ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2016

Ереван Երևան Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ
Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год
Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.
Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г
Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:http://elib.sci.am e-mail: rnas@sci.am

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան – B_α արտադրյալների եզրային արժեքների մասին …………………... 7

Ա. Ռ. Նազարյան – Նորմալ հարթ երկու կոաչափի ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմություններ ռեգուլյարության և սինգուլյարության միավոր ինդեքսով …. 13

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Պ. Ստեփանյան – Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի ջերմաառաձգականության խնդիրը առաձգական ամրակցման հենարանի առկայությամբ ………………………………………………………………………………………. 26

Ս. Հ. Սարգսյան, Մ. Վ. Խաչատրյան – Դասական առաձգականության տեսությամբ ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ առաձգական հարթ կոր ձողի (շրջանային) մաթեմատիկական մոդելը ……………………….. 34

Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան – Լարումները տիեզերական վերելակի կոնաձև խողովակում ……………………………………….. 43

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ե. Տոնոյան – [41]K ատոմի վիճակների վարքի տեսական հետազոտությունը ուժեղ մագնիսական և π բևեռացմամբ լազերային դաշտում …………………………. 48

Կ. Հ. Ահարոնյան, Ն. Բ. Մարգարյան - Մեկկողմանի դիէլեկտրական ուժեղացմամբ էկրանավորված էքսիտոնի կապի էներգիան կիսահաղորդչային քվանտային փոսում ……………………………………………………………………………. 57

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Ն. Սարգսյան - Օրգանական նյութերի ջերմային ակտիվացմամբ մոնոմոլեկուլային քայքայման քվանտաքիմիական հիմնավորումը և մեխանիզմի մոդելավորումը: Վինիլային եթերների ինքնաքայքայման արագության հաստատունի հաշվարկը: 2 ………………………………..……………………………………………….. 64

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ք. Վ. Ղազարյան, Շ. Գ. Մարգարյան - Միզուղիների տարբեր օրգանների ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության համեմատական վերլուծությունը ………..… 69

Լ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Մ. Նասոյան, Դ. Օ. Թերզյան, Ա. Վ. Մարգարյան - Գորտի ուղեղիկացանցային պրոյեկցիոն համակարգի նեյրոնալ մեխանիզմները …………. 76

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян – О граничных значениях произведения B_α 7

А. Р. Назарян – Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности 13

МЕХАНИКА

С. П. Степанян – Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры 26

С. О. Саркисян, М. В. Хачатрян – Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций 34

С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян – Напряжения в конической трубке космического лифта 43

ФИЗИКА

А. Е. Тоноян – Теоретическое исследование поведения ^{41}K атомов в π-поляризованном лазерном излучении в присутствии сильного магнитного поля 48

К. Г. Агаронян, Н. Б. Маргарян – Энергия связи экранированного экситона в полупроводниковой квантовой яме с односторонним диэлектрическим усилением 57

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. Н. Саргсян – Квантово-химическое обоснование и моделирование механизма мономолекулярного распада органического соединения при термической активации. Расчет констант скорости мономолекулярного спонтанного распада виниловых эфиров. 2 64

ФИЗИОЛОГИЯ

К. В. Казарян, Ш. Г. Маргарян – Сравнительный анализ характеристик спонтанной электрической активности различных органов мочевого тракта крысы 69

Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян, А. В. Маркарян – Нейронные механизмы мозжечково-ретикулярной проекционной системы лягушки 76

C O N T E N T S

MATHEMATICS

V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan, I. V. Hovhannisyan - On the Boundary Values of the Product B_α ……………………………………………………………………… 7

A. R. Nazaryan – Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimention Two with Unity Indexes of Regularity and Singularity……………… 13

MECHANICS

S. P. Stepanyan - Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support ……………. 26

S. H. Sargsyan, M. V. Khachatryan - Mathematical Model of Elastic Plane Curve Beam (Circular) with Consideration of Shear Deformations on the Basis of the Classical Theory of Elasticity ……………………………………………………… 34

S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan - Stresses in a Tapered Space Elevator Tube ………………………………………………………………… 43

PHYSICS

A. Y. Tonoyan – Theoretical Investigation of ^{41}K States Behavior under Strong Magnetic Field and π Polarized Laser Field ……..…………………………………….. 48

K. H. Aharonyan, N. B. Margaryan - Binding Energy of the One-Sided Dielectrically Enhanced Screened Exciton in Semiconductor Quantum Well ……… 57

CHEMICAL PHYSICS

G. N. Sargsyan – Quantum-Chemical Explanation and Modeling of Mechanism of Unimolecular Decay of Organic Compounds under Thermal Activation. Calculation of the Constant of Rate of Vinyl Ethers 2……………………………… 64

PHYSIOLOGY

K. V. Kazaryan, Sh. G. Margaryan – Comparative Analysis of the Characteristics of Spontaneous Electrical Activity in Various Organs of the Urinary Tract ……………………………………………………………………………………. 69

L. R. Manvelyan, A. M. Nasoyan, D. O. Terzyan, A. V. Margaryan - Neuronal Mechanisms of the Cerebello-Reticular Projection System in Frog ………………... 76

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.52

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О граничных значениях произведения B_α

(Представлено 9/II 2016)

Ключевые слова: *оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна, классы типа Дирихле.*

Введение. Пусть $\mathbb{D}=\{z;|z|<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $0<p<+\infty$. Класс H^p определяется как множество тех аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций f, для которых выполняется условие

$$\sup_{0\le r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi\right\}<+\infty .$$

О классах H^p можно прочесть в [1, 2].

Пусть $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$. Класс A_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty .$$

Пусть $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$. Класс D_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{D_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty .$$

В случае, когда $\alpha+1<p$, классы D_α^p называются классами типа Дирихле. Класс D_0^2 называется классом аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^\infty\left(1-|z_n|\right)<+\infty .$$

Произведением Бляшке называется следующая функция:

$$B(z;\{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \cdot \frac{|z_n|}{z_n}, \; z \in \mathbb{D}.$$

О свойствах произведения Бляшке можно прочесть, например, в [1, 2].

М. М. Джрбашяном ([3], глава IX) введены в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r,F) = m_\alpha(r,F) + N_\alpha(r,F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T_\alpha(r,F)\} < +\infty.$$

При этом функции $m_\alpha(r,F)$, $N_\alpha(r,F)$ и $T_\alpha(r,F)$ представляют своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F)$, $N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$, так что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ и, в частности

$$N_\alpha \subset N_0 = N, \; (-1<\alpha<0).$$

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt, \; (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^0\{\varphi(r)\} = \varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\} = \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)}\{\varphi(r)\}, \quad (-1<\alpha<0).$$

Для аналитических функций, принадлежащих классу N_α, функция $T_\alpha(r,F)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha(r,f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\{\varphi(r)\} = \max\left\{D^{-\alpha}\{\varphi(r)\};0\right\}.$$

Известно, что аналитическая функция класса N_α имеет вид

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha(z;\{a_n\})\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\},$$

где γ – произвольное вещественное число, λ – произвольное натуральное число, $K_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha(z;\{a_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1.$$

Функция $S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Шварца. $\operatorname{Re}S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Пуассона. При $\alpha=0$ эти ядра совпадают с ядрами Шварца и Пуассона соответственно.

$B_\alpha(z;\{a_n\})$ называется произведением Джрбашяна. В специальном случае $\alpha=0$ произведение B_α совпадает с произведением Бляшке.

$$B_0(z;\{a_n\})=B(z;\{a_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\overline{a}_nz}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

В работе [4] М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось доказать следующее утверждение.

Теорема (*о взаимосвязи произведений* B_α *и* B). *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\alpha}<+\infty,\ (-1<\alpha<0)$$

имеет место представление

$$B_\alpha(z;\{a_n\})=B(z;\{a_n\})\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция ограниченной вариации на* $[0,2\pi]$, *имеющая вид*

$$\omega(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\theta D^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha(r_ne^{i\theta};\{a_n\})}{B(r_ne^{i\theta};\{a_n\})}\right|d\theta,$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots,\ r_n\uparrow 1\right).$$

Основные результаты. Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty .$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *не принадлежит классу* D_β^2, $0<\beta+1<2$, *то этому классу не принадлежит также произведение* $B_\alpha^*=\tilde{B}_\alpha\cdot B_\alpha$, *где*

$$\tilde{B}_\alpha\left(z;\{z_k\}\right)=\prod_{k=1}^{N}b_\alpha\left(z;z_k'\right)$$

конечное произведение Джрбашяна $\left(\{z_k'\}_{k=1}^{N}\subset\mathbb{D}\right)$.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty .$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *имеет конечный интеграл Дирихле, то* B_α *является конечным произведением.*

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке – Джрбашяна. Тогда коэффициенты Тейлора любого бесконечнего произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 n=+\infty .$$

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке – Джрбашяна. Тогда производное бесконечного произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *не принадлежит классу* H^1.

Утверждение теоремы следует из следующего факта:

$$H^1\subset A_0^2 .$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083**.**

Армянский национальный политехнический университет
e-mail: mathdep@seua.am, dallakyan57@mail.ru, ishjhanh@gmail.com

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О граничных значениях произведения B_α

Пользуясь аппаратом интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р.

Неванлинны, вводя также произведения $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с произведениями Бляшке. При $-1<\alpha<0$ М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось установить взаимосвязь между произведениями B_α и B Бляшке. В настоящей работе, пользуясь теоремой о взаимосвязи произведений $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ и $B=B_0$, доказывается, что бесконечные произведения B_α не могут принадлежать классу D_0^2-аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле. Это означает, что производная произведения B_α не может принадлежать также классу H^1.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ.Վ. Դալլաքյան,
Ի. Վ. Հովհաննիսյան

B_α արտադրյալների եզրային արժեքների մասին

Կիրառելով Ռիման – Լիուվիլլի ինտեգրոդիֆերենցման օպերատորը՝ Մ. Մ. Ջըրբաշյանը ներմուծել է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ դասերը և $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ արտադրյալները, որոնք $\alpha=0$ հատուկ դեպքում համընկնում են Բլյաշկեի B արտադրյալների հետ: Հետագայում Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի կողմից ստացվել է B_α և B արտադրյալները կապող բանաձև, երբ $-1<\alpha<0$: Այս աշխատանքում, օգտվելով նշված կապից, ապացուցվում է, որ անվերջ $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ արտադրյալները չեն կարող պատկանել միավոր շրջանում անալիտիկ և վերջավոր Դիրիխլեյ

ի ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների D_0^2 դասին: Ինչը նշանակում է, որ $B'_\alpha(-1<\alpha<0)$ չի կարող պատկանել H^1 դասին:

Academician V.S. Zakaryan, R.V. Dallakyan, I.V. Hovhannisyan

On the Boundary Values of the Product B_α

The class of R. Nevanlinna’s meromorphic functions is generalized by M. M. Djrbashyan using the Riemann – Liouville integration-differentiation operator in the unit circle including the product $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, which in the special case of $\alpha=0$ coincide with the Blaschke product. Furthermore, when $-1<\alpha<0$, a connection between the products B_α and B of Blaschke is shown by M. M. Djrbashyan and V. S. Zakaryan. In this work, using this connection theorem we prove that the infinite product $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ doesn’t belong to D_0^2 - the class of analytic functions in the unit circle with finite Dirichlet integral. It means that the derivative of B_α doesn’t belong to the class H^1.

Литература

1. *Привалов И. И.*. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л. Гос. изд. техн.-теоретич. лит. 1950.

2. *Duren P. L.* Theory of H^p Spaces. New York - London. Academic Press. 1970.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 671 с.
4. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - Мат. заметки. 1968. Т. 4. N 1. С. 3-10.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука. 1981. 583 с.
6. *Kim H. O.* - Pacific journal of Math. 1984. V. 114. N 1.
7. *Захарян В. С.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 2. С. 189-192.
8. *Захарян В. С.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. N 4-5. С. 287-300.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

А. Р. Назарян

Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности

(Представлено академиком В. С. Захаряном 23/II 2016)

Ключевые слова: *риччи-полусимметрические подмногообразия, конусы над римановыми многообразиями, прямые произведения.*

1. **Введение.** Пусть M – риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R(X,Y)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R(X,Y)R_1=0$ для любых X,Y, то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-11].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности в евклидовых пространствах.

Выражаю искреннюю благодарность профессору В. А. Мирзояну за большую помощь, оказанную мне на протяжении всей работы над результатами статьи и в её оформлении.

2. **Риччи-полусимметрические подмногообразия, удовлетворяющие условию $i_R=1$, $\mu=\nu+1$.** Пусть в евклидовом пространстве E_n тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собст-

венное значение. Тогда M допускает или только одну группу главных векторов кривизны (г.в.к.) $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. (Определение групп $W^{(t)}$ приведено, например, в [7-9]). В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае – полуэйнштейновым и имеет более сложную структуру. Поскольку $n-m=2$, то неравенства (2.7) и (4.7) в [8] принимают следующий вид:

$$0 \le \mu - \nu + k \le 2, \qquad 0 \le \mu - \nu + i_R \le 2,$$

где i_R обозначает индекс регулярности, $\mu-\nu=i_S$ – индекс сингулярности, а k – число подпространств пространства кодефектности $T_x^{(1)}$ подмногообразия, инвариантных относительно операторов кривизны $R(X,Y)$. Из второго неравенства следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

(a) $i_R=1$, $\mu=\nu$, (b) $i_R=1$, $\mu=\nu+1$, (c) $i_R=2$, $\mu=\nu$.

Очевидно, что в случаях (a) и (c) $k=1$ или $k=2$, а в случае (b) $k=1$.

В случае (b) условие $i_R=1$ означает, что размерность линейной оболочки векторов группы $W^{(1)}$ равна 1, т. е. в $W^{(1)}$ все векторы коллинеарны и, как мы знаем, отвечают единственному ненулевому собственному значению тензора Риччи. Условие $\mu=\nu+1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. и, возможно, нулевой г.в.к. Поскольку тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение, то этому собственному значению соответствует некоторый регулярный г.в.к. Следовательно, все остальные регулярные г.в.к. коллинеарны этому вектору и принадлежат группе $W^{(1)}$. Тогда группа $W^{(1)}$ состоит или из одного регулярного г.в.к., имеющего кратность, или из двух коллинеарных регулярных г.в.к. Следовательно, группа $W^{(0)}$ не может содержать регулярные г.в.к. Поскольку гиперповерхности, не являющиеся локально евклидовыми, удовлетворяют условию $\mu=\nu$ [8], то в рассматриваемом случае подмногообразие M не является гиперповерхностью. Здесь необходимо рассмотреть два случая: (b_1) группа $W^{(1)}$ состоит из одного регулярного г.в.к. n_1, имеющего кратность ≥ 2, (b_2) группа $W^{(1)}$ состоит из двух коллинеарных регулярных г.в.к. n_1, n_2.

В настоящей работе мы рассмотрим только случай (b_2). Исследования будем проводить с использованием формализма расслоения адаптированных реперов, с которым можно познакомиться в работах [1-9].

Пусть m-мерное нормально плоское подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} допускает только одну группу $W^{(1)}$ регулярных г.в.к., состоящую из двух неравных коллинеарных г.в.к. n_1, n_2, кратностей p_1 и p_2 соответственно. Поскольку в случае (b) выполняется также условие $\mu=\nu+1$, то M допускает только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_3.

Кратность вектора n_3 равна единице, и он, как мы знаем, ортогонален векторам n_1, n_2 [8, 9]. Поскольку $n_2 = \lambda n_1$, ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), а вектор средней кривизны H определяется формулой $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 + n_3$, то из условия $|n_1|^2 - \langle n_1, H \rangle = |n_2|^2 - \langle n_2, H \rangle$, которое равносильно полусимметричности подмногообразия M, легко получить, что $(p_2 - 1)\lambda^2 + (p_1 - p_2)\lambda + 1 - p_1 = 0$. Из этого уравнения следует, что условие $p_1 = 1$ равносильно условию $p_2 = 1$. В случае $p_1 = p_2 = 1$ подмногообразие M имеет кодефектность два. Как известно [2], подмногообразия кодефектности два автоматически являются Ric-полусимметрическими и даже полуэйнштейновыми. Покажем, что подмногообразия кодефектности два с двумя неравными однократными коллинеарными регулярными г.в.к. и одним ненулевым сингулярным г.в.к. в E_{m+2} существуют. Действительно, таковым является, например, прямое произведение $M_2 \times L^{m-2}$, где M_2 – двумерная поверхность с ненулевой гауссовой кривизной в E_3, отличная от сферы, а L^{m-2} – гиперповерхность ранга один в некотором E_{m-1}.

Рассмотрим случай $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$. В этом случае, решая относительно λ приведённое выше уравнение, получим $\lambda = \dfrac{1 - p_1}{p_2 - 1}$. Следовательно, $\lambda < 0$ (т. е. векторы n_1, n_2 противоположно направлены) и $H = \dfrac{p_2 - p_1}{p_2 - 1} n_1 + n_3$.
Пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(n_3)}$ обозначают собственные подпространства в $T_x(M)$, соответствующие векторам n_1, n_2, n_3 соответственно. Тогда $T_x^{(1)} = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(0)} = T_x^{(n_3)} + T_x'$, где T_x' – пространство относительной дефектности. Оно соответствует нулевому г.в.к. Как мы знаем, $\dim T_x^{(n_1)} = p_1$, $\dim T_x^{(n_2)} = p_2$, $\dim T_x^{(n_3)} = 1$, $\dim T_x' = m - p_1 - p_2 - 1$. В целях упрощения вычислений и геометрического описания подмногообразия M ортонормрепер $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\}$, $x \in M$, адаптируем следующим образом:

$$e_1, \cdots, e_{p_1} \in T_x^{(n_1)}, e_{p_1+1}, \cdots, e_{p_1+p_2} \in T_x^{(n_2)}, e_{p_1+p_2+1} \in T_x^{(n_3)},$$

$$e_{p_1+p_2+2}, \ldots e_m \in T_x', \; e_{m+1}, e_{m+2} \in T_x^{\perp}(M).$$

В дальнейшем индексы будут пробегать следующие значения:

$$a, b, c \in 1, \ldots, p_1, \; r, s, t = p_1 + 1, \ldots, p_1 + p_2,$$

$$u, v, w = p, \ldots, m, \; \alpha, \beta = m+1, m+2, \; i, j, k = 1, \ldots, m, \quad p = p_1 + p_2 + 1.$$

Поскольку нормальная связность плоская, то в некотором ортономрепере все матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы α_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_r^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_3 = \lambda_{p_1+p_2+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}, a \neq b$, $\lambda_r^{\alpha} = \lambda_s^{\alpha}, r \neq s$, в силу кратностей векторов n_1 и n_2. Поскольку вектор n_3 ортогонален векторам n_1 и n_2, а n_1 и n_2 коллинеарны, то единичные векторы e_{m+1} и e_{m+2} можем выбирать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен n_1 и n_2, а e_{m+2} – вектору n_3, т. е. $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_\alpha$, $n_2 = \lambda_r^{m+1} e_{m+1}$, $n_3 = \lambda_p^{m+2} e_{m+2}$. Тогда матрицы $\left\| h_{ij}^{m+1} \right\|$, $\left\| h_{ij}^{m+2} \right\|$ будут иметь, соответственно, следующий вид:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_a^{m+1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_a^{m+1} & & & & & & \\ & & & \lambda_r^{m+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_r^{m+1} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_p^{m+2} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{matrix} \right\|$$

где $\lambda_a^{m+1} \neq 0$, $\lambda_r^{m+1} \neq 0$, $\lambda_p^{m+2} \neq 0$, $\lambda_a^{m+1} \neq \lambda_r^{m+1}$.

Легко видеть, что такой вид матриц второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M в E_n в некотором ортонормрепере с такими же условиями на диагональные элементы является достаточным, чтобы M было нормально плоским с двумя коллинеарными ненулевыми регулярными г.в.к. кратностей $p_1, p_2 \geq 2$ и одним ненулевым сингулярным г.в.к.

Пусть $\left\{ \omega^1, \cdots, \omega^{m+2} \right\}$ – корепер, двойственный к выбранному выше реперу $\left\{ x, e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2} \right\}$. Тогда на подмногообразии M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0, \ \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha \right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k . \tag{2}$$

Если в (2) $i = a, j = b, a \neq b$, то имеем $h_{abk}^\alpha = 0$. При $i = r,\ j = s,\ r \neq s$ получим $h_{rsk}^\alpha = 0$. Полагая в (2) $i = j = a$, а затем $i = j = b, b \neq a$, будем иметь $d\lambda_a^\alpha + \lambda_a^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{aak}^\alpha \omega^k$, $d\lambda_b^\alpha + \lambda_b^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{bbk}^\alpha \omega^k$. Поскольку левые части этих соотношений равны, то

$$\begin{gathered} h_{aaa}^\alpha = 0,\ h_{aar}^\alpha = h_{bbr}^\alpha,\ h_{aau}^\alpha = h_{bbu}^\alpha,\ a \neq b, \\ d\lambda_a^{m+1} = h_{aar}^{m+1} \omega^r + h_{aau}^{m+1} \omega^u, \quad \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aar}^{m+2} \omega^r + h_{aau}^{m+2} \omega^u . \end{gathered} \tag{3}$$

Таким же образом можем получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered} h_{rrr}^\alpha = 0,\ h_{rra}^\alpha = h_{ssa}^\alpha,\ h_{rru}^\alpha = h_{ssu}^\alpha,\ r \neq s, \\ d\lambda_r^{m+1} = h_{rra}^{m+1} \omega^\alpha + h_{rru}^{m+1} \omega^u, \quad \lambda_r^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{rra}^{m+2} \omega^\alpha + h_{rru}^{m+2} \omega^u . \end{gathered} \tag{4}$$

Из вторых уравнений систем (3) и (4) следует, что

$$h_{aar}^{m+2} = h_{rra}^{m+2} = 0, \quad \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2} \omega^u, \quad \lambda_r^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{rru}^{m+2} \omega^u . \tag{5}$$

Так как $\lambda_r^{m+1} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, то, сравнивая первые уравнения систем (3) и (4), будем иметь

$$h_{rra}^{m+1} = h_{aar}^{m+1} = 0,\ h_{rru}^{m+1} = \frac{1-p_1}{p_2-1} h_{aau}^{m+1}.$$

Тогда системы (3)-(5) сводятся к следующим двум равенствам:

$$d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1}\omega^u, \quad \lambda_a^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2}\omega^u. \tag{6}$$

.

Поскольку $h_{rru}^{m+2} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1} h_{aau}^{m+2}$, то окончательно получаем следующие соотношения:

$$h_{aar}^{\alpha} = h_{rra}^{\alpha} = 0,\ h_{rru}^{\alpha} = \frac{1-p_1}{p_2-1} h_{aau}^{\alpha}.$$

Если в (2) положить $j = a, i = u$, то получим $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right)\omega_a^u = h_{aua}^\alpha\omega^a + h_{aur}^\alpha\omega^r + {}$ $+h_{auv}^\alpha\omega^v$. Согласно результату Чженя – Кюйпера (см.[12]) формы ω_a^u должны выражаться только через ω^a и ω^r. Поэтому из этого равенства следует, что $h_{auv}^\alpha = 0$ и, следовательно, $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right)\omega_a^u = h_{aua}^\alpha\omega^a + h_{aur}^\alpha\omega^r$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ имеем

$$\lambda_a^{m+1}\omega_a^u = h_{aau}^{m+1}\omega^a + h_{aur}^{m+1}\omega^r, \quad \lambda_u^{m+2}\omega_a^u = -h_{aau}^{m+2}\omega^a - h_{aur}^{m+2}\omega^r \tag{7}$$

Если в (7) положить $u = p$, а затем $u > p$, то будем иметь

$$h_{aau}^{m+2} = h_{aur}^{m+2} = 0,\ u > p, \quad \lambda_p^{m+2}\omega_a^p = -h_{aap}^{m+2}\omega^a - h_{apr}^{m+2}\omega^r. \tag{8}$$

Точно так же, если в (2) положить $j = r, i = u$, то получим

$$\lambda_r^{m+1}\omega_r^u = h_{rru}^{m+1}\omega^r + h_{aur}^{m+1}\omega^a,\ \lambda_u^{m+2}\omega_r^u = -h_{rua}^{m+2}\omega^a - h_{rru}^{m+2}\omega^r. \tag{9}$$

Из последнего равенства при $u = p$, а затем при $u > p$ будем иметь

$$h_{rru}^{m+2} = 0,\ u > p, \quad \lambda_p^{m+2}\omega_r^p = -h_{rpa}^{m+2}\omega^a - h_{rrp}^{m+2}\omega^r. \tag{10}$$

Пусть в (2) $i = u, j = v, u, v > p$. Поскольку $\lambda_u^\alpha = \lambda_v^\alpha = 0$, то $h_{uvk}^\alpha = 0$ при указанных значениях индексов u, v. Если в (2) положить $i = j = p$, то будем иметь $d\lambda_p^\alpha + \lambda_p^\beta\omega_\beta^\alpha = h_{ppa}^\alpha\omega^a + h_{ppr}^\alpha\omega^r + h_{ppv}^\alpha\omega^v$. Так как $h_{app}^\alpha = h_{rpp}^\alpha = 0$ согласно результату Чженя – Кюйпера, то $d\lambda_p^\alpha + \lambda_p^\beta\omega_\beta^\alpha = h_{ppv}^\alpha\omega^v$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ имеем

$$\lambda_p^{m+2}\omega_{m+2}^{m+1} = h_{ppv}^{m+1}\omega^v, \quad d\lambda_p^{m+2} = h_{ppv}^{m+2}\omega^v. \tag{11}$$

Если в (2) положить $i = u, j = p, u > p$, то получим $\lambda_p^\alpha\omega_p^u = h_{upk}^\alpha\omega^k$. Поскольку $h_{auv}^\alpha = h_{ruv}^\alpha = 0$ при любых значениях индексов u, v, то из последнего равенства имеем $\lambda_p^\alpha\omega_p^u = h_{upp}^\alpha\omega^p + h_{upw}^\alpha\omega^w$, где $w > p$. Так как $h_{uvk}^\alpha = 0$ при $u, v > p$, то $\lambda_p^\alpha\omega_p^u = h_{upp}^\alpha\omega^p$ при $u > p$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, соответственно, имеем

$$h_{upp}^{m+1} = 0,\ \lambda_p^{m+2}\omega_p^u = h_{upp}^{m+2}\omega^p,\ u > p. \tag{12}$$

Если в (2) положить $j = a, i = r$, то получим

$$\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_r^\alpha\right)\omega_a^r = h_{ara}^\alpha \omega^a + h_{arr}^\alpha \omega^r + h_{aru}^\alpha \omega^u .$$

Отсюда в силу $h_{aar}^\alpha = h_{arr}^\alpha = 0$ имеем $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_r^\alpha\right)\omega_a^r = h_{aru}^\alpha \omega^u$. Полагая здесь $\alpha = m+1$, а затем $\alpha = m+2$, будем иметь, соответственно, $\left(\lambda_a^{m+1} - \lambda_r^{m+1}\right)\omega_a^r = = h_{aru}^{m+1}\omega^u$, $h_{aru}^{m+2} = 0$. Учитывая, что $\lambda_r^{m+1} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, из предпоследнего равенства получим

$$\lambda_a^{m+1}\frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\omega_a^r = h_{aru}^{m+1}\omega^u . \tag{13}$$

В итоге для компонент тензора h_{ijk}^α получаем следующие соотношения:

$$h_{abk}^\alpha = 0, a \neq b,\ h_{rsk}^\alpha = 0, r \neq s,\ h_{uvk}^\alpha = 0, u > p, v > p ,$$

$$h_{aaa}^\alpha = h_{rrr}^\alpha = h_{aar}^\alpha = h_{arr}^\alpha = h_{auv}^\alpha = h_{ruv}^\alpha = h_{aru}^{m+2} = 0 ,$$

$$h_{aau}^\alpha = h_{bbu}^\alpha, a \neq b, h_{rru}^\alpha = h_{ssu}^\alpha, s \neq r, h_{rru}^\alpha = \frac{1-p_1}{p_2-1}h_{aau}^\alpha ,$$

$$h_{aau}^{m+2} = h_{rru}^{m+2} = h_{upp}^{m+1} = 0,\ u > p .$$

С учетом этих соотношений систему уравнений (6)-(13) можем преобразовать к следующему виду:

$$\begin{gathered}
d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1}\omega^u ,\quad \lambda_a^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2} = h_{aap}^{m+2}\omega^p ,\quad \lambda_a^{m+1}\omega_a^u = h_{aau}^{m+1}\omega^a + h_{aur}^{m+1}\omega^r ,\\
\lambda_p^{m+2}\omega_a^p = -h_{aap}^{m+2}\omega^a ,\quad \lambda_r^{m+1}\omega_r^u = h_{rru}^{m+1}\omega^r + h_{aur}^{m+1}\omega^a ,\quad \lambda_p^{m+2}\omega_r^p = -h_{rrp}^{m+2}\omega^r \\
\lambda_p^{m+2}\omega_{m+1}^{m+2} = -h_{ppp}^{m+1}\omega^p ,\quad d\lambda_p^{m+2} = h_{ppv}^{m+2}\omega^v ,\quad \lambda_p^{m+2}\omega_p^u = h_{upp}^{m+2}\omega^p ,\ u > p ,\\
\frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}\omega_a^r = h_{aru}^{m+1}\omega^u .
\end{gathered} \tag{14}$$

Из третьего уравнения этой системы при $u = p$ и четвертого уравнения, а затем из пятого уравнения при $u = p$ и шестого уравнения получаем следующие равенства:

$$\frac{h_{aap}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}} = -\frac{h_{aap}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}} ,\qquad \frac{h_{rrp}^{m+1}}{\lambda_r^{m+1}} = -\frac{h_{rrp}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}} ,\qquad h_{arp}^{m+1} = 0 .$$

Поскольку $\lambda_r^{m+1} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}\lambda_a^{m+1}$, $h_{rrp}^{m+1} = \dfrac{1-p_1}{p_2-1}h_{aap}^{m+1}$, то левые части приведенных выше отношений совпадают и, следовательно, $h_{aap}^{m+2} = h_{rrp}^{m+2}$. В силу $h_{rrp}^{m+2} = \dfrac{1-p_1}{p_2-l}h_{aap}^{m+2}$ имеем $h_{aap}^{m+2} = h_{rrp}^{m+2} = 0$. Следовательно, $h_{aap}^{m+1} = h_{rrp}^{m+1} = h_{ppp}^{m+1} = 0$, $\omega_{m+1}^{m+2} = 0$. Последнее условие геометрически означает, что нормальные к подмногообразию M векторные поля e_{m+1}, e_{m+2} параллельны в нормальном расслоении.

Учитывая эти результаты, систему (14) можем преобразовать к следующему виду:

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = A_u\omega^u ,\ u > p ,\qquad \omega_a^u = A_u\omega^a + B_{aur}\omega^r ,\ u > p ,$$

$$\omega_r^u = A_u\omega^r + \frac{p_2-1}{1-p_1}B_{aur}\omega^a,\ u>p,\quad d\ln\left|\lambda_p^{m+2}\right| = D_v\omega^v, \tag{15}$$

$$\omega_p^u = D_u\omega^p,\ u>p,\quad \frac{p_1+p_2-2}{p_2-1}\omega_r^a = B_{aru}\omega^u,\ u>p,\quad \omega_a^p = \omega_r^p = \omega_{m+1}^{m+2} = 0,$$

где функции A_u, B_{aur} и D_v определяются по формулам $A_u = \dfrac{h_{aau}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}$, $B_{aur} = \dfrac{h_{aur}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}}$, $D_v = \dfrac{h_{ppv}^{m+2}}{\lambda_p^{m+2}}$. Поскольку $h_{aap}^{m+1} = h_{arp}^{m+1} = 0$, то $A_p = B_{arp} = 0$, что и предполагается в дальнейшем.

Распределение $T^{(n_1)}$ задается следующей дифференциальной системой:

$$\omega^\alpha = 0, \omega^r = 0, \omega^u = 0. \tag{16}$$

Если учесть уравнения системы (15) и формулы

$$\omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a,\ \omega_r^{m+1} = \lambda_r^{m+1}\omega^r,\ \omega_u^{m+1} = \omega_a^{m+2} = \omega_r^{m+2} = 0,$$
$$\omega_u^{m+2} = 0,\ u>p,\ \omega_p^{m+2} = \lambda_p^{m+2}\omega^p,$$

то легко показать, что внешние дифференциалы левых частей уравнений системы (16) также равны нулю. Это значит, что система (16) вполне интегрируема. Поскольку при выполнении условий (16) имеем

$$\omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a, \lambda_a^{m+1} = \lambda_b^{m+1}, a\neq b, \omega_a^u = A_u\omega^a,\ u>p,\ \omega_a^{m+2} = \omega_a^r = \omega_a^p = 0,$$

то интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)}$ представляет собой сферу размерности p_1, которую будем обозначать через S^{p_1}.

Точно так же можно доказать, что дифференциальная система $\omega^\alpha = 0$, $\omega^r = 0, \omega^u = 0$, задающая распределение $T^{(n_2)}$, также является вполне интегрируемой. Его интегральное многообразие является p_2-мерной сферой, которую будем обозначать через S^{p_2}.

Аналогично доказывается, что дифференциальные системы

$$\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^u = 0,\ u>p,$$
$$\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^p = 0,$$

задающие, соответственно, распределения $T^{(n_3)}$ и T', вполне интегрируемы. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_3)}$ представляет собой кривую с касательным вектором e_p. Поскольку

$$de_p = \left(\lambda_p^{m+2}e_{m+2} + \sum_{\substack{u\\(u\neq p)}} D_u e_u\right)\omega^p,$$

то вектор e_p не является постоянным, а кривая, следовательно, не является прямой. Легко видеть, что интегральное многообразие распределения T' представляет собой $(m-p)$-мерную плоскость, которую будем обозначать через E_{m-p}.

Рассмотрим теперь дифференциальную систему $\omega^{\alpha}=0, \omega^{a}=0, \omega^{r}=0$, которая задает распределение $T^{(0)}=T^{(n_3)}+T'$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha}=0$, $d\omega^{a}=0$, $d\omega^{r}=0$ и, следовательно, распределение $T^{(0)}$ интегрируемо. Поскольку интегральное многообразие распределения $T^{(n_3)}$ является кривой, а интегральное многообразие распределения T' есть $(m-p)$-мерная плоскость, то интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$ представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(m-p)$-мерных плоскостей и, следовательно, является локально евклидовым.

Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^{\alpha}=0, \omega^{u}=0$, задающую распределение $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}=T^{(1)}$. Поскольку

$$d\omega^{\alpha}=0, \quad d\omega^{p}=0, \quad d\omega^{u}=\frac{p_1+p_2-2}{p_1-1}B_{uar}\omega^{a}\wedge\omega^{r},\ u>p,$$

то распределение $T^{(1)}$ будет вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда $B_{uar}=0, u>p$, т. е. $h_{aur}^{m+1}=0$ при $u>p$.

Рассмотрим три случая.

1. Пусть индекс относительной дефектности подмногообразия M равен нулю, т. е. T'– нулевое подпространство. Тогда множество значений индекса u $(u>p)$ пусто и $B_{uar}=0$. В этом случае распределение $T^{(1)}=T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, определяемое системой $\omega^{\alpha}=0, \omega^{p}=0$, является интегрируемым. Система (15) в этом случае принимает следующий вид:

$$\lambda_a^{m+1}=const(\neq 0),\ d\ln\left|\lambda_p^{m+2}\right|=D_p\omega^p,\quad \omega_{m+1}^{m+2}=0,\ \omega_a^p=\omega_r^p=\omega_a^r=0.$$

Из последнего условия следует, что распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$ параллельны в римановой связности на подмногообразии M. Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т. е. $M=S^{p_1}\times S^{p_2}\times C$, где C– интегральная кривая распределения $T^{(n_3)}$, которая не является прямой. Такое произведение имеет коразмерность три и более, что противоречит нашему предположению о коразмерности.

2. Пусть подмногообразие M имеет ненулевой индекс относительной дефектности, т. е. $\dim T'\geq 1$, и пусть $B_{aru}=0$. Тогда распределение $T^{(1)}=$ $=T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, определяемое системой $\omega^{\alpha}=0, \omega^{u}=0$, является интегрируемым. В этом случае система (15) сводится к следующей:

$$\lambda_a^{m+1}=const(\neq 0),\quad \lambda_p^{m+2}=const(\neq 0),\ \omega_a^u=A_u\omega^a,$$
$$\omega_r^u=A_u\omega^r,\ u>p,\quad \omega_a^p=\omega_r^p=0,\quad \omega_{m+1}^{m+2}=\omega_p^u=\omega_a^r=0. \qquad (17)$$

Условие $\omega_a^r=0$ означает, что распределения $T^{(n_1)}$ и $T^{(n_2)}$ параллельны на интегральном многообразии $M^{(1)}$ распределения $T^{(1)}$. Легко видеть, что эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ (это следует из (17) и предыдущих формул). Следовательно, $M^{(1)}$ является прямым произведением их интегральных многообразий, т. е. $M^{(1)} = S^{p_1} \times S^{p_2}$. Из выражений для $\omega_a^u, \omega_r^u, \omega_a^p, \omega_r^p$ (см. (17)) следует, что $M^{(1)}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M. Поскольку подмногообразие M является полуэйнштейновым, то $M^{(1)}$ будет эйнштейновым (см. [4]). Этот факт можем доказать также путем прямого вычисления. Действительно, поскольку все матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ имеют диагональный вид, то его тензор Риччи также имеет диагональный вид, а нормальная связность является плоской. Если через $\tilde{n}_a, \tilde{n}_r$ обозначим главные векторы кривизны подмногообразия $M^{(1)}$, то получим следующие формулы:

$$\tilde{n}_a = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \sum_u f_u e_u, \quad \tilde{n}_r = \lambda_r^{m+1} e_{m+1} + \sum_u f_u e_u, \quad \tilde{H} = p_1 \tilde{n}_a + p_2 \tilde{n}_r.$$

Вычисляя по общей формуле (см. [8]) диагональные элементы $\tilde{\rho}_a, \tilde{\rho}_r$ тензора Риччи подмногообразия $M^{(1)}$, получим

$$\tilde{\rho}_a = \tilde{\rho}_r = \left(\lambda_b^{m+1}\right)^2 \frac{p_1 - 1}{p_2 - 1} + \sum_u f_u^2.$$

Отсюда и следует эйнштейновость подмногообразия $M^{(1)}$. Отметим, что поскольку на $M^{(1)}$ выполняется равенство $\omega_u^\alpha = 0$, то $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения для $M^{(1)}$, являются параллельными в нормальном расслоении. Так как $M^{(1)}$ является нормально плоским, то в $T^\perp(M)$ и $T^{(0)}$ индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что при $\omega^\alpha = 0, \omega^u = 0$ векторные поля e_u в $T^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы они были параллельны. Последнее равносильно тому, что $\omega_u^v = \Gamma_{uw}^v \omega^w$. В дальнейшем мы будем считать, что e_u так и выбраны.

Продолжим изучение подмногообразия M. Поскольку в рассматриваемом случае $B_{aru} = 0$, то система (15) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} d \ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = A_u \omega^u, \\ \omega_a^u = A_u \omega^a, \; \omega_r^u = A_u \omega^r, \; \omega_a^p = \omega_r^p = 0, \\ \omega_p^u = D_u \omega^p, \; u > p, \; \omega_a^r = \omega_{m+1}^{m+2} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Поскольку $A_p = 0$, то можем считать, что в первой, третьей и четвертой формулах системы (18) индекс u принимает все свои значения. Дифференцируя внешним образом первое и третье (или четвертое) уравнения этой системы и применяя лемму Картана, получим

$$dA_u - A_u \omega_u^v = E_{uv} \omega^v, \; E_{uv} = E_{vu}, \qquad dA_u - A_v \omega_u^v = A_u A_v \omega^v. \tag{19}$$

Следовательно $E_{uv} = A_u A_v$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^p = 0$ (или $\omega_r^p = 0$), будем иметь

$$\sum_u A_u D_u = 0. \tag{20}$$

Легко проверить, что $d\omega_{m+1}^{m+2} = 0$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^r = 0$, получим

$$\lambda_a^{m+1}\lambda_r^{m+1}+\sum_u A_u^2=0 .$$

Наконец, дифференцируя внешним образом остальные два уравнения системы (18), приходим к следующим соотношениям:

$$dD_v-D_u\omega_v^u=E_{vu}\omega^u,\ E_{vu}=E_{uv}, \tag{21}$$

$$dD_u-D_v\omega_v^u-D_uD_v\omega^v=G_u\omega^p, u,v>p . \tag{22}$$

Рассмотрим следующие векторные поля:

$$\xi=\sum_u A_u e_u , \quad \eta=D_p e_p , \quad \zeta=\sum_{\substack{u\\(u>p)}} D_u e_u .$$

Поскольку $A_p=0$, то ξ ортогонально η, а из (20) следует, что ξ ортогонально также ζ. Очевидно, что η и ζ также ортогональны. Рассмотрим эти векторные поля на подмногообразии $M^{(1)}$. Так как на $M^{(1)}$ выполняются условия $\omega^\alpha=0, \omega^u=0$, то из (19), (21), (22) следует, что векторные поля ξ, $\eta+\zeta$, ζ параллельны в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(1)}$. Из (21) при $v=p$ следует, что на $M^{(1)}$ функция D_p является постоянной. Поскольку на $M^{(1)}$ выполняются также условия $\omega_p^u=\omega_u^\alpha=0$, то векторное поле e_p, а следовательно и η, параллельны в нормальном расслоении на $M^{(1)}$. Теперь мы можем специализировать репер следующим образом. Выберем вектор e_{p+1} коллинеарно ξ, а e_{p+2} коллинеарно ζ. Тогда

$$\xi=A_{p+1}e_{p+1}, \quad A_v=0,\ v\neq p+1, \quad \zeta=D_{p+2}e_{p+2}, \quad D_v=0,\ v\neq p+2, v>p .$$

Поскольку на $M^{(1)}$ функция A_{p+1} постоянна и $\omega_u^v=0$, то для точки $x\in M^{(1)}$ имеем

$$d\left(x+A_{p+1}^{-1}e_{p+1}\right)=\omega^a e_a+\omega^r e_r+A_{p+1}^{-1}\left(\omega_{p+1}^a e_a+\omega_{p+1}^r e_r\right)$$
$$=\omega^a e_a+\omega^r e_r+A_{p+1}^{-1}\left(-A_{p+1}\omega^a e_a-A_{p+1}\omega^r e_r\right)=0 .$$

Следовательно $x+A_{p+1}^{-1}e_{p+1}=const$ и $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n, для которой вектор e_{p+1} является нормальным.

Поскольку $A_v=0$ при $v\neq p+1$, то из (19) при $u\neq p+1$ получаем $A_{p+1}\cdot\omega_u^{p+1}=0$. Если $A_{p+1}=0$, то получим, что $\omega_a^u=\omega_r^u=\omega_a^r=0$. В силу этого, как легко показать, подмногообразие M является прямым произведением двух сфер и локально евклидова подмногообразия, отличного от плоскости. Тогда M имеет коразмерность три или более, что противоречит предположению о коразмерности. Следовательно $A_{p+1}\neq 0$, и тогда $\omega_u^{p+1}=0$. Поскольку $\omega_a^u=\omega_r^u=0$ при $u\neq p+1$, то отсюда следует, что распределения $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}+L, L'$, где L_x порождается вектором e_{p+1}, а L'_x является линейной оболочкой векторов $e_p, e_{p+2},\dots,e_m$, параллельны на подмногообразии M. Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то M является их прямым произведением. Следовательно, M

есть прямое произведение риччи-полусимметрической гиперповерхности, описаной в пункте (e) теоремы 1 в [3], и локально евклидовой гиперповерхности, которая является гиперповерхностью ранга один (см. [8]).

3. Рассмотрим общий случай, когда в системе (15) среди коэффициентов B_{aur} имеются отличные от нуля и, кроме того, подмногообразие M имеет ненулевой индекс относительной дефектности, т.е. $\dim T' \geq 1$. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (15), получим

$$\left(dA_u - A_v\omega_u^v\right)\wedge\omega^u + \frac{p_1+p_2-2}{p_1-1}A_u B_{ar}^u\omega^a\wedge\omega^r = 0 .$$

Отсюда легко получаются следующие соотношения:

$$dA_u - A_v\omega_u^v = L_{uv}\omega^v,\; L_{uv} = L_{vu}, \quad \sum_u A_u B_{aru} = 0 . \tag{23}$$

В плоскости $T_x^{(0)}$ рассмотрим векторы

$$F = \sum_u A_u e_u,\;\; F_{ar} = \sum_u B_{aru} e_u .$$

Второе из равенств (23) является условием ортогональности инвариантного вектора F к системе векторов $\left(F_{ar}\right)$. Поскольку $A_p = B_{arp} = 0$, то векторы F и F_{ar} ортогональны вектору e_p. Следовательно, они принадлежат пространству относительной дефектности T_x'. Очевидно, что $0 \leq rang\left(F_{ar}\right) \leq \quad \leq \dim T_x'$. Рассмотрим все возможные случаи. Если $rang\left(F_{ar}\right) = 0$, то $B_{aru} = 0$ и мы получаем случай, рассмотренный в п. 2. Если $rang\left(F_{ar}\right) = \dim T_x'$, то на основании второго из равенств (23) заключаем, что $A_u = 0$ для любого u. Тогда $\omega_a^u = B_{aru}\omega^r$, и, дифференцируя это уравнение внешним образом, получим

$$\left(dB_{aru} - B_{bru}\omega_a^b - B_{asu}\omega_r^s - B_{arv}\omega_u^v\right)\wedge\omega^r$$
$$+\frac{p_2-1}{p_1+p_2-2}\,\frac{p_2-1}{p_1-1}\sum_r\left(B_{arv}B_{bru} + B_{aru}B_{brv}\right)\omega^v\wedge\omega^b = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$dB_{aru} - B_{bru}\omega_a^b - B_{asu}\omega_s^r - B_{arv}\omega_u^v = h_{arus}\omega^s, \qquad \sum_r\left(B_{arv}B_{bru} + B_{aru}B_{brv}\right) = 0 .$$

Поскольку последнее равенство имеет место для всех значений индексов, то, полагая в нем $b = a,\ v = u$, будем иметь

$$\sum_r B_{aru}B_{aru} = 0 .$$

Следовательно, $B_{aru} = 0$, что противоречит предположению, что не все коэффициенты B_{aru} равны нулю. Пусть $0 < rang\left(F_{ar}\right) < \dim T_x'$. В этом случае в плоскости T_x' можем провести дополнительную адаптацию векторов $e_v, v \neq p$. Именно, вектор e_m можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен инвариантному вектору F. Тогда $F = A_m e_m$ и, следовательно, $A_u = 0$

при $u \neq m$. Будем считать, что $A_m \neq 0$ (иначе получим предыдуший случай).

Теперь второе из равенств (23) принимает следующий вид: $A_m B_{arm} = 0$. Тогда $B_{arm} = 0$ и из второго уравнения системы (15) следует, что $\omega_a^m = A_m \omega^a$. Из (22) при $u = m$ и $u \neq m$, соответственно, получаем

$$dA_m = L_{mv}\omega^v, \quad \omega_u^m = -\frac{L_{uv}}{A_m}\omega^v, \tag{24}$$

где $u = p, p+1, \cdots, m-1$. Далее, поскольку плоскость T_x' является евклидовым пространством, то, не умаляя общности, можем считать, что в T_x' в качестве локальных координат выбраны прямоугольные декартовы координаты. Тогда $\omega_u^v \; (u \neq p, v \neq p)$ должны обращаться в нулевые формы при $\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0, \omega^p = 0$ (эта система задает распределение T'). Отсюда следует, что они должны выражаться только через $\omega^a, \omega^r, \omega^p$. Тогда из второго равенства в (24) следует, что

$$\omega_u^m = G_u^m \omega^p, \quad G_u^m = -\frac{L_{up}}{A_m}, u \neq m, \quad L_{uv} = 0, u \neq m, v \neq p.$$

Полагая в последнем равенстве $u = m$, получим $L_{um} = 0$ при $u \neq m$. Тогда первое из равенств (24) сводится к следующему равенству: $dA_m = L_{mm}\omega^m$.

Учитывая все полученные выше соотношения, а также уравнения системы (15) и дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_a^m = A_m \omega^a$, получим

$$\left(L_{mm} - A_m^2\right)\omega^m \wedge \omega^a + A_m B_{arv}\omega^r \wedge \omega^v - \sum_v B_{arv} G_v^m \omega^r \wedge \omega^p = 0.$$

Поскольку $B_{arp} = 0$, а 2-формы $\omega^m \wedge \omega^a$, $\omega^r \wedge \omega^v, v \neq p$, $\omega^r \wedge \omega^p$ независимы, то все коэффициенты равны нулю. Следовательно, $A_m B_{arv} = 0$, т. е. $B_{arv} = 0$, и мы приходим к уже рассмотренному случаю.

Проведённые исследования позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема. *Пусть в евклидовом пространстве E_n m мерное нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M коразмерности два допускает*

а) только одну группу $W^{(1)}$ регулярных главных векторов кривизны, состоящую из двух неравных коллинеарных векторов,

б) только один ненулевой сингулярный главный вектор кривизны.

Тогда M локально является или подмногообразием кодефектности два, или представляет собой прямое произведение $K^m \times V$, где $K^m -$ полуэйнштейнова гиперповерхность в некотором евклидовом пространстве $E_{m+1}, m \geq 5$, которая является конусом над прямым произведением двух сфер, а $V -$ гиперповерхность ранга 1.

Армянский национальный политехнический университет

А. Р. Назарян

Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с единичными индексами регулярности и сингулярности

Даётся геометрическое описание нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с двумя неравными коллинеарными регулярными и одним ненулевым сингулярным главными векторами кривизны в евклидовых пространствах.

Ա. Ռ. Նազարյան

Նորմալ հարթ երկու կոաչափի ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմություններ ռեգուլյարության և սինգուլյարության միավոր ինդեքսով

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափի նորմալ հարթ երկու ոչ հավասար համագիծ ռեգուլյար և մեկ ոչ զրոյական սինգուլյար կորության գլխավոր վեկտորներով ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը:

A. R. Nazaryan

Normally Flat Ricci-Semisymmetric Submanifolds of Codimention Two with Unity Indexes of Regularity and Singularity

A geometric description of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds of codimension two with two unequal collinear regular and one non-zero singular principal curvature vectors in Euclidean spaces is presented.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer. 2009. 306 p.
2. *Мирзоян В. А.* - Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. – 2000. Т. 191**.** № 9. С. 65-80.
4. *Мирзоян В. А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 107-124.
5. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2006. Т. 197. № 7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 69-94.
7. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 119-125.
8. *Мирзоян В. А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2011. 75. № 6. С. 47-78.
9. *Мирзоян В. А., Мачкалян Г. С.* - Изв. вузов. Математика. 2012. № 9. С.19-31.
10. *Mirzoyan V. A.* - Reports of NAS RA. 2012. V. 112. № 1. P. 19-29.
11. *Szabo Z. I.* - J. Differential Geom. 1982. V. 17**.** № 4. P. 531-582.
12. *Chern S. S., Kuiper N.* - Ann. of. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. П. Степанян

Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры

(Представлено академиком Г. Е. Багдасаряном 20/XI 2015)

Ключевые слова: *ортотропия, пластинка-полоса, упругое защемление, переменная толщина, термоупругость, поперечный сдвиг.*

В настоящей статье решается задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига, один торец которой упруго защемлен, а другой шарнирно оперт. Пластинка-полоса находится только под действием температуры. Приведен численный пример, и исходя из выполненных расчетов исследована зависимость основных величин (перемещений, усилий, изгибающих моментов) от параметров, характеризующих поперечный сдвиг и изменяемость пластинки по толщине. Делаются качественные заключения.

1. Исследовано одно из применений теории, предложенной в работе [1], где, пользуясь методом представления решений степенными многочленами по поперечной координате с учетом гипотезы Франца Неймана [2] (с. 330), по аналогии с работой [3] получены уравнения и краевые условия задачи термоупругости ортотропной пластинки переменной толщины при учете влияний поперечных сдвигов и изменения температуры. Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу с линейно-переменной толщиной h и шириной l. Пластинку-полосу отнесем к системе прямоугольных декартовых координат $x, y, z,$ оси которой параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xoy совместим со срединной плоскостью пластинки-полосы, а ось oz направим вертикально вниз. Условимся, что толщина пластинки-полосы, оставаясь симметричной относительно срединной плоскости, изменяется линейно только вдоль координатной оси ox по закону

$$h = h_0 + h_1 x, \tag{1.1}$$

где h_0 и h_1 – известные параметры. На поверхностях пластинки-полосы $z=+\dfrac{h}{2}$ и $z=-\dfrac{h}{2}$ действует температура соответственно θ^{+} и θ^{-}, а изменение температуры θ внутри пластинки-полосы будем считать линейным относительно поперечной координаты z

$$\theta=\frac{\theta^{+}+\theta^{-}}{2}+\frac{z}{h}\left(\theta^{+}-\theta^{-}\right). \tag{1.2}$$

Введем следующие обозначение, которые приводят к безразмерным величинам:

$$\begin{gathered}
a=nh_0,\quad B=\frac{\beta}{B_{11}},\quad D=\frac{\alpha}{B_{11}h_0^2},\quad \left(\frac{D}{B}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow B=\frac{\alpha n^2}{3B_{11}}\right),\qquad w=h_0\overline{w},\\
x=l\,\overline{x},\quad s=\frac{h_0}{l},\quad h=h_0H,\quad h_1=\gamma s,\quad H=1+\gamma\overline{x},\quad B_{12}=mB_{11},\quad \varphi_1=B_{11}\overline{\varphi}_1,\\
a_{55}B_{11}=\chi,\qquad N_x=B_{11}h_0\overline{N}_x,\qquad M_x=B_{11}h_0^2\overline{M}_x,
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь w есть прогиб, B_{ij} – механические параметры, которые по известным формулам [1] выражаются через упругие постоянные материала, φ_1 – функция, характеризующая распределение поперечного касательного напряжения τ_{xz}, N_x – поперечная сила, M_x – изгибающий момент пластинки-полосы.

В рамках теории [2] с помощью обозначений (1.3) для безразмерной поперечной силы и изгибающего момента получим следующие формулы:

$$\overline{N}_x=\frac{2}{3}H\overline{\varphi}_1-\frac{\gamma sH}{12}\left[sH\left(s\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\chi\frac{d\overline{\varphi}_1}{d\overline{x}}\right)+\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^{+}-\theta^{-}\right)\right], \tag{1.4}$$

$$\overline{M}_x=-\frac{sH^3}{12}\left[\left(s\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\chi\frac{d\overline{\varphi}_1}{d\overline{x}}\right)+\frac{1}{sH}\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^{+}-\theta^{-}\right)\right], \tag{1.5}$$

где α_x и α_y – коэффициенты теплового расширения материала по направлениям осей x и y соответственно.

2. Для решения задачи изгиба пластинки-полосы на основе [2] и обозначений (1.3) получим

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{d\overline{x}}\left(H^2\overline{\varphi}_1\right)=0\\
\dfrac{d}{d\overline{x}}\left(H^2\dfrac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}\right)-\dfrac{\chi}{s}\dfrac{d}{d\overline{x}}\left(H^2\dfrac{d\overline{\varphi}_1}{d\overline{x}}\right)+\dfrac{8\overline{\varphi}_1}{s^3}+\dfrac{\gamma}{s^2}\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^{+}+\theta^{-}\right)=0.
\end{cases} \tag{2.1}$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.1), для $\overline{\varphi}_1$ получим

$$\overline{\varphi}_1=\frac{c_1}{\left(1+\gamma\overline{x}\right)^2}\ . \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) во второе уравнение системы (2.1), для безразмерного прогиба имеем

$$\bar{w}=c_4+c_3\bar{x}-\frac{c_2}{\gamma^2}\ln\left(1+\gamma\bar{x}\right)+\frac{c_1}{s^3\gamma^3\left(1+\gamma\bar{x}\right)}\left(4-\chi\gamma^2 s^2\right)-$$
$$-\frac{1}{s^2\gamma^2}\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^+-\theta^-\right)\left[\left(1+\left(1+\gamma\bar{x}\right)\right)\ln\left(1+\gamma\bar{x}\right)-\gamma\bar{x}\right]. \tag{2.3}$$

С учетом (2.2) и (2.3) из (1.4) и (1.5) для безразмерной $\bar{N}_x$ – поперечной силы и $\bar{M}_x$ – изгибающего момента получим

$$\bar{N}_x=-\frac{1}{12}s\gamma\left(s^2c_2-\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^--\theta^+\right)\right) \tag{2.4}$$

$$\bar{M}_x=\frac{-8c_1+s\gamma(1+\gamma x)\left[\left(\alpha_x+m\alpha_y\right)\left(\theta^--\theta^+\right)-s^2c_2\right]}{12s\gamma}. \tag{2.5}$$

Краевые условия упруго защемленного вида при $x=0$ описываются уравнениями:

$$w=a\frac{dw}{dx}+BN_x,\quad \frac{dw}{dx}=D\left(aN_x-M_x\right). \tag{2.6}$$

Шарнирное опирание при $x=l$

$$w=0,\qquad M_x=0. \tag{2.7}$$

Эти условия с помощью обозначений (1.3) принимают вид:
при $\bar{x}=0$

$$\bar{w}=ns\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}+\frac{\alpha n^2}{3}\bar{N}_x,\qquad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}=\frac{\alpha}{s}\left(n\bar{N}_x-\bar{M}_x\right); \tag{2.8}$$

при $\bar{x}=1$

$$\bar{w}=0,\quad \bar{M}_x=0. \tag{2.9}$$

Удовлетворив краевым условиям (2.8) и (2.9), с учетом (2.3) для определения постоянных интегрирования $c_1\div c_4$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot c_1+a_{12}\cdot c_2+a_{13}\cdot c_3+a_{14}\cdot c_4=b_1,\\ a_{21}\cdot c_1+a_{22}\cdot c_2+a_{23}\cdot c_3+a_{24}\cdot c_4=b_2,\\ a_{31}\cdot c_1+a_{32}\cdot c_2+a_{33}\cdot c_3+a_{34}\cdot c_4=b_3,\\ a_{41}\cdot c_1+a_{42}\cdot c_2+a_{43}\cdot c_3+a_{44}\cdot c_4=b_4, \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь $b_1\div b_4$, и коэффициенты a_{ij} определяются по следующим формулам:

$a_{11}=\dfrac{-(1+ns\gamma)\left(-4+s^2\gamma^2\chi\right)}{s^3\gamma^3}$, $\quad a_{12}=\dfrac{ns}{\gamma}+\dfrac{1}{36}n^2s^3\alpha\gamma$, $\quad a_{13}=-ns$, $\quad a_{14}=1$,

$b_1=-\left(\dfrac{n\theta t}{s\gamma}+\dfrac{1}{36}n^2s\alpha\gamma\theta t\right)$, $a_{21}=-\dfrac{12+2s\alpha\gamma-3s^2\gamma^2\chi}{3s^3\gamma^2}$, $a_{22}=\dfrac{1}{12}\left(-s\alpha-\dfrac{12}{\gamma}+ns^2\alpha\gamma\right)$,

$a_{23}=1$, $\quad a_{24}=0$, $\quad b_2=\dfrac{\left(ns^2\alpha\gamma^2-s\alpha\gamma-12\right)\theta t}{-12s^2\gamma}$, $\quad a_{31}=\dfrac{4-s^2\gamma^2\chi}{s^3\gamma^3(1+\gamma)}$, $\quad a_{32}=\dfrac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^2}$,

$a_{33}=1$, $\quad a_{34}=1$, $\quad b_3=\dfrac{\theta t\left(-\gamma+(2+\gamma)\ln(1+\gamma)\right)}{s^2\gamma^2}$, $\quad a_{41}=\dfrac{-2}{3s\gamma}$, $\quad a_{42}=-\dfrac{1}{12}s^2(1+\gamma)$,

$a_{43} = 0$, $a_{44} = 0$, $b_4 = \dfrac{\left(12 + s\alpha\gamma - ns^2\alpha\gamma^2\right)\theta t}{12 s^2 \gamma}$.

После решения системы (2.10) получим выражение для неизвестных переменных $c_1 \div c_4$. Подставив найденные выражения в формулы (2.3), (2.4) и (2.5), получим формулы для определения значения безразмерного прогиба, поперечной силы и изгибающего момента.

На рис. 1 - 3 приведены графики соответственно для безразмерного прогиба $\bar{w}$, поперечного усилия $\bar{N}_x$ и изгибающего момента $\bar{M}_x$ при $\alpha = 1$. При вычислении приняты следующие значения параметров: $m = 0.3$, $s = 0.15$, $\gamma = 1$, $\theta t = \left(\alpha_x + m\alpha_y\right)\left(\theta^+ - \theta^-\right) = 1$, $\alpha = 0.5, 1, 10$, $\chi = 0$, 10, 20, 30.

В таблице приведены значения для безразмерного прогиба $\bar{w}$, поперечного усилия $\bar{N}_x$ и изгибающего момента $\bar{M}_x$ при $\gamma = 1$.

		$\bar{x}$					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\chi = 0$, $\alpha = 1$	$\bar{w}$	0.085	0.345	0.767	1.206	1.569	1.797
	$\bar{N}$	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
	$\bar{M}$	-0.15	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09	-0.08
$\chi = 10$, $\alpha = 1$	$\bar{w}$	0.098	0.384	0.839	1.308	1.694	1.935
	$\bar{N}$	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	$\bar{M}$	-0.18	-0.16	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09
$\chi = 20$, $\alpha = 1$	$\bar{w}$	0.117	0.437	0.937	1.449	1.867	2.125
	$\bar{N}$	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	$\bar{M}$	-0.21	-0.19	-0.17	-0.15	-0.13	-0.11
$\chi = 30$, $\alpha = 1$	$\bar{w}$	0.144	0.515	1.080	1.654	2.118	2.401
	$\bar{N}$	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	$\bar{M}$	-0.26	-0.23	-0.21	-0.18	-0.16	-0.13
$\chi = 0$, $\alpha = 10$	$\bar{w}$	0.524	1.215	1.850	2.353	2.677	2.795
	$\bar{N}$	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
	$\bar{M}$	-0.09	-0.086	-0.076	-0.067	-0.057	-0.048
$\chi = 10$, $\alpha = 10$	$\bar{w}$	0.572	1.317	1.990	2.516	2.850	2.966
	$\bar{N}$	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	$\bar{M}$	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05
$\chi = 20$, $\alpha = 10$	$\bar{w}$	0.629	1.439	2.158	2.713	3.058	3.171
	$\bar{N}$	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	$\bar{M}$	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06
$\chi = 30$, $\alpha = 10$	$\bar{w}$	0.698	1.588	2.363	2.952	3.313	3.422
	$\bar{N}$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	$\bar{M}$	-0.13	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.06

		$\overline{x}$				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\chi=0$ $\alpha=1$	$\overline{w}$	1.852	1.712	1.360	0.791	0
	$\overline{N}$	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
	$\overline{M}$	-0.06	-0.05	-0.03	-0.02	0
$\chi=10$ $\alpha=1$	$\overline{w}$	1.991	1.836	1.457	0.846	0
	$\overline{N}$	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	$\overline{M}$	-0.07	-0.05	-0.04	-0.02	0
$\chi=20$ $\alpha=1$	$\overline{w}$	2.180	2.007	1.590	0.922	0
	$\overline{N}$	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	$\overline{M}$	-0.08	-0.06	-0.04	-0.02	0
$\chi=30$ $\alpha=1$	$\overline{w}$	2.456	2.256	1.784	1.033	0
	$\overline{N}$	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	$\overline{M}$	-0.10	-0.08	-0.05	-0.03	0
$\chi=0$ $\alpha=10$	$\overline{w}$	2.694	2.364	1.804	1.015	0
	$\overline{N}$	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
	$\overline{M}$	-0.038	-0.028	-0.019	-0.009	0
$\chi=10$ $\alpha=10$	$\overline{w}$	2.850	2.495	1.901	1.068	0
	$\overline{N}$	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	$\overline{M}$	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\chi=20$ $\alpha=10$	$\overline{w}$	3.038	2.653	2.017	1.131	0
	$\overline{N}$	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	$\overline{M}$	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\chi=30$ $\alpha=10$	$\overline{w}$	3.267	2.846	2.158	1.208	0
	$\overline{N}$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	$\overline{M}$	-0.05	-0.04	-0.02	-0.01	0

На рис. 4 - 6 приведены графики соответственно для безразмерного прогиба $\overline{w}$, поперечного усилия $\overline{N}_x$ и изгибающего момента $\overline{M}_x$ при $\chi=10$.

Заключение. Полученные результаты приводят к следующим заключениям.

При нагревании нижней поверхности пластинки $z=\dfrac{h}{2}$

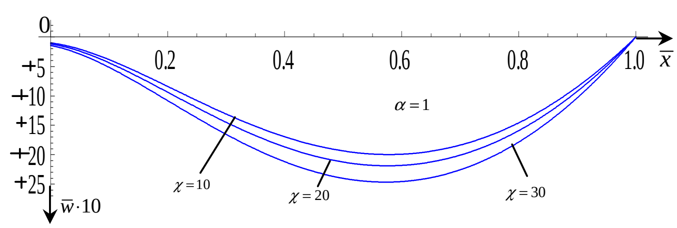

Рис. 1

1) с ростом параметра χ, характеризующего влияние поперечного сдвига, прогибы, поперечная сила и изгибающий момент по величине возрастают;

2) с ростом параметра α, т.е. с уменьшением жесткости упруго защемленной опоры, прогибы пластинки увеличиваются, а поперечная сила и изгибающий момент по величине уменьшаются. Максимум прогибов перемещается к упруго защемленной опоре;

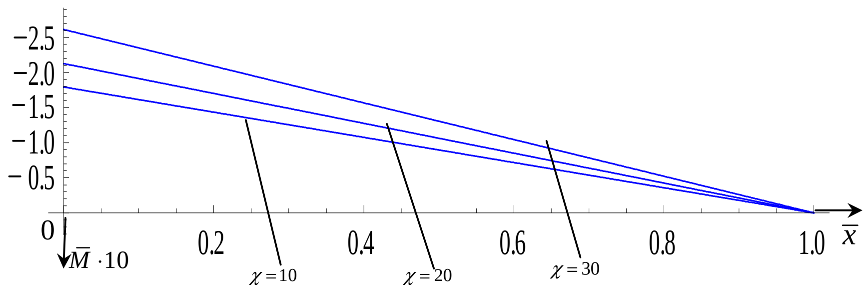

Рис. 2

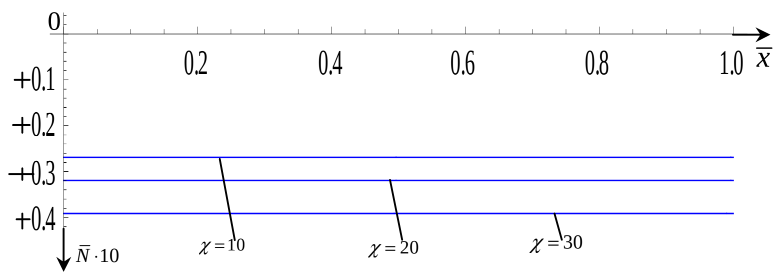

Рис. 3

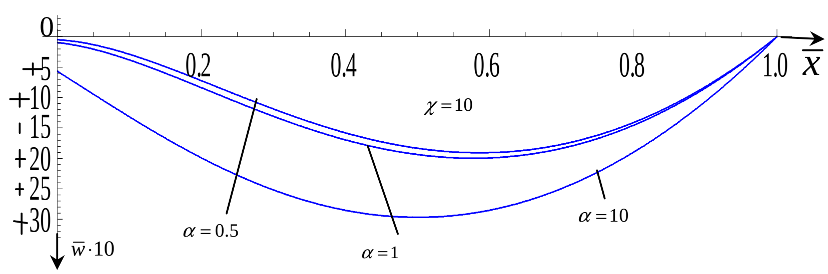

Рис. 4

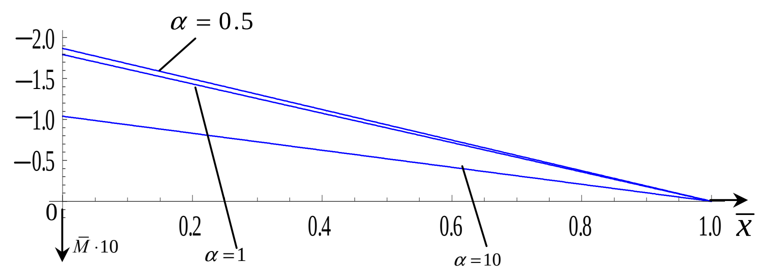

Рис. 5

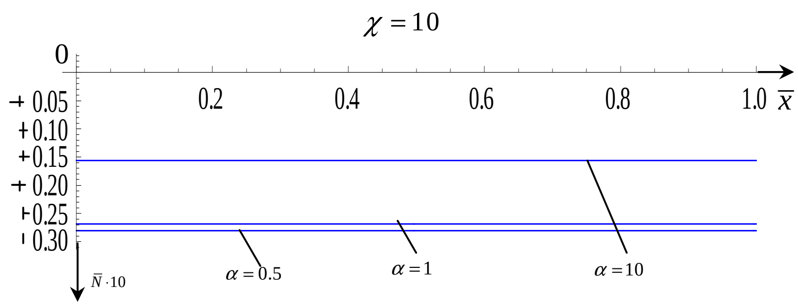

Рис. 6

3) во всех случаях поперечная сила по координате $\overline{x}$, т. е. по ширине пластинки-полосы, не меняется, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Ереванский государственный университет

С. П. Степанян

Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры

Решается задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Пластинка-полоса находится только под воздействием температуры. Приводится численный пример исходя из того, что один торец пластинки-полосы упруго защемлен, а другой шарнирно оперт. По результатам выполненных расчетов исследована зависимость основных величин (перемещений, усилий, изгибающих моментов) от параметров, характеризующих поперечный сдвиг, изменяемость пластинки по толщине, а также от параметра, характеризующего свойства упругого основания.

Ս. Պ. Ստեփանյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի ջերմաառաձգականության խնդիրը առաձգական ամրակցման հենարանի առկայությամբ

Լուծվում է փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ սալ-շերտի ջերմաառաձգականության խնդիրը, ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Սալ-շերտը գտնվում է միայն ջերմային ազդեցության տակ: Բերվում է թվային օրինակ՝ ենթադրելով, որ սալ-շերտի մի եզրը առաձգական ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ հոդակապորեն հենված: Կատարված հաշվումների հիման վրա հետազոտվում է հիմնական մեծությունների (տեղափոխություն, ուժեր, ծռող մոմենտ) կախվածությունը այն պարամետրերից, որոնք բնութագրում են ընդլայնական սահքը, սալ-շերտի հաստության փոփոխությունը և առաձգական հենարանի հատկությունները:

S. P. Stepanyan

Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support

Problem of thermal elasticity of an orthotropic plate-strip of variable thickness is solved taking into account transverse shear. The plate-strip is only under the thermal influence. A numerical example is given, assuming that one end of the plate-strip is elastically fastened and the other one is simply supported. Based on the calculations, the dependence of the main variables (displacements, forces, and bending moments) upon the parameters characterizing the transverse shear, changes in the plate thickness, and the properties of the elastic support is investigated.

Литература

1. *Киракосян Р. М.* В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела, посвященном 90-летию акад. НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. С. 177-183.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гостехиздат. 1947. 464 с.
3. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван, Гитутюн. 2000. 122 с.
4. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.*- Математические методы и физико-механические поля. 2013. Т. 56. №4. С. 125-130.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
М. В. Хачатрян

Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций

(Представлено 30/XI 2015)

Ключевые слова: *круговой стержень, модель, классическая упругость, поперечные сдвиги.*

Введение. В работе [1] выдвигаются гипотезы построения теории упругих тонких оболочек (как классических, так и микрополярных), которые обосновываются асимптотическим методом интегрирования уравнений соответствующей трехмерной теории. Кинематическая часть этих гипотез, в классическом случае – кинематические гипотезы теории С. П. Тимошенко (в микрополярном случае – аналогичные гипотезы, которые обобщены и распространены также на свободные вращения), а их статическая часть отличается от соответствующих гипотез указанной теории. На основе гипотез [1] построены асимптотически точные и энергетически правильные прикладные теории (как классические, так и микрополярные) упругих тонких балок (прямолинейных), пластин и оболочек [2-6].

Отметим, что в классической постановке многочисленные задачи прочности, свободных и вынужденных колебаний, распространения волн для соответствующих тонких тел изучались и продолжают изучаться на основе уточненных моделей теории типа С.П.Тимошенко для статики и динамики стержней [7-9] и моделей, обобщенных на случаи пластины и оболочки [9-14]. Основные уравнения деформации (статики и динамики) упругого кругового кольца на базе гипотез С. П. Тимошенко приведены в работе [15].

В данной работе развивается метод гипотез работы [1] для построения на основе классической теории упругости прикладной модели кривого (кругового) упругого стержня с учетом поперечных сдвиговых деформаций.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кривой стержень постоянного поперечного сечения (в виде прямоугольника: $2h\times b, b=1$), ось которого очерчена по окружности (рис. 1). Будем считать, что имеет место плоское напряженное состояние (на рис. 1 показана срединная плоскость кривого стержня), в которое вводим полярную систему координат (r,φ).

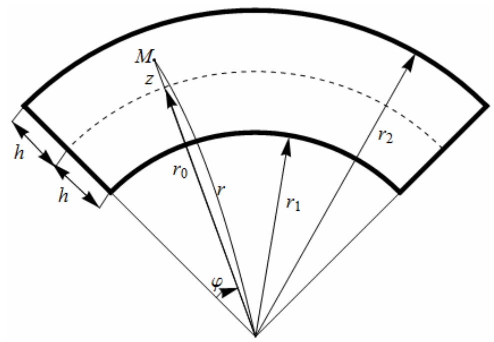

Рис. 1

В срединной плоскости стержня ($r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$) имеют место основные уравнения плоской задачи классической теории упругости в полярных координатах [16]:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sigma_{22}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial r}-\frac{1}{r}\sigma_{11}=0\ ,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r}\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial r}=0; \tag{1.1}$$

физические соотношения упругости

$$\gamma_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}\right]\ ,\quad \gamma_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}\right]\ ,\quad \gamma_{12}=\frac{1}{\mu}\sigma_{12}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2,\quad \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial r},\quad \gamma_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial r}; \tag{1.3}$$

граничные условия

на $r=r_1$, $\sigma_{12}=q_1^-$, $\sigma_{22}=q_2^-$; на $r=r_2$, $\sigma_{12}=q_1^+, \sigma_{22}=q_2^+$. (1.4)

На кромках $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_1$ рассмотрим следующие граничные условия:

a) на $\varphi=0$, $\sigma_{11}=\sigma'_{11}$, $\sigma_{12}=\sigma'_{12}$; на $\varphi=\varphi_1$, $\sigma_{11}=\sigma''_{11}$, $\sigma_{12}=\sigma''_{12}$ (1.5)

b) на $\varphi=0$, $V_1=V'_1$, $V_2=V'_2$; на $\varphi=\varphi_1$, $V_1=V''_1$, $V_2=V''_2$ (1.6)

Известным способом на основе уравнений (1.1)-(1.3) легко получить уравнение баланса энергии

$$\iint\limits_D Wrdrd\varphi=\frac{1}{2}A\ , \tag{1.7}$$

где W – плотность потенциальной энергии деформации

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_{12}\gamma_{12}+\sigma_{22}\gamma_{22}+\sigma_{11}\gamma_{11}\right)=\frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\gamma_{11}{}^2+2\upsilon\gamma_{11}\gamma_{22}+\gamma_{22}{}^2+\frac{1}{2}\left(1-\upsilon\right)\gamma^2\right), \tag{1.8}$$

A – работа внешних приложенных усилий

$$A=\int_0^{\varphi_1}\left(q_1^+V_1+q_2^+V_2\right)_{r=r_2}r_2d\varphi-\int_0^{\varphi_1}\left(q_1^-V_1+q_2^-V_2\right)_{r=r_1}r_1d\varphi-\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}'V_1+\sigma_{12}'V_2\right)_{\varphi=\varphi_1}dr+$$

$$+\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}''V_1+\sigma_{12}''V_2\right)_{\varphi=\varphi_2}dr. \tag{1.9}$$

Краевую задачу (1.1)-(1.6) можно сформулировать по вариационной трактовке, при этом общий функционал задачи будет выглядеть следующим образом:

$$I=\iint_{(D)}\left[W-\left\{\sigma_{11}\left[\gamma_{11}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2\right)\right]+\sigma_{22}\left[\gamma_{22}-\frac{\partial V_2}{\partial r}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)\right]\right\}\right]rdrd\varphi-$$

$$-\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+V_1+q_2^+V_2\right]_{r=r_2}r_2d\varphi+\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-V_1+q_2^-V_2\right]_{r=r_1}r_1d\varphi+\tilde{I}, \tag{1.10}$$

а) $$\tilde{I}=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}'V_1+\sigma_{12}'V_2\right]_{\varphi=0}dr-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}''V_1+\sigma_{12}''V_2\right]_{\varphi=\varphi_1}dr \tag{1.11}$$

в случае граничных условий (1.5),

б) $$\tilde{I}=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1'\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2'\right)\right]_{\varphi=0}dr-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1''\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2''\right)\right]_{\varphi=\varphi_1}dr \tag{1.12}$$

в случае граничных условий (1.6).

Варьируя I по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I=0$ получим основные уравнения ((1.1)-(1.3)) и граничные условия ((1.4)-(1.6)) кругового стержня при плоском напряженном состоянии.

2. Исходные предположения [1-6] и построение прикладной модели упругого кругового тонкого стержня. Этот параграф посвящен построению уточненной теории упругого кругового тонкого стержня. При этом исходим из того, что рассматриваемые уравнения кривого стержня должны учитывать один из важнейших факторов, а именно, поперечные сдвиги, и в то же время иметь достаточно простую форму и невысокий порядок для того, чтобы в дальнейшем использовать их при разработке эффективных численных методов решения практически важных задач.

А) В качестве исходной кинематической примем гипотезу прямой линии (гипотезу Тимошенко), согласно которой первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости кругового стержня до деформации остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений по толщине средней плоскости кругового стержня:

$$V_1=u(\varphi)+z\psi(\varphi),\ V_2=w(\varphi), \tag{2.1}$$

где следует иметь в виду, что $r = r_0 + z$, r_0 – радиус средней линии, $-h \le z \le h$ $\left(\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial r} = \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right)$.

Здесь, $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали; $\psi(\varphi)$ – угол поворота первоначально нормального элемента.

Кинематическая гипотеза (2.1) дополняется статическими гипотезами:

Б) О малости нормального напряжения σ_{22}, относительно нормального напряжения σ_{11} в первом уравнении закона Гука (1.2);

В) относительно единицы будем пренебрегать величиной порядка $\dfrac{h}{r_0}$

$$\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0\left(1 + \dfrac{z}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0} \right),$$

Г) при определении деформаций и напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{12} примем

$$\sigma_{12} = \overset{0}{\sigma}_{12}(\varphi). \qquad (2.2)$$

После определения указанных выше величин формулу для σ_{12} поправим следующим образом. Интегрируем по z второе из (1.1) уравнение равновесия и при определении постоянного интегрирования (вернее функции от φ) будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. Полученное окончательное выражение после указанного интегрирования прибавим к формуле (2.2).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений (2.1), подставляя его в формулы (1.3), находим

$$\gamma_{11} = \left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w \right) + z\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u + \psi. \qquad (2.3)$$

Примем следующие обозначения:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u + \psi, \quad \mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \qquad (2.4)$$

тогда для деформаций получим

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathrm{K}_{11}, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{22} = 0. \qquad (2.5)$$

Физический смысл $\Gamma_{11}, \mathrm{K}_{11}, \Gamma_{12}$ заключаются в следующем: Γ_{11} – продольная относительная деформация средней линии; K_{11} – изменение кривизны средней линий; Γ_{12} – сдвиговая деформация в точках средней линии.

Используя гипотезу Б) и формулу $(2.5)_1$, из формулы $(1.2)_1$ для напряжения σ_{11} имеем

$$\sigma_{11} = \overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) + z\overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi), \tag{2.6}$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) = \mathrm{E}\Gamma_{11}, \quad \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi) = \mathrm{E}\mathrm{K}_{11}. \tag{2.7}$$

При определении выражения σ_{12} используем гипотезы Г) и В). Для определенния поправки к формуле (2.2) уравнение равновесия $(1.1)_2$ представим так:

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial z} + \frac{2}{r_0}\sigma_{12} = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varphi}, \tag{2.8}$$

где в правой части необходимо учесть выражение (2.6). Получается неоднородное линейное дифференциальное уравнение для функции σ_{12}.

Соответствующее однородное уравнение имеет следующее общее решение:

$$\bar{\sigma}_{12} = Ce^{-\frac{2}{r_0}z} \approx C\left(1 - \frac{2}{r_0}z\right), \qquad \text{где} \quad C = C(\varphi). \tag{2.9}$$

Частное решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\sigma_{12}^{*} = -z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}. \tag{2.10}$$

Общее решение уравнения (2.8) будет

$$\bar{\sigma}_{12} = C(\varphi) - \frac{2}{r_0}zC(\varphi) - z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} \tag{2.11}$$

Согласно гипотезе В) требуем выполнение условия $\int_{-h}^{h}\bar{\sigma}_{12}dz = 0$. В результате для $C(\varphi)$ получим

$$C(\varphi) = \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}. \tag{2.12}$$

Подставив (2.12) в (2.11), для $\bar{\sigma}_{12}$ получим

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{1}{r_0^2}z\frac{h^2}{3}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}. \tag{2.13}$$

Окончательно по гипотезе В) для σ_{12} получим (это сумма (2.2) и (2.13)):

$$\sigma_{12} = \overset{0}{\sigma}_{12}(\varphi) + \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{1}{r_0^2}z\frac{h^2}{3}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - z\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - \frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}. \tag{2.14}$$

Для определения напряжения σ_{22} используем уравнение равновесия $(1.1)_1$:

$$\sigma_{22} = \tilde{C}(\varphi) + \left(\frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{11} - \frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{12}}{d\varphi}\right)z + \frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}\frac{z^2}{2}. \tag{2.15}$$

С целью приведения двумерной задачи теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций и напряжений, введем статически эквивалентные к напряжениям усилия и моменты:

$$N=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz\ ,\quad Q=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz\,,\quad \mathrm{M}_{из}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz\ . \tag{2.16}$$

На основе формул (2.14) удовлетворим граничным условиям (1.4), в результате чего, во первых, придем к следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N}-\frac{1}{r_0}\frac{dQ}{d\varphi}=q_2^+-q_2^-\,,\ \frac{1}{r_0}Q+\frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi}=-\left(q_1^+-q_1^-\right),\ Q-\frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{M}_{из}}{d\varphi}=h\left(q_1^++q_1^-\right). \tag{2.17}$$

Кроме этого имеем также

$$\mathrm{N}=2h\overset{0}{\sigma}_{11}\,,\ \ Q=2h\overset{0}{\sigma}_{12}\,,\ \mathrm{M}_{из}=\frac{2h^3}{3}\overset{1}{\sigma}_{11}\,,\ \tilde{C}(\varphi)=-\frac{h^2}{2}\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}+\frac{1}{2}\left(q_2^++q_2^-\right) \tag{2.18}$$

На основе формул для напряжений получим физические соотношения упругости для одномерной модели:

$$\mathrm{N}=2\mathrm{E}h\Gamma_{11}\,,\ Q=2\mu h\Gamma_{12}\,,\ \ \mathrm{M}_{из}=\frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}\,. \tag{2.19}$$

Уравнения равновесия (2.17), физические соотношения упругости (2.19), геометрические соотношения (2.4) представляют собой основные уравнения прикладной теории кругового упругого стержня с учетом поперечных сдвигов (в классической постановке).

3. Уравнение баланса энергии и вариационный функционал кругового упругого стержня. С учетом допущений А) - Г) пункта 2, производя интегрирование по z в пределах от $-h$ до h, получим выражение для усредненного функционала

$$I_0=\int_0^{\varphi_1}\Bigg[W_0-\Bigg\{\left[\Gamma_{11}-\left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}w\right)\right]N+\left(\mathrm{K}_{11}-\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}\right)\mathrm{M}_{из}+$$

$$+\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi}-\frac{1}{r_0}u+\psi\right)\right]Q\Bigg\}\Bigg]r_0d\varphi-\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+\left(u+h\psi\right)+q_2^+w\right]r_0d\varphi$$

$$+\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-\left(u-h\psi\right)+q_2^-w\right]r_0d\varphi+\tilde{I}, \tag{3.1}$$

а) $\tilde{I}=u\mathrm{N}'\big|_{\varphi=0}+\psi\mathrm{M}'\big|_{\varphi=0}+wQ'\big|_{\varphi=0}-u\mathrm{N}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-\psi\mathrm{M}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-wQ''\big|_{\varphi=\varphi_1}$,

б) $\tilde{I}=\mathrm{N}\left(u-u'\right)\big|_{\varphi=0}+\mathrm{M}_{из}\left(\psi-\psi'\right)\big|_{\varphi=0}+Q\left(w-w'\right)\big|_{\varphi=0}-\mathrm{N}\left(u-u''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}-$

$-\mathrm{M}_{из}\left(\psi-\psi''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}-Q\left(w-w''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}$

Здесь учтены формулы (2.1), (2.4), (2.16), а также формула для удельной энергии деформации

$$W_0=\mathrm{E}h\Gamma_{11}^2+\frac{\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}^2+\mu h\Gamma_{12}^2. \tag{3.2}$$

Варьируя I_0 по всем независимым функциональным аргументам, получим из вариационного уравнения $\delta I_0=0$ следующие группы соотношений: уравнения равновесия (2.17), геометрические соотношения (2.4), физические соотношения упругости (2.19) и граничные условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$:

статические условия

$$M_{из}\Big|_{\varphi=0} = M' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} z dz, \qquad Q\Big|_{\varphi=0} = Q' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{12} dz, \qquad N\Big|_{\varphi=0} = N' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} dz,$$
$$M_{из}\Big|_{\varphi=\varphi_1} = M'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{11} z dz, \qquad Q\Big|_{\varphi=\varphi_1} = Q'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{12} dz, \qquad N\Big|_{\varphi=\varphi_1} = N'' = \int_{-h}^{h} \sigma''_{11} dz; \tag{3.3}$$

геометрические условия

$$u\Big|_{\varphi=0} = u' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_1' dz, \qquad \psi\Big|_{\varphi=0} = \psi' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V_1' z dz, \qquad w\Big|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2' dz,$$
$$u\Big|_{\varphi=\varphi_1} = u'' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_1'' dz, \qquad \psi\Big|_{\varphi=\varphi_1} = \psi'' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V_1'' z dz, \qquad w\Big|_{\varphi=\varphi_1} = w'' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2'' dz. \tag{3.4}$$

Отметим, что аналогичным образом из уравнения баланса энергии (1.7) двумерной теории получим уравнение баланса энергии прикладной модели упругого кривого стержня

$$\int_0^a W_0 dx_1 = \frac{1}{2}\tilde{A}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{A}$ – работа внешних приложенных усилий

$$\tilde{A} = \int_0^{\varphi_1}\Big[\left(q_1^+ - q_1^-\right)u + \left(q_1^+ + q_1^-\right)h\psi + \left(q_2^+ - q_2^-\right)w\Big] r_0 d\varphi - u\mathrm{N}'\Big|_{\varphi=0} - \psi\mathrm{M}'\Big|_{\phi=0} - wQ'\Big|_{\varphi=0} +$$
$$+u\mathrm{N}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + \psi\mathrm{M}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + wQ''\Big|_{\varphi=\varphi_1}. \tag{3.6}$$

Заключение. На основе принятых достаточно общих гипотез построена прикладная модель упругого кругового стержня в классической постановке с учетом поперечных сдвиговых деформаций. Получено уравнение баланса энергии и построен вариационный функционал прикладной модели, на основе которых можем утверждать, что по этой модели имеют место все энергетические теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян, М.В. Хачатрян

Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций

В работе на основе довольно общих гипотез построена математическая модель деформирования упругого кругового стержня с учетом поперечных сдвигов по классической теории упругости. Изучена энергетика явлений и построена соответствующее общее вариационное уравнение.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս.Հ. Սարգսյան, Մ.Վ. Խաչատրյան

Դասական առաձգականության տեսությամբ ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաների հաշվառմամբ առաձգական հարթ կոր ձողի (շրջանային) մաթեմատիկական մոդելը

Բավական ընդհանուր բնույթի վարկածների հիման վրա կառուցվել է առաձգական շրջանային ձողի դեֆորմացիայի ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ մաթեմատիկական մոդելը՝ ըստ առաձգականության դասական տեսության: Ուսումնասիրված է երևույթի էներգետիկան, և կառուցված է համապատասխան ընդհանուր վարիացիոն հավասարումը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan, M. V. Khachatryan

Mathematical Model of Elastic Plane Curve Beam (Circular) with Consideration of Shear Deformations on the Basis of the Classical Theory of Elasticity

Mathematical model of elastic circular beam is constructed with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity and hypotheses of general type. The energy process is studied and correspondent variation equation is constructed.

Литература

1. *Sargsyan S. H.* - Advances in Pure Mathematics. 2015. N5. P. 629-642.
2. *Sargsyan S. H.* - Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. N 1. P. 98-108.
3. *Саркисян С. О.*- Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-155.
4. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. N 1. С. 55-66.
5. *Саркисян С. О.* - Доклады Академии наук России. 2011. Т. 436. N 2. С. 195-198.
6. *Sargsyan S. H.* – Int. Journal of Mechanics. 2014. V. 8. P. 93-100.
7. *Timoshenko S.* - Phil. Mag. 1921. Ser. 6.41. N 245. P. 744-746.
8. *Тимошенко С. П.* – Колебания в инженрном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* – Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика деформируемых тел. Т. 5. М. ВИНИТИ. 1973. 272 с.
10. *Уфлянд Я. С.* - Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. N 3. С. 287-300.
11. *Mindlin R. D.* - J. Appl. Mech. 1951. V. 18. N 1. P. 31-38.
12. *Пелех Б. Л.* – Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев. Наукова думка. 1977. 184 с.

13. *Пелех Б. Л.* – Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 246 с.
14. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* – Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981.544с.
15. *Кузьмин М. А., Лебедев Д. Л., Попов Б. Г.* – Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. М, Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2012. 341с.
16. *Папкович П. Ф.* - Теория упругости. Л.-М. Оборонгиз. 1939. 640 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

MECHANICS

УДК 539.3

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan

Stresses in a Tapered Space Elevator Tube

(Submitted 21/II 2016)

Keywords: *space elevator, tapered hollow tube, mechanical stresses.*

Introduction. The space elevator is a new space transportation engineering structure rising from the Earth's equator surface to above geostationary orbit extended out to the level of 144,000 km where it terminates in a counterweight. The space elevator structure would permit to travel into space from the Earth's surface without the use of space rockets. Conditioned by resulting force of the Earth gravity inward force and centrifugal outward force caused by the Earth's daily spinning the structure would be held in tension in which the maximum tensile strength would reach up to 120 GPa. Currently available materials do not meet this requirement. Advances in carbon nanotube technology could make it possible to create a strong type of carbon nanotube materials in future with tensile strength of up to 200 GPa [1,2]. These carbon nanotubes with high tensile strength, combined with relatively low density, make nanotubes an excellent construction materialfor a space elevator. The mathematical and engineering concepts of the space elevator were first introduced in [3-5], where problems of buckling, strength and vibration were discussed. Reviews, developments of the space elevator and detailed design for construction and operation are given, particularly, in [6-15].

The paper is devoted to a new simple design model of linearly tapered space elevator hollow tube.

Model statement. Let us consider a hollow tapered thin tube with constant internal radius r_0 and variable thickness $h(\gamma)=h_0+\gamma\delta,\quad r_0>>h(\gamma)$ linearly varyingalong tube height γ (Fig 1).

Introducing dimensionless coordinate $x=\gamma/R_0$, (γ is the distance of a point on the tube measured from the ground level), for thin tapered elevator tube the cross sectional area $S(x)$ varying a with position along the tube can be written as

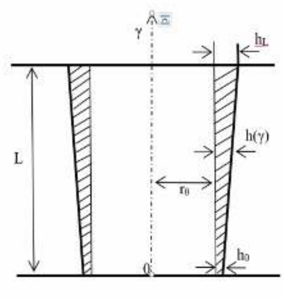

Fig 1. The tapered hollow tube.

$$S(x) = S_0(1 + ax), \qquad S_0 = 2\pi r_o h_0, \tag{1}$$

where S_0 is the cross sectional area of the tube at the ground level.

The stress in tube $\sigma_0(x)$ is determined from the equation [9,10]

$$\frac{d\left[S(x)\sigma_0(x)\right]}{dx} - R_0 \rho g_0 S(x) g(x) = 0, \qquad g(x) = (1+x)^{-2} - \beta(1+x); \tag{2}$$

where R_0 is the Earth's radius, ρ the mass density of elevator tube, g_0 is the acceleration of gravity at Earth's surface $\beta = Rg_0^{-1}\omega^2 = 1/288$, ω is the Earth's rotational angular velocity.

The dimensionless stress $\sigma(x) = (R_0 \rho g_0)^{-1} \sigma_0(x)$ under condition $\sigma(0) = 0$ can be calculated as[10]

$$\sigma(x) = \frac{\int_0^x g(z) S(z)\, dz}{S(x)}; \tag{3}$$

The minimal characterizing length L of the tube will be determined from condition

$$\int_0^L g(z) S(z)\, dz = 0. \tag{4}$$

In this way we can finally find that

$$\sigma(x) = \frac{x\left[3\left(574 - x(3+x)\right) - a\left(1728 + x(1+x)(3+2x)\right)\right]}{1728(1+x)(1+ax)} + \frac{a\ln(1+x)}{(1+ax)} \tag{5}$$

Let note that in limiting case $a \to \infty$ we have that

$$\sigma_\infty(x) = \frac{-x\left(1728 + 3x + 5x^2 + 2x^3\right) + 1728(1+x)\ln(1+x)}{1728x(1+x)}.$$

Analysis and numerical results. The negative values of parameter a correspond to the tube elevator narrowing up to the upper end. On the Fig.2 are presented the curves describing the stress states of the space elevator. The upper curve corresponds to the tapered tube with $a = -0.01$, the middle curve corresponds to the non-tapered tube with $a = 0$, the lower curve corresponds to the tube narrowing at ground level (widening at upper level) with $a = 0.01$.

Since for the space elevator narrowing at the upper end the stresses exceeding maximal stress of non-tapered tube only the tapered tubes with positive values of $a > 0$ must be considered (see Fig 2).

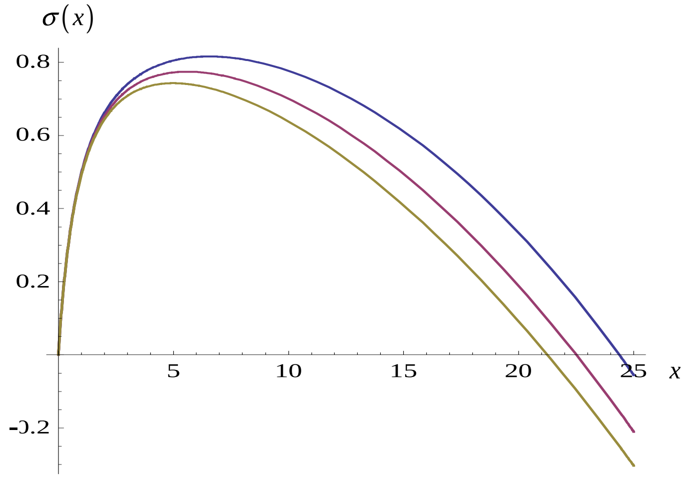

Fig 2. The stress states for three different space elevator tubes.

In Table 1 for different values of parameter a the data are presented for the maximum tensile stresses $\sigma_* = \max \sigma(x)$, the tube minimal length L_0 under which all stresses are positive (tensile), as well, the taper ratio $\beta = \max S(x) / \min S(x) = S(L_0)/S_0$. Point x_0 is the level at the tube, where the maximal stress occurs. For non tapered cable the maximum tensile stress in the cable occurs at geostationary level [3, 4].

Table 1

a	σ_*	x_0	L_0	β
-0.01	0.81	6.21	23.92	0.76
0	**0.78**	**5.62**	**22.54**	**1**
0.05	0.65	3.78	18.38	1.92
0.1	0.59	3.06	16.66	2.70
0.2	0.53	2.68	14.85	3.97
0.5	0.42	1.81	12.93	7.47
1	0.35	1.61	11.88	12.88
1.5	0.32	1.42	11.46	18.19
2	0.27	1.39	11.32	23.64

From the results of Table 1 and Fig. 2 data it follows that increasing the taper ratio β brings to the sufficient decreasing of stresses and limiting lengths compared with non tapered cable.

Conclusions. The new design model for a space elevator cable is presented, namely, the linearly tapered and widening at upper level hollow tube, where the maximum stress and limiting length can be sufficiently reduced. For these reasons this model can be useful in constructions of a space elevator cable.

Institute of Mechanics of NAS RA

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan,
K. B. Ghazaryan

Stresses in a Tapered Space Elevator Tube

A new design model of the tapered hollow tube is presented, which can be useful in the space elevator cable constructions.

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян

Напряжения в конической трубке космического лифта

Предложена новая модель конической полой трубки, которая может быть полезна в конструкциях троса космического лифта.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան,
Կ. Բ. Ղազարյան

Լարումներըտիեզերականվերելակիկոնաձևխողովակում

Առաջարկված է կոնաձև սնամեջ խողովակի նոր մոդել, որը կարող է օգտակար լինել տիեզերական վերելակի ճոպանի կառուցվածքներում:

References

1. *Harris P. J. F.* - Journal of International Materials Reviews. 2004. V. 49. N 1.
2. *Brambille G.* - Climb. 2011. V. 1. N 3. P.3-11.
3. *Pearson J.* - ActaAstronautica. 1975. V. 2. P. 785-799.
4. *Edwards B. C.* - ActaAstronautica. 2000. V. 47. P.735-744.
5. *Edvards B. C., Westling E. A.* The Space Elevator. Houston. USA. 2002. 280 p.
6. *Ambartsumian S. A., Belubekyan M.V., Ghazaryan K. B.* – Acta Astronautica. 2010. V. 66. P. 563-566.

7. *Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B.* – Climb. 2011. V.1. N 3. P. 11-23.
8. *Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B., Gnuni V. Tc.* - Reports of NAS RA. 2004. V. 104. N 3. P.189-186.
9. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Гнуни В. Ц., Казарян К. Б.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. N 1. С.10-14
10. *Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B.* - Reports of NAS RA. 2007. V. 107. N 4. P. 345-352
11. *Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B., Ghazaryan R. A.* – Climb. Journal of Space Elevator Developments and Technology. USA. 2013. V. 2. P. 53-65.
12. *Cohen S. S., Misra Arun K.* - Journal of guidance, control and dynamics. 2007. V. 30. N 6. P. 1711-1717.
13. *Pugno N. M.* - Acta Materialia. 2007. V. 55. Issue 15. P. 5269-5279.
14. *Садов Ю. А., Нуралиева А. Б.* - Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2011. (URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-39).
15. *Садов Ю. А., Нуралиева* - Математическое моделирование. 2011. Т. 23. N 12. С. 3-20

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

PHYSICS

A. Y. Tonoyan

Theoretical Investigation of ^{41}K States Behavior under Strong Magnetic Field and π Polarized Laser Field

(Submitted by corresponding member of NAR RA A. V. Papoyan 4/XI 2015)

Keywords: *atomic spectroscopy, ^{41}K atoms, strong magnetic fields.*

Introduction. The influence of magnetic field on the medium and particularly on the atomic transitions is of great importance for a wide range of applications, starting from magnetometry, spectroscopy, space research, medicine, etc.[1-3]. There is a range of studies concentrated on the investigation of weak magnetic field influence on atomic transitions [4]. However, the behavior of alkali atoms in strong magnetic fields has been under attention only recently. The increasing interest is due to the fact that the external magnetic field eases the study of atomic states structure and transitions, as it separates degenerate states well from each other making possible their experimental detection. Investigations on atomic states of ^{85}Rb, ^{87}Rb, ^{133}Cs and ^{39}K are already published in [5-9, 11]. However, there is not sufficient up to date data on ^{40}K and ^{41}K isotopes as they are of low densities in nature (6.3% and 0.01%, respectively). In the current paper we present for the first time our theoretical studies of the ^{41}K isotope D_1 and D_2 lines in the presence of external magnetic field while interacting with $\pi\left(B\|E\right)$ polarized laser field.

The essence. To understand the behavior of the alkali atoms, let us see what is happening to the quantum numbers. The splitting of atomic levels in weak magnetic fields is described by the total angular momentum $F = J + I$ of the atom and its projection m_F, where $J = L + S$ is the total angular momentum of electrons and I is the nuclear spin. In the Hyperfine Paschen-Back (HPB) regime J and I become decoupled and the splitting of the atomic levels is described by their projections m_J and m_I. For alkali metals the HPB regime takes place at fields $B \gg B_0 = A_{hfs} / \mu_B$, where A_{hfs} is the ground-state hyperfine coupling coefficient (magnetic dipole constant) and μ_B is the Bohr magneton. For ^{41}K isotope it is easy to calculate $B_0 = 90$ G. The relevant atomic configuration is presented in Figure 1 in the basis of J and I quantum numbers for D_1 and D_2 lines. Below we show that at strong external magnetic fields initially strong transitions weaken, instead, transitions that were negligibly weak (or even initially forbidden) become stronger and visible. The latter ones we call initially forbidden further allowed (IFFA) transitions, labeled as 3 and 11 in Figure 1. The arrows there show the transitions that remain at strong magnetic fields. Numbers in rectangles correspond to these transitions. Also, corresponding transitions in the F, m_F basis are shown for D_1 and D_2 lines in Table 1 and Table 2 respectively.

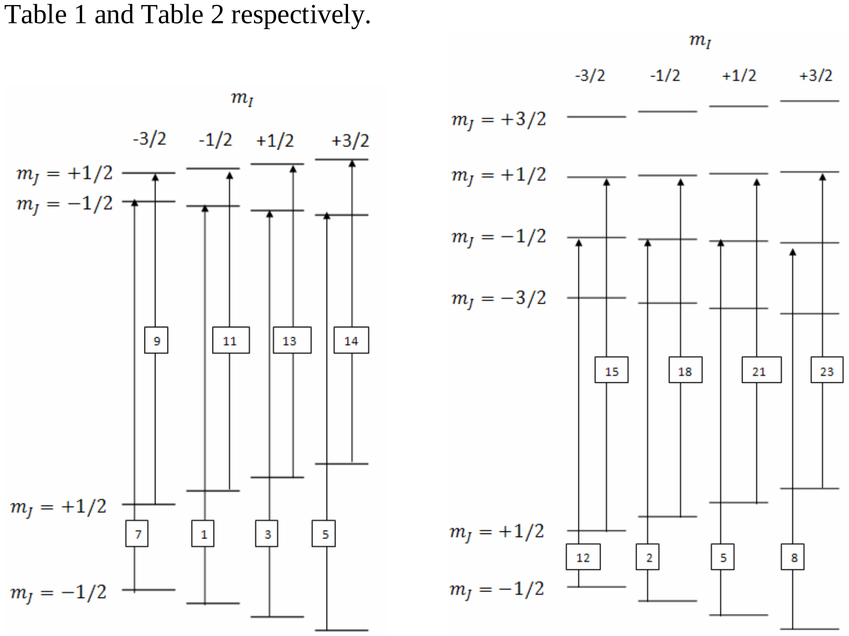

Fig. 1. Relevant atomic levels and transitions in the basis of the quantum numbers m_J and m_I. The left configuration corresponds to the D_1 line, the right one to the D_2 line. The numbers on the transitions correspond to the transitions that remain in strong magnetic fields (when $B \geq 90$ G).

There is another phenomenon that has been observed, while investigating alkali atoms D_1 line behavior in the π polarized laser radiation field. There are transitions that are not changing their probabilities and maintain transition shift slopes, which we call guiding transitions (GT). The two GTs, labeled as 7 and 14 in Figure 1, maintain their probabilities and shift slopes in a very large range of external magnetic field (from 0 G to ~ 250 kG). The upper limitation is due to the fine structure constant α.

The model. The theoretical model is based on the Hamiltonian for the D line of alkali atoms for any static magnetic field [10]. The diagonal terms of the Hamiltonian have the form

$$\langle F, m_F | H |, F, m_F \rangle = E_0(F) - \mu_B g_F m_F B_z \tag{1}$$

Table 1

D_1 line ($\left|J=1/2\right\rangle \to \left|J'=1/2\right\rangle$), labels for π transitions corresponding to the labels in the rectangles in Fig. 1

$\left\|F=1, m_F\right\rangle \to \left\|F', m_{F'}=m_F\right\rangle$					
$m_F \to$	-2	-1	0	+1	+2
$F'=2$		**2**	**4**	**6**	
$F'=1$		**1**	**3**	**5**	
$\left\|F=2, m_F\right\rangle \to \left\|F', m_{F'}=m_F\right\rangle$					
$m_F \to$	-2	-1	0	+1	+2
$F'=2$	**7**	**9**	**11**	**13**	**14**
$F'=1$		**8**	**10**	**12**	

Table 2

D_2 line ($\left|J=1/2\right\rangle \to \left|J'=3/2\right\rangle$), labels for π transitions corresponding to the labels in the rectangles in Fig. 1

$\left\|F=1, m_F\right\rangle \to \left\|F', m_{F'}=m_F\right\rangle$							
$m_F \to$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$F'=3$			**3**	**7**	**10**		
$F'=2$			**2**	**6**	**9**		
$F'=1$			**1**	**5**	**8**		
$F'=0$				**4**			
$\left\|F=2, m_F\right\rangle \to \left\|F', m_{F'}=m_F\right\rangle$							
$m_F \to$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$F'=3$		**12**	**15**	**19**	**22**	**24**	
$F'=2$		**11**	**14**	**18**	**21**	**23**	
$F'=1$			**13**	**17**	**20**		
$F'=0$				**16**			

where $E_0(F)$ is the atomic energy in the absence of magnetic field B_z, g_F is the corresponding Landé factor. The off-diagonal matrix elements may be non-zero only between $\Delta F = \pm 1, \Delta m_F = 0$.

$$\left\langle F-1, m_F \left| H \right|, F, m_F \right\rangle = -\frac{\mu_B}{2}(g_J - g_I) B_z \left(\frac{\left[(J+I+1)^2 - F^2 \right] \left[F^2 - (J-I)^2 \right]}{F} \right)^{1/2} \cdot \\ \cdot \left(\frac{F^2 - m_F^2}{F(2F+1)(2F-1)} \right)^{1/2} \tag{2}$$

We use the eigenvalues to calculate the energy levels of the excited and the ground states and the state vectors are expressed in terms of the unperturbed atomic state vectors

$$\left| \psi(F_e, m_e) \right\rangle = \sum_{F'_e} C_{F_e F'_e} \left| F'_e, m_e \right\rangle \tag{3}$$

and

$$\left| \psi(F_g, m_g) \right\rangle = \sum_{F'_g} C_{F_g F'_g} \left| F'_g, m_g \right\rangle \tag{4}$$

where the sums are only over the state vectors having the same m_F since the perturbation introduced by the magnetic field couples only sublevels with $\Delta m_F = 0$.

The energy shifts calculated by Eqs. (1-4) are presented in Figure 2. As we see, starting from relatively not strong magnetic fields (compared to Rb [5-7] and Cs [8, 11]), at around 300 G and 400 G for D_1 and D_2 lines, respectively, this dependence becomes linear. The mentioned difference (300 G and 400 G) is caused by the presence of electric quadrupole constant (B_{hfs}) in $P_{3/2}$ states, which is absent for $J = 1/2$ states. Note, that the calculations show that this linearity goes up to 250 kG, however, this is not presented here in order to have a better view on the transition shifts behavior. The dashed lines in the figures represent the transitions, whose probabilities tend to zero and they are not visible in the experiments under strong magnetic fields. The solid lines are those transitions whose probabilities are not negligible and they can be seen in the experiments. As mentioned above, the definition of the numbers with the corresponding transitions in the F, m_F basis is shown for D_1 and D_2 lines in Table 1 and Table 2, respectively. It is worth to mention, that in our previous experiment performed using nanocells [11], one can determine the 41K transitions in the atomic absorption spectrum [9], which, however, are much weaker compared to the ^{39}K atomic transitions, as the density of the former is much smaller than that of ^{39}K.

The intensities of the transitions are calculated and presented in Figure 3. As it is well seen for the D_1 (the left figure) and D_2 (the right figure) lines the transitions that were strong in the presence of the weak magnetic field ($B < 80$

G for D_1 line and $B < 10$ G for D_2 line, i.e. dashed lines), become negligibly small at $B > 300$ G and $B > 400$ G, respectively, therefore they are no more visible in the experiments, while IFFA as well as less probable transitions become dominant.

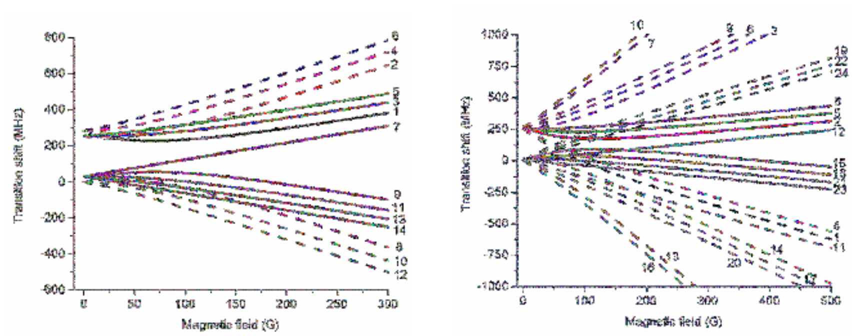

Fig. 2. Magnetic field dependence of the energy shifts of the ^{41}K isotope D_1 (left) and D_2 (right) lines. The solid lines describe the transitions which exist in HPB regime, while dashed lines describe transitions whose probabilities tend to zero in HPB regime. The zeros are $F=2$, $m_F=-1$ *to* $F'=1$, $m_{F'}=-1$.

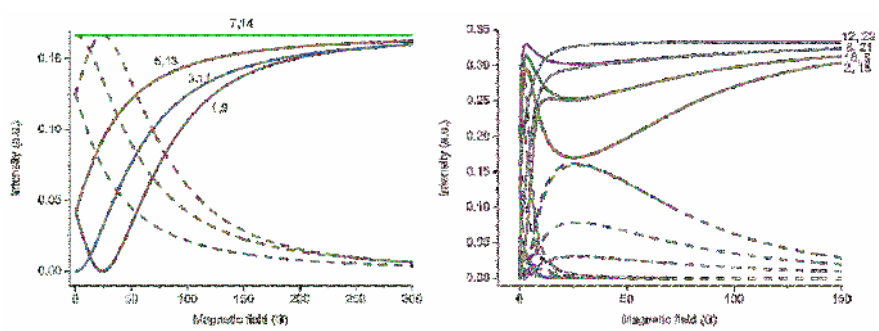

Fig. 3. Transition intensities dependence on magnetic field for D_1 (left) and D_2 (right) transitions of ^{41}K isotope.

The reason for having only 8 transitions for D_1 and 8 transitions for D_2 lines for π polarized laser field is that in rather strong ($B \gg B_0$) external magnetic fields F is no longer a "good" quantum number. The "good" quantum numbers become I and J (with their projections). GT appears because of the atomic states coupling (in an external magnetic field). Only the states which satisfy $\Delta F = \pm 1, \Delta m_F = 0$ selection rules are coupled. Coupling is the superposition of the quantum states. Since the quantization axis is the external magnetic field, only $\Delta m_F = 0$ states can be coupled (as was mentioned above). Not to have the same states ΔF should be ± 1 and not zero (Table 3). The GTs exist exceptionally between two uncoupled states. Hence, for ^{41}K and for π $(B \| E)$ polarization radiant field GTs are $S_{1/2}(F=2, m_F=-2) \rightarrow$ $\rightarrow P_{1/2}(F'=2, m_{F'}=-2)$ and $S_{1/2}(F=2, m_F=+2) \rightarrow P_{1/2}(F'=2, m_{F'}=+2)$ transitions.

Table 3

Atomic states. UC-uncoupled states, C-coupled states

$m_F \rightarrow$	-2	-1	0	+1	+2
$S_{1/2}$ states					
$F=2$	**UC**	C	C	C	**UC**
$F=1$		C	C	C	
$P_{1/2}$ states					
$F=2$	**UC**	C	C	C	**UC**
$F=1$		C	C	C	

$m_F \rightarrow$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$P_{3/2}$ states							
$F=3$	**UC**	C	C	C	C	C	**UC**
$F=2$		C	C	C	C	C	
$F=1$			C	C	C		
$F=0$				C			

As a last step, we have calculated the spectra of ^{41}K D_1 and D_2 lines for $B=0G, B=200G$, $B=400G$ and $B=0G, B=250G$, $B=500G$ magnetic fields, respectively.

The components coming from $F_g = 1$ are in black and the components coming from $F_g = 2$ are in blue. The components' full width at half maximum is $w_{FWHM} = 50$ MHz. The cumulative curves for different increasing magnetic fields are respectively in cyan, red and yellow. We claim that it is exactly what will be seen while performing experiments with the ^{41}K isotope. Particularly, using the nano-cell with the thickness L= λ/2 (λ = 770 nm) and filled with the ^{41}K, in the way as it was experimentally realized for the ^{39}K atoms [9].

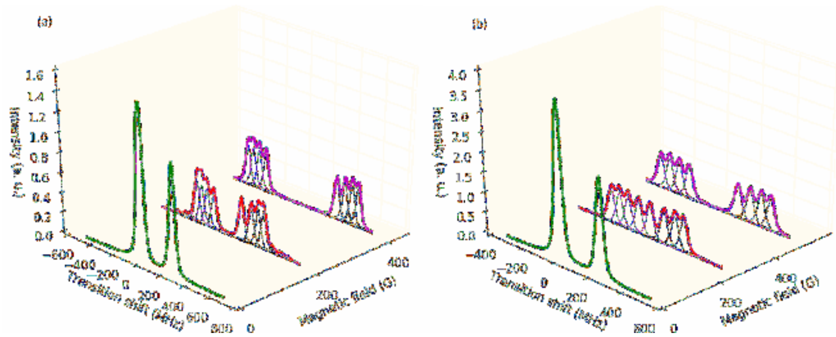

Fig. 4. Spectra of ^{41}K (a) D_1 line; (b) D_2 line for $B = 0G, B = 200G$ and $B = 400G$ magnetic fields. The zeros are F=2, m_F=-1 to F$'$=1, m_F=-1.

Conclusion. We have theoretically studied the behavior of ^{41}K D_1 and D_2 lines for π polarized resonant light in the presence of strong magnetic field. We have shown that for this case in D_1 line there are two guiding transitions that maintain their probabilities and frequency slopes. Particularly, we explain the reason of GT existence, we observe reduction of Zeeman transitions and difference of two D lines behavior in HPB regime. Finally, we present the theoretical 3D spectra for D lines for different magnetic fields. It should be noted that a complete HPB regime for relatively low magnetic fields *B*~ 400 G has been demonstrated, while this value of magnetic field is the smallest for all alkaline metals.

Acknowledgments: The author is thankful to prof. David Sarkisyan and prof. Claude Leroy for supervising, useful and stimulating discussions. Thanks to H. Karapetyan for programming assistance and G. Hakhumyan, and A. Gogyan for editing.

Institute for Physical Research of NAS RA
Université de Bourgogne, France

A. Y. Tonoyan

Theoretical Investigation of ^{41}K States Behavior under Strong Magnetic Field and π Polarized Laser Field

Theoretically research of the behavior of ^{41}K D_1 and D_2 lines for π polarized resonant light is conducted in the presence of strong magnetic field when the total electronic angular momentum J and nuclear spin I are decoupled. We show that in the case of linear polarization and for D_1 line there are two transitions, so called guiding transitions (GT) that maintain their probabilities and frequency slopes. In Hyperfine Paschen-Back (HPB) regime other transitions are coming together to those GTs, making 2 groups (4 in each). Each transition in the group has the same frequency slope and probability as the GT in their group. It is demonstrated that from 12 (D_1) and 20 (D_2) initially allowed Zeeman transitions (taking into account the selection rules) at low B-

field, only 8 transitions in each D line remain in absorption spectra at $B > 200G$. A complete HPB regime for relatively low magnetic fields $B \sim 200G$ has been observed. This value is the smallest for all alkaline metals.

Ա.Ե. Տոնոյան

^{41}K ատոմի վիճակների վարքի տեսական հետազոտությունը ուժեղ մագնիսական և π բևեռացմամբ լազերային դաշտում

Տեսականորեն ուսումնասիրվել է ^{41}K D_1 և D_2 գծերի վարքը π բևեռացված ռեզոնանսային դաշտում՝ ուժեղ մագնիսական դաշտի առկայությամբ, երբ գումարային էլեկտրոնային անկյունային J մոմենտը և միջուկային I սպինը տարանջատված են: Ցույց է տրվել, որ գծային բևեռացված լույսի դեպքում D_1 գծում կան երկու անցումներ, այսպես կոչված ուղեկցող անցումներ (ՈՒԱ), որոնք մագնիսական դաշտում պահպանում են իրենց հավանականություններն ու հաճախային շեղման թեքությունները: Գերնուրբ Պաշեն-Բակի ռեժիմում (ԳՊԲ) մյուս անցումները միավորվում են այդ ՈՒԱների շուրջ՝ առաջացնելով չորսական անցումներով երկու խումբ: Յուրաքանչյուր խմբի ամեն անցում ձգտում է իր խմբի ՈՒԱի հաճախային շեղման թեքությանն ու հավանականությանը: Ցույց է տրվել, որ թույլ մագնիսական դաշտերում ջոկման կանոններով պայմանավորված ի սկզբանե թույլատրված 12 (D_1) և 20 (D_2) Զեեմանյան անցումներից, կլանման սպեկտրում, 200 Գ դաշտում, յուրաքանչյուր D գծում մնում են 8 անցումներ: Դիտվել է կատարյալ ԳՊԲ երևույթ, հարաբերական թույլ՝ 400 Գ, արտաքին դաշտում: Դաշտի այս արժեքը ամենափոքրն է բոլոր ալկալի մետաղների համար:

А. Е. Тоноян

Теоретическое исследование поведения ^{41}K атомов в π-поляризованном лазерном излучении в присутствии сильного магнитного поля

Проведено теоретическое исследование поведения атомов ^{41}K для D_1 и D_2 линий в случае π-поляризованного лазерного излучения в присутствии сильного магнитного поля, в случае, когда происходит разрыв связи между полным угловым моментом электрона J и магнитным моментом ядра I. Показано, что для D_1 линии и линейно-поляризованного излучения имеются направляющие атомные переходы (НП), которые сохраняют вероятности и величины производных частотных сдвигов по магнитному полю. В режиме Пашена – Бака на сверхтонкой структуре (ПБС) другие атомные переходы группируются с этими НП, образуя 2 группы (по 4 перехода в каждой). Каждый переход в группе имеет такую же вероятность и частотный наклон, как НП в своей группе. Показано, что из 12 (для D_1) и 20 (для D_2) разрешенных по правилам отбора для слабых магнитных полей, при B>200 Гс остаются только по 8 атомных переходов. Полный режим ПБС наблюдается для сравнитеьлно малых магнитных полей B~400 Гс. Эта величина наименьшая для всех щелочных металлов.

References

1. *Budker D., Gawlik W., Kimball D. F., Rochester S. M., Yashchuk V. V.* - Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 1153.

2. *Dong Lai* - Rev. Mod. Phys. 2001. V.73. P. 629.
3. *Chinthalapalli S., Bornet A., Segawa T. F., Sarkar R., Jannin S., Bodenhausen G.* - Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. P. 047602.
4. *Budker D.* – Nature. 2003. V. 422. P. 574.
5. *Sargsyan A., Tonoyan A., Hakhumyan G., Leroy C., Pashayan-Leroy Y., Sarkisyan D.* - Opt. Comm. 2015. V. 334. P. 208.
6. *Sargsyan A., Hakhumyan G., Papoyan A., Sarkisyan D., Atvars A., Auzinsh M.* - Appl. Phys. Lett. 2008. V. 93. P. 021119.
7. *Sargsyan A., Hakhumyan G., Leroy C., Pashayan-Leroy Y., Papoyan A., Sarkisyan D.* - Optics letters. 2012. V. 37. P. 1379-1381.
8. *Sargsyan A., Tonoyan A., Hakhumyan G., Papoyan A., Mariotti E., Sarkisyan D.* - Laser Physics Letters. 2014. V. 11. P. 055701.
9. *Sargsyan A., Tonoyan A., Hakhumyan G., Leroy C., Pashayan-Leroy Y., Sarkisyan D.* - Europhys. Lett. 2015. V. 110. P. 23001.
10. *Tremblay P., Michaud A., Levesque M., Treriault S., Breton M., Beaubien J., Cyr N.* - Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 2766.
11. *Sarkisyan D., Bloch D., Papoyan A., Ducloy M.* - Opt. Comm. 2001. V. 200. P. 201.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

PHYSICS

УДК 621. 315

K. H. Aharonyan[1], N. B. Margaryan[2]

Binding Energy of the One-Sided Dielectrically Enhanced Screened Exciton in Semiconductor Quantum Well

(Submitted by academican E. M. Kazaryan. 21/I 2016)

Keywords: *quantum well, screening, exciton, binding energy*

1. Introduction. Fundamental interest in quasi-two-dimensional (Q2D) electron gas (EG) properties in quantum wells (QW) is initiated both by fabrication advances and by request of optoelectronic technology. The properties of Q2D EG attract attention owing to excitons, which mostly are confined in QW with compressed wave functions. The results are the increased binding energy and enhanced contrast between the 1s exciton peak and continuum [1, 2].

In QW samples selective doping makes it possible that a Q2D electron channel can coexist with photo excited excitons, which results in the changes of the optical properties. The latter is caused by many-body effect such as a screening of the excitons by free carriers as a consequence of Coulomb mutual correlation [3-9]. The effect of excitons screening is twofold: decreasing the binding energy and altering the interband absorption spectra. In 2D structures the screening of excitons by free carriers is less effective than in 3D samples [3, 4] and the any exciton cannot be screened out at any 2D density.

Due to selective doping, the free carrier densities can govern the strength of interaction between the particles simultaneously with structural adjustment of the QW specific parameters such as the barrier height Δ, the QW width d and, particularly, a strong contrast of the neighboring media dielectric constants in heteroboundaries (dielectric confinement effect (DC)). The latter, as well known, turns up the exciton binding energy and oscillator strength essentially [3, 7, 10 -12].

A theoretical study of the screened Q2D Coulomb interaction with arbitrary dielectric constants of both the QW and barrier ($\varepsilon_w, \varepsilon_b$) have been started by Rytova in [3]. In particular, for the strong contrast between ε_w and ε_b values such as $\varepsilon_r = \varepsilon_w / \varepsilon_b \gg 1$ (the two-sided DC effect), a statically screened Q2D potential expression has been established in the form

$$V_S(\rho) = -\frac{2e^2}{\varepsilon_w d} K_0\left(\sqrt{\frac{2q_S}{d}}\rho\right) \qquad (1)$$

for the moderate large in-plane distances $\varepsilon_r d/2 >> \rho >> d$ between the charges, where K_0 is the Bessel function of the second kind, q_S is the 2D screening parameter. Here screened potential strongly depend on the QW width and decay exponentially for large in-plane distances outside the circle with the radius of $\rho_0 = \sqrt{d/2q_S}$.

In Ref. [7] for the case of $\varepsilon_w \approx \varepsilon_{b1}$, $\varepsilon_w >> \varepsilon_{b2}$ (i.e. when the barrier media on each side of QW have the strongly different dielectric constants and the latter's mismatch is strong for just one heteroboundary only, while for the other one the DC effect is negligible (the one-sided DC effect)), the 2D Debye- Hückel - type analytical expression for the 2D screened potential

$$V_S(\rho) = -\frac{2e^2}{\varepsilon_w} \frac{(\exp(-\rho/\rho_0)}{\rho} \qquad (2)$$

is obtained for the in-plane distances ρ such as $d << \rho \leq \rho_0$ $\sqrt{\varepsilon_{w1}^{-1}[(e^2+1)/(e^2+1)]^2 - 1}$, where $\varepsilon_{w1} = \varepsilon_w / \varepsilon_{b1} \sim 1$, $e = 2.71..$ is the natural number.

As follows, both for the ***two-sided*** ($\varepsilon_w \gg \varepsilon_b = \varepsilon_{b1} = \varepsilon_{b2}$) [3] and ***one-sided*** ($\varepsilon_w \approx \varepsilon_{b1}$, $\varepsilon_w >> \varepsilon_{b2}$) [7] dielectric contrast affected cases, the DC effect leads to recovering of Q2D screening radius.

In the Refs.[13-15] the binding energy problem of screened Coulomb bound states in the semiconductor QW with screened Q2D potential after Exps.(1) has been explored. In particular, monotonic increase of the screened Coulomb center binding energy with decrease of both QW thickness and density / temperature ratio parameter is revealed.

The present work is devoted to the study of the screened exciton properties in one-sided dielectric contrast ($\varepsilon_w \approx \varepsilon_{b1}$, $\varepsilon_w >> \varepsilon_{b2}$) affected QW system. We present both the analytical and numerical study of the Q2D hidrogen-like (H-like) screened Coulomb centers binding energy problem, modeled by the screened potential after Exp. (2), namely for the 2D Debye -Hückel - type of limit.

2. Theoretical Background and Model. The H-like Coulomb bound states in QW system influenced both by quantum confinement and screening effects have been the subject of deep investigations in the past time. Experiments in this field based mainly on the III-V group semiconductors [16, 17], whereas the various calculation techniques all within the effective-mass approximation (EMA) such as the perturbation theory, the variational-perturbation method, the variational and numerical methods are performed theoretically (see, e.g. Refs. [29-41] in Ref.[13]). The discussed systems in this field are GaAs/$Al_xGa_{1-x}As$ and Si/SiO_2 QW structures by weak or negligible expressed DC effect.

At the same time, for the dielectrically heterogeneous ternary layer system with $\varepsilon_w \approx \varepsilon_{b1}$ and $\varepsilon_w >> \varepsilon_{b2}$ conditions the Coulomb interaction characterized by 2D Debye–Hückel type one-sided dielectrically enhanced potential (Exp.(2)) becomes larger due to the decreasing of the structure effective dielectric constant twice. As in the unscreened case [10], this would give rise to the screened exciton energy spectrum enhancement. The Exp.(2) is realized when the following the two conditions are simultaneously fulfilled: $qd<<1$ and $\rho_0^{-1}d<<1$, where q is the 2D electron wave vector. The first inequality corresponds to the strong confinement condition $\alpha_0 \gg d$ (α_0 is the electron Bohr radius in bulk sample), while the second matches to the relation $r_d >> d$, where r_d is the 3D Debye radius.

The 2D Debye–Hückel type potential has been widely applied in studies on H-like impurity binding energy [8], excitons oscillator strength [7] in QW systems, as well as on Dirac electrons spectra of the 2D H-like screened atoms, etc. (see, e.g. Ref.[18] and references therein).

In our discussed one-sided dielectric contrast affected case with 2D Debye–Hückel type enhanced potential the position of the screened exciton ground level one can determine with a great deal of accuracy if one utilizes a direct variational method. We are following to the strong confinement regime for that a distance between quantized energy levels is larger than an Coulomb $_{\text{interaction}}$ energy. Thus, a ground state wave function has a separable form such as $\phi=\phi(\rho,z)=\psi(\rho)\varphi(z)$, where $\psi(\rho)$ is an in-plane wave function and $\varphi(z)$ is an one-particle 1D Schrödinger-like equation EMA solution.

The model for the Q2D EG embedded in the QW is based on the nearly rectangular band alignment with band offset Δ_c. The Hamiltonian of Coulomb center in QW is $\hat{H}=H_{kin}+H_{eff}+V_S$, where $H_{eff}=V_{conf}(z)+V_{self-im}(z)$ - is the unperturbed part, V_S is the screened Coulomb potential, $V_{conf}=0$ with $0<z<d$ and $V_{conf}=\Delta_c$ with $z\le 0$, $z\ge d$. Here $V_{self-im}$ is the one-electron self-image interaction potential, which, as well as the size-quantized potential, modifies one-particle states, gives contribution to the band-gap renormalization and does not depend on the in-plane 2D distance between the charges. This contribution has the same order as the particle binding energy [10-14]. So, the self-image interaction changes the rectangular localizing potential weakly [4]. Thus, the Q2D screened potential $V_S(\rho)$ becomes weak, varies smoothly on the scale of k_F^{-1} ($k_F=\sqrt{2\pi n_s}$ is the 2D Fermi vector) and can be treated as the perturbation in subbands energy calculations. We discuss the states in the fundamental subband (size quantum limit (SQL)).

3. Analytical study of the Screened Exciton Binding Energy. The standard variational principle deals with the functional $E[\varphi]=\int\varphi^*[H]\,\varphi dV$. The binding energy E_b is obtaining by minimization of the $E[\varphi]$ by involving the screened potential after Exp. (3) and as the difference of the first subband energy E_1 and expectation energy E_{s1}.

According to the $a_0 \gg d$ condition, we choose the 1s exciton ground state normalized one parameter trial wave function in the form $\psi(\rho)=\sqrt{2/\pi}\,\lambda e^{-\lambda\rho}$ [9, 10, 12-15]**,** where λ is the variational parameter. After needed calculations we have the E_b variational expression as

$$E_b = \frac{\hbar^2 \lambda^2 m_r}{2\mu_\perp} - \frac{\hbar^2 \lambda^2 m_r}{2\mu_\perp a_{0S}} \frac{8}{q_S + 2\lambda}, \tag{3}$$

which gives the screened exciton binding energy in the final form

$$E_b = \frac{\hbar^2 m_r}{2\mu_\perp a^2_{scex}} \left[2 + (2 - q_S a_{scex}) \sqrt{1 + q_S a_{scex}} + \left(\frac{q_S a_{scex}}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{\sqrt{1 + q_S a_{scex}} - 3}{\sqrt{1 + q_S a_{scex}} + 1} \right]. \tag{4}$$

where $a_{sc\,ex} = a_{ex} / 2$, $a_{ex} = \varepsilon_w \hbar^2 / \mu_\perp e^2$, $\mu_\perp$ is the exciton effective mass.

As we can see from Exp. (4), in the zero-order approximation with respect to the small parameter q binding energy E_b does not explicitly depend on the QW width d. While, as will be show next, the dependence from d implicitly holds through validity criteria $\rho_0^{-1} d \ll 1$. As in the unscreened situation with DC enhanced case [10], here in-plane distances of the order of $a_{sc\,ex} = a_{ex} / 2$ are characteristic for the screened Coulomb problem. For that E_b takes the value 16 R_0 with $q_S \to 0$ instead of 4R_0, where $R_0 \approx 0.34$ meV is the 3D exciton effective Rydberg.

In our model the Q2D charged (n- or p-type) channel contributes to the screening of the e-h pair. For that the Debye model 2D screening parameter q_S in the SQL limit is determined as [3, 9]

$$q_S = \frac{2}{a_{0e}} \left[1 - \exp(-\frac{\pi \hbar^2 n_S}{m_\perp k_B T}) \right], \tag{5}$$

where $a_{0e} = \varepsilon_w \hbar^2 / m_\perp e^2$, $m_\perp$ is the electron effective mass.

After combining Exp. (5) with 2D screening radius expression $\rho_0 = \sqrt{d / 2q_S}$ both for the pure degenerate $(\pi\hbar^2 n_S / m_\perp k_B T >> 1)$ and pure non-degenerate $(\pi\hbar^2 n_S / m_\perp k_B T << 1)$ Q2D EG cases the Exp.(4) holding validity criteria would be established in the form

$$\begin{cases} a_{0e} >> 4d \dfrac{\pi n_S \hbar^2}{m_\perp k_B T} \\ a_{0e} >> 4d \end{cases}. \tag{6}$$

With that, however, the n_S / T parameter's allowed ranges will be found numerically as well.

4. Numerical Calculation and Conclusions. As an illustration of offered model let now to carry out the Q2D screened exciton binding energy numerical calculations for InSb-based modulation-doped QW. In common these QW samples are grown on high dielectric constant-based substrates (large as InSb counterpart) such as $Al_xIn_{1-x}Sb$ and $Al_xGa_{1-x}As$ ternary materials [19].

InSb has the lightest effective mass $m_\perp = 0.014\ m_0$ and large dielectric constant $\varepsilon_w = 16.8$. By this reason free excitons are difficult to observe and do not appear as a decisive feature in bulk InSb samples due to the small exciton binding energy (~$0.4 \div 0.5$ meV). As we will show next, in the model under discussion the screened Q2D exciton binding energy may substantially enhanced, which makes these systems an interesting nominee for excitonic device applications. The numerical data for the n_S/T parameter's permitted interval are shown in Table 1.

Table 1

The numerical data of n_S/T parameter's allowed interval for the QW fixed width values

d nm	1.5	3.0	5.0	10.0
n_S/T cm^{-2}/^{0}K	$10^6 \div 10^{12}$	$10^6 \div 4.10^8$	$10^6 \div 2.10^8$	$10^6 \div 10^8$

As follows, the density/temperature ratio parameter n_S/T allowed interval widening goes along with the decrease of the QW width d and this tendency keeps further tough as the QW becomes narrower. In particular, for the moderate thin QW case with d = 10nm and $n_S/T = 10^6 \div 10^8$ cm^{-2}/ ^{0}K the Q2D EG wholly behaves such as the nondegenerate gas. In turn, under d = 5nm QW width values the Q2D EG deviates from the pure nondegeneracy and demonstrates the fairly degenerate gas properties under strongly narrow QW cases (narrower than d ~ 20nm and $n_S/T > 1.5.10^9$ cm^{-2}/ ^{0}K).

Now let us display the Q2D screened exciton binding energy numerical calculations for the InSb-based QW system with 2D Debye – Hückel - type potential. In Fig.1 we plot the binding energy E_b dependence versus parameter n_S/T. Although E_b in our model approximation does not depend explicitly on QW width d , nevertheless, the correlation between the latter and n_S/T parameter specifically determines the validity criteria $\rho_0 >> d$ and, hence, the allowed ranges for the E_b as well. So, the latter implicitly depends from d in accordance with Table 1 results. On the graph the allowed ranges of n_S/T parameter for the fixed QW width d are marked by crosses.

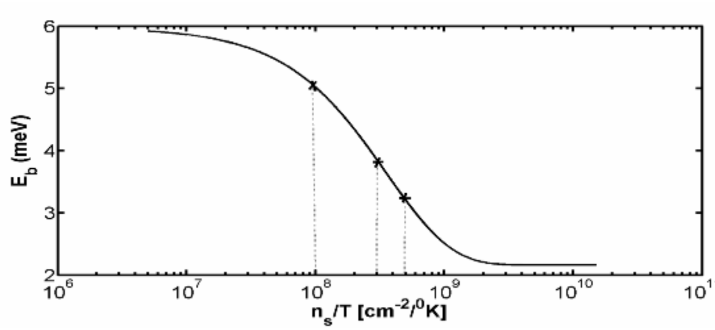

Fig. 1. The binding energy of the screened exciton E_b as the function of density / temperature ratio parameter n_S/T in the cases of QW width d=10nm ($10^6 \div 10^8$ cm^{-2}/ ^{0}K), d=5nm ($10^6 \div 2.10^8$ cm^{-2}/ ^{0}K), d=3nm ($10^6 \div 4.10^8$ cm^{-2}/ ^{0}K) and d=1.5nm ($10^6 \div 10^{12}$ cm^{-2}/ ^{0}K).

As follows from Fig.1, the screened exciton DC affected binding energy E_b is enhanced substantially in relation to bulk unscreened and DC absent result

(~$0.3 \div 0.4$ meV) for the n_S/T values less than 5.10^8 cm^{-2}/ ^{0}K and QW width values less than 5 nm. According to this, in the asymptotic n_S/T low limit range less than 4.10^6 cm^{-2}/ ^{0}K and for the aforementioned QW width values the unscreened DC enhanced $E_b \approx 16R_0$ result [9] is recovering.

In the transition region between moderate low (2.10^7 cm^{-2}/ ^{0}K) and high n_S/T values (4.10^8 cm^{-2}/ ^{0}K) for the nondegenerate Q2D EG case the screened binding energy E_b grows up sharply with decreasing of the indicated parameter and has enhanced more than twice for the QW width values less than 3nm. At n_S/T values larger than 10^9 cm^{-2}/ ^{0}K and QW width values less than $d = 2$ nm for the degenerate Q2D EG case E_b starts to saturate, but the remaining binding is still sizable (> 2 meV) and should permit for the observation of exciton-associated features in InSb-based QW's at low temperatures.

[1,2] National Polytechnic University of Armenia
[2] Armenian State Pedagogical University after Khachatur Abovyan
e-mail: ahkamo@yahoo.com

K. H. Aharonyan, N. B. Margaryan

Binding Energy of the One-Sided Dielectrically Enhanced Screened Exciton in Semiconductor Quantum Well

A formalism for the study of the two-dimensional screened exciton states in one-sided strong dielectric contrast affected ternary quantum well (QW) system modeled by the two-dimensional Debye-Hückel-type potential is presented. The numerical analysis depending on the specifics of InSb-based QW is provided. The appropriate density/temperature ratio parameter and QW width correlated ranges have been established for the variationally calculated two-dimensional screened exciton binding energy expression holds. The latter's strong enhancement (4÷6 meV) in relation to the unscreened exciton bulk value (0.3÷0.4meV) is received.

К. Г. Агаронян, Н. Б. Маргарян

Энергия связи экранированного экситона в полупроводниковой квантовой яме с односторонним диэлектрическим усилением

В модели двумерного дебай-хюккелевского потенциала взаимодействия в трехслойной квантовой яме представлен формализм для исследования экранированных экситонных состояний с учетом одностороннего сильного контраста диэлектрических постоянных. Проведены численные расчеты для структуры с квантовой ямой на базе InSb. Установлены соответствующие коррелированные промежутки для величин отношения двумерная плотность/температура и ширины квантовой ямы, при которых вычисленное вариационным методом выражение для энергии связи двумерного экранированного экситона имеет место. Получено строгое увеличение последней (4÷6 мэВ) по отношению к аналогичной величине (0.3÷0.4мэВ) для неэкранированного экситона в объемных образцах.

Կ. Հ. Ահարոնյան, Ն. Բ. Մարգարյան

Մեկկողմանի դիէլեկտրական ուժեղացմամբ էկրանավորված էքսիտոնի կապի էներգիան կիսահաղորդչային քվանտային փոսում

Երկչափ դեբայ-հյուկելյան բնույթի փոխազդեցության պոտենցիալի կիրառությամբ ներկայացված է եռաշերտ քվանտային փոսում երկչափ էկրանավորված էքսիտոնային վիճակների ուսումնասիրությունը՝ դիէլէկտրական հաստատունի մեկկողմանի կտրուկ թռիչքի հաշվառումով: Կատարված է թվային հաշվարկ՝ InSb-ի հենքով քվանտային քվազիերկչափ կառուցվածքի համար: Վեր են հանված երկչափ խտություն/ջերմաստիճան հարաբերության և քվանտային հորի լայնության արժեքների համապատասխան փոխկապակցված միջակայքերը, որոնց դեպքում երկչափ էկրանավորված էքսիտոնի՝ վարիացիոն սկզբունքով հաշված կապի էներգիայի արտահայտությունը տեղի ունի: Ստացված է վերջինիս մեծության էական աճ մինչև 4÷6 մէՎ՝ hոծ նմուշներում չէկրանավորված էքսիտոնի համապատասխան արժեքի (0.3÷0.4 մէՎ) նկատմամբ:

References

1. *Shinada M., Sugano S.* - J. Phys. Soc. of Japan. 1966. V. 21. P. 1936-1946.
2. *Kazaryan E. M., Enfiadjyan R. L.*- FTP [Sov.Phys.Semicond.] 1971.V.5. P. 2002-2004.
3. *Rytova N. S.*- Vestnik Mosk. Univ. Fizika. Astronomia. 1967. V. 30. P. 30-37.
4. *Stern F., Howard W. E.*- Phys. Rev. 1967. V. 163. P. 816-835.
5. *Shik A.Ya.*- Phys. Stat. Sol. (b). 1969. V. 34. P. 661-664.
6. *Chaplik A.V. -JETP*. 1971.V. 33. P. 997-1000.
7. *Aharonyan K. H., Kazaryan E.M.* -Thin Solid Films.1983.V. 105. P. 149-156.
8. *Brum J.A., Bastard G., Guillemot C.* - Phys. Rev. B. 1984. V. 30. P. 905-908.
9. *Lee J., Spector H.N., Melman P. J.*-Appl.Phys.1985.V.58. P. 1893-1897.
10. *Chaplik A. V., Entin M. V.*- JETP.1971. V. 61. P. 2496-2503.
11. *Keldish L.V.*- JETP Lett. 1979.V. 29. P. 658-661.
12. *Aharonyan K.H.*- Physica E. 2010. V.43. P. 111-116.
13. *Aharonyan K.H., Kazaryan E.M.*- Physica E. 2012.V. 44. P. 1924-1930.
14. *Aharonyan K.H.*- J. of Physics: Conf. Series. 2012.V. 350. P. 012015-1-8.
15. *Aharonyan K. H., Kazaryan E.M.*- Int.J. of Mod. Phys.: Conf. Series. 2012.V. 15. P. 224-231. b) *Aharonyan K. H., Margaryan N. B.*- Bulletin of SEUA, Yerevan. 2012. V. 1. P. 81-86.
16. *Miller R. C.,Kleinman D. A.,Tsang W.T., Gossard A.C.*- Phys.Rev. B.1981.V. 24. P. 1134-1136.
17. *Gubarev S.,Volkov O.V.,Kovalskij V.A.,Kulakovskij D.V., Kukushkin I.V.*- JETP Lett. 2002. V. 76, P. 575-578.
18. *Poszwa A.*- Phys. Scr. 2014.V. 89, P. 065401-1-10.
19. *Pooley O. J., Gilbertson A. M., Buckle P. D., Hall R. S., Buckle L., Emeny M. T., Fearn M., Cohen L. F., Ashley T.*- New J. of Phys. 2010. V. 12, P. 053022 1-9.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

Г. Н. Саргсян

Квантово-химическое обоснование и моделирование механизма мономолекулярного распада органического соединения при термической активации. Расчет констант скорости мономолекулярного спонтанного распада виниловых эфиров. 2

(Представлено академиком И. А. Варданян 25/XI 2015)

Ключевые слова: *эфир, константа скорости, фактор частоты, распад*.

Методы расчета величины константы скорости химических реакций, в частности реакций термического спонтанного распада простых молекул, как правило, дают удовлетворительные результаты [1]. Например, метод переходного состояния (ПС) хорошо описывает процесс, если возможно точно рассчитать поверхность потенциальной энергии. Однако при исследовании спонтанного распада сложных молекул, в том числе виниловых эфиров (ВЭ), расчет поверхности потенциальной энергии, а тем более определение энергии активации не всегда удается провести с достаточной точностью.

В первой статье данной серии [2] представлены развитый нами квантово-механический метод и способ моделирования термического спонтанного распада ВЭ, позволяющие получить предэкспоненту (фактор частоты) константы скорости этого процесса. Принимается, что процессы термического мономолекулярного распада ВЭ протекают через образование циклической структуры вследствие появления внутримолекулярной водородной связи, обусловленной внутримолекулярными вращениями, вызванными термической активацией.

Определение факторов частоты спонтанного распада винилэтилового эфира (ВЭЭ), винилпропилового эфира (ВПЭ) и винилбутилового эфира (ВБЭ) было проведено с помощью математических программ, входящих в состав программного комплекса ChemBio Ultra 12.0, путем построения этих молекул по программе MM2 и последующей минимизации энергии по программе Gaussian Job: # RHF/6-31G Freq Test, а также расчета наименьшего отрицательного значения частоты, соответствующей отрыву атома водорода от атома углерода алкильной группы.

В дальнейшем этот атом, находящийся в дальнодействующем поле атома углерода виниловой группы, притягивается к нему.

В настоящей работе с использованием значения фактора частот и энергий активации, полученных нами в [2, 3], рассчитаны константы скорости распада виниловых эфиров.

В случае ВЭЭ получены два значения фактора частоты $v_1 = 344.1315$ см$^{-1}$ и $v_2 = 278.1486$ см$^{-1}$ в зависимости от того, какие атомы водорода $-\beta$ или α отрываются от алкильной группы.

В случае ВПЭ и ВБЭ величины фактора частоты для отрыва α атома водорода от алкильной группы составляют $v\text{п} = 192.1585$ см$^{-1}$, $v\delta =$ $= 174.7585$ см$^{-1}$, соответственно.

В работе [3] предложен полуэмпирический метод определения энергии активации термического спонтанного распада вышеуказанных ВЭ на насыщенные продукты с помощью потенциала Ленарда – Джонса и получены его значения.

При определении параметров в потенциале Ленарда–Джонса

$$U(r) = 4\varepsilon\left[(\sigma / R)^{12} - (\sigma / R)^{6}\right],$$

где ε, σ – полуэмпирические параметры, R – расстояние между атомами, руководствовались следующими соображениями. Для благородных газов величины параметров ε, σ рассчитаны с хорошей точностью. Поскольку по расположению в таблице Менделеева атом углерода с заполненной электронной оболочкой более близок к атому неона, то во избежание ненужных сложностей расчетного характера для взаимодействия двух таких атомов углерода (в составе молекулы эфира) использованы величины ε, σ, рассчитанные для неона [4]: $\varepsilon = 0,04$ эВ, $\sigma = 2,844$.

Энергия активации определялась как разница энергий связей участника водородной связи атома водорода алкильной группы и энергии деформации молекулы ВЭ. Последняя возникает из-за появления в молекуле разрыхляющей связи, энергия которой определяется энергией возбуждения электронных уровней [4] вследствие внутримолекулярных вращений, а именно приближения двух атомов углерода разных групп, Сказанное на примере ВПЭ иллюстрирует рис.1.

Определение константы скорости проводилось на основе формулы, полученной Слейтером [5] в случае распада гипотетической двухатомной молекулы:

$$k = v \cdot e^{-\frac{E_0}{RT}},$$

v – предэкспонента, E_0 – энергия активации.

v также называется фактором частоты, и разрыв связи в сложной молекуле описывается наименьшим значением мнимого решения уравнения Шредингера, если молекулу представить в виде гипотетической двухатомной молекулы.

ПС

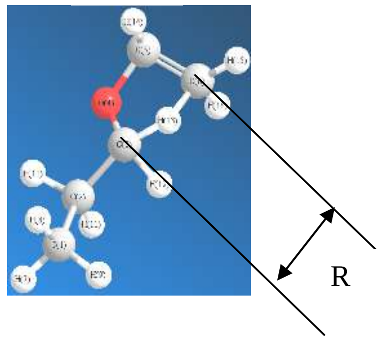

Рис.1. ПС состояние ВПЭ и расстояние R между двумя атомами углерода при образовании водородной связи между α-атомом водорода алкильной группы и крайним атомом углерода виниловой группы.

Соответствующие значения этих величин наряду с литературными данными других авторов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Величины энергии активации для ВЭЭ, ВПЭ, ВБЭ и константы скорости спонтанного распада

Эфир	Энергия акт., ккал/моль	Лит. данные, ккал/моль	Константа скорости $с^{-1}$, Т = 721К	Лит. данные $с^{-1}$, Т = 721К
ВЭЭ	44.9 (ПС1) 41.0(ПС2)	43.8 [6] 42.3	0.25 4.622	0,017[6] 0.619
ВПЭ	42.32	-	1.034	-
ВБЭ	46.8	424 [7]	0.042	0.189 [7]

В пределах точности подобных расчетов, как видно из таблицы, метод дает удовлетворительные результаты. Это, конечно, специфический случай, когда распад происходит в результате образования циклических структур в эфирах, вследствие термической активации. Однако метод, развитый в наших работах, может быть полезным и при исследовании распада сложных органических соединений.

Важнейшим результатом работы можно считать то, что впервые подтверждено предположение, что при образовании циклических структур вследствие водородной связи основной вклад в характеризующие величины процесса распада или изомеризации вносят атомы, непосредственно участвующие в их образовании, а также то, что развитый нами квантовохимический подход [2, 3] может описывать процесс распада сложных органических соединений.

Институт химической физики
им А. Налбандяна НАН РА

Г. Н. Саргсян

Квантово-химическое обоснование и моделирование механизма мономолекулярного распада органического соединения при термической активации. Расчет констант скорости мономолекулярного спонтанного распада виниловых эфиров. 2

Исходя из значений величин факторов частоты и энергий активации распада, полученных нами в предположения об образовании циклических структур, в виниловых эфирах вследствие термической активации рассчитаны величины констант скорости этого процесса.

Գ. Ն. Սարգսյան

Օրգանական նյութերի ջերմային ակտիվացմամբ մոնոմոլեկուլային քայքայման քվանտաքիմիական հիմնավորումը և մեխանիզմի մոդելավորումը: Վինիլային եթերների ինքնաքայքայման արագության հաստատունի հաշվարկը: 2

Հիմնվելով մեր կողմից ստացված վինիլային եթերների քայքայման հաճախության գործոնի և ակտիվացման էներգիայի արժեքների վրա՝ հաշված են այդ պրոցեսի արագության հաստատունները:

G. N. Sargsyan

Quantum-chemical Explanation and Modeling of Mechanism of Unimolecular Decay of Organic Compounds under Thermal Activation. Calculation of the Constant of Rate of Vinyl Ethers. 2

Taking into consideration the frequency factors values and activation energy of decomposition, obtained and based on the assumption of the formation of cyclic structures in vinyl esters at thermal activation, the rate constants of that process has been calculated.

Литература

1. *Кондратьев В. Н., Никитин Е. Е.* Кинетика и механизм газофазных реакций. М. Наука. 1984. 559 с.
2. *Саргсян Г. Н.* – ДНАН Армении. 2015. Т.115. № 4. С. 303-311.

3. *Саргсян Г. Н., Шахрох Б., Арутюнян А. Б.* – Журнал физической химии. 2015. Т. 89. № 2. С. 252-257.
4. *Фано У., Фано Л.* Физика атомов и молекул. М. Наука. 1980. 656 с.
5. *Slater N.B.* – Theory of Unimolecular Reactions. Cornell University. New York. 1959. 230 p.
6. *Shimofuji K., Saito K., Imamura A.* – J. Phys. Chem. 1991. V. 95. N. 1. P. 155-172.
7. *Stein L,. Murphy G. W.* – J. Amer. Chem. Soc. 1952. V. 74 P. 1041-1043.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.73+612.468

К. В. Казарян, Ш. Г. Маргарян

Сравнительный анализ характеристик спонтанной электрической активности различных органов мочевого тракта крысы

(Представлено чл.-кор. НАН РА Л.Р.Манвеляном 23/X 2015)

Ключевые слова: *мочеточник, мочевой пузырь, уретра, спонтанная активность, потенциал действия, автоматизм.*

Основная функция мочевого тракта заключается в обеспечении однополярной контрактурной деятельности для выведения мочи. Подобно другим гладкомышечным тканям данная контрактура обеспечивается распространением вдоль мочеточника электрической возбудительной волны в виде потенциалов действия [1, 2], и определяемое почкой количество выводимой из организма жидкости при этом перемещается до мочевого пузыря. Известно, что процесс возникновения перистальтики мочеточника по своей природе миогенный [2, 3] и осуществляется благодаря наличию в почечной лоханке активных пейсмекерных клеток, так называемых атипичных гладкомышечных клеток. Будучи ритмоводителями они генерируют спонтанные пейсмекерные потенциалы, которые благодаря наличию нестандартных интерстициальных клеток Кахаля (миодуляторов их активности) способствуют возникновению потенциалов действия в гладкомышечных клетках, распространяющихся вдоль мочеточника до мочевого пузыря [4-6].

Мочевой пузырь характеризуется двумя основными функциями: кумуляцией вырабатываемой почкой мочи, приспосабливаясь при этом к адекватному увеличению его объема не повышая внутрипузырного давления; быстрым опорожнением. Вместе с тем данный орган не является простым приспосабливаемым резервуаром – это миогенный, спонтанно активный мышечный орган [6-9]. Если в мочеточнике присутствие пейсмекеров необходимо для генеза ритмичной перистальтики для продвижения мочи, то мочевой пузырь большую часть времени функционирует как орган, кумулирующий мочу, и при этом гладкомышечные клетки спонтанно активны, обусловливая слабо координированную контрактуру, которая возникает в различных локусах мочевого пузыря [7, 10]. В связи с этим интерстициальные клетки Кахаля в мочевом пузыре, подобно почечной лоханке, скорее всего функционируют как модуляторы активности гладкомышечной ткани [4, 6].

Уретра комбинированно функционирует с мочевым пузырем и способствует его наполнению и опорожнению. Спонтанная электрическая и механическая активность гладкой мускулатуры уретры обеспечивают значительный мышечный тонус, который способствует функции релаксации мочевого пузыря и, подобно проксимально расположенным органам, характеризуется миогенной природой [8, 6]. Действительно, при перерезке нервных входов и, более того, при изоляции и канюлировании уретры также наблюдается тонус, хотя механизм его миогенного генеза все еще не исследован [6,11,12]. Тем не менее электрическая активность данного органа представлена разрядами потенциалов действия, наложенными на медленные ритмичные осцилляции мембранного потенциала [13-15]. Подобно мышцам мочевого пузыря, плотно связанные с интерстициальными клетками Кахаля гладкомышечные клетки уретры способны изменить свою активность [6, 15].

Согласно вышеизложенному для исследуемых органов при всех их различных физиологических функциях показано наличие базового спонтанного электрического ритма. При этом присутствие в мышечной ткани мочевого тракта интерстициальных клеток Кахаля причастно к генезу их миогенной электрической активности в зависимости от органа либо в виде модуляторов активности гладкомышечных клеток, либо «свободных пейсмекеров» [10,16]. В таком случае нельзя исключить соответствующих отличий в показателях электрического ритма.

Целью данной работы является проведение сравнительного анализа параметров спонтанной электрической активности между органами мочевого тракта: мочеточником, мочевым пузырем, уретрой.

Работа выполнена в условиях in situ на крысах массой 250-300 г, наркотизированных внутрибрюшинно нембуталом (45-50 мг/кг). Денервация мочеточника, мочевого пузыря и уретры осуществлялась перерезкой корешков чревного, тазового, срамного, а также подчревного нервов [17]. Регистрация активности проводилась одновременно с поверхности мочеточника, из мочевого пузыря и уретры. Спайковые разряды из околопочечной области мочеточника отводили биполярными электродами (расстояние между воспринимающими кончиками 2 мм). Активность мочевого пузыря регистрировалась с внутренней поверхности проксимальной зоны органа. С этой целью предварительно делался небольшой надрез в дистальном отделе мочевого пузыря, через который вводился электрод и осуществлялся отток мочи. Электрическая активность уретры также регистрировалась из ее дистального отдела путем введения элекрода через нижний сфинктер органа.

Все эксперименты были острыми, и после завершения регистраций животные умерщвлялись введением дополнительного количества нембутала. Схематическое изображение всех исследуемых органов, показанное на рис. 1, А, позволяет наглядно представить области, из которых отводилась электрическая активность.

А Б

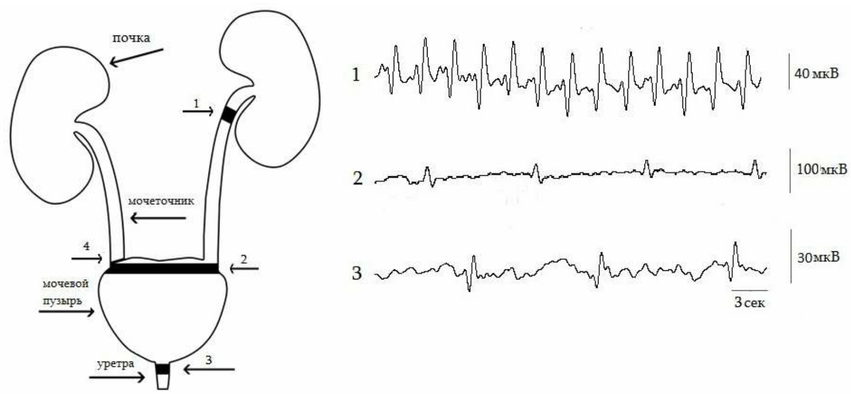

Рис. 1. А. Схематическое изображение мочеточников, мочевого пузыря и уретры. 1, 2, 3 – соответственно области регистрации активности; 4 – область перерезки мочеточника. Б. Типы спонтанных активностей, зарегистрированных из областей 1,2,3.

Анализ электрофизиологических регистраций проводился путем определения значений следующих параметров спонтанных потенциалов действия: частоты, амплитуды, средней скорости нарастания пика, продолжительности нарастания (продолжительность увеличения амплитуды потенциала действия до максимального значения при фазе нарастания), половины ширины (время, за которое формируется верхняя часть пика начиная с уровня мембранной поляризации, соответствующей половине амплитуды потенциала действия при фазе нарастания до этого же уровня потенциала при фазе падения).

Спонтанная электрическая активность регистрировалась на 4-канальном приборе, разработанном в Институте физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА для оценки электрической активности гладкой мускулатуры [18]. Отношение сигнал – шум прибора осуществляет достоверную регистрацию отклонений сигналов с амплитудой до 10 мкВ. Полосовая фильтрация регистрируемых сигналов находится в диапазоне 3-30 Гц. Значения определяемых показателей представлены в виде среднестатистических данных±стандартный разброс. Статистический анализ характера зарегистрированных сигналов проводился с использованием пакета Lab View и Origin 8.5. Оценка достоверности изменения полученных данных осуществлялась согласно t-критерию Стьюдента.

На рисунках как единичные, так и наложенные друг на друга для сравнения потенциалы действия представляют собой типичные формы усредненных потенциалов действия. Усреднение форм потенциалов действия проводилось как в пределах каждого эксперимента, так и по всем экспериментам.

Все эксперименты были проведены в соответствии с правилами Ереванского государственного медицинского университета по этике в области ухода и использования лабораторных животных. Эксперименты, а также уход за животными выполнены в соответствии с «Правилами и нормами гуманного обращения с объектами исследования».

Поскольку мочеточник является парным органом, воздействие распространяющейся волны спонтанной активности на автоматизм мочевого пузыря при нормальных условиях, естественно, будет наблюдаться на каждую из сторон органа. Исходя из этого решение поставленной перед нами задачи требует пошагового исследования электрофизиологических свойств органов нижнего мочевого тракта. В настоящей работе регистрация активности из всех ритмогенных отделов, схематически представленных на рисунке, проводилась при исключении влияния активности одного из мочеточников (рис. 1, А, *4*). На рис. 1, Б приведена картина записи активности при одновременной ее регистрации из мочеточника, мочевого пузыря и уретры. Строго ритмичная спонтанная электрическая активность в виде потенциалов действия из области мочеточника, близлежащей к пиелоуретеральному соустью, представляет собой волну возбудимости, распространяющейся дистально до мочевого пузыря. Согласно полученным ранее результатам [18] активность мочевого пузыря представляет собой по сравнению с мочеточником более низкоамплитудные потенциалы действия с присущей ему ритмикой, которая менее чем в 10 % случаев может быть не строго регулярной. При этом не исключается также возможность генеза сгруппированных в виде вспышек потенциалов действия.

В связке отмеченных выше органов мочевого тракта особый интерес вызывает активность уретры, функционально тесно связанной с деятельностью мочевого пузыря. Данный орган, предотвращая утечку мочи при фазе его наполнения, характеризуется значительным тонусом, который сменяется релаксацией, способствуя мочеиспусканию. Согласно рис. 1, Б, *3* активность уретры более ритмична, а амплитуда потенциалов действия ниже, чем у мочевого пузыря, и возникает на фоне частых медленноволновых изменений мембранного потенциала.

Помимо наглядных, описанных выше параметров спонтанной активности (частота ритмогенеза и амплитуда потенциалов действия), в работе определялись также показатели потенциалов действия, формирующие их контур (средняя скорость нарастания пика, продолжительность его нарастания и половина ширины). Сравнительный анализ данных параметров активности всех органов выявил определенные различия в их свойствах (рис. 2). Согласно гистограммам наибольшей амплитудой характеризуется амплитуда потенциалов действия мочеточника, амплитуды мочевого пузыря и уретры меньше таковых для мочеточника соответственно на 43.23 и 73 %. Величина же средней скорости нарастания пика для этих органов уменьшается по отношению к величине того же показателя для мочеточника соответственно почти на те же величины (46.6 и 76.3 %). Что же касается продолжительности нарастания пика, то данный параметр изменяется в основном для уретры, возрастая по отношению к таковому для мочеточника на 14 %. Для половины же ширины наблюдается небольшое уменьшение на 7 %. Частота спайков для мочевого пузыря и уретры соответственно уменьшается почти на ту же величину (50 и 45 %) по сравнению с мочеточником.

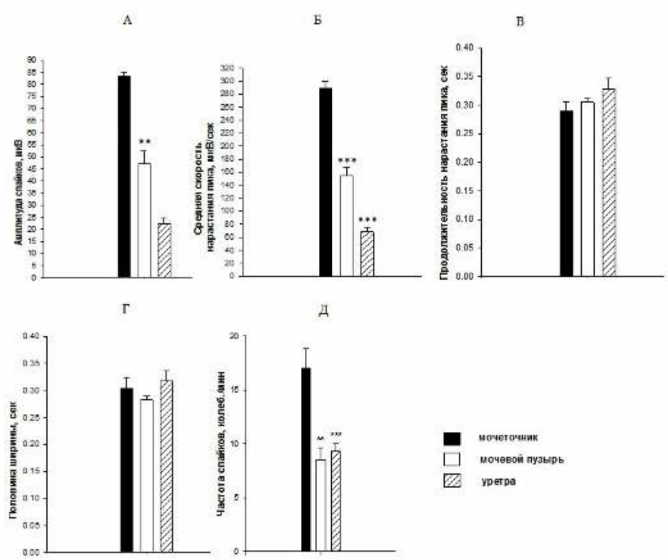

Рис. 2. Параметры спонтанных потенциалов действия, из соответствующих областей мочеточника, мочевого пузыря и уретры. А, Б, В, Г, Д – соответствуют каждому из параметров.

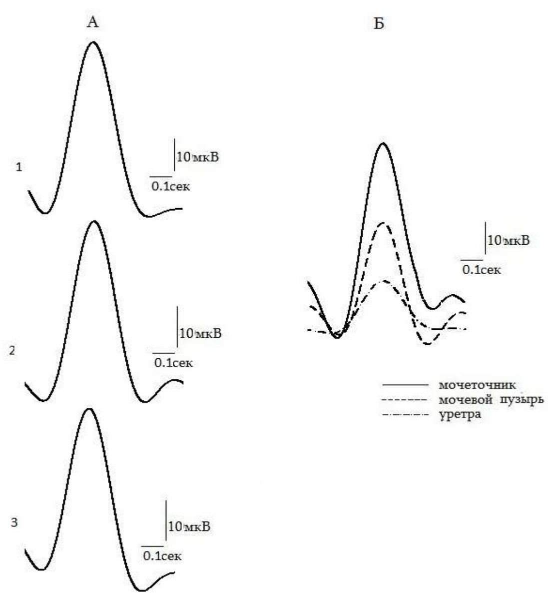

Рис. 3. Усредненные формы единичных потенциалов действия из различных областей регистрации активности. А. 1,2,3 – потенциалы действия соответственно из областей регистрации мочеточника, мочевого пузыря и уретры. Б. Наложение друг на друга потенциалов действия.

На рис. 3, А для наглядности представлены усредненные формы единичных потенциалов действия, составляющих спонтанную активность соответственно мочеточника, мочевого пузыря и уретры. Приведенные на гистограммах значения параметров активности для всех органов формируют соответственно эти потенциалы действия. Наложение же друг на друга этих единичных форм потенциалов действия (рис. 3, Б) позволяет представить различия в их показателях.

Помимо приведенного сравнительного анализа показателей активности определялся также коэффициент (К=А/2:t), который характеризует скорость формирования контура верхушки потенциала действия (степень остроты) [19]. Полученные величины данных коэффициентов для трех исследуемых областей (рис. 1, А, *1, 2, 3*) относятся как 138:84:35. Таким образом, наименьший показатель быстроты нарастания верхушки потенциала действия показан для активности уретры. Полученные в работе различия в показателях потенциалов действия, определяющих спонтанную активность в каждом из трех органов мочевого тракта, обусловлены особенностями типов их ритмогенеза. Изучение электрофизиологических свойств активностей данных областей позволит выявить механизмы, реализующие интегративную деятельность в целом всего мочевого тракта.

Институт физиологии им. Л. Орбели НАН РА

К. В. Казарян, Ш. Г. Маргарян

Сравнительный анализ характеристик спонтанной электрической активности различных органов мочевого тракта

Проведен анализ электрофизиологических свойств спонтанного ритмогенеза органов мочевого тракта: мочеточника, мочевого пузыря, уретры. Показано, что наряду со строго ритмичной активностью мочеточника в виде высокоамплитудных потенциалов действия активность мочевого пузыря характеризуется менее ритмичными спайками с более низкой амплитудой. Ритмогенез же уретры представлен равномерно возникающими спайками на фоне колебаний мембранного потенциала. Сравнение величин остальных показателей потенциалов действия (скорость нарастания пика и половина ширины) позволяет заключить об относительном подобии характера активности мочеточника и уретры.

Ք. Վ. Ղազարյան, Շ. Գ. Մարգարյան

Միզուղիների տարբեր օրգանների ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության համեմատական վերլուծությունը

Կատարվել է ինքնաբուխ ռիթմոգենեզի էլեկտրաֆիզիոլոգիական հատկության անալիզ այնպիսի օրգաններում, ինչպիսիք են՝ միզածորանը, միզապարկը և ուռետռան: Ցույց է տրված, որ միզածորանի ռիթմավար ակտիվության գործողության պոտենցիալն ունի ավելի մեծ ամպլիտուդա, քան միզապարկը, որը բնութագրվում է ոչ այդքան ռիթմիկ ու ավելի փոքր ամպլիտուդայով սպայկերով: Ուռետռայի ռիթմոգենեզը ներկայացված է հավասարաչափ ծագող սպայկերով՝ մեմբրանային պոտենցիալի տատանման ֆոնի վրա: Այլ պարամետրերի գործողության պոտենցիալի արժեքների համեմատությունը (արագություն, պիկի աճի արագությունը և լայնության

կեսը) թույլ է տալիս եզրակացնել միզապարկի և ուռետռայի բնույթների հարաբերական նմանության մասին։

K. V. Kazaryan, Sh. G. Margaryan

Comparative Analysis of the Characteristics of Spontaneous Electrical Activity of Various Organs of the Urinary Tract

Electrophysiological properties of spontaneous rhythmogenesis of the ureter, urinary bladder and urethra have been analyzed. It is shown that along with a strictly rhythmic activity of the ureter in the form of high-amplitude action potentials, the bladder activity is characterized by less rhythmic spikes with lower amplitude. Rhythmogenesis of the urethra is presented by regularly generated spikes against the fluctuations of the membrane potential. Comparison of the other parameters of action potentials (rise rate and half-width of peaks) allows us to conclude that the ureter and urethra have relatively similar natures of activity.

Литература

1. *Osman F., Romics I., Nyírády P., Monos E., Nádasy Gy. L.* - Acta Physiol Hung. 2009. V.96. №4. P. 407-26.
2. *Lang R. J., Exintaris B., Teele M.E., Harvey J., Klemm M. F.* - Clinical and Experimental Pharmacology and Physiology. 1998. V. 25. P. 310-321.
3. *Santicioli P., Maggi C. A.* - Pharmacol Rev. 1998. V.50. №4. P. 683-722.
4. *McCloskey K. D.* - Handb Exp Pharmacol. 2011. V.202. P. 233-54.
5. *Klemm M. F., Exintaris B., Lang R. J.* - Journal of Physiology. 1999. V.519 №3. P. 867-884.
6. *McHale N. G., Hollywood M. A., Sergeant G. P., Shafei M., Thornbury K. T., Ward S.* - Journ. Physiol. 2006. V. 576. № 3. P. 689-694.
7. *Andersson K. E., Arner A.*- Physiol Rev. 2004. V. 84. № 3. P. 935-86.
8. *Imai T., Tanaka Y., Okamoto T., Yamamoto Y., Horinouchi T., Tanaka H., Koike K., Shigenobu K.* – Acta Physiol Scand. 2002. V. 176. P. 57–63.
9. *Fry C. H., Meng E., Young J. S.*- Auton Neurosci. 2009. V. 19. №154. P. 3-13.
10. *Bradley J. E., Anderson U. A., Woolsey S. M., Thornbury K. D., McHale N. G., Hollywood M. A.* - Am J Physiol Cell Physiol. 2004. V. 286. P. 1078–1088.
11. *Fleishmann B. K., Murray R. K., Kotlikoff M. I.* – Proc Natl Acad Sci USA. 1994. V.91. P. 11914–11918.
12. *Hashitani H., Edwards F. R.* - J Physiol. 1999. V. 15. № 514(Pt 2). P. 459–470.
13. *Hikaru H., Dirk F., Van H., Hikaru S.* - British Journal of Pharmacology. 1996. V.118. №7. P. 1627-32.
14. *Callahan S. M., Creed K. E.* - Br J Pharmacol. 1981. V. 74. №2. P. 353-8.
15. *Lyons A. D., Gardiner T. A., McCloskey K. D.* - BJU Int. 2007. V. 99. №3. P. 687-94.
16. *Brading A. F.* - J Physiol. 2006. V. 1. №570. P. 13–22.
17. *Казарян К. В., Симонян Л. Г., Чибухчян Р. Г.* - Рос. физиол. журн. им. И.М.Сеченова. 2015. Т. 101. №4. С.433-440.
18. *Moore K., Agur A.* – Essential Clinical anatomy. third edition. Philadelphia. Lippincott Williams and Wilkins. 2007. P. 227-228.
19. *Казарян К. В., Унанян Н. Г., Саваян А. А., Пилипосян Т. А., Мкртчян А. В., Манукян А. М.*- Журнал эволюционной биохимии и физиологии. 2015. Т. 51. №5. С. 340-346.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 1

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 597.82:612.886

Член-корреспондент НАН РА Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян, А. В. Маркарян

Нейронные механизмы мозжечково-ретикулярной проекционной системы лягушки

(Представлено 11/XII/2015)

Ключевые слова: *ретикулярная формация, аурикулярная область коры мозжечка*.

Ранее нами было исследовано влияние аурикулярной области коры мозжечка на мотонейроны вестибулярного ядерного комплекса (ВЯК). Согласно литературе, латеральное вестибулярное ядро (ЛВЯ) происходит из ретикулярной формации (РФ) [1 - 3]. Имеются веские доказательства, что импульсы, поступающие из вестибулярных ядер на спинальные мотонейроны, могут быть опосредованы также и через ретикуло-спинальные нейроны [1, 2]. Орловским и соавт. [2] было показано, что большинство ретикуло-спинальных нейронов независимо от локализации в стволе мозга участвует в передаче вестибулярной информации в спинной мозг. Важно отметить, что РФ является одной из фундаментальных систем мозга и развита у всех позвоночных, а ретикуло-спинальный тракт представляет собой наиболее древнюю церебро-спинальную систему [4].

В связи с вышеизложенным нам представляется важным изучение функциональных взаимоотношений в системе аурикулярная область мозжечка – медиальная ретикулярная формация (МРФ). У млекопитающих были обнаружены тормозные мозжечковые влияния на нейроны РФ [5]. Эти влияния опосредуются вполне определенными церебелло-ретикулярными путями [6]. Такие исследования у низших позвоночных как лягушка отсутствуют. Существует мнение о сходстве мозжечково-ретикулярных связей у лягушки и более высших позвоночных, в том числе и млекопитающих [7].

В данной работе проведено электрофизиологическое изучение ортодромных потенциалов нейронов МРФ, возникающих в ответ на раздражение аурикулярной области коры мозжечка лягушки.

Материалы и методы. Эксперименты проведены на 93 озерных лягушках (Rana ridibunda) обоего пола по методике изолированного перфузируемого мозга [8]. Животных глубоко наркотизировали раствором MS-222 (0.2 г/кг). Вскрывалась грудная клетка и обнажалось сердце. Через его желудочек в дугу аорты вводилась канюля с целью перфузии раствором Рингера для холоднокровных, насыщенным карбогеном и охлажденным до 10-18° С. С дорсальной стороны вскрывался череп. Электрическое раздражение передней ветви VIII нерва осуществлялось одиночными ударами постоянного тока (0.1 - 0.2 мс; 0.05 -0.4 мА) посредством серебряного всасывающего электрода. Краниотомией обнажался также мозжечок. Под визуальным контролем на поверхность аурикулярной области осторожно прикладывались биполярные шариковые электроды. Для электрического раздражения аурикулярной области мозжечка применялись те же параметры тока, что и в отношении вестибулярного нерва. С целью внутриклеточного отведения электрической активности нейронов МРФ использовались сточенные стеклянные микроэлектроды, заполненные раствором 2М лимоннокислого калия, с сопротивлением 10-20 MΩ. Наилучший эффект отведения потенциалов нейронов МРФ в ответ на раздражение вестибулярного нерва наблюдался, когда электрод вводили в область дна четвертого желудочка, на 1.5-2.0 мм каудальнее входа вестибулярного нерва в ствол мозга, на 200-500 μ латеральнее средней линии и погружали на глубину 500-1000 μ от дорсальной поверхности [9]. Проводился компьютерный анализ данных. Пробеги луча осциллографа посредством аналого-цифрового преобразователя конвертировали и сохраняли в компьютере для последующей обработки. Приведены среднеарифметические стандартные отклонения показателей.

Результаты и обсуждение. Нейроны МРФ идентифицировались на основании возбуждающих постсинаптических потенциалов (ВПСП) (рис. 1, а *1*, б *1*, в *1*, г *1*; рис. 2, а *1*, б *1*, в *1*, г *1*), возникающих в ответ на раздражение вестибулярного нерва. Лишь 30% идентифицированных нейронов МРФ отвечали на стимуляцию мозжечка. Известно, что нейроны МРФ амфибии обильно снабжаются вестибулярными волокнами [3, 10]. Вестибулярные афференты влияют на нейроны МРФ также через интернейроны, локализованные в ВЯК [2]. Внутриклеточная активность зарегистрирована в 175 ретикулярных нейронах.

Одиночное раздражение аурикулярной области коры мозжечка вызывало тормозные постсианптические потенциалы (ТПСП). Учитывая временные характеристики исследованных ответов, мы условно разделили зарегистрированные ТПСП на две группы: коротко- и длиннолатентные.

В первую группу вошли 56 нейронов, скрытый период которых составлял 1.65-3.0 мс (в ср. 2.56±0.33 мс; n=56) (рис. 1, а *2*, б *2*, в *2*, г *2*; рис. 3). При различной интенсивности стимуляции не наблюдалось значительного изменения продолжительности скрытого периода и времени нарастания амплитуды до максимума. Последняя составляла в среднем 3.72±0.93 мс (2.1-6.15 мс; n=52). Их амплитуда достигала 0.57-3.3 мВ (в ср. 1.58±0.58 мВ; n=52). Общая длительность колебалась в пределах 7.46-22.5 мс (в ср.

11.6± 3.16; n=55) (рис. 1, а *2*, б *2*, в *2*, г *2*; рис. 3). Отмеченные показатели дали основание рассматривать данные ТПСП как моносинаптические.

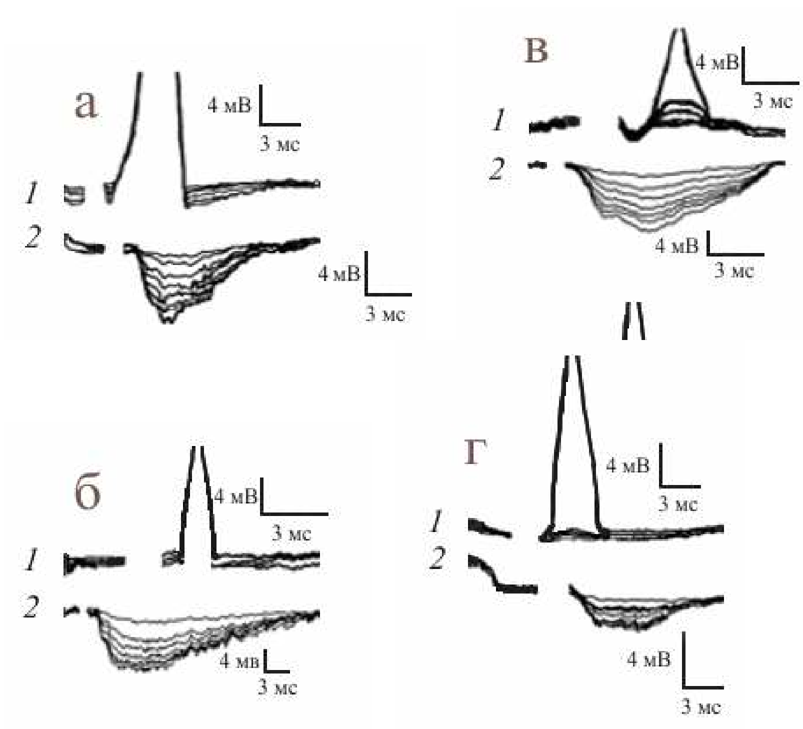

Рис. 1. Постсинаптические потенциалы четырех нейронов медиальной ретикулярной формации на раздражение аурикулярной области мозжечка. а *2*, б *2*, в *2*, г *2* – моносинаптические ТПСП; а *1*, б *1*, в *1*, г *1* – ВПСП тех же нейронов на раздражение передней ветви вестибулярного нерва с целью идентификации.

Известно, что синаптическая задержка в центральной нервной системе амфибий имеет величину порядка 1 мс [11]. В доступной нам литературе отсутствуют морфологические исследования о проекции аксонов клеток Пуркинье в РФ лягушек, тогда как на млекопитающих морфологически и электрофизиологически показана прямая связь мозжечка с РФ [12]. Это позволяет предположить, что коротколатентные ТПСП генерировались моносинаптически в нейронах РФ, предположительно прямой активацией аксонов клеток Пуркинье, проецирующихся в МРФ, по аналогии с существующей прямой связью клеток Пуркинье с ВЯК [13, 14].

Во вторую группу были включены 119 ретикулярных нейронов, в которых стимуляция аурикулярной области коры мозжечка вызывала ТПСП с более длительным и нестабильным скрытым периодом (рис. 2, а *2*, б *2*, в *2*, г *2*; рис.3). Они характеризовались четким укорочением скрытых периодов и времени нарастания гиперполяризации ТПСП до максимума при увеличении интенсивности стимуляции. Их скрытый период колебался в пределах 3.04-6.0 мс (в ср. 4.2±0.8 мс; n=119). Длительность времени нарастания амплитуды до максимума составляла в среднем 5.16±1.24 мс (2.22-8 мс; n=87). Амплитуда достигала максимума в среднем 1.8±0.62 мВ (0.63-3.5 мВ; n=92). Общая длительность данных ТПСП была в пределах 8.18-27.8 мс (в ср. 15.5±4.6 мс; n=112) (рис. 2, а *2*, б *2*, в *2*, г *2*; рис.3). Вышеотмеченные временные характеристики зарегистрированных ТПСП и их зависимость от интенсивности стимуляции указывают на ди-, олиго- и полисинаптическое происхождение.

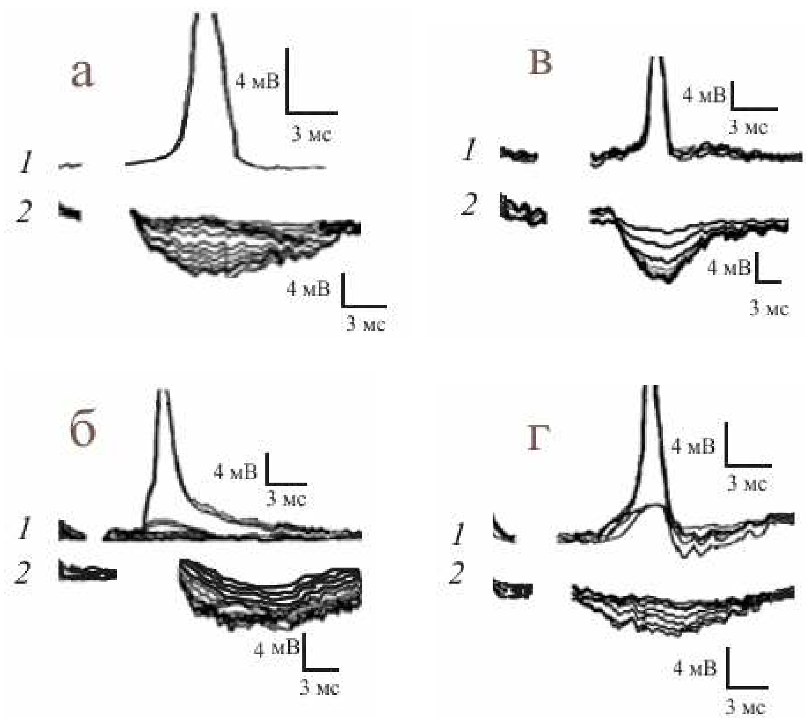

Рис. 2. Постсинаптические потенциалы четырех нейронов медиальной ретикулярной формации на раздражение аурикулярной области мозжечка. а *2*, б *2*, в *2*, г *2* – полисинаптические ТПСП; а *1*, б *1*, в *1*, г *1* – ВПСП тех же нейронов на раздражение передней ветви вестибулярного нерва с целью идентификации.

Выявлено, что длиннолатентные ТПСП, вызванные слабой стимуляцией поверхности мозжечка, постепенно укорачивались по времени при увеличении интенсивности стимуляции, т. е. при пространственной суммации входов параллельных волокон к дендритам клеток Пуркинье [11, 15, 16]. Мы полагаем, что описанные ди-, олиго- и полисинаптические ТПСП возникали не прямой, а косвенной активацией клеток Пуркинье [11, 17] через параллельные волокна, по аналогии с таковыми, зарегистрированными в ВЯК, в ответ на раздражение аурикулярной области коры мозжечка [13, 14].

Имеет ли данный нейрон коротко- или длиннолатентые ТПСП, зависит не только от интенсивности стимуляции, но и от относительной локализации раздражающего электрода, поскольку некоторые вестибулярные нейроны отвечают моносинаптически при очень слабой стимуляции, а другим необходим сильный стимул. Маленькие размеры мозжечка лягушки и близость аурикулярной дольки от ножки мозжечка не дают возможности точно определить месторасположение мозжечково-вестибулярных клеток Пуркинье. Однако можно полагать, что частота появления отмеченных ТПСП снижалась при перемещении раздражающего электрода ближе к средней линии мозжечка [16].

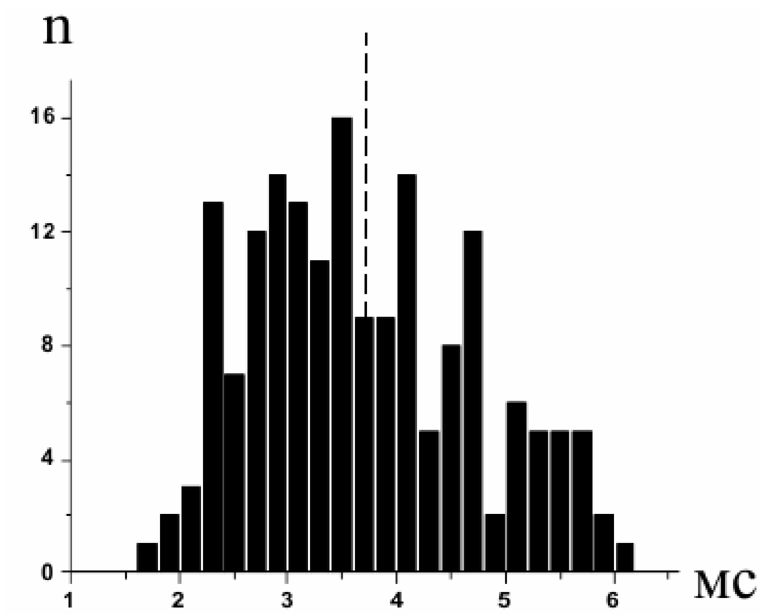

Рис. 3. Гистограмма распределения моно- и полисинаптических ТПСП нейронов медиальной ретикулярной формации в ответ на раздражение ипсилатеральной аурикулярной области коры мозжечка. Прерывистая линия условно разделяет моно- и полисинаптические ответы. По оси абсцисс – время (мс); по оси ординат – количество исследованных нейронов (n).

Таким образом, можно предположить о наличии вышеописанного механизма также в отношении мозжечково-ретикулярных взаимоотношений, учитывая зарегистрированные нами ТПСП. Обслуживая и направляя двигательный акт, мозжечок активно вовлекается в регуляцию позы и движения самого различного характера, кооперируясь помимо вестибулярной также с ретикулярной системой ствола мозга [18]. Мы полагаем, что вышеотмеченные функции мозжечка амфибий схожи с таковыми млекопитающих.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА

**Член-корреспондент НАН РА Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян,
Д. О. Терзян, А. В. Маркарян**

Нейронные механизмы мозжечково-ретикулярной проекционной системы лягушки

В экспериментах на препарате перфузируемого мозга лягушки исследовались внутриклеточные потенциалы нейронов медиальной ретикулярной формации (МРФ) в ответ на раздражение ипсилатеральной аурикулярной области коры мозжечка. Выявлено, что раздражение клеток Пуркинье вызывало моно- и полисинаптические тормозные постсинаптические потенциалы в нейронах МРФ.

**Corresponding member of NAS RA L. R. Manvelyan,
A. M. Nasoyan, D. O. Terzyan, A. V. Margaryan**

Neuronal Mechanisms of the Cerebello-Reticular Projection System in Frog

In experiments on the perfused frog brainstem intracellular potentials of neurons of the medial reticular formation (MRF) in response to stimulation of ipsilateral auricular area of the cerebellar cortex were studied. It was established that stimulation of Purkinje cells evoked mono- and polysynaptic inhibitory postsynaptic potentials in MRF neurons.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Մ. Նասոյան,
Դ. Օ. Թերզյան, Ա. Վ. Մարգարյան

Գորտի ուղեղիկացանցային պրոյեկցիոն համակարգի նեյրոնալ մեխանիզմները

Գորտի պերֆուզացվող ուղեղի պրեպարատի վրա կատարված փորձերում ուսումնասիրվել են միջակա ցանցաձև գոյացության (ՄՑԳ) նեյրոնների ներբջջային պոտենցիալները՝ ի պատասխան ուղեղիկի կեղևի համակողմ լսողական շրջանի գրգռման: Հայտնաբերված է, որ Պուրկինյեի բջիջների դրդումն առաջացնում է մոնո- և պոլիսինապտիկ արգելակիչ հետսինապտիկ պոտենցիալներ ՄՑԳ նեյրոններում:

Литература

1. *Rovainen C. M., Johnson P. A., Roach E. S., Monkovsky J. A.* – J. Comp. Neurol. 1973. V. 149. № 2. P. 193-202.
2. *Orlovsky G. N., Delyagina T. G., Wallen P.* – Brain Res. 1992. V. 90. № 3. P. 479-488.
3. *Matesz C., Kulik A., Bácskai T.* – J. Comp. Neurol. 2002. V. 444. № 1. P. 115-128.
4. *Шаповалов А. И.* – Нейроны и синапсы супраспинальных моторных систем. Л. Наука. 1975.
5. *Наумова Т. С.* – Физиология ретикулярной формации. М. Гос. изд. мед. лит. 1963.

6. *Brodal A., Pompeano O.* - J. Anat. 1957. V. 91. № 4. P. 438 – 454.
7. *Манвелян Л. Р., Арутюнян Э. Ю., Насоян А. М.* – Приложение к Журн. эвол. биох и физиол. 2005. Т. 41. С. 5-12.
8. *Погосян В. И., Фанарджян В. В., Манвелян Л. Р.* – Журн. эвол. биох и физиол. 1997. Т. 5. С. 164-173.
9. *Шаповалов А. И., Ширяев Б. И.*- Нейрофизиология. 1973. Т. 5. № 2. С. 164-173.
10. *Matesz C., Kovalicz G., Veress G., Deák A., Rácz E., Bácskai T.* – Brain Res. Bull. 2008. V. 75. P. 371-374.
11. *Llinás R., Precht W.* – Exp. Brain Res. 1969. V. 9. № 1. P. 16-29.
12. *Фанарджян В. В., Саркисян В. А.* – Нейрофизиология. 1979. Т. 11. № 1. С. 54-64.
13. *Манвелян Л. Р., Насоян А. М., Терзян Д. О.* – В сб.: Физиологические механизмы регуляции деятельности организма. Междунар. юбил. конф., посвящ. 130-летию акад. Л. А. Орбели. Ереван. Изд. «Гитутюн». 2012. С. 189-194.
14. *Манвелян Л. Р., Насоян А. М., Терзян Д. О.* – ДНАН Армении. 2013. Т. 113. № 2. С. 217-223.
15. *Hillman D. E.* – Exp. Brain Res. 1969. V. 9. № 1. P. 1-15.
16. *Magherini P. C., Giretti M. L., Precht W.* - Arch. 1975. V. 356. P. 99-109.
17. *Llinás R., Bloedel J. R., Hillman D. E.* – J. Neurophysiol. 1969. V. 32. P. 847-870.
18. *Sarkisian V. H.* – Arch. Italian Biology. 2000. V. 138. P. 295-353.