

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2016

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год
Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ,
ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա.
ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ.
ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս
Յու. Հ. ՇՈՒԳՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ.
քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е.
БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р.
МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М.
СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв.
секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E.
BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member
of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician
D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A.
ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г
Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67*URL:*<http://elib.sci.ame-mail: mas@sci.am>

©НАН РА. Президиум. 2016

©Издательство “Титутюн” НАН РА. 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ա. Հ. Առաքելյան</i> – Մֆերաների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն կորության տարածություններում	91
<i>Պ. Է. Մելիք-Աղամյան</i> – Իրական ռեզուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորների մասին	103

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ա. Ա. Չուբարյան, Ա. Ս. Ճիտոյան, Ա. Ա. Խամիսյան</i> – Բազմաբժեք տրամաբանություններում արտածման որոշ համակարգերի և նրանցում արտածման բարդությունների վերաբերյալ	108
--	-----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ռ. Մ. Կիրակոսյան</i> – Առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման ոչ դասական խնդիրը	115
<i>Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան</i> – Առաձգական հիմքի վրա հենվող առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման խնդիրը	120
<i>Ս. Մ. Մխիթարյան</i> – Կրիլովի և Բոգոլյուբովի մեթոդի կիրառությունը առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը	128

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ռ. Կ. Ալեքսանյան, Վ. Մ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Բելուբեկյան</i> – Խորանարդ համաչափությամբ անիզոտրոպ նյութից պիեզոէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետում եզակիությունները	136
--	-----

ԵՐԿՐԱՔԻՄԻԱ

<i>Ս. Վ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան</i> – Հայաստանի տարածքի երկրադինամիկական գործընթացների հիդրոերկրաբանական դիտարկումների արդյունքները	141
--	-----

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

<i>Վ. Օ. Թովուզյան, Տ. Ս. Խաչատրյան</i> – Ցածր տրիյոդիթրոնի սինդրոմի շրտկումը առնետների մոտ N-տեղակալված- α , β -դեհիդրոամինոթթուների խալինի եթերի միջոցով	148
---	-----

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Լ. Հ. Հակոբյան, Ն. Մ. Հարությունյան, Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Թռչունյան</i> – Ավանդական հայկական կաթնամթերքներ՝ մածունի, յուղորդի մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունները	154
--	-----

ԲՈՒՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ժ. Հ. Վարդանյան</i> – Հայաստանի բնության հատուկ պահպանվող տարածքների դենդրոֆլորաների տաքսոնոմիական կազմի համեմատական վերլուծություն	168
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>А. Г. Аракелян</i> – Конфигурации сфер в пространствах постоянной кривизны	91
<i>П. Э. Мелик-Адамян</i> – О симметрических операторах с вещественной точкой регулярного типа	103

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян</i> - О некоторых системах доказа- тельств для многозначных логик и сложностях выводов в них	108
---	-----

МЕХАНИКА

<i>Р. М. Киракосян</i> – Неклассическая задача изгиба упруго защемленной орто- тропной круглой пластинки	115
<i>Р. М. Киракосян, С. П. Степанян</i> – Задача изгиба упруго защемленной орто- тропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание	120
<i>С. М. Мхитарян</i> – Применение метода Крылова и Боголюбова к решению ин- тегральных уравнений одного класса контактных задач теории упругости	128

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян</i> – Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии...	136
--	-----

ГЕОХИМИЯ

<i>С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян</i> – Результаты гидрогеологичес- кого мониторинга геодинамических процессов территории Армении	141
--	-----

БИОХИМИЯ

<i>В. О. Топузян, Т. С. Хачатрян</i> – Коррекция синдрома низкого трийодтиронина у крыс посредством холиновых эфиров N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот ...	148
--	-----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>Л. Г. Акопян, Н. М. Арутюнян, К. В. Арутюнян, А. А. Трчунян</i> – Микробио- логические и адгезивные свойства традиционных армянских кисломолочных про- дуктов мацун и йогурт	154
---	-----

БОТАНИКА

<i>Ж. А. Варданян</i> – Сравнительный анализ таксономического состава дендро- флор особо охраняемых природных территорий Армении	168
---	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>A. H. Arakelyan</i> – Configurations of Spheres in Spaces of Constant Curvature ..	91
<i>P. E. Melik-Adamyanyan</i> – On Symmetric Operators with a Real Point of Regular Type	103

APPLIED MATHEMATICS

<i>A. A. Chubaryan, A. S. Tchitoyan, A. A. Khamisyan</i> – On Some Proof Systems for Many-Valued Logics and on Proof Complexities in It	108
---	-----

MECHANICS

<i>R. M. Kirakosyan</i> – The Non-Classical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Orthotropic Round Plate	115
<i>R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan</i> - The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation	120
<i>S. M. Mkhitarian</i> – Application of the Krylov-Bogolyubov Method for Solving Integral Equations of a Class of Contact Problems of the Theory of Elasticity	128

THEORY OF ELASTICITY

<i>R. K. Aleksanyan, V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan</i> – Singularities in the Corner Points of the Elastic Wedge from the Piezoelectric Material of the Cubic Symmetry	136
---	-----

GEOCHEMISTRY

<i>S. V. Grigoryan, R. A. Pashayan, L. V. Arutyunyan</i> – The Results of Hydro-geological Monitoring of Hydrodynamic Processes of the Territory of Armenia	141
---	-----

BIOCHEMISTRY

<i>V. O. Topuzyan, T. S. Khachatryan</i> – N-Substituted- α , β -Dehydroaminoacids Choline Ethers in Low Triiodothyronine Syndrome in Rats.....	148
--	-----

MICROBIOLOGY

<i>L. H. Hakobyan, N. A. Harutyunyan, K. V. Harutyunyan, A. H. Trchounian</i> – Microbiological and Adhesive Properties of Armenian Traditional Fermented Milk Products, Matsun and Yogurt	154
--	-----

BOTANY

<i>Zh. H. Vardanyan</i> – Comparative Analysis of the Taxonomic Composition of Dendroflora in Specially Protected Natural Areas of Armenia	168
--	-----

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՀՏԴ 514.112.6; 514.174.2

Ա. Հ. Առաքելյան

Աֆերաների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն կորության տարածություններում

(Ներկայացված է ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի կողմից 18/IV 2016)

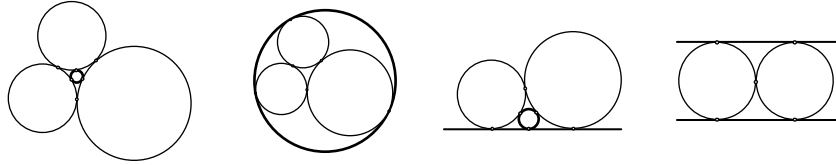
Առանցքային բառեր. *աֆերաների դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, աֆերիկ և հիպերբոլական երկրաչափություն, կորություն:*

1. Ներածություն: Շրջանագծերի և աֆերաների հետ կապված խընդիրները մշտապես գրավել են երկրաչափների ուշադրությունը: Չնայած նրան, որ աֆերայի ուսումնասիրությունն արդեն իսկ բավական հետաքրքիր է, այնուամենայնիվ առաջ են գալիս բազմաթիվ ուշագրավ հնարավորություններ, երբ դիտարկվում են մի քանի աֆերաների՝ միմյանց նկատմամբ կոնֆիգուրացիաները: Այս կոնֆիգուրացիաների տեսությունն ակնհայտորեն սկիզբ է առնում Ապոլլոնիոսի, Պապի շրջանագծերի անվերջ շղթաների և միմյանց փոխադարձաբար շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական խնդիրներից [1,2]: Թվացյալ պարզ այս խնդիրներն իրականում էվկլիդեսյան երկրաչափության բավականին բարդ լուծում ունեցող խնդիրներից են: Մեծ թվով հեղինակներ՝ սկսած Պապ Ալեքսանդրացուց մինչև Յ. Շտայներ և Հ. Քոքստեր անդրադարձել են այս խնդիրների լուծմանը՝ առաջարկելով կիրառել ինչպես դասական, այնպես էլ ոչ դասական երկրաչափության մեթոդներ [3, 4]:

Ժամանակակից շրջանում դասական համարվող այս խնդիրները զարգացման նոր փուլ են մտել: Դրանց ընդհանրացումներն ու կիրառությունները երկրաչափության տարբեր բնագավառներում մի շարք արժեքավոր արդյունքների ստացման խթան են [5,6]: Հոդվածում ամփոփվում են միմյանց փոխադարձաբար շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները բազմաչափ էվկլիդեսյան տարածությունում, կոմպլեքս հարթությունում, աֆերիկ և հիպերբոլական երկրաչափությունում [7,8]:

Սահմանում 1 (դեկարտյան կոնֆիգուրացիա): Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող $C_j, j = 1, 4$ չորս շրջանագծերի դասավորությունը կան-

վանենք դեկարտյան կոնֆիգուրացիա (նկ.1), եթե դրանցից ցանկացած երեքը չունեն ընդհանուր շոշափում:



Նկ. 1. Միմյանց գույգ առ գույգ շոշափող չորս շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ:

1643 թ. Բոհեմիայի թագուհի Եղիսաբեթին ուղղված իր նամակում Ռ. Դեկարտը նշում է հետևյալ պնդմանը համարժեք մի առնչություն [1].

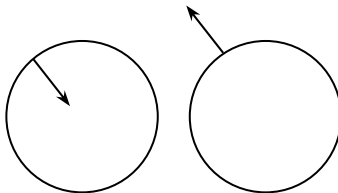
Թեորեմ 1 (Դեկարտի դասական թեորեմ): Չորս միմյանց գույգ առ գույգ շոշափող շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը.

$$\sum_{j=1}^4 b_j^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^4 b_j \right)^2, \quad (1)$$

որտեղ $b_j = r_j^{-1}$ -ը՝ C_j շրջանագծի կորությունն է:

Դեկարտը դիտարկում էր միայն նկ.1-ում բերված առաջին տիպի կոնֆիգուրացիան, սակայն նրա թեորեմի պնդումը ճիշտ է կոնֆիգուրացիաների բոլոր տիպերի դեպքում, եթե միայն շրջանագծերի կորությունների համար սահմանենք որոշակի նշաններ: Դեկարտի թեորեմն ընդհանրացնելու և հետագա շարադրանքն ավելի խիստ մաթեմատիկական հիմքի բերելու համար ներմուծենք կողմնորոշված շրջանագծի և կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի գաղափարները:

Սահմանում 2: Շրջանագիծն իր միավորի նորմալ վեկտորի որոշված ուղղությամբ (դեպի ներս կամ դուրս) կոչվում է կողմնորոշված շրջանագիծ:

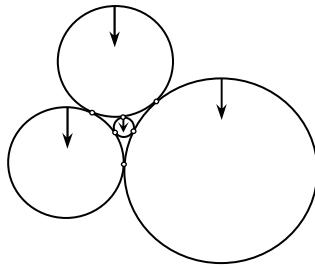


Նկ. 2. Դեպի ներս և դուրս կողմնորոշումներ:

Սահմանում 3: Դիցուք C -ն r շառավղով կողմնորոշված շրջանագիծ է: Կհամարենք, որ C -ն ունի $b = \frac{1}{r} > 0$ դրական կորություն, C -ն կողմնորոշված է դեպի ներս: Հակառակ դեպքում C ուղղորդված

շրջանագիծը սահմանվում է $b = -\frac{1}{r} < 0$ բացասական կորությամբ և սահմանափակում է ընդհանրացված շրջան: Ուղիղն ընդունվում է որպես զրոյական կորությամբ շրջանագիծ:

Սահմանում 3: Կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կանվանենք այն դեկարտյան կոնֆիգուրացիան, որում շրջանագծերի կողմնորոշվածությունները համատեղելի են հետևյալ իմաստով. կամ բոլոր շրջանագծերի ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ ներքին տիրույթները չեն հատվում, եթե բոլոր շրջանագծերի կողմնորոշվածությունները հակուղղվեն:



Նկ. 3. Կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա:

2. Դեկարտի թեորեմի էվկլիդեսյան ընդհանրացումները: Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները սկսենք նրա կոմպլեքս անալոգից:

Թեորեմ 2 (Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմ): Դիցուք տրված է կամայական $C_1 C_2 C_3 C_4$ Դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, որտեղ i -րդ շրջանագիծը՝ $i = \overline{1, 4}$, ունի b_i կորություն և $z_i = x_i + iy_i$ կենտրոն: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\sum_{i=1}^4 (b_i z_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 b_i z_i \right)^2 : \quad (2)$$

Դեկարտի թեորեմը ստանում է ավելի գեղեցիկ տեսք, երբ ներկայացվում է մատրիցների միջոցով: Դիտարկենք (1)-ի հիման վրա կառուցված

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := x^T Q_2 x = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \quad (3)$$

Դեկարտի քառակուսային ձևը: Նշանակելով $\mathbf{1}_n$ -ով $(1 \times n)$ -չափանի 1-երից բաղկացած մատրիցը՝ (3) քառակուսային ձևի գործակիցների Q_2 մատրիցի համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը.

$$\mathbf{Q}_2 = I_4 - \frac{1}{2} \mathbf{1}_4 \mathbf{1}_4^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

որտեղ $\mathbf{Q}$ -ի ինդեքսը ցույց է տալիս դիտարկվող տարածության չափը:

Ելնելով այս նշանակումներից՝ Դեկարտի (1) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$b^T \mathbf{Q}_2 b = 0,$$

որտեղ $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ -ն դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կորությունների վեկտորն է: Համանմանորեն Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմի (2) առնչությունը կարելի է ներկայացնել

$$c^T \mathbf{Q}_2 c = 0 \quad (4)$$

մատրիցային տեսքով, որտեղ $c = (b_1 z_1, b_2 z_2, b_3 z_3, b_4 z_4)^T$ -ը կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կենտրոնների և համապատասխան կորությունների արտադրյալների վեկտորն է:

Նկատենք, որ (4) առնչությունից հնարավոր չէ ստանալ այդ շրջանագծերի երկրաչափական դիրքերը: Հետևյալ թեորեմը տալիս է այդ հնարավորությունը:

Թեորեմ 3 (Դեկարտի ընդլայնված թեորեմ): Դիցուք տրված է C_i , $i = 1, 4$, չորս կողմնորոշված շրջանագծերի դասավորություն, որտեղ i -րդ շրջանագիծն ունի b_i կորություն և $O_i(x_i, y_i)$ կենտրոն: Նշանակենք M -ով 4×3 չափի հետևյալ մատրիցը.

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & b_1 x_1 & b_1 y_1 \\ b_2 & b_2 x_2 & b_2 y_2 \\ b_3 & b_3 x_3 & b_3 y_3 \\ b_4 & b_4 x_4 & b_4 y_4 \end{pmatrix}:$$

Տրված չորս շրջանագծերը կկազմեն կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$M^T \mathbf{Q}_2 M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}: \quad (4')$$

Ընդ որում ուղիղներ պարունակող դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համար գոյություն ունի M մատրիցի այնպիսի սահմանում, որը պահպանում է (4') առնչության ճշմարտացիությունը:

Դիտողություն: Այս թեորեմից բխում է Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմը, եթե այն կիրառենք $z = x + iy$ վեկտորի համար, որտեղ x -ը և y -ը M -ի երկրորդ և երրորդ սյուներն են:

Թեորեմ 3-ը կարելի է ընդհանրացնել n -չափանի տարածության համար: Վերջինիս նպատակով սահմանենք n -չափանի սֆերաների դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի և կորություն-կենտրոնային կոորդինատային համակարգի գաղափարները:

Էվկլիդեսյան n -չափանի $\mathbb{R}^n$ տարածությունում կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիան սահմանվում է որպես $n+2$ հատ միմյանց, զույգ առ զույգ, տարբեր կետերում շոշափող կողմնորոշված $(n-1)$ -սֆերաների դասավորություն, որտեղ սֆերաների կողմնորոշվածությունները համադրելի ենայն իմաստով, որ բոլոր սֆերաների ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ ներքին տիրույթները չեն հատվում, եթե բոլոր սֆերաների կողմնորոշվածությունների վեկտորները հակողովեն: Դիտարկված և տրիվյալ դեպքերից խուսափելու նպատակով ենթադրենք, որ $n \geq 2$: Այդ դեպքում որպես սֆերայի սահմանային տարբերակ կարելի է վերցնել հիպերհարթություն, որն ունի զրոյական կորություն և կողմնորոշվածություն, որը տրվում է միավոր նորմալ վեկտորով: Դիտարկենք Դեկարտի թեորեմի ընդհանրացված տարբերակը n -չափանի տարածությունում կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի համար:

Թեորեմ 4 (Դեկարտի բազմաչափ Էվկլիդեսյան թեորեմ): $\mathbb{R}^n$ -ում տրված $S_j, j = 1, n+2$ սֆերաների կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\sum_{j=1}^{n+2} b_j^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n+2} b_j \right)^2, \quad (5)$$

որտեղ b_j -ն S_j սֆերայի կորությունն է:

Առնչություն (5)-ը կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային տեսքով.

$$Q_n(b) := b^T Q_n b = 0, \quad (6)$$

որտեղ $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n+2})^T$, իսկ $Q_n(x) = x^T Q_n x$ -ը n -չափանի դեկարտյան քառակուսային Δ ն է, որի գործակիցների Q_n մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$Q_n = I_{n+2} - \frac{1}{n} \mathbf{1}_{n+2} \mathbf{1}_{n+2}^T:$$

Սահմանում 4: Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ n -չափանի տարածությունում S սֆերայի կորություն-կենտրոնային կոորդինատներ կանվանենք $(n+1)$ -չափանի $m(S) = (b, bx_1, \dots, bx_n)$ վեկտորը, որտեղ b -ն S սֆերայի կորությունն է (ոչ զրոյական), իսկ $x(S) = x = (x_1, \dots, x_n)$ -ը՝ կենտրոնը: H կողմնորոշված հիպերհարթության դեպքում կորություն-կենտրոնային կոորդինատները կանվանենք $m(H) = (0, h)$ վեկտորը, որտեղ $h =$

$= (h_1, \dots, h_n)$ -ը H -ի այնմիավոր նորմալ վեկտորն է, որն ուղղված է դեպի վերջինիս ներքին տիրույթ¹:

Թեորեմ 4 (Ղեկարտի ընդհանրացված բազմաչափ Էվկլիդեսյան թեորեմ): Դիցուք $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$ կողմնորոշված սֆերաները կազմում են կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, իսկ $M - \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+1)}$ - չափանի մատրից է, որի i -րդ տողը $m(S_i)$ վեկտորն է: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$M^T Q_n M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}: \quad (7)$$

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը՝ (7)-ի կամայական իրական M լուծմանը համապատասխանում է միակ կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, նույնիսկ երբ այն պարունակում է հիպերհարթություններ, որոնք միարժեքորեն որոշվում են կոնֆիգուրացիայի այլ սֆերաների միջոցով:

Թեորեմ 4-ի հետագա ընդհանրացման համար դիտարկենք ինվերսիայի գործողությունը n -չափանի $\mathbb{R}^n$ Էվկլիդեսյան տարածությունում: Համաձայն սահմանման՝ սկզբնակետում կենտրոն ունեցող միավոր S_1

սֆերայի նկատմամբ ինվերսիան x կետն արտապատկերում է $\frac{x}{|x|^2}$

կետին, որտեղ $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$: Դիտարկենք կամայական x կենտրոնով և r շառավղով S կողմնորոշված սֆերա: Նրա ինվերս պատկերը S_1

սֆերայի նկատմամբ կլինի կողմնորոշված $\bar{S}$ սֆերա $\bar{x} = \frac{x}{|x|^2 - r^2}$

կենտրոնով և $\bar{r} = \frac{r}{|x|^2 - r^2}$ շառավղով: Այդ սֆերաների միջև առկա է հետևյալ կապը.

$$\frac{x}{r} = \frac{\bar{x}}{\bar{r}}, \bar{b} = \frac{|x|^2}{r} - r: \quad (8)$$

Նկատենք, որ $|x|^2 > r^2$ դեպքում $\bar{S}$ սֆերան կունենա նույն կողմնորոշումը, ինչ S -ը: Օգտվելով ինվերսիայի գաղափարից՝ ընդլայնենք կորություն-կենտրոնային կոորդինատները հետևյալ կերպ:

¹Նկատենք, որ կորություն-կենտրոնային կոորդինատային համակարգը միշտ չէ, որ միանշանակորեն նկարագրում է կողմնորոշված սֆերան: Եթե տրված $m \in \mathbb{R}^{n+1}$ կորություն-կենտրոնային կոորդինատի առաջին տարրը զրոյից տարբեր է, ապա սֆերան որոշվում է միարժեքորեն: Մակայն առաջին տարրի զրոյական լինելու դեպքում (հիպերհարթության դեպք) m վեկտորով որոշվում է հիպերհարթություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sum h^2 = 1$, ընդ որում այս պայմանին բավարարող m կորություն-կենտրոնային կոորդինատներով որոշվում է հիպերհարթությունների փունջ, որոնք ստացվում են միմյանցից գուգահեռ տեղափոխության միջոցով:

Սահմանում 5: $\mathbb{R}^n$ -ում տրված S կողմնորոշված սֆերայի ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատներ կանվանենք $(n+2)$ -չափանի

$$w(S) = (\bar{b}, b, bx_1, \dots, bx_n) = (\bar{b}, m)$$

վեկտորը, որտեղ $\bar{b}$ -ը սկզբնակետում տեղադրված միավոր շրջանագծի նկատմամբ S սֆերայի ինվերս $\bar{S}$ սֆերայի կորությունն է: Հիպերհարթության համար ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$w(H) = (\bar{b}, 0, h_1, \dots, h_n) = (\bar{b}, m(H)),$$

որտեղ $\bar{b}$ -ը սկզբնակետում տեղադրված միավոր շրջանագծի նկատմամբ H հիպերհարթության ինվերս $\bar{H}$ պատկերի կորությունն է:

Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ n -չափանի տարածությունում ընդլայնված կորություն - կենտրոնային կոորդինատային համակարգը միանշանակորեն որոշում է սֆերան: Ի տարբերություն կորություն-կենտրոնային համակարգի՝ հիպերհարթությունները ևս միարժեքորեն որոշվում են իրենց ընդլայնված կորություն-կենտրոնային կոորդինատներով:

Դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կազմող S_i , $i = \overline{1, n+2}$ կողմնորոշված սֆերաների համար կազմենք $(n+2) \times (n+2)$ -չափանի W մատրիցը, որի i -րդ տողը $w(S_i)$ վեկտորն է: Քանի որ ինվերսիան պահպանում է սֆերաների շոշափելիությունը, ապա դիտարկվող կոնֆիգուրացիային համապատասխանում է մեկ այլ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, որի շրջանագծերը ստացվում են առաջինի շրջանագծերի միավոր սֆերայի նկատմամբ ինվերս պատկերներից: Այս երկու կոնֆիգուրացիաների համար (8)-ից կարելի է ստանալ W և W_{inv} մատրիցների կապը.

$$W = W_{inv} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}: \quad (9)$$

Թեորեմ 4 (Դեկարտի ընդլայնված Էվկլիդեսյան թեորեմ): Տրված S_i , $i = \overline{1, n+2}$ կողմնորոշված սֆերաներից կազմված դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիայի համար կառուցված W մատրիցի համար ճիշտ է հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$W^T Q_n W = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_n \end{pmatrix}: \quad (10)$$

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը. (10) հավասարման ցանկացած իրական լուծում որոշում է միակ դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա:

Այս թեորեմը բնութագրում է դեկարտյան կոնֆիգուրացիաները մինչ այժմ դիտարկված ամենաընդհանուր ձևով: Այն ներառում է մինչ հիմա դիտարկված բոլոր թեորեմները: Նրա ապացույցը հետևում է այս թեորեմի ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություններում առկա համանման թեորեմներից [3]:

3. Դեկարտի թեորեմի սֆերիկ և հիպերբոլական ընդհանրացումները: Սֆերիկ երկրաչափության ստանդարտ մոդելում տարածությունը դիտարկվում է R^{n+1} -ի սկզբնակետում կենտրոն ունեցող, միավոր շառավղով n -չափանի $S^n := \{y : y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1\}$ սֆերայի վրա:

Ստանդարտ մոդելում որպես մետրիկա ընտրվում է R^{n+1} -ում որոշված Ռիմանյան մետրիկան: Այս մոդելում տրված երկու կետերի միջև հեռավորությունն այդ կետերում ծայրակետեր ունեցող շառավիղ վեկտորների միջև անկյունն է, որը բավարարում է $0 \leq \alpha \leq \pi$ պայմանին:

Հեռավորության նման սահմանման դեպքում տրված կետից (կենտրոն) հավասարահեռ կետերի բազմությունը S^n սֆերիկ երկրաչափությունում կոչվում է *սֆերա* (C): C սֆերայի կենտրոնում և նրա ցանկացած կետում ծայրակետեր ունեցող շառավիղ-վեկտորների կազմած $\alpha = \alpha(C)$ անկյան մեծությունը կոչվում է *սֆերիկ կամ անկյունային շառավիղ*: Նկատենք, որ տրված սֆերայի համար կարելի է ընտրել երկու կենտրոններ, որոնք S^n սֆերայի վրա տեղաբաշխված են միմյանց տրամագծորեն հակառակ: Սֆերայի կենտրոնի ընտրությունը որոշում է նրա կողմնորոշվածությունը: Այս մոդելում սֆերայի ներքին տիրույթը կարելի է դիտարկել որպես S^n սֆերայի և հիպերհարթության հատույթով միավոր սֆերայից առանձնացած սեգմենտ, որը կանվանենք *սֆերիկ սեգմենտ* (կողմնորոշված սֆերա): Ակնհայտ է, որ տրված սֆերայով կարելի է որոշել երկու սֆերիկ սեգմենտներ, որոնց անկյունային շառավիղների գումարը π է: Որոշակիության համար որպես տրված սֆերայի ներքին տիրույթ ընտրենք այն սեգմենտը, որը պարունակում է նրա կենտրոնը:

Սահմանում 6: *Սֆերիկ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա* կանվանենք $(n+2)$ հատ միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող սֆերիկ սեգմենտների այնպիսի դասավորություն, որտեղ կամ բոլոր սֆերիկ սեգմենտների, կամ դրանց բոլորի լրացումների ներքին տիրույթները չեն հասնում:

Թեորեմ 5 (Դեկարտի սֆերիկ թեորեմ): *Դիցուք միավոր շառավղով n -չափանի S^n սֆերայի վրա տրված են $\alpha_i, i = 1, n+2$ սֆերիկ շառավիղներով C_i կողմնորոշված սֆերաները, որոնք կազմում են դեկար-*

տյան սֆերիկ կոնֆիգուրացիա, այդ դեպքում α_i շառավիղների համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n+2} \operatorname{ctg}^2 \alpha_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n+2} \operatorname{ctg} \alpha_i \right)^2 - 2 :$$

Դեկարտի սֆերիկ թեորեմը կախված է միայն սֆերիկ երկրաչափության ռիմանյան մետրիկայից և ոչ թե այն կոորդինատային համակարգից, որն օգտագործվում է՝ նկարագրելու համար տրված բազմաձևությունը: Սակայն այնկարելի է ապացուցել, որպես մասնավոր դեպք մի ավելի ընդհանրացված թեորեմի, որը կախված է որոշակի կոորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Սահմանում 7: Դիցուք C -ն սֆերիկ սեգմենտ է $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ կենտրոնով և α անկյունային շառավղով: Այդ դեպքում C սֆերիկ սեգմենտի *կորություն-կենտրոնային* կոորդինատներ կանվանենք $(n+2)$ -չափանի հետևյալ վեկտորը.

$$w_+(C) = \left(\operatorname{ctg} \alpha, \frac{y_0}{\sin \alpha}, \frac{y_1}{\sin \alpha}, \dots, \frac{y_n}{\sin \alpha} \right):$$

Նկատենք, որ այս կոորդինատային համակարգը միարժեքորեն որոշում է սֆերիկ սեգմենտը: Միարժեքությունը բխում է $w_+(C)$ վեկտորի առաջին տարրից α անկյանմիանշանակ որոշելուց, ինչն էլ իր հերթին միարժեքորեն որոշում է սֆերիկ սեգմենտի կենտրոնի կոորդինատները $w_+(C)$ վեկտորի մնացած կոորդինատներից:

C_i , $i = 1, n+2$ սֆերիկ սեգմենտների կամայական դասավորության համար սահմանենք $(n+2) \times (n+2)$ -չափանի W_+ մատրիցը, որի i -րդ տողը $w_+(C_i)$ վեկտորն է:

Թեորեմ 6 (Դեկարտի ընդհանրացված սֆերիկ թեորեմ): Դիցուք տրված C_i , $i = 1, n+2$ սֆերիկ սեգմենտները կազմում են կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիա: Այդ դեպքում կոնֆիգուրացիայի W_+ մատրիցը բավարարում է

$$W_+^T Q_n W_+ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

առնչությանը, որտեղ I_n -ը n -չափանի միավոր մատրից է, իսկ

$$Q_n = I_{n+2} - \frac{1}{n} 1_{n+2} 1_{n+2}^T :$$

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը. (11) հավասարման ցանկացած իրական լուծմանը համապատասխանում է որևէ դեկարտյան սֆերիկ կոնֆիգուրացիա:

Դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի հիպերբոլական ընդհանրացման համար դիտարկենք H^n հիպերբոլական երկրաչափության հիպերբոլիդի մոդելը: H^n -ում նույնպես սֆերան սահմանվում է որպես մի կետից (կենտրոն) հավասարահեռ (հիպերբոլական մետրիկայի իմաստով) կետերի բազմություն:

Հիպերբոլիդի մոդելում տարածությունը դիտարկվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ տարածությունում տեղադրված $H_{\pm}^n$ երկխոռոչ հիպերբոլիդի վերին H_+^n մասի վրա: Դիցուք $H_{\pm}^n$ հիպերբոլիդը որոշվում է $u_0^2 = 1 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ հավասարումով, այդ դեպքում H_+^n -ը կորոշվի նույն հավասարումով, եթե $u_0 > 0$: Մետրիկան այս մոդելում տրվում է

$$ds^2 = -du_0^2 + du_1^2 + \dots + du_n^2,$$

իսկ u և u' կետերի միջև հեռավորություն

$$\text{ch}(d(u, u')) = u_0 u'_0 - u_1 u'_1 - \dots - u_n u'_n$$

առնչություններով: Հիպերբոլիդի մոդելի համար ընտրված հեռավորության սահմանումից հետևում է, որ սֆերան այդ մոդելում ծնվում է H_+^n հիպերբոլիդի վերին խոռոչի և $G(u) = 0$ հարթության հատումից, որտեղ

$$G(u) = g_0 u_0 - \sum_{i=1}^n g_i u_i - g, \quad g > 1,$$

և նորմալացված է $g_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^n g_i^2$ պայմանով, այսինքն՝ $\mathbf{g} = (g_0, \dots, g_n)$ կետը ընտրվում է այնպես, որ այն գտնվի H_+^n հիպերբոլիդի վերին խոռոչի վրա: Այս կերպ սահմանված սֆերան Էվկլիդեսյան երկրաչափությունում Էլիպսոիդ է, նրա կենտրոնը $\mathbf{g}$ կետն է, իսկ d շառավիղը բավարարում է $\text{ch}(d) = g$ հավասարմանը: Ինչպես սֆերիկ երկրաչափությունում, այնպես էլ այստեղ, որպես սֆերայի ներքին տիրույթ վերցնենք H_+^n հիպերբոլիդի վերին խոռոչի և $G(u) = 0$ հարթության հատումից առաջացած այն հատվածը, որը ներառում է այդ սֆերայի կենտրոնը:

Սահմանում 8: H^n -ում կողմնորոշված հիպերբոլական դեկարտյան կոնֆիգուրացիա կանվանենք $n+2$ հատ միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող հիպերբոլական սֆերաների այնպիսի կոնֆիգուրացիա, որտեղ կամ դրանց ներքին տիրույթները չեն հատվում, կամ կամայական երկու սֆերաների ներքին տիրույթները հատվում են ոչ դատարկ բաց բազմությամբ:

Թեորեմ 6 (Դեկարտի հիպերբոլական թեորեմ): H^n հիպերբոլական երկրաչափությունում $n+2$ հատ սֆերաների կողմնորոշված դեկար-

տյան կոնֆիգուրացիայի $s_i, i = \overline{1, n+2}$ շառավիղները բավարարում են հետևյալ առնչությանը.

$$\sum_{i=1}^{n+2} (\operatorname{cth} s_i)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n+2} \operatorname{cth} s_i \right)^2 + 2 :$$

Սահմանում 9: Դիցուք S -ը $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ կենտրոնով և s շառավղով հիպերբոլական սֆերա է H_+^n -ում: S հիպերբոլական սֆերայի *կոորդինատ-կենտրոնային* կոորդինատներ կանվանենք $(n+2)$ -չափանի հետևյալ վեկտորը.

$$w_-(S) = \left(\operatorname{ch} s, \frac{u_0}{\operatorname{sh} s}, \frac{u_1}{\operatorname{sh} s}, \dots, \frac{u_n}{\operatorname{sh} s} \right):$$

$S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$ հիպերբոլական սֆերաների կոնֆիգուրացիայի համար կառուցենք $(n+2) \times (n+2)$ -չափանի W_- մատրիցը, որի i -րդ տողը $w_-(S_i)$ վեկտորն է:

Թեորեմ 7 (Դեկարտի ընդհանրացված հիպերբոլական թեորեմ): Դիցուք տրված է $S_i, i = \overline{1, n+2}$ հիպերբոլական սֆերաների դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա: Այդ սֆերաների համար կառուցված W_- մատրիցը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$W_-^T Q_n W_- = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_n \end{pmatrix}:$$

Ուշագրավ է, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն էվկլիդեսյան, սֆերիկ և հիպերբոլական կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների միջև, մասնավորապես դրանց համար համապատասխանաբար կառուցված W , W_+ և W_- մատրիցների համար տեղի ունի հետևյալը.

$$W = W_+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} = W_- \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}:$$

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

Ա. Հ. Առաքելյան

**Մթերանների կոնֆիգուրացիաները հաստատուն
կորության տարածություններում**

Ամփոփվում են միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի՝ Դեկարտի դասական թեորեմի ընդհանրացումները կոմպլեքս հարթությունում, բազմաչափ եվկլիդեսյան, սֆերիկ և հիպերբոլական տարածություններում:

А. Г. Аракелян

Конфигурации сфер в пространствах постоянной кривизны

Приводится краткий обзор результатов обобщений классической задачи Декарта о конфигурациях четырех попарно касающихся окружностей на комплексной плоскости, в многомерном евклидовом, сферическом и гиперболическом пространствах.

A. H. Arakelyan

Configurations of Spheres in Spaces of Constant Curvature

The generalizations of Descartes' classical problem of four mutually tangent circles for complex plane, n -dimensional euclidean, spherical and hyperbolic spaces are resumed.

Գրականություն

1. *Descartes R. Oeuvres de Descartes, Correspondance IV. (C. Adam and P. Tannery, Eds.). Paris: Leopold Cerf. 1901.*
2. *Ջաքարյան Վ.Ս., Առաքելյան Ա. Հ. – ՀՀ ԳԱԱ Զեկույցներ, 2009, հ. 109, № 4, էջ 275-282:*
3. *Steiner J. – J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 161–184, 252–288; J. Steiner. Gesammelte Werke. V. I. Reimer. Berlin. 1881. P. 17–76.*
4. *Coxeter H. M. – Amer. Math. Monthly. 1968. V. 75. P. 5–15.*
5. *Sarnak P. - Amer. Math. Monthly. 2011. V. 118. P.291-306.*
6. *Kontorovich A., Apollonian Oh. H. - J. Amer. Math. Soc. 2011. V. 24. P. 603-648.*
7. *Առաքելյան Ա. Հ. – Մաթեմատիկական բարձրագույն դպրոցում, 2014, հ. 10, № 1, էջ 5-15:*
8. *Առաքելյան Ա. Հ. – Մաթեմատիկական բարձրագույն դպրոցում, 2015, հ. 11, № 1, էջ 5-14:*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.46

П. Э. Мелик-Адамян

О симметрических операторах с вещественной точкой регулярного типа

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 19/II 2016)

Ключевые слова: симметрический оператор, точка регулярного типа, масштабное подпространство, характеристическая функция, спектр.

1. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и T – простой замкнутый симметрический оператор с областью определения $\mathcal{D}(T)$, плотной в $\mathfrak{H}$, так что определен и сопряженный оператор T^* с областью $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}(T)$. Пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ обозначим $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$. Открытые верхнюю, нижнюю полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$. $\mathcal{K}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ означают ядро и образ оператора.

Далее всюду некоторое $\gamma \in \mathbb{C}^+$ будет фиксированным. Пусть $\mathfrak{N}_\gamma$, $\mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$ – дефектные подпространства оператора T и $\dim \mathfrak{N}_\gamma = \dim \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}} = n \leq \infty$. Приведем необходимые определения и факты.

Разложение линейного многообразия $\mathcal{D}(T^*)$ в прямую сумму

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \dot{+} \mathfrak{N}_\gamma \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$$

определяет косые проекторы P_γ , $P_{\bar{\gamma}}$ в $\mathcal{D}(T^*)$ на подпространства $\mathfrak{N}_\gamma$, $\mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$ параллельно $\mathcal{D}(T) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$, $\mathcal{D}(T) \dot{+} \mathfrak{N}_\gamma$, и следующие сужения оператора T^*

$$T_\gamma = T^*|_{[\mathcal{D}(T_\gamma) = \mathcal{K}(P_{\bar{\gamma}})]} \text{ и } T_{\bar{\gamma}} = T^*|_{[\mathcal{D}(T) = \mathcal{K}(P_\gamma)]} \quad (1)$$

являются максимальными диссипативным ($\operatorname{Im} \langle T_\gamma f, f \rangle \geq 0$, $f \in \mathcal{D}(T_\gamma)$) и аккумулятивным ($\operatorname{Im} \langle T_{\bar{\gamma}} f, f \rangle \leq 0$, $f \in \mathcal{D}(T_{\bar{\gamma}})$) расширениями оператора T . Операторы $(T_\gamma - \zeta I)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C}^-$; $(T_{\bar{\gamma}} - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}^+$ существуют, определены всюду на $\mathfrak{H}$ и ограничены (см. [2, XXII, 4.]).

Образ $\mathcal{R}(T - \sigma I)$ является подпространством для любого $\sigma \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \sigma \neq 0$, и в работе [7] доказано, что прямые разложения

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \lambda I) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}, \lambda \in \mathbb{C}^+; \quad \mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \zeta I) \dot{+} \mathfrak{N}_{\gamma}, \zeta \in \mathbb{C}^-, \quad (2)$$

определяют аналитические в $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ операторные функции $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)$, $P_{\gamma}(\zeta)$, значениями которых являются проекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$, $\mathfrak{N}_{\gamma}$ параллельно $\mathcal{R}(T - \lambda I)$, $\mathcal{R}(T - \zeta I)$. Если существуют комплексные числа $\lambda_0 \in \mathbb{C}^+$, $\zeta_0 \in \mathbb{C}^-$ и подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ размерности n такие, что

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \lambda_0 I) \dot{+} \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \zeta_0 I) \dot{+} \mathfrak{M}, \quad (3)$$

то они называются $\mathfrak{M}$ -регулярными (регулярными) точками оператора T , а подпространство $\mathfrak{M}$ – его масштабным подпространством. Множество $\Lambda(T) \subseteq \mathbb{C}$ регулярных точек оператора T является открытым (см. [4], [1, App.1], [3]). Ниже всюду полагается, что переменные λ , ζ принадлежат $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ соответственно и, если не оговорено противное, $n = \infty$.

2. Пусть оператор T имеет по крайней мере одну вещественную точку регулярного типа. Не ограничивая общности, такой можно полагать точку 0, то есть рассмотрим случай, когда оператор T имеет обратный T^{-1} с областью определения $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$, $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{H}(T)$ и $\|T^{-1}\| < \infty$. Обозначим $\tau = \|T^{-1}\|^{-1}$.

Область определения оператора T^{-1} является подпространством и в ортогональном разложении

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T) \dot{+} \mathcal{H}(T^*) \quad (4)$$

имеем $\dim \mathcal{H}(T^*) = n$.

Теорема 1. Пусть точка 0 является точкой регулярного типа для симметрического оператора T с равными дефектными числами. Тогда подпространство $\mathcal{H}(T^*)$ является масштабным для T таким, что

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \sigma I) \oplus \mathcal{H}(T^*), \quad |\sigma| < \tau. \quad (5)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{R}(T - \sigma I) \cap \mathcal{H}(T^*) = \{0\} \quad (6)$$

для всех невещественных σ . Действительно, если $(T - \sigma I)f_0 = h_0$, $f_0 \in \mathcal{D}(T)$, $h_0 \in \mathcal{H}(T^*)$, то

$$\langle (T - \sigma I)f_0, Tf_0 \rangle = \langle h_0, Tf_0 \rangle = \langle T^*h_0, f_0 \rangle = 0,$$

и $\|Tf_0\|^2 = \sigma \langle Tf_0, f_0 \rangle$, что является противоречием, поскольку $Tf_0 \neq 0$.

Для произвольного вектора $h \in \mathfrak{H}$ из формулы (4) имеем $h = g_0 + h_0 = Tf_0 + h_0$.

Определим расширение S оператора T^{-1} на $\mathfrak{H}$ по правилу $Sh = T^{-1}g_0 = f_0$, $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(T^*)$. Очевидно $\|S\| = \|T^{-1}\|$, следовательно для $|\sigma| < \tau$ оператор $I - \sigma S$ ограниченно обратим и $\mathcal{H}((I - \sigma S)^{-1}) = \mathfrak{H}$. Для всякого λ , $|\lambda| < \tau$ и произвольного $h \in \mathfrak{H}$, не принадлежащего $\mathcal{R}(T - \lambda I)$, из формулы (2) имеем

$$h = (T - \lambda I)f_0 + f_{\bar{\gamma}}, \quad f_{\bar{\gamma}} \in \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}, \quad f_{\bar{\gamma}} \neq 0. \quad (7)$$

Тогда ненулевой вектор $h' = (I - \lambda S)^{-1}f_{\bar{\gamma}}$ таков, что

$$f_{\bar{\gamma}} = (I - \lambda S)h' = (I - \lambda S)(g' + h'_0) = g' - \lambda Sg' + h'_0.$$

Поскольку $g' = Tf'_0$, $Sg' = f'_0$, то формула (7) запишется как

$$h = (T - \lambda I)f_0 + (T - \lambda I)f'_0 + h'_0 = (T - \lambda I)(f_0 + f'_0) + h'_0,$$

доказывая формулу (5) для $\lambda \in C^+$. Для $\zeta \in C^-$, $|\zeta| < \tau$ доказательство аналогично. Из обратимости оператора $T - \mu I$ для вещественных $\mu \in (-\tau, \tau)$ следует замкнутость $\mathcal{R}(T - \mu I)$, значит справедливо и ортогональное разложение

$$\mathfrak{H} = \mathcal{R}(T - \mu I) \oplus \mathcal{N}(T - \mu I),$$

так что для произвольного $h \in \mathfrak{H}$ имеем $h = (T - \mu I)f_0 + h_\mu$, $h_\mu \in \mathcal{N}(T - \mu I)$. Как и выше, из $(I - \mu S)^{-1}h_\mu = Tf'_0 + h_0$, $h_0 \in \mathcal{N}(T^*)$ следует, что $h = (T - \mu I)(f_0 + f'_0) + h_0$.

Теорема доказана.

Отметим связь этой теоремы со следующим результатом. Симметрический оператор T называется целым, если существует масштабное подпространство $\mathfrak{M}$ такое, что разложение (3) справедливо для всех $\sigma \in C$ (см. [4], [1, App.1]).

В работе [8] доказано, что оператор T является целым тогда и только тогда, когда точка 0 является его точкой регулярного типа и оператор T^{-1} имеет квазинильпотентное расширение S такое, что $\mathcal{A}(S) = \mathfrak{H}$, $\mathcal{R}(S) = \mathcal{A}(T)$, при этом $\mathfrak{M} = \mathcal{N}(S)$.

Замечание 1. В случае $\dim \mathcal{N}(T^*) = n < \infty$ из формулы (6) уже следует разложение (5) для $\sigma \in C^+ \cup C^-$, так как из (2) имеем $\text{codim } \mathcal{R}(T - \sigma I) = n$, следовательно формула (5) верна и для $\sigma \in C^+ \cup C^- \cup (-\tau, \tau)$.

Обозначим

$$\mathfrak{N}_0 = \mathcal{N}(T^*), D^+(\tau) = \{\lambda \in C^+, |\lambda| < \tau\}; D^-(\tau) = \{\zeta \in C^-, |\zeta| < \tau\}$$

и на областях $D^+(\tau)$, $D^-(\tau)$ рассмотрим операторные функции

$$Q(\lambda, \bar{\gamma}) = P_{\bar{\gamma}}(\lambda) | \mathfrak{N}_0 \in [\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}], Q(\zeta, \gamma) = P_{\gamma}(\zeta) | \mathfrak{N}_0 \in [\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_{\gamma}].$$

Следствие 1. Значения операторных функций $Q(\lambda, \bar{\gamma})$, $Q(\zeta, \gamma)$ ограничено обратимы.

Действительно, на области $D^+(\tau)$ разложения (2) и (3) справедливы одновременно, так что для произвольных $h_0 \in \mathfrak{N}_0$ и $f_{\bar{\gamma}} \in \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$ имеем

$$h_0 = (T - \lambda I)f_0 + f'_{\bar{\gamma}}, f'_{\bar{\gamma}} \neq 0; f_{\bar{\gamma}} = (T - \lambda I)f'_0 + h'_0, h'_0 \neq 0.$$

Из первого следует $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)h_0 = f'_{\bar{\gamma}} \neq 0$, то есть обратимость $Q(\lambda, \bar{\gamma})$, а из второго имеем $f_{\bar{\gamma}} = P_{\bar{\gamma}}(\lambda)h'_0$, то есть образ обратного оператора совпадает с $\mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}$.

Случай оператора $Q(\zeta, \gamma)$ аналогичен.

Теперь произвольной паре $(\lambda \in D^+(\tau), \zeta \in D^-(\tau))$ соотнесем ограниченно обратимый оператор $W(\gamma, \gamma) = Q(\lambda, \bar{\gamma})Q^{-1}(\zeta, \gamma) \in [\mathfrak{N}_{\gamma}, \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}]$. Тогда оператор

$$V(\bar{\gamma}, \gamma) = W(\bar{\gamma}, \gamma) [W(\bar{\gamma}, \gamma)W(\bar{\gamma}, \gamma)]^{-1/2} \in [\mathfrak{N}_{\gamma}, \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}]$$

в полярном представлении $W(\gamma, \gamma)$ является изометрией.

Согласно теории расширений фон Неймана, изометрический оператор $V(\gamma, \gamma) \in [\mathfrak{N}_{\gamma}, \mathfrak{N}_{\bar{\gamma}}]$ задает самосопряженное расширение симметрического оператора T , следовательно при условиях теоремы 1 оператор T опреде-

ляет некоторое семейство своих самосопряженных расширений, отвечающих всевозможными парами $(\lambda \in D^+(\tau), \zeta \in D^-(\tau))$.

3. А. В. Штраусом в [7] введено понятие характеристической функции (х. ф.) симметрического оператора T с равными дефектными числами как аналитической в C^+ сжимающей операторной функции

$$\Theta(\lambda) = (T_\lambda - \gamma I)(T_\lambda - \gamma I)^{-1} \mid \mathfrak{N}_\gamma \in [\mathfrak{N}_\gamma, \mathfrak{N}_\gamma],$$

где максимальные диссипативные расширения T_λ определены аналогично (1), и доказано, что

$$\Theta(\lambda) = (\lambda - \gamma)(\lambda - \bar{\gamma})^{-1} P_{\bar{\gamma}}(\lambda) \mid \mathfrak{N}_\gamma. \quad (8)$$

В работе [5] показано, что х.ф. оператора T_γ в определении Нады – Фойаша [6, IX, 4] совпадает с функцией

$$\Theta_\gamma(\lambda) = \Theta(\bar{\gamma}, \lambda) \Theta^{-1}(\gamma, \lambda); \quad \Theta(\bar{\gamma}, \lambda) = P_{\bar{\gamma}} \mid \mathfrak{N}_\lambda, \quad \Theta(\gamma, \lambda) = P_\gamma \mid \mathfrak{N}_\lambda \quad (9)$$

и отличается от х.ф. Штрауса лишь знаком $\Theta_\gamma(\lambda) = -\Theta(\lambda)$.

Связь спектра оператора с ее х.ф. установлена в [6, VI, 4].

Ясно, что γ и $\mathfrak{N}_\gamma$ являются собственными значением и подпространством оператора T_γ соответственно, и в следующей теореме полагается $\lambda \neq \gamma$, если $\gamma \in D^+(\tau)$.

Теорема 2. Пусть оператор T удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда $\dim \mathcal{H}(\Theta_\gamma(\lambda)) \leq 1$ для всех $\lambda \in D^+(\tau)$ и λ является собственным значением оператора T_γ тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{H}(\Theta_\gamma(\lambda)) = 1$. Замыкание полукруга $D^+(\tau)$ принадлежит спектру оператора T_γ .

Доказательство. Из определений функций $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)$ и $\Theta(\gamma, \lambda)$ имеем $\mathcal{H}(P_{\bar{\gamma}}(\lambda) \mid \mathfrak{N}_\gamma) = \mathcal{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_\gamma$, $\mathcal{H}(\Theta(\gamma, \lambda)) = \mathcal{A}(T_\gamma) \cap \mathfrak{N}_\lambda$.

Очевидно, число λ является собственным значением оператора T_γ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}(\Theta(\gamma, \lambda)) \neq \{0\}$, то есть вектор $f_0 + f_\gamma \in \mathcal{A}(T_\gamma)$ таков, что $f_0 + f_\gamma = f_\lambda$. Отсюда имеем $T_\gamma(f_0 + f_\gamma) = T f_0 + \gamma f_\gamma = \lambda(f_0 + f_\gamma)$, $(T - \lambda I)f_0 = (\lambda - \gamma)f_\gamma$, значит и $\mathcal{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_\gamma \neq \{0\}$.

Обратно, если $\mathcal{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_\gamma \neq \{0\}$, то есть $(T - \lambda I)g_0 = g_\gamma$, тогда $g_0 - (\gamma - \lambda)^{-1}g_\gamma \in \mathcal{A}(T_\gamma)$ и $(T_\gamma - \lambda I)[g_0 - (\gamma - \lambda)^{-1}g_\gamma] = 0$.

Пусть $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)f_\gamma = 0$ и векторы f_γ, g_γ линейно независимы. Тогда $g_\gamma = f_\gamma + h_0$, $h_0 \in \mathcal{H}(T^*)$ и, в силу следствия 1, имеем $P_{\bar{\gamma}}(\lambda)g_\gamma \neq 0$, значит $\dim \mathcal{H}(\Theta_\gamma(\lambda)) = \dim \mathcal{H}(\Theta(\gamma, \lambda)) = 1$.

Если $\dim \mathcal{H}(\Theta_\gamma(\lambda)) = 0$, то есть λ не является собственным значением оператора T_γ , то оператор $T_\gamma - \lambda I$ обратим и $\mathcal{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_\gamma = \{0\}$. Тогда $\mathcal{A}((T_\gamma - \lambda I)^{-1}) = \mathcal{R}(T_\gamma - \lambda I) = \mathcal{R}(T - \lambda I) \dot{+} \mathfrak{N}_\gamma$.

Покажем, что $\mathcal{R}(T_\gamma - \lambda I) \neq \mathfrak{H}$, то есть λ не принадлежит резольвентному множеству $\rho(T_\gamma)$.

Допуская противное, для произвольного $h \in \mathfrak{H}$, не принадлежащего $\mathcal{R}(T - \lambda I)$, будем иметь как $h = (T - \lambda I)f_0 + f_\gamma$, так и, в силу (5), $h = (T - \lambda I)g_0 + h_0$, откуда будет следовать, что

$$(T - \lambda I)(g_0 - f_0) = f_\gamma - h_0 = g_\gamma \neq 0,$$

в противоречии с $\mathcal{R}(T - \lambda I) \cap \mathfrak{N}_\gamma = \{0\}$.

Таким образом $D^+(\tau)$ принадлежит спектру оператора T_γ , и замкнутость спектра доказывает теорему.

П. Э. Мелик-Адамян

**О симметрических операторах с вещественной точкой
регулярного типа**

Показано, что симметрический оператор с вещественной точкой регулярного типа определяет и некоторое семейство своих самосопряженных расширений. В множестве регулярности указана область, замыкание которой принадлежит спектру его максимального диссипативного расширения.

Պ. Է. Մելիք-Ադամյան

Իրական ռեգուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորների մասին

Ցույց է տրված, որ իրական ռեգուլյար տիպի կետով սիմետրիկ օպերատորն է առաջացնում է նաև իր ինքնքրահամալուծ ընդլայնումների մի որոշ ընտանիք: Ռեգուլյարության բազմության մի տիրույթ է նշված, որի փակումը պատկանում է նրա մաքսիմալ դիսիպատիվ ընդլայնման սպեկտրին:

P. E. Melik-Adamyan

On Symmetric Operators with a Real Point of Regular Type

It is shown that a symmetric operator with a real point of regular type defines also some family of its self-adjoint extensions. In the set of a regularity the domain is specified, closure of which belongs to the spectrum of its maximal dissipative extension.

Литература

1. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V. I.* Krein's Lectures on Entire Operators. Birkhauser. Basel. 1997.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. М. Мир. 1966.
3. *Гохберг И.Ц., Маркус А.С.* – Изв. вузов. Матем. Т. 15 N. 2. 1960. С. 74-87.
4. *Крейн М. Г.* – Укр. матем. ж. 1949. 1:2. С. 3-66.
5. *Melik-Adamyan P.* – Armen. J. Math. V. 5. N2. 2013. P. 75-97.
6. *С.-Надь Б., Фойаши Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М. Мир. 1966.
7. *Штраус А.В.* – Изв. АН СССР. Серия мат. 1968. Т. 32. N1. С. 186-207.
8. *Strauss A.V.* – O T: Adv. and Appl. V.123. Birkhauser. Basel. 2001. P. 469-484.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 621.39.1:519.34

А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян

О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 12/ IV 2016)

Ключевые слова: *k*-значная логика, определяющий конъюнкт, определяющая дизъюнктивная нормальная форма, элиминационные системы, сложности выводов.

1. **Введение.** Исследования сложностных характеристик выводов в исчислении высказываний, возникшие в связи с разработками автоматизаций доказательств и носившие до конца 70-х гг. XX в. лишь фрагментарный характер, получили бурное развитие после известного результата Кука – Рехова [1], доказавших, что $NP \neq coNP$ в том и только в том случае, если не существует полиномиально ограниченной системы доказательств классических тавтологий. Исследования развивались в двух направлениях: поиска новых систем доказательств и поиска класса формул, трудно доказуемых в данной системе. Логические рассуждения при доказательстве тех или иных комбинаторных утверждений, претендующих на роль труднодоказуемых, зачастую носят конструктивный характер, а иногда привычная логика с двумя значениями утверждений оказывается не приспособленной для работы с неопределенными данными, в связи с чем было предложено использовать трехзначную (с третьим значением UNKNOWN). В частности, логическое программирование, обработка различных статистических данных и различные новейшие разработки компьютерных технологий требуют привлечения многозначных логик. В связи с упомянутыми обстоятельствами не менее актуальными (а, может быть, и более) оказываются разработки новых систем доказательств и исследования сложностей выводов в многозначных логиках. Ряд существенных отличий между двузначной и многозначной логиками делает нетривиальными эти разработки.

В настоящей работе описан метод построения некоей дедуктивно полной системы исчисления высказываний для *k*-значной логики ($k \geq 3$). Обобщены понятия определяющего конъюнкта и определяющей дизъюнк-

тивной нормальной формы, ранее введенные в [2] первым соавтором для двузначных булевых функций, и на их основе построены системы E_k , аналогичные системе резолюций. Для некоторой последовательности k -значных тавтологий получены одинаковые по порядку верхние и нижние оценки основных сложностных характеристик выводов в описанных системах.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [2] для двузначной логики. Мы пользовались общепринятыми понятиями единичного n -мерного булева куба B^n , пропозициональной формулы, тавтологии и системы доказательства классического исчисления высказываний.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имел значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагали, что он содержит пропозициональные переменные $p_i (i \geq 1)$ и (или) $p_{ij} (i \geq 1, j \geq 1)$, логические связки $\neg, \&, \vee, \supset$ и пару скобок $(,)$. Длина формулы φ , определяемая как количество всех вхождений в нее пропозициональных переменных, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов, и количество вхождений логических связок.

Следуя общепринятой терминологии, *литералом* считалась переменная или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности назывались *правилами замещения*:

$$\begin{aligned} 0 \& \psi &= 0, & \psi \& 0 &= 0, & 1 \& \psi &= \psi, & \psi \& 1 &= \psi, \\ 0 \vee \psi &= 0, & \psi \vee 0 &= 0, & 1 \vee \psi &= 1, & \psi \vee 1 &= 1, \\ 0 \supset \psi &= 1, & \psi \supset 0 &= \bar{\psi}, & 1 \supset \psi &= \psi, & \psi \supset 1 &= 1. \\ \bar{0} &= 1, & \bar{1} &= 0, & \bar{\bar{\psi}} &= \psi, \end{aligned}$$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одной из указанных эквивалентностей, правой частью.

Отметим также, что функция p^0 определяется следующим образом: p^0 есть $\neg p$, а p^1 есть p .

Пусть φ – пропозициональная формула, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – множество ее переменных, а $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\} (1 \leq m \leq n)$ – некоторое подмножество P .

Определение 2.1. Для некоторого $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in B^m$ конъюнкт $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ -определяющим, если, подставляя в φ вместо каждой переменной p_{ij} значение $\sigma_j (1 \leq j \leq m)$ и

последовательно применяя правила замещения, получаем значение формулы φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

Определение 2.2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) $D = \{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ называется φ -определяющей для тавтологии φ , если каждый конъюнкт из D является φ -1-определяющим и $\varphi = D$.

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

В [2] была описана также следующая система доказательств E . Аксиомы системы E не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. **Элиминационное правило** вывода (э-правило) выводит конъюнкт $K' \cup K''$ из конъюнктов $K' \cup \{p\}$ и $K' \cup \{\bar{p}\}$ для произвольной пропозициональной переменной p .

E -выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдущих по э-правилу.

Очевидно, что ДНФ $D = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ является тавтологией, если применяя э-правило можно вывести пустой конъюнкт ($\emptyset$) из аксиом $\{K_1, K_2, \dots, K_l\}$.

3. Элиминационная система для многозначных логик. Следуя [3], введем основные понятия для одного из вариантов трехзначной логики. Все они с легкостью могут быть обобщены для того же варианта k -значных логик при $k \geq 4$.

3.1. Обозначим через B_3 множество $\{0, 1/2, 1\}$ и через $(B_3)^n$ трехзначный n -мерный куб. Будем рассматривать всюду определенные функции $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$, отображающие $(B_3)^n$ в B_3 . В частности, для дальнейших рассуждений зафиксируем следующие функции:

min(x, y) – обобщение конъюнкции, для которого мы сохраним обозначение $\&$,

max(x, y) – обобщение дизъюнкции, для которого мы сохраним обозначение $\vee$,

$x \rightarrow y$ – обобщение импликации, значение которого равно 1 при $x \leq y$ и y , в противном случае; для этой импликации также сохраним обозначение $\supset$,

$\sim x$ – обобщение отрицания, определяемое «циклическим» сдвигом значений, т.е. $\sim 0 = 1/2$, $\sim 1/2 = 1$, $\sim 1 = 0$,

x^y – «расстояние» до 1, определяемое как x при $y = 1$, как $\sim \sim x$ при $y = 0$ и как $\sim x$ при $y = 1/2$.

3.2. Вышеуказанные правила замещения сохраняются для $\&$ и $\vee$, для $\supset$ сохраняются лишь $0 \supset \psi = 1$, $1 \supset \psi = \psi$, $\psi \supset 1 = 1$. Для $\sim x$ правилами замещения будут: $\sim 0 = 1/2$, $\sim 1/2 = 1$, $\sim 1 = 0$ и $\sim \sim \psi = \psi$.

В силу неоднозначной определенности ряда равенств для значения $1/2$, а также $\psi \supset 0$ введем **вспомогательные отношения замещения**:

$$1/2\psi = \psi \& 1/2 \leq 1/2, 1/2 \vee \psi = \psi \vee 1/2 \geq 1/2,$$

$$\psi \supset 0 = \neg sg\psi, 1/2 \supset \psi = sg\psi, \psi \supset 1/2 \geq 1/2,$$

где через $\neg sg\psi$ обозначена функция, которая равна 0, если значение ψ больше 0, и равна 1 в противном случае, а через $sg\psi$ обозначена функция, которая равна 1, если значение ψ больше 0, и равна 0 в противном случае.

В трехзначной логике для каждой пропозициональной переменной p *литералами* будут p , $\sim p$ и $\sim\sim p$.

Пусть φ – пропозициональная формула трехзначной логики, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – множество ее переменных, а $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$ ($1 \leq m \leq n$) – некоторое подмножество P .

Определение 3.1. Для некоторого $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in (B_3)^m$ конъюнкт $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ -определяющим, если, подставляя в φ вместо каждой переменной p_{ij} значение σ_j ($1 \leq j \leq m$), последовательно применяя правила замещения и, при необходимости, учитывая *вспомогательные отношения замещения*, получаем значение формулы φ (0, 1/2 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

Например, для формулы $p_1 \supset (p_2 \supset (p_3 \supset p_1))$ 1-определяющими являются конъюнкты p_1 , $\sim\sim p_1$ и $\sim p_1$, причем если для первых двух достаточно применение правил замещения, то для последнего учитывается одно из вспомогательных отношений замещения.

Тавтологией в трехзначной логике считается формула, которая принимает значение 1 при любых наборах значений переменных.

В трехзначной логике понятие оДНФ дается в силу **определения 2.2.**

3.3. Система E_3 определяется по аналогии с определением системы E , только **элиминационное правило** вывода выводит конъюнкт $K \cup K'' \cup K'''$ из конъюнктов $K \cup \{p\}$, $K'' \cup \{\sim p\}$ и $K''' \cup \{\sim\sim p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p .

Далее определение E_3 -вывода и тавтологичной ДНФ аналогично вышеприведенным для двузначной логики. Нетрудно убедиться, что система E_3 полна и непротиворечива.

4. Сложностные характеристики выводов. Пусть для тавтологии φ задан некоторый E_3 -вывод, $M(\varphi)$ – множество всех конъюнктов этого вывода. Для определения сложностных характеристик выводов дадим следующие определения из [4].

Определение 4.1. Произвольное подмножество множества $M(\varphi)$ называется *конфигурацией*.

Определение 4.2. Последовательность конфигураций $\{D_0, D_1, \dots, D_r\}$ называется *процессом вывода*, если $D_0 = \emptyset$ и для каждого t ($1 \leq t \leq r$) D_t получается из D_{t-1} применением следующих шагов:

- 1) добавление аксиомы $D_i = D_{i-1} \cup \{L\}$, где L_A – аксиома,
- 2) применение правила вывода $D_i = D_{i-1} \cup \{L\}$, где L получается по правилу вывода из формул, принадлежащих D_{i-1} ,
- 3) удаление $D_i \subset D_{i-1}$.

Определение 4.3. Форматированным E_3 -выводом (ϕ . E_3 -выводом) тавтологии ϕ называется такой процесс вывода $\{D_0, D_1, \dots, D_r\}$, где $D_0 = \emptyset$ и $D_r = (\phi)$.

Определение 4.4.

- l -сложность E_3 -вывода равна сумме длин всех его различных формул.
- t -сложность E_3 -вывода равна количеству различных формул в нем.
- s -сложность E_3 -вывода равна максимальной длине входящих в ϕ . E_3 -вывод конфигураций, где длина конфигурации равна сумме длин всех ее формул.
- w -сложность E_3 -вывода равна максимуму длин входящих в нее формул.

Минимальное значение t -сложности (l -сложности, s -сложности, w -сложности) по всевозможным E_3 -выводам формулы ϕ обозначим через $t(\phi)(l(\phi), s(\phi), w(\phi))$.

Далее будут получены верхние и нижние оценки указанных сложностных характеристик выводов и для их записи будут использованы следующие общепринятые обозначения:

если $\exists c_1 \exists k_1 \forall x > k_1 |f(x)| \geq c_1 |g(x)|$, то мы будем писать $f(x) = \Omega(g(x))$,
 если $\exists c_2 \exists k_2 \forall x > k_2 |f(x)| \leq c_2 |g(x)|$, то мы будем писать $f(x) = O(g(x))$

При выполнении этих обоих условий будем писать $f(x) = \theta(g(x))$.

5. Основные оценки сложностных характеристик. Для описания последовательности «трудновыводимых» тавтологий введем несколько понятий.

Для произвольного набора $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in (B_3)^m$ 0-переворотом назовем набор $\sim \sigma = \{\sim \sigma_1, \sim \sigma_2, \dots, \sim \sigma_m\} \in (B_3)^m$, $\frac{1}{2}$ -переворотом – набор $\sim \sim \sigma = \{\sim \sim \sigma_1, \sim \sim \sigma_2, \dots, \sim \sim \sigma_m\} \in (B_3)^m$, 1-переворотом – сам набор $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in (B_3)^m$. Каждое из указанных преобразований будем называть переворотом.

Утверждение. В каждой $(0,1/2,1)$ -матрице размера $n \times m$ ($n \geq 1, m \leq 3^{\lfloor n/3 \rfloor}$) можно так «перевернуть» строки, чтобы в каждом столбце была по крайней мере одна единица.

В истинности этого утверждения можно убедиться индукцией по n , в силу чего следующая формула является тавтологией в трехзначной логике:

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \bigwedge_{j=1}^n p_{ij}^{\sigma_j} \text{ (для } \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in (B_3)^n, n \geq 1, m \leq 3^{\lfloor n/3 \rfloor}).$$

В силу структуры $TTM_{n,m}$ очевидно, что каждый $TTM_{n,m}$ -определяющий конъюнкт содержит по крайней мере m литералов. Отметим, что

$$|TTM_{n,m}| = n3^n m.$$

Теорема. Для произвольного достаточно большого n существуют формулы φ_n , для которых

- 1) $\log_3(|\varphi_n|) = \theta(n)$;
- 2) $\log_3 \log_3(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;
- 3) $\log_3 \log_3(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;
- 4) $\log_3(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;
- 5) $\log_3(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством основной теоремы из [5] для формул φ_n , в качестве которых берутся $TTM_{n,m}$ при $m = 3^{\lfloor n/3 \rfloor}$. Верхние оценки получаются на основе совершенной ДНФ, построенной с использованием трех типов вышеуказанных литералов, а нижние – с учетом минимального количества литералов в определяющих конъюнктах тавтологий φ_n .

Как уже указывалось выше, все полученные результаты с легкостью могут быть обобщены для того же варианта k -значных логик при $k \geq 4$.

Ереванский государственный университет
e-mails: achubaryan@ysu.am, tsh_arman@yahoo.com,
Artur.Khamisyan@gmail.com

А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян

О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них

Описан метод построения некоей дедуктивно полной системы исчисления высказываний для k -значной логики ($k \geq 3$). Обобщены понятия определяющего конъюнкта и определяющей дизъюнктивной нормальной формы, ранее введенные первым соавтором для двузначных булевых функций, и на их основе построены системы E_k , аналогичные системе резолюций. Для некоторой последовательности k -значных тавтологий получены одинаковые по порядку верхние и нижние оценки основных сложностных характеристик выводов в описанных системах.

Ա. Ա. Չոբարյան, Ա. Ս. Ճիտոյան, Ա. Ա. Խամիսյան

Բազմարժեք տրամաբանություններում արտածման որոշ համակարգերի և նրանցում արտածման բարդությունների վերաբերյալ

Նկարագրված է արտածման որոշ համակարգերի կառուցման եղանակը k -արժեք ($k \geq 3$) տրամաբանությունների համար: Ընդհանրացված են նախկինում առաջին հա-

մահեղինակի կողմից երկարժեք բուլյան ֆունկցիաների համար ներմուծված որոշիչ կոնյունկտի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարները և դրանց հիման վրա կառուցված են E_k համակարգերը, որոնք նման են ռեզոլյուցիոն համակարգերին: k -արժեք նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականությունների համար ստացված են նույն կարգի վերին և ստորին գնահատականներ նկարագրված համակարգերում արտածման բարդությունների հիմնական բնութագրիչների համար:

A. A. Chubaryan, A. S. Tchitoyan, A. A. Khamisyan

**On Some Proof Systems for Many-Valued Logics and
on Proof Complexities in It**

Some method for construction a deductive full system of propositional calculi for k -valued ($k \geq 3$) logic is described. Earlier introduced by the first coauthor the notions of determinative conjunct and determinative disjunctive normal form for two-valued Boolean functions are generalized and on the base of it the systems E_k , analogous to resolution systems, are constructed. The same by order upper and lower bounds for the main proof complexity characteristics in described systems are obtained for some sequence of k -valued tautologies.

Литература

1. Cook S. A., Reckhow A. R. - The Journal of Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
2. Aleksanyan S.R., Chubaryan A.A. - Siberian Mathematical Journal. 2009. V. 50. N 2. P. 243-249.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М. Наука. 1979. 272 с.
4. Nordstrom J. - SIAM Journal on Computing. May 2009. V. 39. N. 1. P. 59-121.
5. Chubaryan A., Mnatsakanyan A. - Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics. 2014. V. 1. N. 2. P. 111-117.

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 14/III 2016)

Ключевые слова: цилиндрическая ортотропия, круглая пластинка, упругое защемление, поперечный сдвиг, обжатие.

В рамках уточненной теории С. Амбарцумяна [1] рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. На основе полученных безразмерных расчетных величин пластинки делаются качественные заключения.

1. В правой системе цилиндрических координат r, θ, z рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и толщины h . Координатная плоскость совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления анизотропии материала параллельны координатным линиям. Край пластинки $r=R$ некоторой малой длиной $2a$ вставлен в упругий массив, образуя упруго защемленную опору ([2-4] и др.). Условия этой опоры имеют вид [5, 6]:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = D(aN_r + M_r), \quad w|_{r=R} = -\left(a \frac{dw}{dr} + BN_r \right). \quad (1.1)$$

Здесь w – прогиб, N_r – поперечная сила, M_r – изгибающий момент пластинки, постоянные D и B – параметры, являющиеся обратными величинами жесткостей упруго защемленной опоры на вращение и поступательное вертикальное смещение соответственно. Когда торец вставленной части не контактирует с упругим массивом, между параметрами D и B существует соотношение [5]

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}. \quad (1.2)$$

На пластинку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q .

Рассмотрим задачу изгиба пластинки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. Общее решение в рамках уточненной теории Амбарцумяна имеет вид ([1], с. 178):

$$\begin{aligned}
w &= c_1 + c_2 r^{1+n} + b_1 r^2 + b_2 r^4, \\
N_r &= -\frac{qr}{2}, \quad \left(\varphi = -\frac{6qr}{h^3} \right), \quad \frac{D_\theta}{D_r} = n^2, \\
M_r &= -D_r \frac{d^2 w}{dr^2} - D_r \nu_\theta \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{h^2}{10} D_r a_r \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu_\theta \frac{\varphi}{r} \right) - \frac{h^2}{10} A_1 q, \\
M_\theta &= -D_\theta \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - D_\theta \nu_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{h^2}{10} D_\theta a_r \left(\frac{\varphi}{r} + \nu_r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{h^2}{10} A_2 q, \\
b_1 &= \frac{qh^2}{20(1-n^2)} \left[\frac{6a_r(n^2-1)}{h^3} + \frac{A_2 - A_1}{D_r} \right], \quad b_2 = \frac{q}{8(9-n^2)D_r}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь приняты общеизвестные обозначения цилиндрически ортотропного упругого тела ([1], с. 72, 73, 177). Постоянные A_1 и A_2 учитывают влияние обжатия, а постоянные c_1 и c_2 должны определяться из краевых условий упругого защемления (1.1).

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned}
w &= h\bar{w}, \quad h = mR, \quad r = \rho R, \quad a = sh, \quad B_r a_r = \chi, \quad q = B_r \bar{q}, \quad c_1 = h\bar{c}_1, \quad c_2 = R^{-n}\bar{c}_2, \\
N_r &= B_r h^2 \bar{N}_r, \quad M_r = B_r h^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = B_r h^2 \bar{M}_\theta, \quad b_1 = \frac{\bar{b}_1}{h}, \quad b_2 = \frac{\bar{b}_2}{h^3}, \\
D &= \frac{\alpha h}{D_r}, \quad \left(\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\alpha s^2 h^3}{3D_r} \right).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

С учетом этих обозначений из (1.3) получим:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{m} \rho^{1+n} + \frac{\bar{b}_1}{m^2} \rho^2 + \frac{\bar{b}_2}{m^4} \rho^4, \quad \bar{N}_r = -\frac{\bar{q}\rho}{2m} \\
\bar{b}_1 &= \frac{3\bar{q}}{10(1-n^2)} \left[\chi(n^2-1) + 2(A_2 - A_1) \right], \quad \bar{b}_2 = \frac{3\bar{q}}{2(9-n^2)} \\
\bar{M}_r &= -\frac{1}{60m^2} \left[5m^3(1+n)(n+\nu_\theta)\bar{c}_2 \rho^{n-1} + 10\bar{b}_1(1+\nu_\theta)m^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20\bar{b}_2(3+\nu_\theta)\rho^2 + 3\chi(1+\nu_\theta)m^2\bar{q} + 6A_1 m^2\bar{q} \right] \\
\bar{M}_\theta &= -\frac{n^2}{60m^2} \left[5m^3(1+n)(1+\nu_r)\bar{c}_2 \rho^{n-1} + 10\bar{b}_1(1+\nu_r)m^2 + \right. \\
&\quad \left. + 20\bar{b}_2(1+3\nu_r)\rho^2 + 3\chi(1+\nu_r)m^2\bar{q} + \frac{6A_2 m^2\bar{q}}{n^2} \right]
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Удовлетворив условиям упругого защемления (1.1) и имея в виду (1.5), для безразмерных постоянных интегрирования получим:

$$\bar{c}_2 = -\frac{1}{5m^3(1+n)[1+\alpha m(n+v_\theta)]}\{10\bar{b}_1 m^2[1+\alpha m(1+v_\theta)] + 20\bar{b}_2[1+\alpha m(3+v_\theta)] + 3\alpha m^2 \bar{q}[10s + \chi m(1+v_\theta) + 2A_1 m]\} \quad (1.6)$$

$$\bar{c}_1 = -\frac{1}{m^4}\{m^3[1+sm(1+n)]\bar{c}_2 + \bar{b}_1 m^2(1+2sm) + \bar{b}_2(1+4sm) - 2\alpha s^2 m^3 \bar{q}\}.$$

2. Рассмотрим численный пример. Пользуясь линейностью задачи, положим $\bar{q}=1$. В каждом конкретном случае, умножив решение на действительное значение $\bar{q}$, получим истинные безразмерные значения расчетных величин пластинки.

Пусть

$$n = \sqrt{2}(E_\theta = 2E_r), \quad E_z = \frac{2}{3}E_r, \quad m = 0.25, \quad s = 0.5, \quad (2.1)$$

$$v_r = 0.15(v_r = v_{\theta r}), \quad v_{zr} = 0.4, \quad v_{\theta z} = 0.2.$$

Пользуясь условиями симметрии упругих свойств цилиндрически ортотропного тела ([1], с. 23), для постоянных A_1 и A_2 в случае (2.1) получим

$$A_1 = -0.5131, \quad A_2 = -0.7539. \quad (2.2)$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. $\chi = A_1 = A_2 = 0$ (пренебрегаются влияния поперечного сдвига и обжатия);
2. $\chi = 10$, $A_1 = -0.5131$, $A_2 = -0.75390$ (учитываются эти влияния одномерно);
3. $\chi = 10$, $A_1 = A_2 = 0$ (учитываются только влияния поперечного сдвига);
4. $\chi = 0$, $A_1 = -0.5131$, $A_2 = -0.75390$ (учитываются только влияния обжатия).

Случаи		$\bar{w}$			$\bar{M}_r$			$\bar{M}_\theta$		
		ρ			ρ			ρ		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
$\alpha=0.1$	1	43.22	28.59	1.818	0	0.614	-1.697	0	1.373	-0.38
	2	53.03	33.79	2.276	0.02	0.046	-2.46	0.02	0.562	-1.468
	3	53.58	34.10	2.311	0	-0.003	-2.519	0	0.501	-1.543
	4	42.67	28.28	1.723	0.02	0.663	-1.638	0.02	1.434	-0.305
$\alpha=1$	1	88.99	68.02	13.81	0	1.160	-0.969	0	2.146	0.649
	2	111.2	83.88	17.15	0.02	0.747	-1.526	0.02	1.554	-0.147
	3	112.8	85.01	17.41	0	0.710	-1.569	0	1.509	-0.199
	4	87.48	66.89	13.56	0.02	1.198	-0.926	0.02	2.190	0.702
$\alpha=10$	1	193.8	160.3	51.93	0	2.238	0.468	0	3.671	2.681
	2	240.6	197.2	60.96	0.02	2.131	0.317	0.02	3.510	2.460
	3	244.0	199.9	61.66	0	2.117	0.306	0	3.499	2.452
	4	190.4	157.5	51.23	0.02	2.252	0.479	0.02	3.682	2.689

В приведенной таблице представлены значения безразмерных расчетных величин пластинки для вышеотмеченных четырех случаев при некоторых значениях координаты ρ и параметра упруго защемленной опоры α . Данные таблицы приводят к следующим заключениям.

1. При возрастании параметра α жесткость упруго защемленной опоры уменьшается, в силу чего прогибы пластинки увеличиваются.

2. Начиная с некоторого большого значения α изгибающие моменты на краю пластинки $\rho=1$ становятся положительными. Это является следствием уменьшения второй производной и увеличения абсолютного значения первой производной прогиба.

3. При учете обжатия изгибающие моменты в центре пластинки $\rho=0$ принимают одинаковые положительные значения.

4. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига приводит к заметному увеличению прогиба.

5. Учет же обжатия, наоборот, приводит к незначительному уменьшению прогиба.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

Неклассическая задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки

Рассматривается задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки при учете влияния поперечного сдвига и обжатия. На основе полученных безразмерных расчетных величин пластинки делаются качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծովան ոչ դասական խնդիրը

Դիտարկվում է առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծովան խնդիրը, հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության դեպքում՝ ընդլայնական սահքի և սեղմման ազդեցությունների հաշվառմամբ: Սալի հաշվային անչափ մեծությունների ստացած արժեքների հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan

The Non-Classical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Orthotropic Round Plate

The problem of bend of an elastically fastened orthotropic round plate under the action of uniformly distributed load is considered, taking into account the influence of the cross section shear and compression. On the basis of the calculated values of the dimensionless plate the qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. №2. С.101-107.
3. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. №3. С. 205-212.
4. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114, №4. С. 309-315.
5. *Киракосян Р.М.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VIII междунар. конф., сентябрь 22-26. 2014. Горис – Степанакерт. 2014. С. 261-265.
6. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2015. Т. 115. №4. С. 284-289.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян¹, С. П. Степанян²

Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 31/ III 2016)

Ключевые слова: ортотропия, круглая пластинка, упругое защемление, осесимметричный изгиб, упругое основание, поперечный сдвиг, обжатие.

Рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание. С использованием гипотезы Фусса – Винклера в рамках уточненной теории [1] получены разрешающие дифференциальные уравнения задачи при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. В качестве условий упругого защемления применены условия, предложенные в работе [2]. На основе безразмерных результатов решения сделаны качественные заключения.

1. В правой системе цилиндрических координат r, θ, z рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и постоянной толщины h , опирающуюся на упругое основание. На поверхности пластинки $z = -h/2$ действует равномерно распределенная поперечная нагрузка интенсивности q . Пользуясь гипотезой Фусса – Винклера, будем считать, что реакция основания, действующая на поверхности пластинки $z = h/2$, прямо пропорциональна прогибу. Следовательно, грузовой член, участвующий в задаче изгиба пластинки ([1], с. 74), будет

$$Z_2 = q - kw, \quad (1.1)$$

где w – прогиб, k – жесткость упругого основания.

Край пластинки по всей окружности некоторой малой длиной $2a$ вставлен в упругий массив, образуя упруго защемленную опору [2-7]. Условия этой опоры примем в виде [2]

$$w|_{r=R} = -\left(a \frac{dw}{dr} + BN_r\right), \quad \frac{dw}{dr}\bigg|_{r=R} = D(aN_r + M_r). \quad (1.2)$$

Здесь N_r – поперечная сила, M_r – изгибающий момент, D и B – параметры, являющиеся обратными величинами жесткостей упругого защемления на вращение и поступательное вертикальное перемещение соответственно. В случае, когда торец вставленной части не контактирует с упругим массивом, эти параметры связаны соотношением [2]*

$$D = \frac{3B}{a^2}. \quad (1.3)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} r = R\rho, \quad s = \frac{h}{R}, \quad w = h\bar{w}, \quad k = \frac{B_r}{h}\bar{k}, \quad B_\theta = mB_r, \\ \varphi = \frac{B_r}{h^2}\bar{\varphi}, \quad N_r = \frac{h^3}{12}\varphi = \bar{N}_r B_r h \left(\bar{N}_r = \frac{\bar{\varphi}}{12} \right), \quad M_r = B_r h^2 \bar{M}_r \\ M_\theta = B_r h^2 \bar{M}_\theta, \quad q = B_r \bar{q}, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = \alpha h, \quad B = \frac{\beta}{B_r}, \quad D = \frac{3\beta}{\alpha^2 h^2 B_r}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

B_r , B_θ и a_r выражаются упругими постоянными материала пластинок по известным формулам ([1], с.72).

Безразмерная поперечная сила и безразмерные изгибающие моменты в обозначениях (1.4) будут

$$\begin{aligned} \bar{N}_r &= \frac{\bar{\varphi}}{12}, \\ \bar{M}_r &= -\frac{s^2}{12\rho} \left[\rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \nu_\theta \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \frac{\chi}{10s} \left(\rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \nu_\theta \bar{\varphi} \right) + \frac{6A_1 \rho}{5s^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right], \\ \bar{M}_\theta &= -\frac{ms^2}{12\rho} \left[\frac{d\bar{w}}{d\rho} + \nu_r \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \frac{\chi}{10s} \left(\bar{\varphi} + \nu_r \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} \right) + \frac{6A_2 \rho}{5ms^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Параметры A_1 и A_2 учитывают влияние обжатия, а χ – влияние поперечного сдвига ([1], с.72).

С учетом (1.1) и (1.4) систему разрешающих дифференциальных уравнений задачи ([1], с.74) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \bar{\varphi} - \frac{12}{s} \bar{k} \rho \bar{w} &= -\frac{12\bar{q}}{s} \rho, \\ \rho^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \left(m + \frac{6A_1 \bar{k}}{5s^2} \rho^2 \right) \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{6\bar{k}}{5s^2} (A_2 - A_1) \rho \bar{w} - \\ - \frac{\chi}{10s} \rho^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\rho^2} - \frac{\chi \rho}{10s} \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \frac{1}{s^3} \left(\rho^2 + \frac{\chi ms^2}{10} \right) \bar{\varphi} &= \frac{6(A_2 - A_1)}{5s^2} \rho \bar{q}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.2) в безразмерном виде будут

$$\bar{w}|_{\rho=1} = -\left(\alpha s \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \beta \bar{N}_r \right), \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{3\beta}{\alpha^2 s} (\alpha \bar{N}_r + \bar{M}_r). \quad (1.7)$$

* В этой работе в выражении (2.3) имеется опечатка: перед $K_1 + K_2$ вместо $R + a$ напечатано $R + 2a$

Так как система (1.6) имеет четвертый порядок, то кроме условий (1.7) нужны еще два условия. Эти условия относятся к центру пластинки. Имея в виду, что в центре осесимметрично изгибаемой пластинки производная прогиба равна нулю, а из-за отсутствия сосредоточенной центральной силы равна нулю еще и поперечная сила, можно записать

$$\left. \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \bar{\varphi}|_{\rho=0} = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы (1.6) при условиях (1.7) и (1.8).

2. Задачу удобно решить методом коллокаций. С этой целью положим

$$\bar{w} = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \rho^i, \quad \bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n b_i \rho^i. \quad (2.1)$$

Эти выражения удовлетворяют условиям (1.8). Число неизвестных постоянных a_1, a_i и b_i равно $2n$, для определения которых интервал $0 < \rho < 1$ разделим на n частей. Удовлетворив уравнениям (1.6) в точках деления и условиям (1.7), получим систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно отмеченных неизвестных. После решения этой системы можно определить значения всех расчетных величин пластинки в виде многочленов порядка n . Вычисления надо проводить с увеличением числа n до наступления практической сходимости. Так как в силу линейности задачи результаты решения прямо пропорциональны $\bar{q}$, то целесообразно считать $\bar{q} = 1$. В каждом конкретном случае, умножив результаты решения на действительное значение $\bar{q}$, получим их значения для этого случая. В заключение отметим, что решение можно значительно упростить, если путем исключения $\bar{w}$ систему (1.6) привести к одному уравнению относительно функции $\bar{\varphi}$, в силу чего число неизвестных постоянных уменьшится вдвое. Однако этот подход возможен только при $\bar{k} \neq 0$, и решение задачи при $\bar{k} = 0$, т. е. при отсутствии упругого основания, невозможно получить в качестве частного случая. При отсутствии упругого основания также можно прийти к одному уравнению, но уже относительно функции $\bar{w}$. Для этого следует интегрировать первое уравнение системы (1.6) и полученное выражение функции $\bar{\varphi}$ подставить во второе уравнение этой системы. Но чтобы возможно было одновременно получить решение задачи в общем случае, т. е. как при наличии, так и отсутствии упругого основания, надо иметь дело с системой двух уравнений. Конечно, решение задачи тогда будет заметно осложняться, поскольку число неизвестных постоянных будет вдвое больше.

3. Рассмотрим пример общего случая. Пусть:

$$s = 0.25; \quad \alpha = 0.5; \quad m = 2(E_\theta = 2E_r); \quad E_z = \frac{2}{3}E_r; \\ v_{\theta r} = v_r = 0.15; \quad v_{zr} = 0.4; \quad v_{\theta z} = 0.2. \quad (3.1)$$

Из условий симметрии упругих свойств ортотропного тела ([1], с. 23) с учетом (3.1) находим

$$\begin{aligned} E_{\theta} v_{\theta r} &= E_r v_{r\theta} \Rightarrow v_{r\theta} = v_{\theta} = 0.3, \\ E_z v_{zr} &= E_r v_{rz} \Rightarrow v_{rz} = 0.2667, \\ E_z v_{z\theta} &= E_{\theta} v_{\theta z} \Rightarrow v_{z\theta} = 0.6. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Следовательно, значения A_1 и A_2 будут ([1], с. 72)

$$A_1 = -\frac{E_r v_{rz} + v_{r\theta} v_{\theta z}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.5131, \quad A_2 = -\frac{E_{\theta} v_{\theta z} + v_{\theta r} v_{rz}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.7539. \quad (3.3)$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела ([1], с. 24).

Данные табл. 1 показывают, что в случае $\chi = 4$; $k = 0.1$ сходимость процесса вычислений достигается при $n = 12$. Такая ситуация имеет место и при других значениях параметров задачи.

Таблица 1

m=2, $A_1 = -0.5131$, $\beta = 0.1$, $A_2 = -0.7539$			ρ										
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\chi = 4$, $k = 0.1$	$n = 12$	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.85
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.74
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.09	-0.30
	$n = 13$	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.86
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.75
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.10	-0.30

Рассмотрим следующие случаи.

- 1) $\chi = 4$, $A_1 = -0.5131$, $A_2 = -0.7539$ (учитываются влияния поперечного сдвига и ожатия);
- 2) $\chi = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ (отмеченные влияния не учитываются, т. е. классический случай);
- 3) $\chi = 4$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ (учитывается только влияние поперечного сдвига);
- 4) $\chi = 0$, $A_1 = -0.5131$, $A_2 = -0.7539$ (учитывается только влияние обжатия).

В табл. 2 приведены результаты решения задачи при некоторых значениях $\bar{k}$, β и ρ .

Таблица 2

m=2		случай	$\bar{w}$		$\bar{N}_r$		$\bar{M}_r$		$\bar{M}_\theta$	
			ρ		ρ		ρ		ρ	
			0	1	0	1	0	1	0	1
K=0	$\beta=0.01$	1	39.7	0.20	0	-1.98	0.02	-2.05	0.02	-0.92
		2	34.5	0.15	0	-1.16	0.00	-1.80	0.00	-0.53
		3	40.0	0.20	0	-1.96	0.00	-2.10	0.00	-0.99
		4	34.1	0.15	0	-1.15	0.02	-1.74	0.02	-0.45
	$\beta=0.1$	1	46.5	1.94	0	-1.96	0.02	-1.92	0.02	-0.75
		2	39.8	1.48	0	-1.13	0.00	-1.71	0.00	-0.40
		3	47.1	1.98	0	-1.96	0.00	-1.98	0.00	-0.82
		4	39.2	1.44	0	-1.11	0.02	-1.65	0.02	-0.33
	$\beta=1$	1	96.1	14.8	0	-1.98	0.02	-1.14	0.02	0.35
		2	74.9	10.4	0	-0.88	0.00	-1.13	0.00	0.41
		3	97.6	15.0	0	-1.98	0.00	-1.18	0.00	0.30
		4	73.4	10.1	0	-0.87	0.02	-1.09	0.02	0.43
K=0.05	$\beta=0.01$	1	15.3	0.14	0	-1.38	0.00	-1.21	0.00	-0.55
		2	15.6	0.10	0	-1.07	0.00	-0.99	0.00	-0.29
		3	15.2	0.13	0	-1.38	0.00	-1.24	0.00	-0.62
		4	15.7	0.09	0	-1.05	0.00	-0.95	0.00	-0.21
	$\beta=0.1$	1	16.4	1.08	0	-1.23	0.00	-0.98	0.00	-0.39
		2	16.6	0.89	0	-0.97	0.00	-0.83	0.00	-0.18
		3	16.3	1.10	0	-1.23	0.00	-1.02	0.00	-0.46
		4	16.6	0.86	0	-0.96	0.00	-0.79	0.00	-0.12
	$\beta=1$	1	19.9	4.48	0	-0.73	0.00	-0.25	0.00	0.12
		2	20.1	3.86	0	-0.61	0.00	-0.24	0.00	0.18
		3	19.9	4.53	0	-0.72	0.00	-0.25	0.00	0.09
		4	20.1	3.78	0	-0.61	0.00	-0.22	0.00	0.23
K=0.1	$\beta=0.01$	1	9.25	0.11	0	-1.20	0.00	-0.96	0.00	-0.45
		2	9.84	0.08	0	-1.01	0.00	-0.74	0.00	-0.21
		3	9.16	0.11	0	-1.21	0.00	-1.01	0.00	-0.52
		4	9.95	0.08	0	-0.99	0.00	-0.69	0.00	-0.14
	$\beta=0.1$	1	9.59	0.85	0	-1.02	0.00	-0.73	0.00	-0.30
		2	10.1	0.69	0	-0.88	0.00	-0.57	0.00	-0.12
		3	9.54	0.87	0	-1.02	0.00	-0.77	0.00	-0.36
		4	10.2	0.67	0	-0.88	-0.00	-0.53	-0.00	-0.05
	$\beta=1$	1	10.5	2.94	0	-0.52	-0.00	-0.14	-0.00	0.09
		2	10.9	2.60	0	-0.50	0.00	-0.09	0.00	0.13
		3	10.5	2.98	0	-0.51	0.00	-0.15	0.00	0.05
		4	11.0	2.55	0	-0.51	-0.00	-0.08	-0.00	0.18

Для наглядности на рис. 1÷4 приведены графики $\bar{w}$, $\bar{N}_r$, $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$ в случае «1» при $\beta = 0.1$.

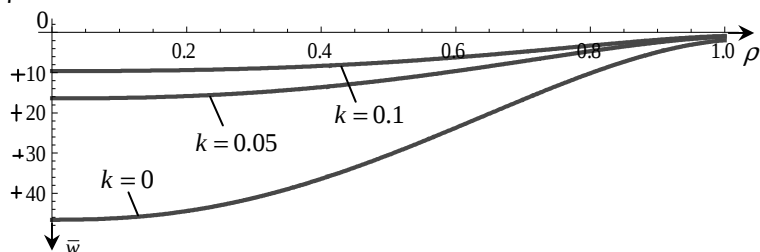


Рис. 1.

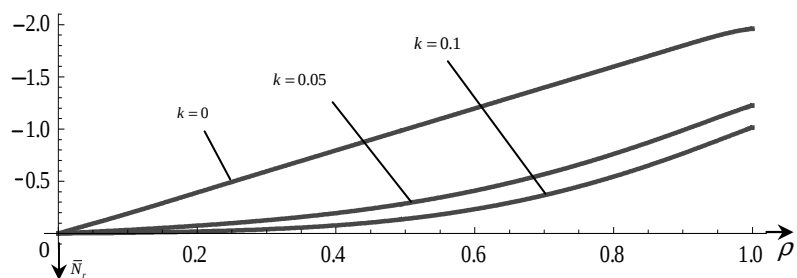


Рис. 2.

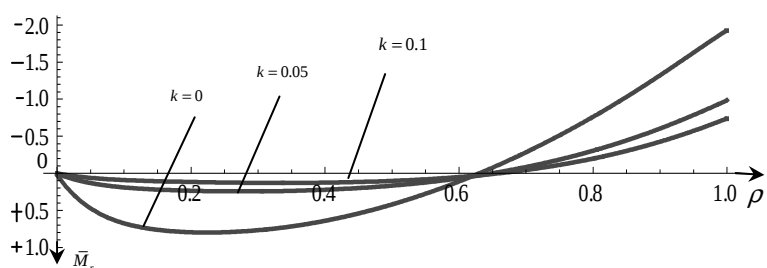


Рис. 3.

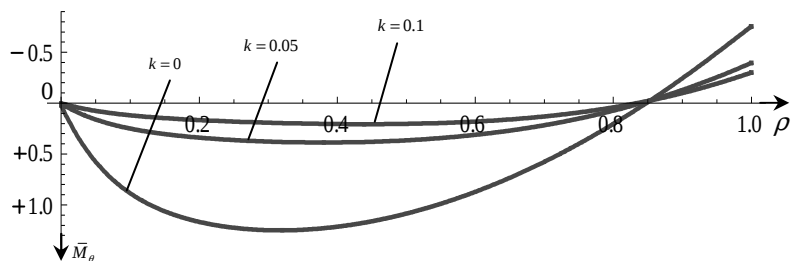


Рис. 4.

Данные табл. 2 приводят к следующим заключениям.

1. С возрастанием параметра k реакция упругого основания возрастает и при одинаковых значениях остальных параметров задачи прогиба пластинки уменьшаются. При этом большие прогибы уменьшаются больше, а малые – меньше.
2. Если при отсутствии упругого основания (при $k = 0$) наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия, то при наличии достаточно жесткого упругого основания (например при $k = 0.05$) эта закономерность нарушается.

3. При возрастании параметра β жесткость упруго защемленной опоры уменьшается, что приводит к увеличению прогибов пластинки
4. Начиная с некоторых больших значений k и β изгибающие моменты на краю пластинки (при $\rho = 1$) становятся положительными.
5. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига (при $\chi > 0$) приводит к заметному увеличению прогибов пластинки, когда упругое основание отсутствует. Эта закономерность нарушается при наличии достаточно жесткого упругого основания.

¹Институт механики НАН РА

²Ереванский государственный университет

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание

Рассматривается задача в рамках уточненной теории С. Амбарцумяна, учитывающей влияние поперечных сдвигов и обжатия. С использованием гипотезы Фусса – Винклера получены дифференциальные уравнения задачи. Применены известные условия упруго защемленной опоры. На основе безразмерных результатов решения задачи сделаны качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան

Առաձգական հիմքի վրա հենվող առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը

Դիտարկվում է Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության շրջանակներում, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքերի և սեղմման ազդեցությունները: Օգտվելով ֆուսս-Վինկլերի վարկածից ստացվում են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները: Կիրառվում են առաձգական ամրակցման հենարանի հայտնի պայմանները: Խնդրի լուծման չափում չունեցող արդյունքների հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan

The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation

The problem is considered in the framework of the revised Ambartsumian theory that takes into account the effect of transverse shear and compression. The differential equations of the problem are obtained by using the Fuss Winkler hypothesis. The known conditions of resiliently clamped support are applied. The qualitative conclusions are made on the basis of dimensionless results of the problem solution.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII междунар. конф., сентябрь 22-26, 2014. Горис –Степанакерт. С. 261-265.
3. *Киракосян Р. М.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 101-107.
4. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 3. С. 205-212.
5. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 4. С. 309-315.
6. *Kirakosyan R. M., Stepanyan S. P.* – International Scientific Journal. Modeling of Artificial Intelligence. 2015. V. 6. Is. 2. P. 67-74.
7. *Киракосян Р. М.* – ДНАН РА. 2015. Т. 115. С. 284-289.

MECHANICS

УДК 539.3

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

**Application of the Krylov-Bogolyubov Method for Solving
 Integral Equations of a Class of Contact Problems
 of the Theory of Elasticity**

(Submitted 1/II 2016)

Keywords: *contact problems, beam bending on an elastic foundation, local deformations, integral equations.*

The method of integral equations is one of the most efficient methods for investigating contact and mixed problems of the deformable solid mechanics. Numerous results of using the method to solve such problems are reflected in [1-4]. While evolving, the theory of integral equations was constantly enriched by new analytical and numerical-analytical techniques that are quite thoroughly summarized in [5]. The Krylov-Bogolyubov method for solving the Fredholm integral equations of the second kind is a well-known method used in problems of mathematical physics [6]. Its rigorous justification by methods of the functional analysis in some metric spaces is given in [7].

In the present paper, the Krylov-Bogolyubov method is used for Fredholm integral equations of the second kind with symmetric kernels that are represented by the sum of their principal parts in the form of a logarithmic function and regular parts in the form of various continuous functions. These equations describe a rather wide class of contact problems of the theory of elasticity. We will consider a contact problem for the bending of a beam of finite length on an elastic foundation, taking into account the local deformations, by the Shtaerman contact model [1]. As a result, the original integral equations are reduced to systems of linear algebraic equations of simple structures.

1. Let a beam of finite length $2a$ and height h (referred to the coordinate system Oxy) with the modulus of elasticity E_1 and Poisson's ratio ν_1 be indented into an elastic foundation in the form of a half-plane with the corresponding elastic constants E, ν under the action of vertical

distributed forces of intensity $q(x)$. It is required to determine the pressure of the beam on the foundation, as well as the bending and shear forces in cross sections of the beam at the plane deformation. Many problems of beams and plates bending on elastic foundations within the framework of different approximate applied theories are considered in [8].

Let us derive the basic equations and relationships of the posed problem. According to the classical theory of a beam bending, the calculation of its vertical displacement $v_1(x)$ in cross-section x , in case when bending moments and shear forces at the beam end sections are absent, are reduced to the solution of the following inhomogeneous Sturm-Liouville boundary value problem:

$$\begin{cases} D \frac{d^4 v_1}{dx^4} = p(x) - q(x) & (-a < x < a) \\ Q(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0; \quad M(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0; \quad D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_1^2). \end{cases} \quad (1.1)$$

Here $p(x)$ is the required pressure of the beam on the foundation, D is the beam bending stiffness, $M(x)$ is the bending moment, and $Q(x)$ is the transversal or shear force in the cross-section with the coordinate x . Using the Green function $G(x, s)$ of the boundary value problem (1.1), its solution is represented by the formula

$$v_1(x) = \int_{-a}^a G(x, s) [p(s) - q(s)] ds + \gamma x + \alpha; \quad G(x, s) = (x - s)^3 / 12D \quad (-a < x < a). \quad (1.2)$$

Here the binomial $\gamma x + \alpha$ describes the rigid displacement of the beam where γ is a reduced rotation angle and α is a reduced beam settlement.

On the other hand, the vertical displacements $v(x)$ of boundary points of the lower elastic half-plane are expressed by the formula [1]

$$v(x) = -\vartheta \int_{-a}^a \ln \frac{a}{|x - s|} p(s) ds + C \quad (-\infty < x < \infty); \quad \vartheta = 2(1 - \nu^2) / \pi E. \quad (1.3)$$

In addition to these displacements caused by the global deformation of the half-plane, according to the equations of the plane theory of elasticity, the pressure acting at the given point of the surface of an elastic body should cause some additional normal displacement $v_0(x)$ at this point due to the surface structure of the elastic body. According to the I. Ya. Shtaerman model [1] the local displacements $v_0(x)$ are proportional to $p(x)$:

$$v_0(x) = -\chi p(x) \quad (-a < x < a), \quad (1.4)$$

but outside the contact area ($|x| > a$) they are zero. Here χ is a

coefficient determined experimentally; χ depends on the elastic body surface roughness. As a result, it is assumed that vertical displacements $v_2(x)$ of the elastic half-plane boundary points according to (1.3)–(1.4) are determined by the formula [1]:

$$v_2(x) = v(x) + v_0(x) = -\chi p(x) - \vartheta \int_{-a}^a \ln \frac{a}{|x-s|} p(s) ds + c \quad (-a < x < a). \quad (1.5)$$

Now, substituting (1.2) and (1.5) in the contact condition of two elastic bodies (in this case beam and half-plane) $v_1(x) + v_2(x) = \delta = \text{const}$ ($-a < x < a$) [1], we get the governing integral equation (GIE) for $p(x)$:

$$\begin{aligned} \chi p(x) + \vartheta \int_{-a}^a \ln \frac{a}{|x-s|} p(s) ds + \frac{1}{12D} \int_{-a}^a (x-s)^3 p(s) ds = \\ = \frac{1}{12D} \int_{-a}^a (x-s)^3 q(s) ds - \gamma x - \alpha \quad (-a < x < a). \end{aligned} \quad (1.6)$$

The solution of GIE (1.6) must satisfy the conditions of the beam equilibrium

$$\int_{-a}^a p(s) ds = P = \int_{-a}^a q(s) ds; \quad \int_{-a}^a s p(s) ds = M = \int_{-a}^a s q(s) ds. \quad (1.7)$$

After solving the GIE (1.6)–(1.7), according to (1.2) we have for moments $M(x)$ and forces $Q(x)$ in the beam cross section with coordinate x :

$$\begin{aligned} M(x) = D \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x-s| p(s) ds - \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x-s| q(s) ds; \\ Q(x) = D \frac{d^3 v_1}{dx^3} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x-s) p(s) ds - \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x-s) q(s) ds \end{aligned} \quad (-a \leq x \leq a) \quad (1.8)$$

Further we pass to the dimensionless quantities in (1.6)–(1.8)

$$\xi = x/a; \quad \eta = s/a; \quad p_0(\xi) = p(a\xi)/E; \quad q_0(\xi) = q(a\xi)/E;$$

$$\vartheta_0 = a\vartheta/\chi; \quad \lambda_0 = a^4/12\chi D; \quad \gamma_0 = a\gamma/\chi E; \quad \alpha_0 = \alpha/\chi E.$$

Then the GIE (1.6) becomes

$$\begin{aligned} p_0(\xi) + \int_{-1}^1 \left[\vartheta_0 \ln \frac{1}{|\xi-\eta|} + \lambda_0 G_0(\xi, \eta) \right] p_0(\eta) d\eta = h_0(\xi) - \gamma_0 \xi - \alpha_0, \\ G_0(\xi, \eta) = |\xi-\eta|^3, \quad h_0(\xi) = \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) q_0(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (1.9)$$

beam equilibrium condition (1.7) pass to

$$\int_{-1}^1 p_0(\eta) d\eta = P_0 \quad (P_0 = P/aE); \quad \int_{-1}^1 \eta p_0(\eta) d\eta = M_0 \quad (M_0 = M/a^2E) \quad (1.10)$$

and the relationship (1.8) to

$$\begin{aligned}
M_0(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\xi - \eta| p_0(\eta) d\eta - f_0(\xi); \quad M_0(\xi) = M(a\xi)/a^2 E \\
Q_0(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(\xi - \eta) p_0(\eta) d\eta - g_0(\xi); \quad Q_0(\xi) = Q(a\xi)/aE \\
f_0(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\xi - \eta| q_0(\eta) d\eta; \quad g_0(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(\xi - \eta) q_0(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

The formulas (1.9)–(1.11) represent the basic equations and relationships of the posed problem. These equations but with different $G_0(\xi, \eta)$ describe similar contact problems for foundations in the form of strips, wedges and other areas.

2. From a practical point of view, the determination of the contact pressure $p_0(\xi)$ not only within the contact area $-1 < \xi < 1$ but also at its ends $\xi = \pm 1$ is of interest. Therefore, we represent the solution of the GIE (1.9)–(1.10) in the form of

$$p_0(\xi) = A_0 \xi + B_0 + \sqrt{1 - \xi^2} \chi_0(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \tag{2.1}$$

where A_0 and B_0 are unknown coefficients, $\chi_0(\xi)$ is an unknown function continuous in $[-1, 1]$. Substituting $\xi = \pm 1$ in (2.1), we come to simple equations from which we get

$$A_0 = \frac{1}{2} [p_0(1) - p_0(-1)]; \quad B_0 = \frac{1}{2} [p_0(1) + p_0(-1)], \tag{2.2}$$

i.e. after determination A_0 and B_0 , values $p_0(\pm 1)$ will be found from (2.2).

Now substituting the expression $p_0(\xi)$ from (2.1) in the GIE (1.9) we get

$$\begin{aligned}
& A_0 \xi + B_0 + \sqrt{1 - \xi^2} \chi_0(\xi) + A_0 \vartheta_0 I_2(\xi) + B_0 \vartheta_0 I_1(\xi) + A_0 \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) \eta d\eta + \\
& + B_0 \lambda_0 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \left[\vartheta_0 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + \lambda_0 G_0(\xi, \eta) \right] \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = \\
& = h_0(\xi) - \gamma_0 \xi - \alpha_0; \quad I_1(\xi) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} d\eta; \quad I_2(\xi) = \int_{-1}^1 \eta \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} d\eta \quad (-1 \leq \xi \leq 1).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

The computation of these elementary integrals gives

$$\begin{aligned}
I_1(\xi) &= 2 - (1 - \xi) \ln(1 - \xi) - (1 + \xi) \ln(1 + \xi); \\
I_2(\xi) &= \frac{1}{2} \left[(1 + \xi)^2 \ln(1 + \xi) - (1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi) - 2\xi \right] + \xi I_1(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

whence

$$I_1(-1) = I_1(1) = 2 - \ln 4; \quad I_2(-1) = -I_2(1) = -1. \tag{2.5}$$

The substitution of (2.1) into (1.10) results in

$$\frac{2}{3} A_0 + \int_{-1}^1 \eta \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = M_0; \quad 2B_0 + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = P_0. \tag{2.6}$$

We now turn to solving GIE (1.9)–(1.10) or equivalent to them equations (2.3)–(2.4) and (2.6) by Krylov-Bogolyubov method. First, let us calculate the integral

For this purpose, we divide the segment $-1 \leq \eta \leq 1$ by points $\eta_k = -1 + 2k/N$ ($k = \overline{1, N-1}$) into N equal partial intervals $\eta_{k-1} < \eta < \eta_k$ ($k = \overline{1, N}; \eta_0 = -1, \eta_N = 1$).

On each such partial interval we assume that the function $X_0(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \chi_0(\eta)$ takes on a constant value X_k , i.e. we replace the continuous function $X_0(\eta)$ with a step function. Further compute the integral $J(\xi)$ at points $\xi_j = -1 + (2j-1)/N$ ($j = \overline{1, N}$) which are midpoints of partial intervals (η_{j-1}, η_j) . Then

$$J(\xi_j) = \sum_{k=1}^N L_{jk} X_k; \quad L_{jk} = - \int_{-1+2(k-1)/N}^{-1+2k/N} \ln \left(\frac{2j-1}{N} - 1 - \eta \right) d\eta \quad (j, k = \overline{1, N}). \quad (2.7)$$

The integral L_{jk} from (2.7) are calculated accurately by considering separately the cases $k \leq j-1$, $k \geq j+1$ and $k = j$. As a result we get

$$L_{jk} = \frac{2|k-j|-1}{N} \ln \left(\frac{|2|k-j|-1|}{N} \right) - \frac{2|k-j|+1}{N} \ln \left(\frac{2|k-j|+1}{N} \right) + \frac{2}{N} \quad (k, j = \overline{1, N}). \quad (2.8)$$

Using the above method we compute also the following integrals at nodal points ξ_j

$$N(\xi) = \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) \sqrt{1-\eta^2} \chi_0(\eta) d\eta, \quad S_0(\xi) = \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) d\eta, \quad Q_0(\xi) = \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) \eta d\eta.$$

We have

$$N(\xi_j) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N G_0(\xi_j, \xi_k) X_k, \quad S(\xi_j) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N G_0(\xi_j, \xi_k), \quad Q(\xi_j) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k G_0(\xi_j, \xi_k). \quad (2.9)$$

Now we require that the integral equation (2.3) will be satisfied at nodal points ξ_j . Then we obtain the following system of linear algebraic equations (SLAE) for unknown variables $A_0, B_0, \gamma_0, \alpha_0$ and X_j :

$$\begin{aligned} & \left[\xi_j + \vartheta_0 I_2(\xi_j) + \lambda_0 Q_0(\xi_j) \right] A_0 + \left[1 + \vartheta_0 I_1(\xi_j) + \lambda_0 S_0(\xi_j) \right] B_0 + \gamma_0 \xi_j + \alpha_0 + X_j + \\ & + \sum_{k=1}^N \left[\vartheta_0 L_{jk} + \frac{2\lambda_0}{N} G_0(\xi_j, \xi_k) \right] X_k = h_0(\xi_j) \quad (j = \overline{1, N}; \quad \xi_j = -1 + (2j-1)/N) \end{aligned} \quad (2.10)$$

where $I_p(\xi_j)$ ($p = \overline{1, 2}$) are calculated by the formula (2.4), L_{jk} , $S_0(\xi_j)$ and $Q_1(\xi_j)$ are given by (2.8)–(2.9). The SLAE (2.10) is completed by two equations

$$2B_0 + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N X_k = P_0; \quad \frac{2}{3} A_0 + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k X_k = M_0 \quad (2.11)$$

obtained from the equilibrium conditions (1.10) and by two equations

obtained from (2.3) for $\xi = \pm 1$. The following desired integrals are calculated in the process:

$$\begin{aligned}
H_0^\pm &= \int_{-1}^1 G_0(\pm 1, \eta) d\eta = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N G_0(\pm 1, \xi_k); \quad L_0^\pm = \int_{-1}^1 G_0(\pm 1, \eta) \eta d\eta = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k G_0(\pm 1, \xi_k); \\
\int_{-1}^1 G(\pm 1, \eta) \sqrt{1-\eta^2} \chi_0(\eta) d\eta &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N G_0(\pm 1, \xi_k) X_k; \quad \int_{-1}^1 \ln(1 \pm \eta) \sqrt{1-\eta^2} \chi_0(\eta) d\eta = \\
&= \begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ k \ln \left(\frac{2k}{N} \right) - (k-1) \ln \left[\frac{2(k-1)}{N} \right] - 1 \right\} X_k; \\ 2 \sum_{k=1}^N \left\{ \left[1 - \frac{k-1}{N} \right] \ln \left[2 - \frac{2(k-1)}{N} \right] - \left(1 - \frac{k}{N} \right) \ln \left(2 - \frac{2k}{N} \right) - \frac{1}{N} \right\} X_k \end{cases}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

We enter new unknowns $Y_1 = A_0$, $Y_2 = B_0$, $Y_3 = \gamma_0$, $Y_4 = \alpha_0$, $Y_{k+4} = X_k$ ($k = \overline{1, N}$), and combine SLAE (2.10) with (2.11) and two equations obtained from (2.3) for $\xi = \pm 1$. Taking into account (2.12), we finally obtain the following SLAE in canonical form:

$$Y_j + \sum_{k=1}^{N+4} R_{jk} Y_k = a_j \quad (j = \overline{1, N+4}), \quad (2.13)$$

where the number of equations and unknowns are equal to $N+4$. In (2.13) the following notations are made:

$$\begin{aligned}
R_{1k} &= \begin{cases} 0 & (k = \overline{1, 4}); \quad a_1 = \frac{3}{2} M_0; \\ \frac{3}{N} \xi_{k-4} & (k = \overline{5, N+4}); \end{cases} \quad R_{2k} = \begin{cases} 0 & (k = \overline{1, 4}); \quad a_2 = \frac{1}{2} P_0; \\ \frac{1}{N} \xi_{k-4} & (k = \overline{5, N+4}); \end{cases} \\
R_{3k} &= \begin{cases} 1 - \vartheta_0 I_2(-1) - \lambda_0 L_0^- & (k = 1); \\ -[1 + \vartheta_0 I_1(-1) + \lambda_0 H_0^-] & (k = 2); \quad a_3 = -h_0(-1) \\ 0 & (k = 3); \quad -1 & (k = 4); \\ \frac{2}{N} \left\langle \vartheta_0 \left\{ k^* \ln \left(\frac{2k^*}{N} \right) - (k^*-1) \ln \left[\frac{2(k^*-1)}{N} \right] - 1 \right\} - \right. \\ \left. - \lambda_0 G_0(-1, \xi_k^*) \right\rangle & (k^* = k-4; \quad \xi_k^* = \xi_{k-4}); \quad k = \overline{5, N+4} \end{cases} \\
R_{4k} &= \begin{cases} 1 + \vartheta_0 I_2(1) + \lambda_0 L_0^+ & (k = 1); \\ 1 + \vartheta_0 I_1(1) + \lambda_0 H_0^+ & (k = 2); \quad a_4 = h_0(1) \\ 1 & (k = 3); \quad 0 & (k = 4); \\ 2\vartheta_0 \left\{ \left(1 - \frac{k^*}{N} \right) \ln \left(2 - \frac{2k^*}{N} \right) - \left[1 - \frac{k^*-1}{N} \right] \ln \left[2 - \frac{2(k^*-1)}{N} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{N} \right\} + \frac{2\lambda_0}{N} G_0(1, \xi_k^*) & k = \overline{5, N+4}; \quad k^* = k-4; \quad \xi_k^* = \xi_{k-4} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$R_{jk} = \begin{cases} \xi_j^* + \vartheta_0 I_2(\xi_j^*) + \lambda_0 Q_0(\xi_j^*) & (k=1); \quad (\xi_j^* = \xi_{j-4}, \quad j=5, 6, \dots, N+4); \\ 1 + \vartheta_0 I_1(\xi_j^*) + \lambda_0 S_0(\xi_j^*) & (k=2); \quad a_j = h_0(\xi_j^*) \\ \xi_j^* & (k=3); \quad 1 \quad (k=4); \\ \vartheta_0 L_{jk}^* + \frac{2\lambda_0}{N} G_0(\xi_j^*, \xi_k^1); \quad L_{jk}^* = L_{j-4, k-4} & (j, k = \overline{5, N+4}). \end{cases}$$

The values $I_p(\pm 1)$ ($p=1, 2$) in R_{3k} and R_{4k} are given by formulas (2.5).

Now, express the main characteristics of the problem: the dimensionless contact pressure $p_0(\xi)$ from (2.1), the dimensionless bending moments $M_0(\xi)$ and transverse forces $Q_0(\xi)$ from (1.11), in terms of the solution of SLAE (2.13).

After calculating the elementary integrals the values of these characteristics on the partial intervals (η_{j-1}, η_j) ($j = \overline{1, N}$) will be given by the formulas

$$\begin{aligned} p_0(\xi_j) &= Y_1 \xi_j + Y_2 + Y_{j+4}; \quad M_0(\xi_j) = \frac{Y_1}{2} \left[\xi_j (\xi_j^2 - 1) + \frac{2}{3} (1 - \xi_j^3) \right] + \frac{Y_2}{2} (1 + \xi_j^2) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \left[2\xi_j (2\xi_j - \xi_k - \xi_{k-1}) + \xi_k^2 + \xi_{k-1}^2 - 2\xi_j^2 \right] Y_{k+4} - f_0(\xi_j); \\ Q_0(\xi_j) &= \frac{Y_1}{2} (\xi_j^2 - 1) + Y_2 \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (2\xi_j - \xi_k - \xi_{k-1}) Y_{k+4} - g_1(\xi_j); \\ f_0(\xi_j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\xi_j - \xi_k| q_k; \quad g_0(\xi_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{sign}(\xi_j - \xi_k) q_k; \quad \xi_j = -1 + (2j-1)/N \quad (j = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Here q_k are accepted constant values of the function $q_0(\eta)$ on the partial interval (η_{k-1}, η_k) ($k = \overline{1, N}$; $\eta_0 = -1$, $\eta_N = 1$).

Thus, after solving the SLAE (2.13) the main characteristics of the posed problem are defined by very simple formulas (2.14). In the course of solving (2.13) the quantities γ_0, α_0 are determined.

Institute of Mechanics of NAS RA
smkhitaryan 39@rambler.ru

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitarian

Application of the Krylov-Bogolyubov Method for Solving Integral Equations of a Class of Contact Problems of the Theory of Elasticity

The well-known Krylov-Bogolyubov method is used in solving Fredholm integral equations of the second kind, with symmetric kernels represented by the sum of the logarithmic function and different continuous functions. These equations describe a rather wide class of contact problems of the theory of elasticity, in particular,

the contact problem on the bending of a beam on an elastic half-plane within the framework of the Shtaerman contact model, discussed in the paper.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

**Կրիլովի և Բոգոլյուբովի մեթոդի կիրառությունը առաձգականության
տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ
հավասարումների լուծմանը**

Կրիլովի և Բոգոլյուբովի հայտնի մեթոդը կիրառվում է սիմետրիկ կորիզներով, որոնք ներկայացվում են լոգարիթմական ֆունկցիայի և տարբեր անընդհատ ֆունկցիաների գումարով: Այդ հավասարումներով նկարագրվում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների բավականաչափ լայն դաս, մասնավորապես, Ի. Յա. Շտաերմանի կոնտակտի մոդելի շրջանակներում հոդվածում դիտարկված առաձգական կիսահարթության վրա հեծանի ծռման կոնտակտային խնդիրը:

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

**Применение метода Крылова и Боголюбова к решению интегральных
уравнений одного класса контактных задач теории упругости**

К решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода с симметрическими ядрами, представленными суммами логарифмической функции и различных непрерывных функций, применяется известный метод Крылова и Боголюбова. Этими уравнениями описывается достаточно широкий класс контактных задач теории упругости, в частности, рассматриваемая в статье контактная задача об изгибе балки на упругой полуплоскости в рамках модели контакта И.Я. Штаермана.

References

1. *Shtaerman I.Y.* – М.-Л. Gostekhizdat. 1949. 270 p. (in Russian).
2. *Galín L.A.* – М. Nauka. 1980. 304 p. (in Russian)
3. *Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A.* – М. Nauka. 1974. 456 p.(in Russian).
4. Development of the theory of contact problems in the USSR. М. Nauka. 1976. 493 p.
5. *Verlan A.F. Sizikov V.S.* – Handbook. Kiev. Naukova dumka. 1986. 544 p.(in Russian).
6. *Kantorovich L. V., Krylov V. I.* – М.-Л. 1962. 708p. (in Russian).
7. *Gabdulkhaev B. G.* – Izvestie. Vuzov. 2002. Math. №10. (485). P.34-47. (in Russian).
8. *Vlasov V. Z., Leontiev N. N.* – М. Fizmatgiz. 1960. 491 p. (in Russian).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 18/І 2016)

Ключевые слова: *пьезоупругость, концентрация напряжений, комплексные переменные.*

Имеются многочисленные исследования по выявлению характера концентрации напряжений в окрестности угловой точки упругого клина из пьезоактивного материала. Рассматривались задачи либо в случае гексагональной симметрии, либо в случае обобщенного плоского напряженного состояния, либо в случае цилиндрической анизотропии, например в [1–4].

В отличие от указанных работ в настоящей статье приводится решение антиплоской задачи для пьезоупругого клина из кубически анизотропного материала класса 23. Решение представляется при помощи комплексных переменных, предложенных Р. К. Алексаняном [5]. Установлено, что пьезоэффект может привести к появлению концентрации упругих напряжений в случае, когда без пьезоэффекта она отсутствует, и, наоборот, появлению концентрации напряженности электрического поля.

1. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ упругий клин занимает область $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq \alpha x$, $-\infty < z < \infty$. Здесь

$$\alpha = \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.1)$$

где φ – угол раствора клина. Рассматривается задача антиплоской деформации, т. е. для вектора упругого перемещения $\bar{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ принимается

$$u = w = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1.2)$$

Предполагается, что материал клина является пьезоэлектриком кубической симметрии класса 23.

При принятых предположениях и отсутствии массовых сил и свободных зарядов уравнения равновесия и электростатики следующие [6, 7]:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь σ_{31} , σ_{32} – напряжения сдвига вдоль координаты z ; E_1 , E_2 , D_1 , D_2 – компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля вдоль координат $x(1)$ и $y(2)$.

Материальные уравнения (функциональные связи) принимаются в виде [6, 7]

$$\sigma_{31} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{14} E_2, \quad \sigma_{32} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{14} E_1, \quad D_1 = \varepsilon E_1 + e_{14} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad D_2 = \varepsilon E_2 + e_{14} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.5)$$

где c_{44} – модуль сдвига; ε – диэлектрическая проницаемость; e_{14} – пьезомодуль.

С помощью представления

$$E = -\text{grad} \varphi \quad (1.6)$$

и соотношений (1.5) уравнения (1.3) и (1.4) приводятся к виду [6]

$$c_{44} \Delta w + 2e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \varepsilon \Delta \varphi - 2e_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.7)$$

Решение системы уравнений для клиновидной области ($0 \leq y \leq \alpha x$) удобно представить, следуя методу Р. К. Алексаняна [5], следующим образом:

$$w = A(x + \beta y)^\lambda, \quad \varphi = B(x + \beta y)^\lambda. \quad (1.8)$$

Подстановка (1.8) в систему уравнений (1.7) при условиях $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A , B

$$\begin{aligned} c_{44}(1 + \beta^2) \cdot A + 2e_{14}\beta \cdot B &= 0, \\ \varepsilon(1 + \beta^2) \cdot B - 2e_{14}\beta \cdot A &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условие существования нетривиального решения системы (1.9) приводит к уравнению относительно параметра β

$$\beta^4 + (2 + \chi)\beta^2 + 1 = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\chi = 4e_{14}^2 / (\varepsilon c_{44}) \quad (1.11)$$

есть коэффициент электромеханической связи.

Уравнение (1.10) имеет четыре корня

$$\beta = \pm i\beta_1, \quad \beta = \pm i\beta_2, \quad (1.12)$$

где

$$\beta_{1,2} = \sqrt{1 + \chi/2 \pm \sqrt{\chi + \chi^2/4}}. \quad (1.13)$$

Следовательно, общее решение системы (1.7) будет

$$\begin{aligned} w &= A_1(x + i\beta_1 y)^\lambda + A_2(x - i\beta_1 y)^\lambda + A_3(x + i\beta_2 y)^\lambda + A_4(x - i\beta_2 y)^\lambda, \\ \varphi &= B_1(x + i\beta_1 y)^\lambda + B_2(x - i\beta_1 y)^\lambda + B_3(x + i\beta_2 y)^\lambda + B_4(x - i\beta_2 y)^\lambda. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Однако согласно системе (1.9) между коэффициентами A_k и B_k имеются связи. Из первого уравнения системы (1.9) с учетом, что $\beta_1 \beta_2 = 1$, и используя преобразование типа

$$\frac{1-\beta_1^2}{\beta_1} = \frac{\beta_2 - \beta_1^2 \beta_2}{\beta_1 \beta_2} = \beta_2 - \beta_1, \quad (1.15)$$

нетрудно получить

$$B_1 = -i\delta A_1, \quad B_2 = i\delta A_2, \quad B_3 = i\delta A_3, \quad B_4 = -i\delta A_4, \quad (1.16)$$

где

$$\delta = (\beta_1 - \beta_2)c_{44}/(2e_{14}). \quad (1.17)$$

2. Пусть на границе клина $y = 0$ заданы условия [6]

$$w = 0, \quad D_2 = 0. \quad (2.1)$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что условия (2.1) можно заменить условиями

$$w = 0, \quad \partial\varphi/\partial y = 0. \quad (2.2)$$

Предполагается, что другая грань клина $y = \alpha x$ закреплена и заземлена

$$w = 0, \quad \varphi = 0. \quad (2.3)$$

Требую, чтобы общее решение (1.14) с учетом (1.16) удовлетворяло (2.2), получим

$$w = A_1 [(x + i\beta_1 y)^\lambda - (x - i\beta_1 y)^\lambda] + A_3 [(x + i\beta_2 y)^\lambda - (x - i\beta_2 y)^\lambda], \quad (2.4)$$

$$\varphi = -i\delta \{ A_1 [(x + i\beta_1 y)^\lambda - (x - i\beta_1 y)^\lambda] - A_3 [(x + i\beta_2 y)^\lambda - (x - i\beta_2 y)^\lambda] \}.$$

Подстановка (2.4) в граничные условия (2.3) при $y = \alpha x$ (после сокращения на x^λ) приводит к системе однородных уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_3

$$A_1 [(1 + i\beta_1 \alpha)^\lambda - (1 - i\beta_1 \alpha)^\lambda] + A_3 [(1 + i\beta_2 \alpha)^\lambda - (1 - i\beta_2 \alpha)^\lambda] = 0, \quad (2.5)$$

$$A_1 [(1 + i\beta_1 \alpha)^\lambda + (1 - i\beta_1 \alpha)^\lambda] - A_3 [(1 + i\beta_2 \alpha)^\lambda + (1 - i\beta_2 \alpha)^\lambda] = 0.$$

С помощью новых обозначений

$$\Gamma_k = \sqrt{1 + \alpha^2 \beta_k^2}, \quad \cos \psi_k = \Gamma_k^{-1}, \quad \sin \psi_k = \alpha \beta_k \Gamma_k^{-1}, \quad \operatorname{tg} \psi_k = \alpha \beta_k, \quad k = 1, 2 \quad (2.6)$$

система (2.5) приводится к простому виду

$$\Gamma_1^\lambda A_1 \sin \lambda \psi_1 + \Gamma_2^\lambda A_3 \sin \lambda \psi_2 = 0, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_1^\lambda A_1 \cos \lambda \psi_1 - \Gamma_2^\lambda A_3 \cos \lambda \psi_2 = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.7) приводит к уравнению, определяющему параметр λ ,

$$\sin \lambda(\psi_1 + \psi_2) = 0, \quad \lambda_n = \pi n / (\psi_1 + \psi_2), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

При отсутствии пьезоэффекта концентрация напряженности в окрестности угловой точки появляется при $\varphi > \pi$ ($\lambda_1 < 1$) [5]. Из равенства $\operatorname{tg} \psi_k = \alpha \beta_k$ (2.6) при $\varphi = 0.5\pi$ ($\alpha \rightarrow \infty$) следует, что $\psi_1 = \psi_2 = 0.5\pi$, откуда $\lambda_1 = 1$, т. е. наличие пьезоэффекта приводит к появлению концентрации напряжений при $\varphi > 0.5\pi$.

В табл. 1 приводится численный пример для клина с угловым раствором $\varphi = 3\pi/4$, в зависимости от коэффициента электромеханической связи χ . Приведенные в таблице значения степени особенности λ_1 при-

ближенно соответствуют степени особенности напряженности электрического поля при отсутствии пьезоэффекта.

Таблица 1

χ	0.2	0.4	0.6
λ_1	0.667	0.668	0.670

Таким образом, для рассматриваемой задачи концентрация упругих напряжений появляется вследствие концентрации напряженности электрического поля.

Для сравнения рассматривается задача, когда на грани клина $y = 0$ ($\varphi = 0$) вместо (2.2) даются условия

$$\partial w / \partial y = 0, \quad \varphi = 0. \quad (2.9)$$

Аналогичным образом нетрудно получить, что вместо уравнений относительно произвольных постоянных (2.7) имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\lambda A_1 \cos \lambda \psi_1 + \Gamma_2^\lambda A_3 \cos \lambda \psi_2 &= 0, \\ \Gamma_1^\lambda A_1 \sin \lambda \psi_1 - \Gamma_2^\lambda A_3 \sin \lambda \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что уравнение, определяющее λ , будет совпадать с уравнением (2.8). Однако в отличие от предыдущей задачи особенность напряженности электрического поля появляется вследствие концентрации упругих напряжений.

Наконец, рассмотрим случай, когда на обеих гранях клина заданы условия

$$w = 0, \quad \varphi = 0. \quad (2.11)$$

В этом случае уравнение, определяющее степень концентрации λ , приводится к виду

$$\cos \lambda(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\Gamma_1^{2\lambda} + \Gamma_2^{2\lambda}}{2\Gamma_1^\lambda \Gamma_2^\lambda}. \quad (2.12)$$

При неучете пьезоэффекта правая часть уравнения (2.12) равна единице и получаются отдельные решения для упругого клина и электрического потенциала. При учете пьезоэффекта правая часть больше единицы и уравнение (2.12) не имеет действительных корней.

Институт механики НАН РА

Р. К. Алексанян, В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Особенности в угловых точках упругого клина из пьезоэлектрического материала кубической симметрии

Приводится решение антиплоской задачи для пьезоупругого клина из кубически анизотропного материала 23. Установлено, что пьезоэффект может привести к появлению концентрации упругих напряжений в случае, когда без пьезоэф-

фекта она отсутствует, и, наоборот, к появлению концентрации напряженности электрического поля.

Ռ. Կ. Ալեքսանյան, Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

**Խորանարդ համաչափությամբ անիզոտրոպ նյութից
պիեզոէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետում եզակիությունները**

Ստացված է 23 դասի խորանարդային անիզոտրոպ նյութից պատրաստված պիեզոառաձգական սեպի հակահարթ խնդրի լուծումը: Հաստատված է, որ պիեզոէլեկտր կարող է բերի առաձգական լարումների կենտրոնացմանը այն դեպքում, երբ առանց պիեզոէլեկտի լարումների կենտրոնացումը բացակայում է և հակառակը՝ առաջացնի էլեկտրական դաշտի լարվածության կենտրոնացում:

R. K. Aleksanyan, V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

**Singularities in the Corner Points of the Elastic Wedge from
the Piezoelectric Material of the Cubic Symmetry**

The solution of the antiplane problem for the piezoelectric wedge from the anisotropic material of the 23 class is given. It is established that the piezoeffect can bring to the appearance of the stress concentration when it is absent without piezoeffect, and vice versa – to the appearance of the electric field concentration.

Литература

1. *Белубекян М. В., Галпчян П. В.* – Изв. РАН. МТТ. 1994. N 3. С.102-108.
2. *Galpchian P. V.* – Int. J. of Applied Electromagnetic and Mechanics. 1997. N8. P. 243-258.
3. *Аветисян А. Г., Нерсисян Г. Г., Саргсян А. М.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61(2). С. 45-51.
4. *Саргсян А. М.* – Механика композитных материалов. 2015. Т. 51. № 2. С. 309–322.
5. *Алексян Р. К.* – ДАН АрмССР. 1975. Т. 61. № 4. С. 219–224.
6. *Балакирев М. К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982. 239 с.
7. *Аветисян А. С.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38(1). С. 13-18.

Мониторинговые наблюдения. Гидрогеодинамические пункты наблюдений охватывают всю территорию республики, а гидрогеохимические пункты – ее центральную часть. Данные по гидрогеодинамическим и сейсмическим наблюдениям ежемесячно предоставляются Национальной службой сейсмической защиты РА, по гидрогеохимическим пунктам наблюдения и сбор данных проводятся в лаборатории Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА. Химический анализ проб воды проводится в лаборатории Института общей и неорганической химии им. М. Манвеляна НАН РА. Режимные мониторинговые наблюдения направлены на изучение геодинамических процессов и напряженного состояния земной коры во времени и пространстве. Для слежения за деформационными процессами используются замеры уровня подземных вод и изменения концентрации химических компонентов минеральных вод. Сопоставление мониторинговых гидрогеодинамических наблюдений с сейсмичностью позволило выделить краткосрочные и среднесрочные эффекты, предшествовавшие землетрясениям, произошедшим на территории Армении [3]. Изучены показатели гидрогеодинамических эффектов в зависимости от параметров землетрясений. Существующая зависимость между изменениями химических компонентов минеральных вод и сейсмическими событиями позволила определить, что вариации газового состава (CO_2) имеют характер краткосрочного, а изменения содержания общей минерализации – долгосрочного эффекта.

По данным сети наблюдений осуществляется построение гидрогеодеформационного поля [4] для слежения наращивания или спада напряжений земной коры региона в виде образующих структур растяжек или сжатия.

Данные по сейсмическому режиму. Сейсмичность территории Армении характеризуется сейсмическими событиями с $M < 2$, которые составляют сейсмический фон региона. На фоне этих слабых землетрясений за исследуемый период зарегистрированы в основном землетрясения с $3 < M < 2$. Рассмотрены распределения землетрясений с $M > 3$ по годам (1991-2014). Наибольшее количество землетрясений имело место в 2007 и 2011 гг. Напряженно-деформированное состояние земной коры за отмеченные годы отражено на картах (рис. 1). Карты деформационного поля построены по расчетным значениям деформации, вычисленным по параметрам произошедших землетрясений.

Результаты обработки. Гидрогеологические исследования проводятся по наблюдательной сети гидрогеодинамических скважин, охватывающей весь регион Армении [5]. Для размещения гидрогеодинамических скважин выбирались участки и водоносные горизонты с низким уровнем неконтролируемых помех с тем, чтобы определить особенности режима этих горизонтов и реакции на подготовку землетрясений. Проведенные исследования показали, что гидрогеодинамический режим можно рассматривать в качестве показателя изменения напряженно-деформированного состояния в области подготовки землетрясений. В статье приводятся результаты обработки временных рядов за период мониторинговых наблюдений. Обработка временных рядов изменения химических компонентов

минеральных вод и уровня вод гидрогеодинамических скважин проводилась с учетом сезонных изменений, исключения тренда [6] и сопоставления с сейсмичностью региона. Результаты обработки приводятся на примере вариаций временного ряда величины общей минерализации минеральной воды источника Суренаван и вариаций уровня воды в гидрогеодинамической скважине Ашоцк.

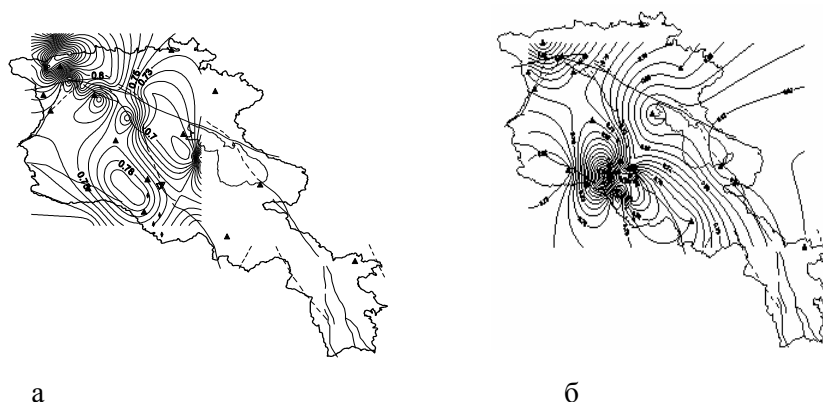


Рис. 1 Карты гидрогеодеформационного поля территории Армении за 2007 и 2011 гг.  – изолинии значений деформаций.

Минеральный источник Суренаван расположен в середине структурного Ереванского блока, почти на Ереванском глубинном разломе, водоносный горизонт – на глубине 350 м.

Режимные наблюдения за минеральной водой скважины Суренаван ведутся в лаборатории начиная с 2006 г. (рис. 2)

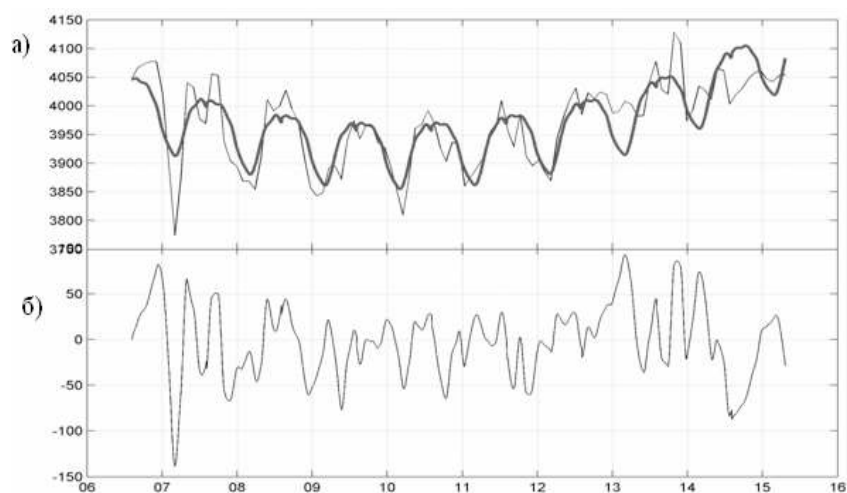


Рис. 2. График изменения минерализации воды скважины Суренаван: а – график изменения величины общей минерализации минеральной воды, б – график изменения величины общей минерализации после обработки:

Начальный этап обработки временного ряда включал приведение исходных величин изменения минерализации к равномерной дискретности с периодом 30 суток. Рассчитывалась кривая, представляющая собой сумму квадратичного тренда и сезонных вариаций (рис. 2, а). Обработанный временной ряд величин минерализации получен в результате вычитания из исходного временного ряда квадратичного тренда и сезонных вариаций. Для сопоставления полученных данных с сейсмичностью берутся моменты землетрясений в величинах магнитуд и эпицентральных расстояний. Землетрясения с $M > 3$ выбирались из общего каталога сейсмических событий по территории Армении, которые имели место в радиусе 100 км от центра окружности с координатами: $40^{\circ}20'$, $44^{\circ}94'$. При сопоставлении данных после обработки с сейсмичностью, где выборка землетрясений проводилась как указано выше, наблюдается корреляция обработанной кривой графика на рис.2,б с параметрами землетрясений (магнитуда, эпицентральное расстояние). С целью повышения корреляции полученных данных с сейсмичностью в работе рассмотрена методика выборки сейсмических событий из каталога для различных наблюдательных скважин с учетом деформаций в окрестностях эпицентра готовящегося землетрясения [4]. Для выделения гидрогеологических эффектов землетрясений нами рассчитывались деформации ε , которые развиваются на месте расположения скважины Суренаван, в зависимости от ее расстояния до эпицентра и магнитуды землетрясения. Расчетные деформации определялись по формуле И. П. Добровольского [7]

$$\varepsilon = \left[\frac{10^{0,413M - 2,66}}{R} \right]^3$$
, где M – магнитуда землетрясения, R – эпицентральное расстояние км.

При этом имелось в виду, что в процессе подготовки землетрясений могут быть выявлены эффекты в том случае, если расчетная деформация имеет величину не менее 10^{-8} , т. е. превышает величину земно-приливной деформации. В некоторых случаях рассматривается возможная высокая тензочувствительность скважины, где следует учитывать деформации порядка 10^{-9} и более. Радиус зоны проявления гидрогеологических эффектов определяется по формуле [7] $R = 10^{0,43M}$ (км), где M – магнитуда землетрясения. Результаты такой методики подхода к выборке землетрясений для скважины Суренаван приводятся на рис. 3.

Гидрогеодинамическая скважина Ашоцк расположена на границе Севанской и Приараксинской тектонических зон и в поперечной Транскавказской зоне Гюмрийского тектонического блока. Средний статический уровень воды в скважине 6.5 м. Режимные наблюдения по скважине Ашоцк проводятся с 1991 г. Обработка временного ряда по уровню вод приводится за период 1994-2015 гг.

Для обработки данных по изменению уровня воды в скважине Ашоцк временной ряд (рис. 4, а) был приведен к равномерной дискретности с периодом 1 сутки. На рис. 4, б изображен тот же ряд, но с удаленными сезонными вариациями. Сезонные вариации удалялись с помощью цифрового фильтра [8], вырезающего частотный диапазон спектра, содержащего

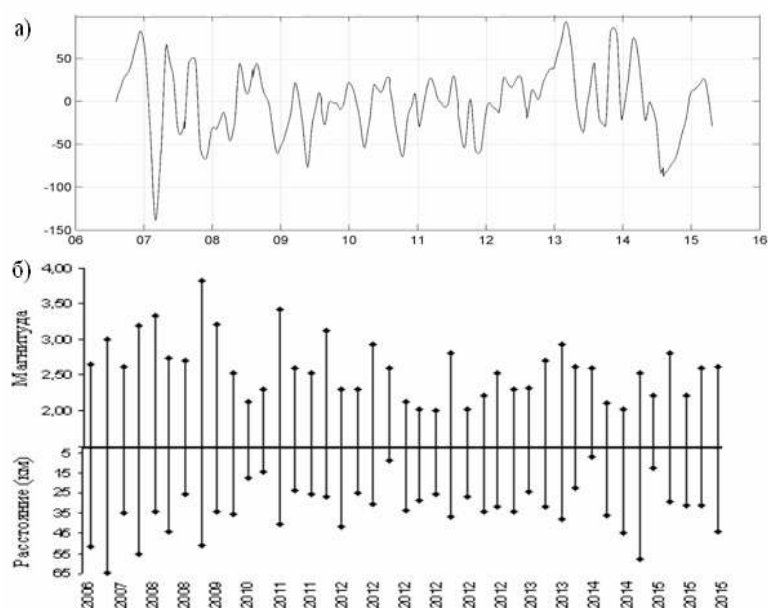


Рис. 3. График изменения минерализации воды в скважине Суренаван в сопоставлении с данными сейсмичности: а – график изменения минерализации после обработки, б – данные по магнитуде и эпицентральному расстоянию произошедших землетрясений с учетом значений расчетной деформации.

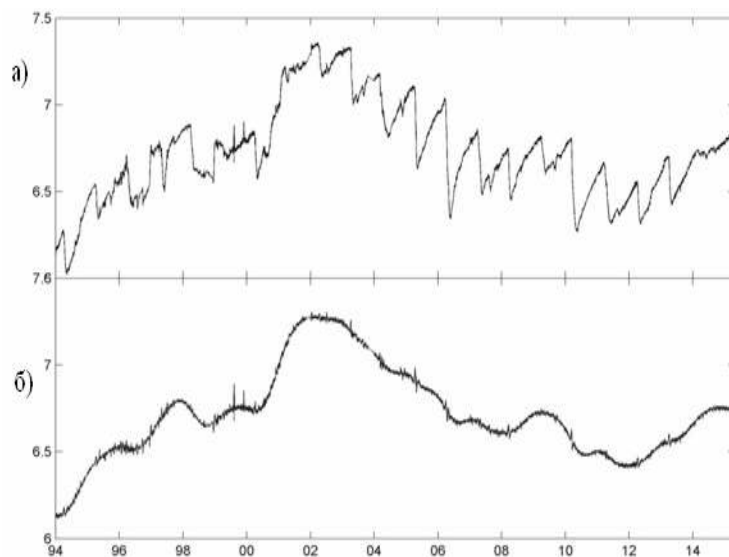


Рис. 4. Вариации уровня воды в скважине Ашоцк: а – график исходной кривой вариаций уровня воды в гидрогеодинамической скважине; б – график кривой вариации уровня воды после обработки.

сезонную и кратные ей гармоники. Далее полученную кривую сопоставляли с сейсмическими событиями, параметры которых рассмотрены с учетом величин расчетных деформаций, имевших место вокруг скважины Ашоцк. Выбирались землетрясения с $M > 3$, эпицентры которых локализовались внутри окружности с радиусом 100 км.

Таким образом, полученные результаты обработки данных по изменению величин минерализации минерального источника и уровня воды в гидрогеодинамической скважине показали корреляционную связь между мониторинговыми наблюдениями и сейсмическими событиями и возможность выявления гидрогеологических эффектов, предшествующих геодинамическим процессам земной коры региона.

Выводы. В результате длительного периода мониторинговых наблюдений накоплен фактический материал, на базе которого создается банк гидрогеологических и геохимических данных.

Продолжение мониторинговых наблюдений по гидрогеодинамическим и геохимическим пунктам и их обработка проводятся с целью разработки гидрогеологических методов определения геодинамических процессов земной коры.

Вариации уровня воды в гидрогеодинамической скважине Ашоцк, расположенной в мобильном Ширакском блоке, характеризуют геодинамическую активность блока.

¹Институт общей и неорганической химии им. М. Манвеляна НАН РА

²Институт геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА

Академик С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян

Результаты гидрогеологического мониторинга геодинамических процессов территории Армении

Рассмотрены данные мониторинговых наблюдений по уровню вод в гидрогеодинамической скважине Ашоцк и геохимии минеральной воды источника Суренаван. Приводятся результаты обработки, которые сопоставляются с сейсмичностью региона с целью выявления эффектов, связанных с геодинамическими процессами территории Армении.

**Ակադեմիկոս Ս. Վ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Փաշայան,
Լ. Վ. Հարությունյան**

Հայաստանի տարածքի երկրադինամիկական գործընթացների հիդրոերկրաբանական դիտարկումների արդյունքները

Ուսումնասիրվել են Աշոցք հիդրոերկրադինամիկական հորատանցքի ջրի մակարդակի և Սուրենավան հանքային ջրերի երկրաքիմիայի դիտարկումների տվյալները: Ներկայացվում են տվյալների մշակման արդյունքները, որոնք համադրվում են տարածաշրջանի սեյսմականության հետ: Վերջինիս նպատակն է բացահայտել այն էֆեկտները, որոնք կապված են ՀՀ տարածքի երկրադինամիկական գործընթացների հետ:

Academician S. V. Grigoryan, R. A. Pashayan, L. V. Arutyunyan

The Results of Hydrogeological Monitoring of Hydrodynamic Processes of the Territory of Armenia

The results of the monitoring of the water level of Ashotsk hydrogeodynamic boreholes and geochemistry of Surenavan mineral water were observed. There were presented the results of the processing which were compared with the seismicity of the region aiming to reveal the effects connected with geodynamic processes of the territory of Armenia.

Литература

1. *Игумнов В. А., Халатян Э. С.* – Геохимия. 1979. N 3. С. 368-370.
2. *Пашаян Р. А.* – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2008. Т. 51. N 3. С.39-45.
3. *Григорян С. В., Пашаян Р. А., Арутюнян Л.* – Доклады НАН РА. 2015. Т. 115. N 1. С. 50-59.
4. *Пашаян Р. А., Саргсян А. З.* – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2006. Т. 49. N 2. С. 30-36.
5. *Пашаян Р. А., Туманян Г. А.* – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 1997. Т. 50. N 1-2. С.74-80.
6. *Григорян Т. А., Пашаян Р. А.* В кн.: Сборник научных трудов конференции молодых ученых, посвященной 70-летию основания НАН РА. Ереван. Гитутюн. НАН РА. 2013. С. 208-213.
7. *Добровольский И. Г., Зубков С. И., Мячкин В. И.* В кн.: Моделирование предвестников землетрясений. М. Наука. 1980. С. 7-43.
8. *Дещеревский А. В., Сидорин А. Я.* Аддитивная и мультипликативная модели сезонных вариаций геофизических полей. ОИФЗ РАН. 1998. 24 с.

Одним из современных направлений органической химии является создание методов синтеза и изучение свойств биологически активных веществ (БАВ). Выбор аминокислот, в том числе ненасыщенных или α , β -дегидроаминокислот, в качестве основы для создания БАВ сделала сама природа [6]. Аминокислоты являются соединениями, входящими в состав белков и играющими важнейшую роль в биохимических процессах. В последнее время наблюдается новый подъем интереса к химической модификации известных лекарственных препаратов и вновь синтезируемых соединений природными аминокислотами. Присоединение фармакофорных групп к аминокислотам в ряде случаев позволяет получить препараты, обладающие высокой биологической активностью, а использование аминокислот в качестве транспортной функции способствует повышению избирательности действия и снижению токсичности лекарственных препаратов [6].

Вместе с тем все еще отсутствуют сведения относительно воздействия холиновых эфиров и амидов N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот на изменение показателей свободных ТЗ и Т4 в крови крыс в условиях патологии ЩЖ типа СНТ. Учитывая вышесказанное, нами в данных сериях экспериментальных исследований проведено иммуноферментное изучение изолированного воздействия сверхмалой дозы (СМД) 10^{-17} М 16 синтезированных производных холина, относящихся к холиновым эфирам N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот (ХЭА), на изменение референсных диапазонов концентрации (РДК) свободных ТГ: ТЗ и Т4 в сыворотке крови двенадцатимесечных крыс при экспериментальной дисфункции ЩЖ типа СНТ.

Материал и методы. В настоящем исследовании проведен синтез 16 ХЭА. Более подробно с методом синтеза ХЭА можно ознакомиться в исследовании [7]. Были получены следующие химические соединения:

- 1) холиновый эфир N-(4-бромбензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ1);
- 2) холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ2);
- 3) холиновый эфир N-(4-метоксибензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ3);
- 4) холиновый эфир N-(3-бромбензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ4);
- 5) холиновый эфир N-(2-хлорбензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ5);
- 6) холиновый эфир N-бензоил-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭ6);
- 7) холиновый эфир N-(2-бромбензоил)- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ7);
- 8) холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-3, 4 диоксиметил- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ8);
- 9) холиновый эфир N-бензоил-O-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭ9);
- 10) холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-O-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭ10);

- 11) холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-4-хлор- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ11);
- 12) холиновый эфир N-(4-бромбензоил)-О-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭ12);
- 13) холиновый эфир N-бензоил- α , β -дегидрофенилаланина (ХЭ13);
- 14) холиновый эфир N-(4-изобутоксibenзоил)-О-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭ14);
- 15) холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-О-метил- α , β -дегидротирозина (ХЭ15);
- 16) холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-О-изопропил- α , β -дегидротирозина (ХЭ16).

Биохимические исследования проведены на 210 двенадцатимесечных крысах-самцах (линии Вистар, массой 180 – 200 г). СНТ вызывали путём каждодневных внутримышечных инъекций подопытным крысам в течение 7 дней СМД 10^{-3} М препарата «Пропилтиоурацил».

СМД ХЭА 10^{-17} М и препарата «Пропилтиоурацил» 10^{-3} М были получены многостаканным методом С. Ганемана по методике, подробно описанной в работе [8]. Животные были разделены на 3 подопытные группы: 1) интактные животные – 20 шт.; 2) животные с СНТ, не получавшие каждодневные изолированные внутримышечные инъекции ХЭА – 30 шт.; 3) животные с СНТ, получавшие изолированные внутримышечные инъекции ХЭ1 – ХЭ16 в СМД 10^{-17} М в течение 14 дней – 160 шт. (по 10 шт. на каждый эфир). У всех 210 крыс были проведены декапитация и сбор крови. В сыворотке с помощью иммуноферментного метода анализа (ИФА) определялись РДК свободных Т3 и Т4 по алгоритму, подробно описанному в наших предыдущих статьях [9, 10]. Статистическую обработку проводили с использованием t-критерия Стьюдента.

Результаты и обсуждение. Анализ полученных данных показал, что у крыс 2-й подопытной группы происходит резкое снижение уровней свободного Т3 и свободного Т4 в сыворотке крови (по сравнению с интактными животными). Установленная закономерность свидетельствует о стойком наличии у крыс 2-й подопытной группы патологического состояния ЩЖ – СНТ. Как видно из данных, представленных в табл. 1, 2, изолированное применение в течение 2 послеоперационных недель СМД 10^{-17} М ХЭА способствует восстановлению практически до нормы показателей РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс в условиях СНТ.

Анализируя данные, представленные в табл. 1, можно сделать вывод о том, что в целом имеется положительный эффект от изолированного воздействия СМД 10^{-17} М ХЭА, наиболее выраженный при воздействии ХЭ6. Под действием вышеотмеченной СМД данного соединения наблюдается ярко выраженная нормализация РДК свободных ТГ в условиях тиреоидной патологии типа СНТ у крыс. Что же касается других использованных в данной серии исследований химических соединений, относящихся к ХЭА, то их применение в условиях СНТ оказывает менее выраженный протекторный эффект в отношении РДК свободных ТГ. Полученные дан-

Таблица 1

Референсные диапазоны концентрации свободных трийодтиронина и тироксина в сыворотке крови у крыс в норме (столбцы 1, 2) и при синдроме низкого трийодтиронина, до (столбцы 3, 4) и после (столбцы 6, 7) воздействия сверхмалой дозы 10^{-17} М ХЭ1 – ХЭ8

свТ3 (инт.) нг/мл	свТ4 (инт.) мкг/мл	свТ3 (СНТ) нг/мл	свТ4 (СНТ) мкг/мл	ХЭА	свТ3 (СНТ+ ХЭ) нг/мл	свТ4 (СНТ+ ХЭ) мкг/мл
2.4	4.5	0.6	1.1	ХЭ1	1.5	2.9
				ХЭ2	1.5	2.4
				ХЭ3	1.3	2.7
				ХЭ4	1.0	1.9
				ХЭ5	1.7	2.6
				ХЭ6	2.2	4.3
				ХЭ7	1.6	2.8
				ХЭ8	1.3	2.9

Примечание. свТ3 – свободный трийодтиронин, свТ4 – свободный тироксин, ХЭ – холиновые эфиры, ХЭА – холиновые эфиры N-замещённых- α , β -дегидро-аминокислот, инт. – интактные животные, СНТ – синдром низкого трийодтиронина.

ные подтверждают наши результаты относительно протекторной роли ХЭА при тиреоидных патологиях разной степени интенсивности [11, 12], а также электрофизиологические исследования в отношении изменения электрической активности одиночных интернейронов и мотонейронов СМ у крыс под действием указанных соединений [13, 14].

Таблица 2

Референсные диапазоны концентрации свободных трийодтиронина и тироксина в сыворотке крови у крыс в норме (столбцы 1, 2) и при синдроме низкого трийодтиронина, до (столбцы 3, 4) и после (столбцы 6, 7) воздействия сверхмалой дозы 10^{-17} М ХЭ9 – ХЭ16

свТ3 (инт.) нг/мл	свТ4 (инт.) мкг/мл	свТ3 (СНТ) нг/мл	свТ4 (СНТ) мкг/мл	ХЭА	свТ3 (СНТ+ ХЭ) нг/мл	свТ4 (СНТ+ ХЭ) мкг/мл
2.4	4.5	0.6	1.1	ХЭ9	2.2	4.4
				ХЭ10	2.0	4.2
				ХЭ11	1.2	2.3
				ХЭ12	2.1	4.3
				ХЭ13	1.3	2.0
				ХЭ14	2.3	4.2
				ХЭ15	2.3	4.1
				ХЭ16	2.5	4.5

Примечание. Обозначения в таблице те же, что и в табл 1.

В табл. 2 представлены результаты экспериментов, иллюстрирующие корректирующие особенности воздействия СМД 10^{-17} М других синтезированных ХЭА в условиях СНТ. В данной группе БАВ наибольшей восстановительной активностью в отношении РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс в условиях СНТ обладают СМД 10^{-17} М холиновых эфиров дегидротирозина, в частности ХЭ9, ХЭ10, ХЭ12, ХЭ14, ХЭ15. Наивысшим протекторным действием в данном аспекте обладает ХЭ16.

Подводя итоги проведенных серий исследований, можно прийти к заключению, что в условиях тиреоидной патологии типа СНТ наибольшим восстановительным действием в отношении РДК свободных ТГ в сыворотке крови крыс обладают холиновые эфиры дегидротирозина в СМД 10^{-17} М, что в дальнейшем может служить предпосылкой для создания на их основе лекарственных препаратов с целью терапии специфического заболевания ЩЖ типа СНТ.

Научно-технологический центр органической
и фармацевтической химии НАН РА

Член-корреспондент НАН РА В. О. Топузян, Т. С. Хачатрян

Коррекция синдрома низкого трийодтиронина у крыс посредством холиновых эфиров N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот

Обсуждается вопрос изолированного применения холиновых эфиров N-замещённых- α , β -дегидроаминокислот у крыс в условиях синдрома низкого трийодтиронина. Полученные результаты свидетельствуют о протекторном эффекте данных химических соединений в процессах изменения концентрации свободных тиреоидных гормонов в сыворотке крови крыс при наличии синдрома низкого трийодтиронина.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Օ. Թոփուզյան, Տ. Ս. Խաչատրյան

Ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի շտկումը առնետների մոտ N-տեղակալված- α , β -դեհիդրոամինոթթուների խոլինի էթերի միջոցով

Քննարկվել է N-տեղակալված- α , β -դեհիդրոամինոթթուների խոլինի էթերի կիրառումը առնետների մոտ ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի պայմաններում: Ստացված արդյունքները վկայում են տվյալ քիմիական միացությունների պաշտպանիչ էֆֆեկտի մասին ազատ թիրեոիդ հորմոնների բաղադրության վրա առնետների արյան շիճուկում ցածր տրիյոդթիրոնինի սինդրոմի առկայության դեպքում:

Corresponding member of NAS RA V. O. Topuzyan, T. S. Khachatryan

N-Substituted- α , β -Dehydroaminoacids Choline Ethers in Low Triiodothyronine Syndrome in Rats

The question of the isolated application of N-substituted- α , β -dehydroaminoacids choline ethers in rats in the conditions of a syndrome of low triiodothyronine is discussed in the series of experiments. The results show the protector effect of the yielded

chemical substances in processes of a concentration change of the free thyroid hormones in rats blood serum in the presence of a syndrome a low triiodthyronine.

Литература

1. Киприян Т. К., Топузян В. О., Карапетян И. Р., Хачатрян Т. С. – ДНАН РА, 2009. т. 109. № 2. С. 183 – 188.
2. Левит Г. Л., Радина Л. Б., Краснов В. П. – Хим. фарм. ж. 1995. Т. 29. № 8. С. 5 – 18.
3. Мнджоян О. Л., Топузян В. О. – Успехи химии. 1981. Т. 10. № 12. С. 2198 – 2211.
4. Никитин С. А. Аналитическая гомеопатия. Курс лекций по теории и практике применения гомеопатических средств. М. Высшая школа, 2000 С. 1 – 72.
5. Ткачук В. А. – Соросовский образовательный журнал. 1998. № 6. С. 5 – 10.
6. Топузян В. О. – Химический журнал Армении. 2007. Т. 60. № 4. С. 731 – 748.
7. Хачатрян Т. С. – Современные научные исследования и инновации. – Октябрь, 2012. [Эл. ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2012/10/17937>.
8. Хачатрян Т. С., Авакян А. Э., Топузян В. О. – Современные научные исследования и инновации. Август. 2012. [Электронный ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2012/08/16439>.
9. Хачатрян Т. С., Топузян В. О. – ДНАН РА. 2013. Т. 113. № 3. С. 290 – 294.
10. Хачатрян Т. С., Топузян В. О. – ДНАН РА. 2013. Т. 113. № 1. С. 69 – 73.
11. Хачатрян Т. С., Топузян В. О., Карапетян И. Р., Арутюнян Э. Ю., Киприян Т. К. – Биолог. журн. Армении. 2009. Т. 61. № 2. С. 53 – 56.
12. Широкова В. И., Голоденко В. И., Демин В. Ф. – Педиатрия. Журнал им. Г.Н. Сперанского. 2005. № 6. С. 68 – 72.
13. Annis G. S., Eley D. D. – Biochem J. 1953. V. 53. № 1. P. 34 – 36.
14. Grigoryan H. A., Hambardzumyan A. A., Mkrtchyan M. V., Topuzyan V. O., Halebyan G. P., Asatryan R. S. – Chem. Biol. Interact. 2008. 171(1). P. 108 – 116.
15. Wémeau J. L., Lefebvre J., Linquette M. – Nouv. Presse Med. 1979. V. 8. № 6. P. 415 – 419.

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՒՏԴ 576.8

Լ. Հ. Հակոբյան¹, Ն. Մ. Հարությունյան², Կ. Վ. Հարությունյան¹,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Հ. Թռչունյան³

**Ավանդական հայկական կաթնամթերքներ՝ մածունի,
յուղորդի մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունները**

(Ներկայացված է 21/XII 2015)

Բանալի բառեր՝ *մածուն, յուղորդ, կաթնաթթվային բակտերիաներ, պեստիցիդներ, հակաբիոտիկներ, նիտրատներ, սորբինաթթու, ադիեզիա:*

Մածունն ամենահին կաթնամթերքներից մեկն է, որը շատ են օգտագործում Հայաստանում: Ըստ տեղեկությունների՝ Հայաստանից զաղթած հայերն իրենց հետ մածունը տարել են Եվրոպա, Ամերիկա և տարածել տեղի բնակչության մեջ: Եվրոպական և ասիական մի շարք երկրներում օգտագործում են մածունին շատ նման, բայց իրենց համով ու հոտով մածունից տարբերվող այլ թթու կաթնամթերքներ, օրինակ՝ Ռուսաստանում՝ պրոստոկվաշան, Բուլղարիայում՝ յուղորդը, Միջին Ասիայում՝ կումիսը, Հյուսիսային Կովկասում՝ կեֆիրը, Ալժիրում, Միլիայում՝ լաբան և այլն:

Մածունն իր քիմիական կազմով լիարժեք սննդանյութ է, այն պարունակում է մարդու օրգանիզմին անհրաժեշտ գրեթե բոլոր սննդանյութերը, իրարից տարբերվում են կաթի սպիտակուցների, յուղի և կաթնաշաքարի քանակներով, վիտամինների (A, B, C, D, E) պարունակությամբ [1]:

Պատմական ուսումնասիրություններ: Հայաստանը կաթնամթերքի արտադրության ավանդական տարածաշրջան է: Հայ ժողովրդի սննդակարգում կաթնամթերքը միշտ ունեցել է կարևոր նշանակություն:

յուն: Հայերի արյունակից-ժառանգական նախնիներին՝ ուրարտացիներին, արդեն հայտնի են եղել կաթնամթերքների պատրաստման եղանակները [2]:

Վաղ ժամանակներից Հայաստանը հռչակված էր կաթնամթերքի առատությամբ և բազմազանությամբ, ինչի մասին գրել է Հայաստանում հունական արշավանքի մասնակից Քսենոփոնը իր «Անաբասիս» գրքում (V-IV դդ. մ.թ.ա.) [3]: Մեր դարաշրջանի սկզբում Ստրաբոնի՝ Հայաստանին նվիրված հիշատակագրություններում խոսվում է այն մասին, որ հնում հայերն օգտագործում էին տարբեր կաթնամթերքներ: Այդ նույնպես հաստատվում է Աստրեատանի թագավոր Սարգոնի (714 մ.թ.ա.) սեպագիր արձանագրություններում: Հույն պատմիչ Հերոդոտոսի (480-420 թթ. մ.թ.ա.) հավաստմամբ հայ վաճառականներն առագաստանավերով նավարկում էին Բաբելոն, Խորեզմ, Հնդկաստան, Չինաստան և այլ երկրներ, բեռնում էին հալած յուղ, պանիր, քամած մածուն, չորացրած թան (չորթան) [4-6]:

Կաթնամթերքների վաճառքն էլ ավելի ընդլայնվեց, երբ կազմավորվեցին այնպիսի կենտրոններ, ինչպիսիք էին Հին Ջուղան և Նախիջևանը (Հայաստան): Նրանք արտահանում էին կաթնամթերքը Հոլանդիա, Իտալիա, Միջին և Մերձավոր Արևելք, ինչպես նաև Գիևյան Ռուսիա, ինչի մասին վկայում են Ուրարտուի միջնաբերդի (VII դ. մ.թ.ա.), ինչպես նաև Թեյշեբահինիի՝ Կարմիր բլուրի, Դվինի կամ Վոլգա գետի մերձակայքում հայ առևտրականների բնակավայրերի ավերակ-փլատակների պեղումները, ինչպես նաև հայ առևտրականներին Վլադիմիր Մոնոմախի կողմից տրված պատվոգիրը [2, 7, 8]:

Մեր ժողովուրդը վաղնջական ժամանակներից մածունից պատրաստել է կաթնաթթվային կարագ՝ **մածնակարագ**: Ավելի վաղ ժամանակներում այն պատրաստել են նաև յուղորդից (այս բառը հայերեն ծագում ունի, նշանակում է յուղի նախորդ. բառը, բաղկացած է երկու մասնիկից՝ յուղ և որդ, «որդ» ածանցը ցույց է տալիս պատկանելություն [9]): Այս մթերքը ստանալու համար կաթի սերը (յուղը) հավաքում էին կճուճների մեջ, որտեղ տեղի էր ունենում բնական մակարդում, այն հարում էին և ստանում կարագ: Շատ հեռավոր անցյալում Հայկական լեռնաշխարհի միջին և լեռնային բարձրավանդակների ամառային արոտավայրերում **կարագ** ստանում էին յուղորդից: Այս մթերքը ստանալու համար կաթի սերուցքը (արածան) հավաքում էին կավե կճուճների մեջ: Արոտավայրերից իջնելուց հետո խնոցիներով հարում էին և ստանում կարագ [10]: Հետագայում կարագ ստանում էին մածունից:

Մածուն բառն ունի հնդեվրոպական ծագում, առաջացել է «mag» բառից, որի գ-ն հնչյունափոխվել, հմայնացվել է ծ-ի: Հետաքրքիր է նշել, որ մածուն անվանումն առաջացել է հայերեն մածունել բառից, այսին-

քըն՝ սարքել՝ մածուկ կպցնել, որը թարգմանաբար նշանակում է մակարդել, մերել [11]: Հետագայում մածունը ոչ էական փոփոխություններով փոխ են առել վրացիները՝ մածոնի, թուրքերը՝ մացուն, հույները՝ մացուլ, անգլիախոս ժողովուրդները՝ մագոլ և այլ անվանումներով [1]:

Տեխնոլոգիական ուսումնասիրություններ: Մածունը հայերի ամենօրյա սնունդն է: Այն պատրաստում են կովի, գոմեշի, ոչխարի կաթով կամ նրանց խառնուրդներով: Գոմեշի և ոչխարի կաթով պատրաստված մածունն ունի պինդ բաղադրություն: Ոչխարի կաթով պատրաստվածը սովորաբար լինում է ծորող: Մածունի քիմիական կազմությունը հիմնականում կախված է կաթի քիմիական բաղադրիչներից: Կաթը եռացնում են, սառեցնում մինչև 35-40°C, մերում բնական 1,0 % մակարդով, փաթաթում և պահում տաք տեղում 4-5 ժամ՝ մինչև մակարդի առաջանալը, որից հետո դնում են սառնարանում, որպեսզի սառչի և պնդանա: Այն օգտագործում են բնական վիճակում, նրանից պատրաստում են նաև տարբեր կերակրատեսակներ, այդ թվում՝ թանապուր, մածնասպաս, ամռանը՝ մածնաջուր՝ թան: Մածունը լուծում են ջրում, ավելացնում մի քիչ աղ և օգտագործում որպես թարմացնող ըմպելիք:

Քամած մածուն ստանալու և երկար պահպանելու համար մածունը քամում են խիտ գործվածքից կարված պարկով: Քամած մածունը հարմար է հեռու վայրեր տեղափոխելու, բուժիչ նպատակներով և այլ կաթնամթերքներ ստանալու համար: **Պահածոյացված մածուն՝ գոնաց մածուն՝ քամած մածունը** 3-4 օր պարկով դնում են ծանր առարկաների տակ, լավ ջրազրկում, հետո ավելացնում կարագ, լավ տրորում, լցնում կավե կճուճների մեջ, պահում սառը տեղ: Բացում են ձմռանը, ուտում են այդպես կամ ավելացնում են ջուր, խառնում, հարում են՝ կարագ ստանալու համար: **Մածունի մածուկ** ստանալու համար աշնանը մածունը երեք-չորս օր քամում են, լավ ջրազրկում, ապա լցնում կավե ամանների մեջ և լավ սեղմում, վերևից բարակ շերտով ավելացնում են հալած յուղ: Պահում են սառը տեղում: Օգտագործելու համար սովորաբար բացում են ձմռանը:

Տոմաստը ստանալու համար նշված եղանակով ստացված մածուկին խառնում են 1:1 կաթ, 1:2-ի հարաբերությամբ մածնակարագ, սեղմում կավե կճուճների մեջ, պահում սառը տեղում՝ որպես պահածոյացված մածուն: **Հովկուլ** ստանալու համար պատրաստում են այնպես, ինչպես տոմաստը, մի տարբերությամբ միայն, որ մածնակարագի փոխարեն օգտագործում են թարմ շոռ: **Մածնակարագ** ստանալու համար սկզբում կովի կաթից պատրաստում են մածուն: Վաղ անցյալում այն հարում էին կաշվե տիկերով, հետագայում՝ կավե խնոցիներով:

Մածունը և յուղուրդը՝ որպես բարձր սննդարար, օգտակար, բուժիչ կաթնամթերք, գրավել է ինչպես հայրենական, այնպես էլ արտասահմանյան հետազոտողների ուշադրությունը:

Կաթնամթերքների բուժիչ օգտակար հատկությունների մասին գրել են Մեսրոպ Մաշտոցը, 5-րդ կաթողիկոս Հովհաննես Մանդակունին [6], պատմիչ Հերոդոտոսը (480-420 թթ. մ.թ.ա.), Համամ Արևելցին, Ջախկեցին (IX դ.), Գրիգոր Մագիստրոսը (X-XI դդ.), միջնադարյան բժիշկ-գիտնականներ Մխիթար Հերացին, Գրիգորիսը (XII-XIII դդ.), Ամիրդովլաթ Ամասիացին և ուրիշներ [13]: Ամիրդովլաթ Ամասիացին իր «Անգիտաց անպետ» գրքում մանրամասն նկարագրել է մածունը. «Այն հայերեն անվանում են թթու կաթ, որն օգնում է դիզենտերիայի, ինչպես նաև թոքախտի, լյարդի բորբոքային հիվանդությունների ժամանակ, վերացնում է թույների ազդեցությունը: Եթե խառնենք այն մեղրի հետ և քսենք երեխաների բերանի թարախոտ վերքերին, խոցերին, ապա կօգնի: Իսկ եթե ուտենք թթու կաթը կամ մածունը, ապա կօգնի ուժեղ բնավորություն ունեցող մարդկանց և կուժեղացնի սեռական հակումը: Կովի մածունի շիճուկը և նրա թթու կաթն օգտակար են ստամոքսի համար, կանգնեցնում են լուծը և ախորժակ են բացում, ինչպես նաև չափավորում են տապը և մարմինը դարձնում լավ սնած, պարարտ»(թարգմանված է բառացի) [12]:

Հետազայում բազմաթիվ գիտնականներ ուսումնասիրել են մածունի կենսաբանական հատկությունները, միկրոբիոտան (մանրէակազմը), մեկուսացրել, տարբերակել կաթնաթթվային բակտերիաների (ԿԹԲ) խմբակցություններ, սակայն մաքուր մանրէային կուլտուրաներով բարձրորակ մածուն ստանալու համար հաստատուն բակտերիայի մակարդ՝ մերան չեն ստացել [14-17]:

Բուժիչ նշանակությունը: Մածունն ունի կանխարգելիչ և բուժիչ նշանակություն, օգտագործել են դարեր շարունակ աղիքային հիվանդությունները բուժելիս՝ որպես բնական էվոլյուցիայի ընթացքում ընտրված «պրոբիոտիկ», որը մաքրում է օրգանիզմը, բուժում է հարբեցողության հետևանքները, վերացնում բերանի խոռոչի տհաճ հոտը, հարթեցնում դեմքի մաշկի կնճիռները, բարձրացնում է օրգանիզմի ինքնազգացողությունը, մաքրում օրգանիզմը թունավոր նյութերից, կարգավորում օրգանիզմի նյութափոխանակությունը, պակասեցնում արյան մեջ խոլեստերինի քանակությունը, կարգավորում կոլիտը, աղիների դիսֆունկցիան, չեզոքացնում դեղերի, հատկապես հակաբիոտիկների, հորմոնային պատրաստուկների օգտագործման հետևանքները և թունավոր նյութերի՝ արյան մեջ ներծծման ազդեցությունը:

Մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունների ուսումնասիրումը: Կաթի մեջ կարող են թափանցել տարբեր արգելակային նյութեր: Դրանցից են.

- **պետսիցիդները**, թունաքիմիկատներ, որոնք ոչնչացնում են բույսերի վրա եղած ԿԹԲ-ները, որոնք կարևոր դեր են կատարում մարդու և կենդանիների մարսողության, բանջարեղենի թթվեցման գործընթացներում, ազդում կաթնամթերքների՝ պանիրների, սերուցքի, մածունի ԿԹԲ-ների քանակի և որակի վրա՝ կաթնաթթվի սինթեզման, կաթի մակարդման, օրգանոլեպտիկ (համային) հատկությունների վրա և այլն [18],

- **հակաբիոտիկները**, որոնք օգտագործում են մարդկանց և կենդանիների վարակիչ հիվանդությունները բուժելիս,

- **պահպանիչները**, որոնք կիրառվում են կաթնամթերքի օգտագործման ժամկետները երկարացնելու նպատակով: Եթե պահպանիչները՝ սորբինաթթուն և նրա Na-ական, K-ական, Ca-ական աղերը, ինչպես նաև ծծմբային գազը, բենզոյաթթուն օգտագործում են մրգային յուղուրդների, չրերի չորացման ընթացքում, ապա արգելվում է երեխաների համար նախատեսված կաթնամթերքներին, մրգափայտերին դրանց հավելումը [19],

- **նիտրատները**, որոնք անցնում են կաթի մեջ, իսկ մարդու օրգանիզմ թափանցելուց հետո ադիներում վերականգնվում են՝ **նիտրատներ → նիտրիտներ → նիտրոզամիններ** [20]: Նիտրոզամինները քաղցկեղածին նյութեր են [21]: Նիտրատներն օգտագործում են պանրի արտադրության մեջ՝ արտասահմանում՝ 20 գ, իսկ Ռուսաստանում՝ 30 գ 100լ կաթի մեջ: Օգտագործում են նաև բանջարեղենի և մսամթերքի մշակման մեջ՝ ախտածին մանրէների զարգացումը կանխելու համար:

Աշխատանքի նպատակներից են մածունի մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունների ուսումնասիրումն ու կենսաբանական բարձր հատկություններով օժտված ԿԹԲ-ների անջատումը՝ կաթնարտադրության և բժշկության մեջ օգտագործելու համար:

Նյութը և մեթոդները: Մածունի նմուշներ ենք վերցրել Հայաստանի բարձրադիր՝ Արագածոտն, Շիրակ, Գավառ մարզերի անհատ տնտեսություններից և նույն մարզերի արոտավայրերի մածուն արտադրողներից՝ գարուն, ամառ, աշուն ժամանակահատվածներում: Մածունից ԿԹԲ-ների անջատման համար օգտագործել ենք հեղուկ և պինդ ագարային սննդամիջավայրեր [22]:

Ուսումնասիրել ենք տարբեր կոնցենտրացիաների պետսիցիդների, հակաբիոտիկների և պահպանիչների (աղ. 1) ազդեցությունն անջատված ԿԹԲ-ների դիմացկունության վրա: Նշված նյութերը նախապես լուծել ենք թորած ջրի մեջ և տեղափոխել մանրէազերծ կաթերի մեջ: Ցանել ենք ԿԹԲ-ների շտամներով, ֆերմենտացրել ԿԹԲ-ների զարգացման նպաստավոր ջերմաստիճաններում 1-10 օրվա ընթացքում: Այնուհետև որոշել ենք կաթի մակարդման ժամանակը (օրերը),

մակարդների թթվությունները՝ °Թ-ով (Թյոնների) [22]: Չափել ենք մանրէների չափսերը, հաշվել բջիջների քանակը և այլն: Որոշել ենք մակարդված կաթի մանրէների ադիեզիվ հատկությունները՝ օգտագործելով մարդու, ցուլի և ոչխարի արյունները [23]: Համեմատական կարգով ուսումնասիրել ենք նաև *Lactobacillus acidophilus* Ex. 317/402 «Նարինե» շտամը [24]:

Բերված են միջին արդյունքները, որոնց սխալի արժեքը չի գերազանցում 5 %-ը:

Հետազոտության արդյունքները և քննարկումը: Մածունի կաթնաթթվային բակտերիաների մանրէաբանական հատկությունները: Հայաստանի տարբեր էկոլոգիական խորշերից վերցրել ենք մածունի 269 նմուշներ, անջատել ԿԹԲ-ների ձողաձև և գնդաձև 270 շտամներ, որոնցից ընտրել ենք 70-ը և նույնականացրել:

Պարզվել է, որ մածունի ձողաձև և գնդաձև ԿԹԲ-ների հարաբերությունները 1:2 է: Մակարդումից 10 ժամ հետո այդ հարաբերությունը փոխվում է. ձողաձև բակտերիաները 3-4 անգամ ավելի են գնդաձևների համեմատությամբ: Հայաստանի հյուսիսային և միջին գոտիների վերցրած մածունի նմուշներում գերակշռում են գնդաձև, իսկ հարավային տաք շրջանների նմուշներում՝ ձողաձև ԿԹԲ-ները: Շաքարասնկերը հանդիպում են մածունի բոլոր նմուշներում: Մակայն նոր մերված, թարմ մածունի մեջ այն չի հայտնաբերվում: Շաքարասնկերի քանակը շատ է 2-3 օրական մածունի մեջ: Շաքարասնկերն արագ զարգանում են 2-3 օրվա ընթացքում: Մածունի թթվությունը տարբեր ժամերի տարբեր է: 130-140°Թ թթվությամբ մածունն ունի պինդ բաղադրություն, դուրեկան համ ու հաճելի բուրմունք: Մինչև 180-240°Թ թթվության բարձրացման ժամանակ օրգանոլեպտիկ (համային) հատկություններն անբավարար են: 240-350°Թ-ով մածունի մեջ համարյա չկան գնդաձև ԿԹԲ-ներ: Հայաստանի տարբեր էկոլոգիական պայմաններից վերցրած մածունների մեջ ԿԹԲ-ների տեսակային բացահայտ տարբերություններ չկան, քանի որ բոլոր արտադրողները, հատկապես գործարանային, մերաններ են վերցնում գյուղական բարձրադիր վայրերից. բնությունը համեմատաբար մաքուր է, կաթի մեջ համարյա չկան արգելակային նյութեր՝ պեստիցիդներ կամ պարարտանյութեր, որոնք բացասաբար են անդրադառնում մթերքի որակի և միկրոբիոտայի վրա:

Պարզվել է, որ մածունն ունի շատ հարուստ միկրոբիոտա՝ գնդաձև և ձողաձև ԿԹԲ-ներ, լակտոզ խմորող և չխմորող շաքարասնկեր, քացախաթթվային բակտերիաներ: Բայց մինչև օրս, կազմի այս բազմազանությունից բացի, պարզված չէ, թե ինչպիսի քանակական հարաբերությունների մեջ են վերը նշված մանրէները՝ կախված էկոլոգիական պայմաններից, տարվա եղանակներից, տարբեր մերանների բազմազանությունից և այլ հանգամանքներից[17]:

Մածունը ԿԹԲ-ների և շաքարասնկերի տարբեր տեսակների շտեմարան է, որը ձևավորվել է դարերի էվոլյուցիայի ընթացքում, ընտրվել և պահպանվել են լավագույն ԿԹԲ-ների տեսակները: Երբ միացրել ենք այդ անջատված ԿԹԲ-ների տարբեր տեսակները և փորձել ենք մածուն ստանալ, չնայած նրան, որ ստացել ենք համով, հոտով պինդ մակարդ «մածուն», սակայն այն խիստ տարբերվել է գյուղական մածունից: Այդ պատճառով էլ կաթ վերամշակող արտադրությունները ստիպված են հաճախակի մերան վերցնել գյուղական բարձրադիր վայրերից: Այնուհետև մածունի բազմաթիվ նմուշները մշակած տեխնոլոգիաներով [25-26] չորացրել ենք: Այդ մակարդ մերանները վերականգնելուց հետո իրենց մանրէաբանական և կենսաքիմիական հատկություններով չեն տարբերվել հեղուկ բնական մածունից, ուստի առաջարկել ենք այդ ձևով ստացված մածունի չոր մերաններն օգտագործել կաթնարտադրության մեջ՝ հեռու վայրեր տեղափոխելու և երկարատև պահպանելու համար:

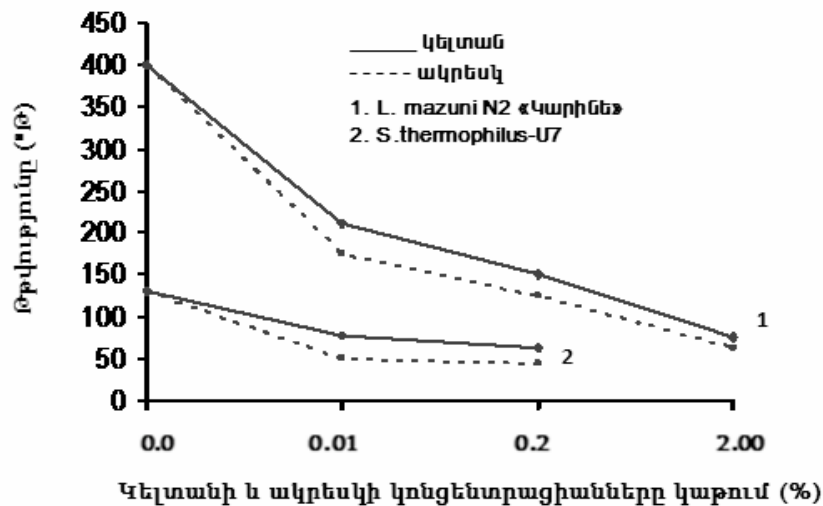
Մածունից անջատվել են ԿԹԲ-ների կենսաբանական, արտադրական բարձր հատկություններով օժտված չնկարագրված նոր շտամներ, որոնց համար ստացվել են հեղինակային վկայականներ և արտոնագրեր: Այդ շտամներն ավանդադրված են ՀՀ ԳԱԱ «Հայկենսատեխնոլոգիա» ԳԱԿ-ի Մանրէների ավանդադրման կենտրոնում՝ 9603-9609 համարների ներքո [27]:

Քիմիական արգելակիչների ազդեցությունը կաթնաթթվային բակտերիաների դիմացկունության և ադիեզիվ հատկությունների վրա: Փորձարկված բոլոր արգելակիչներն ազդել են մածունի և մածունից անջատված ԿԹԲ-ների դիմացկունության և ադիեզիվ հատկությունների վրա (աղ. 1): Ընդ որում մածունն օժտված է արգելակիչների նկատմամբ ավելի բարձր ադիեզիվ հատկություններով և դիմացկունությամբ, քան մածունից անջատված ԿԹԲ-ները:

ա) Քլորոֆանական պեստիցիդների ազդեցությունը: Պարզվել է, որ կելտանի ազդեցության հետևանքով ընկնում է ԿԹԲ-ների՝ թթու արտադրելու ունակությունը (նկ. 1): Այսպես, *L. acidophilus*-ի 317/402 «Նարինե» շտամն առանց կելտանի կաթի մեջ առաջացրել է 450⁰Թ թթվություն, մինչդեռ կելտանի 0,5 % կոնցենտրացիայի դեպքում՝ 72⁰Թ, իսկ 1,0 %-ի դեպքում՝ 48⁰Թ (կաթը չի մակարդվել): Միաժամանակ երկարել է կաթը մակարդելու տևողությունը՝ 6-7 ժամից մինչև 200 ժամ (արդյունքները ցուցադրված չեն):

Բացահայտվել է, որ ԿԹԲ-ների տարբեր տեսակներ տարբեր դիմացկունություն ունեն կրոտիլինի նկատմամբ (տե՛ս աղ. 1): Ձողաձև ԿԹԲ-ները դիմացել են կրոտիլինի մինչև 1,0 %-ին, իսկ ստրեպտոկոկերից ոչ մի շտամ չի դիմացել նշված կոնցենտրացիային: Կրոտիլինը որոշակի ազդեցություն է թողել ԿԹԲ-ների բջիջների կիսման արա-

գության վրա (արդյունքները ցուցադրված չեն): Այսպես, կրոտիլինի 0,5-1,0% կոնցենտրացիաների դեպքում ստրեպտոկոկերի մեծությունը 0,6-1,0-ից հասել է մինչև 0,8-2,0 մկմ-ի և շղթայում 6-10 բջիջներից հասել է 15-30 բջիջների, իսկ ձողաձև բակտերիաների մեծությունը 2-20x0,9-ից հասել է 4-80x0,8 մկմ-ի:

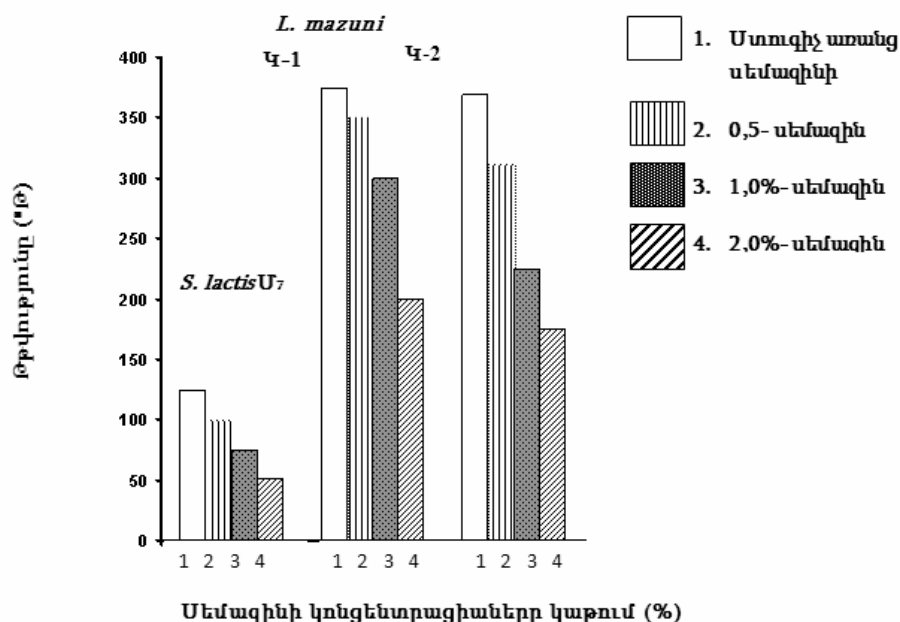


Նկ. 1. Կլետանի և ալրեսկի ազդեցությունը մածուկում կաթնաթթվային բակտերիաների՝ թթու առաջացնելու ունակությունների վրա

Կլետանի, ալրեսկի համեմատաբար ցածր կոնցենտրացիաները՝ 0,01-0,2%, նույնպես ունեցել են ճնշող ազդեցություն ԿԹԲ-ների զարգացման վրա: *L. bulgaricus* subsp. *mazuni* N2 «Կարինե» շտամն առանց կլետանի և ալրեսկի կաթի մեջ առաջացրել է 400°Թ թթվություն, մինչդեռ 0,01% կոնցենտրացիայի ժամանակ՝ 175-215°Թ, իսկ 0,2%-ի դեպքում՝ 64-74°Թ (տե՛ս նկ. 1): Ձողաձև ԿԹԲ-ները դիմացել են սեմագինի մինչև 2,0 % կոնցենտրացիային՝ առաջացնելով ալրեսկի, կլետանի և կրոտիլինի համեմատությամբ բարձր թթվություն՝ 175-185°Թ, 0,5-1,0% կոնցենտրացիաների դեպքում թթվությունը նույնպես բարձր է եղել՝ համապատասխանաբար՝ 308-350°Թ, 250-285°Թ (նկ. 2): Հեքսաքլորի տարբեր կոնցենտրացիաները տարբեր կերպ են ազդել ձողաձև և գնդաձև ԿԹԲ-ների զարգացման վրա: Ձողաձև ԿԹԲ-ների շտամները գնդաձևների համեմատությամբ ավելի դիմացկուն են: Այսպես, *L. acidophilus*-ի 317/402 «Նարինե», *L. mazuni*-ի «Կարինե» շտամները դիմացել են հեքսաքլորի 1,0% կոնցենտրացիային, իսկ *S. thermophilus* -ի U7 շտամը՝ մինչև 0,4%-ին (տե՛ս աղ. 1):

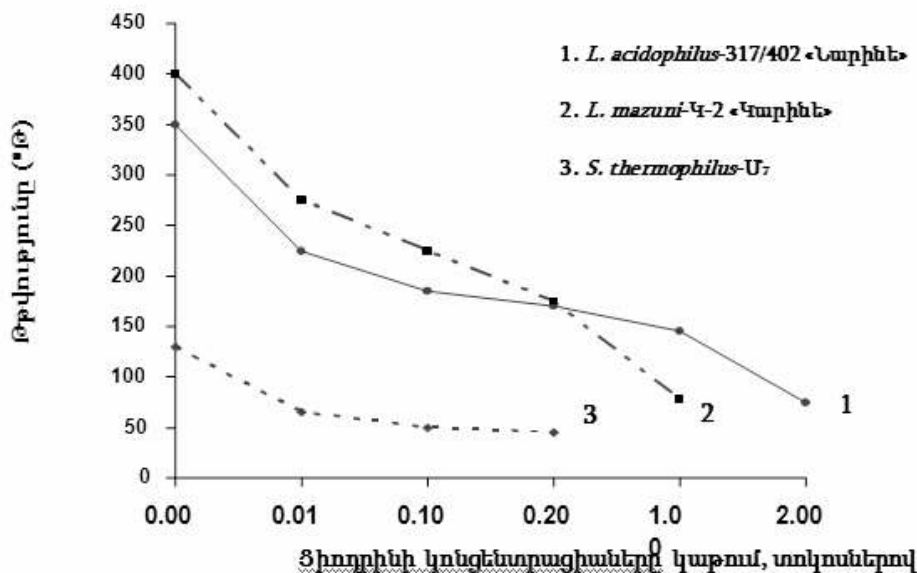
բ) Ֆոսֆորօրգանական պեստիցիդների ազդեցությունը: Ուսումնասիրել ենք ԿԹԲ-ների զարգացման վրա ռոզորի, կարբաֆոսի, ցիո-

դրինի և անտիոյի ազդեցությունը: Ցիտոդրինի (նկ. 3) և անտիոյի ազդեցության հետևանքով ԿԹԲ-ներում ընկնում է թթու արտադրելու ունակությունը: Այսպես, *L. mazuni* Կ-2 «Կարինե» շտամն առանց ցիտոդրինի կաթի մեջ առաջացրել է մինչև 400⁰Թ թթվություն, ցիտոդրինի 0,01-1,0%-ի ժամանակ՝ 250-265⁰Թ: Փորձերը ցույց են տվել, որ ռոգորի և կարբաֆոսի համեմատաբար ցածր կոնցենտրացիաները՝ 0,01-0,1%-ը, ԿԹԲ-ների զարգացման վրա նույնպես ունեցել են ճնշող ազդեցություն: *L. acidophilus*-ի 317/402 «Նարինե» շտամն առանց ռոգորի և կարբաֆոսի կաթի մեջ առաջացրել է 450⁰Թ թթվություն, մինչդեռ այդ նյութերի 0,01% կոնցենտրացիան՝ 220-250⁰Թ, 0,1%-ը՝ 180-195⁰Թ (արդյունքները ցուցադրված չեն): Երկարել է կաթի մակարդման տևողությունը՝ 6-7 ժամից հասնելով մինչև 120-200 ժամի: Փորձարկված նյութերը որոշակի ազդեցություն են թողնում նաև ԿԹԲ-ների բջիջների չափսերի վրա (արդյունքները ցուցադրված չեն): Այսպես, ռոգորի և կարբաֆոսի 0,01-0,1% կոնցենտրացիաների դեպքում ձողաձև ԿԹԲ-ների բջիջների մեծությունը 2-4x0,9 մկմ-ից հասել է մինչև 4-50x0,9 մկմ-ի: ԿԹԲ-ների գնդաձև և ձողաձև տեսակները տարբեր դիմացկունություն ունեն ռոգորի և կարբաֆոսի նկատմամբ: ԿԹԲ-ների ձողաձև շտամները դիմացել են ռոգորի և կարբաֆոսի մինչև 1,0%, իսկ ստրեպտոկոկերը՝ 0,1-0,2% կոնցենտրացիային:



Նկ. 2. Սեմագինի ազդեցությունը մածուկում կաթնաթթվային բակտերիաների թթու առաջացնելու ունակությունների վրա

Սորբինաթթվի և հակաբիոտիկների ազդեցությունը: Պարզվել է, որ ստրեպտոկոկերը լրիվ ճնշվում են սորբինաթթվի 0.7%, իսկ ձողաձևները՝ 1.0-1.5%-ի ժամանակ (տե՛ս աղ. 1): Սորբինաթթվի բարձր՝ 1.0-1.5% կոնցենտրացիաներն ազդում են նաև մածնի օրգանոլեպտիկ հատկությունների վրա: Երկարում է կաթի մակարդման տևողությունը՝ 7-9 ժամից հասնելով մինչև 20-24 ժամի, ընկնում է կաթնաթթու սինթեզելու ակտիվությունը, գնդաձև՝ 120⁰Թ թթվությունից սինթեզում է մինչև 50-65⁰Թ, իսկ ձողաձևները՝ 140⁰-ից մինչև 75⁰Թ (արդյունքները ցուցադրված չեն): Համանման տվյալներ են ստացվել նաև հակաբիոտիկների ազդեցության արդյունքում. ստրեպտոկոկերը դիմանում են հակաբիոտիկներին մինչև 0,001%, իսկ ձողաձևները՝ 0,0025-0,003%-ին (տե՛ս աղ. 1):



Նկ. 3. Ցիտոդինի ազդեցությունը մածոնում կաթնաթթվային բակտերիաների թթու առաջացնելու ունակության վրա

Նիտրատների ազդեցությունը: Նիտրատներն ազդում են ԿԹԲ-ների մի շարք կենսաբանական հատկությունների վրա. ինչքան շատ է կաթի մեջ նրանց պարունակությունը, այնքան խորն են ԿԹԲ-ների հատկությունների փոփոխությունները: Նրանց ազդեցությամբ երկարում է կաթի մակարդման տևողությունը, ընկնում է թթվառաջացումը և այլն: Նիտրատների նկատմամբ ԿԹԲ-ների զգայունությունը տարբեր է: Կոկերը ճնշվում են նիտրատների 0,7%, ձողաձևները՝ 1,0-1,5%-ի դեպքում (տե՛ս աղ. 1):

Սորբինաթթվի, հակաբիոտիկների, նիտրատների բարձր խտությունների դեպքում ԿԹԲ-ներն ադիեզիվ հատկություններ չեն ցուցաբերում :

Մշակել և առաջարկել ենք ԿԹԲ-ների զարգացման վրա նիտրատների քաղցկեղածին ազդեցությունը չեզոքացնելու համար օգտագործել հատուկ ագիդոֆիլային բակտերիաներ և կիրառել կաթի մշակման որոշ տեխնոլոգիաներ [30]:

¹ ՀՀ ԳԱԱ «Հայկենսատեխնոլոգիա» գիտաարտադրական կենտրոն
e-mail: laurhakobyan@gmail.com

² Ա.Բ. Ալեքսանյանի անվան համաճարակաբանության, վիրուսաբանության և բժշկական մակաբուժաբանության ԳՀ ինստիտուտ

³ Երևանի պետական համալսարան

**Լ. Հ. Հակոբյան, Ն.Մ. Հարությունյան, Կ. Վ. Հարությունյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Հ. Թռչունյան**

**Ավանդական հայկական կաթնամթերքներ՝ մածունի, յուղորդի
մանրէաբանական և ադիեզիվ հատկությունները**

Ուսումնասիրվել են ազգային ավանդական մածունը և նրանից անջատված կաթնաթթվային բակտերիաների բազմազանությունն ու մանրէաբանական, կենսաքիմիական հատկությունները: Մածունից անջատվել են կենսաբանական բարձր հատկություններով օժտված շտամներ, որոնք արտոնագրվել են և ավանդադրված են մանրէների Հանրապետական ավանդադրման կենտրոնում: Մածունի միկրոբիոտան շատ հարուստ է, այն շտեմարան է էկոլոգիական պոտենցիալով և կարգաբանական բազմազանությամբ: Մածունը և մածունից անջատված, ընտրված կաթնաթթվային բակտերիաներն օժտված են գյուղատնտեսական, սննդի արդյունաբերության, բժշկության մեջ օգտագործվող թունաքիմիկատների, նիտրատների, պահպանիչների, հակաբիոտիկների բարձր խտությունների դիմացկունությամբ և ադեսամոքսային համակարգի էպիթելիալ շերտերում ամրանալու բարձր ադիեզիվ հատկություններով: Ազգային ավանդական մածունը և մածունից անջատված կաթնաթթվային բակտերիաները կենսաբանական, բուժիչ և ադիեզիվ հատկություններով չեն զիջում պրոբիոտիկ կաթնաթթվային բակտերիաներին:

**Л. Г. Акопян, Н. М. Арутюнян, К. В. Арутюнян,
член-корреспондент НАН РА А. А. Трчунян**

**Микробиологические и адгезивные свойства традиционных
армянских кисломолочных продуктов мацун и йогурт**

В микробиоте мацуна выявлено большое таксономическое разнообразие молочнокислых бактерий, изучены их микробиологические адгезивные свойства. Из мацуна выделены ценные по биологическим свойствам виды и штаммы, которые депонированы в Республиканском центре депонирования микробов и запатентованы. Микробиота мацуна очень богата, ее экологический потенциал очень высок. Мацун и отобранные молочнокислые бактерии обладают высокой устойчивостью

против больших концентраций ингибиторов: пестицидов, нитратов, консервантов, антибиотиков, используемых в сельском хозяйстве, пищевой промышленности, медицине; для них характерны высокие адгезивные свойства и способность прикреплению в желудочно-кишечном тракте. Выделенные из традиционного кисломолочного мацуна молочнокислые бактерии по своим биологическим, адгезивным и целебным свойствам не уступают пробиотическим молочнокислым бактериям.

**L. H. Hakobyan, N. A. Harutyunyan, K. V. Harutyunyan,
corresponding member of NAS of RA A. H. Trchounian**

Microbiological and Adhesive Properties of Armenian Traditional Fermented Milk Products, Matsun and Yogurt

Great taxonomic biodiversity and ecological potential of lactic acid bacteria have been revealed in microbiota of matsun. The study of microbiological and biochemical features of lactic acid bacteria isolated from matsun allowed obtaining and selection of valuable species and strains, which were deposited in the Armenian Microbial Depository Center (MDC) and patented. Matsun and selected lactic acid bacteria, isolated from matsun, possess tolerance to the inhibitors of high concentration: pesticides, nitrates, antimicrobial additives, antibiotics used in agriculture, food industry and medicine; they have high adhesive properties in gastrointestinal tract. Lactic acid bacteria, isolated from fermented product matsun, by their properties do not concede probiotic lactic acid bacteria.

Գրականություն

1. Փանոսյան Հ. Կ., Մածուն, ՀՍՍՀ ԳԱ հրատ., Երևան, 1965, 48 էջ:
2. Пиотровский Б. Б. История и культура Урарту VIII-VI вв. Ереван. 1944. 231 с.
3. Քենդոփոնտ, Անաբախի, Երևան, ՀՍՍՀ ԳԱ հրատ. 1970, 79 էջ:
4. Գիրք տնայնագործության, Վենետիկ, 1931: ՀՀ Մատենադարան (տպագրված է V դ. հին հայկական ձեռագրերից), 831 էջ:
5. Քաջունի Մ., Կաթնագիտություն, կաթ և կաթնամթերքներ, Վենետիկ, 1901, 418 էջ:
6. Մանդակունի Հովհաննես, «Ճառք», Վենետիկ, 1836: Մեսրոպ Մաշտոցի անվ. Մատենադարան, վերցված է V դ. ձեռագրերից, 831 էջ:
7. Гулканян В. О. - Историко-филолог. журн. АН АрмССР. 1966. № 1. С. 65-70.
8. Кафадарян К. Г. Город Двин и его раскопки, Ереван. 1952. 242 с.
9. Աճառյան Հ., Հայերեն արմատական բառարան, Երևան, 1931, 732 էջ:
10. Ասար Սեբաստացի, XV դար, Գիրք բժշկական արհեստի: Մեսրոպ Մաշտոցի անվ. Մատենադարան, Երևան, 413, 7749:
11. Ջահուկյան Գ., Հայերենը և հնդեվրոպական լեզուները, Երևան, ՀՍՍՀ ԳԱ հրատ., 1970:
12. Амирдовлат Амасиаци. Ненужное для неучей. XV век. Пер. С. А. Вартагяна. М. Наука. 1990. 880 с.
13. Սովետական Հայաստանի հանրագիտարան, 1974-1986 թթ., հատորներ 1-12 (հատորներից վերցված է Համամ Արևելքի, IX դ. (հ. 2), Գրիգոր

- Մագիստրոս, X-XI դդ. (հ. 3), Մխիթար Հերացի, XII-XIII դդ. (հ.7), Գրիգորիս, XII-XIII դդ. (հ. 3), Մեսրոպ Մաշտոց (հ. 7)):
14. *Саруханян Ф.Г., Ерзинкян Л.А.* - Молочн. промышленность. 1936. № 8. С. 33-36.
 15. *Демуров М.Г.* - Молочное хозяйство. 1936. № 2. С. 27-30.
 16. *Ерзинкян Л. А.* Биологические особенности некоторых рас молочнокислых бактерий. Ереван. Изд. АН АрмССР. 1971. 235 с.
 17. *Լ. Հ. Հակոբյան*, Հայաստանի կաթնաթթվային բալտերիաների կենսաբանական առանձնահատկությունները և նրանց օգտագործման ոլորտները, դոկտ. ատեն., Երևան, 2006, 291թ.:
 18. *Тамим А. И., Робинсон Р. К.* Йогурты и другие кисломолочные продукты. СПб. Профессия. 2003. 664 с.
 19. Codex Alimentarius-Ambridged version, joint FAO/WHO. Food and Agricultural Organisation of the United Nations, Rome, 1990.
 20. *Гудков А.В.* Сыроделие: технические, биологические, физиолого-химические аспекты. М. Делипринт. 2003. 799 с.
 21. *Акопян Л. Г., Алексанян Ю. Т.* - Мед. наука Армении. 2010. Т. 53. N 1. С. 52-58.
 22. *Скородумова А. М.* Практическое руководство по технической микробиологии молока и молочных продуктов. М. Пищепромиздат. 1963. 307 с.
 23. *Հարությունյան Ն. Մ., Հալաբյան Ս. Ս., Ալեքսանյան Յու. Թ., Մելիք-Անդրեասյան Գ.Գ., Հարությունյան Կ.Կ., Հակոբյան Լ.Հ., Թոքունյան Ս.Հ.* – Հայաստանի բժշկագիտություն, 2015, հ. 60, էջ 48-52:
 24. *Ерзинкян Л.А.* Штамм *L. acidophilus* Ер. 317/402. Авт. свид. СССР №163573. 1964. Бюл. 13. С. 14:
 25. *Աֆրիկյան Է.Գ., Հակոբյան Լ.Հ.,* Մթերք կաթնաթթվային «Նարինե», Հայաստանի ստանդարտ ՀՍ 173-98, Ն-17, 1998, Երևան, 14 էջ:
 26. *Ерзинкян Л. А., Акопян Л. Г., Чарян Л. М.* Способы выделения молочнокислых бактерий, устойчивых к антибиотическим, антисептическим и химиотерапевтическим тест-препаратам. Авт. свид. СССР № 958497. 1982. Бюл. №34. 10 с.
 27. *Африкян Э. Г., Хачатрян А. А.* Каталог культур микроорганизмов РА. Республиканский центр депонирования микробов (РЦДМ). Ереван. Гитутюн. 1998. 263 с.

Աղյուսակ 1

Մածունի և մածունից անջատված կաթնաթթվային բակտերիաների դիմացկունությունը տարբեր քիմիական արգելակիչների նկատմամբ և նրանց ադիեզիոն հատկությունները

Քիմիական նյութեր՝ արգելակիչներ (%)	Մածուն (%)	Streptococcus					Lactobacillus					L. acidophilus						
		ադիեզիա	lactis 1304	ադիեզիա	Մ7	ադիեզիա	delbrueckii subsp. bulgaricus var. mazuni «Կարինե»	ադիեզիա	helveticus 36	ադիեզիա	jugurti 3111	ադիեզիա	13 «Արագած»	ադիեզիա	92-Անի	ադիեզիա	317/402 «Նարինե»	ադիեզիա
Դիմացկունությունը թունաքիմիկատների նկատմամբ (%), ադիեզիոն հատկությունները																		
Քլորոթրախալան՝	1.0	±	0.5	-	0.5	-	0.9	-	1.0	-	1.0	-	1.0	±	1.0	-	1.0	+
-կրոտիլին 0.5-1.0	0.2	+	0.2	±	0.2	+	0.6	±	0.9	±	0.8	-	1.2	±	1.2	-	2.0	+
-կելտան 0.01-0.2	0.9-1.8	±	0.5	-	0.5	-	0.9	-	1.1	-	1.5	±	1.1	±	1.2	±	1.9	±
-սեմագին 0.5-2.0	1.5-1.6	±	0.5	-	0.5	-	0.9	-	0.8	-	0.9	-	0.8	+	0.9	±	2.0	±
-հեքսաքլոր 0.1-2.0																		
Ֆոսֆորոթրախալան	0.01-	-	0.2	+	0.2	±	0.2	±	1.2	-	1.4	-	1.1	±	1.2	+	1.4	+
-ցիտոդին 0.01-2.0	2.0	+	0.1	+	0.1	+	0.15	-	0.13	-	0.2	-	0.2	+	0.2	±	0.2	±
-անտիո 0.01-0.2	0.01-	±	0.1	+	0.1	+	0.2	-	0.3	-	0.5	-	0.2	±	0.8	-	-	-
-կարբաֆոս 0.01-0.2	0.2	+	0.1	+	0.1	+	0.2	-	0.25	-	0.3	-	0.5	-	-	-	-	-
-ռոզոր 0.01-0.2	0.01-0.1																	
Դիմացկունությունը հակաբիոտիկների նկատմամբ (%)																		
Պենիցիլին Սինտոմիցին Բիոմիցին, 0.001-0.003 %	0.003	+	0.001	+	0.002	+	0.003	±	0.025	±	0.025	±	0.025	±	0.025	+	0.0035	+
Դիմացկունությունը նիտրատների և սորբինաթթվի նկատմամբ (%)																		
-NaNO ₃ , 0.5-2.0 %	2.0	+	1.0	+	1.0	±	1.5	+	1.0	+	0.5	±	1.5	+	1.5	-	2.0	+
-KNO ₃ , 0.5-2.0 %	1.5	±	0.5	-	1.0	+	1.0	+	1.0	±	1.5	+	1.0	±	1.5	-	1.9	+
Սորբինաթթու, 5-2.0 %	0.7	+	1.0	+	1.8	+	1.9	+	1.9	±	1.5	±	1.0	±	1.0	+	2.0	+

БОТАНИКА

УДК 634.0.11

Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян

**Сравнительный анализ таксономического состава
дендрофлор особо охраняемых природных
территорий Армении**

(Представлено 18/III 2016)

Ключевые слова: *дендрофлора, древесные растения, заповедник, национальный парк, редкие и исчезающие виды, эндемики.*

Современная дендрофлора и древесная растительность Армении формировались в середине третичного периода (миоцен), хотя наиболее древние ископаемые остатки древесных растений относятся к концу мелового периода [1]. Важными этапами в истории формирования дендрофлоры в геологическом прошлом явились верхний миоцен (сармат), плиоцен и антропоген, когда началось формирование ксерофильных типов растительности [2]. Сравнительным анализом современной и ископаемой дендрофлор Армении выявлено, что на ее территории из обнаруженных около 170 видов ископаемых древесных, основное ядро которых формировалось в середине миоцена, в современной дендрофлоре сохранилось 90 видов [3].

Многолетним исследованием выявлено, что аборигенная дендрофлора Армении содержит 346 видов из 118 родов и 54 семейств, что составляет около 10% общего числа видов флоры республики [2]. Это вполне закономерно для флоры многих регионов умеренного климата. Такое необычайное богатство дендроразнообразия, включающее многочисленные эндемики и реликты, обусловлено многообразием естественно-исторических и лесорастительных условий, сложностью геологической истории, а также географическим положением Армении, которая находится на стыке нескольких флористических провинций различного генезиса и характера.

Сравнительный анализ современной дендрофлоры и древесной растительности различных естественно-исторических регионов и флористических районов Армении показал также, что состав и формации древесных растений на территории республики представлены совершенно неравномерно, что обусловлено большой гипсометрической разницей (около 3700 м со средней абсолютной высотой территории 1800 м), создающей обо-

сблженные друг от друга дендроклиматические и лесорастительные условия. Большую роль сыграли и особенности формирования дендрофлоры и древесной растительности отдельных регионов.

Наиболее богата дендрофлора в юго-восточной аридной зоне Армении (около 255 видов или 74 %), куда входят Дарелегисский, Зангезурский и Мегринский флористические районы. Сравнительно богата также дендрофлора Северо-Восточной (165 видов или около 50%) – Иджеванский и Лорийские районы и Центральной Армении (181 вид, 52%) – Ереванский, Гегамский и Севанский районы, в то же время отличаясь друг от друга таксономическим составом. Вполне закономерно и гораздо беднее представлена дендрофлора в высокогорных районах Северо-Западной Армении (Ширакское плато), что объясняется почти полным отсутствием лесной растительности; здесь немногочисленные низкорослые древесные растения (всего 24 вида, в основном кустарники и полукустарники) одиночно или небольшими группами распространены в основном в степном и субальпийском поясах.

При изучении древесных растений Армении нами выявлено, что видовая насыщенность дендрофлоры и представленность различных формаций и типов древесной растительности, охватывающей разнообразные экобиоморфные и таксономические группы, обусловлены большей частью степенью аридности территории. Именно наиболее богатые в дендрологическом и аридные в экологическом отношении районы (Зангезурский, Мегринский, Дарелегисский и Ереванский) являются древними очагами видообразования древесных растений, о чем свидетельствует большое число узких эндемиков (около 30 видов), среди которых больше всего представителей сем. *Rosaceae* (роды *Pyrus*, *Sorbus*, *Rubus*, *Crataegus* и др.).

В настоящее время охрана древесных растений и их сообществ в природе и охрана тех местообитаний, в которых обеспечивается их оптимальное развитие и воспроизводство, являются наиболее надежным и эффективным способом сохранения дендроресурсов. Антропогенное воздействие приводит к нарушению естественных местообитаний и деградации лесных экосистем и как следствие – к сокращению ареалов многих видов древесных растений, вплоть до их полного исчезновения. В связи с этим актуально сохранение биоразнообразия растений, особенно древесных, в первую очередь в природных условиях (*in situ*).

В настоящее время территория Армении входит в одну из 25 наиболее важных «горячих точек» биоразнообразия земного шара – Кавказ, где сосредоточено чрезвычайно богатое разнообразие растений, растительных типов и формаций – почти все основные типы растительности Передней Азии.

Как известно, лучшим способом сохранения отдельных представителей биоразнообразия является охрана экосистемы в целом, в частности, на особо охраняемых природных территориях (ООПТ). В этом отношении картина для Армении выглядит внешне вполне благополучно – в настоящее время здесь функционируют 4 национальных парка, 3 государственных заповедника и 27 заказников, зани-

мающих более 12% территории республики [4]. Следует также отметить, что подавляющее их большинство создавалось в 1960-х гг. и было приурочено к лесным массивам республики.

Изучением флоры и растительности, в частности, состава и сохранения древесных растений ООПТ Армении, занимались многие специалисты [2, 4-9]. По данным указанных авторов, на особо охраняемых территориях республики произрастает около 60 % видового богатства Армении, в составе которых преобладают редкие, исчезающие и эндемичные виды, а также дикие сородичи культурных растений.

В составе ООПТ Армении наиболее крупными и богатыми в таксономическом отношении древесных растений являются:

- государственные заповедники – Хосровский лес и Шикахохский,
- национальные парки – Дилижанский, Севанский и «Аревик».

Хосровский лес расположен на отрогах Гегамского хребта (Центральная Армения). Занимаемая площадь составляет около 29 тыс. га, в пределах высот 1400-2400 м над ур. м. Заповедник находится в Атропатенской флористической подпровинции Армено-Иранской провинции [10]. Состав флоры заповедника насчитывает около 1800 видов сосудистых растений из 560 родов и 95 семейств [5]. Наиболее характерны различные фриганоидные формации, аридные редколесья (можжевеловые, миндальные, дубовые, грушевые, фисташково-можжевеловые), трагакантовые степи и т. д. В заповеднике охраняются своеобразные формации дубовых лесов (*Q. macranthera*), можжевеловых редколесий (*J. polycarpus*) и светлых лесов из листопадных засухоустойчивых древесных: *Pistacia mutica*, *Acer ibericum*, *Celtis glabrata*, *Amygdalus fenzliana* и др.

Богатство дендрофлоры представлено 163 видами из 81 рода и 39 семейств (47% дендрофлоры республики), в том числе 59 деревьев и 58 кустарников (табл. 1). На территории заповедника произрастают многочисленные редкие и эндемичные представители родов *Pyrus* (*P. salicifolia*, *P. sosnovskyi*, *P. tamamschjanae*), *Sorbus* (*S. luristanica*, *S. persica*, *S. Kusnetzovii*, *S. graeca*), *Astragalus*, а также *Euonymus latifolia*, *E. verrucosa*, *Cotoneaster integerrima*, *Celtis tournefortii* и др.

Указанные виды древесных участвуют в образовании различных формаций лесной растительности, занимающей 8 тыс. га.

Шикахохский заповедник находится на северном макросклоне Мегринского хребта (Зангезур) на территории Сюникской области в пределах высот 700-2400 м над ур. м. Его площадь составляет около 10 000 га. Расположен в северо-восточной части Армянского нагорья. Флора заповедника насчитывает больше 1000 видов сосудистых растений из 432 родов и 92 семейств [11] и, как и вся флора и растительность Зангезурского экорегиона, находится под непосредственным влиянием иранской флоры, однако в ее образовании участвуют также представители кавказской и бореальной мезофильных флор. Довольно богата также дендрофлора заповедника: 161 вид из 74 родов и 33 семейств (46% состава общей дендро-

флоры Армении (табл. 1). Среди них 75 видов деревьев, 50 кустарников, остальные 36 – кустарнички, полукустарники и древесные лианы. Эдификаторами древесных формаций являются основные лесообразователи – *Quercus macranthera*, *Q. iberica*, *Carpinus betulus*, а также сопутствующие им – *Acer campestre*, *A. ibericum*, *A. hyrcanum*, *Fraxinus excelsior* и др.

Заповедник известен своими эндемичными видами древесных: *Pyrus zangezura*, *Rubus zangezura* и др.

Богато представлены также реликты: *Taxus baccata*, *Fagus orientalis*, *Hederahelix*, *Euonymus velutina*, *Zelkovacarpinifolia*, *Castanea sativa* и др. В заповеднике сохранены единичные местонахождения небольших древостоев бука восточного и тисса ягодного. К заповеднику примыкает самая крупная на Кавказе Цавская платановая роща (*Platanus orientalis*), объявленная заказником.

Дилижанский национальный парк, организованный в 2002 г. на базе одноименного заповедника, находится в северной части Армении (Тавушская область), расположен на Малом Кавказе на северо-востоке Армянского нагорья.

Флора представлена 902 видами из 424 родов и 82 семейств [6]. Территория Национального парка занимает всего лишь 1% территории республики, а состав флоры охватывает около 25.5% от общего числа видов флоры Армении. Около 10% видового разнообразия растительного мира национального парка – представители дендрофлоры: 94 вида из 50 родов и 27 семейств или 34.5% состава древесных растений Армении (табл. 1).

Растительность парка представлена в основном мезофильными лесными формациями (около 22 тыс. га). В лесах господствуют листопадные виды: *Fagus orientalis*, *Quercus iberica*, *Q. macranthera*, *Carpinus betulus*, *C. orientalis*, а из сопутствующих лесных пород: *Acer campestre*, *A. platanoides*, *A. trauvetteri*, *Tiliacaucaucasica*, *Fraxinus excelsior*, *Sorbus aucuparia*, *S. graeca*. Встречаются также плодовые: *Pyrus caucasica*, *Malus orientalis*, *Yuglans regia*, *Corylus avellana*, *Mespilus germanica* и др. На верхнем пределе леса господствуют *Betula litwinowii* и *B. pubescens*, *Populus tremula*, *Salix caprea* и др.

Основными формациями охраны древесной растительности в Национальном парке являются буковые (*Fagus orientalis*) и дубовые (*Quercus iberica* и *Q. macranthera*) леса со своими сопутствующими видами древесных растений.

На этой территории охраняется также самый большой в Армении древостой тисса ягодного (*Taxus baccata*). Последний находится здесь на грани полного исчезновения, так как естественное возобновление крайне неудовлетворительное, а во многих случаях полностью отсутствует.

Севанский национальный парк является уникальной охраняемой территорией, охватывающей зеркало оз. Севан и почвогрунты, вышедшие из-под вод озера. Территория парка около 150 тыс. га. Заповедная зона на территории парка составляет 3700 га.

Флора национального парка охватывает свыше 1500 видов сосудистых растений из 494 родов и 102 семейств. Растительный мир отличается своеобразием: богато представлены эндемичные и реликтовые виды. Здесь

впервые для науки описано около 150 видов, из которых 68 являются эндемиками этого региона: *Sorbushajastana*, *Acantholimon gabrieljanae*.

Дендрофлора Севанского национального парка по сравнению с остальными ООПТ довольно бедна: 115 видов из 50 родов и 26 семейств (табл. 1), что составляет около 40% от общего числа видов древесных растений республики. Это объясняется тем, что здесь амплитуда гипсометрических точек распространения древесных растений сравнительно низка – всего лишь 450-500 м (1950-2400 м над ур. м.).

Несмотря на это, здесь формировались своеобразные ландшафты древесных растительных экосистем: остаточные формации лесов и редколесий и их различные группировки. Последние занимают здесь около 3,5 тыс. га и почти полностью расположены на склонах Арегунийского и Севанского хребтов в пределах абсолютных высот 1950-2400 м над ур. м. – за пределами Национального парка. Они представлены в основном дубовыми (*Q. macranthera*) и можжевельниковыми (*J. polycarpus*) островками.

Национальный парк «Аревик». Постановлением Правительства РА в 2009 г. на базе Мегринского лесхоза (Сюникская область) на территории около 34 400 га создан Национальный парк «Аревик». Цель создания данной ООТ – более надежное и эффективное сохранение природных экосистем, их биологического и ландшафтного разнообразия, биоресурсов, уникальных памятников природы, а также сохранение местообитания эндемичных и редких видов животных и растений и содействие их надежному воспроизводству и устойчивому использованию.

В ботанико-географическом отношении территория Национального парка совпадает с границами Мегринского флористического района, который целиком входит в Армено-Иранскую ксерофильную провинцию Ирано-Туранской области и характеризуется аридным климатом. Данная территория входит в систему приараксинских хребтов, отличается сильно выраженной вертикальной зональностью (самая низкая гипсометрическая точка – 376 м, а самая высокая – 3754 м над ур. м.). Район охватывает восточные и южные отроги Капутджухской гряды Зангезурского хребта и южные макросклоны Мегринского хребта.

Общая флора насчитывает около 1600 видов сосудистых растений [12, 13]. Чрезвычайно богата также дендрофлора (187 видов из 41 семейства и 89 родов), что составляет около 65% древесных растений всей республики (табл. 1).

На территории парка зональными типами растительности являются полупустынная, фриганоидная, степная растительность, шибляк, остаточные леса из дуба крупнопыльникового и грузинского, граба и др., а также редколесья из низкорослых ксерофильных лиственных пород и можжевельников.

Среди них 81 вид деревьев, 66 кустарников, а остальные 41 кустарнички, полукустарники и древесные лианы.

В составе древесных растений встречаются такие виды, как *Acerhyrcanum*, *Carpinus schuschaensis*, *Cercis griffithii*, *Colutea cilicica*, *C. Komarovii*, *Quercus araxina*, *Amygdalus nairica*, *Cerasus microcarpa*, *Populus euphratica*.

tica и др., являющиеся редкими или эндемичными для дендрофлоры республики и своим происхождением тесно связанные с гирканской флорой.

Проведенный сравнительный анализ дендрологического богатства ООПТ Армении показывает, что наибольшим числом видов древесных отличается «Аревик» (187 видов), за ним следуют Хосровский (163) и Шикахохский (161) заповедники, где наиболее сильно выражена вертикальная зональность растительных ландшафтных типов и формаций на аридных территориях в нижнем и среднем горных поясах. При этом в составе древесных растений довольно велик удельный вес как низкорослых деревьев, так и кустарничков и полукустарников (табл. 1).

Таблица 1

**Таксономический и биоморфный анализ дендрофлор
ООПТ Армении**

ООПТ	Число таксонов			В том числе по жизненным формам				
	семейство	род	вид	дерево	кустарник	кустарничек	полукустарник	древесная лиана
Заповедники • Хосровский лес • Шикахохский	39	81	163	59	58	17	26	3
	33	74	161	75	50	5	27	4
Национальные парки • Дилиджанский • Севанский • «Аревик»	27	50	94	36	48	3	5	2
	26	50	115	37	49	7	22	-
	41	89	187	81	66	11	24	5

В процессе дендрологических исследований нами проведен также сравнительный таксономический анализ по содержанию ведущих семейств и родов древесных растений указанных ООПТ (табл. 2). Показано, что ведущими по числу родов являются сем. *Rosaceae* – 15 родов, *Rhamnaceae* и *Fabaceae* – по 4 каждые, *Fabaceae* и *Oleaceae* – по 3 (табл. 2). Ведущая роль сем. *Rosaceae* характерна также для всей дендрофлоры Армении (18 родов, 125 видов, 28% общего состава древесных в республике).

Наиболее богато представлены роды *Pyrus* (27 видов), *Crataegus* (11), *Cotoneaster* (6), *Sorbus* (10), *Rosa* (11), *Rubus* (7) и др.

Следует отметить, что среди древесных растений, произрастающих на территории Армении, чрезвычайно богат род *Pyrus* – 32 вида [14], из которых 24 ксерофильных представителя произрастают в юго-восточной аридной части Армении, 12 из которых являются эндемиками для флоры Армении (*Pyrussosnovskyi*, *P. browiczii*, *P. zangezura*, *P. daralagezi*, *P. Hajastana*,

P. takhtadzhanii и др.). Многие из них как редкие виды включены в Красную книгу Армении (*P. complexa*, *P. daralagezi*, *P. gergerana*, *P. takhtadzhianii*, *P. voronovii*). Как указывает Файвуш [15], род *Pyrus* занимает первое место в родовом спектре эндемичных таксонов Армении.

Таблица 2

Видовое богатство ведущих семейств и родов древесных растений ООПТ Армении

Семейство	Род	Число видов в Армении	В том числе в ООПТ				
			заповедник Хосровский лес	Шикахосский заповедник	Дилижанский нац. парк	Севанский нац. парк	нац. парк «Аревик»
<i>Fabaceae</i>	<i>Astragalus</i>	15	1				
	<i>Cercis</i>	1					1
	<i>Colutea</i>	3		2			3
	<i>Halimodendron</i>	1	1				1
<i>Fagaceae</i>	<i>Castanea</i>	1		1			
	<i>Fagus</i>	1		1	1		
	<i>Quercus</i>	4	1	3	2	1	3
<i>Oleaceae</i>	<i>Fraxinus</i>	2	2	1	2	2	2
	<i>Jasminum</i>	1	1	1	1		1
	<i>Ligustrum</i>	1		1			1
<i>Rhamnaceae</i>	<i>Frangula</i>	1			1		1
	<i>Paliurus</i>	1	1	1	1		1
	<i>Rhamnus</i>	5	3	3	5	5	3
	<i>Ziziphus</i>	1	1	1			1
<i>Rosaceae</i>	<i>Amelanchier</i>	1			1	1	
	<i>Amygdalus</i>	3	2	3	2		3
	<i>Cerasus</i>	5	4	3	4	3	5
	<i>Cotoneaster</i>	8	3	4	3	5	6
	<i>Crataegus</i>	22	7	9	5	2	7
	<i>Malus</i>	1	1	1	1	1	1
	<i>Mespilus</i>	1		1	1		1
	<i>Padus</i>	1		1	1	1	1
	<i>Pentaphylloides</i>	1				1	
	<i>Prunus</i>	2	2	2	2	2	2
	<i>Pyrus</i>	32	15	16	5	3	21
	<i>Rosa</i>	18	7	7	6	4	9
	<i>Rubus</i>	12	2	5	5	2	3
	<i>Sorbus</i>	13	7	8	3	8	6
	<i>Spiraea</i>	2	2	2	2	2	2

Почти такая же картина в роде *Crataegus*: из 22 видов, распространенных в Армении. 11 встречаются в ООПТ, 4 из которых эндемики, а 3 как редкие и исчезающие включены в Красную книгу (*Crataegus microphylla*, *C. pontica*, *C. zangezura*). Эти данные вполне закономерны, так как Южное Закавказье (Армения) является одним из центров видообразования родов *Pyrus*, *Crataegus*, *Sorbus*, *Rubus* и др. Именно в аридной (южной) части Армении (Хосровский заповедник, бассейн р. Арпа (Даралагез) и Мегринское ущелье (заповедник «Аревик»)) находятся 3 очага интенсивного видо- и формообразования указанных родов [14-18].

Таблица 3

**Редкие и исчезающие (краснокнижные) виды древесных растений
ООПТ Армении**

Вид	Заповедники		Национальные Парки		
	Хосровский лес	Шикаховский	Дилижанский	Севанский	Аревик
<i>Amygdalusnairica</i>					+
<i>Astragaluskarjaginii</i>	+				
<i>Castanea sativa</i>		+			
<i>Cercisgriffithii</i>					+
<i>Coluteakomarovii</i>					+
<i>Crataegusmicrophylla</i>		+			
<i>C. pontica</i>	+				
<i>C. zangezura</i>		+			
<i>Euonymus velutina</i>		+			
<i>Juniperussabina</i>				+	
<i>Nitrariaschoberi</i>					+
<i>Platanusorientalis</i>		+			
<i>Pyruscomplexa</i>					+
<i>P. daralagezi</i>					+
<i>P. gergerana</i>		+			+
<i>P. grossheimii</i>					+
<i>P. hyrcana</i>		+			+
<i>P. radeana</i>		+			+
<i>P. theodorovi</i>	+				
<i>P. voronovii</i>					
<i>Rubustakhtadjanii</i>		+			
<i>R. zangezurus</i>		+			
<i>Sorbushajastana</i>				+	
<i>Swidaiberica</i>		+			

<i>Tamarixflorida</i>					+
<i>Taxusbaccata</i>		+	+		
Всего	3	12	1	2	12

Из таксономического разнообразия древесных растений ООПТ 26 редких и исчезающих видов внесены в Красную книгу Армении [9]. Из этого числа 8 представители рода *Pyrus*, 3 – *Crataegus*, 2 – *Rubus*, остальные роды представлены по одному виду (табл. 3). Из краснокнижных видов больше всего зарегистрировано в Шикахохском заповеднике и национальном парке «Аревик» – по 12, а в остальных ООПТ – от 1 до 3 видов.

Институт ботаники НАН РА

Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян

Сравнительный анализ таксономического состава дендрофлор особо охраняемых природных территорий Армении

Проведен сравнительный анализ таксономического состава древесных растений особо охраняемых природных территорий (ООПТ) Армении – государственных заповедников (Хосровский лес и Шикахохский) и национальных парков (Дилижанский, Севанский и «Аревик»). Выявлено, что наиболее богата дендрофлора в национальном парке «Аревик» – 187 видов, за ним следуют заповедники Хосровский лес (163) и Шикахохский (161), где сильно выражена вертикальная зональность лесных формаций. Ведущими по числу родов являются сем. *Rosaceae* – 15 родов, *Rhamnaceae* и *Fabaceae* – по 4 каждые. Наиболее богато представлены *Pyrus* – 27 видов, *Crataegus* – 11, *Sorbus* – 10 и др. В составе древесных растений ООПТ 26 редких и исчезающих видов внесены в Красную книгу Армении. Из краснокнижных видов больше всего зарегистрировано в Шикахохском заповеднике и национальном парке «Аревик» – по 12 видов.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Հ. Վարդանյան

Հայաստանի բնության հատուկ պահպանվող տարածքների դենդրոֆլորաների տաքսոնոմիական կազմի համեմատական վերլուծություն

Կատարված է Հայաստանի Բնության հատուկ պահպանվող տարածքների (ԲՀՊՏ)՝ «Խոսրովի անտառ» և Շիկահողի պետական արգելոցների և Դիլիջանի, Սևանի ու «Արևիկ» ազգային պարկերի դենդրոֆլորաների տաքսոնոմիական կազմի համեմատական վերլուծություն: Բացահայտված է, որ առավել հարուստ է դենդրոֆլորան «Արևիկ» ազգային պարկում՝ 187 տեսակ, համեմատաբար հարուստ են «Խոսրովի անտառ» (163) և Շիկահողի (161) արգելոցները, որտեղ ուժեղ է արտահայտված անտառային համակեցությունների ուղղաձիգ բարձունքային գոտիականությունը: Առաջատար ընտանիքներն (ցեղերի թվով) են՝ *Rosaceae*՝ 15 ցեղ, *Rhamnaceae* և *Fabaceae* 4-ական ցեղ: Առավել հարուստ ցեղերն են՝ *Pyrus* (27 տեսակ), *Crataegus* (11), *Sorbus* (10) և ուր.: ԲՀՊՏ-ների ծառաբույսերի կազմում 26 հազվագյուտ և անհետացող տեսակ ներառված

Է Հայաստանի Կարմիր գրքում: Առավել մեծ թվով կարմիր գրքային ծառաբույսեր գրանցված են Շիկահողում և Արևիկում՝ 12-ական տեսակ:

Corresponding member of NAS RA Zh. H. Vardanyan

Comparative Analysis of the Taxonomic Composition of Dendroflora in Specially Protected Natural Areas of Armenia

A comparative analysis of the taxonomic composition of woody plants of specially protected areas of Armenia – State Reserves («Khosrov Forest» and Shikahogh) and National parks (Dilijan, Sevan and «Arevik») has been carried out. It was revealed that the richest Dendroflora was in «Arevik» National Park – 187 species, the next were the reserves, «Khosrov Forest» (163) and Shikahogh (161), where vertical zoning of forest formations was strongly expressed. The leading by the number of families were: *Rosaceae* – 15 genera, *Rhamnaceae* and *Fabaceae* – 4 per each. The most richly represented were *Pyrus* – 27 species, *Crataegus* – 11, *Sorbus* – 10 and others. From the content of woody plants 26 rare and endangered species are listed in the Red Book of Armenia. Out of the endangered species the most registered number was in Shikahogh and «Arevik» – per 12 species.

Литература

1. Палибин И. В. В кн.: Флора и систематика высших растений. Тр. БИН АН СССР. 1937. Сер. 1. Вып. 4. С. 171-197.
2. Вардanian Ж. А. Научные основы интродукции древесных растений в Армении, Ереван. 2012. 400 с.
3. Вардanian Ж. А. Деревья и кустарники Армении в природе и культуре. Ереван. 2003. 367 с.
4. Файвуш Г. М., Балоян С. А., Вardanian Ж. А., Калашян М. Ю., Таманян К. Г. В кн.: Тахтаджания. Ереван. 2011. Вып. 1. С. 185-189.
5. Тахтаджян А. Л. Флористические области Земли. Л. 1978. 247 с.
6. Габриэлян Э. Ц., Гейликман Б. О., Унанян А. К. В кн.: Заповедники Кавказа. М. 1990. С. 323-339.
7. Габриэлян Э. Ц., Файвуш Г. М. В кн.: Заповедники Кавказа. М. 1990. С. 351-357.
8. Ханджян Н. С., Шарбатян М. И. Флора Дилижанского заповедника. Ереван. 1999. 103 с.
9. Ханджян Н. С. Особо охраняемые территории Армении. Ереван. 2004. 64 с. (на арм. яз.).
10. Хуришудян П. А., Барсегян А. М., Григорян А. А. В кн.: Состояние и охрана флоры и растительности покрова Армении. Ереван. 1984. С. 102-114. (на арм. яз.).
11. Tamanyan K., Fayvush G., Nanagyulyan S., Danielyan T. (eds.). Red Book of Plants of Republic of Armenia (plants and fungi). Yerevan. 2010. 598 p.
12. Сагателян А. А. - Бот. журн. 1981. Т. 66. N 5. С. 650-661.
13. Сагателян А. А. Флора и растительность Мегринского района Армянской ССР. Автореф. канд. дис. Ереван. 1983. 24 с.
14. Акопян Ж. А. В кн.: Фл., растит. и раст. рес. Армении. Ер. 2007. 16. С. 15-26.

15. *Файвуш Г. М.* В кн.: Фл., растит. и раст. рес. Армении. Ер. 2007. 16. С. 62-68.
16. *Варданян Ж. А.* В кн.: Сб. матер. междунар. науч. конф. «Ботанические сады в современном мире». М. 2011. С. 70-73.
17. *Габриэлян Э. Ц.* Рябины (*Sorbus*L.) Западной Азии и Гималаев. Ереван. 1978. 263 с.
18. *Мулкиджанян Я. И.* Арборифлора Армянской ССР (деревья и кустарники). Автореф. канд. дис. Ереван. 1969. 40 с.