

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы
R E P O R T S

2015

Ереван

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ՉԱԿԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРИАН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.

Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:<http://elib.sci.am>e-mail: rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2015

©Издательство “Гитутюн” НАН РА. 2015

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամայան, Բ. Մ. Սպիտկովսկի</i> – Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների որոշ էքստրեմալ հատկությունների մասին	87
<i>Ֆ. Ա. Թալալյան</i> – Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների տեսության մի թեորեմի մասին	93
<i>Ս. Լ. Գոգյան</i> – $L_1(0,1)^d$ –ում դեմոկրատիկ համակարգերի մասին	98

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ջ. Ն. Դանոյան, Լ. Հ. Աթոյան, Ս. Լ. Սահակյան</i> – Էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները շերտավոր պիեզոակտիվ կառուցվածքում էլեկտրական (մագնիսական) էկրանի առկայությամբ	102
<i>Յու. Լ. Սարգսյան</i> – Պինդ մարմնի տված դիրքերի իրարահաջորդ բազմություններում համակենտրոն գնդեր մոտարկող կետերի մասին	110
<i>Ա. Ս. Ավետիսյան</i> – Ֆիզիկամեխանիկական կապակցված դաշտերով հոծ միջավայրերի անհարթություններով եզրերի ամրացման եզրային խնդրի մոդելավորումը	119

ՖԻԶԻԿԱ

<u>Ղ. Բ. Դավիթյան</u> , <i>Բ. Յու. Դանիլով, Ռ. Վ. Թումանյան, Վ. Գ. Դավթյան</i> – Սառը միջուկային սինթեզի ռեակտորի ստեղծման տեսական նախադրյալներ	132
---	-----

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ա. Մ. Բալայան, Լ. Ս. Մանուկյան, Է. Կ. Աֆրիկյան, Վ. Ա. Աբելյան</i> – <i>Thermoplasma</i> sp. շտամից մաքրված ցիկլոմալտոդեքստրին գլյուկանոտրանսֆերազի ակտիվ կենտրոնի ուսումնասիրումը ֆոտոօքսիդացման և դիեթիլպիրոկարբոնատի միջոցով մոդիֆիկացման եղանակներով	135
--	-----

ԿԵՆՍԱՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱ

<i>Կ. Ա. Թոչունյան</i> – <i>Escherichia coli</i> -ի կողմից մոլեկուլային ջրածնի արտադրության վրա ածխածնի խառն աղբյուրների ազդեցությունը խառը խմորման ընթացքում	148
---	-----

ԲՈՒՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ա. Մ. Հայրապետյան, Ա. Գ. Ղուկասյան</i> – Հայաստանի բույսերի Կարմիր գրքում ընդգրկված <i>Rhaponticoides</i> Vaill. (<i>Asteraceae</i> ընտ.) ցեղի էնդեմիկ տեսակների պալինոլոգիական կարիոլոգիական ուսումնասիրություն	156
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский* – О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций 87
- Ф. А. Талалян* – Об одной теореме из теории равномерного распределения последовательностей 93
- С. Л. Гогян* – О демократических системах в $L_1(0,1)^d$ 98

МЕХАНИКА

- З. Н. Даноян, Л. А. Атоян, С. Л. Саакян* – Электромагнитоупругие поверхностные волны в слоистых пьезоактивных структурах при наличии электрического (магнитного) экрана 102
- Ю. Л. Саркисян* – Точки твёрдого тела, аппроксимирующие концентрические сферы в чередующихся множествах его заданных положений..... 110
- А. С. Аветисян* – Моделирование граничной задачи контакта шероховатых поверхностей сплошных сред со связанными физико-механическими полями..... 119

ФИЗИКА

- Д.Б.Давидян, *И. Ю. Данилов, Р. В. Туманян, В. Г. Давтян* – Теоретические предпосылки для создания реактора холодного ядерного синтеза..... 132

МИКРОБИОЛОГИЯ

- А. М. Балаян, Л. С. Манукян, Э. К. Африкян, В. А. Абелян* – Изучение активного центра цикломальтодекстрин глюкозилтрансферазы штамма *Thermotreptomycetes sp.* методами фотоокисления и модификации диэтилпирикарбонатом..... 135

БИОТЕХНОЛОГИЯ

- К. А. Трчунян* – Влияние смеси источников углерода на производство водорода бактериями *Escherichia coli* при смешанном брожении 148

БОТАНИКА

- А. М. Айрапетян, А. Г. Гукасян* – Палинологическое и кариологическое исследование эндемичных видов рода *Rhaponticoides* Vaill. (сем. *Asteraceae*), включенных в Красную книгу растений Армении 156

CONTENTS

MATHEMATICS

- K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky* - On Some Extremal Properties of the Partial Indices of Triangular Matrix-Functions ... 87
- F. A. Talalyan* – On a Theorem of the Theory of Uniform Distribution of Sequences 93
- S. L. Gogyan* - On Democratic Systems in $L_1(0,1)^d$ 98

MECHANICS

- Z. N. Danoyan, L. H. Atoyán, S. L. Sahakyan* - Electro-Magneto-Elastic Surface Waves Existence and Propagation in Piezoelectric Layered Medium in the Presence of an Electric Screen 102
- Y. L. Sarkissyan* - Rigid Body Points Approximating Concentric Spheres in Alternating Sets of its Given Positions 110
- A. S. Avetisyan* - The Boundary Problem Modelling of Rough Surfaces Continuous Media with Coupled Physicomechanical Fields..... 119

PHYSICS

- D.B. Davidyan*, *I. Yu. Danilov, R.V. Tumanyan, V.G. Davtyan* - Theoretical Prerequisites for Creating Cold Fusion Reactor 132

MICROBIOLOGY

- A. M. Balayan, L. S. Manukyan, E. K. Afrikian, V. A. Abelyan* – Study of the Active Site of *Thermotremptomyces* sp. Cyclomaltodextrin Glucanotransferase by Photooxidation and Modification by Diethylpyrocarbonate 135

BIOTECHNOLOGY

- K. A. Trchounian* – Effects of Carbon Sources Mixtures on Hydrogen Production by *Escherichia coli* during Mixed-Acid Fermentation 148

BOTANY

- A. M. Hayrapetyan, A. G. Ghukasyan* – Palynological and Caryological Investigation of Endemic Species of the Genus *Rhaponticoides* Vaill. (fam. *Asteraceae*) Included in the Red Data Book of Plants of Armenia 156

$n=1$ единственный частный индекс принято называть просто индексом функции G . Заметим, что набор частных индексов $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ определяется с точностью до перестановки его компонент.

Для данного $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ через $T(\chi)$ обозначим класс нижнетреугольных матриц-функций из класса $L_\infty^{n \times n}(\Gamma)$ с факторизуемыми диагональными элементами, индексы которых равны соответственно χ_1, \dots, χ_n .

Как известно (см. [3], а также [2]), матрицы-функции из класса $T(\chi)$ допускают факторизацию. Множество всех возможных наборов частных индексов матриц-функций из $T(\chi)$ обозначим через $A(\chi)$. Множество $A(\chi)$ инвариантно относительно перестановок, т.е. с каждым вектором $\kappa \in A(\chi)$ множеству $A(\chi)$ принадлежат и векторы, полученные из κ путем перестановки его компонент. Поскольку χ является набором частных индексов любой диагональной матрицы из $T(\chi)$, то $\chi \in A(\chi)$. Подмножество B множества $A(\chi)$ будем называть базовым подмножеством $A(\chi)$, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B , совпадает с $A(\chi)$. В [4] дана явная конструкция некоторого базового подмножества $A(\chi)$, и тем самым решена задача описания $A(\chi)$.

Для $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ мы полагаем $\kappa_\uparrow = (\kappa_{(1)}, \dots, \kappa_{(n)})$, где $\kappa_{(1)} \leq \dots \leq \kappa_{(n)}$ – компоненты вектора κ , упорядоченные по неубыванию. Говорят (см. [5]), что вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ мажорируется вектором χ в смысле Харди – Литтлвуда–Пойя, и пишут $\kappa \prec \chi$, если

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \kappa_{(i)} &\geq \sum_{i=1}^k \chi_{(i)}, \quad k=1, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n \kappa_i &= \sum_{i=1}^n \chi_i. \end{aligned} \quad (1)$$

В [3] (см. также [2]) доказано, что если $\kappa \in A(\chi)$, то $\kappa \prec \chi$. Таким образом, справедливы включения

$$E(\chi) \subseteq A(\chi) \subseteq M(\chi),$$

где $M(\chi)$ – множество всех векторов из \mathbb{Z}^n , мажорирующихся вектором χ , а $E(\chi)$ – множество всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент.

В данной работе мы описываем множества векторов χ , для которых справедливо одно из равенств $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$. Отметим в этой связи результат И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна (см. [6], а также [7 - 9]), согласно которому при $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_n$ имеет место равенство $A(\chi) = E(\chi)$.

Основные результаты работы приведены в секциях 3 и 4. Они основаны на результатах работы [4]. Секция 2 является вспомогательной.

2. Предварительные результаты. Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $\Delta = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi) = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i - \chi_j \geq 2\}$$

и проекции $\pi_1: D(\chi) \rightarrow \Delta$, $\pi_2: D(\chi) \rightarrow \Delta$, определенные равенствами $\pi_1((i, j)) = i$, $\pi_2((i, j)) = j$. Для пары векторов χ и $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ введем множества

$$D_{\kappa, \chi} = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i > \kappa_i \geq \kappa_j > \chi_j\},$$

$$\Delta_+ = \{i \in \Delta; \kappa_i < \chi_i\}.$$

Напомним (см. [4]), что вектор κ T -мажорируется вектором χ ($\kappa \prec_T \chi$), если имеют место равенства (1), $\pi_2(D_{\kappa, \chi}) = \Delta_+$ и если для любого подмножества $\omega_+ \subset \Omega_+$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega_+} (\kappa_j - \chi_j) \leq \sum_{i \in \pi(D_{\kappa, \chi} \cap \pi_2^{-1}(\omega_+))} (\chi_i - \kappa_i).$$

Будем говорить, что вектор κ Q -мажорируется вектором χ , если имеет место равенство (1) и справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^k \kappa_i \geq \sum_{i=1}^k \chi_i, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Пусть S_n – группа перестановок множества Δ . Через $S_n(D_{\kappa, \chi})$ обозначим множество всех перестановок $\sigma \in S_n$ для которых $(i, j) \in D_{\kappa, \chi}$ влечет $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Вектор κ T -мажорируется вектором χ тогда и только тогда, когда для любой перестановки $\sigma \in S_n(D_{\kappa, \chi})$ вектор $\kappa' = (\kappa_{\sigma(1)}, \dots, \kappa_{\sigma(n)})$ Q -мажорируется вектором $\chi' = (\chi_{\sigma(1)}, \dots, \chi_{\sigma(n)})$.

Теорема 2. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}$ и $\kappa \prec_T \chi$. Тогда $\kappa \prec \chi$.

Теорема 3. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$. Если $\chi = \chi_{\uparrow}$, $\kappa = \kappa_{\uparrow}$ и $\chi \prec \kappa$, то $\kappa \prec_T \chi$.

Из теоремы 2 в частности следует независимое от [3] доказательство включения $A(\chi) \subseteq M(\chi)$.

Для действительных чисел a и b ($a < b$) через $I(a, b)$ обозначим множество целых чисел, лежащих в отрезке $[a; b]$, а через $F(a, b)$ ($a \geq 2, b \geq 2$) – множество пар целых чисел k_1, k_2 , удовлетворяющих системе неравенств $2k_1 + k_2 \leq a$, $k_1 + 2k_2 \leq b$.

Следующая теорема дает явное описание множества $A(\chi)$ при $n = 3$, отличное от предложенных ранее в [9] и [10].

Теорема 4. Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. Тогда

а) если $D(\chi) = \emptyset$, то множество $\{\chi\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

б) если $D(\chi) = \{(2;1)\}$, то множество векторов $\{(\chi_1 + k, \chi_2 - k, \chi_3); k \in I(0; (\chi_2 - \chi_1) / 2)\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

в) если $D(\chi) = \{(3;1)\}$, то множество, состоящее из вектора χ и вектора $\chi' = (\chi_1 + 1, \chi_2, \chi_3 - 1)$, является базовым подмножеством $A(\chi)$;

г) если $D(\chi) = \{(3;2)\}$, то множество $\{(\chi_1, \chi_2 + k, \chi_3 - k); k \in I(0; (\chi_3 - \chi_2) / 2)\}$ является базовым подмножеством $A(\chi)$;

е) если $D(\chi) = \{(2;1), (3;1)\}$, то множество векторов вида

$$\kappa = (\chi_1 + k_1 + k_2, \chi_2 - k_1, \chi_3 - k_2), \quad (2)$$

где

$$(k_1, k_2) \in F(\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1) \cup \{(k_1; 0); k_1 \in I(\chi_3 - \chi_2 + 1; (\chi_2 - \chi_1) / 2)\} \quad (3)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

ж) если $D(\chi) = \{(3;1), (3;2)\}$, то множество векторов вида

$$\kappa = (\chi_1 + m_1, \chi_2 + m_2, \chi_3 - m_1 - m_2), \quad (4)$$

где

$$(m_1, m_2) \in F(\chi_3 - \chi_1, \chi_3 - \chi_2) \cup \{(0; m_2); m_2 \in I(\chi_3 - \chi_1 + 1; (\chi_3 - \chi_2) / 2)\}, \quad (5)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

з) если $D(\chi) = \{(2;1), (3;1), (3;2)\}$, то объединение множеств векторов вида (2) и (4), где числа k_1, k_2 определяются соотношением (3), а числа m_1, m_2 – соотношением (5), является базовым подмножеством $A(\chi)$.

3. Минимальное базовое подмножество. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Множество, состоящее из одного элемента χ , является базовым подмножеством $A(\chi)$ тогда и только тогда, когда множество $D(\chi)$ пусто. Иными словами, для выполнения равенства $A(\chi) = E(\chi)$ необходимо и достаточно, чтобы $D(\chi) = \emptyset$.

Заметим, что условие $D(\chi) = \emptyset$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \dots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \leq \chi_j + 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с невозрастающими компонентами $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_n$, в соответствии с вышеуказанным результатом И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна.

4. Максимальное базовое подмножество. Для каждого $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим множество

$$D_-(\chi) = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; j < i, \chi_j - \chi_i \geq 2\}.$$

Теорема 6. Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$, $D_-(\chi) = \emptyset$ и $\kappa \prec \chi$. Тогда $\kappa \in A(\chi)$. Иными словами, в случае $D_-(\chi) = \emptyset$ справедливо равенство $A(\chi) = M(\chi)$.

Условие $D_-(\chi) = \emptyset$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \dots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \geq \chi_j - 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с неубывающими компонентами $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_n$.

Следующее утверждение уточняет теорему 6 в случае $n = 3$.

Теорема 7. Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. Для того чтобы имело место равенство $A(\chi) = M(\chi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех условий:

- a) $D_-(\chi) = \emptyset$;
- b) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 + 2$;
- c) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 - 2$.

¹Российско-Армянский (Славянский) университет
e-mail: harkamo@rambler.ru

²Ереванский государственный университет, Институт математики НАН РА
e-mail: kamalyan_armen@yahoo.com

³The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, USA, and New York University Abu Dhabi (NYUAD), UAE
e-mail: ilya@math.wm.edu, ims2@nyu.edu, imspitkovsky@gmail.com

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский

О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций

Рассматривается множество наборов частных индексов нижнетреугольных матриц-функций, диагональные элементы которых факторизуемы с индексами, равными компонентам вектора $\chi \in \mathbb{Z}^n$. Указанное множество $A(\chi)$ содержит множество $E(\chi)$ всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент, и содержится в множестве $M(\chi)$ всех векторов, мажорирующихся вектором χ . Найдены условия на χ , обеспечивающие одно из равенств $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$.

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ի. Մ. Սպիտկովսկի

**Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների որոշ
էքստրեմալ հատկությունների մասին**

Դիտարկվում են ստորին-եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաներ, որոնց անկյունագծային տարրերը ֆակտորիզացվող են $\chi \in \mathbb{Z}^n$ վեկտորի կոմպոնենտներին հավասար ինդեքսներով: Այդ դասի հնարավոր մասնավոր ինդեքսների $A(\chi)$ բազմությունը պարունակում է χ վեկտորի կոմպոնենտների տեղափոխության միջոցով ստացված $E(\chi)$ վեկտորների բազմությունը և ընդգրկված է χ վեկտորով մաժորացվող $M(\chi)$ վեկտորների բազմության մեջ: Գտնված են χ -ի վրա պայմաններ, որոնք ապահովում են $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$ հավասարումներից մեկը:

K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky

**On Some Extremal Properties of the Partial Indices of Triangular
Matrix-Functions**

The set of tuples of the partial indices of lower-triangular matrix-functions is considered, diagonal elements of which are factorizable with indices equal to the components of the vector $\chi \in \mathbb{Z}^n$. The mentioned set $A(\chi)$ contains the set $E(\chi)$ of all vectors obtained from χ by permuting its components and is contained in the set $M(\chi)$ of all vectors majorized by χ . The conditions on χ under which $A(\chi) = E(\chi)$ or $A(\chi) = M(\chi)$ are obtained.

Литература

1. *Böttcher A., Karlovich Yu. I.* Carleson curves, Muchenhaupt weights, and Toeplitz operators. Basel and Boston. Birkhäuser Verlag. 1997.
2. *Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.* Factorization of matrix-functions. Basel and Boston. Birkhäuser Verlag. 1987.
3. *Спитковский И. М.* - ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 4. С. 816-820.
4. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г., Спитковский И. М.* - ДНАН РА. 2015. Т. 115. N1. С. 7-14.
5. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства. Теория мажорации и ее приложения. М. Мир. 1983. 576 с.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* - УМН. 1958. Т. 13, N 2. С. 3-72.
7. *Николайчук А. М.* - Укр. мат. журн. 1971. Т. 23. N 6. С. 793-798.
8. *Примачук Л. П.* - ДАН БССР. 1970. Т. 14. N1. С. 5-7.
9. *Спитковский И. М., Тишин П. М.* - Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. N 6, С. 751-756.
10. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Математика в высшей школе. 2006. Т. 42. N2. С. 10-16.

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Փ. Ա. Թալալյան

Об одной теореме из теории равномерного
распределения последовательностей

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 21/1 2015)

Ключевые слова: *равномерно распределенные последовательности.*

Известен следующий результат ([1], теорема 2.6).

Теорема 1. *Пусть последовательность $x_n, n=1,2,\dots$, равномерно распределена на $[0,1]$. Тогда имеет место равенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n|x_{n+1} - x_n| = \infty.$$

В монографии [1] данная теорема выводится как следствие из критерия Вейла и одной тауберовой теоремы Харди.

В настоящей заметке дается новое простое доказательство указанной теоремы, опирающееся только на определение равномерной распределенности и не использующее никаких вспомогательных фактов. При этом предложенный метод позволяет рассматривать сразу многомерный случай.

В конце будет показано, как можно перенести тот же результат на случай многомерных последовательностей с асимптотической функцией распределения ([1], с. 63).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Пусть $s \geq 1$ – натуральное число, s -мерные векторы будут обозначены через $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{x}_n$ и т. д.

Если $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, причем $a_i < b_i$ для всех $i=1, \dots, s$, то через $[\bar{a}, \bar{b})$ обозначим s -мерный полуоткрытый справа интервал, определенный точками \bar{a} и \bar{b} , т. е.

$$[\bar{a}, \bar{b}) = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, \dots, s\}.$$

Далее, если r – действительное число, через \bar{r} обозначим s -мерный вектор, все координаты которого равны r . Таким образом,

$$\bar{0} = (0, \dots, 0), \quad \bar{1} = (1, \dots, 1), \quad \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

Если $\bar{x} \in R^s$ и $F \subset R^s$, то через $|\bar{x}|$ и $|F|$ будут обозначены модуль вектора \bar{x} и, соответственно, s -мерный объем F (если он существует).

Наконец, если $F \subset R^s$, $\bar{x}_n \in [\bar{0}, \bar{1}]$, $i = 1, 2, \dots$ и N – натуральное число, то, следуя [1], через $A(F; N; (\bar{x}_n))$ или просто $A(F; N)$ обозначим количество членов \bar{x}_n с $n \leq N$, принадлежащих F .

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть последовательность (\bar{x}_n) равномерно распределена на s -мерном единичном кубе $[\bar{0}, \bar{1}]$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n |\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| = \infty.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть

$$n |\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots; \quad C > 0. \quad (1)$$

Обозначим для краткости

$$I = \left[\bar{0}, \left(\frac{1}{8s}\right) \right), \quad J = \left[\bar{0}, \left(\frac{1}{4\sqrt{s}}\right) \right); \quad K = \left[\bar{0}, \left(\frac{1}{2}\right) \right) \text{ и } F = [\bar{0}, \bar{1}] \setminus K,$$

где \setminus – знак теоретико-множественной разности.

Очевидно, F состоит из конечного числа попарно неперекрывающихся s -мерных сегментов. Следовательно, по условию теоремы выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(F; N)}{N} = |F|. \quad (2)$$

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| < \frac{1}{8\sqrt{s}} \quad \text{при } n \geq n_0. \quad (3)$$

Пусть (n_i) – бесконечная строго возрастающая последовательность номеров, для которых

$$n \geq n_0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_{n_i} \in I. \quad (4)$$

Для каждого i обозначим через m_i наименьшее натуральное число, для которого $\bar{x}_{n_i+m_i}$ не принадлежит J . Тогда

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \geq \frac{1}{4\sqrt{s}} \quad (5)$$

и

$$|\bar{x}_{n_i} + j| \geq \frac{1}{4}, \quad j = 1, \dots, m_i - 1. \quad (6)$$

Кроме того, в силу (3) и (6) имеем

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \leq |\bar{x}_{n_i+m_i-1}| + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{s}} < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что $\bar{x}_{n_i+j} \in K$ для всех $j=0,1,\dots, m_i$, откуда следует равенство

$$A(F; n_i + m_i) = A(F; n_i), \quad i=1,2,\dots \quad (8)$$

Далее, из очевидного неравенства

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \leq |\bar{x}_{n_i}| + |\bar{x}_{n_i+1} - \bar{x}_{n_i}| + \dots + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}|$$

в силу (3) и (5) получим

$$|\bar{x}_{n_i+1} - \bar{x}_{n_i}| + \dots + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}| \geq |\bar{x}_{n_i+m_i}| - |\bar{x}_{n_i}| \geq \frac{1}{4\sqrt{s}} - \frac{1}{8\sqrt{s}} = \frac{1}{8\sqrt{s}}. \quad (9)$$

Теперь из (1) и (9) получим

$$\frac{m_i C}{n_i} > \frac{C}{n_i} + \dots + \frac{C}{n_i + m_i - 1} \geq \frac{1}{8\sqrt{s}}$$

или

$$\frac{m_i}{n_i} \geq \frac{1}{8C\sqrt{s}}, \quad i=1,2,\dots \quad (10)$$

(Заметим, что из (10) следует $\lim m_i = \infty$).

В силу (8) и (10) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{A(F; n_i + m_i)}{n_i + m_i} &= \frac{A(F; n_i)}{n_i} = \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{n_i}{n_i + m_i} = \\ &= \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_i}{n_i}} < \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}}. \end{aligned}$$

Предельным переходом при $i \rightarrow \infty$ отсюда получим

$$|F| \leq |F| \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}},$$

чего не может быть, так как у нас $|F| > 0$ и $C > 0$. Таким образом, предположение (1) приводит к противоречию. Теорема 2 доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению последовательностей с непрерывной асимптотической функцией распределения многих переменных (случай одной переменной легко сводится к случаю обычной равномерной распределенности).

Обозначим через G класс непрерывных монотонных функций, заданных на $[\bar{0}, \bar{1}]$, $g(\bar{0}) = 0$, $g(\bar{1}) = 1$ и обладающих еще тем свойством, что области

$$\{\bar{x} \in [\bar{0}, \bar{1}] : g(\bar{x}) \geq t\}$$

являются квадратуемыми.

Монотонность функций многих переменных мы понимаем в смысле Юнга ([2], с. 347).

Определение. Пусть $g \in \bar{G}$ и (\bar{x}_n) – некоторая последовательность точек $[\bar{0}, \bar{1}]$. Функцию g назовем асимптотической функцией распределения для (\bar{x}_n) , если для каждого $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A\left(\left[0, \alpha\right]; N; (g(\bar{x}_n))\right)}{N} = \alpha. \quad (11)$$

Аналог теоремы 1 имеет место также для последовательностей с асимптотической функцией распределения в смысле приведенного определения. А именно, справедлива

Теорема 3. Пусть (\bar{x}_n) – последовательность точек $[\bar{0}, \bar{1}]$ и $g \in \bar{G}$ является асимптотической функцией распределения для (\bar{x}_n) . Тогда имеет место равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n |g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| = \infty.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть

$$n |g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| \leq C; \quad n = 1, 2, \dots; \quad C > 0. \quad (12)$$

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы

$$|g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| < \frac{1}{8} \quad \text{при} \quad n \geq n_0. \quad (13)$$

Пусть n_i – строго возрастающая бесконечная последовательность такая, что

$$n_i > n_0 \quad \text{и} \quad g(\bar{x}_i) < \frac{1}{8}. \quad (14)$$

Пусть для каждого i m_i – наименьшее натуральное число, для которого

$$g(\bar{x}_{n_i+m_i}) \geq \frac{1}{4}. \quad (15)$$

Используя соотношения (12)–(15), с помощью тех же рассуждений, которые были применены при доказательстве теоремы 2, мы получим соотношение

$$A\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]; n_i + m_i; (g(\bar{x}_n))\right) = A\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]; n_i; (g(\bar{x}_n))\right)$$

и

$$\frac{m_i}{n_i} \geq \frac{1}{8C},$$

которые, как показано выше, приводят к противоречию. Теорема 3 доказана.

Институт математики НАН РА

Փ. Ա. Թալալյան

**Об одной теореме из теории равномерного
распределения последовательностей**

Приводится новое простое доказательство одной теоремы из теории равномерно распределенных последовательностей. При этом предлагаемый метод позволяет обобщать указанную теорему на многомерный случай и на случай последовательностей с асимптотической функцией распределения.

Ֆ. Ա. Թալալյան

**Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների
տեսության մի թեորեմի մասին**

Բերվում է հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների տեսության մի թեորեմի պարզ ապացույց, որը հնարավորություն է տալիս տարածելու նշված թեորեմը բազմաչափ, ինչպես նաև բաշխվածության ասիմպտոտիկ ֆունկցիա ունեցող հաջորդականությունների վրա:

F. A. Talalyan

**On a Theorem of the Theory of Uniform
Distribution of Sequences**

A new simple proof is given for a theorem from the theory of uniform distribution of sequences. The presented method provides generalization of this theorem both to multidimensional case and for sequences with asymptotic function of distribution.

Литература

1. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерно распределенные последовательности. М. Наука. 1985.
2. *Hobson E. W.* The theory of functions of a real variable. New York. 1927.

обобщаем этот результат на многомерный случай. Напомним определение многомерной системы Хаара.

Пусть D_n – множество всех двоичных интервалов длины 2^{-n} , а $D_n^d = D_n \times \dots \times D_n$ – множество всех двоичных кубов длины 2^{-n} . Положим также $D^d = \bigcup_n D_n^d$.

Пусть $j = \overline{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_d}$ – двоичное разложение числа $1 \leq j \leq 2^d - 1$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$. Обозначим

$$h^{(j)}(x) = r_{\epsilon_1}(x_1) \cdot r_{\epsilon_2}(x_2) \cdot \dots \cdot r_{\epsilon_d}(x_d),$$

где

$$r_0(t) = 1 \text{ и } r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Каждому $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d] \in D_n^d$ и $j \in \overline{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_d}$ соответствует следующая функция из системы Хаара:

$$h_I^{(j)}(x) = 2^{nd} h^{(j)}\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}, \dots, \frac{x_d - a_d}{b_d - a_d}\right).$$

Многомерной системой Хаара называется множество функций $h_I^{(j)}$ совместно с функцией $h_{[0,1]^d}^{(0)} \equiv 1$. Значения функций в точках разрыва для нас не существенны, поэтому мы их не приводим.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть имеется множество двоичных кубов $\{I_n\}$. Тогда

множество функций $\left\{ \left\{ h_{I_n}^{(j)} \right\}_{j=1}^{2^d-1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ является демократической системой в

$L_1(0,1)^d$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число N такое, что из любой последовательности двоичных кубов $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_N$ с $\mu(J_i) = 2^d \mu(J_{i-1})$ для $i = 2, 3, \dots, N$ существует по крайней мере один элемент, который не принадлежит $\{I_n\}$.

Замечание. Конечное количество элементов не может повлиять на свойство демократичности системы, поэтому для удобства в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что двоичный куб $[0,1]^d$ отсутствует в наборах двоичных кубов.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. Пусть имеются функция $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичный куб I . Тогда

$$\|f\|_I \geq |c_I^{(j)}|$$

для всех $1 \leq j \leq 2^d - 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$\left| c_I^{(j)} \right| = \mu(I) \cdot \left| \int_I f(t) h_I^{(j)}(t) dt \right| \leq \mu(I) \int_I |f(t) h_I^{(j)}(t)| dt \leq \int_I |f(t)| = \|f\|_I.$$

Лемма 1 доказана.

Для любой функции $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичного куба I положим

$$P_I(f) = f - \sum_{J \subseteq I} \sum_{j=1}^{2^d-1} c_J^{(j)} h_J^{(j)}.$$

Лемма 2. Пусть имеется функция $f \in L_1(0,1)^d$, для которой $\max_{J,j} |c_J^{(j)}| \leq 1$. Тогда для любого двоичного куба I имеет место следующее соотношение:

$$\|P_I(f)\|_I \leq 1.$$

Доказательство. Пусть $\mu(I) = 2^{-nd}$. Заметим, что функция $P_I(f)$ постоянна на множестве I , а абсолютное значение этой величины не превосходит число

$$(2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \dots + 2^{(n-1)d}) = 2^{nd} - 1 < 2^{nd}.$$

Поэтому имеем, что $\|P_I(f)\|_I \leq 2^{nd} \cdot \mu(I) = 1$. Лемма 2 доказана.

Пусть имеется набор двоичных кубов $\{I_n\}$ и $I \in \{I_n\}$. Обозначим через $K(I)$ самый маленький двоичный куб, который содержит в себе I и который не содержится в множестве $\{I_n\}$.

Лемма 3. Пусть имеется конечное множество двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^m \subset \{I_n\}$, где $\{I_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Далее, пусть

$$K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) = \left\{ K(J) : J \{J_s\}_{s=1}^m \right\}.$$

Тогда

$$\#\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) \geq \frac{m}{2^{(N-1)d}}.$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из определения $K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right)$ и условий леммы.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть условие теоремы не выполняется. Для произвольно большого M положим $N = (2^d - 1)M$ и выберем множество двоичных кубов $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_N$ с $\mu(J_i) = 2^d \mu(J_{i-1})$ для $i = 2, 3, \dots, N$. Легко проверить, что

$$\left\| \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{2^d-1} h_{J_i}^k \right\| < 2,$$

но

$$\left\| \sum_{i=1}^N h_{J_i}^{(1)} \right\| > \frac{N}{2}.$$

Это означает, что условие (1) не может выполняться ни при каком C .

Достаточность. Пусть условие теоремы выполняется. Далее, пусть имеется множество двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^m$ (каждый может повторяться, но не более чем $2^d - 1$ раз). По индукции по $\#K(\{J_s\}_{s=1}^m)$ с использованием лемм 1-3 легко проверить, что для любых чисел $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq 2^d - 1$ будет иметь место следующее соотношение:

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)} \right\| \geq \frac{m}{2^{Nd}}.$$

Но с другой стороны, согласно неравенству треугольника имеем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)} \right\| \leq m,$$

т. е. условие (1) выполняется при $C = 2^{Nd}$. Теорема 1 доказана.

Институт математики НАН РА
e-mail: gogyan@instmath.sci.am

С. Л. Гогян

О демократических системах в $L_1(0,1)^d$

Описаны все множества двоичных кубов $\{I_n\}$, для которых подмножество $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ многомерной системы Хаара является демократической системой в $L_1(0,1)^d$.

Ս. Լ. Գոգյան

$L_1(0,1)^d$ -ում դեմոկրատիկ համակարգերի մասին

Նկարագրված են բոլոր երկուական խորանարդների $\{I_n\}$ բազմությունները, որոնց համար Հաարի բազմաչափ համակարգի $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ ենթաբազմությունը $L_1(0,1)^d$ -ում դեմոկրատիկ համակարգ է:

S. L. Gogyan

On Democratic Systems in $L_1(0,1)^d$

All sets of dyadic cubes $\{I_n\}$ are characterized such that the subsystem $\{h_{I_n}^{(j)}\}$ of the multivariate Haar system is democratic system in $L_1(0,1)^d$.

Литература

1. *Konyagin S. V., Temlyakov V. N.* – East J. Approx. 1999. V. 5. P. 1-15.
2. *Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., Temlyakov V. N.* – Constr. Approx. 2003. V. 19. P. 575-597.
3. *Gogyan S.* – East Journal on Approximations. 2005. V. 11. P. 221-236.
4. *Gogyan S.* – J. of Contemporary Mathematical Analysis. 2011. V. 46. P. 21-31.

симметрии 6mm (4mm), их главные оси $L_6(L_4)$ параллельны оси Ox_3 . Диэлектрическая среда, в частности, может быть вакуумом. Индексами 1, 2 и 3 индексированы величины, относящиеся к подложке, тонкому слою и диэлектрической среде. $c_i, \rho_i, e_i, \varepsilon_i$ – постоянные упругости, плотности, пьезоэлектрические, диэлектрические постоянные, S_i ($i=1,2,3$) – скорости объемных упругих волн, соответственно.

Предполагается, что система находится в антиплоском деформированном состоянии:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \{0, 0, u_3\}, u_3 = w(x_1, x_2, t); \vec{H} = \{0, 0, H_3\}, H_3 = H_3(x_1, x_2, t), \\ \vec{E} &= \{E_1, E_2, 0\}, E_i = E_i(x_1, x_2, t), i=1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

С учетом соотношений (2.1) уравнения состояния имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x_1} - e_{15} E_1, \quad \sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x_2} - e_{15} E_2, \quad D_1 = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \varepsilon_{11} E_1, \\ D_2 &= e_{15} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \varepsilon_{11} E_2, \quad B_3 = \mu_{33} H_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ненулевые компоненты тензора деформации:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Уравнения движения среды и уравнения Максвелла для электромагнитного поля с учетом (2.1) и (2.2) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{44} \nabla^2 w - e_{15} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad e_{15} \nabla^2 w + \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = -\mu_{33} \frac{\partial H_3}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_3}{\partial x_2} &= e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + \varepsilon_{11} \frac{\partial E_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = -e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - \varepsilon_{11} \frac{\partial E_2}{\partial t}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда получаем уравнения для перемещений точек основания и слоя:

$$\nabla^2 w_i = \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad (i=1, 2), \quad (2.4)$$

$$S_i^2 = \frac{\bar{c}_i}{\rho}, \quad \bar{c}_i = c_i + \frac{e_i^2}{\varepsilon_i} = c_i \left(1 + \frac{e_i^2}{\varepsilon_i c_i} \right) = c_i (1 + \chi_i^2), \quad \chi_i^2 = \frac{e_i^2}{\varepsilon_i c_i}, \quad c_i = c_{44}^{(i)}, \quad e_i = e_{15}^{(i)}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)},$$

\bar{c}_i – приведенная упругая постоянная, S_i – скорости объемных электроупругих волн в направлении оси Ox_i , χ_i^2 – коэффициенты электро механической связи. Уравнения магнитного поля основания и слоя представляются в следующем виде:

$$\nabla^2 H_3^{(i)} = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 H_3^{(i)}}{\partial t^2}, \quad a_i^2 = \frac{1}{\varepsilon_i \mu_i}, \quad \mu_i = \mu_{33}^{(i)} \quad (i=1, 2), \quad (2.5)$$

a_i – скорости света в соответствующих средах.

В диэлектрической среде уравнения Максвелла имеют вид

$$\frac{\partial E_2^{(3)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial x_2} = -\mu_3 \frac{\partial H_3^{(3)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3^{(3)}}{\partial x_2} = \varepsilon_3 \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3^{(3)}}{\partial x_1} = -\varepsilon_3 \frac{\partial E_2^{(3)}}{\partial t}.$$

Откуда, исключая напряженности электрических полей, получим

$$\nabla^2 H_3^{(3)} = \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2 H_3^{(3)}}{\partial t^2}, \quad a_3^2 = \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_3}. \quad (2.6)$$

a_3 – скорость света, ε_3 и μ_3 – диэлектрическая и магнитная постоянные.

2.1. Граничные и контактные условия. На плоскости $x_2 = 0$ должны быть непрерывны перемещения, тангенциальная составляющая электрического поля, касательная компонента напряжения и нормальная составляющая электрического смещения:

$$w_1 = w_2, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)}. \quad (2.7)$$

На границе слоя $x_2 = -h_2$ должны быть непрерывны касательная составляющая электрического поля, нормальная составляющая вектора смещения и должна быть равна нулю касательная составляющая напряжения:

$$E_1^{(2)} = E_1^{(3)}, \quad \sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad D_2^{(2)} = D_2^{(3)}. \quad (2.8)$$

Последние условия в (2.7) и (2.8) можно заменить на условия непрерывности касательной составляющей напряженности магнитного поля: $H_3^{(1)} = H_3^{(2)}$ при $x_2 = 0$ и $H_3^{(2)} = H_3^{(3)}$ при $x_2 = -h_2$.

Граничные условия на экранированной границе $x_2 = -(h_2 + h_3)$:

а. В случае экрана электрического поля необходимо, чтобы равнялась нулю касательная составляющая электрического поля

$$E_1^{(3)} = 0. \quad (2.9)$$

б. В случае экрана магнитного поля необходимо, чтобы равнялась нулю касательная составляющая магнитного поля

$$H_3^{(3)} = 0, \quad (2.10)$$

что эквивалентно следующему условию:

$$D_2^{(3)} = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда в частности следует, что в квазистатическом приближении условие (2.11) эквивалентно следующему условию:

$$E_1^{(3)} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_3 = 0, \quad (2.12)$$

где φ_3 – электрический потенциал диэлектрической среды.

Следовательно, условия (2.9) или (2.12) в квазистатическом приближении соответствуют экрану электрического поля, а условие (2.11) – экрану магнитного поля. Таким образом, полностью динамический подход важен также тем, что позволяет объяснить смысл условий на экране в квазистатическом приближении.

2.2 Условия затухания. В пьезоэлектрической подложке w_1 и $H_3^{(1)}$ должны затухать при удалении от поверхности среды вглубь, т. е. должны выполняться следующие условия

$$\lim w_1 = 0, \quad \lim H_3^{(1)} = 0, \quad x_2 \rightarrow +\infty.$$

В частном случае, когда экран находится в бесконечности, должно выполняться условие:

$$\lim H_3^{(3)} = 0, \quad x_2 \rightarrow -\infty, \quad (2.13)$$

которое согласуется с условием (2.10), и можно показать, что оно эквивалентно также условию (2.9), когда $x_2 \rightarrow -\infty$. Таким образом, когда экран находится в бесконечности, условия (2.9) и (2.10) эквивалентны условию затухания (2.13).

Ставится задача: в полностью динамической постановке найти и исследовать электромагнитоупругие волновые поля в рассматриваемой пьезоэлектрической структуре, с учётом граничных, контактных условий и условий затухания, а также найти соответствующее дисперсионное уравнение.

3. Решение задачи в виде плоских волн. а) Решение уравнений (2.4) и (2.5) в подложке ищем в виде плоских волн:

$$w_1 = W_{10} e^{i(qx_2 + px_1 - \omega t)}, \quad H_3^{(1)} = H_{10} e^{i(qx_2 + px_1 - \omega t)}, \quad (3.1)$$

где p и q – горизонтальное и поперечное волновые числа, $\omega > 0$ – круговая частота, W_{10} , H_{10} – амплитуды волны. Подставляя выражения (3.1) в уравнения (2.4) и (2.5), получим:

$$q = \pm ip\beta_1(V), \quad \beta_1(V) \equiv \sqrt{1 - V^2 / S_1^2}, \quad q = \pm ip\gamma_1(V), \quad \gamma_1(V) \equiv \sqrt{1 - V^2 / a_1^2}, \quad (3.2)$$

где V – фазовая скорость искомой поверхностной волны. Чтобы удовлетворить условию затухания при $x_2 \rightarrow +\infty$, необходимо выполнение следующих условий:

$$\beta_1(V) > 0 \quad \text{и} \quad \gamma_1(V) > 0, \quad (3.3)$$

для чего нужно взять положительные значения q , тогда имеем:

$$w_1 = W_{10} e^{-p\beta_1(V)x_2} e^{i(px_1 - \omega t)}, \quad H_3^{(1)} = H_{10} e^{-p\gamma_1(V)x_2} e^{i(px_1 - \omega t)}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) следует

$$V < S_1 < a_1. \quad (3.5)$$

Отсюда заключаем, что, если поверхностная волна существует, то ее фазовая скорость не превосходит скорости объемных электроупругих волн в подложке. Итак, волновой процесс в подложке описывается функциями (3.4), где W_{10} и H_{10} – постоянные, а $\beta_1(V)$ и $\gamma_1(V)$ – коэффициенты затухания. В основании скорости удовлетворяют условию (3.5).

б) Волновые поля в слое. Решение ищем в виде

$$w_2 = W_{20} e^{i(qx_2 + px_1 - \omega t)}, \quad H_3^{(2)} = H_{20} e^{i(qx_2 + px_1 - \omega t)}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в уравнения (2.4), (2.5), получим:

$$q = \pm p\beta_2(V), \quad \beta_2(V) = \sqrt{V^2 / S_2^2 - 1}, \quad q = \pm i\gamma_2(V), \quad \gamma_2(V) = \sqrt{1 - V^2 / a_2^2}. \quad (3.7)$$

Поскольку $V < \alpha_2$, то $\gamma_2(V) > 0$. Что касается величины $\beta_2(V)$, то она может быть как действительной положительной, так и комплексной. В первом случае, когда $V > S_2$, в слое будут распространяться однородные электроупругие волны. Во втором случае, когда $V < S_2$, в слое будут распространяться неоднородные волны; в задаче Лява таких волн нет. Магнитные волны всегда будут неоднородными. Следовательно, для решений в слое $\beta_2(V)$ в (3.7) может быть как действительным, так и комплексным:

$$w_2 = \left(W_{20}^- e^{-ip\beta_2(V)x_2} + W_{20}^+ e^{ip\beta_2(V)x_2} \right) e^{i(px_1 - \alpha x)},$$

$$H_3^{(2)} = \left(H_{20}^- e^{-ip\gamma_2(V)x_2} + H_{20}^+ e^{p\gamma_2(V)x_2} \right) e^{i(px_1 - \alpha x)}. \quad (3.8)$$

в) Волновые поля в диэлектрической среде ищем в виде

$$H_3^{(3)} = H_{30} e^{i(qx_2 + px_1 - \alpha x)}. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом получим

$$q = \pm i\gamma_3(V), \quad \gamma_3(V) = \sqrt{1 - V^2 / a_3^2}. \quad (3.10)$$

Поскольку $V < a_3$, то выполняется условие $\gamma_3(V) > 0$. Решение представляется в виде

$$H_3^{(3)} = \left(H_{30}^- e^{-p\gamma_3(V)x_2} + H_{30}^+ e^{p\gamma_3(V)x_2} \right) e^{i(px_1 - \alpha x)}. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы нашли решение задачи в виде суммы составляющих решений (3.4), (3.8) и (3.11) в подложке, тонком слое и диэлектрической среде, соответственно.

4. Дисперсионное уравнение. Подставив решения (3.4), (3.8) и (3.11) в граничные условия и условия затухания, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд W_{20}^- , W_{20}^+ , H_{20}^- , H_{20}^+ , а из условия существования ненулевого решения этой системы вытекает следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \bar{c}_1\beta_1 - i\bar{c}_2\beta_2 & \bar{c}_1\beta_1 + i\bar{c}_2\beta_2 & \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\omega} & \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\omega} \\ \omega(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) & \omega(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) & \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \\ i\bar{c}_2\beta_2 e^{ik_2\beta_2} & -i\bar{c}_2\beta_2 e^{-ik_2\beta_2} & \frac{\bar{e}_2}{\omega} e^{k_2\gamma_2} & \frac{\bar{e}_2}{\omega} e^{-k_2\gamma_2} \\ \omega\bar{e}_2 e^{ik_2\beta_2} & \omega\bar{e}_2 e^{-ik_2\beta_2} & \left(\frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \delta_3 \right) e^{k_2\gamma_2} & - \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \delta_3 \right) e^{-k_2\gamma_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь $\bar{e}_1 = e_1 / \varepsilon_1$, $\bar{e}_2 = e_2 / \varepsilon_2$.

Ниже представлены дисперсионные кривые для конкретной структуры (рис.1-3), когда пьезоэлектрический слой представляет собой окись теллура TeO_2 (параметры: $\rho_2 = 6.0 \times 10^3$, $S_2 = 2097$, $c_2 = 2.65 \times 10^{10}$, $\varepsilon_2 = 20.0 \times 10^{-11}$, $\varepsilon_3 = 8.85 \times 10^{-12}$, $e_2 = 0$), а подложка – окись цинка ZnO (параметры: $\rho_1 = 5.7 \times 10^3$, $S_1 = 2898$, $c_1 = 4.25 \times 10^{10}$, $\varepsilon_1 = 7.38 \times 10^{-11}$, $e_1 = -0.59$), диэлектрическая среда – вакуум ($\varepsilon_3 = 8.85 \times 10^{-12}$) (т.е. рассматривается случай мягкого слоя, когда $S_2 < S_1$). Для этой структуры исследованы три различных случая расположения электрического экрана:

1. экран находится на конечном расстоянии от пьезоэлектрического слоя ($\delta_3 = 0.5$) (рис.1),

2. экран находится в бесконечности ($\delta_3 = 1$) (рис.2),

3. экран находится на поверхности пьезоэлектрического слоя ($\delta_3 = 0$) (рис.3).

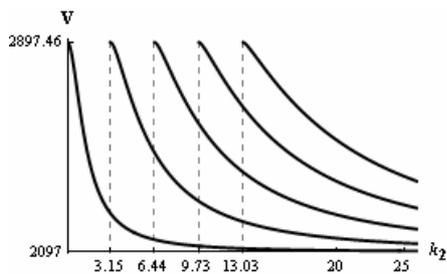


Рис.1. $\delta_3 = 0.5$, $BG=2897.46$.

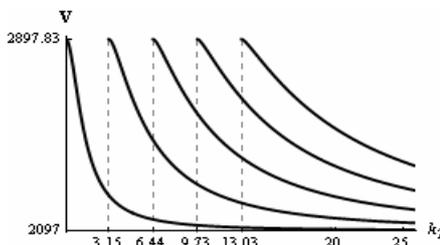


Рис.2. $\delta_3 = 1$, $BG=2897.83$.

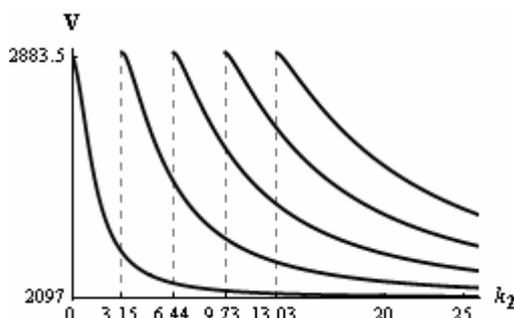


Рис.3. $\delta_3 = 0$, $BG=2883.5$.

Скорость первой моды начинает убывать от значения скорости волны Блюстейна–Гуляева, скорости остальных мод – от скорости объемной волны в подложке до скорости объемной волны в слое (рис. 1). А когда экран в бесконечности или на поверхности слоя (рис. 2, 3), скорости всех мод начинаются от скорости волны Блюстейна–Гуляева и убывают асимптотически до скорости объемной волны в слое.

5. Заключение. 1. В полностью динамической постановке найдены выражения для расчёта электромагнитоупругих волновых полей в слоистых пьезоупругих конструкциях с электрическим (магнитным) экраном. Найдены дисперсионные соотношения, определяющие вопросы существования и поведения поверхностных электромагнитоупругих волн.

2. Для структуры с мягким слоем в зависимости от толщины пьезоэлектрического слоя возникают моды электромагнитоупругих волн, причем в случае конечной толщины диэлектрического слоя (рис.1) скорость первой моды начинает убывать от скорости волны Блюстейна–Гуляева, а последующие начинаются от скорости объемной волны в подложке. А когда экран в бесконечности или на поверхности слоя (рис. 2, 3), скорости всех мод начинаются от скорости волны Блюстейна–Гуляева и убывают асимптотически до скорости объемной волны в слое.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13RF-086.

Институт механики НАН РА
e-mail: levous@mail.ru

Յ. Ն. Դանոյան, Լ. Ա. Ատոյան, Ս. Լ. Տահակյան

Электромагнитоупругие поверхностные волны в слоистых пьезоактивных структурах при наличии электрического (магнитного) экрана

В полностью динамической постановке исследованы вопросы существования и распространения электромагнитоупругих поверхностных волн в слоистых пьезоактивных средах с электрическим (магнитным) экраном. Получено и исследовано дисперсионное уравнение.

Ջ. Ն. Դանոյան, Լ. Հ. Աթոյան, Ս. Լ. Տահակյան

Էլեկտրամագնիսական մակերևութային ալիքները շերտավոր պիեզոակտիվ կառուցվածքում էլեկտրական (մագնիսական) էկրանի առկայությամբ

Լրիվ-դինամիկ դրվածքով հետազոտվել են էլեկտրամագնիսական մակերևութային ալիքների գոյության և տարածման հարցերը շերտավոր պիեզոակտիվ կառուցվածքներում: Գտնվել է և հետազոտվել դիսպերսիոն հավասարումը:

Z. N. Danoyan, L. H. Atoyan, S. L. Sahakyan

Electro-Magneto-Elastic Surface Waves Existence and Propagation in Piezoelectric Layered Medium in the Presence of an Electric Screen

The problems of existence and behavior of electro-magneto-elastic surface waves in a layered piezoelectric structure with an electric (or magnetic) screen are investigated. The dispersion equation is derived and investigated.

Литература

1. Tiersten H. F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York, Plenum: 1969.
2. Mindlin R. D. In: Complex variable analysis and its applications. 1978. P. 397-400.
3. Lee P. C. Y. - J. Appl. Phys. 1991. V. 69. P. 7470-7473.
4. Yang J. S. - Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics. 12. 2000. P. 235-240. Appl. Phys.
5. Li S. - J. Appl. Phys. 1996. V. 80. N 9. P.1.
6. Bleustein J. L.- Appl. Phys. Lett. 1969. V. 13. P. 412-414.
7. Gulyaev Y. V. - Sov. Phys. JEPT Lett. 1969. V. 9. P. 37-38.

8. *Danoyan Z. N, Atoyany L. H., Danoyan N. Z.* In: Topical Problems of Continuum Mechanics. The Proceed. of Intern. Conf. 4-8 October 2010. Dilijan, Armenia. P. 266-271.
9. *Даноян З. Н., Атоян Л. А., Саакян С. Л., Даноян Н. З.* В кн.: Материалы 3-й междунар. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 8-12 окт. 2012. Цахкадзор. РА. С. 215-219.

for spheres should minimize in all $N = \sum_{j=1}^m N_j$ given positions of e geometric (radial) deviations Δ_{ji} of points B_{ji} from these spheres:

$$\Delta_{ji} = \left| \overline{AB_{ji}} \right| - R_j = \left(R_{B_{ji}}^2 + R_A^2 - 2\overline{R_{B_{ji}}} \overline{R_A} \right)^{\frac{1}{2}} - R_j, \quad (1)$$

where $\overline{R_{B_{ji}}}$ and $\overline{R_A}$ are the position vectors of points B_{ji} and A from the origin 0.

The objective function estimating the closeness of points B_{ji} to the approximating sphere λ_j may have different forms depending on the selected criteria of closeness (approximation measure). As mentioned above, here we use the least square objective which requires to minimize the sum of squared radial deviations (1) of points B_{ji} from λ_j^E . However, there is no closed form solution for the approximating sphere based on this objective since the sphere center coordinates X_A, Y_A, Z_A are in the radicand of (1), and a lengthy iterative search routine is required to determine them. In order to avoid these computational difficulties we use another error function proposed in [2] for the single sphere case:

$$\Delta q_{ji} = \left| \overline{AB_{ji}} \right|^2 - R_j^2 = \Delta_{ji} \left(\overline{AB_{ji}} + R_j \right). \quad (2)$$

Clearly, $\Delta q_{ji} = 0$ if only point B_{ji} lies on the sphere λ_j^E , also, Δq_{ji} is small if the point lies near the sphere. Now, since $\left(\overline{AB_{ji}} \right)^2 = \left(R_j + \Delta_{ji} \right)^2 = R_j^2 + R_j \Delta_{ji} + \Delta_{ji}^2$, it follows from (2) that if points B_{ji} are rather close to λ_j^E , and Δ_{ji}^2 can be neglected, then $\Delta q_{ji} \approx 2R_j \Delta_{ji}$, i.e. Δq_{ji} is proportional to Δ_{ji} and can substitute it in the further minimization procedures. To determine the approximating concentric spheres λ_j^E ($j=1, 2, \dots, m$) we transform (2) to the following linear function:

$$\Delta q_{ji} = -2 \left(X_{B_{ji}} X_A + Y_{B_{ji}} Y_A + Z_{B_{ji}} Z_A + H_j - \frac{1}{2} R_{B_{ji}}^2 \right), \quad (3)$$

where H_j is a constant depending only on the sphere parameters:

$$H_j = \frac{1}{2} \left(R_j^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2 \right), \quad (4)$$

Now we form the objective function as the sum of squared algebraic deviations determined for m subsets of the given positions e_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$):

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \Delta_{q_{ji}}^2. \quad (5)$$

For any point B (x_B, y_B, z_B) given in e the concentric spheres λ_j^E ($j=1, 2, \dots, m$) approximating the corresponding sets of positions B_{ji} of B in E should be determined from the necessary conditions for a minimum of (5):

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial R_m} = 0. \quad (6)$$

After substituting into (5) from (4) and using for brevity notations X_{ji} , Y_{ji} , Z_{ji} , R_{ji} for $X_{B_{ji}}$, $Y_{B_{ji}}$, $Z_{B_{ji}}$ and $R_{B_{ji}}$ respectively, conditions (6) can be reduced to the following system of $(3+m)$ linear equations in X_A, Y_A, Z_A, H_j ($j= 1, 2, \dots, m$) presented below in a matrix form:

$$M^E P^E = F^E, \quad (7)$$

where

$$M^E = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji}^2 & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji} Y_{ji} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji} Z_{ji} & \sum_{i=1}^{N_1} X_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} X_{mi} \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji} Y_{ji} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Y_{ji}^2 & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Y_{ji} Z_{ji} & \sum_{i=1}^{N_1} Y_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} Y_{mi} \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji} Z_{ji} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Y_{ji} Z_{ji} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Z_{ji}^2 & \sum_{i=1}^{N_1} Z_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} Z_{mi} \\ \sum_{i=1}^{N_1} X_{1i} & \sum_{i=1}^{N_1} Y_{1i} & \sum_{i=1}^{N_1} Z_{1i} & N_1 & \dots & 0 \\ \sum_{i=1}^{N_2} X_{2i} & \sum_{i=1}^{N_2} Y_{2i} & \sum_{i=1}^{N_2} Z_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{i=1}^{N_m} Z_{1i} & \sum_{i=1}^{N_m} Y_{mi} & \sum_{i=1}^{N_m} Z_{mi} & 0 & \dots & N_m \end{bmatrix},$$

$$P^E = [X_A, Y_A, Z_A, H_1, \dots, H_m]^T,$$

$$F^E = \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ji} R_{ji}^2, \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Y_{ji} R_{ji}^2, \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} Z_{ji} R_{ji}^2, \dots, \sum_{i=1}^{N_m} R_{mi}^2 \right].$$

It is easy to see from (3-5) that conditions $\frac{\partial S}{\partial R_j} = 0$ in (7) are equivalent to

$$\frac{\partial S}{\partial H_j} = 0.$$

To solve the system (8) we express coordinates X_{ji} , Y_{ji} , Z_{ji} of point B in E through its coordinates x_B , y_B , z_B in e by means of the following linear transformation :

$$\begin{bmatrix} X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{oji} \\ Y_{oji} \\ Z_{oji} \end{bmatrix} + T_{ji} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, \quad (8)$$

where T_{ji} is a 3x3 rotation matrix which rotates the system xyz from a position with its axes initially parallel to the axes X, Y, Z to its i-th position of j-th given position set e_{ji} .

It follows then that if we have m sets of positions $e_{ji}(j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j)$ and if we select an arbitrary point B in e, equation (7) uniquely

determines m spheres λ_j^E ($j=1,2,\dots,m$) with the common center $A(X_A, Y_A, Z_A)$ approximating the corresponding m position sets B_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$) of point B given by (8). For the further analysis, it is convenient to present the solution of (7) in the vector form:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1, \dots, H_m) = \frac{1}{D} (D_X, D_Y, D_Z, D_{H_1}, D_{H_2}, \dots, D_{H_m}) \quad (9)$$

where $D_X, D_Y, D_Z, D_{H_1}, D_{H_2}, \dots, D_{H_m}$ are $(3+m)$ -th order determinants defined by the expanded matrix of (7). The solution (9) exists and is uniquely determined, unless the coefficient matrix m of the system (7) is singular. This can happen if only all points B_{ji} are coplanar [2].

After determining the coordinates of the common center A of spheres λ_j and constants H_j by (10), we find the radii R_j of λ_j from (4):

$$R_j = (X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 + 2H_j)^{\frac{1}{2}}, \quad j=1,2,\dots,m.$$

Substituting (4) for H_j into the last m equations of (7), we obtain another expression for R_j :

$$R_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \left[(X_{ji} - X_A)^2 + (Y_{ji} - Y_A)^2 + (Z_{ji} - Z_A)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad j=1,2,\dots,m. \quad (10)$$

It follows from (10) that the radius of each j -th approximating sphere λ_j is the root-mean-square of distances $A B_{ji}$ ($i=1, 2, \dots, N_j$) between the common center A of all spheres λ_j and N_j positions B_{ji} ($i=1, 2, \dots, N_j$) of B in the j -th set of prescribed positions e_{ji} ($i=1, 2, \dots, N_j$).

Correspondence between points of e and E. Determinants in the right side of (9) are functions of the coordinates x_B, y_B, z_B of B in e. It follows from (10) then that corresponding to any point B in e there is a unique fixed point in E which is the common center of spheres λ_j ($j=1, 2, \dots, m$) approximating in the last square sense given m alternating sets of point-positions B_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$).

If we invert the moving and fixed bodies so that e becomes the fixed body and E moves so as to maintain the same relative positions as in the original motion, we obtain the following expression for error functions $\Delta_{q_{ji}}$:

$$\Delta_{q_{ji}} = (\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 - R_j^2 - 2 \left(x_B x_{A_{ji}} + y_B y_{A_{ji}} + z_B z_{A_{ji}} + h_j - \frac{1}{2} r_{B_{ji}}^2 \right), \quad (11)$$

where $\bar{r}_B(x_B, y_B, z_B)$ and $\bar{r}_{A_{ji}}(x_{A_{ji}}, y_{A_{ji}}, z_{A_{ji}})$ are vectors from the origin o_{ji} in e to points B and A_{ji} respectively, while h_j are constants depending on the parameters of concentric spheres λ_j to be determined:

$$h_j = \frac{1}{2} (R_j^2 - r_B^2) = \frac{1}{2} (R_j^2 - x_B^2 - y_B^2 - z_B^2), \quad j=1,2,\dots,m. \quad (12)$$

Assuming we have a point A in E, the corresponding m concentric spheres λ_j^e in e which approximate best m sets of inverted positions A_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$) of A should satisfy the necessary conditions for a minimum of (5):

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial h_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial h_m} = 0. \quad (13)$$

Substituting into (13) from (5) and (11), we can transform conditions (13) into a system of (3+m) linear equations in $x_B, y_B, z_B, h_1, \dots, h_m$ which we present in the matrix form assuming notations by analogy with (7):

$$M^e p^e = F^e. \quad (14)$$

Expressions of M^e, P^e and F^e in (14) are similar to those for M^E, P^E and F^E in (7) and can be easily written by a simple change of notations.

Coordinates $x_{A_{ji}}, y_{A_{ji}}, z_{A_{ji}}$ of inverted positions A_{ji} of point A in e can be determined by the following formula of linear transformation:

$$\begin{bmatrix} x_{A_{ji}} \\ y_{A_{ji}} \\ z_{A_{ji}} \end{bmatrix} = T_{ji}^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_{oji} \\ Y_A - Y_{oji} \\ Z_A - Z_{oji} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

where T_{ji}^{-1} is 3x3 matrix inverse to T_{ji} in (8).

Equation (14) establishes a correspondence between points A of E and the centers B of concentric sphere sets $\{\lambda_j^e\}$ in e approximating m sets of inverted positions A_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$) defined by (15). The singular case of this correspondence for $m=1$ is studied in [2].

Points of e deviating least from concentric spheres. Now we proceed to the main issue in this study: which points of e will approximate best concentric spheres λ_j^E in alternating sets of given positions e_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$). The sum (5) is a function of (6+m) variables: $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R_j$ ($j=1, 2, \dots, m$). Therefore, for S to be a minimum, *the following conditions are necessary:*

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0, \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0, \frac{\partial S}{\partial Z_A} = 0, \frac{\partial S}{\partial x_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial z_B} = 0, \frac{\partial S}{\partial R_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

It is easy to see that equations (16) can be obtained by combining systems (6) and (13) discussed above. This means that any set of the sought-for (6+m) parameters for which S has a minimum should satisfy to equations (6) and (13). The foregoing leads to the following theorem which gives a geometric interpretation to the conditions (16).

Theorem. *In order for a moving point-fixed center pair (B, A) to cause the sum (5) to be a minimum it is necessary that:*

- 1) *A be a common center of spheres λ_j^E ($j=1, 2, \dots, m$) approximating m sets of positions B_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$) of point B which it occupies in given positions e_{ji} of e with respect to E,*
- 2) *B be the common center of spheres λ_j ($j=1, 2, \dots, m$) approximating m sets of inverted positions A_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, N_j$) of point A which it occupies in inverted positions E_{ji} of E with respect to e.*

To study the locus of points in e for which S has stationary values, we first present the 4-th, 5-th and 6-th equations of (16) in the following form:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \Delta q_{ji} \frac{\partial \Delta q_{ji}}{\partial x_B} = 0, \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \Delta q_{ji} \frac{\partial \Delta q_{ji}}{\partial y_B} = 0, \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \Delta q_{ji} \frac{\partial \Delta q_{ji}}{\partial z_B} = 0,$$

then substitute in them relations $\frac{\partial \Delta_{q_{ij}}}{\partial x_B} = -2x_{A_j}$, $\frac{\partial \Delta_{q_{ij}}}{\partial y_B} = -2y_{A_j}$, $\frac{\partial \Delta_{q_{ij}}}{\partial z_B} = -2z_{A_j}$ following from (11) and expression (3) for $\Delta_{q_{ij}}$, which yields the following 3 equations:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \left(X_{ji} X_A + Y_{ji} Y_A + Z_{ji} Z_A + H_j - \frac{1}{2} R_{ji}^2 \right) x_{A_j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \left(X_{ji} X_A + Y_{ji} Y_A + Z_{ji} Z_A + H_j - \frac{1}{2} R_{ji}^2 \right) y_{A_j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \left(X_{ji} X_A + Y_{ji} Y_A + Z_{ji} Z_A + H_j - \frac{1}{2} R_{ji}^2 \right) z_{A_j} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Substituting in (17) expressions of $x_{A_j}, y_{A_j}, z_{A_j}$ from (15) and relations $X_A = D_X/D$, $Y_A = D_Y/D$, $Z_A = D_Z/D$ from (10), after some transformations we can express equations (17) as

$$\begin{aligned} V_l = K_1^l D_X^2 + K_2^l D_Y^2 + K_3^l D_Z^2 + \sum_{j=1}^m K_{4j}^l D_X D_{H_j} + \sum_{j=1}^m K_{5j}^l D_Y D_{H_j} + \sum_{j=1}^m K_{6j}^l D_Z D_{H_j} + K_7^l D_X D + \\ K_8^l D_X D K_9^l D_X D + \sum_{j=1}^m K_{10j}^l D_{H_j} D + K_{11}^l D^2 + K_{12}^l D_X D_Y + K_{13}^l D_X D_Z + K_{14}^l D_Y D_Z = 0 \quad (l = x, y, z) \end{aligned}$$

where coefficients $K_1^l \dots K_{14}^l (l = x, y, z)$ are linear or zero order functions of x_B, y_B, z_B .

V_x, V_y, V_z in (18) are homogenous quadratic forms in $D, D_X, D_Y, D_Z, D_{H_j}$. The analysis carried out in [2] for the case of a single set of given positions ($m=1$) has shown that determinants D, D_X, D_Y, D_Z can be expanded into 6-th order and $D_{H_j} (j=1, 2, \dots, m)$ into 8-th order polynomials in x_B, y_B, z_B . Furthermore, it has been established that equations (18) studied for $m=1$ define 3 algebraic surfaces of 13-th order embedded in e . Points of intersection of these surfaces correspond to the stationary values of the objective function (5). It has been proved in [8] that the maximum number of real points which can generally satisfy the equations (18) is not more than 245. It is easy to be convinced that these results do not depend on the number m of position sets and remain valid for $m > 1$, too. This indicates that, in general, it is likely to expect a large number of points in e which bring to a minimum of S . Among them, we should determine the points which approximate concentric spheres with a sufficient accuracy.

An interactive method for determining the local minimums of S . Algebraic deviations (distances) Δq_{ji} of point-position sets considered above from a sphere are bilinear functions of $(6+m)$ parameters $X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, H_j (j=1, 2, \dots, m)$ which can be represented as linear functions (5) and (12) by fixing a point $B (x_B, y_B, z_B)$ in e and A point $A (X_A, Y_A, Z_A)$ in E respectively. This property allows to avoid the solution of the nonlinear system (19) in determining local minimums of S and to use the method of successive linear iterations developed in [8] for locating the so called least square circle points of

a moving plane which approximate a circle in a given planar motion. The basic idea of the method follows from a theorem formulated in [8] which is applicable to any motion approximation problem with an associated bilinear error function. We reformulate it below in terms of the problem under consideration.

Theorem 2. *If $S^{(1)}$ is the value of S for the approximating concentric sphere set $\{\lambda_j^E\}^{(1)}$ with the center $A^{(1)}$ determined by (9) for m sets of positions $B_{ji}^{(1)}$ ($j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,N_j$) of an arbitrary point $B^{(1)}$ of e and $S_0^{(1)}$ is the value of S for the approximating concentric sphere set $\{\lambda_j^e\}^{(1)}$ with the center $A^{(1)}$ determined by (14) for m sets of the inverted positions $A_{ji}^{(1)}$ ($j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,N_j$) of $A^{(1)}$, then $S_0^{(1)} \leq S^{(1)}$.*

It is easy to be convinced that the proposition of the theorem is valid also for the next and further inversions of relative positions of systems e and E , i.e. the approximating sphere set $\{\lambda_j^E\}^{(2)}$ constructed for m sets of positions $B_{ji}^{(2)}$ ($j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,N_j$) of $B^{(2)}$ will yield a value $S^{(2)}$ smaller than $S^{(1)}$, etc. Continuing this process of successive kinematic inversions, we get a series of linear multiple sphere approximation problems with a decreasing sequence $S^{(1)}, S_0^{(1)}, S^{(2)}, S_0^{(2)}, \dots$ of the objective function values which converges at one of local minimums of S . The iteration process is terminated when the prescribed accuracy of solution is achieved. The described method was tested by the numerical examples of designing a 5 (SPS) manipulator with adjustable link-lengths for the approximate generation of 2 given sets of the rigid body positions [9].

Conclusion. We have presented a study of special points of a rigid body which in m alternating sets of given positions deviate least in a least square sense from concentric spheres. The results of this paper can be considered as a generalization of the theory of so called least square sphere points developed in [2] for the case of a single set of rigid body positions. Similar to the case of a single position set, it is established that the locus of the sought-for points lies at the intersection of three 13th order algebraic surfaces. An efficient iteration method of determining these points is proposed which can be readily applied to the synthesis of reconfigurable platform-type manipulators with spherical joints and adjustable link-lengths designed for the approximate generation of given multiphase motions or multiple point-paths. It is anticipated to expand this study by including other geometrical entities corresponding to the joint constraints in spatial mechanisms, such as parallel planes, coaxial cones and cylinders.

Acknowledgement. This work is supported by the grant 13-2D181 of SCS, Armenia.

National Polytechnic University of Armenia

Academician Y. L. Sarkissyan

**Rigid Body Points Approximating Concentric
Spheres in Alternating Sets of its Given Positions**

The problem of determining the points of a body which in alternating sets of its given positions deviate least in the least square sense from concentric spheres is considered. The sought-for approximation is one which minimizes the sum of squared algebraic deviations of these points from the concentric spheres approximating their paths in each of the given sets of positions. The points of interest lie at the intersection of three 13th order surfaces corresponding to the stationary conditions of the least square objective function. The theory and methods developed here can be applied to the synthesis of spatial adjustable mechanisms for the approximate generation of multi-phase motions or multiple point-paths.

Ակադեմիկոս Յու.Լ. Սարգսյան

**Պինդ մարմնի տված դիրքերի իրարահաջորդ
բազմություններում համակենտրոն գնդեր մոտարկող
կետերի մասին**

Դիտարկվում է պինդ մարմնի այնպիսի կետերի որոշման խնդիրը, որոնք նրա նախանշված դիրքերի իրարահաջորդ բազմություններում ամենաքիչն են շեղվում համակենտրոն սֆերաներից՝ նվազագույն քառակուսիների իմաստով: Հաշվարկվող մոտարկումը նվազարկում է որոնելի կետերի համակենտրոն սֆերաներից հանրահաշվական շեղումների քառակուսիների գումարը տված դիրքերի համապատասխան բազմություններում: Ուսումնասիրության առարկա կետերը որոշվում են միջին քառակուսային շեղման նպատակային ֆունկցիայի ստացիոնարության պայմաններն արտապատկերող 13-րդ կարգի երեք հանրահաշվական մակերևույթների փոխհատումով: Հոդվածում ներկայացված տեսությունն ու մեթոդները կարող են անմիջականորեն կիրառվել կարգավորվող տարածական մանիպուլյացիոն մեխանիզմների սինթեզում, որոնք նախատեսված են տված բազմափուլ շարժումների կամ բազմակի հետազոտների մոտավոր վերարտադրության համար:

Академик Ю. Л. Саркисян

**Точки твёрдого тела, аппроксимирующие концентрические
сферы в чередующихся множествах его заданных положений**

Рассматривается задача определения точек твердого тела, которые в чередующихся множествах его положений наименее уклоняются от концентрических сфер в смысле наименьших квадратов. Искомое приближение минимизирует сумму наименьших квадратов алгебраических отклонений (расстояний) указанных

точек от концентрических сфер в соответствующих множествах заданных положений. Интересующие нас точки лежат на пересечении трёх алгебраических поверхностей тринадцатого порядка, отображающих условия стационарности целевой функции среднеквадратического отклонения. Теория и методы, разработанные в статье, могут быть непосредственно применены в синтезе пространственных регулируемых манипуляционных механизмов, предназначенных для приближённого воспроизведения заданных многоэтапных движений или множественных траекторий рабочего органа.

References

1. *Sarkissyan Y.L., Gupta K.C., Roth B.* - ASME J.Eng. 1973. V. 95. N2. P. 503-510.
2. *Sarkissyan Y. L., Gupta K. C., Roth B.* In: Trans. of IFToMM Int. Symp. on Linkages and Computer Aided Design Methods. Bucharest, Romania. 1973. V.B. 39. P. 512-521.
3. *Spath H.* - Communications. 2006. V. 11. P. 63-68.
4. *Al-Subaihi I. A.* - Int. Math. Forum. 2009. V. 4. N. 21. P. 1021-1032.
5. *Gamage S. S. H. U., Lasenby J.* - Journal of Biomechanics. 2002. V. 35. P. 87-93.
6. *Cereatty A., Camomilla V., Cappozzo A.* - Journal of Biomechanics. 2004. V. 37. P. 413-416.
7. *Ehrig R., Taylor W., Duda G., Heller M.* - Journal of Biomechanics. 2006. V. 39. N. 6. P. 2798-2809.
8. *Саркисян Ю. Л.* Аппроксимационный синтез механизмов. М. Наука. 1982. 304 с.
9. *Саркисян Ю. Л., Парикян Т. Ф., Харатян А. Г.* - Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2009. Т. 62. N3. С. 262-272.

MECHANICS

УДК 539.3

Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan

The Boundary Problem Modelling of Rough Surfaces Continuous Media with Coupled Physicomechanical Fields*

(Submitted by academician S.A. Ambartsumian 17/IV 2015)

Keywords: *contact of bodies, modelling of boundary value problems, rough surface, physical and mechanical fields, heterogeneous material.*

1. Introduction. Mathematical modelling is the basis of the study of most modern problems in physics and development of many modern innovative technologies. Among other research analyses requiring the application of mathematical modelling methods is the analysis of different surface contacts in layered structures. In the context of coupled physicomechanical fields this problem becomes particularly important with relation to the studies of dynamic processes in the composite joints with rough surfaces.

Back in 1882 Hertz solved the problem of contact between two elastic bodies with curved surfaces [1]. This classical result had the mechanics of contact interaction for about a century, before Johnson, Kendall and Roberts are founded a similar solution for adhesive contact [2] (JKR - theory). Further progress in mechanics of contact interaction in the mid-20th century is associated with Bowden and Tabor [3]. They were the first to identify the importance of accounting for the surface roughness of bodies in contact. Roughness causes the true contact area between the sliding bodies, which is a much smaller than the apparent contact area. These views changed the direction of many studies in tribology significantly, and contributed towards a number of theories of contact mechanics. Pioneering works in this field are the works of Archard [4], which concluded that when the elastic contact of rough surfaces, the contact area is approximately proportional to the normal force. Further important contributions to the theory of rough surfaces made Greenwood and Williamson [5] and Persson [6]. The main result of these works is the proof that the actual area of contact of rough surfaces in a rough approximation,

*I wish to express special gratitude to my teacher Pr. Mels Belubekyan and dedicate this research to his eightieth anniversary.

proportional to the normal force, while the characteristics of a certain micro contact (pressure, the size of micro contact) weakly depends on the load.

In the basis of mathematical modelling there have always been physical or geometric hypothetical conceptions of some components of physicommechanical fields. To model new mathematical boundary value problems in mechanics of deformable solid, considering the nature of the quantities describing physical and mechanical fields in thin-walled elements various hypotheses on distributions of characteristic variables of the stress strain fields were introduced [7]-[10]. An analogical approach was successfully applied to electromagnetoelastic fields, thus developing the theory of electromagnetoelasticity of thin-walled structural elements [11].

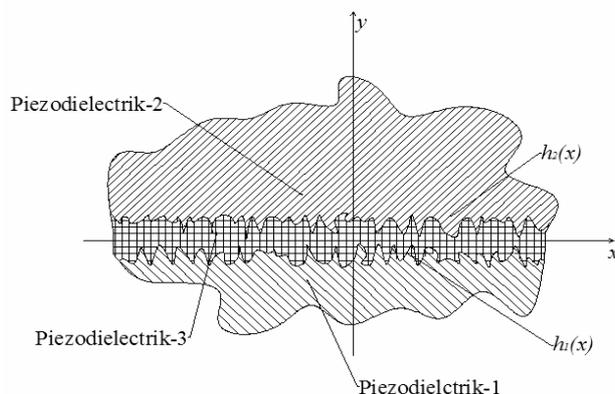


Fig. 1. Contact of rough surfaces in three-layer piezodielectric composite.

To simulate the effects associated with the influence of roughness on the amplitude coefficients of reflection and transmission at the boundary between two dielectric media with different optical parameters, it is proposed to use two new parameters: large-scale and small-scale RMS roughness [12]. The problem of contact interaction simulation with pressed to each other semi-infinite elastic rough bodies, and characterized by two widely different typical length scales for thoroughness [13], is solved by the method of successive approximations.

The solution to the problem, which belongs to the class of free boundary problems, is obtained by calculating the Green's function, which relates the pressure distribution with the normal displacements on the boundary [14]. The problem is then formulated as Feedhole's integral equation of the first kind with logarithmic kernel. When two bodies are separated by a small distance of surface roughness, adhesion and friction begin to play an important role in their interaction. The evaluation of the effect of roughness becomes extremely difficult when the roughness is comparable to the distance between the bodies.

In the paper [15] the current status of the problem is described and the problem with the introduction of dispersion forces of physical origin is explored. It was experimentally shown additives of forces introduced with the effect of roughness on the interaction between bodies. In [16], by calculating Green's function, which relates the pressure distribution in normal displacements at the interface to the adhesive contact, the authors conducted an

analysis of adhesive rough surface contact. In another work [17] studied the influence of surface roughness on the entered modelled dispersion forces. The analysis is carried out opinions on crucial issues.

By introduction of surface-exponential functions (Surface Exponential Function-SEF), the present article formulates new hypotheses about the distributions of the relevant characteristic of physicomachanical values (hypotheses MELS) depending on the model of docking of rough-boundary environments with different coupled physicomachanical fields.

2. Model contacts adjacent to half-spaces with rough surfaces. Let's consider a dynamic process at the junctions of the two half-spaces with rough surfaces $y = h_1(x)$ and $y = h_2(x)$ respectively (Fig.1).

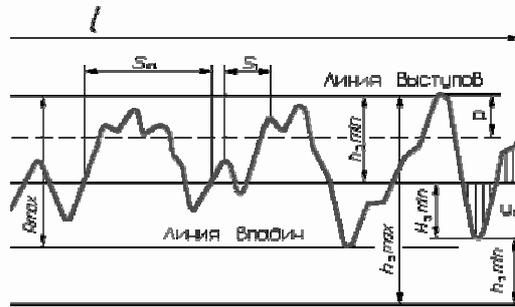


Fig. 2. Roughness contour and the basic roughness parameters: l -base line, m -centre line, S_{im} -the average pitch of the irregularities of the profile, R_{max} -maximum height of the profile.

The coordinate system xoy is chosen so that the surface is perpendicular to the parallel roughness, and the axis oz is parallel to these lines. The connection via elastic rough surfaces always forms a three-layer composite. Different methods of layer connection lead naturally to the formation of different three-layer packets on the surface zone of the compounds. A set of random function $y = h_m(x)$; $m = 1; 2$, which defines the main parameters of roughness (Fig. 2) plays a decisive role in connecting surfaces. The roughness contour depicts the number, shape and size of the projections and depressions of the irregularities. Considering the fact that the height of the projections and depressions of the surface roughness ranges from 0.08 to 500 microns or more, and the ratio of the average step roughness on the height profile is of one hundred $S_{im} \sim 100 \cdot R_{max}$, it can be assumed that $h_m(x) \in L_1\{\mathbb{R}\}$ in relation to the functions of roughness.

Generally, the materials of the adjacent environments can have different properties and can be described by different thermodynamic material ratios. Reservations, regarding the nature of the coupling of physical fields or the linearity/nonlinearity of the thermodynamic material ratios in each composite environment, will be addressed upon the necessity in certain tasks.

Firstly, we'll consider the case of pasted half-spaces, from which by producing of material permanent adhesive environment to zero, we get the problem of rough surfaces with a vacuum gap of variable thickness.

Model-1 Two elastic deformable half-space made of materials characterized by associated physical fields (electro-elasticity, magneto-elasticity, thermos-elasticity, etc.) interconnected by glue with relevant physical and mechanical characteristics. Then in each half-space

$$\Omega_1 = \{|x| < \infty, -\infty < y \leq h_1(x), |z| < \infty\}$$

and

$$\Omega_2 = \{|x| < \infty, h_2(x) \leq y < \infty, |z| < \infty\}$$

the corresponding equations of the environment are solved, $L_{1n}[u_i, \varphi, \psi, \vartheta] = 0; n \in \{1; 2; \dots\}$ and $L_{2n}[u_i, \varphi, \psi, \vartheta] = 0; n \in \{1; 2; \dots\}$ taking into account thermodynamic material ratios of this environment: $\hat{\sigma}(u_i, \varphi, \psi, \vartheta)$ - thermo-mechanical stress, $\bar{D}(u_i, \varphi, \psi, \vartheta)$ - displacement electric field, $\bar{B}(u_i, \varphi, \psi, \vartheta)$ magnetic field, $\theta(u_i, \varphi, \psi, \vartheta)$ - temperature. The number of equations $n \in \{1; 2; \dots\}$ and unknown variables naturally depend on the associated physical and mechanical fields.

In the inner adhesive slit $\Omega_3 = \{|x| < \infty, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), |z| < \infty\}$ of variable width $\xi(x) = |h_2(x) - h_1(x)|$, equations for an adhesive glue material $L_{3n}[u_i, \varphi, \psi, \vartheta] = 0; n \in \{1; 2; \dots\}$, with corresponding thermodynamic material ratio, are solved.

The three sets of equations mentioned above - $L_{\alpha n}[u_i, \varphi, \psi, \vartheta] = 0; n \in \{1; 2; \dots\}$ and boundary conditions on each surface $y = h_m(x)$, with varying normal $\vec{n}^{(m)}(x) = \{n_j^{(m)}(x, h_m(x))\}$ where $m = 1; 2$,

$$n_j^{(m)}(x, h_m(x)) = \left\{ \frac{h'_m(x)}{\sqrt{1 + [h'_m(x)]^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + [h'_m(x)]^2}}; 0 \right\},$$

together with the terms of the attenuation of the relevant physicommechanical fields at infinity form a mathematical boundary task in the three-layer composite with rough surfaces in contact.

Considering the fact that in linear theories of mechanics related to physicommechanical fields all the connections between physical fields are identical, the material ratio could formally be recorded in the same form: $\sigma_{ij} = c_{ijmn}u_{n,m} + \alpha_{mij}\phi_{,m}$, $S_m = \alpha_{mij}u_{i,j} - \beta_{mn}\phi_{,n}$, where except for the known mechanical stresses σ_{ij} , the elastic deformation tensor $u_{i,j}$ and the elastic

constants $\hat{c} \equiv (c_{ijmn})_{6 \times 6}$, the generalized expression for the material thermodynamic relations is shown through the signs of tensors of physical constants $\alpha_{mij} \in \{e_{mij}; d_{mij}; \lambda_{mij}\}$ and $\beta_{mn} \in \{\varepsilon_{mn}; \mu_{mn}; g_{mn}\}$, the components defining characteristics $S_m(x_j, t) \in \{D_m(x_j, t); B_m(x_j, t); \theta(x_j, t)\}$ and potentials $\phi(x_j, t) \in \{\varphi(x_j, t); \psi(x_j, t); \vartheta(x_j, t)\}$ of the corresponding physical fields, and coordinate system $\{x, y, z\} \triangleq \{x_1, x_2, x_3\}$.

To avoid cumbersome formulas, we will assume that the materials adjacent half-spaces (thick plates) as well as the thin adhesive layer are piezoelectric crystals of hexagonal symmetry class $6mm$, which are polarized along the axis $oz \parallel \bar{p}$.

In this case, the boundary conditions of the linear electro-elasticity and the conditions of decay at infinity, with the indices $i, j \in \{1; 2; 3\}$ and $m \in \{1, 2\}$, have the following form:

$$\left(\sigma_{ij}^{(m)}(x, h_m(x), t) - \sigma_{ij}^{(3)}(x, h_m(x), t) \right) \cdot n_j^{(m)}(x, h_m(x)) = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(D_j^{(m)}(x, h_m(x), t) - D_j^{(3)}(x, h_m(x), t) \right) \cdot n_j^{(m)}(x, h_m(x)) = 0 \quad (2.3)$$

$$w_i^{(m)}(x, h_m(x), t) = w_i^{(3)}(x, h_m(x), t) \quad (2.4)$$

$$\varphi_m(x, h_m(x), t) = \varphi_3(x, h_m(x), t) \quad (2.5)$$

$$\lim_{y \rightarrow (-1)^m \infty} w_m(x, y, t) \rightarrow 0 \quad \lim_{y \rightarrow (-1)^m \infty} \varphi_m(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

It is known that, when the coordinate axis $oz \parallel \bar{p}$ is parallel to the axes of the polarizations of all the composite crystals, in any plane ox_1x_2 (slice $x_3 = const$), quasi-static equations of electro-elasticity in each layer

$$c_{ijkm} \frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_i \partial x_m} + e_{ijm} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_i \partial x_m} = \rho_n \frac{\partial^2 u_j^{(n)}}{\partial t^2}, \quad e_{ijm} \frac{\partial^2 u_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_m} - \varepsilon_{im} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_i \partial x_m} = 0 \quad (2.7)$$

allow separation of non-electroactive plane strain state $\{u_1(x_1, x_2, t); u_2(x_1, x_2, t); 0; 0\}$ from electroactive anti-plane deformed state $\{0; 0; u_3(x_1, x_2, t); \varphi(x_1, x_2, t)\}$ [18].

This will make it possible to separately investigate the effect of surface roughness on the propagation of the wave signal of flat deformation and the wave signal of electroactive anti-flat deformation.

In this case, the connection of heterogeneity environments in the formed composite is of geometric nature, and is determined by the functions of surface

irregularities $\Sigma_m = \{y = h_m(x)\}$; $m = 1; 2$. featuring in the boundary conditions (2.2) and (2.5).

Model-2. Two elastic deformable half-space made of materials characterized by associated physical fields (electro-elasticity, magneto-elasticity, thermos-elasticity, etc.) are connected by a method of thermal crushing, so that depressions of one of the rough surfaces were filled by protrusions of the other.

Then at the junction of the connection of the half-spaces, a thin transversely-inhomogeneous layer with varying physical and mechanical characteristics of the material $\gamma^{(3)}(y) \triangleq \{c_{ijkn}^{(3)}(y); \rho^{(3)}(y); e_{mij}^{(3)}(y); \varepsilon_{nk}^{(3)}(y)\}$ is formed. Naturally, the virtual surfaces of the formed layer can be represented by lines (surfaces) of maximal depressions of the corresponding roughness. Then, allocating virtual layer thickness $H = (R_2 + R_1)/2$, where $R_m = |\max h_m(x) - \min h_m(x)|$ are the maximum value of the depressions of the rough edges, respectively, for functions $\gamma(y)$, the characteristic requirement will be the condition of equality of physico-mechanical constant in planes $y = \pm(H/2)$ with $\gamma(-H/2) = \gamma^{(1)} \triangleq \{c_{ijkn}^{(1)}; \rho^{(1)}; e_{mij}^{(1)}; \varepsilon_{nk}^{(1)}\}$ and $\gamma(+H/2) = \gamma^{(2)} \triangleq \{c_{ijkn}^{(2)}; \rho^{(2)}; e_{mij}^{(2)}; \varepsilon_{nk}^{(2)}\}$ respectively. The heterogeneity of the material can be presented by any integrable function $\gamma^{(3)} = f(y, R_m, \gamma^{(m)})$; $m = 1; 2$. with the following conditions on the surfaces of the virtual layer: $f(-(R_1 + R_2)/4) = \gamma_1$; $f((R_1 + R_2)/4) = \gamma_2$. As a result of diffusion of the deformed middle surface $y = (h_1(x) + h_2(x))/2$ of the formed non-homogeneous layer, it is natural to impose a new condition $f((h_1(x) + h_2(x))/2) = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$.

For the studies of dynamic processes in $6mm$ piezoelectric hexagonal symmetry class with this model, with the indices of $n = 1; 2$, the equations in (2.7) will be solved in homogeneous half-spaces $\Omega_1^* = \{|x| < \infty, -\infty < y \leq -(R_1 + R_2)/4, |z| < \infty\}$ and $\Omega_2^* = \{|x| < \infty, (R_1 + R_2)/4 \leq y < \infty, |z| < \infty\}$. In virtual dedicated thin layer $\Omega_3^* = \{|x| < \infty, -(R_1 + R_2)/4 \leq y \leq (R_1 + R_2)/4, |z| < \infty\}$ equations of electro-elasticity with variable coefficients will be solved:

$$\begin{aligned} c_{ijkm}(x_2) \frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_i \partial x_m} + e_{ijm}(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_i \partial x_m} &= \rho_n(x_2) \frac{\partial^2 u_j^{(n)}}{\partial t^2} \\ e_{ijm}(x_2) \frac{\partial^2 u_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_m} - \varepsilon_{im}(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_i \partial x_m} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Obviously, the study of the solutions to these equations become much more complicated, since variable coefficients lead to a nonlinear dependence of the amplitude and phase functions of the propagating wave signal [19], [20]. But the boundary conditions in (2.2) and (2.3) are given get much simpler. The change

of the surfaces normal $\vec{n}^{(m)}(x) = \{n_j^{(m)}(x, h_m(x))\}$ in surfaces $y = h_m(x)$, is replaced by the unit normal of smooth surfaces

$$n_j^{(m)} = \{0; \pm 1; 0\} \quad y = \pm (R_1 + R_2)/4 = \text{const}.$$

$$\sigma_{i2}^{(m)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) - \sigma_{i2}^{(3)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) = 0, \quad (2.2^*)$$

$$D_2^{(m)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) - D_2^{(3)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) = 0, \quad (2.3^*)$$

$$w_i^{(m)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) = w_i^{(3)}(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t), \quad (2.4^*)$$

$$\varphi_m(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t) = \varphi_3(x, (-1)^m \cdot (R_1 + R_2)/4, t), \quad (2.5^*)$$

In this case the connection of environments, heterogeneity in the formed composite have a physical nature, and they are determined by the characteristics of the functions of surface irregularities $R_m = |\max h_m(x) - \min h_m(x)|$, which appear in the boundary conditions (2.2*) and (2.3*). Through the functions of the physicomaterial characteristics of the environment $\{c_{ijm}^{(3)}(y); \rho^{(3)}(y); e_{mij}^{(3)}(y); \varepsilon_{nk}^{(3)}(y)\}$, heterogeneity appears also in the non-homogeneous equations piezoelectric (2.8).

3. The mathematical modelling of boundary value problems. In the studies of wave processes in formed composites, for the analytical analysis of the process and the results, a hypothesis (MELS) of the nature of the distributions of characteristic physicomaterial units, or the thermodynamic parameters of the formed heterogeneous material, with the use of surface-exponential functions (SEF) is proposed. This hypothesis must ensure the existence of the characteristic parameters describing physical and mechanical fields, both in the equations, and in the boundary conditions of the problem.

Let's assume that a shear electro-elastic wave signal is distributed across the three-layer composite consisting of a lone polarized pasted piezoelectric glue of two thick layers of piezoelectric crystal of $6mm$ class hexagonal symmetry (model-1). Then, the plane strain state $\{u_1(x_1, x_2, t); u_2(x_1, x_2, t); 0; 0\}$ in the composite is not be inducting, and electro-active antiplane strain state $\{0; 0; u_3(x_1, x_2, t); \varphi(x_1, x_2, t)\}$ is described by quasi-static solutions

$$w_n(x, y, t) = W_{0n} \exp((-1)^n \alpha_n ky) \cdot e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\varphi_n(x, y, t) = \left\{ \Phi_{0n} \exp((-1)^n ky + \frac{e_n}{\varepsilon_n} W_{0n} \exp((-1)^n \alpha_n ky) \right\} \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

where $G_n = c_{44}^{(n)}$ - elastic moduli shifts, ρ_n - density, $e_n = e_{15}^{(n)}$ - piezoelectric modules, $\varepsilon_n = \varepsilon_{11}^{(n)}$ - relative coefficients of dielectric constant of materials in the respective layers $n=1,2,3$ of the composite, $\alpha_n^2 = 1 - (\omega^2 \rho_n^2) / (k^2 \tilde{G}_n^2)$ - wave characteristic values; $\tilde{G}_n = G_n (1 + e_n^2 / (\varepsilon_n G_n))$ - given shear stiffness of piezoelectric, ω - the frequency of a waveform, $k = (2\pi) / \lambda$ - wave number and λ - wavelength. In case of respective numbering $-n=1,2$; in the case of homogeneous half-spaces, amplitudes W_{0n} and Φ_{0n} are constants.

In the adhesive layer of variable thickness solutions are represented both in symmetric and anti-symmetric forms:

$$w_3(x, y, t) = \{A_{31} \sin(\alpha_3 ky) + A_{32} \cos(\alpha_3 ky)\} \cdot e^{i(kx - \alpha t)}$$

$$\varphi_3(x, y, t) = \left\{ B_{31} \sin(ky) + B_{32} \cos(ky) + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_3} [A_{31} \sin(\alpha_3 ky) + A_{32} \cos(\alpha_3 ky)] \right\} \cdot e^{i(kx - \alpha t)} \quad (3.2)$$

To simplify the boundary conditions (2.2)-(2.5), we introduce hypotheses about distributions of the elastic displacements $w_3(x, y, t)$ and the potential of the electric field $\varphi_3(x, y, t)$ across the thickness of a thin layer of adhesive,

$$w_3(x, y, t) = \frac{e^{f(x)} - 1}{e - 1} [w_2(x, h_2(x), t) - w_1(x, h_1(x), t)] + w_1(x, h_1(x), t)$$

$$\varphi_3(x, y, t) = \frac{e^{f(x)} - 1}{e - 1} [\varphi_2(x, h_2(x), t) - \varphi_1(x, h_1(x), t)] + \varphi_1(x, h_1(x), t), \quad (3.3)$$

where surface-exponential function (SEF)

$$f(x, y) = \left[\exp \left[\frac{[y - h_1(x)]}{[h_2(x) - h_1(x)]} \right] - 1 \right] \cdot (e - 1)^{-1} \quad (3.4)$$

is the characteristic function for non-smooth surfaces $y = h_m(x)$ and is described the changes of the required unknown values in the adhesive layer thickness. The introduced hypotheses of type (3.3) provide for any kind of conjugation related to physicomachanical fields in magneto- (electro-, thermo-) elastic layered systems (Magneto-Elastic Layered System (**MELS**) *hypothesis*). They also allow to split boundary conditions (2.2)-(2.5) into two groups.

The conjugacy conditions of mechanical stress and electric induction (2.2) and (2.3)

$$h_1'(x) (\sigma_{31}^{(1)}(x, h_1(x), t) - \sigma_{31}^{(3)}(x, h_1(x), t)) + (\sigma_{32}^{(1)}(x, h_1(x), t) - \sigma_{32}^{(3)}(x, h_1(x), t)) = 0$$

$$h_2'(x) (\sigma_{31}^{(2)}(x, h_2(x), t) - \sigma_{31}^{(3)}(x, h_2(x), t)) + (\sigma_{32}^{(2)}(x, h_2(x), t) - \sigma_{32}^{(3)}(x, h_2(x), t)) = 0 \quad (3.5)$$

$$h_1'(x) (D_1^{(1)}(x, h_1(x), t) - D_1^{(3)}(x, h_1(x), t)) + (D_2^{(1)}(x, h_1(x), t) - D_2^{(3)}(x, h_1(x), t)) = 0$$

$$h_2'(x) (D_1^{(2)}(x, h_2(x), t) - D_1^{(3)}(x, h_2(x), t)) + (D_2^{(2)}(x, h_2(x), t) - D_2^{(3)}(x, h_2(x), t)) = 0 \quad (3.6)$$

are logged in the form of four algebraic equations with respect to four amplitude constants: $\{A_j, B_j\} \in \{W_{01}; W_{02}; \Phi_{01}; \Phi_{02}\}$

$$\hat{B}_{ij} [\{\gamma_3\}, h_m(x), h_m'(x), \alpha_n(\omega/k),] \times A_j = 0$$

From the condition of existence of nontrivial solutions we obtain the transcendental dispersion equation, which determines the frequency response of the process

$$\det \left\| \hat{B}_{ij} [\{\gamma_3\}, h_m(x), h_m'(x), \alpha_n(\omega/k),] \right\|_{4 \times 4} = 0 \quad (3.7)$$

Another group of boundary conditions (2.4) and (2.5), about contingency elastic displacements and electric potential with respect to four amplitude constants $A_j^* \in \{A_{31}; A_{32}; B_{31}; B_{32}\}$, generates a new inhomogeneous system of four algebraic equations:

$$\hat{B}_{ij}^* [\{\gamma_n\}, h_m(x), h_m'(x), \alpha_n(\omega/k),] \times A_j^* = b_i [A, h_m(x), h_m'(x), \alpha_n(\omega/k),] \quad (3.8)$$

Hence obtained frequency-amplitudes descriptions for the identification of new phenomena at the joints between the layers of the composite are due to the roughness of the surfaces. The presence of roughness on the surfaces of the layers transforms the coefficients $\hat{B}_{ij}[\{\gamma_3\}, h_m(x), h'_m(x), \alpha_n(\omega/k),]$ and $\hat{B}_{ij}^*[\{\gamma_3\}, h_m(x), h'_m(x), \alpha_n(\omega/k),]$, as well as free terms $b_i[A_r, h_m(x), h'_m(x), \alpha_n(\omega/k),]$ in algebraic equations (3.7*) and (3.8) into complex variables. To examine the effect of roughness on dispersion, or the possibility of occurrence of resonance, the wave signal must be represented by a complex wave number and frequency fluctuations $F_n(x, y, t) \triangleq A_n(x, y) \cdot \exp i\{(k_1 + ik_2) \cdot x - (\omega_1 + i\omega_2) \cdot t\}$.

Then determinants from (3.7*) and (3.8) are real and imaginary parts of the wave number and frequency, with their signs will characterize the influence of roughness on the dispersion, dissipation and resonance in the wave signal propagation.

It was shown above that in the three-layer composite consisting of interconnected thermal breakdown, lone polarized, two thick piezoelectricity layers of hexagonal symmetry class $6mm$, a transversely inhomogeneous layer (model-2) is formed along the surfaces of the border connection:

$$\Omega_3^* = \{|x| < \infty, -(R_1 + R_2)/4 \leq y \leq (R_1 + R_2)/4, |z| < \infty\}$$

During the propagation of shear electro-elastic wave signal, in the composite, similar to the case in model-1, plane strain condition is not induced $\{u_1(x_1, x_2, t); u_2(x_1, x_2, t); 0; 0\}$, and the electroactive antiplane strain state $\{0; 0; u_3(x_1, x_2, t); \varphi(x_1, x_2, t)\}$ in thick layers is again described by the quasi-static solutions in (3.1). Unlike the previous case, virtual dedicated heterogeneous in thickness layer Ω_3^* , the frequency-amplitude nature of the solutions will obviously depend on the initial roughness of surfaces through the heterogeneity of the material layer. Given the subtlety of the virtually formed inhomogeneous layer, in case of model-2, MELS hypotheses are introduced in relation to distributions of the physicommechanical diffusion constants of the created environment $\gamma^{(3)}(y) \triangleq \{c_{ijkn}^{(3)}(y); \rho^{(3)}(y); e_{mij}^{(3)}(y); \varepsilon_{nk}^{(3)}(x)\}$, with the selected virtual surfaces of $y = \pm(R_1 + R_2)/4 = const$: - $n_j^{(\pm)} = \{0; \pm 1; 0\}$

$$\gamma^{(3)}(x, y) = \frac{e^{f_\gamma(x, y)} - 1}{e - 1} (\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}) + \gamma^{(1)} \quad (3.9)$$

$$f_\gamma(x, y) = a(\gamma_m, R_m, h_m(x)) \cdot y^2 + b(\gamma_m, R_m, h_m(x)) \cdot y + c(\gamma_m, R_m, h_m(x)) \quad (3.10)$$

The characteristic function describing the change of the thermodynamic constants for the layer thickness, $\gamma^{(1)} \triangleq \{c_{ijkn}^{(1)}; \rho^{(1)}; e_{mij}^{(1)}; \varepsilon_{nk}^{(1)}\}$ and $\gamma^{(2)} \triangleq \{c_{ijkn}^{(2)}; \rho^{(2)}; e_{mij}^{(2)}; \varepsilon_{nk}^{(2)}\}$ are thermodynamic constants of the materials of the respective half-spaces, $R_m = |\max h_m(x) - \min h_m(x)|$ -the depth of the depressions corresponding to the surface roughness. The coefficients of the functions $f_\gamma(y)$ are selected from the attainment of material values of the

thermodynamic parameters of the virtually created environment in the border layer

$$\gamma^{(3)}\left(-\frac{R_1+R_2}{4}\right)=\gamma^{(1)}, \quad \gamma^{(3)}\left(\frac{R_1+R_2}{4}\right)=\gamma^{(2)}, \quad \gamma^{(3)}\left(\frac{h_1(x)+h_2(x)}{2}\right)=\frac{\gamma^{(2)}+\gamma^{(1)}}{2}, \quad (3.11)$$

By introducing hypothesis MELS (3.9) and an exponential function of surface SEF (3.10) we obtain the boundary value problem of electro-elasticity from the following equations:

$$\tilde{G}_n \left[\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right] = \rho_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = \frac{e_n}{\varepsilon_n} \left[\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right] \quad (3.12)$$

where $n=1, 2$. in the half-spaces Ω_1^* and Ω_2^* accordingly with the solutions of (3.1), and equations:

$$\begin{aligned} & G_3(x, y) \left[\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} \right] + e_3(x, y) \left[\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right] \\ & \frac{\partial G_3}{\partial x} \frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial G_3}{\partial y} \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial e_3}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial e_3}{\partial y} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \rho_3(x, y) \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} \quad (3.13) \\ & e_3(x, y) \left[\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} \right] - \varepsilon_3(x, y) \left[\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right] + \\ & \frac{\partial e_3}{\partial x} \frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial e_3}{\partial y} \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

in virtual dedicated inhomogeneous layer Ω_3^* .

Conditions for the existence of solutions of $F(x, y, t) \triangleq A(x, y) \cdot \exp i\{\vartheta(x, y) - \omega t\}$ equations (3.13), and their solution at the selection of functions for material heterogeneity $\gamma^{(3)}(x, y)$ with different combinations of boundary terms, have been discussed in articles [19-21]. The given boundary conditions (2.2*)-(2.5*) on the surfaces of the virtual layer $y = \pm(R_1 + R_2)/4 = const$ and the terms of the decay at infinity (2.6) together with the obtained equations (3.12) and (3.13) form a boundary value problem in model-2 connection piezoelectricity half-spaces with rough surfaces. The task here is to study complex transcendental equations. By introducing the wave number $k = k_1 + ik_2$, and frequency fluctuations $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ in aggregate form into the wave signal, we will identify the influence of surface roughness on dispersion, dissipation and resonance in the wave process.

4. About hypotheses MELS. We have already mentioned that the hypotheses (3.3) and (3.9) provide conjugation of elastic displacement and the potential of electric fields on rough discontinuity surfaces (2.4) and (2.5) in model-1, or the equality of thermodynamic constants on the surfaces of the virtual layer in model-2. It is obvious that these hypotheses are also suitable in problems of composites with materials associated with other physicommechanical fields (magneto-elasticity, thermos-elasticity, etc.) Another characteristic property of the introduced hypotheses is hidden in the choice of surface-exponential functions SEF (3.4) and (3.10), distribution across the thickness

of required physico-mechanical fields (3.3), or the change of the thermodynamic constants of a virtually created environment (3.9). Upon selection of a simpler distribution function in thickness, such as

$$f(x, y) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^m, \quad m \in \{1; 2; \dots\} \quad (4.1)$$

Although it provides conjugation of certain selected components of physico-mechanical fields, depending on the choice of measure $m \in \{1; 2; \dots\}$, there's always the risk of losing of some even or odd characteristic values in the study material. In this respect, the introduction of SEF – functions

$$f(x, y) = \frac{1}{e-1} \left\{ \exp \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right] - 1 \right\} \quad \text{or} \quad f_\gamma(y) = \frac{1}{e-1} \left\{ \exp \left[\frac{y + (R_1 + R_2)/4}{(R_2 + R_1)/2} \right] - 1 \right\} \quad (4.2)$$

is acceptable not only because they provide the conjugation of the required physico-mechanical fields or thermodynamic constants on rough surfaces, but also they introduce existing geometric surface roughness heterogeneity $y = h_m(x)$ into the descriptions of physico-mechanical fields or thermodynamic constants of the inner thin layer.

5. Conclusions. When homogeneous layers get into contact with rough surfaces, geometrically or physically inhomogeneous layer is formed in the borderline area of the contact. Two model compounds of the rough surfaces in the form of piezoelectric sandwich of the composite are selected. Inputted superficially exponential functions SEF constructed hypotheses about distributions of physical, mechanical and thermodynamic fields of the permanent magneto- (electro-, thermo-, etc.) elastic layered systems-MELS, formed in an inhomogeneous layer connection. The introduction of hypotheses allows to model a mathematical boundary-value problem for different materials of the composite layers associated with different physico-mechanical fields. A comparative numerical analysis of results with different boundary problem modelling will be given by the author in the following articles.

Institute of Mechanics of NAS RA
e-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan

The Boundary Problem Modelling of Rough Surfaces Continuous Media with Coupled Physico-mechanical Fields

The presented hypotheses of magnetic- (electro-/thermo-) elastic layered systems (hypotheses-MELS) are addressed to the modeling of boundary problem of contact of rough surfaces of continuous media with associated physical and mechanical fields. In various models of joints of thick piezoelectric layers combinations is allocated exponential behaviour of physico-mechanical fields or thermodynamic constants are given. The effect of surfaces roughness on the equations and the thermodynamic relations is achieved through the choice of surface-exponential functions (SEF).

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան

Ֆիզիկամեխանիկական կապակցված դաշտերով հոծ միջավայրերի անհարթություններով եզրերի ամրացման եզրային խնդրի մոդելավորումը

Ներմուծելով մագնիսա (էլեկտրա, թերմո) առաձգական շերտավոր համակարգերի հիփոթեզներ (hiphotesis-MELS)՝ իրականացվում է կապակցված ֆիզիկամեխանիկական դաշտերով հոծ միջավայրերի անհարթ մակերևույթների ամրակցման եզրային խնդրի մոդելավորում: Պիեզոդիէլեկտրիկ շերտերի երկու տարբեր ամրակցումների դեպքերում առանձնացվում է ամրակցման մերձմակերևութային ֆիզիկորեն կամ երկրաչափորեն անհամասեռ շերտ, որտեղ մակերևութային-աստիճանային ֆունկցիաների (SEF) միջոցով տրվում են ֆիզիկամեխանիկական դաշտերի կամ թերմոդինամիկական հաստատունների բաշխման վարքերը:

Այդ ֆունկցիաների ընտրությամբ իրականացվում է մակերևութային անհարթությունների ազդեցությունը եզրային խնդրի հավասարումներում և նյութական առնչություններում:

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян

Моделирование граничной задачи контакта шероховатых поверхностей сплошных сред со связанными физико-механическими полями

Вводом гипотез магнито (электро, термо) упругих слоистых систем (гипотезы – MELS) проводится моделирование граничной задачи контакта шероховатых поверхностей сплошных сред со связанными полями. При разных моделях соединений толстых пьезодиэлектрических слоев выделяется приповерхностный геометрически или физически неоднородный слой, в котором задается поверхностно-экспоненциальное поведение физико-механических полей или термодинамических постоянных. Выбором поверхностно-экспоненциальной функции (SEF) обеспечивается влияние поверхностной шероховатости в уравнениях и в термодинамических соотношениях задачи.

Reference

1. *Hertz H.*- Journ. für die Reine und Angewandte Mathematik. Band 83. Seite 76. P. 156-172
2. *Johnson K. L., Kendall K., Roberts A. D.* - Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. 1971. V. 324. P. 301-313.
3. *Bowden F. P., Tabor D.* - Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1939. V. 169 (938). P. 391-413
4. *Archard, J. F.* - Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1957. V. 243(1233). P.190-205.
5. *Greenwood, J. A., Williamson JBP.* - Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1966. P. 300-319.

6. *Persson BNJ, Bucher F., Chiaia B.* - Physical Review B. 2002. V. 65(18). P. 184-206.
7. *Kirchhoff.* Vorlesungen über Math. Physik, Mechanik. Leipzig. 1883 (3-е изд.).
8. *Reissner E.* - J. Math. and Phys. 1944. V. 23. P. 1.
9. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. М. Гостехиздат, 1948. 460 с.
10. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. 2-е изд. М. Наука. 1987. 360 с.
11. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких пластин и оболочек. М. Наука. 1977. 324 с.
12. *Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K., Tikhonravov A. A., Duparre A.* - Appl. Opt. 2003. V. 42. P. 5140-5148.
13. *Мохель А. Н., Салганик Р. Л., Федотов А. А.* - Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 4. С. 61-68,
14. *Jackson R. L., Green I.* - Tribology Transactions. 2011. V. 54. P. 300-314.
15. *Cocheril Y., Vauzelle R.* - Progress in Electromagnetics Research. 2007. V. 75. P. 357-381.
16. *Carbone G., Scaraggi M., Tartaglino U.* – Eur. Phys J E. Soft Matter. 2009. V. 30. Issues 1. P. 65-74.
17. *Svetovoy V. B., Palasantzas G.* - Adv. Colloid Interface Sci. 2015. V. 216. P. 1-19.
18. *Аветисян А. С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. №1. С. 12-19.
19. *Аветисян А. С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. №5. С. 34-40
20. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* - Вестник ГИУА, сер. механика, машиноведение, машиностроение. 2014. Т. 17. №1. С. 9-25.
21. *Hasanyan D. J., Piliposian G. T., Kamalyan A. H., Karakhanyan M. I.* - Continuum Mech. and Thermodynamics. 2003. V. 15. P.519-527.

$Ni(Cu) + p + E_a =$ неустойчивый изотоп $Cu(Zn)$, который распадается с выделением энергии, где p – протон, E_a – энергия активации, необходимая для того, чтобы протон проник в ядро никеля.

Природный никель содержит 5 стабильных изотопов: ^{58}Ni (68.27 %), ^{60}Ni (26.10 %), ^{61}Ni (1.13 %), ^{62}Ni (3.59 %), ^{64}Ni (0.91 %).

Существуют также искусственно созданные изотопы никеля, самые стабильные из которых: ^{59}Ni (период полураспада 100 тысяч лет), ^{63}Ni (100 лет) и ^{56}Ni (6 суток).

Данные по изотопам приведены по [2, 3].

^{58}Ni (68.27 %) + $p = ^{59}Cu$. Период полураспада 81,5 с. Масса изотопа (а. е. м.) 58.9394980.

^{60}Ni (26.10 %) + $p = ^{61}Cu$. Период полураспада 3.333 ч. Масса изотопа (а. е. м.) 60.9334578.

^{61}Ni (1.13 %) + $p = ^{62}Cu$. Период полураспада 9.673 мин. Масса изотопа (а. е. м.) 61.932584.

^{62}Ni (3.59 %) + $p = ^{63}Cu$ стабилен.

^{64}Ni (0.91 %) + $p = ^{65}Cu$ стабилен.

^{59}Ni (период полураспада 100 тысяч лет) + $p = ^{60}Cu$. Период полураспада 23.7 мин. Масса изотопа (а. е. м.) 59.9373650.

^{63}Ni (100 лет) + $p = ^{64}Cu$. Период полураспада 12.700 ч. Масса изотопа (а. е. м.) 63.9297642.

^{56}Ni (6 суток). + $p = ^{57}Cu$. Период полураспада 61,83 ч. Масса изотопа (а. е. м.) 66.9277303.

Природная медь состоит из двух стабильных изотопов – ^{63}Cu (69 %), ^{65}Cu (31 %).

Для нас представляет интерес реакция с образованием нестабильного изотопа Zn , который распадается с выделением энергии:

^{63}Cu (69 %) + pn (протон с нейтроном – ядро дейтерия) = ^{65m}Zn . Энергия возбуждения 53.928 кэВ. Период полураспада 1.6 мкс. Спин и чётность ядра 1/2-.

Эффект холодного синтеза наблюдался на двух установках. На одной установке выделение энергии наблюдалось при взаимодействии дейтерия с медной стенкой (как побочный эффект при изучении ионно молекулярных реакций [4]), на второй – никеля с водородом (как у А. Росси [5]).

Согласно предположению Игоря Юрьевича Данилова (Санкт-Петербург) имеет место обратный туннельный эффект. При этом образуются изотопы с коротким временем жизни, которые распадаются с выделением энергии, тепловая энергия выделяется и за счет деформации решётки, которую вызывают участвующие в реакциях изотопы с коротким временем жизни.

В настоящий момент ведутся работы для создания промышленной установки.

¹Проект “Философский штурм”, Санкт-Петербург

²Национальная научная лаборатория им. А. Алиханяна, Ереван

³Армянская технологическая академия

e-mail: serg55@yahoo.com

Д. Б. Давидян, И. Ю. Данилов, Р. В. Туманян, В. Г. Давтян

Теоретические предпосылки для создания реактора холодного ядерного синтеза

Предлагается теоретическая модель, которая объясняет выход энергии в реакциях холодного синтеза с использованием никеля и меди. Представленная методика позволяет рассчитать, какие изотопы других химических элементов можно использовать для оптимизации выхода энергии. Результаты можно использовать для создания источника энергии промышленного значения.

Ղ. Բ. Դավիդյան, Ի. Յու. Դանիլով, Ռ. Վ. Թումանյան, Վ. Գ. Դավթյան

Սառը միջուկային սինթեզի ռեակտորի ստեղծման տեսական նախադրյալներ

Առաջարկված է տեսական մոդել, որը նկարագրում է էներգիայի անջատումը նիկելի և պղնձի ներկայությամբ սառը սինթեզի ռեակցիայի ժամանակ: Մեթոդը, որը ներկայացված է հեղինակների կողմից, թույլ է տալիս որոշել, թե ինչ այլ քիմիական տարրերի իզոտոպներ կարող են օգտագործվել էներգիայի արձակումը օպտիմալացնելու համար: Արդյունքները կարող են օգտագործվել արդյունաբերական նշանակության էներգիայի աղբյուր ստեղծելու համար :

D. B. Davidyan, I. Yu. Danilov, R. V. Tumanyan, V. G. Davtyan

Theoretical Prerequisites for Creating Cold Fusion Reactor

The paper proposes a theoretical model which explains the energy output in cold fusion reactions, while using nickel and copper. The technique, presented by the authors, allows to determine what other isotopes of chemical elements can be used to optimize the energy output. The results can be used to create a source of energy for industrial purposes.

Литература

1. *Fleischmann M., Pons S., Hawkins M.* - J. Electroanal. Chem. 1989. V. 261(2). P. 301. DOI:10.1016/0022-0728(89)80006-3.
2. Данные приведены по: *Audi G., Wapstra A. H., Thibault C.* - Nuclear Physics A. 2003. V. 729. P. 337—676. DOI:10.1016/j.nuclphysa.2003.11.003.
3. Данные приведены по: *Audi G., Bersillon O., Blachot J., Wapstra A. H.* - Nuclear Physics A. 2003. V. 729. P. 3–128. DOI: 10. 1016 / j. nuclphysa. 2003.11.001.
4. *Малхасян Р. Т., Саргсян Г. Н., Журкин Е. С., Давтян В. Г.* В кн.: Тезисы докладов на II Всесоюзном совещании по газофазной кинетике, 1978 г. Черногловка – Ереван. С. 43-46.
5. *Rossi Andrea*, Patent 20110005506 – Method and apparatus for carrying out Nickel and hydrogen exothermic reaction, 13.01.2011, <http://patentscope.wipo.int>.

пробы лампы дневного света мощностью 150 Вт на расстоянии 10 см. Контролем служили пробы с той же концентрацией фотосенсибилизатора, но находившиеся в темноте, а также образцы, освещавшиеся тем же источником света, но в отсутствие метиленовой сини [15, 16].

Модификацию диэтилпирокарбонатом осуществляли методом Майлза [17]. Для этого к 20.2 мкМ (1.13 мг/мл) раствора ЦГТ в 0.02 М фосфатном буфере, рН 6.2, содержащем 1 мМ СаСl₂, добавляли 100-кратный молярный избыток ДЭПК в абсолютном этаноле и регистрировали прирост поглощения при 240 нм, характеризующий образование *N*-этоксиформилимидазола.

В экспериментах в присутствии эффекторов концентрация салицина и акарбозы была 5 мМ, а количество полимера β-ЦД – 2 мг/мл. Для расчета числа модифицированных остатков использовали коэффициент молярной экстинкции *N*-карбэтоксигистидина, равный 3200 М⁻¹ см⁻¹ [18] по формуле [19]

$$n = \Delta A_{240} / 1 \cdot 20.2 \cdot 10^{-6} \cdot 3200,$$

где ΔA_{240} – [A_{240} (с ЦГТ) – A_{240} (без ЦГТ)] через 40 мин; 1.0 – ширина реакционной ячейки, см; $20.2 \cdot 10^{-6}$ – молярная концентрация ЦГТ. Реактивацию модифицированной ЦГТ осуществляли добавлением 0.5 М раствора гидроксилamina (рН 7.0).

Определение рК диссоциирующихся групп, принимающих участие в каталитическом акте ЦГТ, проводили согласно описанному методу [20].

Циклизирующую активность ЦГТ определяли метилоранж-мальто триозным методом [21]. За единицу активности принимали количество фермента, которое продуцировало 1 мкмоль ЦД в 1 мин в условиях эксперимента.

Декстринизирующую активность определяли согласно описанному методу [22]. За единицу активности принимали количество фермента, которое за 10 мин в заданных условиях реакции конвертировало 50% крахмала.

α-ЦД специфическую активность идентифицировали с применением метилоранжа [23]. Реакционную смесь (3 мл), содержащую 0.6 мл 5% крахмала в 0.05 М фосфатном буфере (рН 7.0), 0.1 мл 1 мМ метилоранжа в том же буфере, 2 мл того же буфера и 0.3 мл ферментного раствора, инкубировали при 40° в течение 10 мин. Реакцию останавливали добавлением 0.15 мл 6 н НСl, оставляли при 15-16°С в течение 30 мин и экстинкцию определяли на спектрофотометре СФ-46 при 505 нм.

β-ЦД специфическую активность определяли по известному методу с применением фенолфталеина [24].

Количества различных ЦД определяли методом ВЭЖХ в ранее приведенных условиях [2].

Белок определяли по Лоури [25], используя БСА в качестве стандарта.

Полимер β-ЦД готовили по ранее описанному методу [26].

В работе использовали крахмал, ДЭПК и ЦД производства “Serva” (Германия), салицин – “Aldrich” (США), акарбозу – “Bayer” (Германия), а также реактивы отечественного производства.

Результаты и их обсуждение. 1. Определение pK диссоциирующих групп активного центра ЦГТ *Thermostreptomyces sp. ИНМИА-А-561*. Широко используемым методом для получения предварительных данных при идентификации функциональных групп активного центра является анализ зависимости активности фермента от pH. В данном случае такая кривая, а также $v=f(pH)$ имеют колоколообразную форму с оптимумом при pH 5.5, что свидетельствует об участии в катализе двух функциональных групп (рис. 1), константы ионизации для которых равны $pK_1=3.9$ и $pK_2=6.1$, что соответствует pK карбоксильной группы активного центра фермента и pK имидазольной группы гистидина [20].

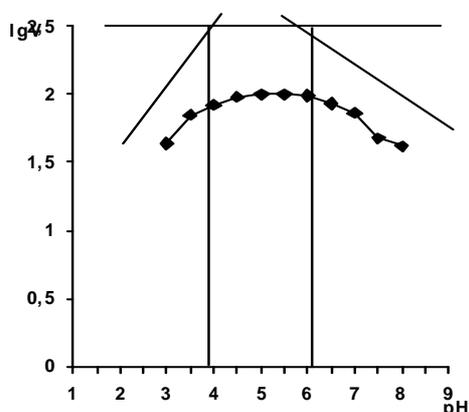


Рис. 1. Зависимость начальной скорости реакции от pH.

Для доказательства этого была определена теплота ионизации данных функциональных групп по уравнению Вант-Гоффа

$$\Delta H = 2.303R (pK'_2 - pK'_1) \cdot (T_1 \cdot T_2) / (T_2 - T_1),$$

где K'_1 и K'_2 – константы ионизации группы при температурах T_1 и T_2 ; R – универсальная газовая постоянная, равная 8.31 кДж/моль.

В табл.1 суммированы результаты опытов по сдвигу pK_1 и pK_2 в зависимости от температуры. Теплота ионизации для pK_1 , рассчитанная из кривой зависимости pK_1 от $1/T$ по формуле

$$\Delta H = tg\beta \cdot 2.303 \cdot R,$$

была равна 5740 кал/моль, что хорошо согласуется со значением теплоты ионизации карбоксильной группы [16].

Таблица 1

Влияние температуры на изменение величины рК групп активного центра ЦГТ *Thermostreptomyces sp.* ИНМИА-А-561

Температура, К	рК ₁	рК ₂
293	3.7	5.7
303	3.8	5.9
313	3.9	6.1
318	4.0	6.4

2. Фотоокисление функциональных групп ЦГТ в присутствии метиленовой сини. Типичной реакцией на имидазольную группу гистидина является ее фотоокисление в присутствии метиленовой сини, играющей роль фотосенсибилизатора [15]. Фотоокисление приводит к разрыву гетероцикла имидазола и к инактивации фермента. Результаты экспериментов показали, что ЦГТ подвергается интенсивной фотоинактивации (рис. 2). Тот факт, что с увеличением рН, т.е. с уменьшением концентрации Н⁺-ионов в среде, скорость фотоинактивации возрастает, опять же указывает на имидазольную группу гистидина, которая, как известно, выполняет роль “ловушки” протонов [27]. Такими свойствами ни фенольное кольцо тирозина, ни индольная группа триптофана, которые также способны фотоокисляться, но с меньшей скоростью, не обладают [28, 29].

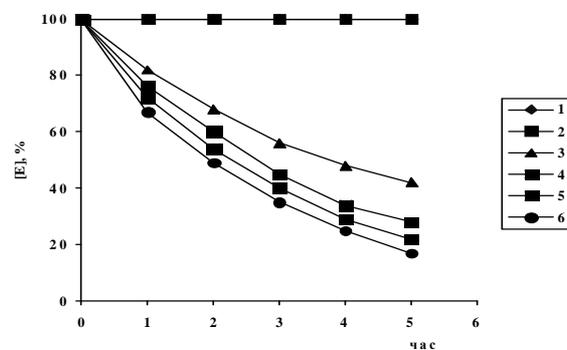


Рис. 2. Инактивация ЦГТ *Thermostreptomyces sp.* ИНМИА-А-561 фотоокислением при различных рН: 1 – без метиленовой сини в темноте при рН 7.0; 2 – с метиленовой синью на свету; 3 – инактивация при рН 5.0; 4 – рН 5.7; 5 – рН 7.0; 6 – рН 8.0.

При высокой концентрации в среде Н⁺-ионов имидазольная группа положительно заряжена, что является препятствием для отдачи электронов под действием фотонов света. С увеличением рН среды имидазольная группа отдает протоны и пропорционально растет скорость фотоокисления группы. При этом зависимость $\lg[E_0]/[E]$ от времени τ является линейной.

ной (рис. 3) и процесс фотоинактивации относится к реакции первого порядка и описывается уравнением

$$k = 2.303/\tau \cdot \lg[E_0]/[E],$$

где k – константа скорости инактивации, ч^{-1} ; $[E_0]$ и $[E]$ – начальная концентрация фермента и в момент времени τ соответственно. Как видно из рис. 4, точка пересечения прямых на кривой $\lg k = f(\text{pH})$ находится при pH 6.1, соответствующей pK имидазольной группы.

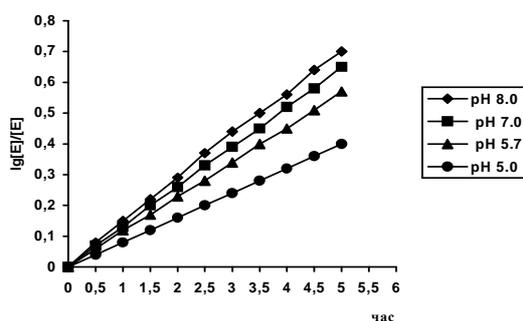


Рис. 3. Изменение $\lg[E_0]/[E]$ во времени. $[E_0]$ и $[E]$ – исходная и в данный момент времени процентная концентрации фермента соответственно, определяемые по начальной скорости реакции.

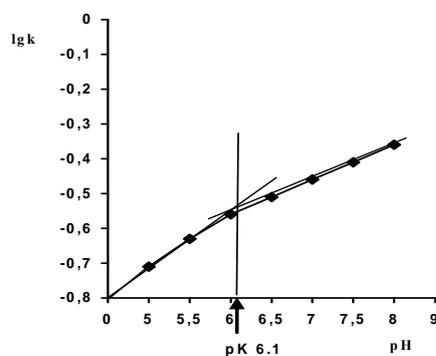


Рис. 4. Зависимость $\lg k = f(\text{pH})$ при фотоокислении ЦГТ при 40° . k – константа скорости инактивации, ч^{-1} .

Выявлено также, что с увеличением температуры pK_2 возрастает (табл.2).

С помощью этих данных из кривой зависимости pK_2 от $1/T$ была рассчитана теплота ионизации искомой группы. Она равнялась 7270 ± 200 кал/моль и соответствовала теплоте ионизации имидазольной группы гистидина.

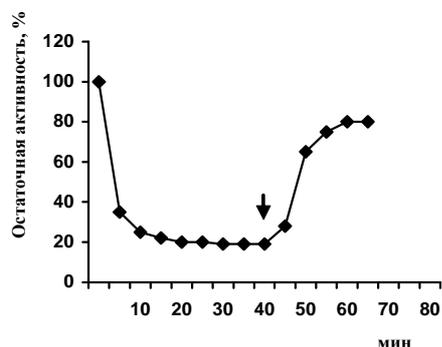


Рис. 5. Динамика инактивации ЦГТ при модификации ее с помощью ДЭПК. Стрелка указывает начало реактивации под действием гидроксилamina.

Таблица 2

Изменение pK_2 активной группы ЦГТ *Thermstreptomyces sp.* ИНМИА-А-561 в зависимости от температуры при фотоокислении

Температура, К	pK_2
293	5.4
303	5.6
313	5.7
318	5.8

3. Модификация имидазольной группы гистидина с помощью ДЭПК. Для подтверждения предположения о возможности участия имидазольной группы в каталитическом акте ЦГТ было исследовано влияние ДЭПК на активность фермента. Выявлено, что этоксикарбонилирование этой группы приводит к быстрой инактивации ЦГТ (рис. 5). Однако данный эффект может быть связан также с реакцией фенольной группы тирозина и/или ϵ -NH₂-группой лизина, а также индольного кольца триптофана и SH-группой цистеина [27]. Поэтому для точного установления причин инактивации фермента были сняты спектры поглощения модифицированного фермента при различной длине волны, так как известно, что образование карбэтоксигистидина приводит к увеличению поглощения при 242 нм, а более медленная модификация фенольного остатка тирозина – к уменьшению поглощения при 278 нм [29]. Из полученных нами результатов видно, что ДЭПК модифицирует преимущественно имидазольное кольцо гистидина, хотя имеет место также медленное окисление фенольного остатка тирозина (рис. 6).

Известно также, что если инактивация фермента обусловлена этоксикарбонилированием имидазольной группы гистидина, то с помощью деацилирования гидроксилaminом можно осуществить реактивацию [27], что не наблюдается при модификации SH-группы цистеина и ϵ -NH₂-группы

лизна. В нашем случае специфичность ДЭПК к имидазольной группе подтверждается тем, что гидроксилламин реактивирует ЦГТ примерно на 80% (рис. 5). При этом следует отметить, что при модификации снижается одновременно как декстринизирующая, так и циклизирующая активность. Установлено также, что глюкоза, мальтоза, мальтотриоза и салицин являются конкурентными ингибиторами для изучаемого фермента, приводящими к уменьшению циклизирующей, но увеличивающими декстринизирующую активность. В их присутствии V_{max} реакции не меняется, однако значение K_m увеличивается с повышением их концентрации в среде. С другой стороны, в присутствии акарбозы происходит одновременное уменьшение значения как V_{max} , так и K_m (табл. 3), т.е. акарбоза является бесконкурентным ингибитором.

Таблица 3

Влияние различных ингибиторов на ЦГТ-азную активность

Защищенные гистидиловые остатки	Тип ингибирования	K_m , мг/мл крахмала	V_{max} , мг/мин крахмала	Диспропорционирование	Модификация с помощью ДЭПК		
					модифицированные гистидиловые остатки	защищен. гистидил. ост.	оста. точн. актив. ность %
Без	-	3.33	0.840	+	8	0	19.5
Глюкоза	Конкурент.	3.29	0.840	++	7.9	0	20.0
Мальтоза	Конкурент.	3.27	0.842	+++	7.8	0	22.1
Мальтотриоза	Конкурент.	3.27	0.842	+++	7.7	0	23.0
Салицин	Конкурент.	3.25	0.840	++++	8.0	0	26.7
Акарбоза	Бесконкурент.	0.31	0.105	±	6.9	1	50.2
Полимер β -ЦД	Не опр.	Не опр.	Не опр.	Не опр.	5.9	2	93.5
Акарбоза + салицин	Не опр.	Не опр.	Не опр.	Не опр.	5.9	2	95.2
Акарбоза + β -ЦД	Не опр.	Не опр.	Не опр.	Не опр.	6.0	2	92.3

Исходя из этого факта салицин, акарбоза и полимер β -ЦД были применены в качестве защитных агентов при модификации. Показано, что применение только салицина не дает никакого эффекта, в то время как полимер β -ЦД, а также акарбоза и ее смесь с салицином несколько уменьшают степень этоксиформилирования (рис. 7).

При этом если в присутствии салицина, как и без него модифицируются 8 остатков гистидина, то при акарбозе и ее смеси с салицином – 7 и 6 остатков, соответственно (рис. 8), т. е. они способны защищать 1 и 2 имидазольные группы гистидина, соответственно.

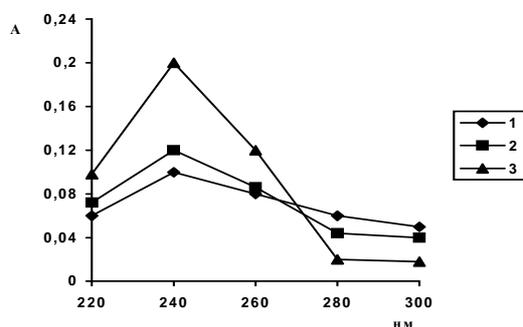


Рис. 6. Изменение спектров поглощения ЦГТ под действием ДЭПК (20.2 мкмоль ЦГТ; 2.5 мМ ДЭПК; рН 6.2; 20°): 1 – через 10 мин; 2 – 20 мин; 3 – 40 мин.

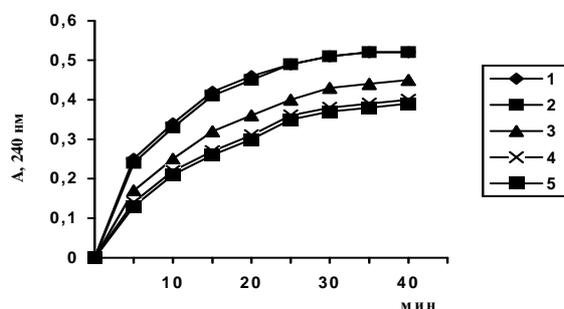


Рис. 7. Изменение оптической плотности раствора ЦГТ при 240 нм в зависимости от продолжительности действия ДЭПК (20.2 мкмоль ЦГТ; 2.5 мМ ДЭПК; рН 6.2; 30°С): 1 – только ЦГТ; 2 – ЦГТ с 5 мМ салицином; 3 – ЦГТ с 5 мМ акарбозой; 4 – ЦГТ с 5 мМ салицином и 5 мМ акарбозой; 5 – ЦГТ в сочетании с 2 мг/мл полимера β -ЦД.

Защитный эффект двух гистидильных групп достигается также при применении β -ЦД с акарбозой и полимера β -ЦД. При этом если после модификации ЦГТ сохраняет всего около 19% исходной активности, то в случае с салицином – около 27%, акарбозой – 50%, акарбоза + салицин – 95.2%, а полимер β -ЦД – 94% (рис.9), т. е. существует прямая связь между защищенными гистидиловыми остатками и остаточной активностью ЦГТ (рис. 10). При этом два гистидиловых остатка, защита которых приводит к сохранению активности, могут быть расположены в активном центре ЦГТ.

Таким образом, тот факт, что салицин, связывающийся с акцепторным центром, сам по себе не защищает гистидиловые группы при модифицировании ЦГТ с помощью ДЭПК, а в сочетании с акарбозой, которая защищает один гистидиловый остаток, защищает две такие группы, подтверждает сделанное ранее предположение о присутствии в активном центре ЦГТ донорного и акцепторного участков [1-3].

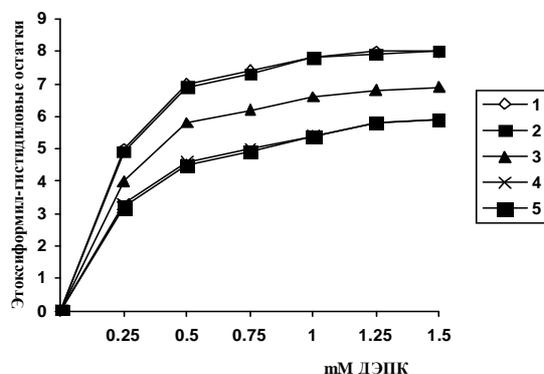


Рис. 8. Определение гистидиловых остатков в модифицированной ЦГТ через 40 мин при 30°C (условия см. на рис. 6 и в тексте): 1 – только ЦГТ; 2 – ЦГТ с 5 мМ салицином; 3 – ЦГТ с 5 мМ акарбозой; 4 – ЦГТ с 5 мМ алицином и 5 мМ акарбозой; 5 – ЦГТ в сочетании с 2 мг/мл полимером β -ЦД.

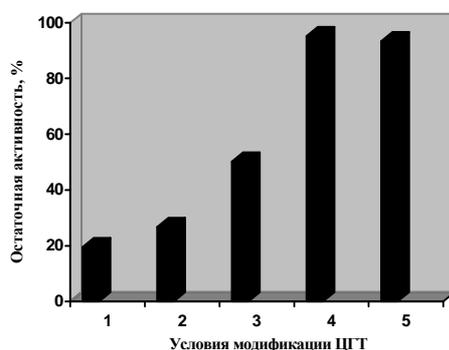


Рис. 9. Остаточная активность ЦГТ через 40 мин модификации при 30°C (условия см. на рис. 9 и в тексте): 1 – только ЦГТ (20.2 мкмоль); 2 – ЦГТ с салицином (5 мМ); 3 – ЦГТ с акарбозой (5 мМ); 4 – ЦГТ с салицином (5 мМ) и акарбозой (5 мМ); 5 – ЦГТ с полимером β -ЦД (2 мг/мл).

Согласно полученным результатам защита одного гистидилового остатка при модифицировании ЦГТ с помощью ДЭПК на 50% сохраняет исходную специфическую активность, а двух – до 95.2%. Это указывает на то, что в каталитическом акте ЦГТ важную роль играют два гистидиловых остатка, которые, видимо, локализованы в донорном подцентре. При этом каталитический акт или равномерно распределен между ними, или же только один из них участвует в каталитическом акте. В последнем случае, когда донорный подцентр не находится в акцепторно-индуцированной кон-

формации, акарбоза может взаимодействовать с ним двумя типами эквивалентной связи, но при каждом из них защищался бы только один гистидиловый остаток. В присутствии акцептора акарбоза может связываться одним-единственным, более эффективным путем, приводящим к защите обоих гистидиловых остатков в активном центре и сохраняющим полную ферментативную активность при модификации, т. е. акцепторный центр имеет предварительно связывающую функцию, приводящую к изменениям конформации всего активного центра и ориентирующую связывание донора в положении, необходимом для трансгликозилирования.

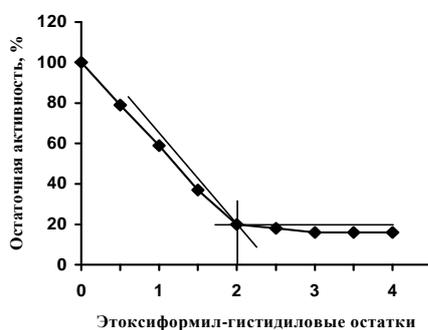


Рис. 10. Зависимость остаточной активности ЦГТ от количества этоксиформил-гистидиловых остатков. Данные пересчитаны от кривой 1 рис. 7.

Вероятно, в каталитическом центре ЦГТ карбоксильная группа выполняет роль нуклеофила, а имидазольная – электрофила, так как при оптимальном pH действия ЦГТ (pH 5.5) карбоксильная группа находится, в основном, в форме карбоксилат иона, а имидазольная – в форме протонированного имидазоля. Под действием нуклеофильно-электрофильной пары карбоксил-имидазолий происходит разрыв связи С-О с оттягиванием электронов к имидазольной группе и их уходом от карбоксила.

Авторы благодарны сотрудникам Института микробиологии А. Н. Андреасян и К. Б. Афян за активное участие в подготовке статьи.

¹ НПЦ “Армбиотехнология” НАН РА, Институт микробиологии
e.mail: balayan49@yandex.com

² НПЦ “Армбиотехнология” НАН РА, Центр депонирования микробов
microbio@sci.am

³ PureCircle, Малайзия

**А. М. Балаян, Л. С. Манукян, академик Э. К. Африкян,
В. А. Абемян**

**Изучение активного центра цикломальтодекстрин
глюканотрансферазы штамма *Thermostreptomyces sp.* методами
фотоокисления и модификации диэтилпирокарбонатом**

Цикломальтодекстрин глюканотрансфераза (ЦГТ, КФ 2.4.1.19), очищенная до гомогенного состояния из *Thermostreptomyces sp.*, штамм ИНМИА-А-561, была подвергнута фотоинактивации и модифицированию диэтилпирокарбонатом в присутствии салицина, акарбозы и полимера β -циклодекстрина. Определены значения рК и теплоты ионизации групп, входящих в активный центр фермента. Установлено, что в каталитическом акте ЦГТ существенное значение имеют карбоксильная и две имидазольные группы гистидина, которые выполняют роль нуклеофильно-электрофильной пары.

**Ա. Մ. Բալայան, Լ. Ս. Մանուկյան, ակադեմիկոս Է. Կ. Աֆրիկյան,
Վ. Ա. Աբեյան**

***Thermostreptomyces sp.* շտամից մաքրված ցիկլոմալտոդեքստրին
գլյուկանոտրանսֆերազի ակտիվ կենտրոնի ուսումնասիրումը
ֆոտոօքսիդացման և դիէթիլպիրոկարբոնատի միջոցով
մոդիֆիկացման եղանակներով**

Thermostreptomyces sp. *ИНМИА-А-561* շտամից անջատված և մաքրված հոմոգեն ցիկլոմալտոդեքստրին գլյուկանոտրանսֆերազը (*ՅԳՏ, ԿՓ 2.4.1.19*) սալիցինի, ակաբոզի և β -ցիկլոդեքստրինի պոլիմերի առկայությամբ ենթարկվել է ֆոտոինակտիվացման և փոփոխության դիէթիլպիրոկարբոնատի միջոցով, ինչպես նաև որոշվել են *pK* արժեքները և իոնիզացիոն խմբերի ջերմակայունացումը, որոնք առկա են ֆերմենտի ակտիվ կենտրոնում: Բացահայտվել է, որ ՅԳՏ-ի կատալիտիկ ակտի ընթացքում կարևորագույն դեր են խաղում հիստիդինի կարբօքսիլ և երկու իմիդազոլային խմբերը, որոնք հանդես են գալիս նուկլեոֆիլ-էլեկտրոֆիլ զույգով:

**A. M. Balayan, L. S. Manukyan, academician E. K. Afrikian,
V. A. Abelyan**

**Study of the active site of *Thermostreptomyces sp.* Cyclomalto-dextrin
glucanotransferase by photooxidation and modification
by diethylpyrocarbonate**

The photoinactivation and modification by diethylpyrocarbonate of the homogeneous cyclomalto-dextrin glucanotransferase (CGTase, EC 2.4.1.19) produced by

Thermotremptomyces sp. INMIA-A-561 have been developed in the presence of salicin, acarbose and β -cyclodextrin (CD) polymer, as well as calculated the pK and ionization heat of the groups of active site. It was established that the carboxyl and two imidazole groups of histidine which are play the role of nucleophil-electrophil pair are very important in the catalytical action of CGTase.

Литература

1. *Абелян В. А., Ямамото Т., Африкян Э. Г.* В кн.: Биохимия. 1994. Т. 59. С. 1122-1129.
2. *Абелян В. А., Адамян М. О., Абелян Л. А.* В кн.: Биохимия. 1995. Т. 60. С. 898-904.
3. *Абелян В. А., Афан К. Б., Авакян З.Г., Мелкумян А. Г., Африкян Э. Г.* В кн.: Биохимия. 1995. Т. 60. С. 1600-1608.
4. *Bovetto L. J., Villette J. R., Fontain I. F., Sicard P. J., Bouquelet S. J-L.* - Biotechnol. Appl. Biochem. 1992. V. 15. P. 59-68.
5. *Hoschke A., Laszlo E., Hollo J.* - Carbohydr. Res. 1980. V. 81. P. 145-156.
6. *Kita Y., Sakaguchi S., Nitta Y., Watanabe* - J. Biochem. 1982, V. 92. P. 1499-1504.
7. *Dua R. D., Kochhar S.* - Mol. Cell. Biochem. 1985. V. 66. P. 13-20.
8. *Bender H.* - Carbohydr. Res. 1991. V. 209. P. 145-153.
9. *Kuriki T., Imanaka T.* - J. Gen.Microbiol. 1989. V. 135. P. 1521-1528.
10. *Matsuura Y., Kusunoki M., Harada W., Kakudo M.* - J. Biochem. 1984. V. 95. P. 697-702.
11. *Kimura K., Kataoka S., Ishii Y., Takano T., Kobayashi S.* - Biochem. Biophys. Res. Commun. 1989. V. 161. P. 1273-1297.
12. *Svensson B., Clarke A. J., Svensson I.* - Carlsberg Res. Commun. 1983. V. 48. P. 517-527.
13. *Svensson B., Jespersen H., Sierks M.R., MacGregor E. A.* - Biochem. J. 1989. V. 264. P. 309-311.
14. *Fujiwara S., Kakihara H., Woo K., Lejeune A., Kanemoto M., Sakaguchi K., Imanaka T.* - Appl. Environ. Microbiol. 1992. V. 58. P. 4016-4025.
15. *Ковалева Н. А., Дорожко А. И., Коган З. С.* В кн.: Биохимия. 1984. Т. 49. С. 1253-1262.
16. *Жеребцов Н. А., Корнеева О. С., Тертычная Т. Н.* В кн.: Биохимия. 1995. Т. 60. С. 1580-1588.
17. *Miles R. W.* - Methods Enzymol. 1978. Т. 47. С. 431-442.
18. *Ovadi, J., Libor, S., Elodi, P.* - Acta Biochem. Biophys. Acad. Sci. Hung. 1967. V. 2. P. 455-458.
19. *Villette J.R., Sicard P. J., Bouquelet S.J-L.* - Biotechnol. Appl. Biochem. 1992. V. 15. P. 69-79.
20. *Диксон М., Уэбб Э.* Ферменты. Т. 1. М. Мир. 1982. 234 с.
21. *Makela M. J., Korpela T. K.* - Biophys. Methods. 1988. V. 15. P. 307-318.
22. *Абелян В. А., Гаспарян А.В., Авакян З.Г., Африкян Э. Г.* В кн.: Биохимия. 1991. Т. 56. С. 1578-1582.
23. *Lejeune A., Sakaguchi K. and Imanaka T.* - Anal. Biochem. 1989. V. 181. P. 6-11.
24. *Vikmon, M.* In: Proceedings of the first international symposium on cyclodextrins (Szejtli, J., ed.), D.Reidel. Budapest. 1982. P. 69-74.

25. *Lowry O. H., Rosenbrough N. G., Farr A. L., Randell R. J.* - J. Biol. Chem. 1951. V. 193. P. 265-275.
26. *Абелян В. А., Ямамото Т., Африкян Э. Г.* В кн.: Биохимия. 1994. Т. 59. С. 778-787.
27. *Буник В. И., Гомазкова В. С.* В кн.: Биохимия. 1987. Т. 52. С. 1235-1247.
28. *Кочетов Г. А.* Тиаминовые ферменты. М. Наука. 1978. 74 с.
29. *Лосева Л.П., Бендианишвили М.В., Шатилов В. Р., Шубин В. В., Кретович В. Л.* В кн.: Биохимия. 1986. Т. 51. С. 840-849.

BIOTECHNOLOGY

УДК 579.6

K. A. Trchounian

**Effects of Carbon Sources Mixtures on Hydrogen Production
by *Escherichia coli* during Mixed-Acid Fermentation**

(Submitted by corresponding member of NAS RA A. H. Trchounian 10/IX 2015)

Keywords: *Escherichia coli*; H_2 production; carbon sources mixtures; pH; mixed-acid fermentation.

1. Introduction. Nowadays expeditious wane of fuel and gas has strong requirement to find and process alternative energy sources. One of these energy sources which might replace existing fuel and gas is molecular hydrogen (H_2) which is ecologically clean – when burning H_2 gas water is produced; effective - when burning ~3 times more energy is released compared to fuel and gas and renewable one; H_2 can be produced from glycerol during microbe-mediated biological conversion [1]. Glycerol is a very cheap carbon source - crude glycerol costs ~30 cents/kg [2]. Moreover, the main side product of biodiesel production is glycerol.

Dharmadi et al. [2] have established that glycerol can be anaerobically fermented by *Escherichia coli* at slightly acidic pH (pH 6.3). Among the fermentation end products H_2 gas is detected not only at acidic but also at slightly alkaline pH (pH 7.5) [3]. However, no precise data exists about metabolic pathways of glycerol fermentation by *E. coli* and its dependence on external factors and co-fermentation with other carbon substrates. Currently, several studies are on-going using various mixtures of carbon sources like sugars with glycerol (glucose, xylose, etc.) to enhance H_2 production [4-6]/

It is known that H_2 is evolved by *E. coli* via hydrogenases (Hyd), which catalyze the reaction of $H_2 \leftrightarrow 2H^+ + 2e^-$ [1]. *E. coli* has the capacity to encode four membrane-associated [Ni-Fe]-hydrogenases [1]. Hyd-1 and Hyd-2 are reversible Hyd enzymes: during glycerol or glucose fermentation they operate in H_2 evolving or uptake mode, respectively [7]. Hyd-3 and Hyd-4 are H_2 producing Hyd enzymes under glucose fermentation but are able to work in reverse mode during glycerol fermentation [8]. The mode or direction of Hyd enzymes operation depends not only on fermentation substrate but also on external pH and other factors [1].

In the present paper H₂ production activity by *E. coli* during mixed-acid fermentation of single and mixture of carbon sources has been studied at alkaline and acidic pHs. The possibility of using various carbon sources mixtures might lead to enhanced bio-hydrogen production which can be employed in different biotechnological applications.

Material and methods. 2.1. Bacterial strains, their growth and preparation for assays. *E. coli* BW25113 or MC4100 wild type strains were used in the study (Table 1).

Table 1

Characteristics of *E. coli* wild type strains used

Strains	Genotype	Absent hydrogenase subunit or related protein	References
BW25113	<i>lacI^q rrnB_{T14} Δ lacZ_{W116} hsdR514 Δ araBAD_{AH33} Δ rha BAD_{LD78}</i>	wild type	[6]
MC4100	<i>F araD139 Δ (argF-lac)U169 λ-rpsL150 relA1 deoC1 flhD5301 Δ (fruK-yeiR)725(fruA25) rbsR22 Δ (fimB-fimE) 632 (::IS1)</i>	wild type	[9]

Bacteria from an overnight (O/N) growth culture were transferred into the buffered peptone medium containing 20 g/l peptone, 15 g/l K₂HPO₄, 1.08 g/l KH₂PO₄, 5 g/l NaCl (pH 7.5), 20 g/l peptone, 7.4 g/l K₂HPO₄, 8.6 g/l KH₂PO₄, 5 g/l NaCl (pH 6.5), 20 g/l peptone, 1.08 g/l K₂HPO₄, 15 g/l KH₂PO₄, 5 g/l NaCl (pH 5.5) and supplemented with glucose (2g/l) and/or glycerol (10 g/l) and/or sodium formate (0.68 g/l). Bacteria were grown in batch culture for 18-22 h at 37 °C; anaerobic conditions were described previously [4, 6, 7]. Bacterial growth was monitored by measuring bacterial culture absorbance at 600 nm with a spectrophotometer (Spectro UV-Vis Auto, Labomed, USA).

2.2. Redox potential determination and hydrogen production assays. Redox potential (E_h) in bacterial suspension was measured using the oxidation-reduction, titanium-silicate (Ti-Si) (EO-02, Gomel State Enterprise of Electrometric Equipment (GSEEE), Gomel, Belarus) and platinum (Pt) (EPB-1, GSEEE, or PT42BNC, Hanna Instruments, Portugal) glass electrodes [4, 7-10]. Ti-Si-electrode is measuring the overall E_h, whereas Pt-electrode is sensitive to H₂ under anaerobic conditions (in the absence of O₂). This difference between Ti-Si and Pt electrodes properties is allowing detection of H₂ evolution in bacterial suspension. Therefore, H₂ production rate (V_{H2}) by bacteria was calculated as the difference between the initial rates of decrease in Pt- and Ti-Si-electrodes readings and expressed as mV of E_h per min per mg dry weight of bacteria as represented in different papers [4, 7-10].

The E_h measurements were performed upon glucose (glucose assay), glycerol (glycerol assay) or formate (formate assay) supplementation to bacterial suspension. All substrates were supplemented in the concentrations used for the bacterial growth in the culture.

H_2 production by bacteria was confirmed also by the chemical method as described [11].

2.3. Others, reagents and data processing. Preparation of whole cells for H_2 production assays was done as described elsewhere [4, 6, 7]. Dry weight of bacteria was measured as before [4, 6, 7].

Agar, glycerol, peptone, sodium formate, Tris (Carl Roths GmbH, Germany) were used, the other reagents were of analytical grade.

Each data point represented was averaged from independent triplicate cultures at least. The standard errors of average data were calculated as described [7-10]: they were not more than 3 % if not represented. The validity of data differences between experimental and control assays was evaluated by Student's criteria (p) [7-10], the difference was valid if $p < 0.01$ or less; otherwise, the difference was not valid if $p > 0.5$ (not represented).

3. Results and discussion. It is well-established that *E. coli* is capable to ferment different sugars (e.g. glucose) and formate at different pHs producing H_2 [4, 7]. Besides sugars, this bacterium can grow on glycerol in the presence of pepton under anaerobic conditions at different pHs and produce H_2 [2, 9].

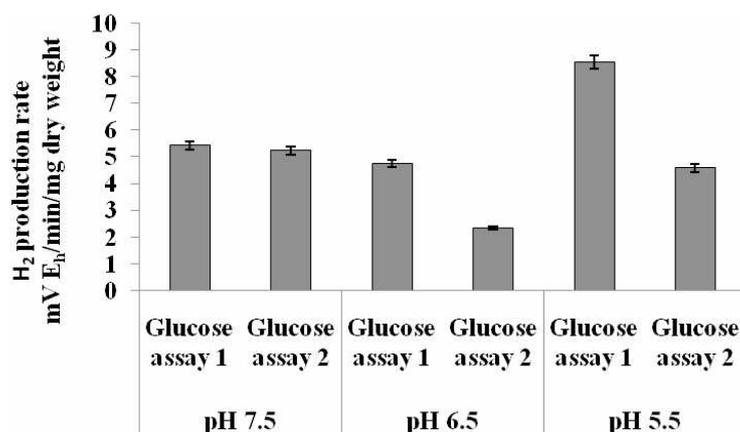
As it was mentioned *E. coli* performs mixed-acid fermentation and among end products formate, succinate, ethanol, CO_2 and H_2 etc. can be detected.

E. coli wild type cells were grown at various pHs in different mixtures of carbon sources and assayed for H_2 production. First wild type cells were grown on mixture of glucose and glycerol and compared to the cells grown either on glucose or glycerol (see Fig. 1 A, B). H_2 production rate (V_{H_2}) of wild type cells grown on mixture of 0.2% glucose and 1% glycerol at pH 7.5 in glucose supplemented assays was ~ 5.25 mV E_h /min mg dry weight (see Fig. 1, A) which was similar to the cells grown on glucose only. At pH 7.5 wild type cells V_{H_2} in glycerol assays was ~ 4 times lower compared to the cells grown on glycerol only. At pH 6.5 and pH 5.5 cells grown on mixed carbon in glucose assays evolved ~ 2 fold less V_{H_2} , compared to the cells grown on glucose only. V_{H_2} in glycerol supplemented assays in the cells grown on glycerol and glucose at pH 6.5 was ~ 0.43 mV E_h /min mg dry weight. Interestingly, at acidic pH (pH 5.5) no any H_2 production was detected when glycerol was supplemented.

Interestingly, at acidic pH (pH 5.5) no any H_2 production was detected when glycerol was supplemented. This suggests that during mixed carbon fermentation glucose inhibits enzymes responsible for glycerol uptake and its further metabolism which is in accordance with previously obtained data for *Klebsiella Pneumoniae* [12]. Further investigation was carried out using mixture of glycerol and formate as glycerol is very cheap carbon source and formate can be found in different industrial and agricultural wastes and by formate hydrogen lyase (FHL) complex is converted to H_2 and CO_2 [1]. The studies were carried out at pH 7.5 and pH 6.5. pH 5.5 was not taken as the wild type cells growth was inhibited. Actually, at pH 7.5 wild type cells V_{H_2} grown on glycerol and formate in glycerol supplemented assays was ~ 2.2 mV E_h /min mg

dry weight (see Fig. 2). No difference was determined when the cells were grown on glycerol only. But when 10mM formate was added in the assays V_{H_2} was ~ 35.34 mV E_h /min mg dry weight. The same result for cells grown on glycerol was obtained for pH 6.5 in glycerol supplemented assays but when formate was added in the assays V_{H_2} was ~ 1.5 fold lower (see Fig. 2)

A



B

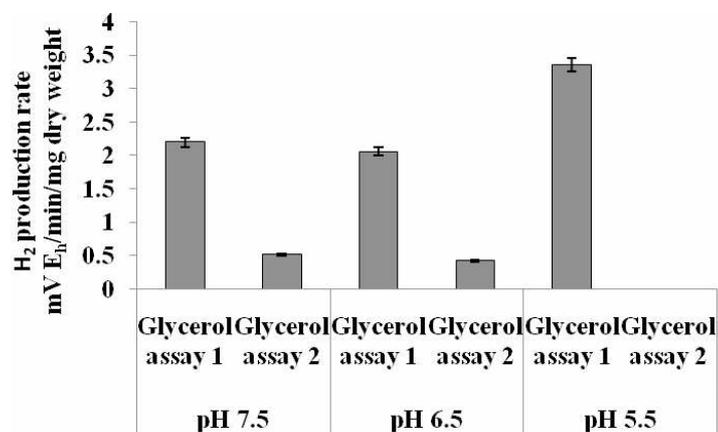


Fig. 1. H₂ production rate (V_{H_2}) by *E. coli* BW25113 or MC4100 wild type during single or mixed carbon (glucose and glycerol) fermentation in assays supplemented with glucose or glycerol at different pHs. Glucose assay 1 – cells grown on glucose only; Glucose assay 2 – cells grown on glucose and glycerol; Glycerol assay 1 – cells grown on glycerol only; Glycerol assay 2 – cells grown on glucose and glycerol. For others, see Materials and methods.

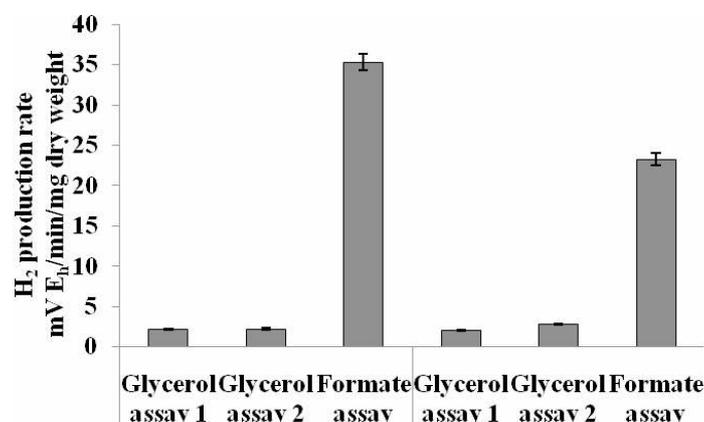


Fig. 2. H₂ production rate (V_{H_2}) by *E. coli* BW25113 or MC4100 wild type during glycerol or mixed carbon (glycerol and formate) fermentation in assays supplemented with glycerol or formate at pH 7.5 and pH 6.5. Glycerol assay 1 – cells grown on glycerol only; Glycerol assay 2 – cells grown on glycerol and formate. For others, see Materials and methods.

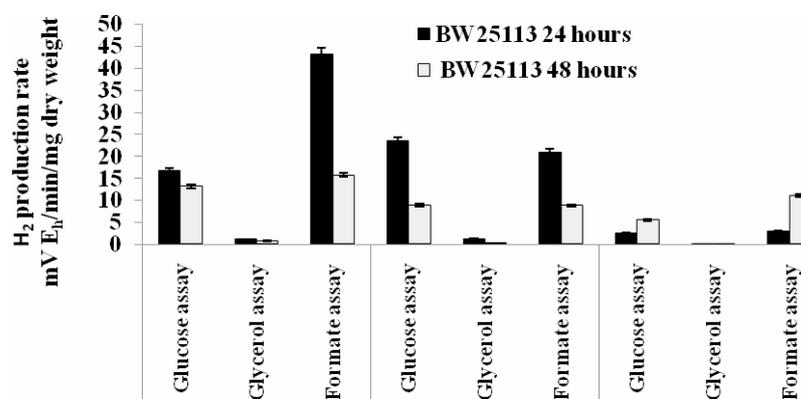
From these results it might be suggested that for enhanced H₂ production cells must be grown at pH 7.5 in the presence of glycerol and formate. As from the results it was obvious that from formate H₂ production rate was higher compared to glycerol. The studies might be used in further developing biohydrogen production technology by growing initially the cells in low concentration of glycerol and formate and producing H₂ from formate.

To further control and optimize conditions for detecting enhanced H₂ production mixture of glucose, glycerol and formate fermentation was investigated. At pH 7.5 wild type cells V_{H_2} grown on mixture of carbon sources and harvested after 24 hours in glucose supplemented assays was ~16.8 mV E_h/min mg dry weight (see Fig. 3A). The V_{H_2} was ~3 fold higher compared to the cells grown on glucose only (see Fig. 3A).

Surprisingly, at the same conditions but in the assays added with glycerol V_{H_2} was ~1.14 mV E_h/min mg dry weight which was ~2 fold higher compared to the cells grown on glucose and glycerol. When formate was added in the assays V_{H_2} was similar as the cells grown on glycerol and formate. Moreover, at pH 6.5 wild type cells grown on mixed carbon in glucose assays had ~23.53 mV E_h/min mg dry weight V_{H_2} (~4.9 fold more) compared to the cells grown on glucose only. At pH 5.5 in glucose assays V_{H_2} was ~ 3.3 fold lower compared to the cells grown on glucose only. Further interest for biotechnology is that cells must be grown and assayed at pH 6.5 and pH 7.5. Cells were also tested for glycerol and formate assays at pH 6.5 and pH 5.5. In glycerol supplemented assays at pH 6.5 V_{H_2} was the same as for pH 7.5 but at acidic pH (pH 5.5) residual H₂ gas was detected. In formate assays cells produced ~2 fold less H₂

compared to pH 7.5 but at pH 5.5 V_{H_2} was the same as in glucose assays. From these data it can be suggested that for enhanced H_2 production the optimal pH for cell growth is pH 7.5 and glucose or formate assays. V_{H_2} was also tested with the cells grown after 48 hours and assayed for H_2 production and compared to the cells grown 24 hours (see Fig. 3, A). Interestingly, only at pH 7.5 in glucose or glycerol assays V_{H_2} was similar to the cells grown 24 hours. But when formate was added to the assays H_2 production was decreased ~2.5 fold either at pH 7.5 or pH 6.5.

A



B

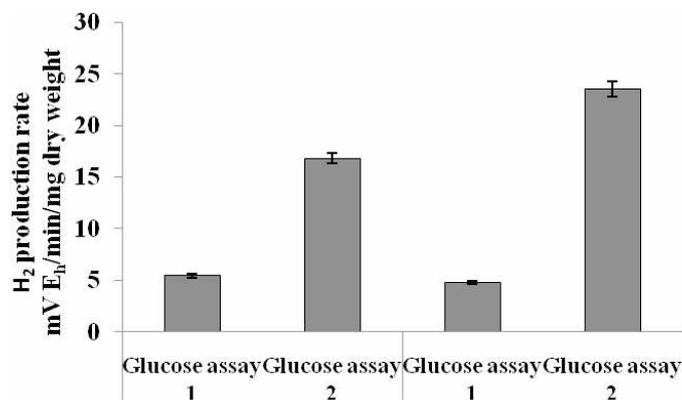


Fig. 3. H_2 production rate (V_{H_2}) by *E. coli* BW25113 or MC4100 wild type cells grown either 24 or 48 hours (A) at different pHs. Glucose assay 1 – cells grown on glucose only; Glucose assay 2 – cells grown on glucose, glycerol and formate (B). For others, see Materials and methods.

Note, that the cell count was the same in assays harvested for 24 or 48 h. It might be suggested that after 48 h H₂ production is decreased due to the change of metabolism which might affect the enzymes responsible for H₂ evolution. Further study is required to reveal the role of these enzymes when mixed carbon sources fermentation is occurring.

4. Concluding remarks. The obtained results identified the optimal conditions for enhanced H₂ production when cells are grown on mixture of different carbon sources. Especially, when the cells are grown on triple (glucose, glycerol, formate) carbon source H₂ production is ~3 fold higher compared to the cells grown on glucose only.

The results are good basis for employing various carbon sources, especially mixed carbons, in biohydrogen production technology by *E. coli*.

Acknowledgements. The study was supported by Armenian National Science and Education Fund (ANSEF, USA) Research grant to KT (NS-Biotech-3460) and Research grant from State Committee of Science, Ministry of Education and Science of Armenia (13-1F002).

Yerevan State University
e-mail: K.trchounian@ysu.am

K. A. Trchounian

**Effects of Carbon Sources Mixtures on Hydrogen Production by
Escherichia coli during Mixed-Acid Fermentation**

H₂ production by *Escherichia coli* during various single and/or mixtures of carbon sources at different pHs was investigated. The obtained results showed that in the presence of mixture of glucose, glycerol and formate H₂ production rate at pH 7.5 is ~3 fold higher compared to the cells grown in glucose only as a carbon source. Moreover, in the presence of triple carbon source in glycerol supplemented assays H₂ production rate was ~2 fold higher compared to the cells grown on glucose and glycerol.

Կ. Ա. Թրչունյան

***Escherichia coli*-ի կողմից մոլեկուլային ջրածնի արտադրության վրա
ածխածնի խառն աղբյուրների ազդեցությունը խառը
խմորման ընթացքում**

Ուսումնասիրվել է միակի և/կամ ածխածնի խառն աղբյուրների խմորման ընթացքում մոլեկուլային ջրածնի (H₂) արտադրությունը *Escherichia coli*-ի կողմից pH-ի տարբեր արժեքների դեպքում: Արդյունքները ցույց են տալիս, որ եռակի ածխածնի գլյուկոզի, գլիցերոլի և մրջնաթթվի առկայության դեպքում H₂-ի արտադրման արագությունը ~3 անգամ ավելին է, քան միայն գլյուկոզում աճեցված բջիջներում: Ավելին, երբ փորձին ավելացվել է գլիցերոլ H₂-ի արտադրման արագությունը ~2 անգամ աճել է համեմատած գլիցերոլի և գլյուկոզի առկայությամբ աճեցված բջիջներում:

К. А. Трчунян

Влияние смеси источников углерода на производство водорода бактериями *Escherichia coli* при смешанном брожении

Изучено производство водорода (H_2) у *Escherichia coli* при брожении одного и/или смеси источников углеродов при разных pH. Результаты показали, что при смеси глюкозы, глицерина и формиата при pH 7.5 скорость производства H_2 в ~3 раза больше по сравнению с клетками, выращенными только при глюкозе. Более того, при смеси трех источников углерода, когда в эксперимент добавляли глицерин, скорость производства H_2 была в ~2 раза больше, чем при смеси глюкозы и глицерина.

References

1. Trchounian K., Poladyan A., Vassilian A., Trchounian A. - Crit Rev Biochem Mol Biol. 2012. V. 47. P. 236-249.
2. Dharmadi Y., Murarka A., Gonzalez R. - Biotech Bioeng. 2006. V. 94. P. 821-829.
3. Trchounian K., Trchounian A. - Int J Hydrogen Energy. 2013. V. 38. P. 3921-3929.
4. Trchounian K. - Gene. 2012. V. 506. P. 156-160.
5. Thapa L. P., Lee S. J., Yang X. G., Yoo H. Y., Park C., Kim S. W., Kim S. B. - Bioproc Biosyst Engin. 2014. V. 37. P. 1073-1084.
6. Trchounian K., Sargsyan H., Trchounian A. - Int J Hydrogen Energy. 2014. V. 39. P. 6419-6423.
7. Trchounian K., Trchounian A. - Int J Hydrogen Energy. 2009. V. 34. P. 8839-8845.
8. Trchounian K., Trchounian A. - Int J Hydrogen Energy. 2014. V. 39. P. 16914-16918.
9. Trchounian K., Soboh B., Sawers R. G., Trchounian A. - Cell Biochem Biophys. 2013. V. 66. P. 103-108.
10. Gabrielyan L., Sargsyan H., Hakobyan L., Trchounian A. - Appl Energy. 2014. V. 131. P. 20-25.
11. Maeda T., Wood T. K. - Int J Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 2409-2412.
12. Sprenger G. A., Hammer B. A., Johnson E. A. - J Gen Microbiol. 1989. V. 135. P. 1255-1262.

& Greuter, а также два эндемичных вида [1], включенных в Красную книгу растений Армении – *R. hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter и *R. tamaniana* (Agababian) Agababian et Greuter [2].

Отметим, что среди довольно объемного списка статей, посвященных исследованию морфологии пыльцы рода *Centaurea* s. l., нами обнаружено лишь несколько, относящихся конкретно к видам рода *Rhaponticoides*. Среди них две работы, проведенные на уровне светового микроскопа (СМ) [8, 9], и две – на уровне сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) [10, 11]. При этом, согласно литературным данным, пыльца всех изученных видов относится к морфотипу *Centaureum* [9], для которого характерны трехбороздно-поровый тип апертур с короткими бороздами и крупно-шиповатая скульптура экзины.

Материал и методика. Палинология. Материалом для палинологических исследований послужила пыльца, полученная из гербария Института ботаники НАН Республики Армения, Ереван (ЕРЕ), а также из личных сборов. Для изучения на световом микроскопе применялись два основных метода: метод окрашивания пыльцы основным фуксином [12] и упрощенный ацетолизный метод [13]. Для изучения на сканирующем электронном микроскопе (Jeol, JSM-6390) бралась сухая неацетолизированная пыльца. После удаления пыльника пыльцевые зерна помещались в каплю 96% этилового спирта, а затем на специальные столики с последующим проведением вакуумного напыления золотом. Исследования на уровне СЭМ проводились в кабинете электронной микроскопии лаборатории палеоботаники Ботанического института им. В. Л. Комарова (БИН) РАН, Санкт-Петербург (Россия).

Изученные образцы: *Rhaponticoides hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter: Армения, Анийский р-н, окр. с. Баграван, на сухих каменистых холмах, 1450 м. Leg. Э. Габриэлян (ЕРЕ 145491); *R. tamaniana* (Agababian) Agababian et Greuter: Арм. ССР, Ахурянский р-н, окр. с. Крашен, г. Марал-даг, правый берег ущелья Махари-дзор 1800 м над ур. м. Leg. М. Агабабян (ЕРЕ 150344); Армения, Ехегнадзорский р-н, окр. с. Мозров по дороге к Гнешик, 1676 м над ур. м. Leg. Г. Файвуш (личные сборы).

Кариология. Кариологическое исследование проведено на образцах, собранных из разных регионов Армении во время экспедиций, организованных в 2013-2014 гг. в рамках указанного выше проекта. Семена проращивались в чашках Петри при комнатной температуре. Корешки проростков подвергались предобработке в 0,2%-ном растворе колхицина в течение 1,5-2 ч., затем фиксировались в ацетат-алкоголе (3:1) в течение 2-2,5 ч. и промывались в 75° спирте, после чего проводился горячий гидролиз в 1N растворе хлорной кислоты (HCl) в течение 12 мин., затем материал 1,5 ч. окрашивался в реактиве Шиффа. После предварительного просмотра мазков в 45%-ной уксусной кислоте под микроскопом материал проводился через бутил и ксилол (по 5-10 мин) и заключался в бальзам. Кариологические препараты исследовались на микроскопе МЛ-2, микрофотографии осуществлены с помощью фотонасадки.

Изученные образцы: *Rhaponticoides hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter: Армения, Талинский район, 1,5 км от с. Ацашен к с. Цамакасар,

вдоль полей. 19.10.13. Leg. & det. А. Гукасян; *R. tamaniana* (Agababian) Agababian et Greuter: Армения, Ехегнадзорский р-н, окр. с. Мозров, вдоль дороги к с. Гнишик. 39°42' 00,8" N / 45° 17' 36,3" E. 1676 м. над ур. м. 05.10.13. Leg. Г. Файвуш, А. Гукасян, det. Г. Файвуш.

Результаты и обсуждение. Род *Rhaponticoides* Vaill. *R. hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter. Многолетние травянистые растения. Эндемик Ширакского флористического района, произрастает в окрестностях сел Джаджур, Ани, Баграван, Саракап, Цамакасар и др. В «Красную книгу растений Армении» [2] вид включен как находящийся под угрозой (категория EN). Сроки цветения – июнь-июль, плодоношения – июль-август.

Палинология. Пыльцевые зерна меридионально-3-бороздно-поровые, сфероидальной или сплюсненно-сфероидальной формы, в очертании с полюса округло-треугольные; диаметр пыльцевых зерен 27.3-28.5 μm или: полярная ось 32.7-35.4 μm , экваториальный диаметр 43.5-45.1 μm . Борозды короткие, не очень широкие, с ровными краями, концы закругленные; диаметр апокольпиума 23.5-24.0 μm , ширина мезокольпиума 20.1-21.3 μm . Поры крупные, обычно выпуклые, округлой формы, 12.3-13.5 μm в диаметре. Экзина 5.9-6.5 μm , эктэкзина двухслойная: столбики наружного слоя не доходят до вершины шипа, одиночные, частые, с шаровидно закругленными концами; столбики внутреннего слоя тонкие, часто искривленные, в основном расположены редко и нерегулярно. Скульптура экзины шиповатая (СМ); скульптура экзины крупношиповатая, между шипами регулярно густо перфорированная; отдельные шипы 5.0-6.8 μm высотой, со слабо закругленными или слегка заостренными концами; высота «базальной подушки»¹ у отдельных шипов в пределах от 1/2 до 2/3 от общей высоты шипа; поверхность пыльцевых зерен без четко выраженных ячеек (СЭМ) (рис. I, 1-4).

Кариология. У изученных образцов этого вида нами выявлена диплоидная цитораса ($2n=30$) с базовым основным числом $x=15$ (рис. II, а). Кариотип симметричный с явным преобладанием метацентрических хромосом, имеется пара метацентрических хромосом с ярко выраженными спутниками. Формула кариотипа: $2n=30=26\text{ M}+2\text{ SM}+2\text{ M}^{\text{S}}$. Ранее также приводилась диплоидная цитораса для этого вида под названием *Centaurea hajastana* Tzvel. из другой популяции (Анийский р-н, между сс. Баграван и Артик, по краям полей, 1987. Leg. М. Агабабян, Г. Файвуш, det. М. Агабабян) [14].

R. tamaniana (Agababian) Agababian et Greuter. Многолетние травянистые растения. Вид представлен двумя субпопуляциями – одна в Ширакском, вторая в Дарелегисском флористическом районе. В Красную книгу растений Армении [2] вид включен как находящийся в критическом состоянии (категория CR). Сроки цветения – июнь-июль, плодоношения – июль-август.

¹ «Базальная подушка» – плотное компактное образование в основании крупных шипов, возникающее в результате сближения и слияния на концах наиболее длинных столбиков, в основном имеет сетчатую поверхность.

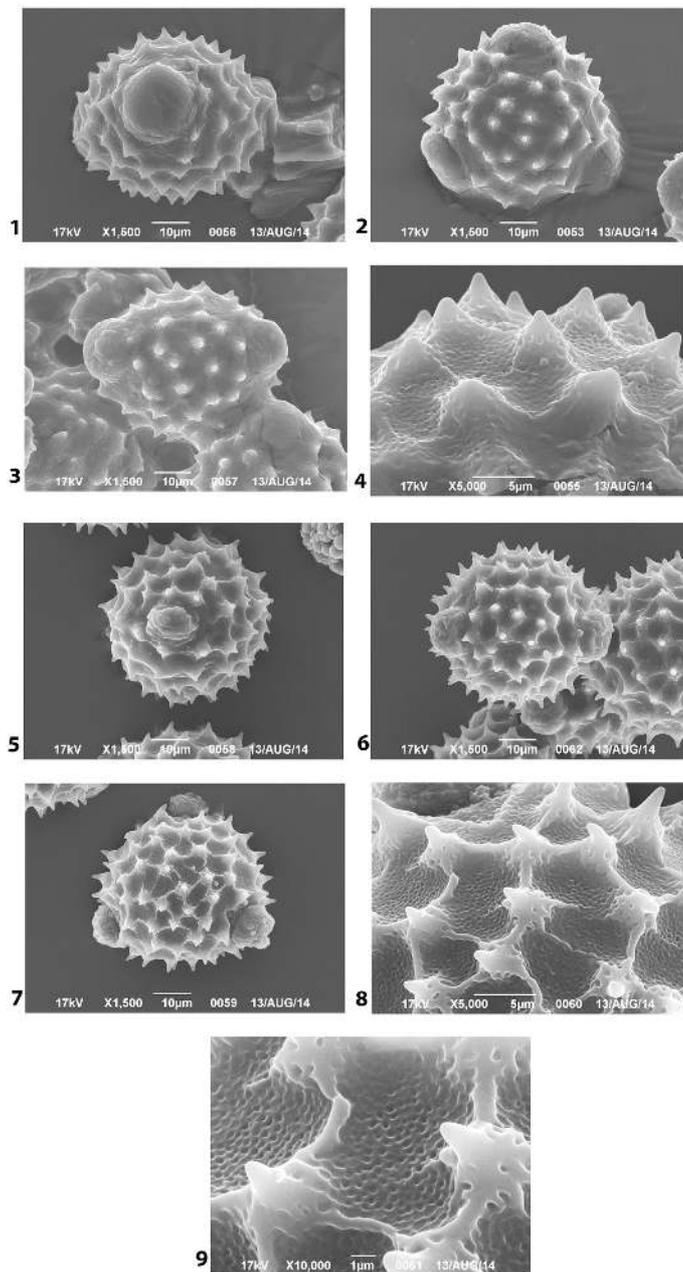


Рис. I. Пыльцевые зерна видов рода *Rhaponticoides* (СЭМ): 1-3 – *R. hajastana* (1 – вид с экватора, апертюра; 2 – вид с полюса; 3 – мезокольпиум; 4 – скульптура экзины); 5-9 – *R. tamaniana* (5 – вид с экватора, апертюра; 6 – мезокольпиум; 7 – вид с полюса; 8-9 – скульптура экзины).

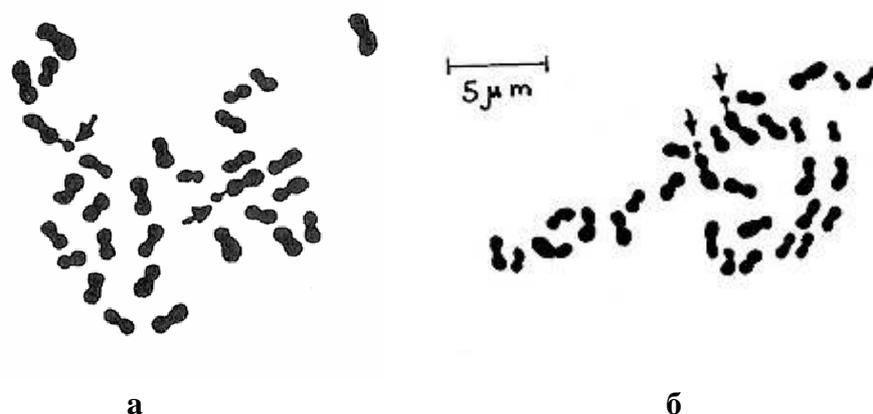


Рис. II. Метафазные пластинки: а – *Rhaponticoides hajastana*, $2n=30$; б – *R. tamanianae*, $2n=30$.

Палинология. Пыльцевые зерна меридионально-3-бороздно-поровые, почти сфероидальной формы, в очертании с полюса округло-треугольные; диаметр пыльцевого зерна $37.3-38.5 \mu\text{m}$. Борозды короткие, не очень широкие, с ровными краями, концы закругленные; диаметр апокольпиума $22.5-23.3 \mu\text{m}$, ширина мезокольпиума $24.5-25.5 \mu\text{m}$. Поры крупные, часто выпуклые, в основном округлой формы, до $10,0 \mu\text{m}$ в диаметре; поверхность поровой мембраны извилисто-складчатая (СЭМ). Экзина $5.3-6.1 \mu\text{m}$, эктэкзина двухслойная: столбики наружного слоя не доходят до вершины шипа, одиночные, частые, с шаровидно закругленными концами; столбики внутреннего слоя тонкие, часто искривленные, в основном расположены редко и нерегулярно. Скульптура экзины шиповатая (СМ); скульптура экзины регулярно крупношиповатая, между шипами густо перфорированная; отдельные шипы $5.5-6.8 \mu\text{m}$ высотой, со слабо закругленными концами; высота «базальной подушки» у отдельных шипов в пределах от $\frac{1}{2}$ до $\frac{2}{3}$ от общей высоты шипа; поверхность пыльцевых зерен с четко выраженными 3-5-угольными ячеями (СЭМ) (рис. I, 5-9).

Кариология. У изученных образцов этого вида из Дарелегисского флористического района нами выявлена диплоидная цитораса ($2n=30$) с базовым основным числом $x=15$ (рис. II, б). Кариотип симметричный с преобладанием метацентрических хромосом, имеется пара субметацентрических хромосом с ярко выраженными спутниками. Формула кариотипа: $2n = 30 = 22M + 6 SM + 2SM^S$. Ранее также приводилась диплоидная цитораса для этого вида под названием *Centaurea tamanianae* Agababian из другой популяции Ширакского флористического района (Анийский р-н, между сс. Баграван и Артик, по краям полей, 1987. Leg. М. Агабабян, Г. Файвуш, det. М. Агабабян) [14].

Закключение. Сравнительно-морфологический анализ пыльцы видов *R. hajastana* и *R. tamanianae* показал некоторое различие в размерах пыльцевых зерен (крупнее у вида *R. hajastana*), а также по скульптуре экзины. Так, электронно-микроскопические исследования позволили выявить

ячеистую поверхность пыльцы у вида *R. tamaniana*, при этом отдельные ячеи образованы за счет перегородок, объединяющих в области «базальной подушки» от 3 до 5 шипов (рис. I, 8-9).

Кариологические исследования показали, что изученные виды рода *Rhaponticoides* являются амфидиплоидами со вторичным базовым основным числом $x=15$, которое могло возникнуть при скрещивании видов с предковыми основными числами $x=7$ и $x=8$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS «13-1F093».

Институт ботаники НАН РА
e-mail: alla63_03@mail.ru

А. М. Айрапетян, А. Г. Гукасян

Палинологическое и кариологическое исследование эндемичных видов рода *Rhaponticoides* Vaill. (сем. *Asteraceae*), включенных в Красную книгу растений Армении

Исследованы особенности морфологии пыльцы, а также кариотипа двух эндемичных, включенных в Красную книгу растений Армении видов рода *Rhaponticoides* Vaill. (сем. *Asteraceae*): *R. hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter и *R. tamaniana* (Agababian) Agababian et Greuter. Выявлены некоторые различия в размерах пыльцевых зерен, а также в скульптуре экзины. У изученных видов выявлены диплоидные циторасы ($2n=30$) с базовым основным числом $x=15$.

Ա. Մ. Հայրապետյան, Ա. Գ. Դուկասյան

Հայաստանի բույսերի Կարմիր գրքում ընդգրկված *Rhaponticoides* Vaill. (*Asteraceae* ընտ.) ցեղի էնդեմիկ տեսակների պալինոլոգիական և կարիոլոգիական ուսումնասիրություն

Ուսումնասիրվել են Հայաստանի բույսերի Կարմիր գրքում ընդգրկված *Rhaponticoides* Vaill. (*Asteraceae* ընտ.) ցեղի երկու էնդեմիկ տեսակների (*R. hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter և *R. tamaniana* (Agababian) Agababian et Greuter) ծաղկափռու մորֆոլոգիայի և կարիոտիպի առանձնահատկությունները: Որոշ տարբերություններ են բացահայտվել ուսումնասիրվող տեսակների ծաղկափռու չափերի, ինչպես նաև էրզինի քանդակի վերաբերյալ: Հետազոտվող տեսակների մոտ հայտնաբերվել է դիպլոիդ ցիտոսաներ ($2n=30$) $x=15$ հիմնական քրոմոսոմային թվով:

A. M. Hayrapetyan, A. G. Ghukasyan

Palynological and Caryological Investigation of Endemic Species of the Genus *Rhaponticoides* Vaill. (fam. *Asteraceae*) Included in the Red Data Book of Plants of Armenia

The peculiarities of pollen morphology and karyotype of two endemic species of the genus *Rhaponticoides* Vaill. (fam. *Asteraceae*) included in the Red Data Book of plants of Armenia, namely *R. hajastana* (Tzvelev) Agababian et Greuter and *R. tama-*

niana (Agababian) Agababian et Greuter have been investigated. Some differences in the size of pollen grains, as well as in the exine ornamentation are revealed. For investigated species the diploid cytotypes ($2n=30$) with basic number $x=15$ were found.

Литература

1. *Файвуш Г. М.* – Фл., растит., раст. рес. Армении. 2007. Вып. 16. С. 62 - 68.
2. *Tamanyan K., Arevshatyan I., Fayvush G., Gabrielyan E., Ghukasyan A., Hakobyan Zh., Khanjayan N., Nersesyan A., Oganessian M., Vardanyan Zh., Nanagyulyan S.* The Red Book of Plants of the Republic of Armenia (Higher plants and Fungi). 2010. Erevan. Zangak. 598 p.
3. *Greuter W.* - Willdenowia. 2003. V. 33. P. 49 - 61.
4. *Hellwig F. H.* - Pl. Syst. Evol. 2004. V. 246. P. 137 - 162.
5. The International Plant Name Index. <http://www.ipni.org/>
6. *Wagenitz G.* - Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1986. V. 89B. P. 11 - 21.
7. *Agababian M. V., Fayvush G. M.* - Thaiszia. 1991. V. 1. P. 49 - 53.
8. *Аветисян Е. М.* - Тр. Бот. ин-та АН АрмССР. 1964. Т. 14. С. 31 - 47.
9. *Wagenitz, G.* - Flora. 1955. V. 142. P. 213 - 279.
10. *Мейер-Меликян Н. Р., Бовина И. Ю., Косенко Я. В., Полева С. В., Северова Е. Э., Теклева М. В., Токарев П. И.* Атлас пыльцевых зерен Астровых. М. КМК. 2004. 236 с.
11. *Agababian M. V.* - Bot. Jahrb. Syst. 1996. V. 118. N 2. P. 137 - 145.
12. *Смольянинова Л. А., Голубкова В. Ф.* - ДАН СССР. 1950. Т. 75. N 1. С. 125 - 126.
13. *Аветисян Е. М.* - Бот. журн. 1950. Т. 35. N 4. С. 385 - 387.
14. *Agababian M., Goukasyan A.* - Thaiszia. 1994. V. 4. P. 171-173.