ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2015

Ереван Երևան Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67 URL: http://elib.sci.am e-mail: rnas@sci.am

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Տ. Ա. Զաքարյան – Ուռուցիկ բազմությունների վերջավոր միավորման տեսքով ներկայացվող չեբիշևյան բազմությունների մասին ……………………… 171

Կ. Ա. Քեռյան – Ֆրանկլինի ընդհանուր պարբերական համակարգի $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ -ում բազիսության մասին ….…………………………………………….......................... 178

Մ. Վ. Կուկուշկին – Ընդհանրացված եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի կոտորակային ածանցյալով հավասարման համար ……………………………………… 185

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Գ. Ս. Հայրապետյան, Ս. Հ. Սարգսյան – Պտույտների և տեղափոխությունների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար կլոր սալերի ծռումը … 194

Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան – Ուղղահայաց բեռի ազդեցության տակ գտնվող տարամոդուլ սալի լարվածա-դեֆորմացվող վիճակը …………… 203

Գ. Ե. Բաղդասարյան, Ս. Լ. Սահակյան - Համառանցք գլանային թաղանթների տատանման հարցեր, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով …………………………………………………… 209

ՄԱԳՆԻՏԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան - Մագնիսաստրիկցիոն ուղղանկյուն սալերի կայունությունը երկայնական մագնիսական դաշտում ……….………… 218

ՖԻԶԻԿԱ

Լ. Բ. Հովակիմյան, Հ. Հ. Մաթևոսյան,Հ. Բ. Ներսիսյան, Կ. Ա. Սարգսյան – Լիցքավորված դիսլոկացիայի համար Ֆրիդելի գումարման կանոնի մասին …… 227

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ս. Մարտիրոսյան – Թթվածնի դերը օրգանական միացության հետ CH_3O_2 ադսորբված ռադիկալների փոխազդեցության ընթացքում ……………………… 232

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ք. Վ. Ղազարյան, Ն. Գ. Հունանյան, Թ. Ա. Փիլիպոսյան - Օքսիտոցինի ազդեցության յուրահատկությունները առնետի միոմետրիումի օվարիան շրջանի ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության վրա ……………………………………… 237

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИКА

Т. А. Закарян – О чебышевских множествах, допускающих представление в виде объединения конечного множества выпуклых множеств... 171

К. А. Керян – Общая периодическая система Франклина как базис в пространстве $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ 178

М. В. Кукушкин – Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной 185

МЕХАНИКА

Г. С. Айрапетян, С. О. Саркисян – Изгиб микрополярных круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений 194

С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян – Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки 203

Г. Е. Багдасарян, С. Л. Саакян – Вопросы колебания коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью 209

ТЕОРИЯ МАГНИТОУПРУГОСТИ

Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян – Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин в продольном магнитном поле 218

ФИЗИКА

Л. Б. Овакимян, Г. Г. Матевосян, Г. Б. Нерсисян, К. А. Саргсян – О правиле сумм Фриделя для заряженной дислокации 227

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. С. Мартиросян – Роль кислорода при взаимодействии адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением 232

ФИЗИОЛОГИЯ

К. В. Казарян, Н. Г. Унанян, Т. А. Пилипосян – Особенности влияния окситоцина на спонтанную электрическую активность овариальной зоны миометрия крысы 237

C O N T E N T S

MATHEMATICS

T. A. Zakaryan - Chebyshev Set Which Can be Represented as a Finite Union of Convex Sets …………………... 171

K. A. Keryan – General Periodic Franklin Systems as Basis in $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ ……… 178

M. V. Kukushkin - Generalized Boundary Value Problem for the Second Order Equation with Fractional Derivative ………... 185

MECHANICS

G. S. Hayrapetyan, S. H. Sargsyan - Bending of Micropolar Circular Plates with Free Fields of Displacements and Rotations …………………………………… 194

S. A. Ambartsumian, M.V.Belubekyan - The Stress-Strain State of the Different Modules Plate under the Normal Load Action ……………………………………… 203

G. Ye. Baghdasaryan, S. L. Sahakyan - The Problems of Vibration of Coaxial Cylindrical Shells, with a Gap Partially Filled with Fluid …………………………… 209

MAGNETOELASTICITY THEORY

G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan - Stability of Magnetostrictive Rectangular Plates in Longitudinal Magnetic Field ………………………………… 218

PHYSICS

L. B. Hovakimian, H. H. Matevosyan, H. B. Nersisyan, K. A. Sargsyan – On the Friedel Phase Shift Sum Rule for a Charged Dislocation ….….…………………. 227

CHEMICAL PHYSICS

A. S. Martirosyan – Role of Oxygen in the Interaction Between Adsorbed CH_3O_2 Radicals and Organic Compound ……………………………………………. 232

PHYSIOLOGY

K. V. Kazaryan, N. G. Hunanyan, T. A. Piliposyan – Effect of Oxytocin on Spontaneous Electrical Activity of the Ovarian Horn Area in Rat Myometrium ….. 237

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

MATHEMATICS

УДК 514.172.4

T. A. Zakaryan

Chebyshev Set which Can Be Represented as a Finite Union of Convex Sets

(Submitted by academician V. S. Zakaryan 25/ II 2015)

Keywords: *Chebyshev set, metric projection, distance function, sun, Gâteaux (Fréchet) differentiability, minimizing sequence.*

1. Introduction. Let C be a nonempty subset of a Banach space $(X,\|\,\|)$. The *metric projection* (or *set of nearest points*) of x onto C is defined by: $P_C(x)=\{y\in C:\|x-y\|=d_C(x)\}$, where $d_C(\cdot)$ is the *distance function*, i.e., $d_C(x)=\inf\{\|x-y\|:y\in C\}$. We say that C is *Chebyshev* if $P_C(x)$ is a singleton for all $x\in X$. It is easy to see that Chebyshev sets are strongly closed. Blunt [3] showed that in Euclidean finite dimensional spaces Chebyshev sets are convex. One of the most famous unsolved problems in approximation theory is: whether in a smooth reflexive Banach space (or even in a Hilbert space) every Chebyshev set is convex? Although this problem is open (see [2]), several sufficient conditions for the Chebyshev set to be convex have been obtained, until now. Here is the first important result:

Theorem 1 *(Vlasov [10]). Let X be a Banach space with rotund dual. Then any Chebyshev subset of X with continuous metric projection is convex.*

This theorem was previously obtained by Asplund [1] in Hilbert spaces. Another important result is following:

Theorem 2 *(see[4], p.193). Let X be a reflexive Banach space with the Kadec-Klee property. Then any weakly closed Chebyshev subset of X has continuous metric projection.*

In this paper we look at the Chebyshev sets which can be represented as a finite union of closed convex sets. We give positive answer without Kadec-Klee property. We consider also differentiability of distance function in that case.

2. Notation and Preliminaries. Let X be a normed space with a given norm $\|\cdot\|$, X^* be its topological dual and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ be the duality pairing between X and X^*. A real-valued function f on X is *Gâteaux differentiable* at x if there is $x^*\in X^*$ such that

$$\forall h \in X,\ \lim_{t\to 0^+} t^{-1}(f(x+th)-f(x)) = \left\langle x^*, h\right\rangle.$$

If the limit in the definition of Gâteaux differentiability exists uniformly in h on the unit sphere of X, we say that f is *Fréchet differentiable* at x.

The normed space $(X, \|\cdot\|)$

(i) is *rotund or strictly convex* whenever for all $x, y \in X$ with $x \neq y$ and $\|x\| = \|y\| = 1$ one has $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| < 1$,

(ii) has the (sequential) *Kadec-Klee property* provided the weak convergence of a sequence of the unit sphere of the space is equivalent to the norm convergence of this sequence.

Recall that a sequence $(y_n)_n$ from C is a *minimizing sequence* for x if $\|x - y_n\| \to d_C(x)$. Recall also that the metric projection P_C is said to be continuous at $x \in X$ provided P_C is single-valued at x and $y_n \to P_C(x)$ whenever $x_n \to x$ and $y_n \in P_C(x_n)$. If X is strictly convex, then $y \in P_C(x)$ and $z \in \left(y, x\right)$ ensure $P_C(z) = \{y\}$. The set C is a *sun* if, for each point $x \in X$ and $y \in P_C(x)$, every point on the ray $y + \mathbb{R}_+(x-y)$ has y as a nearest point in C, where $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. This notion was introduced by Klee [7] and studied by Efimov, Steckin and Vlasov [6,9]. It is not difficult to see that every convex set is a sun. Indeed, let $x \in X$, $y \in P_C(x)$ and $\lambda > 0$, then for all $z \in C$

$$\|y + \lambda(x-y) - y\| = \lambda\|x-y\| \le \lambda\left\|x - \left(\frac{1}{\lambda}z + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y\right)\right\| = \|y + \lambda(x-y) - z\|$$

thus $y \in P_C(y + \lambda(x-y))$.

Theorem 3 *(Vlasov [9]). Let X be a smooth Banach space. Then every proximinal sun subset of X is convex.*

Recall that the set C is *proximinal* if for every $x \notin C$ the set $P_C(x)$ is not empty.

To end up this section, we denote by $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ the weak convergence of the sequence $(x_n)_n \subset X$ to $x \in X$.

3. The finite union of closed convex sets. The union of finitely many closed convex sets being weakly closed, we see in a smooth reflexive Banach space X with the Kadec-Klee property that a subset C of X is convex whenever $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ where C_i are closed convex sets. Our aim in this section is to remove for such a set C the Kadec-Klee assumption of the norm.

We start with some properties of sets which can be represented as a finite union of closed convex sets.

Proposition 1. *Let X be a normed space and let $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ be a union of finitely many closed subsets of X. Then for any $x \in X$,*

(a) $P_C(x) = \bigcup_{i\in J} P_{C_i}(x)$, where $J = \{i : 1 \le i \le m, d_C(x) = d_{C_i}(x)\}$,

(b) there is $\delta > 0$ such that for all $u \in \mathbb{B}(x,\delta)$

$$\max_{i\in J} d_{C_i}(u) < \min_{i\in J^c} d_{C_i}(u), \quad \text{where } J^c = \{1,2,\dots,m\} \setminus J.$$

Proof. (a) It is evident that $d_C(x) = \min_{1\le i\le m} d_{C_i}(x)$ and therefore $J \ne \varnothing$. Let $j \in J$ and $z \in P_{C_j}(x)$. By the definition of J and C we have $d_C(x) = d_{C_j}(x) = \|x - z\|$ and $z \in C$, which means, that $z \in P_C(x)$. Now, let $z \in P_C(x)$, then $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ and consequently $z \in C_j$ for some j, $1 \le j \le m$. We deduce that $d_C(x) = \min_{1\le i\le m} d_{C_i}(x) \le d_{C_j}(x) \le \|x - z\| = d_C(x)$, and thus $j \in J$ and $z \in P_{C_j}(x)$.

(b) By the definition of J we have that

$$\max_{i\in J} d_{C_i}(x) = d_C(x) < \min_{i\in J^c} d_{C_i}(x). \tag{1}$$

The continuity of $u \mapsto \max_{i\in J} d_{C_i}(u)$ and $u \mapsto \min_{i\in J^c} d_{C_i}(u)$ and (1) ensure the existence of $\delta > 0$ satisfying $\max_{i\in J} d_{C_i}(u) < \min_{i\in J^c} d_{C_i}(u), \ \forall u \in \mathbb{B}(x,\delta).$

Theorem 4. *Let X be a smooth reflexive Banach space. Let C be a Chebyshev subset of X with $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ where C_i are closed convex sets. Then C is convex.*

Proof. By Theorem 3 it is sufficient to show that C is sun. Let us prove the sun property of C. Suppose that $x \notin C$ and $P_C(x) = y$. Put $\sigma = \sup\{t \ge 0 : y = P_C(q_t)\}$, where $q_t = y + t(x - y)$. We want to show that $\sigma = +\infty$. Suppose that $\sigma < +\infty$. Then we have

$$d_C(q_\sigma) = \lim_{t\nearrow\sigma} d_C(y + t(x-y)) = \lim_{t\nearrow\sigma} \|y + t(x-y) - y\| = \|q_\sigma - y\|,$$

that is $y \in P_C(q_\sigma)$ and therefore $P_C(q_\sigma) = y$. Let J and J^c denote as in Proposition 1, $J = \{i : 1 \le i \le m, d_C(q_\sigma) = d_{C_i}(q_\sigma)\}$ and $J^c = \{1,2,\dots,m\} \setminus J$. Then, by Proposition 1, we have

$$P_C(q_\sigma) = \bigcup_{i\in J} P_{C_i}(q_\sigma) \tag{2}$$

and there is $\delta > 0$ such that for all $u \in \mathbb{B}(q_\sigma,\delta)$

$$\max_{i\in J} d_{C_i}(u) < \min_{i\in J^c} d_{C_i}(u). \tag{3}$$

By the non-vacuity of $P_{C_i}(x)$ we get from (2) that

$$P_{C_i}(q_\sigma) = y \quad \text{for all } i \in J. \tag{4}$$

Let $\sigma' > \sigma$ such that $y + \sigma'(x - y) = q_{\sigma'} \in \mathbb{B}(q_\sigma,\delta)$, (3) provides

$$d_C(q_{\sigma'}) = \min_{1\le i\le m} d_{C_i}(q_{\sigma'}) = \min_{i\in J} d_{C_i}(q_{\sigma'}). \tag{5}$$

As C_i is a convex and hence a sun, (4) ensures $d_{C_i}(q_{\sigma'}) = \|q_{\sigma'} - y\|$ for all $i\in J$. Finally we get that $d_C(q_{\sigma'}) = \min_{i\in J} d_{C_i}(q_{\sigma'}) = \|q_{\sigma'} - y\|$, or equivalently $y = P_C(q_{\sigma'})$. This contradicts the definition of σ and the proof is completed.

4. Differentiability of the distance function of finite union of convex sets. Proposition 2. *Let X be a reflexive Banach space with the Kadec-Klee property. Let $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ where C_i are weakly closed subsets of X and $x\in X\setminus C$, $P_C(x) = \{y\}$. Then P_C is continuous at x.*

Proof. Let $(y_n)_n$ be a minimizing sequence in C for x, i.e., $y_n \in C$ *and* $\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d_C(x)$. We want to show that $(y_n)_n$ converges to y. Suppose the contrary. Without loss of generality we may assume that, for some $\alpha > 0$,

$$\|y_n - y\| > \alpha, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

By the definition of C there is an increasing sequence $(q(n))_n$ in $\mathbb{N}$ and $j\in\{1,2,...,n\}$ such that $y_{q(n)}\in C_j$ for all $n\in\mathbb{N}$. As C_j is weakly closed and $(y_{q(n)})_k$ is bounded there exists a subsequence $(l(n))_n$ of $(q(n))_n$ and $y'\in C_j$ such that $(y_{l(n)})_n$ converges weakly to y'. We obtain that

$$d_C(x) \le \|x - y'\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x - y_{l(n)}\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\| = d_C(x),$$

and therefore $y' = y = P_C(x)$ and

$$x - y_{l(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{w} x - y \text{ and } \|x - y_{l(n)}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|x - y\|.$$

The Kadec-Klee property ensures that $y_{l(n)} \to y$. This is in contradiction with (6) and the proof is completed.

Theorem 5. *Let X be a strictly convex reflexive Banach space with the Kadec-Klee property. Let $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, where C_i are closed convex subsets of X and let $x\in X\setminus C$. Then for any $\varepsilon > 0$ there is an open subset $U \subset \mathbb{B}(x,\varepsilon)$ such that P_C is continuous on U.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$. Our aim is to find $z\in X$ and $\delta > 0$ such that $\mathbb{B}(z,\delta)\subset\mathbb{B}(x,\varepsilon)$ and P_C is singleton on $\mathbb{B}(z,\delta)$ which will ensure by Proposition 2 the continuity of P_C on $int(\mathbb{B}(z,\delta))$. As C_i are convex and X strictly convex and reflexive, $P_{C_i}(u)$ are singleton for all $u\in X$ and Proposition 2 provides $P_C(u)\neq\varnothing$ for all $u\in X$. Suppose that there is $x_1\in \mathbb{B}\left(x, \varepsilon/3\right)$ such that $P_C(x_1)$ contains at least two different points (otherwise the proof is finished), say $y_1^1, y_1^2 \in P_C(x_1)$. By Proposition 2 there is $j_1^1, j_1^2 \in \{1,2,...,m\}$ such that $P_{C_{j_1^1}}(x_1) = y_1^1$ and $P_{C_{j_1^2}}(x_1) = y_1^2$. It is easy to see that $y_1^1 \notin C_{j_1^2}$. Indeed if $y_1^1 \in C_{j_1^2}$ then $d_C(x_1) = \|x_1 - y_1^1\| = \|x_1 - y_1^2\| = d_{C_{j_1^2}}(x_1)$ provides $y_1^1 \in P_{C_{j_1^2}}(x_1) = y_1^2$ which is a contradiction. Pick $z_1 \in \left(y_1^1, x_1\right) \cap \mathbb{B}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. The strict convexity of the norm and Proposition 2 ensure

$$P_C(z_1) = y_1^1 \notin C_{j_1^2} \quad and \quad d_C(z_1) < d_{C_{j_1^2}}(z_1). \tag{7}$$

The continuity of d_C ensures the existence of $\delta_1 \in \left(0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ such that

$$d_C(u) = \min_{1 \le i \le m} d_{C_i}(u) < d_{C_{j_1^2}}(u) \quad \forall u \in \mathbb{B}(z_1, \delta_1).$$

Consequently, we obtain that

$$P_C(u) \in \bigcup_{\substack{1 \le i \le m, \\ i \ne j_1^2}} P_{C_i}(u) \quad \forall u \in \mathbb{B}(z_1, \delta_1) \subset \mathbb{B}(x, \varepsilon).$$

Suppose that there is $x_2 \in \mathbb{B}\left(z_1, \frac{\delta_1}{3}\right)$ such that $P_C(x_2)$ contains at least two points (otherwise the proof is finished). By the same reasoning as above we find $j_2^2 \in \{1,2,...,m\} \setminus \{j_1^2\}$, $z_2 \in \mathbb{B}\left(z_1, \frac{\delta_1}{3}\right)$ and $\delta_2 \in \left(0, \frac{\delta_1}{3}\right)$ such that

$$d_C(u) = \min_{1 \le i \le m} d_{C_i}(u) < \min\{d_{C_{j_1^2}}(u), d_{C_{j_2^2}}(u)\} \quad \forall u \in \mathbb{B}(z_2, \delta_2) \subset \mathbb{B}(z_1, \delta_1).$$

By repeating the same process, after finite steps we obtain that there exist $k \in \{1,2,...,m\}$, $z \in X$ and $\delta > 0$ such that $d_C(u) = d_{C_k}(u) < \min_{1 \le i \le m, i \ne k} d_{C_i}(u)$ $\forall u \in B(z, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$. Thus we conclude, by Proposition1, that for all $u \in \mathbb{B}(z, \delta)$ $P_C(u) = P_{C_k}(u)$ and therefore $P_C(u)$ is a singleton on $\mathbb{B}(z, \delta)$. The proof is finished.

Theorem 6. *(Fitzpatrick [5]) Let C be a closed subset of a Banach space X with Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable norm off zero. Let $x \notin C$. If every minimizing sequence in C for x converges, then d_C is Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable at x.*

Theorem 7. *Assume that X is a strictly convex reflexive Banach space whose norm is Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable off zero and has the Kadec-Klee property. Let $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ where C_i are closed convex subsets of*

X. *Let* $x \notin C$. *Then for any* $\varepsilon > 0$ *there is an open subset* $U \subset \mathbb{B}(x,\varepsilon)$ *such that* d_C *is Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable on* U.

Proof. The proof is a combination of Theorem 5 and Theorem 6.

Acknowledgments. The author is very grateful to Professors A. Jourani and L. Thibault for their valuable comments and important suggestions.

Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne UMR 5584
CNRS BP 47 870, 21078 Dijon Cedex, France
e-mail: taron.zakaryan@u-bourgogne.fr

T. A. Zakaryan

Chebyshev Set which Can Be Represented as a Finite Union of Convex Sets

We investigate the convexity of Chebyshev sets. It is well known that in a smooth reflexive Banach space with the Kadec-Klee property every weakly closed Chebyshev subset is convex. We prove that the Kadec-Klee property is not required when the Chebyshev set is represented by a finite union of closed convex sets. We also show that, if the norm is Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable, then the distance function from the finite union of closed convex sets is Gâteaux (respectively Fréchet) differentiable at the points of some open dense subset.

Տ. Ա. Զաքարյան

Ուռուցիկ բազմությունների վերջավոր միավորման տեսքով ներկայացվող չեբիշևյան բազմությունների մասին

Մենք հետազոտում ենք չեբիշևյան բազմությունների ուռուցիկությունը: Հայտնի է, որ Կադեց-Կլեե հատկությամբ օժտված ողորկ ռեֆլեքսիվ բանախյան տարածություններում ամեն թույլ փակ չեբիշևյան բազմությունն ուռուցիկ է: Մենք ապացուցում ենք, որ Կադեց-Կլեե հատկությունն անհրաժեշտ չէ, եթե չեբիշևյան բազմությունը փակ ուռուցիկ բազմությունների վերջավոր միավորումն է: Ապացուցվում է նաև, որ փակ ուռուցիկ բազմությունների վերջավոր միավորումից հեռավորության ֆունկցիան դիֆերենցելի է Գատոյի իմաստով (համապատասխանաբար՝ Ֆրեշեի իմաստով) որոշ բաց խիտ ենթաբազմության կետերում, եթե նորման դիֆերենցելի է Գատոյի իմաստով (համապատասխանաբար՝ Ֆրեշեի իմաստով):

Т. А. Закарян

О чебышевских множествах, допускающих представление в виде объединения конечного множества выпуклых множеств

Исследована выпуклость чебышевских множеств. Хорошо известно, что в гладких рефлексивных банаховых пространствах, удовлетворяющих свойству Кадеца – Клее, каждое слабо замкнутое чебышевское подмножество является выпуклым. В настоящей статье доказано, что свойство Кадеца – Клее не является необходимым, если чебышевское множество является конечным объединением замкнутых выпуклых множеств. Также показано, что если норма дифференцируема

по Гато (соответственно по Фреше), то функция расстояния от конечного объединения замкнутых выпуклых множеств также дифференцируема по Гато (соответственно по Фреше) в точках некоторого открытого всюду плотного подмножества.

References

1. *Asplund E.* - Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 235-240. MR 40:6238.
2. *Balagansk V .S. , Vlasov L. P.*- Russian Math. Surveys.1996. V. 51. P. 1127-1190.
3. *Bunt L. N. H.* Contributions to the theory of convex point sets. (Dutch) Ph.D. thesis. University of Croningen. 1934.
4. *Borwein J. M., Vanderwerff J.* Convex Functions, Constructions, Characterizations and Counterexamples. Cambridge University Press. 2010
5. *Fitzpatrick S.* - Bull. Austral. Math. Soc. 1980. V. 22. P. 291-312.
6. *Efimov N., Steckin S.* - Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1958. V. 118. P. 17-18 (Russian).
7. *Klee V.*- Amer. Math. Monthly. 1949. V.56. P. 247-249.
8. *Klee V.* - Math Ann. 1961. V. 142. P. 292-304.
9. *Vlasov L.* - Matem. Zametki.1967. V. 2. N 2. P. 191-200
10. *Vlasov L.* - Math. Notes Acad. Sci. USSR.1970. V. 8. N 5. P.776-779.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Керян

Общая периодическая система Франклина как базис в пространстве $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 7/V 2015)

Ключевые слова: *общая периодическая система Франклина, базисность, безусловная базисность, пространство* $\mathbf{B}^1$.

Вначале дадим необходимые определения. Периодический отрезок $[0,1)$ обозначим через Т. Интервалами в Т будут как $[a,b]$, с условием $0\le a\le b\le 1$, так и $[a,b]$, с условиями $a>b,\ a,b\in\mathrm{T}$. Во втором случае под $[a,b]$ понимаем множество $[a,1)\cup[0,b]$. Длину отрезка $I=[a,b]$ обозначим через $|I|$; при $a>b$ длину отрезка определим как сумму длин отрезков $[a,1),[0,b]$, т.е. $|I|=1-a+b$. Точки 0 и 1 будем отожествлять.

Следуя работе [1], дадим

Определение 1. *Действительнозначную функцию* b, *определенную на* $\mathrm{T}=[0,1)$, *назовем специальным атомом, если или* $b\equiv 1$ *или* $b=\frac{1}{|I|}(\chi_L(t)-\chi_R(t))$, *где* I – *интервал в* Т, L – *левая,* R – *правая половина интервала* I, *а* χ_E – *характеристическая функция множества* E.

Пространство $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ определяется как

$$\mathbf{B}^1(\mathrm{T})=\left\{f:\mathrm{T}\to R;\ f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nb_n(t),\ \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty\right\},$$

где b_n – специальные атомы. Полагается $\|f\|_{B^1(\mathrm{T})}=\inf\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f. Это пространство было введено Соузой в [1].

Напомним атомическое определение пространства $H^1(\mathrm{T})$, впервые приведенное в [2]. Сперва дадим определение атома: функция $a:\mathrm{T}\to R$

называется атомом, если или $a \equiv 1$ или существует интервал $I \subset \mathrm{T}$ такой, что $\operatorname{supp} a \subset I$, $\sup|\mathrm{a(t)}| \le |I|^{-1}$ и $\int_{\mathrm{T}} a(t)\mathrm{d}t = 0.$ Далее

$$H^1(\mathrm{T}) = \left\{ f : \mathrm{T} \to R;\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(t),\ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\},$$

где a_n – атомы и $\| f \|_{H^1(\mathrm{T})} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f.

Ясно, что всякий специальный атом является также атомом. Поэтому $B^1(\mathrm{T}) \subset H^1(\mathrm{T})$. В работе [1] доказано, что $B^1(\mathrm{T}) \neq H^1(\mathrm{T})$.

В математической литературе рассматриваются также пространства $H^1[0,1]$ и $B^1[0,1]$. В этом случае функции определены на обычном отрезке $[0,1]$ и носители атомов и специальных атомов – обычные интервалы.

Определение 2. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ *называется допустимой, если* $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $\mathrm{T} = [0,1)$, $t_0 = 0, t_i \in \mathrm{T}$ *и* $t_i \neq t_j$, *когда* $i \neq j$.

Для допустимой последовательности $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ и $n \ge 1$ обозначим $\mathrm{T}_n = \{t_i : 0 \le i \le n\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n < \tau_{i+1}^n, 0 \le i \le n-1\}$, $\pi_n = T_n$. Через S_n обозначается пространство непрерывных периодических на T ($f(0) = f(1-0)$) функций f и линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Очевидно, что $\dim S_n = n$ и $S_n \subset S_{n+1}$. Следовательно, для $n \ge 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| f \|_2 = 1$. Эта функция называется n-й периодической функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Определение 3. *Общая периодическая система Франклина* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *соответствующая разбиению* $\mathcal{T}$, *определяется по правилу* $f_1(x) \equiv 1$; *для* $n \ge 2$ *функция* $f_n(x)$ *является* n*-й периодической функцией Франклина, соответствующей разбиению* $\mathcal{T}$.

Оказывается, что базисность периодической системы Франклина в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ зависит от геометрических свойств последовательности $\mathcal{T}$.

Определение 4. *Допустимую последователность* $\mathcal{T}$ *назовем сильно регулярной по парам на* T *с параметром* γ, *если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n} \le \gamma, \text{ когда } i = 1, 2, ..., n, \text{ а } n = 2, 3, ..., \tag{1}$$

где λ_i^n – длина отрезка $\left[\tau_{i-1}^n, \tau_i^n\right]$, т. е. $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$ для $i = 1, 2, ..., n$. Будем считать, что $\lambda_{i+n}^n = \lambda_i^n$ для $i = 1, 2, ..., n$.

Определение 5. *Допустимую последовательность $\mathring{T}$ назовем сильно регулярной на T с параметром γ, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i^n}{\lambda_{i+1}^n} \le \gamma, \text{ когда } i = 1, 2, ..., n, \text{ а } n = 2, 3, ... \qquad (2)$$

Отметим, что определения 4, 5 соответствуют периодическому случаю. В непериодическом случае в условиях (1) и (2) индекс i пробегает значения $1, 2, ..., n-2$ и $1, 2, ..., n-1$, соответственно. Общая система Франклина (непериодическая) определяется аналогично определению 3.

Ясно, что если последовательность сильно регулярна (по парам) на T в периодическом случае, то она останется сильно регулярной (по парам) и в непериодическом случае. Обратное неверно, и для илюстрации этого приведем следующий пример.

Точки последовательности будем определять индуктивно. Пусть $t_0 = 0,$ и на первом шаге добавим среднюю точку $[0,1]$, т.е. $\frac{1}{2}$. На втором шаге добавим точки $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8},$ которые делят $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на четыре равные части, и среднюю точку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, т.е. $\frac{3}{4}$. На n-м шаге добавим три точки в первый интервал так, чтобы они разделили его на четыре равные части, а потом последовательно, слева направо добавим средние точки отрезков, порожденных точками, добавленными до $n-$го шага. Продолжая так до бесконечности, получим последовательность, которая будет непериодически сильно регулярной с параметром 4 и не будет периодически сильно регулярной по парам на T ни при каком параметре.

В 1997 г. в работе [3] определена общая система Франклина, с которой и началось исследование этой системы. Г. Г. Геворкяном и А. Камонт в работе [4] доказана безусловная базисность общей системы Франклина в $L_p[0,1], 1 < p < \infty,$ для любой допустимой последовательности. Ими же в работе [5] получены необходимые и достаточные условия, чтобы соответствующая система Франклина на последовательности $\mathring{T}$ являлась базисом или безусловным базисом в пространстве $H^1[0,1].$ Из работы [6] Г. Г. Геворкяна следует, что общая система Франклина является базисом (безусловным базисом) в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда она является базисом (безусловным базисом) в $B^1[0,1].$

В работе [7] доказано, что общая периодическая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0,1], 1 < p < \infty,$ при любой допустимой последовательности. В работе [8] получены периодические аналоги теорем о базисности и безусловной базисности общей системы Франклина в пространстве $H^1(\mathrm{T})$.

Нами доказаны следующие теоремы, которые являются периодическими аналогами теорем, доказанных Г.Г. Геворкяном в [6].

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{T}$ *– допустимая последовательность и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *будет базисом в пространстве* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\mathcal{T}$ *является сильно регулярной по парам на* T *с некоторым параметром* γ.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{T}$ *– допустимая последовательность и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *будет безусловным базисом в пространстве* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\mathcal{T}$ *является сильно регулярной на* T *с некоторым параметром* γ.

При доказательстве этих теорем в основном следуем схеме доказательства соответствующих теорем в непериодическом случае, доказанных Г. Г. Геворкяном в [6]. Отметим также, что при доказательстве этих теорем мы пользуемся многими свойствами периодической системы Франклина, получеными в работе [2].

При доказательстве теорем 1 и 2 основную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Допустим, что обобщенный интервал* $I=[a,b)\subset\mathrm{T}$ *представлен в виде объединения непересекающихся интервалов* $I_i = [a_i,a_{i+1})\subset\mathrm{T}$, *где* $a_1=a$, $a_d=b$, *т.е.* $I=\bigcup_{i=1}^{d} I_i$. *Тогда если функция* φ *на каждом интервале* I_i *линейная,* $\int_I \varphi(t)\mathrm{d}t=0$ *и* $\varphi(t)=0$, *когда* $t\notin I$, *то* $\|\varphi\|_{B^1(\mathrm{T})}\le (d-1)\|\varphi\|_\infty |I|$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная по парам на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ, *зависящая только от* γ, *такая, что для любого* n

$$\|f_n\|_{B^1(\mathrm{T})}\le C_\gamma \|f_n\|_1 .$$

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная по парам на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ, *зависящая только от* γ, *такая, что для любого специального атома* φ *и любого* n *выполняется*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi) f_k\right\|_{B^1(\mathrm{T})} \le C_\gamma .$$

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ, *зависящая только от* γ, *такая, что для любого специального атома* φ *выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n(\varphi) | \cdot \| f_n \|_1 \le C_\gamma .$$

Необходимость сильной регулярности по парам на T с некоторым параметром γ в теореме 1 следует из очевидного неравенства $\| f \|_{B^1(\mathrm{T})} \ge \| f \|_{H^1(\mathrm{T})}$ и следующего факта, доказанного в [8]: существует специальный атом φ такой, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi) f_k\right\|_{H^1(\mathrm{T})} \ge C \ln\left(\max_{1\le i\le n} \max\left(\frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}, \frac{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n} \right)\right).$$

В работе [8] доказано, что если последовательность $\mathcal{T}$ является сильно регулярной по парам на T и не является сильно регулярной, то

$$\sup_{\varphi} \left\| \sup_{k\ge 1} \left| a_k(\varphi) f_k \right| \right\|_1 = \infty,$$

где супремум берется по специальным атомам. Применяя этот факт, получим, что из безусловной базисности системы $\{f_n\}$ в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ следует сильная регулярность последовательности $\mathcal{T}$.

Из теоремы 2 можно получить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ *безусловно сходится в* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \cdot \| f_n \|_1 < \infty .$$

В непериодическом случае теорема 3 доказана Г. Г. Геворкяном (см. [6]), а в случае, когда $\mathcal{T}$ – диадическая последовательность, т. е. когда $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Франклина, теорема 3 доказана П. Войташчиком [9].

Отметим, что недавно в работе [10] Пассенбруннером была доказана безусловная базисность сплайн систем любого порядка в $L_p[0,1], 1 < p < \infty$.

А в работах [11], [12] теоремы о базисности и безусловной базисности общей системы Франклина, доказаные Г.Г. Геворкяном и А. Камонт в [5], были обобщены для сплайн систем любого порядка. С этой точки зрения становится интересным вопрос получения аналогов теорем 1, 2 для сплайн систем и периодических сплайн систем любого порядка.

Ереванский государственный университет

К. А. Керян

Общая периодическая система Франклина как базис в пространстве $\mathbf{B}^1$ (T)

Для общей периодической системы Франклина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, порожденной допустимой последовательностью $\mathcal{T}$, получены необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$ для того, чтобы соответствующая система была базисом или безусловным базисом в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$.

Կ. Ա. Քեռյան

Ֆրանկլինի ընդհանուր պարբերական համակարգի $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ -ում բազիսության մասին

Ստացվել են պայմաններ Ֆրանկլինի ընդհանուր պարբերական համակարգը ծնող տրոհման վրա, որոնք անհրաժեշտ և բավարար են համապատասխան համակարգի $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ -ում բազիսության կամ ոչ պայմանական բազիսության համար:

K. A. Keryan

General Periodic Franklin Systems as Bases in $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$

Necessary and sufficient conditions in terms of generating partition are mentioned for the corresponding system of general periodic Franklin system to be a basis or an unconditional basis in $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$.

Литература

1. *Souza De. G. S.* Spaces formed by special atoms, Ph. D. Dissertation. SUNY at Albany. N. Y. 1980.
2. *Coifman R. R.* - Studia Math. 1974. V. 51. P. 269-274.
3. *Ciesielski Z., Kamont A.* - Funct. Approx. Comment. Math. 1997. V. 25. P. 129-143.
4. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* - Studia Math. 2004. V. 164. P. 161 -204.
5. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* - Studia Math. 2005. V. 167. P 259 -292.
6. *Г .Г. Геворкян* - Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. N 6. С. 65-82.
7. *Keryan K. A.* - Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat. 2005. V. 40. N 1 P. 61-84 (in Russian). English translation in: J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. N 1. P. 56-79.

8. *Keryan K. A., Pogosyan M. P.* – Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat. 2005. V. 40. N. 1. P. 61-84 (in Russian). English translation in: J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. N 1. P. 56-79.
9. *Wojtaszczyk P.* - Proc.Edinburgh Math. Soc. 1986. V. 29. P. 329-333.
10. Passenbrunner M. - Studia Math.. 2014. V222. N 1. P. 51-86.
11. *Gevorkyan G., Kamont A* - East J. Approx. 2008. V. 14. P. 161-182.
12. *Gevorkyan G., Kamont A., Keryan K., Passenbrunner M.* - Accepted for publication in Studia Math., preprint: arXiv:1404.5493, 2014.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 3
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517

М. В. Кукушкин

Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной

(Представлено академиком В. С. Захаряном 8/VI 2015)

Ключевые слова: *краевая задача, дробная производная, линейное дифференциальное уравнение.*

Введение. Обобщенная краевая задача для линейного дифференциального уравнения подробно изучена в [1]. В работе [2] разрешается вопрос существования и единственности решения уравнения второго порядка с дробной производной в случае, когда одним из условий является непрерывность коэффициента при дробной производной. В работе [3] получен ряд достаточных условий существования априорной оценки решения данного уравнения при разных предположениях относительно коэффициента при дробной производной. В данной работе рассмотрена обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка, а также получены условия существования разрешимого расширения оператора рассматриваемого уравнения. Найдены условия на коэффициент, при которых имеют место энергетические неравенства. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать $\alpha\in(0,1), x\in G$. Не ограничивая общности, в одномерном случае будем полагать $G:\{x\in(0,r)\}$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения:

$$\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L_2(G)}, < f,g >_0=< f,g >_{L_2(G)},$$

$$< f,g >_{W_2^2(G)}, < f,g >_+=< f,g >_{W_2^2(G)}.$$

E^n – евклидово n-мерное пространство,

$W_p^l(G)$ – пространство Соболева или пополнение $C^l(\overline{G})$ по норме

$$\|u\|_{W_p^l(G)}=\sum_{|\alpha|\le l}\|D^\alpha u\|_{L_p(G)},\ (p>1),\text{ где}$$

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\}\ \alpha_i\in\mathbb{N}\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n,$$

$\mathcal{D}^{\alpha}(\cdot)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ – обобщенная производная Соболева порядка $|\alpha|$.

$\mathcal{D}(\cdot)$ – обобщенная производная Соболева первого порядка в одномерном случае, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – подпространство пространства $W_p^l(G)$, полученное замыканием в $W_p^l(G)$ множества $C_0^{\infty}(G)\in W_p^l(G)$.

$W_2^l(bound)$ – подпространство функций из $W_2^l(G)$, содержащее $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$, будем называть подпространством функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям ($bound$), $W_2^l(bound)^+$ – совокупность всех функций $v\in W_2^l(G)$, для которых при любом $u\in W_2^l(bound)$ выполняется равенство (4).

Рассмотрим выражения:

$$Lu=D^2u(x)-c(x)D_{0x}^{\alpha}u(t)\,, \tag{1}$$

$$L^{+}u=D^2u(x)-\partial_{rx}^{\alpha}c(t)u(t)\,, \tag{2}$$

$$c(x)\in AC(\bar{G})\,. \tag{3}$$

Выражение L^{+} назовем сопряженным к L выражением. Поскольку в силу теоремы вложения (см. [1], с. 31) в случае ограниченной области $G\subset E^n$ с кусочно-гладкой границей Γ из

$$0\le k<l-\frac{n}{p} \text{ следует } W_p^l(G)\subset C^k(\bar{G})\,,$$

причем оператор вложения пространства $W_p^l(G)$ в пространство $C^k(\bar{G})$ непрерывен, соответственно в одномерном случае имеем:

$$W_2^2(G)\subset C^1(\bar{G})\,,\ \|u'\|_{C(\bar{G})}\le M\|u\|_{+}\,,\ u(x)\in W_2^2(G)\,,\ M=\mathrm{const}\,.$$

Из вышесказанного следует, что в одномерном случае оператор Римана – Лиувилля при $\alpha\in(0,1)$ определен на всем $W_2^2(G)$.

Пусть $v(x)\in C_0^{\infty}(G), u(x)\in W_2^2(G)$. Поскольку имеет место включение $C_0^{\infty}(G)\subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ и для $u(x)\in W_2^2(G)$ имеет место $Du\in W_2^1(G)$, то согласно [4] (с. 324), применяя формулу интегрирования по частям, несложно получить следующее равенство:

$$\langle Lu,v\rangle_0-\langle u,L^{+}v\rangle_0=[u'(x)v(x)-v'(x)u(x)-c(x)v(x)D_{0x}^{\alpha-1}u(t)]\,|_0^r\,.$$

Учитывая, что $v(x)\in C_0^{\infty}(G)$, имеем

$$\langle Lu,v\rangle_0=\langle u,L^{+}v\rangle_0. \tag{4}$$

Рассмотрим выражение (1) с предположениями (3) относительно $c(x)$. Определим оператор Λ' в $L^2(G)$ со всюду плотной областью определения

$$\Lambda' u=Lu,\quad D(\Lambda')=C_0^{\infty}(G). \tag{5}$$

Покажем, что этот оператор допускает замыкание. Требуется показать, что из $u_n \in D(\Lambda'), \|u_n\|_0 \to 0 \; \|\Lambda' u_n - f\|_0 \to 0 \; (f \in L_2(G))$, следует что $f = 0$.

Пусть $u_n(x) \in C_0^\infty(G), \|u_n\|_0 \to 0$, и $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ $(f \in L_2(G))$, тогда согласно (4) $\forall v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем равенства:

$$\langle f, v\rangle_0 = \lim\langle \Lambda' u_n, v\rangle_0 = \lim\langle Lu_n, v\rangle_0 = \lim\langle u_n, L^+ v\rangle_0 = 0.$$

Поскольку $C_0^\infty(G)$ является линейным многообразием, всюду плотным в $L_2(G)$, то согласно лемме 2 в [5] (с. 88) не существует элемента $L_2(G)$, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам данного многообразия. Следовательно, $f \equiv 0$ и оператор Λ' допускает замыкание. Обозначим $\Lambda \equiv \overline{\Lambda}'$ минимальный оператор, порожденный выражением L. Совершенно аналогичным образом построим оператор Λ^+ по формально сопряженному выражению L^+, причем доказательство того, что оператор допускает замыкание, совершенно аналогично.

Покажем, что $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subset D(\Lambda)$ Пусть $\zeta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, тогда $\exists\{v_n(x)\} \in C_0^\infty(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n(x) - \zeta(x)\|_+ = 0$. Покажем, что последовательность $\{Lv_n(x)\}$ фундаментальна в $L_2(G)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\|Lv_{n+p}(x) - Lv_n(x)\|_0 &= \|(v_{n+p}(x) - v_n(x))'' - c(x)D_{0x}^{\alpha-1}(v_{n+p}(t) - v_n(t))'\|_0 \le \\ &\le \|(v_{n+p}(x) - v_n(x))''\|_0 + \|c(x)\|_{L_\infty}\|D_{0x}^{\alpha-1}(v_{n+p}(t) - v_n(t))'\|_0 \le \\ &\le \|(v_{n+p}(x) - v_n(x))''\|_0 + \mu\|K(x)\|_{L_1}\|(v_{n+p}(x) - v_n(x))'\|_0,\end{aligned} \qquad (6)$$

где $\mu = \text{const}$, $K(x) = x^{-\alpha}$. В [6] (с. 383) показано, что последнее неравенство имеет место. Учитывая сходимость в L_2 последовательностей: $\{v_n(t)'\}$, $\{v_n(t)''\}$, из последнего неравенства следует фундаментальность $\{Lv_n(x)\}$ в $L_2(G)$, а так как $L_2(G)$ – полное пространство, то $\exists\varphi(x) \in L_2(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|Lv_n(x) - \varphi(x)\|_0 = 0$. Положив $\Lambda\zeta(x) = \varphi(x)$, получим значение оператора Λ в каждой точке $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$. С помощью аналогичных рассуждений несложно показать, что $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subset D(\Lambda^+)$.

Положим $(\Lambda^+)^* = \Omega$. Если пользоваться терминологией, используемой в [1] (с. 94), то Ω носит название максимального оператора, порожденного L. Покажем, что $\Lambda \subseteq \Omega$.. Для $u(x) \in D(\Lambda), u_n(x), v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем

$$\langle \Lambda u(x), v(x)\rangle_0 = \lim_{n\to\infty}\langle Lu_n(x), v(x)\rangle_0 = \lim_{n\to\infty}\langle u_n(x), L^+ v(x)\rangle_0 = \langle u(x), L^+ v(x)\rangle_0$$

откуда следует, в силу теоремы 3 (см. [7], с. 557):

$$\Lambda \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = \Omega \qquad (7)$$

Покажем, что оператор L, определяемый соответствием $u \to Lu \ (u \in W_2^2(G))$, является частью $\Omega : L \subseteq \Omega$. Действительно, при $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем $\langle Lu, v\rangle_0 = \langle u, L^+v\rangle_0 = \langle u, (\Lambda^+)'v\rangle_0$, откуда следует $L \subseteq \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = \Omega$.

Разрешимое расширение оператора L. Рассмотрим краевую задачу с граничным условием *(bound)*, определяемым $W_2^2(bound)$

$$Lu = f, \ u \in (bound). \tag{8}$$

Решением задачи (8) является функция $u \in W_2^2(bound)$, удовлетворяющяя уравнению (8). Такое решение называется гладким. Поскольку согласно [1] (с. 94) для линейного дифференциального оператора не существует эффективных методов нахождения условий существования данного решения, то для оператора L, как и для линейного дифференциального оператора актуальным становится введение понятия обобщенного решения.

Положим, что между Λ и Ω в (7) можно вставить оператор L, являющийся расширением Λ и сужением Ω и такой, что L^{-1} определен во всем $L^2(G)$ и непрерывен:

$$\Lambda \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega. \tag{9}$$

Используя смысл такого определения, под обобщенной краевой задачей для уравнения $Lu = f$ можно понимать операторное уравнение

$$Lu = f \in L_2(G), \tag{10}$$

а под ее решением $u = L^{-1}f$. Принадлежность u к $D(L)$ следует воспринимать как наложение некоторого граничного условия на обобщенные решения уравнения $Lu = f$, не имеющего вид *(bound)*. Классическое решение задачи (8), если оно существует при всех $f \in L_2(G)$ и непрерывно от них зависит, будет и обобщенным в этом смысле. Приведенный выше оператор L называется разрешимым расширением оператора Λ.

Почти корректные граничные условия относительно оператора L. Рассмотрим выражение L вида (1) и множество

$$u(x) : u(x) \in W_2^2(G), \ (u(\Gamma) = 0). \tag{11}$$

Покажем, что в силу теоремы вложения данное множество замкнуто в $W_2^2(G)$, это следует из оценки

$$\|u - u_n\|_{C(\bar{G})} \le \|u - u_n\|_+ \qquad u_n \in W_2^2(G), u_n(\Gamma) = 0,$$

откуда следует $u(\Gamma) = 0$. Следовательно, данное множество является подпространством $W_2^2(G)$, также очевидно, что данное подпространство включает $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, а значит является $W_2^2(bound)$. Соответствие $u \to Lu$ $(u \in W_2^2(bound))$ задает оператор в $L_2(G)$, который обозначим $\Lambda'(bound)$. Так как $\Lambda'(bound) \subseteq \Omega$, а Ω замкнут, то $\Lambda'(bound)$ допускает замыкание $\Lambda(bound)$. Этот последний оператор согласно [1] (с. 97) будем называть сильным оператором задачи (8). Найдем по данному $W_2^2(bound)$ множество $W_2^2(bound)^+$ в силу равенства (4) $W_2^2(bound)^+ = W_2^2(bound)$. Заметим, что можно доказать замкнутость $W_2^2(bound)^+$, не отождествляя данное множество с $W_2^2(bound)$. Поскольку в силу рассуждений, аналогичных (6), из сходимости $v_n(x) \to v(x)$ в $W_2^2(G)$ следует сходимость $L^+ v_n \to L^+ v$ в $L_2(G)$, то, осуществив предельный переход в (4), получим замкнутость совокупности $W_2^2(bound)^+$ в $W_2^2(G)$. Это очевидно, и поскольку (4) выполняется при любых $u(x) \in W_2^2(G)$, $v(x) \in C_0^\infty(G)$, то $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subseteq W_2^2(bound)^+$.

Следовательно, $W_2^2(bound)^+$ является подпространством $W_2^2(G)$, содержащим $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, т.е. является подпространством функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям $(bound)^+$. Граничные условия $(bound)^+$ будем называть сопряженными к $(bound)$. Положим $\Omega(bound) = (\Lambda^+(bound)^+)^*$, где $\Lambda^+(bound)^+$ обозначает сильный оператор сопряженной задачи

$$L^+ v = f, \; v \in (bound)^+. \tag{12}$$

Оператор $\Omega(bound)$ назовем слабым оператором задачи (8). Покажем, что имеют место включения:

$$\Lambda \subseteq \Lambda(bound) \subseteq \Omega(bound) \subseteq \Omega. \tag{13}$$

Очевидно, что $\Lambda \subseteq \Lambda(bound)$, аналогично $\Lambda^+ \subseteq \Lambda^+(bound)^+$, откуда согласно теореме 2 из [7] (с. 557)

$$\Omega = (\Lambda^+)^* \supseteq (\Lambda^+(bound)^+)^* = \Omega(bound).$$

Покажем среднее включение. Заметим, что $W_2^2(bound) \subseteq D(\Lambda(bound))$. Учтя теорему вложения и рассуждения (6), легко убедиться, что это так. Для $u \in W_2^2(bound) \subseteq D(\Lambda(bound))$ при любом $v \in W_2^2(bound)^+ = D(\Lambda^{+'}$ $(bound)^+)$ имеем

$$\langle \Lambda(bound)u, v\rangle_0 = \langle Lu, v\rangle_0 = \langle u, L^+ v\rangle_0 = \langle u, \Lambda^{+'}(bound)^+ v\rangle_0 \text{, откуда}$$

$$\Lambda(bound) \subseteq (\Lambda^{+'}(bound)^+)^* = (\Lambda^+(bound)^+)^* = \Omega(bound).$$

Утверждение доказано.

Теорема 1 ([1], с. 97). *Для того чтобы для* L *и* (bound) *существовало разрешимое расширение* L *такое, что*

$$\Lambda(bound) \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega(bound), \tag{14}$$

необходимо и достаточно выполнение двух энергетических неравенств:

$$\|Lu\|_0 \geq C\|u\|_0, \; \|L^+ v\|_0 \geq C\|v\|_0 \tag{15}$$

$$C > 0, \; u \in W_2^2(bound), v \in W_2^2(bound)^+.$$

С краевой задачей (8), где $f \in L_2(G)$, связывают четыре типа решений:

1) гладкое решение – функция $u \in W_2^2(bound)$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$;

2) сильное решение – функция $u \in D(\Lambda(bound))$, удовлетворяющая равенству $\Lambda(bound)u = f$;

3) полусильное решение – функция $u \in D(\mathrm{L})$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$, где L – разрешимый оператор, такой, что $\Lambda(bound) \subseteq L \subseteq \Omega(bound)$;

4) слабое решение – функция $u \in D(\Omega(bound))$, удовлетворяющая равенству $\Omega(bound)u = f$.

Каждое из этих решений является и решением любого последующего типа, но не наоборот. Теорема 1 дает возможность установить, когда существует один из перечисленных типов решений.

Для существования слабого решения при любом $f \in L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение второго из неравенств (15). Заметим, что слабое решение можно определить эквивалентным образом: $u \in L_2(G)$ – слабое решение задачи (8), если

$$\langle u, L^{+}v\rangle_0 = \langle f, v\rangle_0 \quad (v \in W_2^2(bound)^{+}). \tag{16}$$

Первое из неравенств (15) дает непрерывную зависимость сильного решения от f, но не дает его существования при любом $f \in L_2(G)$. Предположим, что выполняются оба неравенства (15). Такие *(bound)* мы будем называть почти корректными относительно L. Как следует из теоремы 1, это необходимое и достаточное условие существования при любом $f \in L_2(G)$ полусильного решения, в этом случае при любой $f \in L_2(G)$ существует слабое решение и непрерывно зависит сильное.

Основная теорема. Применим изложенный выше метод, позволяющий установить существование разрешимого расширения оператора, в общем не обязательно дифференциального, для случая, когда вышеуказанным оператором является оператор, определяемый выражением (1). Покажем, что существуют условия на коэффициент при дробной производной, при которых *(bound)* (11), рассмотренные в разделе 3, являются почти корректными относительно L, и в силу теоремы 1 существует для L и *(bound)* разрешимое расширение L такое, что

$$\Lambda(bound) \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega(bound).$$

Лемма 2. *Пусть* $c(x) \in AC[0,r], c(x) > 0, c'(x) \le 0$. *Тогда* $\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge \ge 0$.

Для доказательства нам потребуется результат, который аналогично следует из доказательства леммы 1 работы [9]

Пусть $v(x) \in AC[0,r], \alpha \in (0,1)$, тогда

$$v(x)\partial_{rx}^{\alpha} v(t) \ge \frac{1}{2}\partial_{rx}^{\alpha} v^2(t).$$

По определению

$$v(x)\partial_{rx}^{\alpha}v(t)-\frac{1}{2}\partial_{rx}^{\alpha}v^2(t)=\mathrm{s}ign(x-r)v(x)D_{rx}^{\alpha-1}v'(t)-sign(x-r)D_{rx}^{\alpha-1}v(t)v'(t)=$$
$$=\frac{sign(x-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\left[\int_x^r\frac{v(x)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

Мы получим желаемое, если покажем, что выражение в скобках не положительно. Рассмотрим

$$\int_x^r\frac{v(x)v(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt=\int_x^r\frac{v'(t)[v(x)-v(t)]}{(t-x)^{\alpha}}dt\ .$$

Ввиду абсолютной непрерывности $v(x)$ можно, применив формулу Ньютона–Лейбница, представить подынтегральное выражение в скобках в виде интеграла

$$\int_x^r\frac{v'(t)[v(x)-v(t)]}{(t-x)^{\alpha}}dt=\int_x^r\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\int_t^x v'(\eta)d\eta dt.$$

Пользуясь теоремой Фубини, изменим порядок интегрирования, затем, осуществив преобразования, имеем

$$=\int_x^r v'(\eta)\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dtd\eta=\int_x^r(\eta-x)^{\alpha}\frac{v'(\eta)}{(\eta-x)^{\alpha}}\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dtd\eta=$$
$$=\frac{1}{2}\int_x^r(\eta-x)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2d\eta=-\frac{\alpha}{2}\int_x^r(\eta-x)^{\alpha-1}\left(\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2d\eta\le 0,$$

следовательно

$$\frac{sign(x-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\left[\int_x^r\frac{v(x)v(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right]\ge 0.$$

Доказательство неравенства завершено.

Учтя доказаное неравенство, будем иметь следующие рассуждения:

$$\langle v,\partial_{rx}^{\alpha}c(t)v(t)\rangle_0=\int_0^r\frac{1}{c(x)}v(x)c(x)\partial_{rx}^{\alpha}c(t)v(t)dx\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{c(x)}\partial_{rx}^{\alpha}[c(t)v(t)]^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{c(x)}\frac{\partial}{\partial x}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{c(x)}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2\,|_0^r-\frac{1}{2}\int_0^r\frac{c'(x)}{c(x)^2}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2dx\ge 0.$$

Последнее равенство возможно, поскольку в силу [10] (с. 40) $D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2\in AC[0,r]$, и так как

$$D_{r0}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2=\frac{sign(0-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\int_r^0\frac{[c(t)v(t)]^2}{t^{\alpha}}dt=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}\int_0^r\frac{[c(t)v(t)]^2}{t^{\alpha}}dt\ge 0,$$

то ввиду очевидной неотрицательности второго слагаемого в последней строке предыдущего неравенства в случае, когда $c'(x) \le 0$, можем заключить, что

$$\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge 0.$$

Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть в выражениях (1), (2)* $c(x) \in AC(\overline{G}), c(x) > 0,$ $c'(x) \le 0,\ \ (x \in \overline{G}).$ *Тогда граничные условия (bound) (11) являются почти корректными относительно* L. *Для* L *и (bound) существует разрешимое расширение, т. е. существует оператор* L, *удовлетворяющий (14) и имеющий непрерывный обратный определенный во всем* $L_2(G)$.

По условию данной теоремы $c(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1 работы [3], следовательно, имеем $\langle u(x), D_{0x}^{\alpha}u(t)\rangle_0 \ge 0.$ Домножив левую и правую части выражения (1) на $u(x)$ и положив $u \in W_2^2(bound)$, имеем

$$< u(x), D^2 u(x) >_0 - < u(x), c(x) D_{0x}^{\alpha} u(t) >_0 = < Lu(x), f(x) >_0 .$$

Заметим, что из $u \in W_2^2(bound)$ следует $\mathcal{D}u \in W_2^1(G),$ далее согласно утверждению (см. [1], с. 87) подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ совпадает с совокупностью тех функций из $W_2^1(G)$, которые аннулируются на Γ, следовательно $u \in W_2^2(bound) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G),$ и согласно [4] (с. 324) имеет место формула интегрирования по частям

$$< u(x), D^2 u(x) >_0 = \int_0^r u(x) D^2 u(x) dx = -\int_0^r [Du(x)]^2 dx = -\| Du \|_0^2 = -\| u' \|_0^2 .$$

Последнее равенство имеет место, поскольку в силу теоремы вложения (см. [1], с. 31) $u \in C^1(\overline{G})$. Далее полностью аналогично [3] имеем для любого $k > 0$:

$$\|u\|_0^2 \le r^2 \| u' \|_0^2 \le \frac{kr^2}{2} \|u\|_0^2 + \frac{r^2}{2k} \| Lu \|_0^2 .$$

Положив $k = \dfrac{1}{r^2},$ получим первое неравенство (15)

$$\|Lu\|_0 r^2 \ge \|u\|_0 \ \ (u(x) \in W_2^2(bound)).$$

Покажем, что второе неравенство (15) тоже выполняется. Согласно лемме 2 при условиях данной теоремы на $c(x)$ и при $v \in W_2^2(bound)^+$ имеем

$$\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge 0 \ \ (v \in W_2^2(bound)^+).$$

Далее, используя рассуждения при получении первого неравенства (15), приведенные выше, получим второе неравенство (15)

$$\|L^+ v\|_0 r^2 \ge \|v\|_0 \ \ (v \in W_2^2(bound)^+).$$

Согласно теореме 1 выполнение неравенств (15) является достаточным условием существования оператора L, удовлетворяющего (14) и имеющего непрерывный обратный, определенный на всем $L_2(G)$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность А. В. Псху за регулярные консультации и неоценимую поддержку.

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации, г. Нальчик

М. В. Кукушкин

Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной

Рассматривается обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной. Формулируются достаточные условия существования разрешимого расширения оператора в одномерном случае.

Մ. Վ. Կուկուշկին

Ընդհանրացված եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի կոտորակային ածանցյալով հավասարման համար

Դիտարկվում է ընդհանրացված եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի կոտորակային ածանցյալով հավասարման համար: Ձևավորվում են բավարար պայմաններ լուծելի ընդլայնված մի օպերատորի համար:

M. V. Kukushkin

Generalized Boundary Value Problem for the Second Order Equation with Fractional Derivative

A generalized boundary value problem for the second-order equation with fractional derivative is considered. Sufficient conditions for the existence of solvable extension of the operator in a one-dimensional case are formulated.

Литература

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев. Наукова думка. 1965. 798 с.
2. *Нахушев А. М.* - ДАН СССР. 1977. Т. 234. N 2.
3. *Кукушкин М. В.* - Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т.16. N 3.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. М. Наука. 1974. 479 с.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М. Наука. 1965.
6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. М. Наука. 1975. 407 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М. Физматгиз. 1959. 752 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М. Наука. 1984.
9. *Алиханов А. А.* - Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. С. 658-664.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника.1987. 687 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Г. С. Айрапетян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярных круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений

(Представлено 8/V 2015)

Ключевые слова: *микрополярная, ортотропная, упругая, круглая пластинка, изгибная деформация.*

Введение. В работе [1] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование построена общая теория изгибной деформации микрополярных упругих изотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом поперечных сдвигов. В работе [2] этот подход развит и построена математическая модель изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом деформации поперечных сдвигов. В работе [3] на основе построенных моделей [1, 2] микрополярных изотропных и ортотропных пластин изучается задача изгиба микрополярных шарнирно-опертых прямоугольных пластин.

В данной работе на основе общей математической модели для изгибной деформации микрополярных ортотропных и изотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений [1, 2] изучается задача изгиба круглых пластин. Построено точное решение рассматриваемой задачи, которое доведено до окончательных численных результатов, при помощи анализа которых устанавливаются эффективные свойства микрополярных материалов с точки зрения прочности и жесткости пластинки по сравнению с классическими материалами.

1. Постановка задачи. Основные уравнения прикладной теории изгиба микрополярных упругих ортотропных и изотропных пластин в криволинейной ортогональной системе координат в срединной плоскости пластинки имеют вид [2, 4]:

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}N_{13}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}N_{23}=-q_3,$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\cdot$$
$$\cdot\left(L_{21}+L_{12}\right)+(N_{23}-N_{32})=-m_1,$$
$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\cdot$$
$$\cdot\left(L_{21}+L_{12}\right)+(N_{31}-N_{13})=-m_2,$$
$$N_{31}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\left(M_{22}-M_{11}\right)-$$
$$-\frac{1}{H_2}\frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\left(M_{21}+M_{12}\right)=hq_1, \tag{1.1}$$
$$N_{32}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\left(M_{11}-M_{22}\right)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\left(M_{12}+M_{21}\right)=hq_2,$$
$$L_{33}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\Lambda_{13}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\Lambda_{23}+M_{12}-M_{21}=hm_3\,.$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\psi_2,\quad K_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\psi_1\ ,$$
$$K_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\psi_1-\iota\,,\ K_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\psi_2+\iota\,,$$
$$\Gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}+\Omega_2\,,\Gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}-\Omega_1\,,\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2\,,\Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1\,, \tag{1.2}$$
$$k_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\Omega_2,\ k_{22}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\Omega_1\ ,\ k_{33}=\iota\,,$$
$$k_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\Omega_1\ ,\ k_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\Omega_2\ ,$$
$$l_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_1}\ ,\ \ l_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_2}\,.$$

Физические соотношения упругости:

для микрополярного ортотропного материала

$$\begin{aligned}
&N_{13}=\tilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31}\ , && N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13}\,,\\
&N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32}\,, && N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23}\,,\\
&M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}\,, && M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11}\,,\\
&M_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21}\,, && M_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12}\,,\\
&L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33}\,, && L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21}\,,\\
&L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{21}k_{11}+d_{23}k_{33}\,, && L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12}\,,\\
&L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{31}k_{11}+d_{32}k_{22}\,, && \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13}\,,\quad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}\,,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\tilde{C}_{55}=2h\dfrac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$, $C_{66}=2h\dfrac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$, $C_{56}=-2h\dfrac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$,

$$C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},$$

$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{22}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{12}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{22} & b_{23}\\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{12}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12} & b_{13}\\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{13}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12} & b_{13}\\ b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}, \tag{1.4}$$

$$d_{22}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11} & b_{13}\\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta},\ d_{21}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12} & b_{23}\\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{23}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11} & b_{13}\\ b_{12} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b},$$

$$d_{33}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{31}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta},\ d_{32}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b},$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},$$

$$\lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\quad \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}},$$

для микрополярного изотропного материала

$$N_{13}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}\right],\qquad N_{31}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma\right]_{13},$$

$$N_{23}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}\right],\qquad N_{32}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}\right],$$

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right),\qquad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right),$$

$$M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}\right],\qquad M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}\right],$$

$$L_{11}=2h(\beta+2\gamma)k_{11}+2h\beta(k_{22}+\iota),\qquad L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right], \tag{1.5}$$

$$L_{22}=2h(\beta+2\gamma)k_{22}+2h\beta(k_{11}+\iota),\qquad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right],$$

$$L_{33}=2h(\beta+2\gamma)\iota+2h\beta(k_{11}+k_{22}),$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\qquad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}.$$

Здесь α_1, α_2– криволинейные ортогональные координаты в срединной плоскости пластинки; $H_1 = H_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $H_2 = H_2(\alpha_1, \alpha_2)$– коэффициенты Ламе этой криволинейной системы координат; w – перемещение точек срединной плоскости пластинки (прогиб пластинки); ψ_1, ψ_2– полные углы поворота нормального к срединной плоскости пластинки элемента вокруг осей α_1 и α_2; Ω_1, Ω_2 –аналогичные свободные повороты; K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}– изгиб-кручения от силовых напряжений; $k_{11}, k_{22}, k_{33} = \iota, k_{12}, k_{21}$ – изгиб-кручения от моментных напряжений; $\Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}$ – усредненные сдвиговые деформации в соответствующих плоскостях; l_{13}, l_{23} – изгиб-кручения от моментов моментных напряжений; $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ – изгибающие и крутящие моменты от силовых напряжений; L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{33} – изгибающие и крутящие моменты от моментных напряжений; $N_{13}, N_{23}, N_{31}, N_{32}$ – поперечные и родственные им усилия; $\Lambda_{13,}\Lambda_{23}$ – гипермоменты от моментных напряжений.

К системе уравнений прикладной теории изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных (изотропных) тонких пластин (1.1)-(1.5) следует присоединить граничные условия, которые выражаются так (например, для края $\alpha_1 = \text{const}$) [2, 4]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$
$$N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \tag{1.6}$$
$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } k_{11} = k_{11}^*; \; L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^*; \; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Если пластинка круглая, тогда необходимо использовать полярную систему координат в срединной плоскости (r, θ). В этом случае имеем: $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \theta$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$. В полярной системе координат уравнения равновесия (1.1) и геометрические соотношения (1.2) примут следующий вид.

Уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} = -(p_3^+ + p_3^-), \\
N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_{22} - M_{11}) - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} = h(p_1^+ - p_1^-), \\
N_{32} - \frac{\partial M_{12}}{\partial r} - \frac{1}{r}(M_{12} + M_{21}) - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} = h(p_2^+ - p_2^-), \\
\frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + (N_{23} - N_{32}) = -(m_1^+ + m_1^-), \\
\frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + (N_{31} - N_{13}) = -(m_2^+ + m_2^-), \\
L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Lambda_{13} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} + (M_{12} - M_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-),
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial r},\quad K_{22}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\psi_1,$$
$$K_{12}=\frac{\partial\psi_2}{\partial r}-\iota,\ K_{21}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\psi_2+\iota,$$
$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial r}+\Omega_2,\Gamma_{23}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\Omega_1,\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1, \tag{1.8}$$
$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial r},\ k_{22}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1,\ k_{33}=\iota,$$
$$k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial r},\ k_{21}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2,$$
$$l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial r},\quad l_{23}=\frac{1}{r}\frac{\partial\iota}{\partial\theta}.$$

Физические соотношения упругости остаются прежные– (1.3),(1.5).

2. **Осесимметричная задача изгиба для микрополярных ортотропных и изотропных круглых пластин.** Если нагрузка, действующая на круглую пластинку, распределена симметрично относительно оси, перпендикулярной к пластинке и проходящей через ее центр, и граничные условия являются симметричными относительно указанной оси, изогнутая поверхность срединной плоскости также будет осесимметричной. Рассмотрим микрополярный ортотропный материал. В этих условиях все величины, участвующие в задаче изгиба, не будут зависеть от центрального угла θ, а будут функцией только r. Тогда уравнения изгиба (отметим, что в осесимметричном случае задачи изгиба и кручения пластинки разделяются друг от друга) будут выражаться следующим образом.

Уравнения равновесия:

$$\frac{dN_{13}}{dr}+\frac{1}{r}N_{13}=-q_3,\quad N_{31}-\frac{dM_{11}}{dr}-\frac{1}{r}\left(M_{11}-M_{22}\right)=0,$$
$$\frac{dL_{12}}{dr}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{31}-N_{13}=0. \tag{2.1}$$

Физико-геометрические соотношения:

$$N_{13}=\tilde{C}_{55}\frac{dw}{dr}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2,\quad N_{31}=C_{56}\frac{dw}{dr}+C_{66}\psi_1+\left(C_{56}-C_{66}\right)\Omega_2,$$
$$M_{11}=D_{11}\frac{d\psi_1}{dr}+D_{12}\frac{1}{r}\psi_1,\quad M_{22}=D_{12}\frac{d\psi_1}{dr}+D_{22}\frac{1}{r}\psi_1, \tag{2.2}$$
$$L_{12}=d_{88}\frac{d\Omega_2}{dr}-d_{78}\frac{1}{r}\Omega_2,L_{21}=d_{78}\frac{d\Omega_2}{dr}-d_{77}\frac{1}{r}\Omega_2/$$

Граничные условия:

а) жесткого защемления: $w=0,\ \psi_1=0,\ \Omega_2=0,$ при $r=a$; (2.3)

б) шарнирного опирания: $w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{12}=0$ при $r=a$. (2.4)

Будем считать, что нагрузка на пластинку распределена равномерно: $q_3 = q = \text{const}$.

Подставив формулы (2.2) в уравнения (2.1), получим систему уравнений изгиба микрополярных круглых пластин относительно величин w, ψ_1, Ω_2:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{55}\left(\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)+C_{56}\left(\frac{d\psi_1}{dr}+\frac{1}{r}\psi_1\right)+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\left(\frac{d\Omega_2}{dr}+\frac{1}{r}\Omega_2\right)=-q. \\ C_{56}\frac{dw}{dr}-D_{11}\frac{d^2\psi_1}{dr^2}-D_{11}\frac{1}{r}\frac{d\psi_1}{dr}+\left(C_{66}+\frac{D_{22}}{r^2}\right)\psi_1+\left(C_{56}-C_{66}\right)\Omega_2=0, \\ \left(C_{56}-\tilde{C}_{55}\right)\frac{dw}{dr}+d_{88}\frac{d^2\Omega_2}{dr^2}+d_{88}\frac{1}{r}\frac{d\Omega_2}{dr}-\left(\frac{d_{77}}{r^2}+C_{66}+\tilde{C}_{55}-2C_{56}\right)\Omega_2+\left(C_{66}-C_{56}\right)\psi_1=0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Примем следующую подстановку :

$$\chi=\tilde{C}_{55}\frac{\partial w}{\partial r}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2, \quad (2.6)$$

тогда из первого уравнения (2.5) получим следующее уравнение для определения функции χ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{1}{r}\chi=-q. \quad (2.7)$$

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка относительно функции χ будет (ниже рассмотрим случай, когда пластинка сплошная, не имеет отверстия):

$$\chi=-\frac{qr}{2}. \quad (2.8)$$

Возвращаясь к подстановке (2.6), получим

$$\tilde{C}_{55}\frac{\partial w}{\partial r}+C_{56}\psi_1+\left(\tilde{C}_{55}-C_{56}\right)\Omega_2=-\frac{qr}{2}. \quad (2.9)$$

На основе (2.5) и (2.9) приходим к решению следующего дифференциального уравнения для функции $\psi_1(r)$:

$$\frac{d_{88}\tilde{C}_{55}}{D_{11}\left(\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2\right)}\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1-\left(1+\frac{d_{88}}{D_{11}}+\frac{d_{77}\tilde{C}_{55}}{\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2}\right)\tilde{\nabla}^2\psi_1+\frac{d_{88}D_{22}\tilde{C}_{55}}{D_{11}\left(\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2\right)}\frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}^2\psi_1-$$
$$-\left(\frac{D_{22}d_{88}}{D_{11}}-d_{77}\right)\frac{1}{r^2}\psi_1=\left[1-\frac{C_{56}\left(C_{66}-C_{56}\right)}{\tilde{C}_{55}C_{66}-C_{56}^2}+\frac{C_{66}-C_{56}+d_{77}-d_{88}}{\tilde{C}_{55}-C_{56}}\right]\frac{qr}{2}, \quad (2.10)$$

где $\tilde{\nabla}^2(\cdot)=\frac{d^2(\cdot)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d(\cdot)}{dr}-\frac{1}{r^2}(\cdot)$.

В случае изотропного материала уравнение (2.10) примет вид

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1-k^2\tilde{\nabla}^2\psi_1=\frac{qr}{2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^2}, \quad (2.11)$$

где $$k^2=\frac{\gamma+\varepsilon+\frac{2h^2\mu}{3(1-\nu)}}{\frac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{2\alpha}\frac{h^2}{3(1-\nu)}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.11) имеет вид

$$\psi_1=Cr^3, \tag{2.12}$$

где $$C=-\frac{q}{16k^2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^3}.$$

Уравнению (2.11) соответствует однородное уравнение

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\psi_1-k^2\tilde{\nabla}^2\psi_1=0$$

или

$$\tilde{\nabla}^2\left(\tilde{\nabla}^2\psi_1-k^2\psi_1\right)=0. \tag{2.13}$$

Общее решение этого уравнения

$$\psi_1=C_1r+C_2I_1(kr), \tag{2.14}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; $I_1(x)$ – функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.11)

$$\psi_1=C_1r+C_2I_1(kr)-\frac{q}{16k^2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^3}r^3. \tag{2.15}$$

Для перемещения $w(r)$ и свободного поворота $\Omega_2(r)$ получим

$$\Omega_2=C_1r+C_2I_1(kr)-\frac{qr^3}{16k^2}\frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\frac{3(1-\nu)}{h^3}+\frac{qr}{4k^2h}\frac{1}{\gamma+\varepsilon}-$$

$$-\frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\frac{h^2}{3(1-\nu)}C_2k^2I_1(kr)-\frac{(\mu-\alpha)qr}{16\mu h\alpha}, \tag{2.16}$$

$$w=-\frac{C_1r^2}{2}-\frac{C_2}{k}I_0(kr)+\frac{\alpha q}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)k^2h}\left(\frac{r^4}{64}\frac{3(1-\nu)}{h^2}-\frac{r^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{h^2}{3(1-\nu)}C_2kI_0(kr)-\frac{qr^2}{16\mu h}+C^*, \tag{2.17}$$

где C^* – новая постоянная интегриривания.

При конкретном счете будем рассматривать условия жесткого защемления (2.3).

На основе выражений (2.15)-(2.17), удовлетворяя граничным условиям жесткого защемления (2.3), определим постоянные интегрирования C^*, C_1, C_2. После этого выражения (2.15)- (2.17) можем использовать для конкретного численного определения любого из этих основных функций, а также, используя соответствующие формулы, можем вычислить значения силовых и моментных напряжений.

Приведем результат численного счета для максимального прогиба пластинки (т.е. $w(r)$ при $r=0$). Материалом пластинки выбран полиуретан [6], для которого упругие константы имеют следующие значения:

$$\lambda=\frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}=4370\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},\ \mu=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}=1093\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},\ \alpha=46\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},$$

$$\gamma=2.4\,\textit{кгс},\ \varepsilon=2.4\ \text{кгс},\ \beta=120\,\text{кгс}.$$

Имеем

при $\quad q=0.5\cdot10^{-3}\,\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2},\ a=b=10\,\textit{см},\ h=0.1\text{см}\quad\left(\delta=\frac{1}{100}\right).$

$$w_{\max}^{\textit{мик}}=0.006\,\textit{см},\ w_{\max}^{\textit{кл}}=0.008\,\textit{см},\ \frac{w_{\max}^{\textit{мик}}}{w_{\max}^{\textit{кл}}}=0.75.$$

Разность составляет 25%. Приведенный результат показывает эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения жесткости пластинки. Отметим, что аналогичный результат получается и для напряжений, т. е. и с точки зрения прочности пластинки при остальных равных условиях микрополярный материал эффективнее классического.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН ПА в рамках научного проекта №SCS 13-2C 154.

Гюмрийский государственный педагогический
институт им. М. Налбандяна

Г. С. Айрапетян,
член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Изгиб микрополярных круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений

На основе построенной ранее математической модели микрополярных упругих ортотропных и изотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений изучается задача изгиба круглой сплошной пластинки, когда она нагружена равномерно распределенной нормальной к срединной плоскости пластинки нагрузкой, а контур пластинки жестко защемлен. Построено точное решение этой граничной задачи. Выполнен численный анализ, на основе которого устанавливаются эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения прочности и жесткости пластинки по сравнению с классическими материалами.

Գ. Ս. Հայրապետյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Պտույտների և տեղափոխությունների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար կլոր սալերի ծռումը

Նախկինում կառուցված պտույտների և տեղափոխությունների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար օրթոտրոպ և իզոտրոպ բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում է հոծ կլոր սալի ծռման խնդիրը, երբ սալը բեռնավոր-ված է սալի միջին հարթությանն ուղղահայաց հավասարաչափ բաշխված բեռով, իսկ սալի եզրագիծը կոշտ ամրակցված է: Կառուցված է այս եզրային խնդրի ճշգրիտ լու-ծումը: Կատարված է թվային անալիզ, որի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի էֆեկտիվ հատկությունները սալի ամրության և կոշտության իմաստով՝ համե-մատած դասական նյութի հետ:

G. S. Hayrapetyan,
Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Bending of Micropolar Circular Plates with Free Firlds of Displacements and Rotations

The problem of bending of circular plate, when it is under the evently distributed load, which is perpendicular to the plate middle plane is studied on the basis of previously constructed mathematical models of micropolar orthotropic and isoteropic plates with free fields of displacements and rotations. The layer of the plate is rigidly fixed. The exact solution of the stated problem is constructed. Numerical analysis is done, on the basis of which the effective properties of micropolar material are revealed from the point of view of stiffness and rigidity compared with classical material.

Литература

1. *Саркисян С. О* - Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-156.
2. *Айрапетян Г. С., Саркисян С. О.* – Изв. НАН Армении. Механика. Т. 65. № 3. 2012. С.22-33.
3. *Айрапетян Г. С., Асланян Г. С., Саркисян С. О.* - ДНАН Армении. 2014. Т. 114. № 4. С.333-342.
4. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. Наука. 1972. 734 с.
6. *Lakes R. S.* In: Continuum Models for Materials with Micro-Structure (Edited by H. Muhlaus, J. Wiley). New-York, 1995. P. 1-22.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки

(Представлено 15/V 2015)

Ключевые слова: *упругая пластинка, разномодульность, гипотеза Кирхгофа, двумерная задача.*

Обычно в классической теории пластин в законе деформации–напряжения Гука пренебрегается напряжением σ_z, а потом определяются связи напряжения (σ_x, σ_y)–деформации $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$. Этот подход, по-видимому, для разномодульной теории не подходит, так как знаки напряжений должны быть известны заранее. В классической теории имеется альтернативный подход, который используется редко. В этом случае закон Гука берется в виде связей напряжения–деформации. Затем в выражении связи для σ_z с деформациями принимается $\sigma_z = 0$, отсюда через $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ определяется ε_z и подставляется в выражения для σ_x, σ_y. В классической теории пластин оба эти подхода дают идентичный результат. Для разномодульной теории пластин второй подход представляется более естественным.

1. Рассматривается тонкая пластинка постоянной толщины h, на которую действует поперечная нагрузка $q(x, y)$.

Предполагается, что слой пластинки $0 < z \le h_2$ растягивается, так как нагрузка приложена на плоскости $z = h_2$, а слой $-h_1 \le z < 0$ сжимается (см. [1], с.70). При условии $h = h_1 + h_2$ толщины h_1, h_2 будут искомыми величинами. Очевидно, что для сжимаемого слоя с индексом „2" имеют место условия

$$\sigma_x^{(2)} < 0,\ \sigma_y^{(2)} < 0,\ \sigma_z^{(2)} < 0. \tag{1.1}$$

Тогда закон Гука в этой области по разномодульной теории упругости должен иметь вид [2]

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right],$$
$$\sigma_y^{(2)} = \frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right], \tag{1.2}$$
$$\sigma_z^{(2)} = \frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right].$$

В растянутой области имеем $\left(-h_1 \le z < 0\right)$

$$\sigma_x^{(1)} > 0,\ \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)} < 0. \tag{1.3}$$

Следовательно, согласно разномодульной теории упругости

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{(1-\nu^+)E^+}{\left(1+\nu^+\right)\left(1-2\nu^+\right)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu^+}{1-\nu^+}\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right],$$
$$\sigma_y^{1} = \frac{(1-\nu^+)E^+}{\left(1+\nu^+\right)\left(1-2\nu^+\right)}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu^+}{1-\nu^+}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right], \tag{1.4}$$
$$\sigma_z^{(1)} = \frac{(1-\nu^-)E^-}{\left(1+\nu^-\right)\left(1-2\nu^-\right)}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right].$$

Согласно допущению гипотезы Кирхгофа в третьем равенстве (1.2) принимается $\sigma_z^{(2)} = 0$ и для ε_z имеем

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu^-}{1-\nu^-}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right). \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в первые два равенства из (1.2) приводит к выражениям для основных напряжений теории пластин

$$\sigma_x^{(2)} = E_2\left(\varepsilon_x + \nu_2\varepsilon_y\right),\ \sigma_y^{(2)} = E_2\left(\varepsilon_y + \nu_2\varepsilon_x\right)$$
$$\sigma_{xy}^{(2)} = G_2\varepsilon_{xy}. \tag{1.6}$$

В (1.6) приняты обозначения

$$E_2 = \frac{E^-}{\left[1-\left(\nu^-\right)^2\right]},\ \ \nu_2 = \nu^-. \tag{1.7}$$

Для модуля сдвига G_2 естественно принять

$$G_2 = \frac{E^-}{2\left(1+\nu^-\right)}. \tag{1.7}$$

В случае растянутого слоя $\left(-h_1 \le z < 0\right)$, полагая $\sigma_z^{(1)} = 0$ в (1.4), получим ε_z в виде (1.5). Подстановка (1.5) в первые два выражения (1.4) дает

$$\sigma_x^{(1)} = E_1\left(\varepsilon_x + \nu_1\varepsilon_y\right),\ \sigma_y^{(1)} = E_1\left(\varepsilon_y + \nu_1\varepsilon_x\right),$$
$$\sigma_{xy}^{(1)} = G_1\varepsilon_{xy}, \tag{1.8}$$

где

$$E_1=\frac{(1-v^- - v^+)E^+}{\left(1+v^+\right)\left(1-v^-\right)\left(1-2v^+\right)},\ v_1=\frac{v^+\left(1-2v^-\right)}{1-v^- - v^+}, \tag{1.9}$$

G_1 – модуль сдвига, который будет определен в дальнейшем.

Нетрудно заметить, что в случае равномодельной теории упругости выражения (1.9) совпадают с допущением гипотезы Кирхгофа для основных напряжений.

2. Как и в классической теории пластин, принимается второе допущение гипотезы Кирхгофа [2, 3]. При этом учитывается, что в плоскости $z=0$ продольные перемещения равны нулю $\left(\sigma_x=0,\sigma_y=0\right)$

$$-z\frac{\partial w}{\partial x},\ u_y=-z\frac{\partial w}{\partial y},\ u_z=w, \tag{2.1}$$

где w является функцией координат x,y.

Используя связи деформации–перемещения, с учетом (2.1) получаются выражения для основных напряжений теории пластин через перемещения

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(i)}=-zE_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ \tau_{xy}^{(i)}=-2zG_i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\ \sigma_y^{(i)}=-zE_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\ i=1,2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Третье допущение гипотезы Кирхгофа – это осереднение уравнений равновесия.

Осередненные уравнения равновесия получаются обычной процедурой для каждого слоя в отдельности

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial S^{(i)}}{\partial y}\pm\tau_{zx}^{(i)}=0,\\ &\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial T_2^{(i)}}{\partial y}\pm\tau_{zy}^{(i)}=0,\\ &\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y}-\sigma_z^{(2)}(0)=-q(x,y),\\ &\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(i)}}{\partial y}+\sigma_z^{(1)}(0)=0,\\ &\frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial H^{(i)}}{\partial y}-N_1^{(\mathrm{i})}=0,\\ &\frac{\partial H^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial y}-N_2^{(\mathrm{i})}=0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь знак „+” относится к растянутому слою $(i=1)$, знак „–” к сжимаемому слою $(i=2)$. Величины $\varepsilon_{zx}^{(i)}(0),\tau_{zy}^{(i)}(0),\sigma_z^{(i)}(0)$ являются искомыми и должны удовлетворять условиям непрерывности при $z=0$,

$$T_1^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_x^{(2)} dz,\ T_2^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_y^{(2)} dz,\ S^{(2)} = \int_0^{h_2} \tau_{xy}^{(2)} dy,$$

$$T_1^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \sigma_x^{(1)} dz,\ T_2^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \sigma_y^{(1)} dz,\ S^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} \tau_{xy}^{(1)} dy, \tag{2.4}$$

С учетом (2.2) и (2.4) из первого уравнения системы (2.3) следует

$$\tau_{zx}^{(2)}(0) = \frac{E_2 h_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\nu_2 + 2\gamma_2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$\tau_{zx}^{(1)}(0) = \frac{E_1 h_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\nu_1 + 2\gamma_1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\ \gamma_i = \frac{G_i}{E_i}. \tag{2.5}$$

Для выполнения условия непрерывности касательных напряжений

$$\varepsilon_{zx}^{(i)}(0) = \varepsilon_{zx}^{(2)} = 0 \tag{2.6}$$

достаточно, чтобы имели место равенства

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2\ ,\ \nu_2 + 2\gamma_2 = \nu_1 + 2\gamma_1\,. \tag{2.7}$$

Первое равенство из (2.7) приводится в [2] в задаче чистого изгиба разномодульной балки и вместе с условием $h = h_1 + h_2$ определяет положение нейтральной плоскости пластинки. Из второго равенства (2.7) получается выражение для модуля сдвига G_1

$$G_1 = \frac{E^+}{2\left(1+\nu^+\right)}\ . \tag{2.8}$$

Аналогично, рассматривая второе уравнение из системы (2.3) при $i = 1, 2$ и требуя выполнения условия непрерывности ε_{zy} при $z = 0$, получаем то же условие (2.7).

Согласно (2.2) для моментов, входящих в систему (2.3),

$$M_1^{(2)} = \int_0^{h_2} z\sigma_x^{(2)} dz = -\frac{E_2 h_2^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2^{(2)} = \int_0^{h_1} z\sigma_y^{(2)} dz = -\frac{E_2 h_2^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H^{(2)} = \int_0^{h_2} z\varepsilon_{xy}^{(2)} dz = -\frac{2G_2 h_2^3}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\ ,$$

$$M_1^{(1)} = \int_{h_1}^{0} z\sigma_x^{(1)} dz = -\frac{E_1 h_1^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2^{(1)} = \int_{-h_1}^{0} z\sigma_y^{(1)} dz = -\frac{E_1 h_1^3}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H^{(1)} = \int_{-h}^{0} z\varepsilon_{xy}dz = -\frac{2G_1h_1^3}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \qquad (2.9)$$

С учетом (2.3), из последних уравнений системы (2.3) определяются части перерезывающих сил $(v_i + 2\gamma_i) = 1$

$$N_1^{(i)} = -\frac{E_ih_i^3}{3}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w,\ N_2^{(i)} = -\frac{E_ih_i^3}{3}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w. \qquad (2.10)$$

Подстановка (2.10) в третье и четвертое уравнения системы (2.3) и использование условия непрерывности нормального напряжения

$$\sigma_z^{(1)}(0) = \sigma_z^{(2)}(0) \qquad (2.11)$$

приводят к уравнению для искомой функции прогиба

$$D\Delta^2 w = q(x, y). \qquad (2.12)$$

В этом случае жесткость пластинки определяется формулами

$$D = \frac{1}{3}\left(E_1h_1^3 + E_2h_2^3\right) = \frac{1}{3}E_1h_1^2h = \frac{1}{3}E_2h_2^2h. \qquad (2.13)$$

В частном случае классической теории (2.13) совпадает с жесткостью изгиба классической теории пластин.

3. Нетрудно заметить, что граничные условия закрепленного края и свободного опертого края при $x = \text{const}$ будут

$$w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (3.1)$$

и

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad (3.2)$$

т.е. такими же, что и в классической теории пластин.

Граничные условия свободного края будут сложными

$$M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0,\ \tilde{N}_1^{(1)} + \tilde{N}_1^{(2)} = 0, \qquad (3.3)$$

где $\tilde{N}_1^{(1)}, \tilde{N}_1^{(2)}$ – обобщение перерезываюго усилия.

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки

Предлагается новый подход к сведению пространственной задачи теории разномодульной упругости к двумерной. Полученные уравнения являются более простыми по сравнению с ранее исследованными моделями. Установлена связь с моделью Тимошенко для разномодульной балки.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Ուղղահայաց բեռի ազդեցության տակ գտնվող տարամոդուլ սալի լարվածա-դեֆորմացվող վիճակը

Առաջարկված է նոր մոտեցում, որի միջոցով տարամոդուլ առաձգական տեսության տարածական խնդիրը բերված է երկչափի: Ստացված հավասարումները ավելի պարզ են համեմատած նախկինում հետազոտված մոդելների: Հաստատված է կապ Տիմոշենկոյի կողմից առաջարկված տարամոդուլ հեծանի մոդելի հետ:

Academician S. A. Ambartsumian, M.V. Belubekyan

The Stress-Strain State of the Different Modules Plate under the Normal Load Action

A new approach for the reduction of the three-dimensional problem of the theory of different modules elasticity to the two-dimensional one is suppoused. The received equations are simpler than the earlier investigated models. The connection with the model of Timoshenko for the different modules beam is established.

Литература

1. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М. Наука. 1982. 320 с.
2. *Амбарцумян С.*А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван. Изд. РАУ. 2004. 188 с.
3. *Хачатрян А.А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т. 25. №1. С. 15-27.
4. *Тимошенко С.*.П. Курс сопротивления материалов. М.–Л. Гостехиздат. 1931. 587 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539

Академик Г. Е. Багдасарян, С. Л. Саакян

Вопросы колебания коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью

(Представлено 29/V 2015)

Ключевые слова: *оболочка, жидкость, колебания.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания и устойчивость коаксиальной системы двух цилиндрических оболочек конечной длины l, когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью глубины b $(b \le l)$. Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ), совместив полярную ось α с осью оболочек. Предполагается, что та часть поверхности указанной области, которая находится на плоскости $\alpha = 0$, является неподвижной (жёсткое днище).

Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях;

б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости;

в) жидкость между оболочками совершает потенциальное движение;

г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочки.

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочек имеет вид [12]:

$$\begin{gathered} D_i \Delta^2 w_i - \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \alpha^2} + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \rho_i h_i \varepsilon_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = Z_i, \\ \frac{1}{E_i h_i}\Delta^2 \Phi_i + \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)} \quad (i = 1, 2), \end{gathered} \tag{1.1}$$

причем индекс $i = 1$ относится к внутренней оболочке, а $i = 2$ – к внешней.

В системе (1.1) w_i – прогиб, Φ_i – функция напряжений, R_i – радиус, h_i – толщина, E_i – модуль упругости, ν_i – коэффициент Пуассона, ε_i – коэффициент линейного затухания, ρ_i – плотность материала i-той оболочки, Z_i – нормально приложенная внешняя нагрузка, Δ – двумерный оператор Лапласа. В случае рассматриваемой задачи для Z_i имеем [6-8, 13]:

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[Z_0^{(i)} + \dfrac{\rho_0 g(b-\alpha)}{R_i} \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] & \text{при } 0 < \alpha < b, \\ 0 & \text{при } b < \alpha < l. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Здесь Z_0 – возмущённое давление жидкости, g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – плотность жидкости.

Из интеграла Коши – Лагранжа имеем следующие формулы определения возмущенного движения жидкости на стенках оболочек:

$$Z_0^{(i)} = -\rho_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{r=R_i}, \qquad (1.3)$$

где φ – потенциальная функция возмущённого движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \qquad (1.4)$$

в области, занятой жидкостью, следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i \quad (i = 1, 2), \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \qquad (1.6)$$

и согласно последнему предположению следующему условию на свободной поверхности жидкости [5-8, 13]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ при } \alpha = b. \qquad (1.7)$$

Таким образом, задача колебания рассматриваемой гидроупругой системы сводится к совместному решению двумерных дифференциальных уравнений (1.1) в области ($0 < \alpha < l$, $0 \le \theta \le 2\pi$) с трехмерным уравнением (1.4) в области ($0 < \alpha < b$, $R_1 < r < R_2$, $0 \le \theta \le 2\pi$) при граничных условиях (1.5)-(1.7). Граничными условиями задачи, кроме (1.5)-(1.7), будут также обычные условия закрепления краев оболочки $\alpha = 0$ и $\alpha = l$.

2. Сведение к задаче колебания, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для определения функции φ, как это следует из (1.6), необходимо определить радиальные скорости точек поверхностей оболочек. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о формах колебания оболочек.

Предположим, что оболочки шарнирно опёрты по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$w_i = \left(\sum_{s=0}^{N} W_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \right) \cos n\theta,$$
$$\Phi_i = \left(\sum_{s=0}^{N} \Phi_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \right) \cos n\theta, \tag{2.1}$$

где $\lambda_s = (m+s)\pi/l$, m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ – искомые функции.

Исходя из (2.1) гармоническую функцию φ представим в виде

$$\varphi = \left\{ \sum_{s=0}^{N} \left[A_s(t) I_n(\lambda_s r) + B_s(t) K_n(\lambda_s r) \right] \sin \lambda_s \alpha + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j(t) sh\alpha_{nj}\alpha + D_j(t) ch\alpha_{nj}\alpha \right] \Psi_n(\alpha_{nj} r) \right\} \cos n\theta, \tag{2.2}$$

где I_n, K_n – функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n\left(\alpha_{nj} r\right) = \frac{J_n(\alpha_{nj} r)}{J'_n(\alpha_{nj} R_1)} - \frac{Y_n(\alpha_{nj} r)}{Y'_n(\alpha_{nj} R_1)}, \tag{2.3}$$

J_n, Y_n – функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка n; A_s, B_s, C_j, D_j – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5)-(1.7); α_{nj} – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$J'_n(\alpha_{nj} R_2) Y'_n(\alpha_{nj} R_1) - J'_n(\alpha_{nj} R_1) Y'_n(\alpha_{nj} R_2) = 0\,. \tag{2.4}$$

В (2.3) и (2.4) и в дальнейшем

$$f'(\beta R) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=\beta R}.$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.5)-(1.7) и учитывая (2.4), путем ортогонализации получим следующие выражения для неизвестных A_s, B_s, C_j, D_j:

$$A_s(t) = \frac{K'_n(\lambda_s R_2) \dfrac{dW_s^{(1)}}{dt} - K'_n(\lambda_s R_1) \dfrac{dW_s^{(2)}}{dt}}{\lambda_s \left[I'_n(\lambda_s R_1) K'_n(\lambda_s R_2) - I'_n(\lambda_s R_2) K'_n(\lambda_s R_1) \right]},$$
$$B_s(t) = \frac{I'_n(\lambda_s R_1) \dfrac{dW_s^{(2)}}{dt} - I'_n(\lambda_s R_2) \dfrac{dW_s^{(1)}}{dt}}{\lambda_s \left[I'_n(\lambda_s R_1) K'_n(\lambda_s R_2) - I'_n(\lambda_s R_2) K'_n(\lambda_s R_1) \right]}, \tag{2.5}$$
$$\frac{dC_j(t)}{dt} = -\sum_{s=0}^{N} \frac{\lambda_s}{\Delta(s,j)} \left[R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} - R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} \right],$$

$$\frac{dD_j(t)}{dt}=\sum_{s=0}^{N}\frac{\lambda_s sh\alpha_{nj}b-\alpha_{nj}\sin\lambda_s b}{\Delta(s,j)ch\alpha_{nj}b}\left[R_2\Psi_n(\alpha_{nj}R_2)\frac{d^2W_s^{(2)}}{dt^2}-R_1\Psi_n(\alpha_{nj}R_1)\frac{d^2W_s^{(1)}}{dt^2}\right],$$

где

$$\Delta(s,j)=\alpha_{nj}(\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2)\left[\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2)-\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1)\right].$$

В силу (2.5) и представления (2.2) из (1.3) находим следующие выражения для возмущённого давления жидкости на стенках оболочек:

$$Z_0^{(i)}=-\rho_0\cos n\theta\begin{cases}\sum_{s=0}^{N}\left[L_1^{(i)}(\alpha,s)\frac{d^2W_s^{(1)}}{dt^2}+L_2^{(i)}(\alpha,s)\frac{d^2W_s^{(2)}}{dt^2}\right], & при\ \ 0<\alpha<b,\\ 0, & при\ \ b<\alpha<l.\end{cases}\tag{2.6}$$

Здесь

$$L_p^{(i)}(\alpha,s)=A_p^{(i)}(s)\sin\lambda_s\alpha+\sum_{j=1}^{\infty}\left[B_p^{(i)}(s,j)sh\alpha_{nj}\alpha+C_p^{(i)}(s,j)ch\alpha_{nj}\alpha\right],$$

$$A_p^{(i)}(s)=(-1)^{p+1}\frac{K_n'(\lambda_sR_{r^{(p)}})I_n(\lambda_sR_i)-I_n'(\lambda_sR_{r^{(p)}})K_n(\lambda_sR_i)}{\lambda_s\left[I_n'(\lambda_sR_1)K_n'(\lambda_sR_2)-I_n'(\lambda_sR_2)K_n'(\lambda_sR_1)\right]},$$

$$B_p^{(i)}(s)=(-1)^{p+1}\frac{\lambda_sR_p\Psi_n(\alpha_{nj}R_p)\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\Delta(s,j)},$$

$$C_p^{(i)}(s)=(-1)^{p}\frac{(\lambda_s sh\alpha_{nj}b-\alpha_{nj}\sin\lambda_s b)R_p\Psi_n(\alpha_{nj}R_p)\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\Delta(s,j)ch\alpha_{nj}b}$$

($p=1,2$; $r^p=1+\delta_{1p}$, δ_{ij} – символ Кронекера).

Подставляя (2.1) во второе уравнение (1.1), для искомых функций $\Phi_s^{(i)}(t)$ будем иметь

$$\Phi_s^{(i)}(t)=\frac{E_ih_i}{R_i}\frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2+n^2/R_i^2)^2}W_s^{(i)}(t).\tag{2.7}$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова – Галеркина, с учетом (1.2), (2.1), (2.6) и (2.7), из первого уравнения (1.1), для определения $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2W_k^{(1)}}{dt^2}+\varepsilon_1\frac{dW_k^{(1)}}{dt}+\Omega_1^2(k,n)W_k^{(1)}+$$
$$+\sum_{s=0}^{N}\left\{b_{ks}^{(1)}W_s^{(1)}+\frac{d^2}{dt^2}\left[m_1^{(1)}(k,s)W_s^{(1)}+m_2^{(1)}(k,s)W_s^{(2)}\right]\right\}=0,$$

$$\frac{d^2W_k^{(2)}}{dt^2}+\varepsilon_2\frac{dW_k^{(2)}}{dt}+\Omega_2^2(k,n)W_k^{(2)}+$$

$$+\sum_{s=0}^{N}\left\{b_{ks}^{(2)}W_s^{(2)}+\frac{d^2}{dt^2}\left[m_1^{(2)}(k,s)W_s^{(1)}+m_2^{(2)}(k,s)W_s^{(2)}\right]\right\}=0\ \left(k=0,1,2,3,\cdots\right). \qquad (2.8)$$

Здесь

$$\Omega^2(k,n)=\frac{D_i}{h_i\rho_i}\left[\left(\lambda_k^2+n^2/R_i^2\right)^2+\frac{12(1-\nu_i^2)}{R_i^2h_i^2}\frac{\lambda_k^4}{\left(\lambda_k^2+n^2/R_i^2\right)^2}\right],$$

$$m_p^{(i)}(k,s)=\left(-1\right)^i\frac{2\rho_0}{lh_i\rho_i}\left\{A_p^{(i)}(s)\left(\frac{\sin(\lambda_s-\lambda_k)b}{2(\lambda_s-\lambda_k)}-\frac{\sin(\lambda_s+\lambda_k)b}{2(\lambda_s+\lambda_k)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[B_p^{(i)}(s,j)\frac{\alpha_{nj}ch\alpha_{nj}b\sin\lambda_kb-\lambda_ksh\alpha_{nj}b\cos\lambda_kb}{\alpha_{nj}^2+\lambda_k^2}+\right. \qquad (2.9)$$

$$\left.\left.+C_p^{(i)}(s,j)\frac{\lambda_k+\alpha_{nj}sh\alpha_{nj}b\sin\lambda_kb-\lambda_kch\alpha_{nj}b\cos\lambda_kb}{\alpha_{nj}^2+\lambda_k^2}\right]\right\},$$

$$b_{ks}^{(i)}=\left(-1\right)^i\frac{n^2\rho_0}{\rho_i}\frac{g}{h_i}\frac{1}{R_il}\left[\frac{1-\cos(\lambda_s-\lambda_k)b}{(\lambda_s-\lambda_k)^2}-\frac{1-\cos(\lambda_s+\lambda_k)b}{(\lambda_s+\lambda_k)^2}\right],$$

где $\Omega_1(k,n)$ и $\Omega_2(k,n)$ – частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственно, $b_{ks}^{(i)}$ – коэффициенты гидростатического давления жидкости, $m_p^{(i)}(k,s)$ – коэффициенты присоединённых масс.

3. Определение частот свободных колебаний гидроупругой системы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации ($s=0$), когда внутренняя оболочка является абсолютно жесткой. Заметим, что λ_s при $s=0$ зависит от m и равняется $\pi m/l$. Поэтому основные неизвестные $W_s^{(i)}$, а также величины $b_{ks}^{(i)}$, $m_p^{(i)}(k,s)$ и $\Omega_i(k,n)$ при $s=0$ будут зависеть от m и n. Тогда из уравнений (2.8) имеем

$$\left[1+M(m,n)\right]\frac{d^2W_{mn}}{dt^2}+\varepsilon_2\frac{dW_{mn}}{dt}+\left[\Omega^2(m,n)+B_{mn}(m,n)\right]W_{mn}=0, \qquad (3.1)$$

где введены следующие обозначения:

$$B_{mn}=b_{00}^{(2)}(m,n)=\frac{n^2g\rho_0b^2}{2h_2\rho_2lR_2}\left[1-\left(\frac{\sin\mu_mb}{\mu_mb}\right)^2\right], \qquad (3.2)$$

$$\Omega^2(m,n)=\frac{c_{t2}^2}{R_2^2}\left\{\frac{1}{6(1-\nu_2)}\left[(\mu_m^2R_2^2+n^2)\frac{h_2}{R_2}\right]^2+2(1+\nu_2)\left(\frac{\mu_m^2R_2^2}{\mu_m^2R_2^2+n^2}\right)^2\right\}, \qquad (3.3)$$

$$M(m,n) = m_2^{(2)}(0,0) =$$

$$= -\frac{\rho_0 b}{h_2 \rho_2 l \mu_m}\left(1 - \frac{\sin(2\mu_m b)}{2\mu_m b}\right)\frac{K_n'(\mu_m R_1) I_n(\mu_m R_2) - I_n'(\mu_m R_1) K_n(\mu_m R_2)}{I_n'(\mu_m R_1) K_n'(\mu_m R_2) - I_n'(\mu_m R_2) K_n'(\mu_m R_1)} - \tag{3.4}$$

$$-\frac{4\rho_0 b}{h_2 \rho_2 l}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_m \alpha_{nj}\left[2(ch\alpha_{nj} b)^{-1} - \cos\mu_m b\right]\sin\mu_m b + (\alpha_{nj}^2 - \mu_m^2 \sin^2\mu_m b) th\alpha_{nj} b}{\alpha_{nj} R_2 (\alpha_{nj}^2 + \mu_m^2)^2\left\{\left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2}\right) - \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2}\right)\left[\frac{J_n'(\alpha_{nj} R_2)}{J_n'(\alpha_{nj} R_1)}\right]^2\right\}},$$

$$W_{mn} = W_0^{(2)}(m,n), \ \mu_m = \lambda_0 = \frac{\pi m}{l}, \ c_{t2}^2 = \frac{E_2}{2\rho_2(1+\nu_2)}. \tag{3.5}$$

Формула (3.4) получена с использованием формулы вида

$$J_n(x) Y_n'(x) - J_n'(x) Y_n(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Когда затухание достаточно мало $\varepsilon_2 << \Omega_{mn}$, из уравнения (3.1) для частот колебаний гидроупругой системы получим

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\Omega^2(m,n) + B_{mn}}{1 + M(m,n)}. \tag{3.5}$$

На основе этой формулы с учетом (3.2)-(3.5) произведено вычисление значений частот колебаний гидроупругой системы в случае “дюралюминиевая оболочка – вода”.

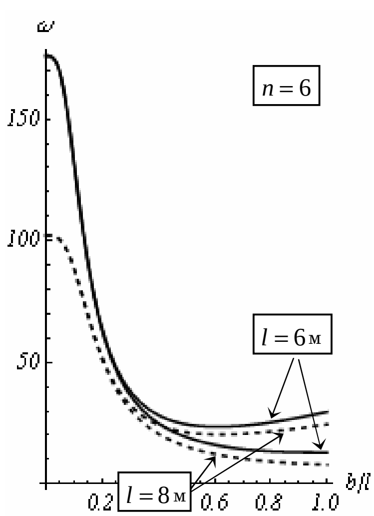

Рис. 1.

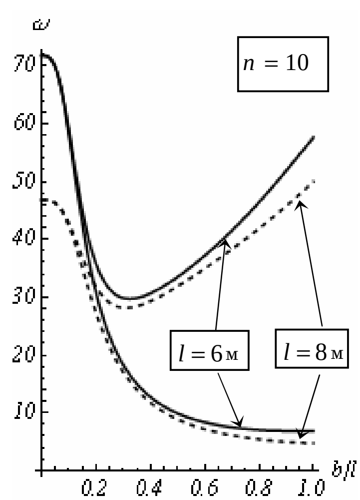

Рис. 2.

Тогда $c_t = 5100$ м/с, $\rho/\rho_0 = 2.7$, $\nu = 0.3$. Для выявления гидростатического давления жидкости (влияния члена B_{mn} в (3.5)) на частоту колебаний приведены численные расчеты при $m = 1$, $R_1 = 2$ м, $R_2 = 3$ м, $h_2 = 10^{-3}$ м и различных n и l. Результаты расчета представлены на рис. 1 и 2. Нижние кривые (при каждом l) построены при $B_{mn} = 0$ в (3.5). Приведенные рисунки показывают, что при $n > 5$ и l / R_2 заметно больше единицы учет гидростатического давления приводит как к количественному (частота колебаний существенно увеличивается), так и качественному изменению (существует точка минимума) частот гидроупругих колебаний. Если же нарушаются указанные условия, то влияние гидростатического давления не является существенным. В зависимости от m на графике функции $\omega(b/l)$ могут появляться осциляции с мелкими амплитудами, что показано на рис. 3, который построен при $n = 1$, $l = 6$ м, $R_2 = 3$ м, $R_1 = 2$ м, $h_2 = 10^{-2}$ м и различных m.

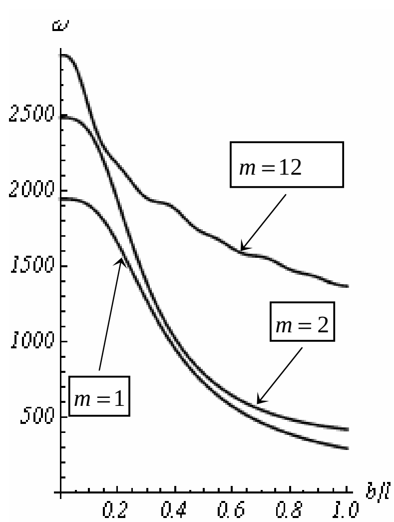

Рис. 3.

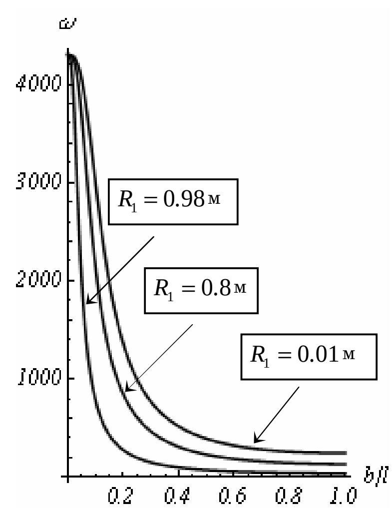

Рис. 4.

Для исследования влияния толщины жидкого слоя на частоты колебания приведены численные расчеты при $n = 1$, $m = 1$, $l = 3$ м, $h_2 = 10^{-3}$ м, $R_2 = 1$ м и различных R_1. Результаты расчета представлены на рис. 4, который показывает, что зависимость ω от толщины жидкого слоя является монотонно возрастающей функцией.

На рис. 5 приведена зависимость ω от n при $m = 1$, $l = 4$ м, $R_1 = 1$ м, $R_2 = 2$ м, $h_2 = 10^{-3}$ м и различных b/l. Рисунок показывает, что частота колебаний имеет минимум от n, аналогично случаю отсутствия жидкости. С увеличением b/l как число волн по окружности, при котором ω имеет

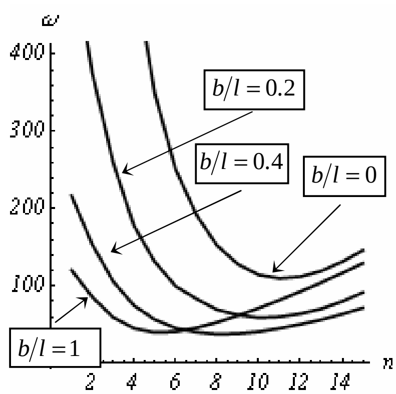

Рис. 5.

минимальное значение, так и минимальные значения ω уменьшаются.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C243.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Е. Багдасарян, С. Л. Саакян

Вопросы колебания коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью

В линейной постановке рассмотрены вопросы колебаний изотропной коаксиальной круговой цилиндрической оболочки конечной длины при абсолютно жестком включении, когда область между оболочкой и включением (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Исследовано влияние глубины заполнения и толщины зазора на частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы, исследовано также влияние гидростатического давления и формы колебания оболочки на процесс колебаний.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Ս. Լ. Սահակյան

Համառանցք գլանային թաղանթների տատանման հարցեր, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով

Գծային դրվածքով դիտարկված են վերջավոր երկարությամբ իզոտրոպ գլանային թաղանթի տատանման հարցերը բացարձակ կոշտ համառանցք ներդրակի դեպքում, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է անսեղմելի իդեալական հեղուկով: Ուսումնասիրված են լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառաձգական համակարգի տատանումների հաճախականությունների վրա: Ուսումնասիրված են լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառաձգական համակարգի տատանումների հաճախականությունների վրա: Հետազոտված են նաև հիդրոստատիկ ճընշման և թաղանթի տատանումների ձևի ազդեցությունները տատանողական պրոցեսում:

Academician G. Ye. Baghdasaryan, S. L. Sahakyan

Problems of Vibration of Coaxial Cylindrical Shells with a Gap Partially Filled with Fluid

The problem of vibrations of isotropic coaxial circular cylindrical shells of finite length with an absolutely rigid inclusion in linear statement, when the region between the shells (the gap) is partially filled with an incompressible fluid, is considered. The dependence of the vibration frequency on the depth of the filling and the thickness of the gap of the considered hydro-elastic system is investigated. The effects of hydrostatic pressure and the form of vibration of shell on the process of vibration are also studied.

Литература

1. *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев. Наукова думка, 1975. 192 с.
2. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. Л. Судостроение. 1970. 356 с.
3. *Гузь А. Н., Кубенко Б. Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек. Т. 5. Киев. Наукова думка. 1982. 400 с.
4. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М. Наука. 1979. 320 с.
5. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* - Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 4.
6. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.*- ДАН АрмССР. 1965. Т. 41. № 4. С. 199-203.
7. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 1. С. 25–32.
8. *Багдасарян Г. Е.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. № 4. С. 40–47.
9. *Краснопольская Т. С., Подчасов Н. П.*- Прикладная механика. 1992. Т. 28. № 4. С. 42-48.
10. *Myung Jo Jhung, Yong Beum Kim, Kyeong Hoon Jeong, Suhn Choi* - J. of the Korean Nuclear Society. 2000.V. 32. N 4. P.328-341.
11. *Багдасарян Г. Е., Марухян С. А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 2011. Т. 64. № 3. С. 10–21.
12. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и её приложение в технике. М. Гостехиздат. 1949.
13. *Mixon John S., Herr Robert W.* An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA. Nr. R – 145. 1962.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

ТЕОРИЯ МАГНИТОУПРУГОСТИ

УДК 531.8

Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян

Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин в продольном магнитном поле

(Представлено 29/V 2015)

Ключевые слова: *магнитное поле, магнитострикция, пластинка, устойчивость.*

1. Постановка задачи устойчивсти. Пусть упругая диэлектрическая магнитострикционная пластинка находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствии ферромагнитного тела характеризуется вектором напряженности $\boldsymbol{H}_0$ и вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0$ ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \dfrac{H}{A^2}$ – магнитная постоянная). Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

В работах [1, 2] с использованием основных положений нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [3–5] и теории малых возмущений путем линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

для внутренней области

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ik} + s_{im}^{non}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right) + \mu_0 M_i^{non}\frac{\partial h_k}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_i^{non}}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$rot\boldsymbol{h} = 0,\ div\boldsymbol{b} = 0,\ \boldsymbol{b} = \mu_0\left(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{m}\right),$$

$$s_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mu_0 e_{ijk} m_k,$$

$$h_i = g_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k, \tag{1}$$

где s_{ik} – возмущенния компонент тензора магнитоуругих напряжений; s_{ik}^{non} – компоненты тензора напряжений невозмущенного состояния; u_k – компоненты возмущения вектора упругих перемещений; h_k, m_k и b_k –

компоненты векторов $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{b}$, представляющие возмущения соответственно напряженности $\boldsymbol{H}^{non}$, намагниченности $\boldsymbol{M}^{non}$ и магнитной индукции $\boldsymbol{B}^{non}$ невозмущенного магнитного поля; x_i – декартовые координаты;

для внешней области

$$rot\boldsymbol{h}^{(e)} = 0, div\boldsymbol{b}^{(e)} = 0, \boldsymbol{b}^{(e)} = \mu_0 \boldsymbol{h}^{(e)}, \tag{2}$$

индекс «е» здесь и в дальнейшем означает принадлежность к внешней среде;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела

$$\left[s_{ik} + s_{km}^{non} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(e)} - t_{ki} \right] n_k^0 + \left[T_{km}^{non(e)} - T_{km}^{non} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0,$$

$$\left[b_k - b_k^e \right] n_k^0 = \left[B_m^{non} - B_m^{non(e)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0,$$

$$\varepsilon_{ijk} \left\{ \left[h_n - h_n^{(e)} \right] n_k^0 - \left[H_n^{non} - H_n^{non(e)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \right\} = 0, \tag{3}$$

где T_{km}^{non} и $T_{km}^{non(e)}$ – тензоры напряжений Максвелла невозмущенного состояния соответственно для тела и окружающей среды, n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали $\boldsymbol{n}_0$ к поверхности S_0, ε_{ijk} – символ Леви-Чивита,

$$t_{ki} = b_i H_k^{non} + h_k B_i^{non} - \mu_0 \delta_{ki} \boldsymbol{H}^{non} \boldsymbol{h},$$

$$t_{ki}^{(e)} = \mu_0 \left[h_k^{(e)} H_i^{non(e)} - h_k^{(e)} H_i^{non(e)} - \delta_{ki} \boldsymbol{H}^{non(e)} \boldsymbol{h}^{(e)} \right]. \tag{4}$$

В уравнениях (1) использованы следующие обозначения:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r^{non} M_j^{non} \left(\delta_{ik}\delta_{pl}\delta_{rq} + \delta_{kl}\delta_{iq}\delta_{ir} + \delta_{lp}\delta_{ip}\delta_{kr} \right) +$$
$$+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} \left(\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kl} + \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{pl} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{pl} \right) M_r^{non} M_s^{non} +$$
$$+ \mu_0 B_{pqrs} \left(\delta_{pk}\delta_{ql}\delta_{is} M_j^{non} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{is} M_k^{non} \right) M_r^{non},$$

$$e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^{non} + A_{mi} \left(\delta_{kj} M_m^{non} + \delta_{mk} M_j^{non} \right),$$

$$g_{ijk} = B_{jkpi} M_p^{non} + A_{rs} \left(\delta_{is}\delta_{jk} M_r^{non} + \delta_{rk}\delta_{is} M_j^{non} + \delta_{ij}\delta_{sk} M_r^{non} \right), \tag{5}$$

где c_{ijkl}, A_{kl}^{-1} и B_{jkpi} – соответственно тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов.

Для магнитоупругих сред, которые в размагниченном состоянии изотропны по отношению как магнитных, так и упругих свойств, справедливы равенства

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right), \; A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl},$$

$$B_{ijkl} = e_2 \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right), \tag{6}$$

где λ и μ – постоянные Ляме, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, e_1, e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

К уравнениям (2) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

В коэффициенты линеаризованных уравнений и соотношений (1)–(5) входят неизвестные компоненты s_{ij}^{non} тензора напряжений невозмущенного состояния. Они являются решениями следующей статической задачи теории упругости:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial s_{ik}^{non}}{\partial x_k} + \mu_0 M_n^{non} \frac{H_k^{non}}{\partial x_n} = 0, \tag{7}$$

$$s_{ij}^{non} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{non} + \mu_0 A_{ik} M_k^{non} + \frac{1}{2}\mu_0 B_{ijkl} M_k^{non} M_l^{non}; \tag{8}$$

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела

$$\begin{gathered} s_{ik}^{non} N_k^0 = \left[T_{ki}^{non(e)} - T_{ki}^{non} \right] n_k^0 \\ T_{ki}^{non} = N_i^{non} B_k^{non} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik} \left[H^{non} \right]^2, \\ T_{ki}^{non(e)} = \mu_0 H_i^{non(e)} H_k^{non(e)} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik} \left[H^{non(e)} \right]^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Согласно принятому предположению входящие в (7)-(9) характеристики невозмущенного магнитного поля определяются из следующей задачи магнитостатики для недеформируемого тела:

уравнение магнитостатики для внутренней области

$$\begin{gathered} rot\boldsymbol{H}^{non} = 0,\ div\boldsymbol{B}^{non} = 0, \\ \boldsymbol{B}^{non} = \mu_0\left(\boldsymbol{H}^{non} + \boldsymbol{M}^{non}\right),\ H_k^{non} = A_{kl} M_l^{non}, \end{gathered} \tag{10}$$

уравнение для внешней области

$$\begin{gathered} rot\boldsymbol{H}^{non(e)} = 0,\ div\boldsymbol{H}^{non} = 0, \\ \boldsymbol{M}^{non(e)} = 0,\ \boldsymbol{B}^{non(e)} = \mu_0 \boldsymbol{H}^{non(e)}; \end{gathered} \tag{11}$$

условия сопряжения на поверхности S_0

$$\left(\boldsymbol{B}^{non} - \boldsymbol{B}^{non(e)}\right) n_0 = 0,\ \left(\boldsymbol{H}^{non} - \boldsymbol{H}^{non(e)}\right) \times n_0 = 0, \tag{12}$$

условия на бесконечности

$$\boldsymbol{H}^{non(e)} \to \boldsymbol{H}^{(e)} \text{ при } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty. \tag{13}$$

Учитывая, что для основных магнитострикционных материалов $\chi \sim 30$, $e_1 \sim 40$ и $B_s \sim 0.3$ Тл, (B_s – индукция насыщения) [6] принимаем, что при $B_0 < B_s$ имеет место следующее ограничение:

$$\left(\chi e_1^2 B_0^2 / \mu_0 \mu\right) \ll 1. \tag{14}$$

С учетом (14) из (5), когда вектор $\boldsymbol{M}^{non}$ параллелен одному из осей координатной системы, для тензоров обобщенных упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов получаются следующие упрощенные представления:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl},\ g_{ijkl} = B_{jkpi} M_p^{non},\ e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^{non}, \qquad (15)$$

где C_{ijkl} и B_{ijkl} определяются согласно формулам (6).

2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки. Пусть упругая изотропная прямоугольная магнитострикционная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) расположена так, что ее срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью x_1, x_2. В дальнейшем для простоты и наглядности ограничимся рассмотрением случая, когда пластинка находится в продольном магнитном поле $\boldsymbol{B}(B_0, 0, 0)$, а ее торцы неподвижны в своей плоскости.

Для применения процедуры получения двумерных уравнений магнитоупругой устойчивости тонких пластин необходимо знать характеристики (напряженность, магнитная индукция и намагниченность) магнитных полей невозмущенного и возмущенного состояний. Их определяем, решая трехмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач в случае пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Численные решения этих задач для пластинки-полосы приведены в работе [7]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитных полей (невозмущенного и возмущенного) для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристик невозмущенного магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда приближенное решение задачи (10)-(13) представляется в виде

$$B_i^{non(e)} = 0,\ B_i^{non} = 0,\ H_i^{non} = 0, M_i^{non},\ i = (2,3),$$

$$B_1^{non(e)} = B_0,\ B_1^{non} = \mu_r B_0,\ H_1^{non} = \frac{B_0}{\mu_0},\ M_1^{non} = \chi H_1^{non}. \qquad (16)$$

Из уравнения равновесия (7), поверхностных условий (9) при $x_3 = \pm h$ и условий неподвижности торцов пластинки с использованием (16) определяем компоненту $s_{33}^{non} = \mathrm{const}$ тензора напряженности в пластинке. Эту же компоненту определяем используя обобщенный закон Гука (8). Приравниванием найденных выражений для s_{33}^{non} определяется компонента ε_{33} тензора деформации, значение которой далее используется при определении компонент s_{11}^{non} и s_{22}^{non} тензора напряженности. На этой основе, используя (16) и условия неподвижности краев пластинки в своей плоскости, из (7)-(9) для ненулевых компонент тензора напряжений невозмущенного состояния получаются следующие выражения:

$$s_{11}^{non}=\frac{\chi^2B_0^2}{2\mu_0}\left(e_1-\frac{\nu}{1-\nu}e_2\right),\ s_{22}^{non}=\frac{\chi^2B_0^2}{2\mu_0}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)e_2,\ s_{33}^{non}=0\,. \tag{17}$$

Для приведения трехмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (1) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1},\ u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2},\ u_3=w(x_1,x_2,t)\,, \tag{18}$$

где $u=(x_1,x_2,t)$, $v=(x_1,x_2,t)$, $w=(x_1,x_2,t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности пластинки.

Подставляя соотношения (16)-(18) в систему (1) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом поверхностных условий (3) приходим к следующим двумерным уравнениям магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки относительно u,v,w:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\chi\alpha_1B_0\int_{-h}^{h}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}dx_3=\frac{1-\nu^2}{E}\rho_0\frac{\partial^2u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\chi\alpha_2B_0\int_{-h}^{h}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}dx_3=\frac{1-\nu^2}{E}\rho_0\frac{\partial^2v}{\partial t^2},$$

$$D\Delta^2w+2\rho_0h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-P_{11}\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}-P_{22}\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}-\chi B_0\alpha_1\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial^2h_1}{\partial x_1^2}dx_3-$$

$$-\chi B_0\alpha_2\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial^2h_1}{\partial x_2^2}dx_3-\chi B_0\left(h_1^+-h_1^-\right)=0\,. \tag{19}$$

Здесь

$$D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)},\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \alpha_1=1+\chi\left(e_1-\frac{\nu}{1-\nu}e_2\right),$$

$$\alpha_2=1+\chi e_2\frac{1-2\nu}{1-\nu},\ P_{11}=\frac{\chi B_0^2h}{\mu_0}\left(-2+\chi\left(e_1-\frac{\nu}{1-\nu}e_2\right)\right),$$

$$P_{22}=\frac{\chi B_0^2}{\mu_0}h(\alpha_2-1),\ h_1^{\pm}=h_1(x_1,x_2,\pm h,t)\,.$$

При получении уравнений (19) учтено принятое ограничение (14).

3. Приведение трехмерной задачи магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки к двумерной. Для замыкания системы (19) следует определить компоненты h_i возмущенного магнитного поля в пластинке. Введем потенциальные функции φ и $\varphi^{(e)}$

$$\boldsymbol{h}=grad\,\varphi,\boldsymbol{h}^{(e)}=grad\,\varphi^{(e)}\,.$$

Тогда определение векторов $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{h}^{(e)}$ согласно (1)-(3) сводится к решению следующей трехмерной задачи относительно $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$:

$$\Delta_3\varphi=\frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r}\left[(\alpha_1-1)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}-x_3\frac{\partial^3w}{\partial x_1^3}\right)+(\alpha_2-1)\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_1\partial x_2}-x_3\frac{\partial^3w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)+\right.$$

$$+\alpha_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-2x_3\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)\Bigg],\ \alpha_3=\frac{\chi\left(e_1-e_2\right)}{2},$$ (во внутренней области);

$$\Delta_3\varphi^{(e)}\varphi=0,\qquad \text{(во внешней области)}\tag{20}$$

при условиях

$$\varphi=\varphi^{(e)},\ \frac{1}{\mu_r}\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x_3}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}-\frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r}\frac{\partial w}{\partial x_1}\tag{21}$$

на поверхностях $x_3=\pm h$ и условиях затухания возмущений на бесконечности. В соотношении (20) Δ_3 – трехмерный оператор Лапласа. Таким образом, рассматриваемая задача устойчивости, несмотря на двумерность нений относительно u,v,w, осталась трехмерной.

Решение сформулированной выше трехмерной задачи для конечной пластинки строится следующим образом [1]. Сначала решается задача для бесконечной пластинки, представляя искомые функции в виде

$$\left(u,v,w\right)=\left(u_0,v_0,w_0\right)\exp\left[i\left(\omega t-k_1x_1-k_2x_2\right)\right],$$

$$\left(\varphi,\varphi^{(e)}\right)=\left(\varphi_0\left(x_3\right),\varphi^{(e)}\left(x_3\right)\right)\exp\left[i\left(\omega t-k_1x_1-k_2x_2\right)\right],\tag{22}$$

а затем неизвестные волновые числа k_1 и k_2 определяются с использованием асимптотического метода интегрирования [1] и условий закрепления краев пластинки.

Подставляя (22) в (20)-(21), для потенциала φ индуцированного в пластинке магнитного поля получаем следующее выражение (с точностью $kh\ll 1$):

$$\varphi=\frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r k^2}\left(\frac{chkx_3}{1+\mu_r kh}-1\right)\Bigg\{\left(\alpha_1-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\left(\alpha_2-1\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+\alpha_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\Bigg\}+\frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r k}shkx_3\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad\left(k^2=k_1^2+k_2^2\right).\tag{23}$$

Используя найденные выражения для компонент h_i, получим систему уравнений устойчивости пластинки относительно u,v,w. При этом уравнения продольных (относительно u,v) и поперечных (относительно w) колебаний разделяются. В дальнейшем будем рассматривать прямоугольные пластинки, полагая $kh\ll 1$. В силу этого предположения уравнения устойчивости упрощаются и уравнение (19) относительно w принимает вид

$$D\Delta^2 w-T_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-T_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\tag{24}$$

где

$$T_{11}=-\frac{2\chi B_0^2}{\mu_0\mu_r}h+\frac{\chi B_0^2}{\mu_0}\left(\alpha_1-1\right)h,\quad T_{22}=\frac{\chi B_0^2}{\mu_0}h\left(\alpha_2-1\right).\tag{25}$$

Из (25) видно, что вследствие условия $kh\ll 1$ уравнение рассматриваемой задачи не содержит волновые числа k_1 и k_2. В общем случае они определяются методом асимптотического интегрирования, как в [1], и получаются трасцендентные уравнения относительно k_1 и k_2. В частности для шарнирно опертых краев

$$k_1 = \frac{m\pi}{\alpha_1}\ ,\ k_2 = \frac{m\pi}{\alpha_2}\ . \qquad (26)$$

При решении конкретных задач к уравнению (24) следует присоединить обычные условия закрепления краев пластинки. Таким образом, трехмерная задача магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки сведена к двумерной.

4. Возможность потери устойчивости под действием магнитного поля. Рассмотрим устойчивость шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки под действием внешнего заданного магнитного поля. Решение уравнения (24), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, согласно (26) представим в виде

$$w = w_0 e^{i\omega t} \sin\lambda_m x_1 \sin\mu_n x_2\ ,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha_1},\ \mu_n = \frac{n\pi}{\alpha_2}\ . \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (24), получим следующие формулы для определения частот ω_{mn} магнитоупругих колебаний:

$$\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega_{mn}^0}\right)^2 = 1 - \frac{\chi B_0^2}{2\mu_0}\frac{\left(1-\nu^2\right)}{Eh^2 k_{mn}^4}\left[\left(1-\alpha_1+\frac{2}{\mu_r}\right)\lambda_m^2 + \left(1-\alpha_2\right)\mu_n^2\right], \qquad (28)$$

где ω_{mn}^0 – частоты собственных колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля

$$\left(\omega_{mn}^0\right)^2 = \frac{Dk_{mn}^4}{2\rho h},\ k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2\ . \qquad (29)$$

Из соотношения (28) видно, что потеря статической устойчивости пластинки невозможна, если выражение в квадратной скобке отрицательное. Следовательно, в этом случае невозмущенное состояние пластинки устойчиво и присутствие магнитного поля увеличивает частоты магнитоупругих колебаний. Если же выражение в квадратной скобке положительное, то существуют такие значения $B_0(m,n)$ магнитной индукции заданного магнитного поля, при которых $\omega_{mn} = 0$ (условия потери статической устойчивости). На этом основании для определения критического значения B_{kp} магнитной индукции, при котором пластинка теряет устойчивость, получим формулу

$$\frac{B_{kp}^2}{\mu_0 E} = \min_{m,n} \frac{2h^2 k_{mn}^4}{3\chi\left(1-\nu^2\right)}\left[\left(1-\alpha_1+\frac{2}{\mu_r}\right)\lambda_m^2 + \left(1-\alpha_2\right)\mu_n^2\right]^{-1}. \qquad (30)$$

Из (30) в случае пластинки-полосы $\left(\mu_n = 0\right)$ для определения критического значения B_{kp} магнитной индукции, при котором пластинка-полоса, для которой магнитострикционная константа теряет устойчивость, получается следующая формула:

$$\frac{B_{kp}^2}{\mu_0 E} = \frac{2h^2\lambda_1^2}{3\chi\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{2}{\mu_r} - \chi\left(e_1 - \frac{\nu}{1-\nu}e_2\right)\right)}. \tag{31}$$

С использованием формулы (31) произведены вычисления величины B_{kp} в случае пластинки-полосы из материала железо-никелевый феррит (50/50 Fe-Ni), для которого $\mu_r = 35$, $e_1 = -23.5$, $e_2 = 11.75$, $E = 2\cdot 10^{11}$ н/м^2, $\nu = 0.28$. Для расчета принято $\lambda_1 h = 0.11\cdot 10^{-2}$. В результате получим $B_{kp} = 0.77\cdot 10^{-2} B_{kp}^0$, где $B_{kp}^0 = 0.34$ тл – критическое значение магнитной индукции при условии пренебрежения магнитострикционным эффектом.

С использованием формулы (28) произведены вычисления величины $\frac{\omega_{mn}}{\omega_{mn}^0}$ в случае пластинки-полосы из материала никель НП2Т, для которого $\mu_r = 35$, $e_1 = 42$, $e_1 = -21$, $E = 2.1\cdot 10^{11}$ н/м^2, $B_0 = 0.2$ тл, $\lambda_1 h = 0.02$, $\nu = 0.25$. В результате получим $\omega_{mn} = 5.58\omega_{mn}^0$. В данном случае невозмущенное состояние пластинки устойчиво и присутствие магнитного поля существенно увеличивает частоты магнитоупругих колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта №SCS 13-2C243.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян

Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин в продольном магнитном поле

На основе линеаризованных уравнений и соотношений магнитоупругости диэлектрических магнитострикционных тел исследовано поведение малых возмущений в прямоугольных пластинках при наличии постоянного продольного магнитного поля. С использованием гипотезы Кирхгоффа и асимптотического метода интегрирования трехмерная задача магнитоупругой устойчивости сведена к двумерной. На этом основании сформулирована и решена соответствующая задача устойчивости и показано, что существует область изменения геометрических параметров пластинки и значений магнитострикционных характеристик ее материала, при которой невозмущенное состояние пластинки устойчиво при любом значении индукции внешнего магнитного поля и присутствие указанного поля может привести к существенному увеличению частоты магнитоупругих колебаний. Установлено также, что вне этой области магнитострикционный эффект может иметь дестабилизирующее влияние.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան

Մագնիսաստրիկցիոն ուղղանկյուն սալերի կայունությունը երկայնական մագնիսական դաշտում

Դիէլեկտրիկ մագնիսաստրիկցիոն մարմինների մագնիսառաձգականության գծայնացված հավասարումների և առնչությունների հիման վրա հետազոտվել է ուղղանկյուն սալերում փոքր գրգռումների վարքը հաստատուն երկայնական մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Կիրխհոֆի հիպոթեզի և ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի օգտագործման միջոցով մագնիսառաձգական կայունության եռաչափ խնդիրը հանգեցվել է երկչափի: Դրա հիման վրա ձևակերպվել և լուծվել է համապատասխան կայունության խնդիր և ցույց է տրվել, որ գոյություն ունի սալի երկրաչափական պարամետրերի և նրա նյութի մագնիսաստրիկցիոն բնութագրիչների արժեքների փոփոխման տիրույթ, որի դեպքում սալի չգրգռված վիճակը կայուն է արտաքին մագնիսական դաշտի ինդուկցիայի ցանկացած արժեքի դեպքում, և նշված դաշտի առկայությունը կարող է հանգեցնել մագնիսառաձգական տատանումների հաճախության զգալի մեծացմանը: Ցույց է տրված, որ այդ տիրույթից դուրս մագնիսաստրիկցիոն էֆեկտը կարող է ունենալ ապակայունացնող ազդեցություն:

Academician G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan

Stability of Magnetostrictive Rectangular Plates in Longitudinal Magnetic Field

On the basis of linearized equations and relations of magnetoelasticity of dielectric magnetostrictive bodies the behavior of small perturbations in rectangular plates in presence of longitudinal magnetic field is investigated. The three-dimensional problem of magnetoelastic stability is reduced to the two-dimensional using the Kirchhoff hypotheses and asymptotical integration method. On this basis the corresponding problem of stability is addressed and solved. It is also shown, that the certain area of the change of geometrical parameters of the plate and values of magnetostrictive characteristics of plate material exists, at which the unperturbed state of the plate is stable for any values of external magnetic field induction, and the presence of the noted magnetic field yields to the essential increase of the frequency of magnetoelastic vibrations. It is also established, that out of the noted area the magnetostrictive effect can have a destabilizing effect.

Литература

1. *Багдасарян Г. Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд. ЕГУ. 1999. 440 с.
2. *Багдасарян Г. Е.* - Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. N 3. С. 70 -75.
3. *Pao Y.-H., Yen C.-S.* Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. № 4. P. 415-436.
4. *Maugin G. A.* Continuum mechanics of electromagnetic solids. North – Holand-Amsterdam-New-York-Oxford-Tokyo. 1988. 560 p.
5. *Brown W. F.* Magnetoelastic Interactions. N. Y. Spinger-Veriag. 1966. 155 p.
6. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Даноян Э. А.* - ДНАН Армении. 2010. Т. 110. № 4. С. 367-375.
7. *Bagdasarian G. E., Philiposian G. T.* In: Proc. North American Conf. on Smart Structures and Materials(SPIE). USA. 1997. V. 3039. P. 715-725.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

PHYSICS

УДК 539.12

L. B. Hovakimian, corresponding member of NAS RA
H. H. Matevosyan, H. B. Nersisyan, K. A. Sargsyan

On the Friedel Phase Shift Sum Rule for a Charged Dislocation

(Submitted 20/V 2015)

Keywords: *charged dislocation, degenerate semiconductor, Friedel sum rule, Born approximation*

Friedel's phase shift sum rule [1],

$$Z = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\delta_l(k_F), \tag{1}$$

is widespreadly used in self-consistent studies of electron-screened impurity ions in quantum electron gases (see, e. g., [2-4] and references therein). In (1), Ze is the surplus charge of the static point-like ion immersed into a three-dimensional gas of screening electrons with the Fermi wave number k_F, and $\delta_l(k_F)$ denotes the phase shift suffered by the electronic partial wave with orbital momentum l. The rule rests on the fact that as a consequence of the electron time delay in elastic scattering off the spherically symmetric potential of the ion there is induced electron density or positive hole around the defect depending on the sign of its charge.

It has been concluded by Seeger and Stehle that for a cylindrically symmetric scattering potential associated with a charged core of a straight dislocation line in a metal the analog of the Friedel sum rule (1) looks as follows [5,6]:

$$\frac{Q}{e} = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} dk_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(k_\perp), \tag{2}$$

$$k_\perp = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}\,.$$

Here and elsewhere, the z-axis of the cylindrical coordinate frame (ρ,φ,z) runs along the dislocation line, Q is the charge accumulated by unit length of the electrically active dislocation core, the components of the electron wave vector perpendicular and parallel to the dislocation line are denoted by $k_\perp$ and k_z, respectively, and $\eta_n(k_\perp)$ is the phase shift of the *n-th* cylindrical partial wave ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$).

In the present contribution, our main objective is to examine the structure of the sum rule (2) within the framework of the first-order Born (B1) approximation. We also demonstrate how the obtained B1 rule can be utilized in a self-consistent study of the screening length operating around an acceptor-type dislocation [7-9] in a degenerately doped *n*-type semiconductor.

Let us begin our analysis by noting that due to axial symmetry of the dislocation scattering potential, $U = U(\rho)$, the wave function of the conduction band electron, $\Psi = \Psi(\rho,\varphi,z)$, can be presented in factorized form [10]

$$\Psi(\rho,\varphi,z) = \psi(z)\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(\rho)e^{in\varphi} ,$$

in which $\psi(z) = e^{ik_z z}$ describes a free motion along the dislocation line and $R_n(\rho)$ satisfies the radial Schroedinger equation

$$\frac{d^2}{d\rho^2}R_n(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}R_n(\rho) + \left(k_\perp^2 - \frac{n^2}{\rho^2} - U(\rho)\right)R_n(\rho) = 0 .$$

In the far-field region, $\rho \to \infty$, the radial function $R_n(\rho)$ is described by asymptotic expression [10]

$$R_n(\rho) \approx \mathrm{const}\frac{1}{\sqrt{k_\perp \rho}}\cos\left[k_\perp\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \eta_n(k_\perp)\right],$$

where the scattering phase shifts have to fulfill the sum rule (2).

So long as $U(\rho)$ can be treated as a weak perturbation [9] for the electronic motion, one can expand the η_n into multiple-scattering Born [4, 10] series,

$$\eta_n = \sum_{N=1}^{\infty}\eta_n^{BN} = \eta_n^{B1} + \eta_n^{B2} + ...$$

where the phase shift in the B1 approximation is given by [10]

$$\eta_n^{B1}(k_\perp) = -\frac{\pi m}{\hbar^2}\int_0^\infty d\rho\rho U(\rho)[J_n(k_\perp\rho)]^2 , \tag{3}$$

m denotes the effective mass of the scattered electron, and $J_n(x)$ is the Bessel function. By substituting Eq. (3) into Eq. (2), one can see that at the level of the B1 description the sum rule for the scattering phase shifts obtains the following preliminary form:

$$\frac{Q}{e} = \frac{2}{\pi}\frac{m}{\hbar^2}\int_0^{k_F} dk_z \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty d\rho\rho U(\rho)\left[J_n(k_\perp\rho)\right]^2 . \tag{4}$$

From now on, our attention will be focused exclusively on the case of a negatively charged (acceptor type) edge dislocation causing an upward band bending in a degenerately doped *n*-type material with free electron concentration $n = k_F^3 / 3\pi^2$. In such a case the linear charge Q can be presented as [7-9]

$$Q = \frac{f}{c} e \,, \tag{5}$$

where c is the atomic-scale distance between the acceptor centres along the dislocation line, f is the statistical filling factor of these centres. Using Eq. (5) and the summation formula [11]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \,,$$

we may now reorganize the sum rule (4) into a compact adimentional form,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{\hbar^2} I \,, \tag{6}$$

in which the radial (Jost-Pais) integral

$$I = \int_0^{\infty} d\rho \rho U(\rho) \tag{7}$$

is supposed to be convergent [12], and the value of the characteristic filling factor is controlled by the Fermi gas concentration, $f_0 = ck_F \sim cn^{1/3}$.

For purposes of qualitative discussion, the formula (6) can be rewritten as an order-of-magnitude relation

$$\frac{f}{f_0} \sim \frac{ma^2}{\hbar^2} U_0 \,,$$

where *a* is the influence range (screening length) of the dislocation scattering field characterized by its Coulomb energy scale, U_0. This relation shows in it's own physically transparent way that in weakly interacting electron-dislocation systems [9] the screening length *a* is obliged to display a linear dependence on the Planck's constant, $a = a(\hbar) \propto \hbar$.

Our next objective is to show in more detail how the sum rule (6) can be utilized for describing the fundamentals of self-consistent dislocation line screening from the standpoint of the Friedel-adjustment procedure. For this purpose we perform a one-parameter model potential [2-4] calculation where the perturbing potential $U(\rho)$ is constructed according to the following scenario:

$$U(\rho) = U_0 S(\rho / a) \,, \tag{8}$$

$$U_0 = \frac{2eQ}{\varepsilon} = \frac{2fe^2}{\varepsilon c} \,. \tag{9}$$

In this model, the energy scale U_0 has the familiar structure [7-9], ε is the dielectric constant of the host medium, and the *S*-function is some screening function [2-4] decaying sufficiently fast in the far-field region $1 \ll \rho / a \to \infty$. The screening length *a* residing in (8) acts as an open parameter [2-4].

By substituting the interaction (8) into (7) and introducing a new integration variable via $\rho = ua$, one arrives at the following radial integral,

$$I = 2\frac{fe^2}{\varepsilon c}a^2\int_0^\infty duuS(u) .$$

By placing this I into the sum rule (6), one concludes that the self-consistently determined a obeys the relation

$$\frac{1}{f_0} = \frac{4}{\pi}\frac{a^2}{ca_B}\int_0^\infty duuS(u) , \qquad (10)$$

in which the length scale $a_B = \varepsilon\hbar^2 / me^2$ is recognized as the electronic Bohr radius.

As can be seen from Eq. (10), the value of the Friedel adjusted screening length is sensitive to the shape of the *S*-function. To clarify this point, let us choose the screening function either in the smoothly varying form [7-9],

$$S(\rho / a) = K_0(\rho / a)$$

or in the cut-off form,

$$S(\rho / a) = \begin{cases} 2, & \rho / a \le 1, \\ 0, & \rho / a > 1, \end{cases}$$

where $K_0(x)$ is a zero-order modified Bessel function. In both cases the corresponding screening integrals have the same value,

$$\int_0^\infty duuK_0(u) = 2\int_0^1 duu = 1 ,$$

and Eq. (10) delivers for the screening length a the fundamental structure of the Thomas – Fermi theory [7-9],

$$a = (\pi ca_B / 4 f_0)^{1/2} = (\pi a_B / 4k_F)^{1/2} \equiv \lambda_{TF} .$$

This work was supported by the State Committee of Science MES RA, in frame of the research project N 13-1C200.

Institute of Radiophysics and Electronics of NAS RA

L. B. Hovakimian, corresponding member of NAS RA H.H. Matevosyan, H. B. Nersisyan, K. A. Sargsyan

On the Friedel Phase Shift Sum Rule for a Charged Dislocation

The Friedel phase shift sum rule for an electrically active dislocation line is studied on the basis of the first-order Born-approximation of the scattering theory. A model potential calculation is presented for describing from the standpoint of Friedel's adju-stment procedure the self-consistent screening of a negatively charged acceptor-type edge dislocation in a degenerately doped *n*-type semiconductor.

Լ. Բ. Հովակիմյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Հ. Հ. Մաթևոսյան,
Հ. Բ. Ներսիսյան, Կ. Ա. Սարգսյան

Լիցքավորված դիսլոկացիայի համար Ֆրիդելի գումարման կանոնի մասին

Ֆրիդելի գումարման կանոնը լիցքավորված դիսլոկացիայի համար հետազոտվում է բախումների քվանտային տեսության Բորնի առաջին մոտավորության հիման վրա: *n*-տիպի այլասերված կիսահաղորդչում բացասական լիցք կրող եզրային դիսլոկացիայի էկրանավորման խնդիրը դիտարկվում է Ֆրիդելի ինքնահամաձայնեցման ընթացակարգի տեսանկյունից:

Л. Б. Овакимян, член-корреспондент НАН РА Г. Г. Матевосян,
Г. Б. Нерсисян, К. А. Саргсян

О правиле сумм Фриделя для заряженной дислокации

Правило сумм Фриделя для электрически активной дислокации в кристалле исследуется на основе первого борновского приближения квантовой теории столкновений. Экранирование отрицательно заряженной краевой дислокации в вырожденном полупроводнике *n*-типа анализируется с точки зрения фриделевской процедуры самосогласования.

References

1. *Friedel J.* - Phil. Mag. 1952. V. 43. N 337. P. 153-189.
2. *Seeger A.* - J. Phys. Radium. 1962. V.23. N 10. P. 616-626.
3. *Echenique P. M., Nagy I., Arnau A.* - Int. J. Quant. Chem.: Quant. Chem. Symp. 1989. V. 23. P. 521-543.
4. *Nersisyan H. B., Fernandez-Varea J. M.* Nucl. Instr. and Meth. B. 2013. V. 311. P. 121-130.
5. *Stehle H., Seeger A.* - Z. Phys. 1956. V. 146. N 2. P. 217-241.
6. *Karolik A. S., Sharando V. I.* - J. Phys: Condens. Matter. 2005. V.17. N 23. P. 3567-3574.
7. *Look D. C., Stutz C. E., Molnar R. J., Saarinen K., Liliental-Weber Z.* - Solid State Commun. 2001. V.117. N 10. P. 571-575. .
8. *Jena D., Mishra U. K* .- Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 241307 (R).
9. *Hovakimian L. B.* - Bull. Yokohama City Univ. 2008. V. 58. N 1. P. 71-79.
10. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М. Наука. 1976. 288 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М. Наука. 1983. 752 с.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М. Наука. 1974. 752 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

А. С. Мартиросян

Роль кислорода при взаимодействии адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением

(Представлено академиком НАН РА И. А. Варданян 15/IV 2015)

Ключевые слова: *радикал, поверхность, углеводород, альдегид, механизм.*

Ранее было показано [1-4], что при взаимодействии адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением (углеводород, альдегид) в присутствии следов кислорода процесс осложняется дополнительным расходованием органического соединения по цепному вырожденно-разветвленному механизму. В случае кислородсодержащих поверхностей наблюдалось размножение радикалов с выходом части их в объем. Оказалось, что рост радикалов зависит от количества органического соединения: вначале увеличиваясь, он достигает максимального значения и затем уменьшается с ростом количества органического реагента. В работе [5] подобная зависимость объясняется наличием критических явлений в процессе вышеописанного взаимодействия. Однако не исключено влияние и других факторов, таких, как количество кислорода, изменение константы скорости гетерогенной гибели радикалов в зависимости от количества органического соединения. Влияние изменения заполнения поверхности на динамические режимы окисления метана было показано в работе [6]. В работе [7] проведен кинетический анализ цепного процесса окисления органического соединения (маркированного как RH), инициированного реакцией радикалов CH_3O_2 + RH в присутствии следов кислорода, на разных поверхностях. Экспериментально наблюдаемые закономерности процесса в зависимости от природы поверхности объясняются соответствующим изменением констант скорости гетерогенных радикальных стадий.

В настоящей работе поставлена задача выяснить как причины наблюдаемого в эксперименте поведения концентрации радикалов в зависимости от количества поданного органического соединения, так и влияние количества кислорода на взаимодействие радикалов CH_3O_2 с RH.

С этой целью проведено математическое моделирование вышеуказанного процесса с использованием модели, рассмотренной в работе [7] в приближениях Лэнгмюра–Хиншельвуда и Ридила–Или. Начальные условия: T = 300K, $[CH_3O_2] = 10^{11}$ частиц/см^2, $[RH] = 5\times10^{12}$ частиц/см^2, $[O_2] = 10^{12}$ частиц/см^2 и $[O_2] = 5\times10^{12}$ частиц/см^2. На рис. 1 и 2 представлена кинетика расходования RH и радикалов CH_3O_2 на кислородсодержащей (TiO_2) поверхности при двух разных концентрациях кислорода.

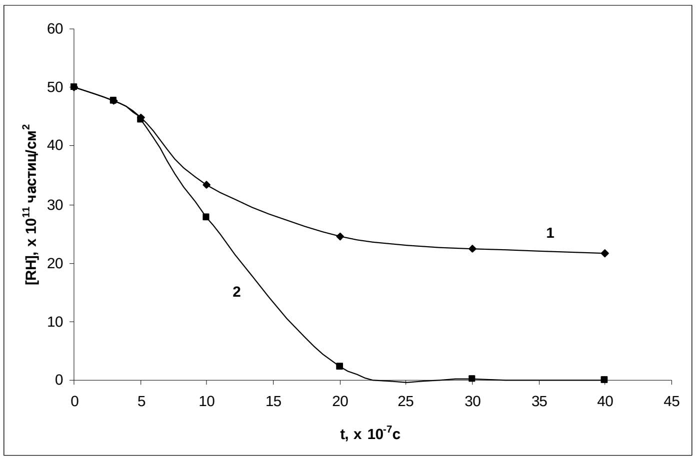

Рис. 1. Кинетика расходования RH, кривые: 1 – $[O_2] = 10^{12}$ частиц/см^2, 2 – $[O_2] = 5\times10^{12}$ частиц/см^2.

Из сравнения данных следует, что скорость процесса в сильной степени зависит от концентрации кислорода, причем эта разница сильнее проявляется в случае больших количеств RH, влияя на дополнительное расходование органического соединения по цепному механизму. В случае малых количеств RH эта разница незначительна. Кроме того меняется и кинетика накопления образовавшихся радикалов RO_2 в зависимости от концентрации кислорода. Как и следовало ожидать, резко выросло количество образовавшихся радикалов из-за заметно возросшей скорости расходования RH.

Как видно, выход радикалов с поверхности в объем заметно увеличивается с ростом количества кислорода.

На рис. 4 представлена зависимость суммы концентраций десорбированных радикалов CH_3O_2 и RO_2 от количества органического соединения при двух концентрациях кислорода.

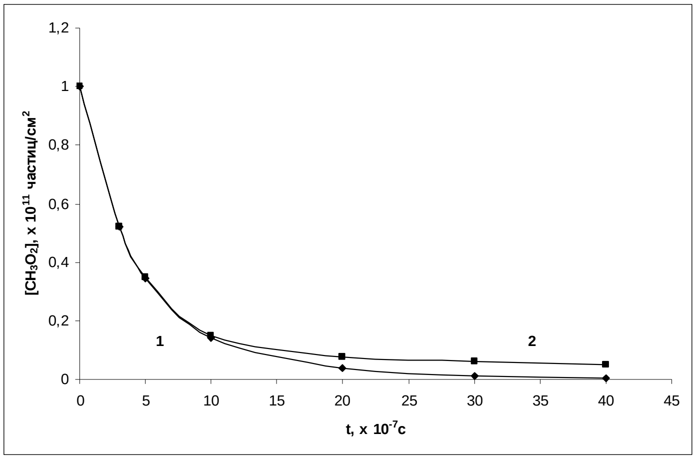

Рис. 2. Кинетика расходования радикалов CH_3O_2, кривые: 1 – $[O_2] = 10^{12}$ частиц/см^2, 2 – $[O_2] = 5\times10^{12}$ частиц/см^2.

На рис. 3 представлена зависимость суммы концентраций десорбированных радикалов CH_3O_2 и RO_2 от времени.

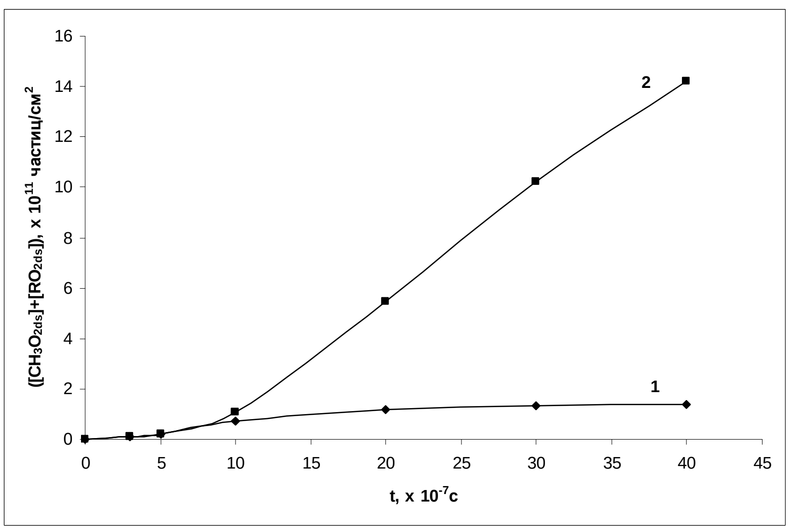

Рис. 3. Зависимость суммы $[CH_3O_{2ds}] + [RO_{2ds}]$ от времени, кривые: 1 – $[O_2] = 10^{12}$ частиц/см^2, 2 – $[O_2] = 5\times10^{12}$ частиц/см^2.

Из сравнения кривых 1 и 2 рис. 4 следует, что выход радикалов в объем сильно зависит от концентрации кислорода как качественно, так и количественно. При малых концентрациях кислорода выход меньше и, до-

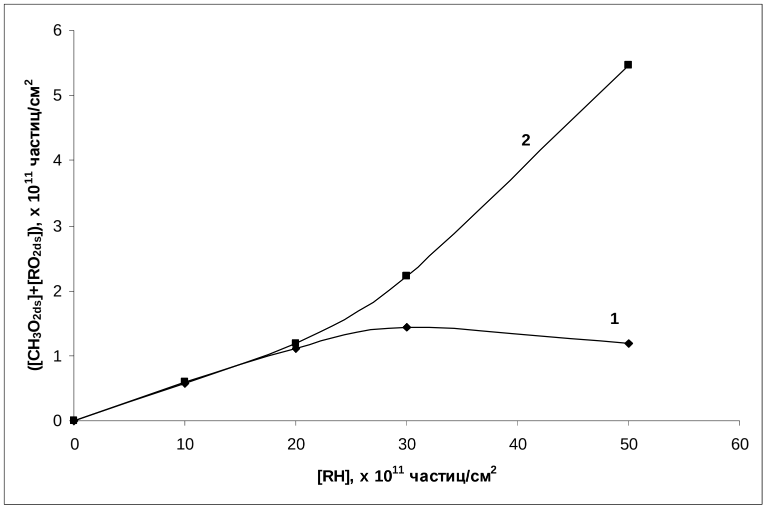

Рис. 4. Зависимость суммы [CH_3O_{2ds}] + [RO_{2ds}] от [RH], кривые: 1 – [O_2] = 10^{12} частиц/см^2, 2 – [O_2] = 5×10^{12} частиц/см^2.

стигая максимального значения, затем он падает. В случае больших концентраций кислорода он непрерывно растет.

Это обстоятельство может служить объяснением наблюдаемого в эксперименте [1-4] падения количества радикалов в объеме в зависимости от количества поданного органического соединения. В случае недостатка кислорода выход может оказаться ниже возможного.

Обобщая полученные данные, можно отметить заметную роль кислорода в реакции пероксидных радикалов с органическим соединением. Абсолютное значение количества кислорода и отношение его к количеству органического соединения может быть также серьезным фактором, влияющим на экспериментально наблюдаемые особенности процесса взаимодействия адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением.

Институт химической физики им. А. Налбандяна НАН РА

А. С. Мартиросян

Роль кислорода при взаимодействии адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением

Изучено взаимодействие адсорбированных радикалов CH_3O_2 с органическим соединением (RH) в присутствии следов кислорода. Установлено, что экспериментально наблюдаемые особенности процесса могут быть обусловлены не только наличием критических явлений, но и их зависимостью от отношения [RH]/[O_2].

Ա. Ս. Մարտիրոսյան

Թթվածնի դերը օրգանական միացության հետ CH_3O_2 ադսորբված ռադիկալների փոխազդեցության ընթացքում

Ուսումնասիրվել է CH_3O_2 ադսորբված ռադիկալների փոխազդեցությունը օրգանական միացության (RH) հետ՝ թթվածնի հետքերի առկայությամբ: Եզրակացություն է արվել, որ փորձում նկատվող պրոցեսի յուրահատկությունները կարող են պայմանավորված լինել ոչ միայն կրիտիկական երևույթների գոյությամբ, այլ նաև [RH] / [O_2] հարաբերությունից նրանց կախվածությամբ:

A. S. Martirosyan

Role of Oxygen in the Interaction Between Adsorbed CH_3O_2 Radicals and Organic Compound

The interaction between adsorbed CH_3O_2 radicals and organic compound (RH) in the presence of oxygen traces has been studied. It was concluded, that the experimentally established peculiarities of the process were due not only to the existence of the critical phenomena, but also to their dependence on ratio [RH] / [O_2].

Литература

1. *Manucharova L. A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I. A.* - Inter. J. Chem. Kinet. 2004. V. 36. №11. P. 591-595.
2. *Jalali H.A., Manucharova L.A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I.A.* - Russ. J. Phys. Chem. A. 2011.V. 85. P. 483-486.
3. *Арустамян А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А.* - ДНАН РА. 2012. Т. 112. №2. С. 194-199.
4. *Vardanyan I. A., Manucharova L. A., Jalali H. A., Tsarukyan S. V.* - Chem. J. of Armenia, 2012. V. 65. №1. P. 132-136.
5. *Варданян И. А.* - ДНАН РА. 2012. Т. 112. №3. С. 277-291.
6. *Vardanyan I. A., Manucharova L. A., Tsarukyan S. V.* In: Proceedings 19th Intern. Symp. On Gas Kinetics, Orleans, France, 2006, P.233-234.
7. *Мартиросян А. С., Царукян С. В., Варданян И. А.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 3. С. 249-256.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 3
Volume

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.73+612.468

К. В. Казарян, Н. Г. Унанян, Т. А. Пилипосян

Особенности влияниия окситоцина на спонтанную электрическую активность овариальной зоны миометрия крысы

(Представлено чл.- кор. НАН РА Л.Р.Манвеляном 14/V 2015)

Ключевые слова: *овариальный отдел, спонтанная активность, потенциал действия, ритмогенная зона, миометрий, окситоцин.*

Спонтанная электрическая активность небеременной крысы представляет собой разряды периодически возникающих вспышек потенциалов действия, которые являются результатом циклических деполяризаций мембран клеток [1, 2]. Данный автоматизм, миогенный по своей природе, представлен как в теле самой матки, так и в крайних отделах маточных труб [3-6]. Аналогично другим гладким мышцам in vivo в этом типе ткани параллельно со спонтанной электрической активностью генерируются и соответствующие им сокращения, даже при условии ее изоляции [7]. При беременности и особенно в поздние ее сроки наблюдаются заметные изменения в процессе генерации спонтанной активности во всех ритмогенных зонах органа, стимулирующие его контрактурную деятельность [8]. Известно, что основное функциональное значение данного репродуктивного органа – направленная контрактурная деятельность, обеспечивающая реализацию продвижения плода при родах Изучение особенностей электрофизиологических свойств ритмогенных областей необходимо для выявления механизмов, координирующих синхронизацию всех электрических активностей в этих условиях. Ведущая роль в этом процессе скорее всего обеспечивается спонтанной активностью овариального локуса миометрия [8, 9].

Окситоцин относится к числу физиологически активных соединений, основным свойством которого является регуляция репродуктивных процессов, в частности, стимуляция маточных сокращений. Данный процесс сопровождается деполяризацией мембраны и резким учащением разрядов спонтанной активности [10-12].

Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа параметров спонтанной активности овариальной зоны миометрия при воздействии окситоцина как в норме, так и при изоляции от влияния нижерасположенных активных зон. Решение данного вопроса поможет выявлению процессов синхронизации всех ритмогенных областей миометрия.

Методы исследования. Опыты проводили на небеременных самках крыс массой 200-250 г, наркотизированных нембуталом (50-55 мг/кг внутрибрюшинно). Эксперименты были острыми, и после завершения регистраций животные забивались.

Вскрывалась брюшная полость и обнажался корпус матки с расположенными с двух сторон маточными трубами. Матка денервировалась перерезкой корешков нервов plexus hypogastricus, uterinus, uterovaginalis. Регистрация активности проводилась с поверхности овариальной области левого рога (рис. 1). Спонтанная электрическая активность отводилась биполярным электродом (межэлектродное расстояние соответствовало 2 мм). Исключение взаимосвязи между ритмогенными областями осуществлялось путем перерезки маточного рога в соответствующей зоне (рис. 1, отмечено линией).

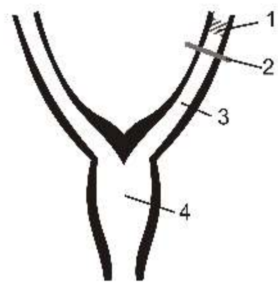

Рис. 1. Схематическое изображение тела матки и маточных труб крысы: 1 – овариальная зона, 2 – область перерезки, 3 – левый рог, 4 – тело матки.

Анализ электрических регистраций проводился путем определения значений следующих параметров спонтанных потенциалов действия: частота, амплитуда, средняя скорость нарастания пика, продолжительность нарастания пика (продолжительность увеличения амплитуды потенциала действия до максимального значения при фазе нарастания), половина ширины (время, за которое формируется верхняя часть пика начиная с уровня мембранной поляризации, соответствующей половине амплитуды потенциала действия при фазе нарастания до этого же уровня потенциала при фазе падения). Все отмеченные показатели определялись путем усреднения этих величин как в пределе одной вспышки, так и всех экспериментов данной серии.

На рисунках как единичные потенциалы действия, так и наложенные друг на друга представляют собой типичные формы усредненных потенциалов действия. Усреднение форм потенциалов действия также проводилось как в пределах каждого эксперимента, так и по всем экспериментам.

Спонтанная электрическая активность регистрировалась на 4-канальном приборе, разработанном в Институте физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА для оценки электрической активности гладкой мускулатуры [21]. Прибор дает возможность проводить одновременную регистрацию с 4 отделов исследуемой структуры. Отношение сигнал–шум прибора позволяет осуществлять достоверную регистрацию отклонений сигналов с амплитудой до 10 мкВ. Проводилась полосовая фильтрация регистрируемых сигналов в диапазоне 3 – 30 Гц. Коммуникация прибора с ЭВМ осуществлялась с использованием USB порта. Программа, обеспечивающая регистрацию сигналов, разработана с применением пакета программ Lab View. Последующий статистический анализ характера зарегистрированных сигналов проводился с использованием пакетов программ Origin-8.5 и Sigma Plot 11.0. Оценка достоверности изменения полученных данных осуществлялась согласно t-критерию Стьюдента. Приведенные записи отдельных экспериментов представляют картину активности одного из аналогичных экспернментов, полученных на 14 животных.

Все эксперименты были проведены в соответствии с правилами Ереванского медицинского университета по этике в области ухода и использования лабораторных животных. Эксперименты, а также уход за животными выполнены в соответствии с «Правилами и нормами гуманного обращения с объектами исследования».

Результаты исследования и обсуждение. На рис. 2 приведена запись одного из типичных экспериментов, представляющая собой картину спонтанной электрической активности овариальной зоны маточного рога. Из данной области миометрия, как и из других ритмогенных локусов (цервикальная область и тело матки) регистрируются периодически возникающие вспышки активности, представляющие собой последовательность потенциалов действия, которые постепенно учащаются и далее урежаются и затухают. На рис. 2, А показана одна из этих вспышек как в норме, так и при введении окситоцина. Все изменения параметров потенциалов действия, сопутствующие воздействию окситоцина, наглядно видны при наложении друг на друга развернутых их типичных форм в норме и в присутствии гормона (рис. 2, Б).

Анализ основных параметров потенциалов действия, формирующих вспышки для данного локуса миометрия как в норме, так и при введении окситоцина, выявил определенные различия в их свойствах. Для наглядности выявленных проведенным анализом изменений характеристик электрических активностей результаты представлены в процентном соотношении к норме (рис.2, В). Как видно из рисунка, величины почти всех исследуемых параметров значительно возрастают при введении гормона. При этом наибольшее увеличение претерпевает амплитуда потенциала действия (до 141.1 %), а показатель активности – половина ширины остается без изменений.

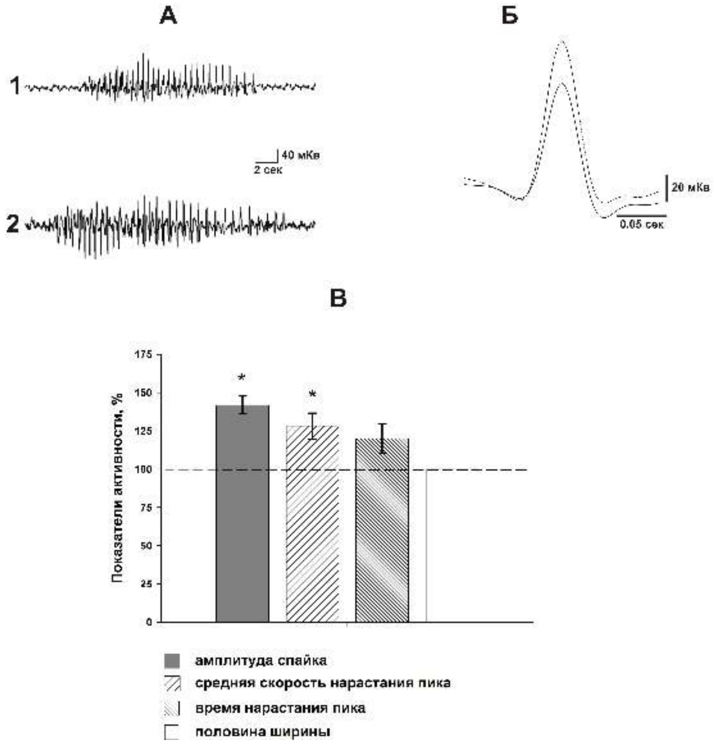

Рис. 2. Влияние окситоцина на спонтанную электрическую активность овариальной зоны миометрия в нормальных условиях. А: 1 – норма, 2 – введение окситоцина; Б – наложение друг на друга единичных потенциалов действия вспышек в норме (сплошной контур), при воздействии окситоцина (штриховой контур) соответственно; В – процентное соотношение показателей потенциалов действия после введения окситоцина по отношению к норме. Штриховой линией показана норма. n = 13. ***P < 0.0001, *P < 0.01.

В следующей серии экспериментов исследовалось влияние окситоцина на активность овариальной зоны, изолированной от влияния нижерасположенных ритмогенных областей. Обособление данного участка проводилось путем перерезки маточной трубы в области, расположенной несколько ниже исследуемого локуса, чтобы исключить возможность повреждения его пейсмекеров (рис. 1). После столь резкого травмирования и нарушения целостности ткани, сопутствующих перерезке, стабилизация активности, как правило, наблюдалась через 5 мин. Регистрация активности начиналась по истечении этого времени и продолжалась в течение 30 мин. И лишь потом вводился окситоцин. В качестве дополнительного контроля для изучения влияния окситоцина анализировались те вспышки активности, которые регистрировались непосредственно за 5-6 мин до введения окситоцина. Как видно из рис. 3,А, *2* и *3*, при перерезке рога наблюдаются некоторые изменения в характере активности, последующее же воздействие окситоцина способствует активации разрядов.

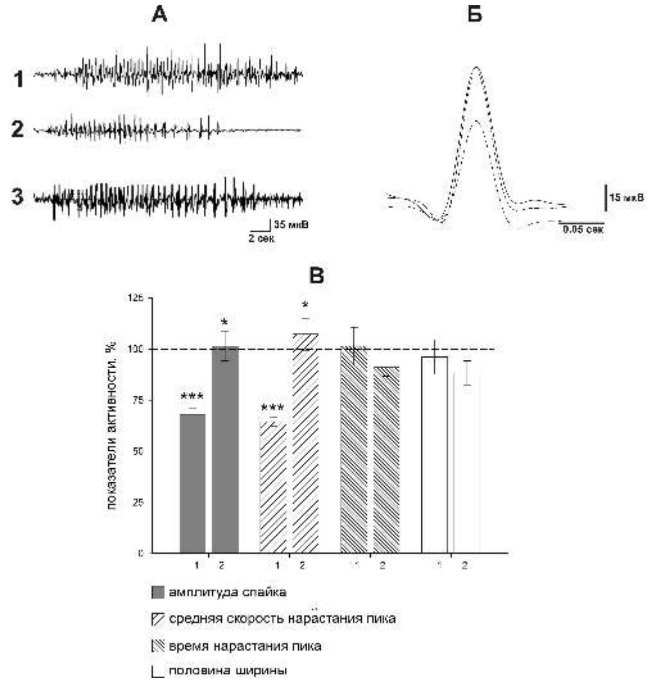

Рис. 3. Влияние окситоцина на спонтанную электрическую активность после перерезки маточной трубы. А: 1 – норма, 2 – после перерезки маточной трубы, 3 – введение окситоцина после перерезки маточной трубы; Б – наложение друг на друга единичных потенциалов действия вспышек в норме (сплошной контур) после перерезки (штрих-пунктирный контур) при воздействии окситоцина (штриховой контур) соответственно. Штриховой линией показана норма. Под столбиками: 1 – норма, 2 – воздействие окситоцина. n = 12. ***P < 0.0001, *P < 0.01.

Представленные справа на рис. 3, Б в развернутом виде наложенные друг на друга типичные формы потенциалов действия в соответствующих условиях свидетельствуют об этих изменениях активности. Сравнительный анализ результатов данной серии экспериментов представлен на рис. 3, В. Если такие показатели активности, как амплитуда и скорость нарастания пика после пересечения рога, уменьшались соответственно на 32 и 36 %, то продолжительность нарастания и половина ширины почти не изменялись. Вместе с тем последующее введение окситоцина способствует восстановлению всех исследуемых параметров активности в основном до таковых, соответствующих норме. Как видно из приведенных выше гистограмм (рис. 2, В и рис. 3, В), влияние окситоцина на амплитуду и скорость ее нарастания в овариальном локусе миометрия при изоляции от других активных зон значительно превосходят изменения показателей для нетронутой ткани (условия in situ). В отношении продолжительности нарастания амплитуды наблюдается противоположный эффект, показатель же активности – половина ширины остается без изменения.

На рис. 4 представлены описанные результаты, при этом за норму для данных по влиянию окситоцина в условиях пересеченного рога приняты показатели потенциалов действия в этих же условиях до введения окситоцина. Наложение друг на друга усредненных форм потенциалов действия, зарегистрированных в соответствующих указанных выше условиях, позволяет наглядно представить все отмеченные выше изменения их параметров (рис. 3, В). Таким образом, при нарушении целостности ткани окситоцин способствует возникновению более высокоамплитудных и быстрых потенциалов действия по сравнению с нетронутой тканью.

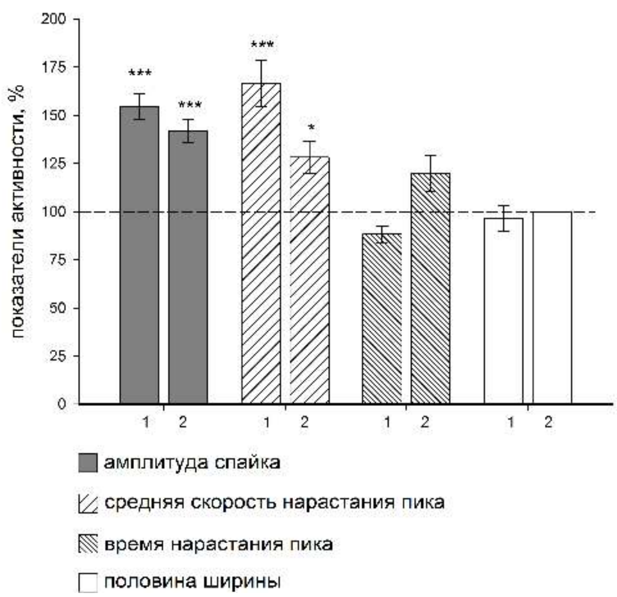

Рис. 4. Величины параметров потенциала действия в норме и после перерезки маточной трубы. Штриховой линией показана норма. Под столбиками: 1 – воздействие окситоцина после перерезки, 2 – воздействие окситоцина в норме. n = 12. ***P < 0.0001, *P < 0.01.

Как уже отмечалось выше, гладкомышечная ткань характеризуется особым реагированием на такой физиологический агент, как экзогенный окситоцин. Миометрий, как правило, относительно спокоен не только у небеременных, но и в начальной стадии у беременных организмов, при этом наблюдаются отдельные единичные нерегулярные контрактуры [2, 12]. Последние впоследствии (при родах) координируются для обеспечения целевой направленной деятельности органа – выталкивания плода [11, 13].

Известно, что возникновение контрактуры и, соответственно, электрической активности миометрия обеспечивается широким спектром ионных мембранных механизмов: Т- и L-типы кальциевых каналов, Na^+- и K^+-ионные каналы, Na^+/Ca^{++}-обменный механизм и т.д. [13-17]. Причем в активации этих ионных систем в миометрии большая роль отводится уровню мембранного потенциала, который в зависимости от гормонального фона изменяется в достаточно широких пределах – от -75 до -45 МВ [18, 19]. Все эти факторы и определяют значительную вариабельность характеристик потенциалов действия и, соответственно, их форму.

Согласно ранним исследованиям, автономная активность овариальной области миометрия по сравнению с ритмогенезом нижерасположенных зон занимает обособленное положение [12, 20]. Более того, выявлена также регуляторная роль овариальной области в обеспечении максимального направленного воздействия всех взаимосвязанных между собой ритмогенных зон миометрия на тело матки [12]. Данный факт свидетельствует о важном функциональном значении активности овариального локуса миометрия для однонаправленного распространения волны возбудимости. Исходя из этого влияние такого специфического для исследуемой ткани гормона, как окситоцин, поможет выявлению процессов, координирующих активность всех ритмогенных зон миометрия.

Полученные в данной работе результаты показали, что изменения характеристик потенциалов действия при воздействии окситоцина на активность овариального отдела миометрия в условиях in situ отличаютя от наблюдаемых, зарегистрированных после перерезки маточной трубы. Известно также, что конфигурация спонтанно генерируемых спайков в миометриальной ткани зависит от условий, при которых проводится регистрация активности [13]. Так, при выделении ткани из организма (условия in vitro) наблюдается деполяризация мембранного потенциала, которая способствует как активации некоторых ионных каналов, так и инактивации других, в связи с чем соответственно меняется форма регистрирумых потенциалов действия. Так или иначе в каждом из анализируемых в работе результатов, полученных при воздействии окситоцина на овариальную зону миометрия, наблюдается активация возбудимости, выражающаяся увеличением амплитуды потенциала действия и скорости его нарастания.

Институт физиологии им Л. Орбели НАН РА

К. В. Казарян, Н. Г. Унанян, Т. А. Пилипосян

Особенности влияния окситоцина на спонтанную электрическую активность овариальной зоны миометрия крысы

Исследовалась роль окситоцина в возникновении спонтанной электрической активности овариальной зоны миометрия как в условиях сохранения целостности ткани, так и при изоляции данного локуса. Выявлены определенные различия в свойствах основных параметров потенциалов действия, формирующих вспышки активности. Показана активация возбудимости при воздействии окситоцина, выражающаяся увеличением амплитуды потенциалов действия и скорости их нарастания, причем значения последних повышаются при нарушении целостности ткани.

Ք. Վ. Ղազարյան, Ն. Գ. Հունանյան, Թ. Ա. Փիլիպոսյան

Օքսիտոցինի ազդեցության յուրահատկությունները առնետի միոմետրիումի օվարիան շրջանի ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության վրա

Հետազոտվել է օքսիտոցինի դերը միոմետրիումի օվարիան շրջանի ինքնաբուխ էլեկտրական ակտիվության առաջացման գործում, ինչպես ամբողջական միոմետրիումի, այնպես էլ այդ շրջանի մեկուսացման պայմաններում: Ի հայտ են եկել որոշակի տարբերություններ գործողության պոտենցիալների հիմնական չափանիշներում, որոնք ձևավորում են ակտիվության բռնկումները: Ցույց է տրված գրգռման ակտիվացում, որն արտահայտվում է գործողության պոտենցիալների ամպլիտուդաների և նրանց արագությունների աճման բարձրացումով, ընդ որում վերջիններիս արժեքները մեծանում են ուսումնասիրվող շրջանի մեկուսացման պայմաններում:

K. V. Kazaryan, N. G. Hunanyan, T. A. Piliposyan

Effect of Oxytocin on Spontaneous Electrical Activity of the Ovarian Horn Area in Rat Myometrium

The role of oxytocin in generation of spontaneous electrical activity of the ovarian horn area was studied in conditions of tissue integrity preservation as well as in isolation of the given locus. Some differences were revealed in properties of the main parameters of action potentials constituting the bursting activity. Under the influence of oxytocin the excitability activation expressed by the increase of the rise-rate and amplitude of action potentials was shown. It is important to mention that the rise-rate values increase when the tissue is damaged.

Литература

1. *Blackburn S. T. Materna l*- fetal, & neonatal physiology: a clinical perspective (3^{rd} edit.). 2007. Chapter 4. Saunders Elsevier, St Louis.
2. *Garfield R. E., Maner W. L*- Semin. Cell. Dev. Biol. 2007. V. 18. № 3. P. 289-295.
3. *Казарян К. В., Унанян Н. Г., Акопян Р. Р.* - Рос. физиол. журн. им. И. М. Сеченова. 2010. Т.96. №10. С. 981-987.
4. *Buhimschi C. S., Saade G. R., Buhimschi I. A., Gokdeniz R., Boyle M. B., Garfield R. E.* - Am. J. Obstet. Gynecol. 2000. V.183. № 1. P. 68-75.
5. *Crane L. H., Martin L.* - Reprod. Fertil. Dev. 1991. V. 3. P. 519-527.
6. *Shmygol A., Burdyga T., Duquette R., Mobasheri A., Vaillant C., Wray S.* - University of Cambridge, J. Physiol. 2004. 555P. C167.
7. *Reynolds S. R. M.* - Physiology of the Uterus. 1965. P. 10-19.
8. *Mancinelli R., Guariglia L., Racanicchi C., Bertuzzi A., Salinari S., Vitelli R.* - Quart. J. Exp. Physiol. 1988. V. 73. № 4. P. 459-469.
9. *Казарян К. В., Унанян Н. Г.* - Рос. физиол. журн. им. И. М. Сеченова. 2013. Т. 99. № 10. С. 1191-1199.

10. *Nakao K., MD, DMSc, Inoue Y., MD, DMSc, Okabe K., DDS, DMSc, Kawarabayashi T., MD, DMSc, Kitamura K., DDS, DDSc*- Am. J. Obstet. Gynecol. 1997. V.177. № 1. P. 222–228.
11. *Kimura T., Takemura M., Nomura S., Nobunaga T., Kubota Y., Inoue T.* – Endocrinology. 1996. V. 137. P. 780-785.
12. Maul *H., Maner W. L., Saade G. R., Garfield R. E.* - Clin. Perinatol. 2003. V. 30. P. 665-676.
13. *Parkington H. C., Coleman H. A.* - The Endocrinology of Parturition. 2001. V. 27. P. 179-200.
14. *Coleman H. A., Hart J. D. E., Tonta M. A., Parkington H. C.* - The Journal of Physiology. 2000. V. 523. № 3. P. 785–798.
15. *Shmygol A., Gullam J., Blanks A., Thornton S.* - Acta Pharmacol. Sin. 2006. V.27. № 7. P.827–832.
16. *Young R. C., Smith L. H., McLaren M. D.* – Am. J. Obstet. Gynecol. 1993. V. 169(4). P.785-92.
17. *Young R. C., Herndon-Smith L.* – Am. J. Obstet. Gynecol. 1991. V. 164 (1 Pt 1). P. 175-81.
18. *Parkington H. C., Tonta M. A., Brennecke S. P., Coleman H. A.* – Am. J. Obstet. Gynecol. 1999. V.181(6). P.1445-51.
19. *Sims S. M., Daniel E. E., Garfield R. E.* – J. Gen. Physiol. 1982. V. 80(3). P. 353-75.
20. *Казарян К. В., Унанян Н. Г., Меликсетян И. Б., Акопян Р. Р., Саваян А. А.* – Цитология. 2010. Т. 52. № 12. С. 990-995.