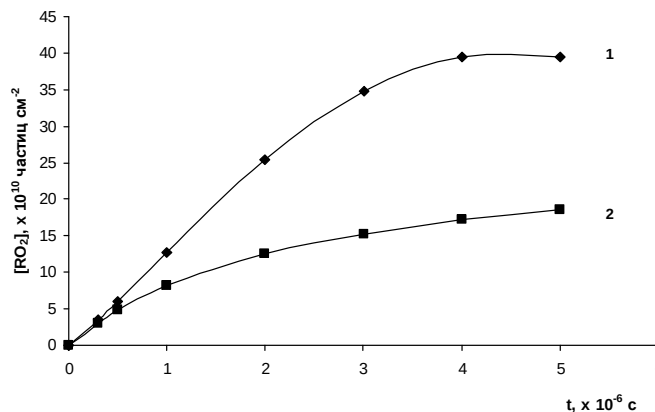


Рис. 1. Кинетика накопления радикалов RO_2 , кривые: 1 — $k_3 = k_7 = 10^6 \text{ с}^{-1}$; 2 — $k_3 = k_7 = 10^5 \text{ с}^{-1}$ ($k_6 = 4 \times 10^{-7} \text{ см}^2 \text{ частиц}^{-1} \text{ с}^{-1}$ [5]).

Характерной особенностью процесса является противоположное поведение концентраций радикалов RO_2 и ROOH со временем. Уменьшение скорости распада пероксидного соединения, т.е. стадии разветвления, естественно сопровождается уменьшением выхода радикалов RO_2 и увеличением накопленного количества гидропероксида. Одновременно это сказывается на выходе суммы десорбированных радикалов CH_3O_2 и RO_2 . При малых значениях скорости разветвления цепи превышения количества радикалов над исходным не наблюдается. Кроме того уменьшается количество израсходованного RH .

Обращает на себя внимание тот факт, что при малых временах на выход ROOH и радикалов RO_2 уменьшение константы стадии разветвления (7) практически мало сказывается, что указывает на существенное влияние на начальной стадии реакции стадии разветвления через распад CH_3OOH . На поздних стадиях реакции из-за существенного вклада стадии (7) выход радикалов RO_2 увеличивается более чем в 2 раза.

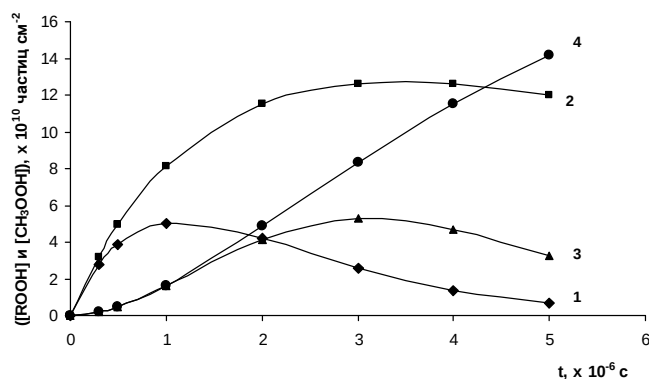


Рис. 2. Кинетика накопления CH_3OOH (1, 2) и ROOH (3, 4), кривые: 1, 3 – $k_3 = k_7 = 10^6 \text{ с}^{-1}$; 2, 4 – $k_3 = k_7 = 10^5 \text{ с}^{-1}$ ($k_6 = 4 \times 10^{-7} \text{ см}^2 \text{ частиц}^{-1} \text{ с}^{-1}$ [5]).

Любопытный результат получается при рассмотрении варианта, когда $k_7 = 0$, т.е. роль стадии (7) не принимается во внимание. Тем не менее, на активной поверхности в присутствии стадии разветвления (3) при больших временах реакции может быть превышение суммарной концентрации пероксидных радикалов, в том числе и десорбированных над исходной концентрацией.

Соответствующие данные о влиянии стадии (6) и ее роли в изучаемом процессе (модели) приведены на рис. 3, 4.

В вышеуказанном диапазоне изменений константы k_6 поведение кривых накопления радикалов RO_2 и $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$, ROOH одинаково. Чем больше расходуется радикалов RO_2 , тем больше образуется гидропероксидов и при той же константе скорости разветвления (распада) больше его накапливается. При уменьшении константы скорости k_6 картина, естественно, по той же причине обратная.

При малых временах выход радикалов RO_2 меняется мало, что находится в согласии с поведением кривой накопления $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$, еще раз указывая на решающую роль стадии (3) на начальной стадии реакции. Что касается выхода ROOH , то уменьшение константы k_6 приводит к его резкому уменьшению. При фиксированном значении константы скорости его распада влияние его на более поздних стадиях реакции по-прежнему значительно.

При варьировании вышеуказанных констант скорости в случае пассивной поверхности в тех же пределах заметного роста концентрации радикалов RO_2 не наблюдается. Скорость разветвления слишком мала, чтобы при значительном уменьшении констант скорости радикальных реакций на пассивной поверхности можно было зарегистрировать заметное размножение радикалов.

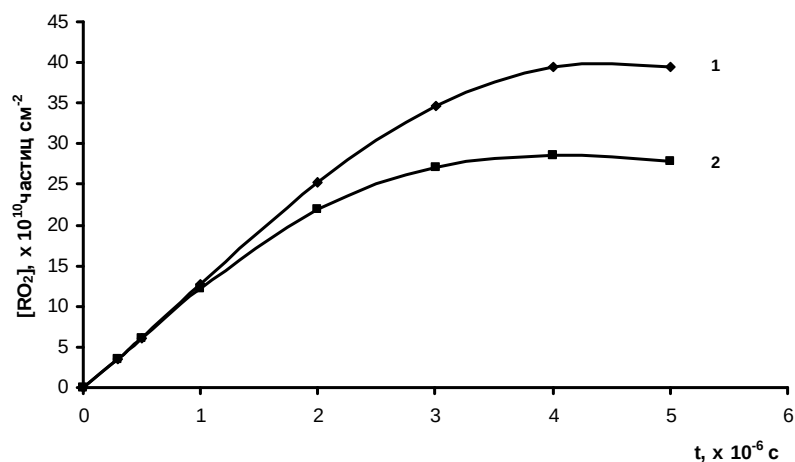


Рис. 3. Кинетика накопления радикалов RO_2 , кривые: 1 – $k_6 = 4 \times 10^{-7}$; 2 – $k_6 = 4 \times 10^{-8}$ $\text{см}^2 \text{частиц}^{-1} \text{с}^{-1}$ ($k_3 = k_7 = 10^6 \text{ с}^{-1}$).

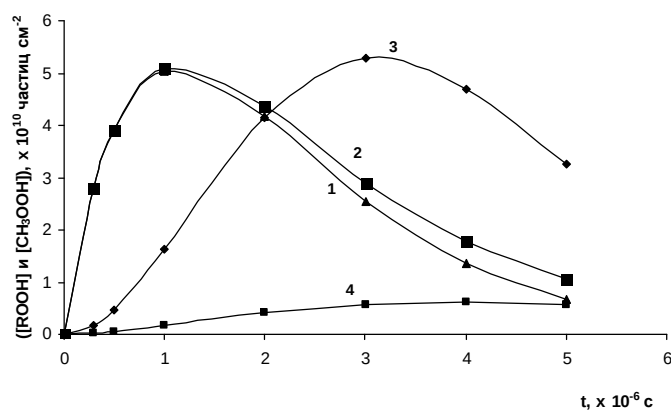


Рис. 4. Кинетика накопления CH_3OOH (1, 2) и ROOH (3, 4), кривые: 1, 3 – $k_6 = 4 \times 10^{-7}$; 2, 4 – $k_6 = 4 \times 10^{-8}$ $\text{см}^2 \text{частиц}^{-1} \text{с}^{-1}$ ($k_3 = k_7 = 10^6 \text{ с}^{-1}$).

На основании расчетных данных можно заключить, что в рамках данной модели принципиальной является скорость распада CH_3OOH и ROOH – продуктов, ответственных за разветвление цепей в сложном процессе взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в присутствии кислорода. Ее влияние с точки зрения размножения радикалов в процессе взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением сильнее влияния скорости ее образования.

Институт химической физики
им. А. Н. Нальбандяна РАН

А. С. Мартиросян, С. В. Царукян

Исследование модели взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в присутствии кислорода на активной и пассивной поверхностях

На примере модели цепного вырожденно-разветвленного процесса исследованы влияние и роль стадий гетерогенного распада пероксидных соединений $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$ и ROOH , ответственных за разветвление цепей, а также стадии образования ROOH с участием пероксидных радикалов RO_2 на взаимодействие радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в присутствии кислорода на активной и пассивной поверхностях. Сделано заключение, что влияние стадии распада пероксидных соединений на процесс взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением сильнее влияния стадии образования гидропероксида.

Ա. Ս. Մարտիրոսյան, Ս.Վ. Ծառուկյան

Թթվածնի ներկայությամբ ակտիվ և պասիվ մակերևույթների վրա CH_3O_2 ռադիկալների օրգանական միացության հետ փոխազդեցության մոդելի ուսումնասիրությունը

Ակտիվ ու պասիվ մակերևույթների վրա և թթվածնի ներկայությամբ, CH_3O_2 ռադիկալների հետ օրգանական միացության փոխազդեցության շղթայական այլասերված-ճյուղավորված պրոցեսի մոդելի օրինակի վրա, ուսումնասիրվել է $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$ և ROOH պերօքսիդային միացությունների՝ պատասխանատու շղթայի ճյուղավորման համար, հետերոգեն քայքայման փուլերի, ինչպես նաև RO_2 պերօքսիդային ռադիկալների մասնակցությամբ ROOH -ի առաջացման փուլի դերը և ազդեցությունը: Արվել է եզրակացություն, որ պերօքսիդային միացությունների քայքայման փուլի ազդեցությունը վերոհիշյալ պրոցեսի վրա, ավելի ուժեղ է, քան հիդրոպերօքսիդի առաջացման փուլինը:

A. S. Martirosyan, S. V. Tsarukyan

Investigation of a Model of Interaction between Organic Compound and CH_3O_2 Radicals in the Presence of Oxygen on the Active and Passive Surfaces

On the example of a model of the chain degenerate branching process the influence and role of the stages of heterogeneous decay of peroxide compounds $\text{CH}_3\text{O}_2\text{H}$ and ROOH , responsible for the chain branching, as well as the ROOH formation with the participation of RO_2 radicals, on the interaction between CH_3O_2 radicals and organic compounds in the presence of oxygen on the active and passive

surfaces have been studied. It was concluded that the influence of the stage of peroxide compounds decay on the above mentioned process is more than that of hydroperoxide formation.

Литература

1. *Vardanyan I. A., Arustamyan A. M., Martirosyan A. S., Tsarukyan S. V.* – Russian Journal of Phys. Chem. A. 2016. V. 90. №4. P. 744-747.
2. *Арустамян А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112, С. 193-199.
3. *Jalali H. A., Manucharova L. A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I. A.* – Russian Journal of Phys. Chem. A. 2011. V. 85. №3. P. 483-485.
4. *Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* – International Journal of Chemical Kinetics. 2004. V. 36. №1. P. 591-595.
5. *Jalali H. A., Vardanyan I. A.* – Archivum Combustionis. 2010. V. 30. №4. P. 297-302.
6. *Мартиросян А. С., Царукян С. В., Варданян И. А.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. №3. С. 249-256.

УДК 550.311

В. Ю. Бурмин¹, А. М. Аветисян²

**Сравнительный анализ афтершокового процесса
Спитакского землетрясения по наблюдениям
близких станций**

(Представлено чл.-кор. НАН РА С.М. Оганисяном 10/III 2016)

Ключевые слова: *землетрясение, афтершоки, гипоцентры.*

Разрушительное Спитакское землетрясение магнитудой $m_b = 6.2$ произошло 7 декабря 1988 г. на севере Республики Армения, в районе г. Спитак. Длина разрыва, вышедшего на поверхность, составляла примерно 35 км. Зона макросейсмических проявлений охватила площадь в 484 тыс. км².

Спитакское землетрясение и его афтершоки достаточно хорошо изучены [1-17].

Координаты гипоцентра Спитакского землетрясения по данным различных служб и публикаций приведены в работе [6]. Более полно и систематизированно изучение афтершокового процесса Спитакского землетрясения приводится в работе [1]. Согласно результатам этого исследования, а также другим публикациям [3-17] очаги афтершоков располагаются в интервале глубин 0-25 км.

В работе [6] как оптимальное решение выбрано

$$\varphi = 40.88 \pm 0.05^\circ \text{N}, \quad \lambda = 44.18 \pm 0.05^\circ \text{E}, \quad h = 5 \pm 5 \text{ км.}$$

По отношению к этому решению координаты эпицентров остальных наиболее надежных решений находятся в пределах ± 10 км, на глубине ± 5 км. Анализ полученных результатов показывает, что кинематические параметры главного толчка и афтершоков, определенные различными сейсмологическими службами, отличаются друг от друга.

Распределение афтершоков Спитакского землетрясения по глубинам по результатам работы [1] показывает, что очаги афтершоков находятся в диапазоне 0-25 км, а согласно работе Кондорской и др. [6] – в основном на глубине менее 10 км.

В региональном масштабе задача локации осложняется тем, что скоростные модели региона неизвестны или определены приближенно, сейсмические станции на территории региона расположены неравномерно, при

этом используют различные алгоритмы определения координат гипоцентров. Как следствие этих факторов координаты гипоцентров землетрясений, как правило, определяются с большими погрешностями [18-20, 23].

В то же время повышение точности определения координат гипоцентров и анализ распределения афтершоков позволят дать более объективную оценку как размера очага, так и физики самого землетрясения. В связи с этим в работе [6] и в отчете Института геофизики и инженерной сейсмологии АН АрмССР за 1990 г. [9] справедливо отмечено, что представленные исследования можно рассматривать как предварительный этап анализа инструментальных данных Спитакского землетрясения.

В работе [1] для определения положения очагов афтершоков использовалась программа НУРО71 [16], которая основана на минимизации функционала невязок времен пробега сейсмических волн. При этом для поиска решений применялся перебор начальных приближений в диапазоне глубин от 1 до 29 км с шагом 2 км. Для расчетов использовался скоростной разрез, который получен методом перебора из условий минимума невязок по нескольким десяткам опорных землетрясений, имевших большое число фаз P - и S -волн.

В работе [22] показано, что для функционала невязки времен пробега сейсмических волн справедлива оценка

$$S_i = \sum_{i=1}^n (t_i - \tilde{t}_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \rho_i (D_i - d_i)^2 + Y(H - h)^2 = S.$$

Здесь D_i и H соответствуют теоретическим временам t_i пробега сейсмических волн от очага до i -й станции, где $D_i = \sqrt{R_i^2 - H^2}$ – эпицентральные расстояния; d_i и h – те же величины, но соответствующие истинному положению гипоцентра; $R_i = v_i t_i$ – гипоцентральные расстояния и H – глубина очага землетрясения; $r_i = u_i t_i$, ($u_i = v_i - \delta v_i$); $\rho_i = v_i^{-2}$ и $Y = \sum_{i=1}^n \rho_i$ – весовые множители, характеризующие неоднородность среды.

Из этого соотношения следует, что малость значения функционала S_i не гарантирует малости значений функционалов невязок в определении глубины гипоцентра землетрясения и эпицентральных расстояний, но малость значения функционала S влечет за собой малость значения функционала невязки времен. Это утверждение – следствие того факта, что квадрат разности $(R_i - r_i)^2$ суть квадрат разностей модулей векторов R_i и r_i и не зависит от их направлений, в то время как сумма квадратов разностей $(D_i - d_i)^2 + (H - h)^2$ есть квадрат модуля разности $R_i - r_i$ соответствующих векторов. Последнее утверждение поясняет рис. 1.

Задача определения гипоцентров землетрясений ставится как задача минимизации функционала

$$S = \sum_{i=1}^n \rho_i (D_i - d_i)^2 + Y(H - h)^2, \quad (1)$$

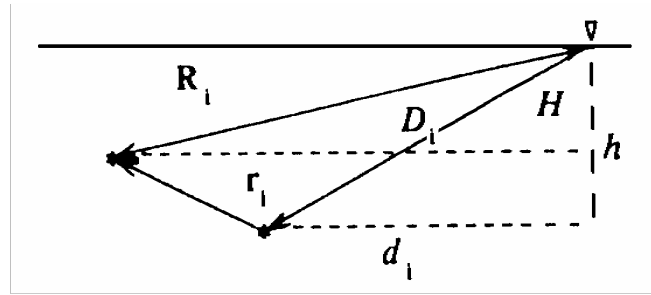


Рис. 1.

где d_i определяются по временам пробега сейсмических волн, а $h \in \Xi$. Ξ – множество возможных глубин гипоцентров землетрясений. При этом величины D_i и H определяются из решения системы нелинейных уравнений, связывающих координаты сейсмических станций (x_i, y_i) и гипоцентра (X, Y, H)

$$(X-x_i)^2 + (Y-y_i)^2 + H^2 = v_i^2(t_i - t_0)^2 = d_i^2 + h^2. \quad (2)$$

Предполагается, что время возникновения землетрясения (время в очаге) t_0 определяется по графику Вадати. Оптимальное значение h_0 ищется простым перебором на множестве Ξ .

Для решения задачи (1), (2) были созданы алгоритм вычислений, который изложен в работах [21, 23], и программа HYPO-SHUM, реализующая этот алгоритм. При этом для того, чтобы учесть особенности строения среды под сейсмическими станциями, под каждой станцией задаётся своя скоростная колонка.

С учетом опыта использования программы HYPO-SHUM для переопределения координат гипоцентров крымско-черноморских землетрясений она использовалась в [21], а исходя из того обстоятельства, что по данным предыдущих исследований все афтершоки расположены в интервале глубин 0-25 км, было решено провести переопределение координат афтершоков Спитакского землетрясения 1988.

Для определения положения афтершоков Спитакского землетрясения использованы данные 11 ближайших сейсмических станций. Всего в сейсмологические бюллетени вошли данные 172 афтершоков.

Территория Армении характеризуется сложным горизонтально-неоднородным строением земной коры. При определении координат афтершоков по данным различных источников для каждой станции были взяты скоростные колонки, которые строились на основе данных ГСЗ и МОВЗ.

Как показано в работе [18], первоочередной задачей для изучения глубинного строения являются анализ исходных данных, корректировка и переопределение координат гипоцентров землетрясений.

Поскольку алгоритм предполагает определение времени в очаге t_0 по графику Вадати, то прежде чем проводить определение координат гипоцентров на первом этапе было проведена корректировка данных таким образом, чтобы точки на графике Вадати имели минимальный разброс. Это

условие является необходимым для того, чтобы определение гипоцентров проводилось с минимальными погрешностями.

На рис. 2, а, б показаны графики зависимости времени пробега S -волны от времени пробега P -волны до и после корректировки исходных данных. Корректировка данных проводилась в основном путем уточнения или отбрасывания времен пробега поперечных волн.

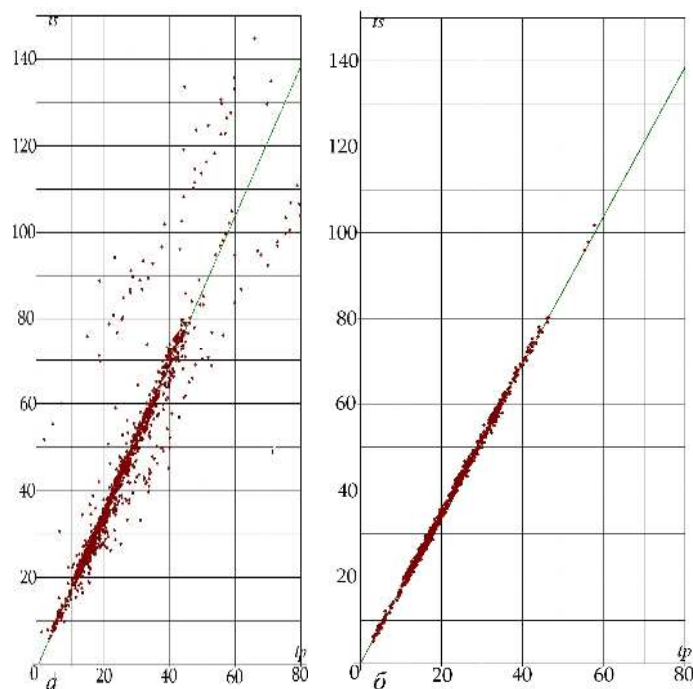


Рис. 2. Зависимость времени пробега S -волны от времени пробега P -волны до (а) и после (б) корректировки исходных данных.

По нашему определению основной толчок имел координаты 40.867° северной широты и 44.199° восточной долготы, глубина очага оценена $H=5.0$ км.

На рис. 3 представлено распределение эпицентров афтершоков Спитакского землетрясения.

На рис. 4, а, б, где представлены распределения гипоцентров афтершоков Спитакского землетрясения по глубинам, видно, что большая часть афтершоков Спитакского землетрясения расположена на глубинах от 0 до 90 км. Есть отдельные события с глубиной до 150 км.

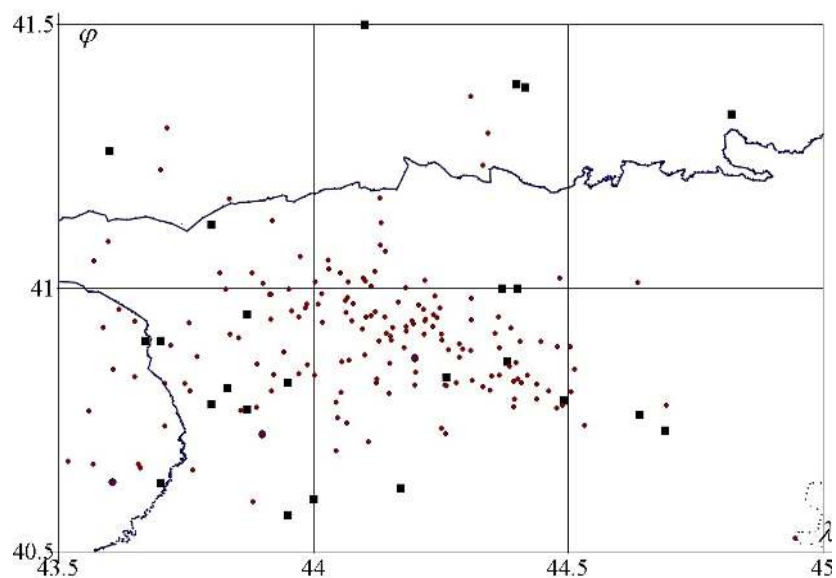


Рис. 3. Распределение эпицентров афтершоков Спитакского землетрясения. Маленькие кружки – эпицентры афтершоков; большой кружок – основной толчок; черные квадратики – сейсмические станции.

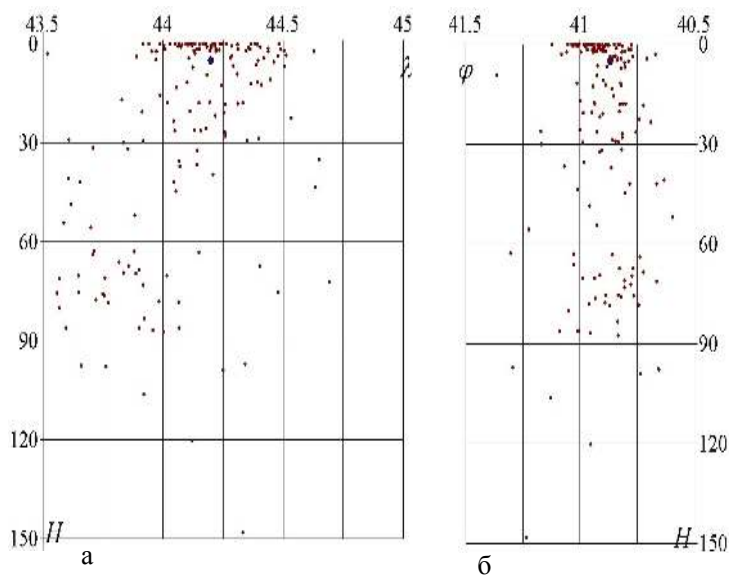


Рис. 4. Распределение гипоцентров афтершоков Спитакского землетрясения по глубинам.

На рис. 5 приведена проекция трехмерного распределения основных толчков и афтершоков.

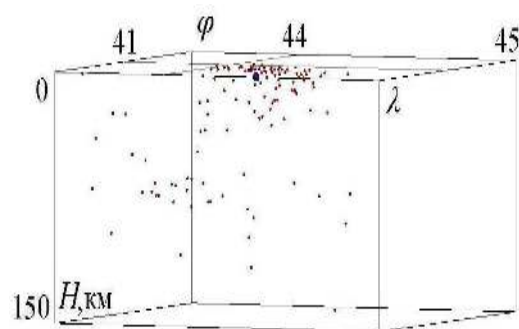


Рис. 5. Проекция трехмерного распределения основного толчка и афтершоков.

На рис. 6, взятом из работы [1], показаны положения эпицентра основного толчка СЗ по различным данным. На карту крестиком нанесено положение эпицентра в соответствии с нашим определением. Там же показаны выходы разрыва на поверхность.

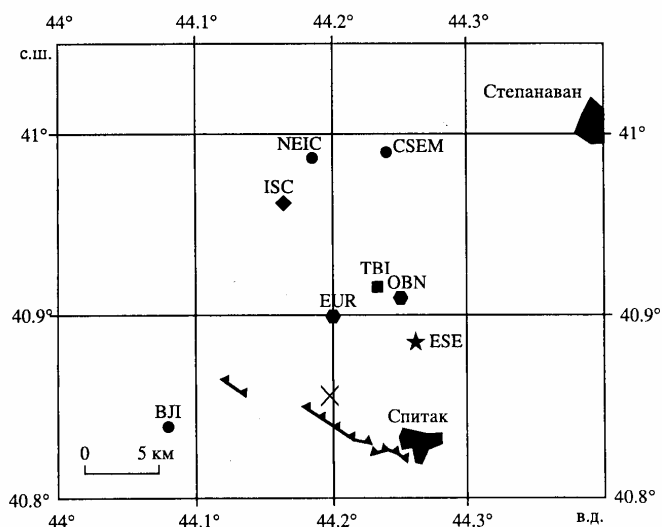


Рис. 6. Положения эпицентра основного толчка СЗ по различным данным [1].

Решение прямой кинематической задачи для глубоких источников показывает, что теоретические годографы хорошо ложатся на экспериментальные точки. Это говорит о том, что часть афтершоков действительно расположена на больших глубинах.

Таким образом, из рассмотрения полученных результатов можно сделать заключение, что афтершоковый процесс не такой компактный в пространстве, как это представляется по результатам, полученным ранее [1]. Этот процесс скорее похож на активизацию сейсмичности в регионе, кото-

рая охватывает достаточно большую область как по площади, так и по глубине, вплоть до 150 км для Спитакского землетрясения.

¹Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

²Институт геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА
e-mail:avet.andrey@mail.ru

В. Ю. Бурмин, А. М. Аветисян

Сравнительный анализ афтершокового процесса Спитакского землетрясения по наблюдениям близких станций

На основе сейсмологических бюллетеней получено распределение гипоцентров афтершоков Спитакского землетрясения 1988 г. Показано, что помимо коровых афтершоков имеют место и мантийные афтершоки. Основная масса афтершоков Спитакского землетрясения расположена на глубинах от 0 до 90 км, есть отдельные события с глубиной до 150 км. Координаты гипоцентра основного толчка $\varphi=40.867^\circ$ северной широты и $\lambda=44.199^\circ$ восточной долготы, глубина очага $H=5.0$ км.

Վ. Յու. Բուրմին, Ա. Մ. Ավետիսյան

Սպիտակի երկրաշարժի հետցնցումային պրոցեսների ուսումնասիրությունը մոտակա դիտակայանների տվյալներով

Մեյսմոլոգիական բյուլետենների տվյալների հիման վրա ստացվել է 1988 թվականի Սպիտակի երկրաշարժի հետցնցումների տարածական բաշխումը (հիպոկենտրոնի կոորդինատներ): Ցույց է տրվել, որ, ի թիվս կեղևային հետցնցումների, գոյություն ունեն նաև մանտիայում տեղի ունեցած հետցնցումներ: Սպիտակի երկրաշարժի հետցնցումների հիմնական մասսան տեղաբաշխված է 0-ից մինչև 90 կմ, ոչ թե 0-25 կմ խորության վրա: Կան առանձին երկրաշարժեր, որոնց խորությունը հասնում է մինչև 150 կմ-ի: Հիպոկենտրոնի կոորդինատները: ըստ մեր տվյալների հավասար են $\varphi=40.867^\circ$ $\lambda=44.199^\circ$, $H=5.0$ կմ-ի:

V. Yu. Burmin, A. M. Avetisyan

Comparative Analysis of the Aftershock Process of Spitak Earthquake on Observations Close Stations

On the basis of seismological bulletins the distribution of aftershock hypocentres of 1988 Spitak Earthquake is obtained. It is shown that besides crust aftershocks, mantle aftershocks are also observed. Most of the Spitak Earthquake aftershocks are situated in the depth of 0-90 km, certain cases are observed with the depth of 150 km. The coordinates of the hypocentre of the main shock are northern latitude $\varphi=40.867^\circ$, and eastern longitude $\lambda=44.199^\circ$, estimated depth is $H=5.0$ km.

Литература

1. *Арефьев С. С.* Эпицентральные сейсмические исследования. М. ИКЦ «Академкнига». 2003. 375 с.

2. *Арефьев С.С., Татевосян Р.Э., Парини И.Е. и др.* В кн.: Вопросы инженерной сейсмологии. Источники и воздействие разрушительных сейсмических колебаний. М. Наука. 1990. Вып. 31. С. 4-29.
3. *Годзиковская А. А., Геодакян Э. Г., Товмасян А. К.* В кн.: Вопросы инженерной сейсмологии. Источники и воздействие разрушительных сейсмических колебаний. М. Наука. 1990. Вып. 31. С. 29-35.
4. *Дуда С., Фастофф С., Кайзер Д.* - Изв АН СССР, Физика Земли. 1991. N 9. С. 27-38.
5. *Кондорская Н. В. Мкртчян М. Б., Лагова Н. А.* В кн.: Вопросы инженерной сейсмологии. М. Наука. 1991. Вып. 32. С. 27-36.
6. *Кондорская Н. В., Вандышева Н. В., Захарова А.И., Саргсян Г. В., Чепкунас Л. С.* В кн.: Землетрясения в СССР в 1988 г. М. Наука. С. 60-74.
7. *Кондорская Н.В., Горбунова И.В.* - Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. N 5. С. 72-77.
8. *Кондорская Н. В., Саакян А. А.* – Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. N 8. С. 57-71.
9. В кн.: Научно-технический отчет «Спитакское землетрясение 7-го декабря 1988 г.» Института геофизики и инженерной сейсмологии АН АрмССР. Ленинакан. 1990. С. 7-10.
10. *Новикова Е.И., Раутиан Т. Г.* - Изв АН СССР. Физика Земли. 1991. N 12. С. 32-46.
11. В кн.: Сейсмологический бюллетень (ежедекадный). 1-10 декабря 1988 года. Обнинск. ИФЗ АН СССР. 1989. С. 22-57.
12. *Папалашвили В. Г., Саргсян Г. В., Агаларова Э. Б. и др.* В кн.: Землетрясения в СССР в 1988 г. М. Наука. 1991. С. 60-74.
13. *Рогожин Е.А., Рыбаков Л. Н., Борисов Б. А.* - ДАН СССР. Геология. Т. 311. N 2. 1990. С. 435-439.
14. Bulletin of the International Seismological Centre. 1988, December. V. 25.
15. In: Earthquake Date Report (EDR) U.S. Department of the Interior Geological Survey 12-88 part iof. 2. P. 50-55.
16. *Lee W.H., Lahr J.C.* In: HYPO-71 U.S. Geol. Surv. File Rept. 1972. P. 75-311.
17. *Pacheco J.F., Estabrokk C.H., Simpson D.W., Nabelek J.L.* Teleseismic body wave analys of the 1988 Armenian eartquake. Geophys. Res. Lett. 1989. 13 p.
18. *Аветисян А. М., Бурмин В. Ю., Оганесян А. О., Казарян К.С.*- Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2015. N 2. С. 31-41.
19. *Аветисян А. М., Бурмин В. Ю., Манукян А. Г.*- Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2012. N 3. С. 70-77.
20. *Бурмин В. Ю., Аветисян А. М., Геворкян К. В.* В кн.: Геофизика XXI столетия. 2006 г. Сборник трудов 8-х геофизических чтений им. В. В. Федынского. 2007. С. 326-330.
21. *Бурмин В. Ю., Шумлянская Л. А.* - Вопросы инженерной сейсмологии. 2015. Т. 42. N 2. С. 5-16.
22. *Бурмин В. Ю.* - Вулканология и сейсмология. 1992. N 3. С.73-82.
23. *Бурмин В. Ю., Аветисян А. М., Геворкян К. В.* - Вулканология и сейсмология. 2004. N 1. С. 68-78.

БИОХИМИЯ

УДК 577.17

Т. С. Хачатрян, член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян

Сравнительный анализ воздействия сверхмалых доз биологически активных веществ в условиях синдрома низкого трийодтиронина у крыс

(Представлено 4/III 2016)

Ключевые слова. тиреоидные гормоны, синдром низкого трийодтиронина, тиреотропный гормон гипофиза, холиновые эфиры N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот, тироксин, трийодтиронин.

Одной из актуальных проблем современной теоретической и экспериментальной биологии и медицины является состояние восстановительных процессов при патологии щитовидной железы (ЩЖ) у млекопитающих под воздействием различных препаратов и физических факторов [1]. Одной из наиболее распространённых и трудно поддающихся лечению патологий ЩЖ в настоящее время является синдром низкого трийодтиронина (СНТ) – состояние, характеризующееся резким снижением концентрации свободных тиреоидных гормонов (ТГ): трийодтиронина (Т3) и тироксина (Т4), при неизменном уровне тиреотропного гормона гипофиза [15]. Согласно исследованию [5] холиновыми эфирами осуществляется ряд важнейших функций в организме человека и животных. Вместе с тем продолжают отсутствовать сведения относительно применения эфиров холина при СНТ и результатов их воздействия на изменение референсных диапазонов концентрации (РДК) свободных ТГ в сыворотке крови крыс. Известно, что ферментные препараты в малых и сверхмалых дозах (СМД) оказывают положительное влияние при различных патологических состояниях организма млекопитающих [3, 4]. Особая роль в данном аспекте принадлежит протеолитическим ферментам трипсину и химотрипсину [2].

Исходя из поиска оптимальных средств, стимулирующих и благоприятствующих нормализации РДК свободных ТГ при СНТ, и с учётом вышеотмеченных особенностей холиновых эфиров и протеолитических ферментов нами проведен сравнительный анализ изолированного действия СМД 10^{-17} и 10^{-25} М 6-ти холиновых производных, относящихся к холиновым эфирам дегидротирозина (ХЭД), синтезированных в Научно-техноло-

гическом центре органической и фармацевтической химии НАН РА под руководством проф. В. О. Топузяна, и протеолитического фермента химотрипсина на изменение РДК свободных ТГ у крыс в условиях наличия тиреоидной патологии типа СНТ.

Материал и методы. В настоящем исследовании осуществлён синтез 6-ти ХЭД. (Подробнее с методом синтеза ХЭД можно ознакомиться в [12]). Были получены следующие химические соединения:

1. холиновый эфир N-бензоил-O-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭД1);
2. холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭД2);
3. холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-O-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭД3);
4. холиновый эфир N-(4-изобутоксibenзоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭД4);
5. холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-O-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭД5);
6. холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭД6).

Биохимические исследования проведены на 170 двенадцатимесечных крысах-самцах (линии Вистар, массой 180 – 190 г). СНТ вызывали путём каждодневных внутримышечных инъекций подопытным крысам в течение 7 дней СМД 10^{-3} М препарата «Пропилтиоурацил». СМД биологически активных веществ (БАВ) ХЭД и химотрипсина 10^{-17} М и 10^{-25} М, а также препарата «Пропилтиоурацил» 10^{-3} М были получены многостаканным методом С. Ганемана по методике, подробно описанной в работе [6]. Животные были разделены на подопытные группы: 1) интактные животные – 10 шт.; 2) животные с СНТ, не получавшие каждодневные изолированные внутримышечные инъекции БАВ – 20 шт.; 3) животные с СНТ, получавшие изолированные внутримышечные инъекции ХЭД1 – ХЭД6 в СМД 10^{-17} М в течение 14 дней – 60 шт. (по 10 шт. на каждый эфир); 4) животные с СНТ, получавшие изолированные внутримышечные инъекции ХЭД1 – ХЭД6 в СМД 10^{-25} М в течение 14 дней – 60 шт. (по 10 шт. на каждый эфир); 5) животные с СНТ, получавшие изолированные внутримышечные инъекции химотрипсина (производство фирмы ИМТ, США) в СМД 10^{-17} М в течение 14 дней – 10 шт.; 6) животные с СНТ, получавшие изолированные внутримышечные инъекции химотрипсина в СМД 10^{-25} М в течение 14 дней – 10 шт. У всех 170 крыс были проведены декапитация и сбор крови. В сыворотке с помощью иммуноферментного метода анализа (ИФА) определялись РДК свободных Т3 и Т4 по алгоритму, подробно описанному в наших предыдущих статьях [7, 8]. Статистическую обработку проводили с использованием t-критерия Стьюдента.

Результаты и обсуждение. Исследование тиреоидной функции в течение первой недели с момента модельных инъекций препарата «Пропилтиоурацил» в СМД 10^{-3} М выявило изменение уровней Т4 и Т3, что укладывается в картину СНТ [9]. При этом не только значительно снижалась концентрация Т3, но и уменьшалась конверсия Т4 в Т3. Эти нарушения наблюдались уже через 48 ч после травмы. Как видно из данных, пред-

ставленных в табл. 1, 2, изолированное применение в течение 2 послеоперационных недель СМД 10^{-17} , 10^{-25} М ХЭД и химотрипсина способствует восстановлению практически до нормы показателей РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс в условиях СНТ.

Референсные диапазоны концентрации свободных трийодтиронина и тироксина в сыворотке крови крыс в норме (столбцы 1, 2) и при синдроме низкого трийодтиронина до (столбцы 3, 4) и после (столбцы 6, 7) воздействия сверхмалой дозы 10^{-17} М эфиров холина и химотрипсина

свТЗ (инт.) нг/мл	свТ4 (инт.) мкг/мл	свТЗ (СНТ) нг/мл	свТ4 (СНТ) мкг/мл	БАВ	свТЗ (СНТ+ БАВ) нг/мл	свТ4 (СНТ+ БАВ) мкг/мл
2.5	4.7	0.9	1.4	ХЭД1	2.3	4.0
				ХЭД2	2.4	4.1
				ХЭД3	2.3	4.2
				ХЭД4	2.0	4.4
				ХЭД5	2.4	4.5
				ХЭД6	2.3	4.6
				Химотрипсин	2.4	4.6

Примечания. свТЗ – свободный трийодтиронин, свТ4 – свободный тироксин, ХЭД – холиновые эфиры дегидротирозина, инт. – интактные животные, СНТ – синдром низкого трийодтиронина.

Таблица 2

Референсные диапазоны концентрации свободных трийодтиронина и тироксина в сыворотке крови крыс в норме (столбцы 1, 2) и при синдроме низкого трийодтиронина до (столбцы 3, 4) и после (столбцы 6, 7) воздействия сверхмалой дозы 10^{-25} М эфиров холина и химотрипсина

свТЗ (инт.) нг/мл	свТ4 (инт.) мкг/мл	свТЗ (СНТ) нг/мл	свТ4 (СНТ) мкг/мл	БАВ	свТЗ (СНТ+ БАВ) нг/мл	свТ4 (СНТ+ БАВ) мкг/мл
2.5	4.7	0.9	1, 4	ХЭД1	2.2	4.3
				ХЭД2	2.2	4.4
				ХЭД3	2.4	4.0
				ХЭД4	2.2	4.1
				ХЭД5	2.1	4.1
				ХЭД6	2.5	4.6
				Химотрипсин	2.5	4.7

Примечания. Обозначения те же, что и в табл. 1.

Согласно данным, представленным в табл. 1, в целом ярко выраженный положительный эффект от изолированного воздействия СМД 10^{-17} М ХЭД отмечен при воздействии ХЭД6 и химотрипсина. Наблюдается ярко выраженная нормализация РДК свободных ТГ в условиях тиреоидной патологии типа СНТ у крыс после воздействия вышеотмеченных химических соединений.

В табл. 2 приведены результаты экспериментов, иллюстрирующие коррегирующие особенности изолированного воздействия СМД 10^{-25} М ХЭД и химотрипсина в условиях СНТ. Согласно представленным данным в указанной группе БАВ наибольшей восстановительной активностью в отношении РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс в условиях СНТ обладают СМД 10^{-25} М ХЭД6 и химотрипсина, как и в предыдущем случае.

В последнее время в клинической практике хорошо известно об изменении тиреоидного гомеостаза с нарушением тиреоидной функции, характеризующемся снижением уровня ТГ в крови. При среднетяжёлом течении болезни, как правило, отмечается уменьшение сывороточного уровня общего и свободного Т3. При более тяжёлом течении болезни, например, у пациентов, находящихся в реанимационном отделении, снижается и уровень общего и свободного Т4 в сыворотке крови [11]. Для обозначения данного состояния было предложено много терминов – синдром нетиреоидных заболеваний (nonthyroidal illness syndrome), эутиреоидный патологический синдром, синдром низкого Т3, синдром эутиреоидной слабости (euthyroid sick syndrome), синдром псевдодисфункции щитовидной железы. Наиболее предпочтительным мы считаем обозначение данного состояния как СНТ [13].

СНТ характеризуется снижением уровня ТГ в крови, развивающимся при соматических заболеваниях в отсутствие патологии самой щитовидной железы [16]. В последнее время в литературе стали всё чаще появляться упоминания о синдроме эутиреоидной слабости. Первоначально это состояние обнаружили у больных ожирением и стали именовать Т3-Low-syndrome, вкладывая в это понятие изменение уровня ТГ в крови у лиц без патологии ЩЖ. По уровню ТГ в сыворотке крови выделяют несколько вариантов этого синдрома: низкий уровень Т3, низкий уровень Т3 и Т4, высокий уровень Т4. Позднее низкий уровень Т3 стали выявлять у лиц старческого возраста, затем у больных с сердечной недостаточностью. Теперь появляются данные о том, что у 70% госпитализованных тяжёлых больных с нетиреоидными заболеваниями происходит снижение концентрации Т3 в сыворотке крови. Вопрос о клинической значимости этого состояния по сей день остаётся дискуссионным и несмотря на обилие сообщений на эту тему пока не находит однозначной трактовки [10, 14].

Таким образом, наиболее ярко выраженный эффект нормализации РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс в условиях СНТ до и после изолированного воздействия СМД 10^{-17} и 10^{-25} М БАВ – ХЭД и химотрипсина наблюдается при их двухнедельном применении.

Научно-технологический центр органической
и фармацевтической химии НАН РА

Т. С. Хачатрян, член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян

Сравнительный анализ воздействия сверхмалых доз биологически активных веществ в условиях синдрома низкого трийодтиронина у крыс

Рассматривается изолированное применение сверхмалых доз холиновых эфиров дегидротирозина и ферментного препарата химотрипсина в опытах с крысами в условиях синдрома низкого трийодтиронина. Выявлен протекторный эффект сверхмалых доз данных химических соединений в процессах изменения концентрации свободных тиреоидных гормонов в сыворотке крови крыс при наличии синдрома низкого трийодтиронина.

S. U. Isachaturyan, Z. G. A. Terakchyan and V. O. Topuzyan

Կենսաբանական ակտիվ նյութերի գերցածր չափաբաժինների ազդեցության համեմատական վերլուծությունը առնետների մոտ ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի պայմաններում

Քննարկվել է դեհիդրոթիրոզինի խոլինի էթերի և ֆերմենտային պրեպարատ քիմոթրիպսինի գերցածր չափաբաժինների ազդեցությունը առնետների մոտ ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի պայմաններում: Ստացված արդյունքները վկայում են տվյալ քիմիական միացությունների պաշտպանիչ էֆեկտի մասին ազատ թիրեոիդ հորմոնների բաղադրության վրա առնետների արյան շիճուկում ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի առկայության դեպքում:

T. S. Khachatryan, corresponding member of NAS RA V. O. Topuzyan

The Comparative Analysis of the Action of Ultra-Low Doses of Biologically Active Substances in the Conditions of a Low Triiodothyronine Syndrome in Rats

The question of the isolated application of ultra-low doses of dehydrothyrosine choline ethers and enzyme preparation chymotrypsin at rats in the conditions of a low triiodothyronine syndrome is discussed. Protector effect of ultra-low doses of the yielded chemical substances is revealed in the processes of change of a concentration of free thyroid hormones in rats' blood serum in the presence of a low triiodothyronine syndrome.

Литература

1. Авакян А. Э., Топузян В. О., Хачатрян Т. С. – Исследования в области естественных наук. 2014. № 5 [Электронный ресурс]. URL: <http://science.snauka.ru/2014/05/6772>.
2. Андреасян А. С., Киприян Т. К., Матинян Л. А., Нагапетян Х. О. В кн.: Научные труды I съезда физиологов СНГ. Сочи, Дагомыс. 19 – 23 сент. 2005. Т. 2. С. 161.

3. *Андреасян А. С., Хачатрян Т. С.* – Вестник МАНЭБ. 2003. Т. 8. № 7. С. 206 – 210.
4. *Андреасян А. С., Хачатрян Т. С.* – Вестник МАНЭБ. 2007. Т. 12. № 4. С. 207 – 209.
5. *Мнджоян О. Л., Топузян В. О.* – Успехи химии. 1981. Т. 10. № 12. С. 2198 – 2211.
6. *Никитин С. А.* Аналитическая гомеопатия. Курс лекций по теории и практике применения гомеопатических средств. М. Высшая школа. 72 с.
7. *Хачатрян Т. С.* – Биолог. ж. Арм. 2015. Т. 67. № 3. С. 21 – 26.
8. *Хачатрян Т. С., Топузян В. О.* – ДНАН РА. 2013. Т. 113. № 3. С. 290 – 294.
9. *Широкова В. И., Голоденко В. И., Демин В. Ф.* – Педиатрия. Журнал им. Г.Н. Сперанского. 2005. № 6. С. 68 – 72.
10. *de Vries E. M., Fliers E., Boelen A.* – Endocrinol. 2015. V. 225, № 3. P. 67-81.
11. *DeGroot L. J. The Non-Thyroidal Illness Syndrome. In: De Groot L. J., Beck-Peccoz P., Chrousos G., Dungan K., Grossman A., Hershman J. M., Koch C., McLachlan R., New M., Rebar R., Singer F., Vinik A., Weickert M. O., editors. Endotext [Internet]. South Dartmouth (MA): MDText.com, Inc.; 2000-2015 Feb 1.*
12. *Grigoryan H. A., Hambardzumyan A. A., Mkrtchyan M. V., Topuzyan V. O., Halebyan G. P., Asatryan R. S.* – Chem. Biol. Interact. 2008. 171(1). P. 108 – 116.
13. *Jankauskienė E., Orda P., Rumbinaitė E., Žaliaduonytė-Pekšienė D., Steponavičiūtė R., Krasauskienė A., Vaškelytė J. J., Bunevičius R.* – Medicina (Kaunas). 2015. V. 51. № 4. P. 209 – 216.
14. *Silva M. H., Araujo M. C., Diniz E. M., Ceccon M. E., Carvalho W. B.* – Arch. Endocrinol. Metab. 2015. V. 59. № 6. P. 528 – 534.
15. *Wémeau J. L., Lefebvre J., Linquette M.* – Nouv. Presse Med. 1979. V. 8. № 6. P. 415 – 419.
16. *Zygner W., Gójska-Zygner O., Bąska P., Długosz E.* – Vet. Parasitol. 2015. V. 211. № 1 – 2. P. 23 – 27.

БОТАНИКА

УДК 634.0.11+58.006

Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян,
М. М. Григорян

**Таксономическое разнообразие садовых форм древесных
растений и возможности их интродукции в Армении**

(Представлено 12/IV 2016)

Ключевые слова: *древесное растение, садовая форма, дендроразнообразие, интродукция.*

Растительный мир Земного шара чрезвычайно разнообразен, 12% его богатства – представители дендрофлоры: деревья, кустарники и древесные лианы. Их таксономический состав охватывает около 40 тыс. видов, которые распространены в самых различных ботанико-географических регионах Земли. В течение длительной эволюции в определенных лесорастительных и экологических условиях у древесных растений различной ботанической принадлежности образовались внутривидовые таксономические формы – новые популяции, экотипы и др. И чем разнообразнее экологические условия, чем сложнее орография, наделенная сильно выраженной вертикальной зональностью, тем глубже и интенсивнее происходят эти видовые и внутривидовые процессы, способствующие образованию эндемичных видов. В этом отношении эти явления очень характерны для нашего региона, в первую очередь Армении.

В мировой дендрофлоре чрезвычайно большое научное и практическое значение и важность имеют древесные растения с большим внутривидовым разнообразием, которые отличаются высокой декоративностью – формой кроны, пестротой и разновидностью побегов, листьев, цветков и плодов. Они незаменимы в зеленом строительстве при создании различных композиционных оформлений. В дендрологической и озеленительной практике эти категории деревьев и кустарников принято называть культурами “CV” или просто садовыми формами.

При анализе данных дендрологической литературы [1-3] выяснилось, что в составе мирового дендроразнообразия садовые формы образовались у 220 видов и представлены около 1500 наименованиями. Из них 620

(41%) – голосеменные (в основном, хвойные), а остальные 880 (59%) – покрытосеменные (в основном, двудольные).

По строению кроны садовые формы принято делить на пирамидальные (pyramidata, pyramidalis), пирамидообразные (pyramidiformis), колонновидные (columnaris), шаровидные (globosa), низкорослые (pumila) и плакучие (pendula). Кроме вышеназванных в различных типах садово-парковых композиций иногда используются также садовые формы с оригинальным специфическим строением кроны, в числе которых змеевидная (virgata), извилистая (tortuosa), нитевидная (filiformis), завитая (flagelliformis), плетевидная (viminalis), спиралевидная (spiralis), уродливая (monstrosa), карликовая (nana) и подушечная (pulvinalis).

Благодаря разнообразию листьев и цветков древесных различают следующие садовые формы, имеющие большое значение в декоративном садоводстве: кудрявая (crispa), серебристая (argentata), беловато-серебристая (argentea), желтая (lutea), золотистая (aurea), голубая (glauca), красная (rubra), пятнистая (makulata), пестрая (variegata), двухцветная (bicolor), трехцветная (tricolor) [3].

Таблица 1

Количественное распределение садовых форм древесных по таксономическим группам и характеру декоративности

Таксономическая группа					По характеру декоративности					
Отдел	Семейство	Род	Вид	Садовая форма	Форма кроны	Форма листьев	Форма побегов	Форма цветков и плодов	Форма низкорослости	По иным признакам
Голосеменные	6	21	71	615	163	151	13	12	130	147
Покрытосеменные	32	71	146	875	112	398	11	184	32	137
Итого	38	92	217	1490	275	549	24	196	162	284

Анализ приведенных данных (табл. 1) показывает, что 1490 наименований садовых форм принадлежат 38 семействам (6 голосеменных и 32 покрытосеменных) и 92 родам (21 голосеменное и 71 покрытосеменное). Общее число видов – 217, из них 71 – голосеменных и 146 – покрытосеменных. Представленные данные одновременно свидетельствуют о том, что, несмотря на то, что разнообразие садовых форм у лиственных видов во всех таксономических группах высоко, удельный вес у всего лишь 600 видов мирового генофонда хвойных выше – 71 вид (11%), в то время как у более чем 39 тыс. видов лиственных древесных садовые формы образовались лишь у 146.

Анализ декоративности садовых форм (табл. 2) по семействам показывает, что наиболее богатым разнообразием обладают: из хвойных – семейство сосновых (*Pinaceae*) – 244 наименования и кипарисовых (*Cup-*

ressaceae) – 301. В составе этих семейств почти 90% садовых форм. Подавляющее большинство их – представители родов *Pinus*, *Picea*, *Abies*, *Cedrus*, *Juniperus*, *Biota* и др. Что касается характера декоративности, то у сосновых большое число древесных (64), с многообразием кроны, затем садовые формы (43) – с пестротностью хвои. Представители сем. *Pinaceae* (из родов *Picea*, *Pinus* и *Larix*) также богаты низкорослыми и карликовыми садовыми формами (55). Почти такая же картина у кипарисовых – 47 по форме кроны, 45 – по пестроте хвои и 63 – по низкорослости и карликовости. Здесь декоративностью отличаются представители родов *Thuja*, *Biota*, *Cupressus*, *Chamaecyparis*, *Juniperus* и др.

Таблица 2

Таксономическое разнообразие ведущих семейств древесных по родам, содержащим садовые формы

Семейство	Число таксонов			Наиболее богатые роды
	Род	Вид	Садовая форма	
<i>Aceraceae</i> /Кленовые	1	10	75	Клен
<i>Aguifoliaceae</i> /Падубовые	1	1	18	Падуб
<i>Betulaceae</i> /Березовые	4	6	38	Береза, ольха
<i>Buxaceae</i> /Самшитовые	1	2	23	Самшит
<i>Caprifoliaceae</i> /Жимолостные	4	12	53	Бузина, жимолость
<i>Celastraceae</i> /Бересклетовые	1	2	16	Бересклет
<i>Cornaceae</i> /Дереновые	2	5	24	Дерен
<i>Cupressaceae</i> /Кипарисовые	7	16	301	Туя, биота, кипарис, кипарисовик, можжевельник
<i>Fabaceae</i> /Бобовые	8	8	43	Робиния, гледичия
<i>Fagaceae</i> /Буковые	2	6	81	Каштан, дуб
<i>Hippocastanaceae</i> /Конскокаштановые	1	3	18	Конский каштан
<i>Juglandaceae</i> /Ореховые	1	1	15	Орех
<i>Magnoliaceae</i> /Магнолиевые	3	9	52	Магнолия, лавр
<i>Oleaceae</i> /Маслинные	6	12	55	Ясень, бирючина
<i>Pinaceae</i> /Сосновые	7	41	244	Пихта, ель, кедр, сосна
<i>Rosaceae</i> /Розоцветные	14	33	188	Роза, хеномелес, боярышник, вишня, черемуха
<i>Salicaceae</i> /Ивовые	2	4	21	Ива, тополь
<i>Taxaceae</i> /Тиссовые	1	2	34	Тисс
<i>Ulmaceae</i> /Ильмовые	1	4	30	Вяз

Наличие садовых форм у широколиственных древесных представлено в табл. 2.

Здесь по содержанию садовых форм нами условно выделены 3 группы семейств: крупные (свыше 31), средние (16-30) и малочисленные (до 15 наименований).

В первой группе охвачено 8 семейств: *Rosaceae* (188 наименований), *Fagaceae* (81), *Aceraceae* (75), *Caprifoliaceae* (53), *Magnoliaceae* (52), *Fabaceae* (43) и др. *Rosaceae* имеет ведущую роль (по содержанию родов и видов) не только в данном случае, но и в формировании дендрофлор многих регионов умеренной зоны, в том числе и Армении [4].

На втором месте 7 семейств, занимающие промежуточное место: *Ulmaceae* (30), *Cornaceae* (24), *Buxaceae* (23), *Salicaceae* (21), *Hippocastanaceae* (18) и др.

В третью группу включено 8 семейств, содержащих малочисленные садовые формы: *Araliaceae* (11), *Berberidaceae* (10), *Elaeagnaceae* (9), *Punicaceae* (7) и др.

Таблица 3

Таксономическое разнообразие родов древесных, содержащих большое количество садовых форм, по характеру декоративности

Род	Таксономическая группа		По характеру декоративности					
	Вид	Садовая форма	Форма кроны	Форма листьев	Форма побегов	Форма цветков и плодов	Форма низкорослости	По иным признакам
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Abies</i> /Пихта	8	43	16	21	-	-	5	1
<i>Acer</i> /Клен	10	75	6	61	-	1	-	7
<i>Aesculus</i> /Конский каштан	3	18	4	6	-	4	2	2
<i>Alnus</i> /Ольха	2	16	3	11	1	-	-	1
<i>Biota</i> /Биота	1	26	4	-	-	-	17	5
<i>Buxus</i> /Самшит	2	23	2	13	-	-	2	6
<i>Cedrus</i> /Кедр	3	21	12	5	2	-	2	-
<i>Cerasus</i> /Вишня	4	20	5	5	1	7	1	1
<i>Chaenomeles</i> /Хеномелес	2	23	1	-	-	19	2	1
<i>Chamaecyparis</i> /Кипарисовик	5	142	28	24	-	-	28	62
<i>Cornus</i> /Дерен	4	18	1	7	3	4	1	2
<i>Cupressus</i> /Кипарис	6	29	3	6	3	-	6	11
<i>Euonymus</i> /Бересклет	2	16	3	12	-	-	1	-
<i>Ilex</i> /Падуб	1	18	2	14	-	2	-	-
<i>Juniperus</i> /Можжевельник	5	52	14	15	-	-	5	18
<i>Larix</i> /Лиственница	5	18	5	1	-	2	6	4
<i>Laurocerasus</i> /Лавровишня	2	18	1	10	-	-	-	7
<i>Laurus</i> /Лавр	1	18	-	11	-	3	-	4
<i>Lonicera</i> /Жимолость	5	18	-	4	-	8	1	5
<i>Magnolia</i> /Магнолия	7	29	1	4	-	11	-	13
<i>Padus</i> /Черемуха	3	39	6	6	-	14	-	13
<i>Picea</i> /Ель	8	66	14	18	-	3	26	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Pinus</i> /Сосна	14	72	15	21	2	4	11	19
<i>Quercus</i> /Дуб	5	72	15	49	1	-	3	4
<i>Robinia</i> /Робиния	1	19	7	7	1	2	1	1
<i>Rosa</i> /Роза	7	28	-	3	-	12	2	11
<i>Sambucus</i> /Бузина	3	22	2	12	-	5	2	1
<i>Taxus</i> /Тисс	2	34	11	5	3	2	9	4
<i>Thuja</i> /Туя	3	39	16	11	1	-	5	6
<i>Ulmus</i> /Вяз	4	32	13	17	1	-	1	-

Нами проведен анализ содержания садовых форм древесных по родам и видам (табл. 3) и выявлено, что из хвойных наиболее представительны следующие роды: *Chamaecyparis* – 5 видов и 142 садовые формы, *Juniperus* – 5 и 52, *Picea* – 8 и 66, *Pinus* – 14 и 72, а из широколистных *Acer* – 10 и 75, *Quercus* – 5 и 72, за ними следуют *Padus* – 3 и 39, *Ulmus* – 4 и 32, *Buxus* – 2 и 32, *Sambucus* – 3 и 22.

Сравнительно богатым разнообразием обладают следующие роды, которые, по существу, занимают промежуточное место между наиболее богатыми и бедными родами: *Abies* – 8 и 43, *Taxus* – 2 и 34, *Cupressus* – 6 и 29, *Biota* – 1 и 26 садовых форм. Некоторые другие роды отличаются бедным составом садовых форм древесных: *Larix*, *Cedrus*, *Crataegus*, *Ligustrum*, *Euonymus* и др.

Нами проведены исследования по наличию садовых форм древесных в ботанических садах (Ереванский, Ванадзорский и Севанский) и дендропарках (Иджеванский и Степанаванский) республики [4-7]. Выявлено, что в настоящее время в условиях Армении интродуцировано 250 наименований садовых форм, что составляет 15% от общего числа дендроразнообразия (1650 видов и садовых форм). Наибольшее их количество в Ереванском ботаническом саду и Иджеванском дендрарии (по 100 наименований в каждом), среднее место занимают Ванадзор (45) и Степанаванский дендропарк «Сосняки» (59), наиболее бедным является высокогорный Севанский ботанический сад, что вполне закономерно.

На основе общего и сравнительного таксономического анализа разнообразия садовых форм древесных (около 1490 наименований), поведения, экологической приспособленности и особенностей размножения коллекций, имеющихся в наличии в ботанических садах Армении, дендропарках и зеленых насаждениях, составлен перспективный план дальнейшей целенаправленной интродукции по пополнению и обогащению коллекции садовых форм. Приводится оценка отдельных таксономических групп (род, вид), содержащих декоративные древесные растения, как исходного материала, с целью их дальнейшего внедрения для озеленения республики.

Институт ботаники НАН РА

**Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян,
М. М. Григорян**

**Таксономическое разнообразие садовых форм древесных растений
и возможности их интродукции в Армении**

В результате анализа таксономического разнообразия мировой дендрофлоры установлено, что из 40 тыс. видов деревьев и кустарников у 220 имеется около 1500 садовых форм "CV" (620 хвойные, 880 лиственные). В настоящее время в ботанических садах и дендропарках Армении интродуцированы и исследуются 250 садовых форм. Проводятся работы по пополнению и обогащению их состава, а также использованию в озеленении республики.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Հ. Վարդանյան,
Մ. Մ. Գրիգորյան**

**Ծառաբույսերի պարտիզային ձևերի տաքսոնոմիական բազմազանությունը
և դրանց ներմուծման հնարավորությունները Հայաստանում**

Կատարվել է համաշխարհային դենդրոֆլորայի տաքսոնոմիական բազմազանության վերլուծություն և բացահայտվել, որ ավելի քան 40 հազար տեսակ ներկայացնող ծառերից ու թփերից 220-ի մոտ առկա է շուրջ 1500 պարտիզային ձև «CV» (620-ը ասեղնատերև են, 880-ը լայնատերև): Ներկայումս Հայաստանի բուսաբանական այգիներում և դենդրոպարկերում ներմուծվել և ուսումնասիրվում է 250 անուն պարտիզային ձև: Աշխատանքներ են տարվում դրանց կազմը համալրելու և հարստացնելու, ինչպես նաև հանրապետության կանաչապատման մեջ դրանք օգտագործելու ուղղությամբ:

**Corresponding member of NAS RA Zh. H. Vardanyan,
M.M. Grigoryan**

**Taxonomical Diversity of Garden forms of Woody Plants and Options
for Their Introduction into Armenia**

The analysis of the taxonomic diversity of the dendroflora of the world plants revealed, that 220 species of trees and shrubs from 40 000 worldwide woods plants species have about 1500 garden forms "CV" (620 conifers, 880 deciduous). Currently 250 garden forms are introduced into botanical gardens and arboretums of Armenia and are explored. The work on the completion and enrichment of the collections is going now. They could be used for the landscaping of the republic.

Литература

1. Деревья и кустарники СССР. Т. 1-6. М. Изд. АН СССР. 1949-1962.
2. Древесные растения Главного ботанического сада им. Н.В. Цицина РАН. М. Наука. 2005. 586 с.
3. Колесников А. И. Декоративная дендрология. М. Лесная промышленность. 1974. 704 с.

4. *Вардамян Ж. А.* Научные основы интродукции древесных растений в Армении. Ереван, Гитутюн, 2012. 400 с.
5. Аннотированный каталог деревьев и кустарников ботанических садов и дендропарков Армянской ССР. Бюлл. Бот. сада АН АрмССР. N 27. 1985. Ереван. Изд. АН АрмССР. 164 с.
6. *Саядян М. Л.* Коллекция растений. Иджеванский субтропический дендрологический парк. Ванадзор. СИМ. 2010. 204 с.
7. *Григорян М. М.* В кн.: Ботаническая наука в современном мире. Ереван. Ин-т ботаники НАН РА, 2015. С. 291-295.

246

Հայտնի է, որ մ.թ.ա. I դ. I քառորդում Հայոց արքա Տիգրան Մեծը Հայաստանի քաղաքներում բնակեցրեց մեծաքանակ հուդայականներին, որոնց կազմում կային կապաղովկացիներ, կիլիկեցիներ, հույներ և հրեաներ: Վերջիններս Հայաստանում մինչ այդ եղել են բնական, ցաքուցրիվ տարագրման (միգրացիայի) եղանակով (մ. թ. ա. I դ. Հայաստանում եղած ժողովրդագրական շարժերի մասին տե՛ս [4], էջ 156-166), ուստի և հայ իրականության մեջ որևէ զգալի հետք չեն թողել, բայց ահա մ.թ.ա. I դ. II կեսին, երբ հուդայական գաղթականները, որոնք V դ. հայ իրականության մեջ հրեա են կոչվում, զանգվածորեն տեղավորվել ու ինտեգրվել էին նոր սոցիալ-տնտեսական ու մշակութային միջավայրում, սկսում է գործել վերոնշյալ միտումը՝ Հայաստանի բիրլիականացումը կամ, կրոնական տեսակետից, յուրայնացումը (ոչ թե յուրացումը): Դժվար չէ պատկերացնել, որ այս առումով «Հայահրեից» գաղութի բախտը բերել էր, որովհետև Սուրբ գիրքն առատորեն հնարավորություն էր ընձեռում հուդայականներին՝ պանծացնելու իրենց նոր բնակավայրը՝ որպես «դրախտավայր» ու փրկարար Նոյան տապանի հանգրվան: Դեռ ավելին, սուրբգրային հիշատակումների և աշխարհագրական ու տեղանվանական տվյալների «բարենպաստ» համադրումներն առիթ էին տալիս որոշ առավելություններով գերազանցելու ոչ միայն տարաշխարհի հուդայական գաղութներին, այլև հյուրընկալ երկրի այլ հուդայական համայնքներին: Ավելորդ է ասել, որ իրենց գաղութի ու երկրի գովազդը Հայաստանի հուդայականները հասցնում էին տարբեր առևտրական կենտրոններ, իսկ ուխտավորները՝ Երուսաղեմ, ի լուր համայն հրեության: Փաստորեն, եթե դարեր առաջ Արարատի երկիր-Հայաստանն էր հայտնվել Սուրբ գրքում [5], այդուհետև մ.թ.ա. I-մ.թ. I դդ. Սուրբ գիրքն է հայտնվում Հայաստանում, որովհետև հուդայական համայնքների միջոցով հայերը յուրացնում էին ոչ միայն Սուրբ գրքի ինչ-ինչ տեղեկություններ, այլև դրանց հարասող նորաստեղծ համայնքային ավանդություններ ու մեկնություններ:

Փավստոս Բուզանդի «Պատմությունից» հայտնի է, որ «հրեական» համայնք է եղել նաև Գողթնի Նախճուան քաղաքում, որին բոլոր մյուս համայնքների հետ IV դ. 60-ական թթ. գերեվարել է պարսից Շապուհ II-ը: Մոտ չորս հարյուր տարի գոյություն է ունեցել Մեծ Հայքի հուդայահրեից գաղութը, և այդքան մեծ ժամանակաշրջանում կարող էր լայն տարածում գտնել Նախճուանի գաղութի այն կարծիքը, թե իբր Նոյի տապանը նստել է Մասիս-Արարատի գագաթին կամ Տարոնի հուդայականների կարծիքը, թե իրենց նահապետ Մեմը նախ բնակվել է Սիմ լեռան ստորոտին, և որ տարբեր ուղղություններով սկսել են ցրվել Ցրոնքից և այլն: Հետաքրքիր է, որ Սիմ-Ցրոնքի կեղծ ստուգաբանական ավանդապատումին հետևող հուդայականները Նոյան տապանի հանգրվան են համարել Կորդուքի Ջուղի լեռը, որովհետև վերջինս իրենց

ավելի մոտ ու տվյալ տարածքում էլ հանրայնորեն ընդունված էր: Իսկ դրան զուգահեռ հնարավոր էր, որ Գողթնի բնակիչներն իրենց գավառի անունը ընկալեին իբրև «գաղթ» բառի փոփոխված ձև, որովհետև Նոյի սերունդների գաղթը սկսվել է այնտեղից և այլն:

Կասկած չկա, որ շատ հուդայական համայնքներ իրենց բնակավայրերի ամենաբարձր լեռները դիտել են իբրև հնարավոր հավակնորդներ Նոյան տապանի հանգրվանի, որովհետև նրանք բոլորը լավ էին հասկանում, որ իրենց Սուրբ գիրքը տեղը որոշակի չի անվանում («ի լերինս Արարատայ»), ուստի պետք էր գտնել այն: Դրա համար, ինչպես ասվեց, միջավայրում բարձր գագաթ լինելը բավարար չէ, հարկավոր է լրացուցիչ կռվան: Եվ այդ կռվանը գտան Նախճուանի «հրեաները». նրանք ուշադրություն դարձրին այն հանգամանքի վրա, որ բարձրագույն Ավագ-Ազատ-Մասիսի (5165 մ) ստորոտին գտնվող քաղաքը կոչվում է... Նախիջևան: Դա իբր քիչ է, լեռան լանջին թառած գյուղն էլ կոչվում է... Ակոռի (Արկուռի): Ահա քեզ հզոր կռվաններ ի հիմնավորումն տապանակիր լեռան և ի լուր աշխարհի ու տեղաբնիկ հայերի, ում համար Ազատ-Մասիսը առասպելապատ ու խավարչտին լեռ է՝ հանգրվան քաջքերի ու դևերի:

Փորձենք այս դիտարկումները համապատասխան փաստերով տեղավորել պատմական հենքի վրա:

Արևելյան Հայաստանում պատմական Գողթն գավառի նշանավոր կենտրոնը՝ Նախճուանը, որ հայերեն գրավոր հիշատակվել է սկսած V դարից, ժողովրդախոսակցական լեզվով մինչև օրս կոչվում է Նախիջևան: Տեղանվան նախնական և վերջնական նշված տարբերակների միջև, պետք է ենթադրել, որ կապող օղակ է եղել «Նախճուան»/«Նախճեւան» ձևը, ինչպես երևում է ոչ միայն քաղաքի և գավառի անվան թուրքերեն արտասանությունից, այլև հայ ժողովրդական բարբառներից և խոսակցական լեզվից:

Դատելով ժողովրդական մի տարբերակից («Մթամ քիչ ին Շիրվանա, հրմել էկան Նախճեւանա»¹), որ XIX-XX դդ. տարածված էր Ելիզավետպոլի նահանգի Ղազախի գավառում, Նախիջևանին զուգահեռ այդ անվանաձևը կիրառվել է նաև նախորդ դարում: Թե որքան հին է Նախճուան>Նախիջևան անցման միջնորդ տարբերակը, կարելի է կռահել Նախիջևան ձևի հնությունը որոշելու միջոցով:

¹ Ասույթը (= Իբր քիչ էին Շիրվանից, հիմա էլ եկան Նախիջևանից) հաճախ կիրառել են XX դարի սկզբին ծնված պապիս ծնողները, որոնցից լսել է հայրս՝ Սամվել-Անդրանիկ Սահակյանը (1930-2013): Վերջինիս բացատրելով՝ ասույթն օգտագործվում էր այն դեպքում, երբ տարբեր տեղերից անսպասելի հյուրեր էին գալիս տուն, իսկ հյուրասիրելու բան չկար:

Մինչ այդ պետք է հիշեցնել, որ Նախճուան անունը հայերենում իրանական փոխառություն է, հավանաբար, մինչարշակունյան ժամանակաշրջանից: Համոզիչ չեն, իհարկե, տեղանվան ստուգաբանության եղած փորձերը, որոնք անունը բխեցնում են Կովկասյան «նախ» ցեղանունից կամ էլ՝ նախճիր (=սպանդ, որս) իմաստից: Տողերիս գրողը դեռևս ասպիրանտական տարիներին տեղանվան մասին հարցրել է ամերիկացի իրանագետ Ջեյմս Ռասսելին, երբ վերջինս Երևանում մասնակցում էր հայագիտական միջազգային առաջին սիմպոզիումին: Ի պատասխան, նա կասկածելով ենթադրություն է հայտնել, որ «նախճուան» կարող է նշանակել՝ կարևորը, գլխավորը, առաջինը: Այդ կասկածը, սակայն, կարելի է փարատել, եթե նման տեղանունը կիրառվի իշխանական նստավայրի նկատմամբ: Օրինակ, որևիցե իշխանական տարածքում այդ անունը լիովին կարդարացվեր, եթե դրանով ընդգծվեր տվյալ գյուղի կամ քաղաքի իշխանանիստ լինելը, ինչպես թագավորական ընտանիքի և արքունիքի կեցավայրը ուստան կոչելը: Եվ իրոք, այդ իմաստի դեպքում է հնարավոր, որ նույն տեղանունը կրկնվի տարբեր տարածքներում՝ Գողթն, Շիրակ և այլն: Տեղանունների այդ շարքում է դասվում նաև Մամիկոնյանների Տայքից հայտնի մի գյուղի անուն՝ Իշխան (հիշենք Ներսես Տայեցի կամ Իշխանցի կաթողիկոսին), որ պետք է հասկանալ իշխանական, իշխանանիստ իմաստով: Օրինակ, Արշակունիների օրոք Կամսարական իշխանների կեցավայր եղած ավանը Շիրակի Նախճուանը, ըստ պատմահայր Մովսես Խորենացու (III գ., IԲ), իրոք, իշխանանիստ էր ոչ միայն անվամբ, այլև մյուս հատկանիշներով (Կամսարական տոհմի մարդկանց բնակատեղի, ստորգետնյա մթերանոց և այլն): Երբվանի՝ ց է Նախճուանը հայերենում հնչել Նախիջևան: Առողջ տրամաբանությունը կարող է հուշել այն ժամանակից, երբ այդ փոխառյալ անունը հոլովվեց ժողովրդախոսակցական լեզվում: Այսինքն, եթե փոխառումը եղել է Երվանդյանների օրոք, ուրեմն ամենաուշը մ.թ.ա. III դ. կունենայինք Նախիջևան ձևը: Բարեբախտաբար այս հարցում միայն տրամաբանությամբ չենք կողմնորոշվում: Ունենք մ.թ. I դ. մի վկայություն, որի հեղինակը Հովսեփոս Փլավիոսն է: Նա իր «Հրեական հնախոսություն» գրքում, պատմելով ջրհեղեղի սյուժեն, գրում է. «Երբ տապանը կանգ առավ Հայաստանում գտնվող մի լեռան վրա, Նոքոսը (=Նոյ)...մնաց այնտեղ:ևս յոթ օր սպասելուց հետո նա բաց թողեց տապանի անասուններին, ինքն էլ իր գերդաստանով դուրս գալով՝ Աստծուն զոհեր մատուցեց և խնջույք արեց ընտանիքի անդամների հետ: Հայերը մինչև օրս այդ վայրը կոչում են իջնելու տեղ (Αποβατήριο- Ա.Ս.), քանի որ այնտեղ է փրկվել տապանը, և մինչև օրս այդ վայրում ցույց են տալիս բեկորները» ([6], էջ 54): Գիտնականները գրեթե միաձայն ընդունում են, որ հունարեն Αποβατήριο բառը հայկական Նախիջևան տեղանվան թարգմանական

պատճենն է ([3], էջ 274 և այլք, [7]): Հետագայում, Հովսեպոսից առնելով, «ապոքաստերիոն»-ը իբրև տեղանուն է օգտագործել Եվստատիոս Անտիոքացին (IV դ.) [8], իսկ Հիերոնիմոսը, այն թարգմանելով լատիներեն, գրում է. «Այս վայրը հայերն անվանում են Exitus կամ Egressus» (ելման կամ իջման տեղի) (*Hieronimus, Opera omnia*, Ed. Vallarsi, t. III, p. 125 (հղումն ըստ [2])):

Այն, որ հայերը մինչև օրս այդ տեղը կոչում են Նախիջևան, հասկանալի է: Իսկ ովքե՞ր որոշեցին, որ դա կապ ունի Նոյի հետ, և այդ մասին հաղորդեցին Հովսեպոսին: Միանշանակ՝ Նախիջևանի հուդայական համայնքի ներկայացուցիչները, ովքեր ուխտի են գնացել Երուսաղեմ: Հովսեպոսի հաղորդած այս տեղեկությունն անգին է այլ առումներով ևս: Նախ, որ հաստատվում է «Նախիջևան» ձևի վաղ գոյությունը, երկրորդ, որ Հայաստանի «հրեաները», արագ յուրացնելով ժողովրդախոսակցական հայերենը, կեղծ կամ ժողովրդական կոչված ստուգաբանությունների միջոցով Մուրբ գրքին հարասող լեզենդներ էին հորինում, և որ Նախիջևանը որպես Նոյի առաջին հանգրվան է ընկալվել մ.թ.ա. I դ. II կեսից սկսյալ, երրորդ, որ ամենակարևորն է, նրանք հետագայի քրիստոնյա հայ ժողովրդի համար ականայից ստեղծեցին նրա ազգային ինքնությունը սնուցող տապանակիր Մասիս-Արարատի խորհրդանիշը:

Բայց ասվեց, որ տապանակիր լեռան ավանդապատումի համար իրական հիմք է ծառայել ոչ միայն Նախիջևան, այլև Ակոռի անունը: Թեկուզ Ակոռի անունը չի նշվում, բայց Աստվածաշնչում Նոյի կողմից լեռան լանջին այգի տնկելուց անուղղակիորեն ենթադրվում է Ակոռիի ավանդապատումը: Համենայն դեպս, վերջինս ածանցված է առաջինից, ուստի կամ հուդայականներն են դրանով ևս ամրացրել Մասիսի տապանակիր լինելը, կամ էլ, ինչն ավելի հավանական է, տեղաբնիկ հայերը Նոյի ու Նախիջևանի լեզենդի ազդեցությամբ հարասել են հարևան հուդայականներին: Փաստն այն է, որ խաղողի որթի մասին եղած պարականոն տեղեկությունները դարձյալ հին են (I դ.), վկայվել են Հովսեպոս Փլավիոսի երկում, որը, սակայն, հայերեն թարգմանության մեջ, ցավոք, տեղ չի գտել (հմմ. [6] և Josephus Flavius, *Antiq. Jud.*, (163) (հղումն ըստ [2], էջ 35) և «Հոբեյանների գրքում» [9]: Սակայն դրանք, որպես Ս. Գրքից անմիջապես բխող բանավոր հարասություններ, կապ չունեն հայերի կամ Հայաստանի հուդայականների հետ: Ինչ վերաբերում է «Հոբեյանների գրքին», պետք է ասել, որ խնդրո առարկա որթատունկի ավանդապատումը այնտեղ մտել է նույն բանավոր ավանդույթից՝ միայն թե ասված Կորդուքի համար, որովհետև վերաբերում է Լուբար լեռանը ([9], էջ 9):

Կարելի է ենթադրել, որ եթե Մասիս լեռան ստորոտի քաղաքի անունը Նախիջևան չլիներ, Մասիսը չէր լինի տապանակիր լեռ, կամ

այլ ավանդապատում կհորինվեր: Կամ եթե Շիրակի Նախիջևան ավանում կամ էլ Վանանդի Իջավան գյուղում հուդայական կամ հրեից համայնք լիներ, գուցեն տապանակիր լեռան հավակնորդ կդառնար Արագածը և այլն: Սա ավանդապատումի ժանրի պոետիկայից բխող եզրահանգում է, ոչ թե գուշակություն:

Հնարավոր է, որ Նախիջևան անվան «ապացուցողական» ուժն այնքան մեծ է եղել, որ նրա ազդեցությամբ «իջման ավան» նշանակությամբ մի տեղանուն էլ հետագայում հայտնվել է Կորճայք նահանգում՝ արդեն իսկ քրիստոնեական կամ իսլամական միջավայրում: Փաստորեն, այսու ի չիք են դառնում բոլոր այն վեճերը, որոնք արվել են այն հարցի շուրջ, թե Մասիսը երբվանից է տապանակիր լեռ ճանաչվել, որովհետև այդ ավանդույթը մ.թ.ա. I դարից մինչև օրս անընդմեջ գոյություն է ունեցել: Համեմատելու համար հիշենք, որ հայոց Կորճայք կամ Կորդուք գավառի տապանակիր Ջուղի լեռան ավանդույթը գալիս է ավելի հնուց, գուցեն մ.թ.ա. II հազարամյակից, որովհետև այն ժամանակ, երբ միջագետքյան ջրհեղեղի վիպասքը հյուսվում էր, տարատեսակ սեմական էթնիկ տարրեր արդեն ապրում էին Արարատ-Ուրարտու-Հայաստանի հարավային շրջաններում: Դրա համար էլ Կորդվաց լեռների բարձր գագաթին տրված բոլոր անունները սեմական ծագում ունեն², ուստի Արարադ և Կարդու անունները՝ հնարանքի, իսկ Մարարադը գրչական թյուրիմացության արդյունք պետք է համարել, ինչպես ժամանակին նկատել են Մ. Էմինը, Ստ. Մալխասյանցը, Ֆրիդրիխը և այլք:

Ըստ մշակութային ավանդույթների ժառանգորդման և փոխներփանցման օրենքների՝ միանգամայն սպասելի էր, որ միջագետքյան ավանդապատումի և նրա տապանակիր լեռան օրինակով Կորդուքում տեղայնացվեր նաև Նոյան տապանի ավանդապատումը, ինչպես որ, իրոք, դա գուցե առաջինը փորձել է կռահել Նիկողայոս Դամասկացին և լիովին արձանագրել է «Հոբեյանների գիրքը» (I դ.): Սակայն այս բնական մշակութային երևույթի մեջ շեղում մտցրին Հայքի կենտրոնում բնակված հուդայականները, ովքեր ի լուր աշխարհի հայտնաբերեցին Ազատ-Մասիսն իբր տապանակիր լեռ՝ ցույց տալով Նոյ նահապետի էջքի և Նախիջևանի միջև եղած կապը: Այս նորությունը դեռևս հայտնի չէ «Հոբեյանների գրքի» հեղինակին, բայց նրան զուգահեռ արդեն հայտնի է Հովսեպոս Փլավիոսին: Վերջինս այն բազմիմաց հեղինակն է, ով գիտի և՛ միջագետքյան տապանակիր լեռը, և՛ երբայական

² Արդյո՞ք նման ծագում չունի նաև Կորդու(+ք) տեղանունը: Հարցն իրավասու է, եթե հաշվենք, որ նրա նմանությունը Գուդրոն-ին պատահական չէ, իսկ եթե ոչ՝ հարցն ավելորդ է, մի խոսքով, պատմահամեմատական հնչյունաբանության խնդիր է:

վեպի նոր տապանակիր լեռը, ուստի և ինքն էլ հենց կապող դեր է ստանձնում երկու ավանդույթների միջև:

Վերոբերյալ դրույթներից բխում է մի խնդիր. ի՞նչ էր մտածում Հովսեփոսը՝ ակնհայտորեն նկատելով, որ Նոյի մասին պատումը երբեմն չի համընկնում միջագետքյան պատումը ներկայացնող հեղինակների հաղորդագրությանը: Նա համարելով, որ երկու պատումներն էլ վերաբերում են Նոյին՝ միայն թե անվան փոփոխմամբ, աշխատում էր դրանք հաշտեցնել ու համապատասխանեցնել իրար: Եվ դա լավ երևում է այն բանից, որ Հովսեփոսը սկզբից պատմում է Նոքոսի մասին, հետո բերում է միջագետքյան ավանդությունը պատմողների կարծիքները՝ կարծես ցույց տալու, որ նույն ջրհեղեղի մասին է խոսքը:

Ասվածի հաստատումը կարող է լինել այն փաստը, որ Հովսեփոսը միջագետքյան պատումի որոշ տարրեր ներմուծեց եբրայական պատում: Դրանցից են, օրինակ, երբ գրում է, թե ջրհեղեղից «մարդկանց մեծ մասը չկարողացավ փրկվել՝ փախուստի ապավեն չունենալու պատճառով» ([6], էջ 54), կամ էլ երբ գրում է, թե «մինչև օրս այդ վայրում ցույց են տալիս դրա (տապանի) բեկորները» [6]: Դեռ ավելին, Հովսեփոսին թվում էր, որ իրեն նախորդող հեղինակներից կարելի է որոշ մանրամասներ իմանալ, ասենք՝ նշվածների կամ էլ տապանի իջման վայրի մասին և այլն: Իզուր չէ, որ «Հոբելյանների գրքի» հեղինակը Նոյան տապանի իջման վայր է կարծել Լուբար լեռը, որը իրականում միջագետքյան վիպական տարրերից է: Ահա այս երկու վիպական ասքերի ի մի բերումը և դրանց տարբերությունների հաշտեցումը, որ սաղմնային վիճակում տեսանք «Հրեական հնախոսություն» և «Հոբելյանների գիրք» կոչված աղբյուրներում, մոտ ապագայում ընդօրինակվելու և ոճական հնարք է դառնալու քրիստոնյա պատմիչների երկերում (Եվսեբիոս Կեսարացի, Մովսես Խորենացի և այլք): Քրիստոնեության տարածման հետ հրեական ավանդույթի հետևորդները շատացան, բայց նրանց մեծ մասը վաղ դարերում դեռևս հակված էր տապանակիր լեռը ցույց տալու Կորդուքում: Ինչպես վկայում են Բուզանդը, Խորենացին և այլք: Աստիճանաբար, սակայն, ավելի է արմատավորվում ու տարածվում կենտրոնական Հայաստանի հուդայականների ու տեղացի քրիստոնյա հայության կարծիքը, թե Մասիսն է տապանակիր լեռը: Մրցակցային մշակույթի այս հետաքրքիր դրսևորումը ծնել է աշխարհագրական նոր անուն երկու լեռների համար էլ. Ջուդի լեռան դեպքում՝ Արարադ, Մասիսի դեպքում՝ Արարատ: Ինչու, որովհետև Ս. Գիրքը, երբ տեղացի քրիստոնյաների կողմից յուրացվեց, նախ, մի քանի լեզվով (ասորերեն, հունարեն), ապա թարգմանվեց նաև հայերեն, սուրբգրային «ի լերինս Արարատա» արտահայտությունը ընկալվեց ոչ թե բառացի՝ Արարատի լեռներում, իբրև երկրանուն, այլ սկսեցին հասկանալ, ավելի ճիշտ, իմաստավորել իբրև լեռնանուն՝ Արարատ լեռնե-

րում: Այս համոզմունքն աստիճանաբար ավելի ամրացավ վիպական գրավոր շրջանառմամբ՝ զուգահեռաբար, բայց ավելի վաղ վկայությունները պահպանվել են Կորդուքից, ինչպես երևում է նրա վերաբերյալ եղած հիշատակումներից (Եփրեմ Ասորի, Հակոբ Մծբնացի, Փավստոս Բուզանդ, Մովսես Խորենացի): Հետաքրքիր է, որ Հակոբ Մծբնացու վարքում եղած հրաշապատում վիպական տարրերը, որոնք պատմվել են Կորդուքի լեռան շուրջ (ասորական Կարդու լեռ, որը հորինվել է գավառանունից և Ջուղի-Գուղի անվան փոխանորդն է), հետագայում փոխանցվել են Մասիսին, ուստի մինչև օրս Մասսա լանջին է նշվում ս. Հակոբա աղբյուրը: Մակայն Մասիսի համար Արարատ անվան կիրառումը հավանաբար ուշ է եղել, որովհետև վաղագույն վկայություններից մեկը գտնում ենք Գր. Նարեկացու Մատյանում (X դ.), որտեղ Արարատ լեռը ոչ թե փոխաբերաբար առնված է իբրև կշռաքար, ինչպես սխալմամբ թարգմանում են, այլ իբրև բարձրության չափանիշ՝ բարձրակետ ([10], էջ 127): Թեկուզ, եթե Վարդան Արևելցու վկայությունը համարենք Եղիշեից բխող, կունենանք ոչ միայն V դ. հիշատակում, այլև երկու զուգահեռ անվանումների փաստարկում. «Արարատու լեռոն ոմանք զԿորդուաց ասեն, այլ ճշմարտու ճշմարտութիւն հայտնի առնէ զնա ի Մասիս գոլ» ([11], էջ 245): Ինչու՞ է Մասիսը, որովհետև, ըստ հեղինակի, նահանգի անունը Այրարատ է, որից էլ ծագում է Արարատ լեռնանունը [11]: Ահա սա հիմք է տալիս պնդելու, որ նահանգանունից լեռնանուն ստանալու օրինակը վերցրել են Այրարատից՝ կիրառելով Կորդուքում (հմմ. Այրարատն>Արարատ, Կորդուք > Կորդու > Կարդու), իսկ մինչ այդ երկուսն էլ զուգահեռաբար երկրանվան հիման վրա ստացել են նույն լեռնանունը՝ Արարատ/ Արարադ: Հետագայում տապանակիր լեռը Այրարատ նահանգի հետ ավելի շատ է կապվելու, քան Կորդուքի հետ, մինչև վերջինիս դուրս մղվելը: Հնագույն վկայություններից հայտնի է Հիերոնիմոսի հիշատակումը (IV դ.), որում, սակայն, լեռնանունը չի նշվում³, բայց որը մեծ դեր է խաղալու տապանակիր Մասիս-Արարատը քրիստոնյա Եվրոպայի հանրային գիտակցության մեջ արմատավորելու հարցում:

Մատենադարան

Ա. Ս. Սահակյան

Տապանակիր լեռան ավանդապատումը և Հայաստանի սրբազնացումը

Ցույց է տրվում, թե ինչպես Հայկական լեռնաշխարհից իբրև տապանակիր լեռներ ընտրվեցին Կորդված լեռների Ջուղի լեռը՝ միջագետքյան (շումերա-աքքադա-

³ Այս փաստի և լեռնանունների գործածման հետաքրքիր վերլուծություն է տվել Ա. Մուշեղյանը (տե՛ս [2], էջ 11-16, 31-33):

բաբելոնյան) վիպական ավանդություն, Մասիս-Արարատը՝ եբրայական ավանդություն: Հետագայում, երբ քրիստոնեության և իսլամի շնորհիվ տիրապետող դարձավ միայն Նոյան տապանի առասպելը, Նոյի տապանակիրը դարձավ Մասիս-Արարատը՝ քրիստոնեական աշխարհում և Ջուդի լեռը՝ իսլամական աշխարհում: Այս իրավիճակը պահպանվում է մինչև մեր օրերը:

А. С. Саакян

Легенда о горе ковчега и сакрализация Армении

Обосновывается, каким образом на Армянском нагорье в роли горы ковчега в эпической традиции Месопотамии была выбрана гора Джуди в горах Кордука, а в еврейской традиции – Масис-Арабат. Позже, когда через христианство и ислам в мифе о ковчеге господствующим стал лишь миф о Ноевом ковчеге, в христианском мире горой ковчега стал считаться Масис-Арабат, а в исламском мире – гора Джуди. Эта ситуация сохраняется до наших дней.

A. S. Sahakyan

The Legend about the Mount of Ark and Sacralization of Armenia

It is proved why and how in the epic tradition of Mesopotamia the Mount Judy of the Korduk Mountains was singled out from the Armenain Highlands as the Mount of Ark, while in Jewish tradition – the Mount Masis-Ararat. Later, when through the Christianity and Islam the myth about the Noah's ark became dominant in the myth about the ark, Masis-Ararat has become leading in the Christian world, and the Mount Judy – in the Islamic world. This situation remains up to now.

Գրականություն

1. *Петросян А.* In: Mythical Landscapes Then and Now: The Mystification of Landscapes in Search for National Identity, Yerevan, "Antares", 2006, էջ 261-274:
2. *Մուշեղյան Ա.* - ՊԲՀ, 2003, №1, էջ 3-39:
3. *Սարգսյան Դ.* - ՊԲՀ, 2001, №2, էջ 268-276:
4. *Մանասերյան Ռ.*, Հայաստանը Արտավազդից մինչև Տրդատ Մեծ, Եր., 1997:
5. *Ինգլիզեան Վ.*, Հայաստանը Սուրբ գրքի մեջ, Վիեննա, 1947:
6. Հովսեփոս Փլավիոս, Հրեական հնախոսություն, Օտար աղբյուրները հայերի և Հայաստանի մասին, հ. 9, աշխատ. Ս. Կրկյաշարյանի, Երևան, 1976:
7. *F. Murad*, Ararat und Masis, Heidelberg, 1901.
8. Migne, Patrologia Graeca, t. 18, col. 753:
9. Книга Юбилеев. Введ. и русс. пер. проф. А. Смирнова, Казань, 1895.
10. *Գրիգոր Նարեկացի*, Մատեն Ողբերգութեան, աշխատասիրությամբ Պ. Մ. Խաչատրյանի, Ա. Ա. Ղազինյանի, Եր., 1985, էջ 127:
11. *Լևոն Խաչիկյան*, Եղիշեի «Արարածոց մեկնությունը», Եր., 1992, էջ 245: