

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2015

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основана в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԿԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԳՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ.

Адресредакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:<http://elib.sci.am>e-mail: rnas@sci.am

©НАН РА. Президиум. 2015

©Издательство “Титутюн” НАН РА. 2015

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Բ. Մ. Սպիտակովսկի – Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների հնարավոր հավաքածուների մասին 7

Մ. Լ. Գոգյան – Ըստ Հաարի ընդհանրացված համակարգի թույլ ազահ ալգորիթմի մի հատկության մասին..... 15

Ռ. Վ. Դալլաքյան, Բ. Վ. Հովհաննիսյան – Բլաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալների Թեյլորի գործակիցների և այդ արտադրյալները կապող ֆունկցիաների մասին..... 20

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

Ս. Մ. Չիդեմյան, Ա. Հ. Ջիվանյան, Գ. Հ. Խաչատրյան, Հ. Գ. Խասիկյան – Ձեռքի ափի երակների վրա հիմնված «ոչ հստակ» պահոցների սխեմա 27

ԾԱԾԿԱԳՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ք. Մ. Գյուրեղյան – SAFER+ համակարգի որոշ ձևափոխություններ 33

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան - Ռեզոնանսային և տեղայնացված սահքի տատանումները ուղղանկյուն կտրվածքով շերտում 40

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Ի. Ա. Վարդանյան - OH ռադիկալների ռեակցիաները NaCl-ի պինդ մակերևույթի վրա 44

ԵՐԿՐԱՔԻՄԻԱ

Ս. Վ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Փաշայան, Լ. Վ. Հարությունյան – Հայաստանի տարածքի երկրաշարժերի հիդրոերկրադինամիկական և հիդրոքիմիական նախանշանները 50

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Գ. Ս. Շահինյան, Հ. Հ. Փանոսյան, Ա. Հ. Թոշունյան – Հայաստանի երկրաջերմային աղբյուրներից անջատված լիպազ արտադրիչ ջերմասեր բացիլների շտամների ուսումնասիրությունը 59

ԲՈՒՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ժ. Հ. Վարդանյան - Հայաստանում ծառաբույսերի դենդրոլոգիական առանձնահատկությունները տարածման վերին և ստորին սահմաններում 69

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский</i> – О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций	7
<i>Л. Гогян</i> – Об одном свойстве слабого жадного алгоритма по общей системе Хаара	15
<i>Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян</i> – О коэффициентах Тейлора произведений Бляшке и Джрбашяна, а также связующих их функциях	20

ИНФОРМАТИКА

<i>С. С. Чидемян, А. А. Дживанян, Г. А. Хачатрян, О. Г. Хасикян</i> – Схема “нечетких хранилищ”, основанная на венах ладони	27
---	----

КРИПТОГРАФИЯ

<i>К. М. Кюрегян</i> – Некоторые модификации SAFER+	33
---	----

МЕХАНИКА

<i>В. М. Белубекян, М. В. Белубекян</i> – Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением	40
---	----

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

<i>И. А. Варданян</i> – Реакции радикалов OH на твердой поверхности NaCl	44
--	----

ГЕОХИМИЯ

<i>С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян</i> – Гидрогеодинамические и геохимические предвестники землетрясений на территории Армении	50
---	----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>Г. С. Шагинян, О. А. Паносян, А.А. Трчунян</i> – Изучение липаз-продуцирующих термофильных штаммов бацилл, изолированных из геотермальных источников Армении	59
---	----

БОТАНИКА

<i>Ж. А. Варданян</i> – Дендрологические особенности верхнего и нижнего пределов распространения древесных растений Армении	69
---	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky</i> - On Possible Tuples of Partial Indices of Triangular Matrix-Functions	7
<i>S. L. Gogyan</i> – On a Property of Weak Greedy Algorithm with Respect to the General Haar System	15
<i>R. V. Dallakyan, I. V. Hovhannisyan</i> - About the Taylor Coefficients of Blaschke and M. Djrbashyan Products and Functions Connecting these Products	20

INFORMATICS

<i>S. S. Chidemyan, A. H. Jivanyan, G. H. Khachatryan, H. G. Khasikyan</i> - Palm-Vein Based Fuzzy Vault Scheme.....	27
--	----

CRYPTOGRAPHY

<i>K. M. Kyuregyan</i> - Some Modifications of SAFER+	33
---	----

MECHANICS

<i>V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan</i> - Resonance and Localized Shear Vibration in the Layer with Rectangular Cross Section	40
---	----

CHEMICAL PHYSICS

<i>I. A. Vardanyan</i> - Reactions of OH Radicals on a Solid NaCl-Surface	44
---	----

GEOCHEMISTRY

<i>S. V. Grigoryan, R. A. Pashayan, L. V. Harutyunyan</i> – Hydrogeodynamic and Geochemical Earthquake Precursors of the Territory of Armenia	50
---	----

MICROBIOLOGY

<i>G. S. Shahinyan, H. H. Panosyan, A. H. Trchounian</i> – Characterization of Lipase Producing Thermophilic Bacilli Isolated from Armenian Geothermal Springs	59
--	----

BOTANY

<i>Zh. H. Vardanyan</i> – The Features of the Upper and Lower Limits of Distribution of Woody Plants in Armenia	69
---	----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.23

К. В. Арутюнян¹, А. Г. Камалян², И. М. Спитковский³

О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсисяном 8/ VIII 2014)

Ключевые слова: *треугольные матрицы-функции, факторизация, частные индексы.*

1. Введение. Пусть Γ – карлесоновский замкнутый контур комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий содержащую нулевую точку конечно-связную область. Сингулярный интегральный оператор S , определенный по формуле

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, (см. [1]). Рассмотрим классы функций $L_p^+ = \text{im} P_+$, $L_p^- = \text{im} P_- + \mathbb{C}$, где проекторы $P_{\pm}$ определяются равенствами $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$. Ниже для данного множества X через X^m и $X^{n \times n}$ будем обозначать соответственно множество n -мерных векторов и множество всех матриц размера $n \times n$ с компонентами из X .

Пусть $G, G^{-1} \in L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$. Под факторизацией относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) матрицы-функции G (см. [2]) мы понимаем представление

$$G = G_- \Lambda G_+^{-1},$$

где $G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^{n \times n}$, $G_{\pm}^{-1} \in (L_q^{\pm})^{n \times n}$ ($q = p/(p-1)$), оператор $GS G^{-1}$ ограничен в пространстве $(L_p(\Gamma))^n$ (действие S на вектор-функцию понимается покомпонентно), и $\Lambda(t) = \text{diag}(t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n})$, $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \mathbb{Z}$.

Целые числа $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ называются частными индексами матрицы-функции G ; при $n=1$ (единственный) частный индекс называется просто индексом (скалярной) функции G . Вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ будем называть набором частных индексов матрицы-функции G . Набор частных индексов определяется однозначно с точностью до произвольной перестановки его компонент.

Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$. Обозначим через $T(\chi)$ множество нижнетреугольных матриц-функций из класса $L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$, диагональные элементы которых факторизуемы и индекс каждого j -го диагонального элемента равен χ_j . Как известно (см. [3], а также [2]), матрицы-функции из класса $T(\chi)$ допускают факторизацию. Множество $A(\chi) \subset \mathbb{Z}^n$ определим следующим образом: вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ принадлежит множеству $A(\chi)$ тогда и только тогда, когда он является набором частных индексов некоторой матрицы-функции G из $T(\chi)$.

Для случая $n=2$ описание $A(\chi)$ имеется в [4]. Задача описания $A(\chi)$ для $n > 2$ была явно сформулирована в [2]. В случае $n=3$ отличные друг от друга описания множества $A(\chi)$ даны в работах [5] и [6]. Исследованию этой задачи при произвольном n посвящены работы [5] и [7]. Множество $A(\chi)$ инвариантно в том смысле, что с каждым вектором κ из $A(\chi)$ оно содержит и все векторы, полученные из κ путем всевозможных перестановок его компонент. Подмножество B множества $A(\chi)$ назовем базовым, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B , совпадает с $A(\chi)$. Задача описания множества $A(\chi)$ по существу сводится к нахождению базового подмножества простой структуры. В данной работе мы предлагаем конструкцию базового подмножества, основанную на решении совокупности явно выписываемых систем линейных уравнений и неравенств.

2. Основной результат. Пусть $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $\Delta = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi) = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i - \chi_j \geq 2\}$$

и проекции $\pi_1: D(\chi) \rightarrow \Delta$, $\pi_2: D(\chi) \rightarrow \Delta$, определенные равенствами $\pi_1(i, j) = i$, $\pi_2(i, j) = j$. Скажем, что подмножество $D' \subset D(\chi)$ является (T, χ) -допустимым, если множества $\pi_1(D')$ и $\pi_2(D')$ не пересекаются. В частности, (T, χ) -допустимым является пустое множество. Множество (T, χ) -допустимых подмножеств обозначим через J . Под слоем, соответствующим (T, χ) -допустимому подмножеству D' , будем понимать множество $A_T(D', \chi) \subset \mathbb{Z}^n$, определяемое следующим образом. Вектор

$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$, принадлежит $A_T(D', \chi)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- A1. $\kappa_i < \chi_i$ для $i \in \pi_1(D')$, $\kappa_i > \chi_i$ для $i \in \pi_2(D')$,
 $\kappa_i = \chi_i$ для $i \in \Delta \setminus (\pi_1(D') \cup \pi_2(D'))$;
- A2. $\kappa_i \geq \chi_i$ для $(i, j) \in D'$;
- A3. $\kappa_i < \chi_j$ для $(i, j) \in (D(\chi) \cap (\pi_1(D') \times \pi_1(D'))) \setminus D'$;
- A4. для любого подмножества $\omega \in \pi_2(D')$ справедливо неравенство
- $$\sum_{j \in \omega} (\kappa_j - \chi_j) \leq \sum_{i \in \pi_1(D' \cap \pi_2^{-1}(\omega))} (\chi_i - \kappa_i).$$
- A5. $\sum_{i=1}^n \kappa_i = \sum_{i=1}^n \chi_i$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Множество $\bigcup_{D' \in J} A_T(D', \chi)$ является базовым подмножеством $A(\chi)$.

3. Схема доказательства. Доказательство теоремы 1 основано на последовательном применении нижеприведенных теорем 2-7. На наш взгляд, эти теоремы представляют самостоятельный интерес. За исключением теоремы 2 все теоремы новые. Теорема 2 является переформулировкой результатов, полученных в [5] (см. также [7]).

Пусть $1 \leq j < i \leq n$, $j, i, l \in \mathbb{N}$. Отображение $\varphi_{j,i,l} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ назовем (j, i, l) -сплетающим сжатием, если для $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ в случае $\kappa_i - \kappa_j \leq l$ имеет место равенство $\varphi_{j,i,l}(\kappa) = \kappa$, а в случае $1 \leq l \leq \kappa_i - \kappa_j - 1$ i -я компонента вектора $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ равна $\kappa_j + l$, j -я компонента $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ равна $\kappa_j - l$, а при r , отличном от i и j , r -я компонента вектора $\varphi_{j,i,l}(\kappa)$ совпадает с κ_r . Отображение $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ назовем j -сплетающим сжатием ($1 \leq j \leq n$, $j \in \mathbb{N}$), если оно либо совпадает с тождественным отображением, либо представляется в виде композиции (j, i_s, l_s) -сплетающих сжатий $\varphi = \varphi_{j,i_r,l_r} \cdot \varphi_{j,i_{r-1},l_{r-1}} \dots \varphi_{j,i_1,l_1}$, где $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$. Отображение $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ назовем сплетающим сжатием, если оно представляется в виде композиции $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$, где отображения φ_j являются j -сплетающими сжатиями ($j = 1, \dots, n-1$). Множество образов $\varphi(\chi)$, получаемых при действии всех возможных сплетающих сжатий на вектор χ , обозначим через $B_1(\chi)$.

Теорема 2. Множество $B_1(\chi)$ является базовым подмножеством $A(\chi)$.

Пусть $1 \leq j < i \leq n$, $j, i \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отображение $\psi_{j,i,m} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ назовем (j, i, m) -прямым сжатием, если для всех r , отличных от i и j , r -

я компонента вектора $\varphi_{j,i,m}(\kappa)$ совпадает с κ_i , а i -я и j -я компоненты вектора $\varphi_{j,i,m}(\kappa)$ равны соответственно $\kappa_i - s$ и $\kappa_j + s$. Здесь $s = m$, когда $1 \leq m \leq \frac{1}{2}(\kappa_i - \kappa_j)$, и $s = 0$, если это условие не выполняется (т.е. когда либо $m = 0$, либо $\kappa_i - \kappa_j \leq 1$, либо $m > \frac{1}{2}(\kappa_i - \kappa_j)$). Композицию $\psi_{j,n,m,j} \psi_{j,n-1,m_{n-1},j} \dots \psi_{j,j+1,m_{j+1},j}(j, i, m_{ij})$ -прямых сжатий будем называть прямым j -сжатием.

Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$. Прямое j -сжатие назовем χ -обусловленным, если из условия $m_{ij} > 0$ следует, что

$$\chi_i - m_{ij} \geq \chi_j + \sum_{k=j+1}^n m_{kj}.$$

Композицию $\psi = \psi_1 \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, где $\psi_j (j = 1, \dots, n-1)$ являются прямыми j -сжатиями, будем называть прямым сжатием. Если ψ_{n-1} является χ -обусловленным $(n-1)$ -прямым сжатием, а $\psi_j (1 \leq j \leq n-2)$ является $\psi_{j+1} \dots \psi_{n-1}(\chi)$ обусловленным прямым j -сжатием, то ψ будем называть χ -обусловленным прямым сжатием.

Множество образов $\psi(\chi)$, полученных при действии всех возможных χ -обусловленных прямых сжатий на вектор χ , обозначим через $B_2(\chi)$.

Удовлетворяющий равенству A5 вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ назовем (χ, j) -каноническим, если либо $\kappa = \chi$, либо существуют натуральные числа $i_1, \dots, i_r (j < i_s \leq n; s = 1, \dots, r)$ такие, что справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} \chi_{i_1} \geq \dots \geq \chi_{i_k} > \chi_j, \quad \kappa_i \geq \dots \geq \kappa_{i_k} \geq \kappa_j, \quad \chi_{i_s} > \kappa_{i_s} \quad \text{для } s = 1, \dots, r, \\ \chi_i = \kappa_i \quad \text{для } i \in \Delta \setminus \{j, i_1, \dots, i_r\}. \end{aligned}$$

(χ, j) -канонический вектор одновременно является образом некоторого j -сплетающего сжатия и образом некоторого χ -обусловленного прямого j -сжатия. Кроме того, для произвольного χ -сплетающего φ сжатия вектор $\varphi(\chi)$ может быть получен перестановкой компонент некоторого (χ, j) -канонического вектора. Аналогичным свойством обладает вектор $\psi(\chi)$, где ψ произвольное χ -обусловленное прямое j -сжатие. С помощью этих фактов доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Множество $B_2(\chi)$ является базовым подмножеством $A(\chi)$.

Рассмотрим матрицу вида

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где m_{ij} ($1 \leq j < i \leq n; i, j \in \mathbb{N}$) – целые неотрицательные числа. Матрицу (1) будем называть χ -обусловленной, если из условия $m_{ij} > 0$ ($1 \leq j < i \leq n$) следует, что

$$\chi_j + \sum_{r=j+1}^n m_{rj} \leq \chi_i - \sum_{r=j}^{i-1} m_{ir} + \sum_{r=i+1}^n m_{ri}.$$

Числа Ψ_i^+, Ψ_i^- ($i = 1, \dots, n$) определим следующими равенствами:

$$\Psi_i^+ = \sum_{r=i+1}^n m_{ri}, \quad \Psi_i^- = \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir}.$$

Вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$, компоненты которого определяются равенствами

$$\kappa_p = \chi_p + \Psi_p^+ - \Psi_p^- \quad (p = 1, \dots, n),$$

будем называть Ψ -образом вектора χ и обозначать $\kappa = \Psi[\chi]$.

Теорема 4. Множество $B_2(\chi)$ совпадает с множеством векторов вида $\Psi[\chi]$, где Ψ – произвольная χ -обусловленная матрица.

Матрицу Ψ вида (1) будем называть χ -строго обусловленной, если $\Psi_p^+ \Psi_p^- = 0$ для всех $i \in \Delta$ и если из условия $m_{ij} > 0$ следует, что $\Psi_j^+ = \Psi_i^- = 0$ и $\chi_j + \Psi_j^+ \leq \chi_i - \Psi_i^-$. Обозначим через $B_3(\chi)$ множество Ψ -образов вектора χ , где Ψ пробегает множество всех χ -строго обусловленных матриц. Очевидно, что $B_3(\chi) \subset B_2(\chi)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Множество $B_3(\chi)$ является базовым подмножеством $A(\chi)$.

Для пары векторов $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n), \chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим множества $D_{\kappa, \chi} = \{(i, j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i > \kappa_i \geq \kappa_j > \chi_j\}$, и $\Delta_+ = \{i \in \Delta; \kappa_i > \chi_i\}$.

Будем говорить, что вектор κ T -мажорируется вектором χ , и писать $\kappa \prec_T \chi$, если имеют место равенства А5, $\pi_2(D_{\kappa, \chi}) = \Delta_+$ и для любого подмножества $\omega_+ \subset \Delta_+$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega_+} (\kappa_j - \chi_j) \leq \sum_{i \in \pi_1(D_{\kappa, \chi} \cap \pi_2^{-1}(\omega_+))} (\chi_i - \kappa_i).$$

Теорема 6. Вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ принадлежит множеству $B_3(\chi)$ тогда и только тогда, когда $\kappa \prec_T \chi$.

Теорема 7. Вектор κ T -мажорируется вектором χ тогда и только тогда, когда $\kappa \in \bigcup_{D' \in J} A_T(D', \chi)$. Кроме того, если $\kappa \in A_T(D', \chi)$ при некотором $D' \in J$, то $D' = D_{\kappa, \chi}$.

4. Пример. Пусть $\chi = (0, 5, 2, 4)$.

В этом случае $D(\chi) = \{(2;1), (3;1), (4;1), (4;3)\}$, а (T, χ) -допустимыми множествами являются:

$$D'_1 = \emptyset, D'_2 = \{(2;1)\}, D'_3 = \{(3;1)\},$$

$$D'_4 = \{(4;1)\}, D'_5 = \{(4;3)\}, D'_6 = \{(2;1), (3;1)\},$$

$$D'_7 = \{(2;1), (4;1)\}, D'_8 = \{(2;1), (4;3)\}, D'_9 = \{(3;1), (4;1)\},$$

$$D'_{10} = \{(4;1), (4;3)\}, D'_{11} = \{(2;1), (3;1), (4;1)\}, D'_{12} = \{(2;1), (4;1), (4;3)\}.$$

Множество $(D(\chi) \cap \pi_1(D'_r) \times \pi_2(D'_r)) \setminus D'_r$ во всех случаях кроме $r = 8$ пусто. По этой причине условие АЗ появляется лишь при $r = 8$.

Условие А5 всегда имеет вид $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11$. Поскольку $\pi_2(D'_r)$ ($r = 1, \dots, 12$) является подмножеством $\{1, 3\}$, то возможными непустыми подмножествами $\pi_2(D'_r)$ являются $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{3\}$ и $\omega_3 = \{1, 3\}$. Соответственно,

$$\pi_2^{-1}(\omega_1) = \{(2;1), (3;1), (4;1)\},$$

$$\pi_2^{-1}(\omega_2) = \{(2;1), (3;1), (4;1)\}, \pi_2^{-1}(\omega_3) = \{(4;3)\},$$

$$\pi_2^{-1}(\omega_3) = \{(2;1), (3;1), (4;1), (4;3)\}.$$

Очевидно, что $A_T(D'_1, \chi) = \{\chi\}$. Дадим описание множества $A_T(D'_2, \chi)$. Условие А4 имеет вид $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \leq 11$ и является очевидным следствием А5. Условия А1 и А2 описываются системой: $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 5$, $\kappa_3 = 2$, $\kappa_4 = 4$, $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Учитывая А5, получим, что $A_T(D'_2, \chi) = \{(1, 4, 2, 4), (2, 3, 2, 4)\}$. Аналогичным образом нетрудно убедиться в том, что $A_T(D'_3, \chi) = \{(1, 5, 1, 4)\}$, $A_T(D'_4, \chi) = \{(1, 5, 2, 3), (2, 5, 2, 2)\}$, $A_T(D'_5, \chi) = \{(0, 5, 3, 3)\}$. Для того, чтобы $\kappa \in A_T(D'_r, \chi)$, необходимы и достаточны следующие условия:

$$\text{А1. } \kappa_1 > 0, \kappa_2 < 5, \kappa_3 = 2, \kappa_4 < 4;$$

$$\text{А2. } \kappa_1 \leq \kappa_2, \kappa_1 \leq \kappa_4;$$

$$\text{А4. } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 \leq 9;$$

$$\text{А5. } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11.$$

Отсюда следует, что $A_T(D'_7, \chi) = \{(2, 4, 2, 3), (3, 3, 2, 3)\}$. Для того, чтобы $\kappa \in A_T(D'_8, \chi)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\text{А1. } \kappa_1 > 0, \kappa_2 < 5, \kappa_3 > 2, \kappa_4 < 4;$$

$$\text{А2. } \kappa_1 \leq \kappa_2, \kappa_3 \leq \kappa_4;$$

$$A3. \kappa_4 < \kappa_1;$$

$$A4. \kappa_1 + \kappa_2 \leq 5, \kappa_3 + \kappa_4 \leq 6, \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \leq 11;$$

$$A5. \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 11.$$

Очевидно, что $\kappa_3 = \kappa_4 = 3$ и неравенство $3 = \kappa_4 < \kappa_1 < \kappa_2 < 5$ в целых числах не имеет решений. Следовательно, $A_T(D'_8, \chi) = \emptyset$. Аналогичным образом нетрудно убедиться, что

$$A_T(D'_6, \chi) = A_T(D'_9, \chi) = A_T(D'_{10}, \chi) = A_T(D'_{10}, \chi) = \emptyset,$$

$$A_T(D'_{12}, \chi) = \{(1, 4, 3, 3), (2, 3, 3, 3)\}.$$

Выбирая по одному из векторов, получаемых друг из друга перестановкой компонент, мы с помощью теоремы 1 находим, что множество

$$\bigcup_{k=1}^{12} A_T(D'_k, \chi) = \{(0, 5, 2, 4), (1, 4, 2, 4), (1, 5, 1, 4), (1, 5, 2, 3), (2, 5, 2, 3)\}, (0, 5, 3, 3), (1, 4, 3, 3)$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$.

¹Российско-Армянский (Славянский) университет

e-mail: harkamo@rambler.ru

²Ереванский государственный университет,

Институт математики НАН РА

e-mail: kamalyan_armen@yahoo.com

³The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, USA, and New York University Abu Dhabi (NYUAD), UAE

e-mail: ilya@math.wm.edu, ims2@nyu.edu, imspitkovsky@gmail.com

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций

Предлагается конструктивное описание множества возможных наборов частных индексов треугольных матриц-функций с фиксированными индексами диагональных элементов.

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ի. Մ. Սպիտկովսկի Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների հնարավոր հավաքածուների մասին

Առաջարկվում է անկյունագծային տարրերի ինդեքսները ֆիքսված եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների հնարավոր հավաքածուների կոնստրուկտիվ նկարագրում:

K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky
On Possible Tuples of Partial Indices of Triangular
Matrix-Functions

A constructive description of the set of possible tuples of partial indices of triangular matrix-functions with fixed indices of their diagonal entries is given.

Литература

1. *Böttcher A., Karlovich Yu. I.* Carleson curves, Muchenhaupt weights, and Toeplitz operators. Birkhäuser Verlag, Basel and Boston, 1997.
2. *Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.* Factorization of matrix-functions. Birkhäuser Verlag, Basel and Boston, 1987.
3. *Спитковский И. М.* - ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 4. С. 816-820.
4. *Чеботарев Г. Н.* – Успехи мат. наук. 1956. Т. 2. N3. С. 192-202.
5. *Спитковский И. М., Тишин П. М.* – Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. N 6. С. 751-756.
6. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Математика в высшей школе. 2006. Т. 2. N 3. С. 29-33.
7. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. N 2. С. 10-16.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

С. Л. Гогян

Об одном свойстве слабого жадного алгоритма по общей системе Хаара

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 17/X 2014)

Ключевые слова: *общая система Хаара, слабый жадный алгоритм.*

Пусть $\{\psi_n\}$ нормированный базис в банаховом пространстве X . Тогда для любого элемента $x \in X$ будем иметь разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \psi_n$$

с $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = 0$.

Пусть дано число $0 < t \leq 1$. По индукции по m определим множества Λ_m^t таким образом, чтобы имели место следующие соотношения:

$$\Lambda_0^t = \emptyset, \Lambda_{m-1}^t \subset \Lambda_m^t, |\Lambda_m^t| = m$$

$$\min_{i \in \Lambda_m^t} |c_i(x)| \geq t \max_{i \in \Lambda_m^t} |c_i(x)|.$$

Заметим, что последовательность $\{\Lambda_m^t\}$ может определяться неоднозначно. Множество всех таких последовательностей обозначим через $D^t(x)$. Из определения непосредственно следует, что

$$D^{t_1}(x) \subset D^{t_2}(x) \text{ при } t_1 > t_2.$$

Для любого $x \in X$ и $\Lambda = \{\Lambda_m^t\} \in D^t(x)$ положим

$$G_m^t = G_m^t(x) = G_m^t(x, \Lambda) = \sum_{i \in \Lambda_m^t} c_i(x) \psi_i.$$

При $t=1$ будем коротко писать Λ_m , D и G_m .

Определение 1. Базис ψ в банаховом пространстве X называется квази-гриди базисом, если существует число $C \geq 1$ такое, что для любого элемента $x \in X$ существует последовательность $\Lambda \in D(x)$ такая, что

$$\|G_m(x, \Lambda)\| \leq C \|x\| \quad (1)$$

для всех натуральных m .

Легко заметить, что если базис является квази-гриди базисом, то неравенство (1) имеет место для всех $\Lambda \in D(x)$. Подробнее о квази-гриди базисах написано в работе [1].

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Базис ψ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in X$ и для любой $\Lambda \in D(x)$ справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - G_m(x, \Lambda)\| = 0. \quad (2)$$

Для квази-гриди базисов верна следующая теорема (см [1]).

Теорема 2. *Если базис ψ является квази-гриди базисом, то для любого $0 < t < 1$ и для любого $\Lambda^t \in D^t(x)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - G_m^t(x, \Lambda^t)\| = 0 \quad (3)$$

и

$$\|G_m^t(x, \Lambda^t)\| \leq C \|x\|, \quad (4)$$

при C , которое зависит только от t .

Известно, что система Хаара $\{\chi\}$ не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$, т. е. соотношения (1) и (2) в общем случае неверны. Однако в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого $0 < t < 1$ существует число $C \geq 1$ такое, что для любого $x \in L^1(0,1)$ существует $\Lambda^t \in D^t(x)$, для которой по системе Хаара имеют место соотношения (3) и (4).*

В настоящей работе доказывается, что аналогичная теорема неверна для общих систем Хаара. В частности доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Существует общая система Хаара такая, что для любого $0 < t < 1$ существует функция $f \in L^1(0,1)$ такая, что*

$$\sup_m \frac{\|G_m^t(f, \Lambda^t)\|}{\|f\|} = +\infty,$$

для всех $\Lambda^t \in D^t(x)$.

Замечание 1. Заметим, что в данной теореме функция зависит от t . Однако из доказательства легко видеть, что при правильном выборе последовательности $\{N_i\}$ можно добиться того, чтоб функция f не зависела от t .

Пусть дана общая система Хаара $h_0^{(0)}, h_k^{(i)}, 1 \leq i \leq 2^k; k = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $\Delta_k^{(i)}$ носитель функции $h_k^{(i)}$. Согласно определению имеем, что $\Delta_k^{(i)} = \Delta_{k+1}^{(2i-1)} \cup \Delta_{k+1}^{(2i)}$. Положим

$$\gamma_k^{(i)} = \frac{|\Delta_{k+1}^{(2i-1)}|}{|\Delta_{k+1}^{(2i)}|}.$$

Коэффициенты разложения $c_k^{(i)}$ определяются согласно формулам

$$c_0^{(0)}(x) = \int_0^1 x$$

и

$$c_0^{(0)}(x) = \frac{2}{1 + \gamma_k^{(i)}} \left(\int_{\Delta_{k+1}^{(2i-1)}} x - \gamma_k^{(i)} \int_{\Delta_{k+1}^{(2i)}} x \right), \quad (5)$$

В настоящей работе мы рассматриваем общую систему Хаара, для которой величины $\gamma_k^{(i)}$ определяются следующим образом:

$$\gamma_k^{(i)} = \begin{cases} m, & \text{если } i = 1 \text{ и } 2^m < k < 2^{m+1} \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Для краткости будем писать $\delta_k = \Delta_k^{(1)}$ и $H_k = h_k^{(1)}$.

Лемма 1. Пусть даны натуральные числа $M > N$. Тогда для функции

$$f_{M,N} = \sum_{\alpha=M}^N \left(H_{2^\alpha} + \sum_{\beta=2^{\alpha+1}}^{2^{\alpha+1}-1} \frac{2}{1+\alpha} H_\beta \right)$$

справедливы следующие соотношения:

$$\|f_{M,N}\| < 2 \quad (7)$$

и

$$\frac{M-N}{4} < \left\| \sum_{\alpha=M}^N H_{2^\alpha} \right\| < M-N. \quad (8)$$

Доказательство. С помощью формул (5) и (6) легко проверяется, что

$$f_{M,N}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \delta_{2^M} \\ -\frac{1}{|\delta_{2^M}|}, & \text{при } x \in \delta_{2^M} \setminus \delta_{2^N}, \\ \frac{1}{|\delta_{2^N}|} - \frac{1}{|\delta_{2^M}|}, & \text{при } x \in \delta_{2^N}. \end{cases}$$

Из этого соотношения сразу следует первое утверждение леммы. Второе утверждение легко доказывается с помощью математической индукции по $M-N$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выберем быстро возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_k\}$ с $\frac{2}{1+N_0} < t$. Условие на скорость

возрастания поставим в дальнейшем.

Обозначим

$$F_i = \frac{t^i}{1+N_{2i}} f_{N_{2i}, N_{2i+1}}.$$

Положим

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i .$$

С учетом (7) имеем, что

$$\|f\| < \frac{2}{1-t} .$$

Заметим, что самый маленький ненулевой коэффициент в разложении F_i будет равен

$$m_i = \frac{t^i}{1+N_{2i}} \frac{2}{1+N_{2i+1}} ,$$

а самый большой будет равен

$$M_i = \frac{t^i}{1+N_{2i}} .$$

Поэтому, если N_{2i+2} будет достаточно большим по сравнению с N_{2i} и N_{2i+1} , то

$$N_{i+1} < tm_i .$$

Следовательно, для любого натурального k можно будет найти натуральное число n_k такое, что

$$G_{n_k}^t(f) = \sum_{i=0}^{k-1} F_i + \frac{t^k}{1+N_{2k}} \sum_{\alpha=N_{2k}}^{2k-1} H_{\alpha i} .$$

Отсюда с применением леммы 1 получаем, что

$$\|G_{n_k}^t(f)\| > \frac{t^k(N_{2k+1}-N_{2k})}{4(1+N_{2k})} - 2(1+t+\dots+t^{k-1}) .$$

Если выбрать N_{2k+1} достаточно большим по сравнению с N_{2k} , то можно достичь того, чтоб правая часть была сколь угодно большой, т. е. при правильном выборе последовательности $\{N_i\}$ будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|G_{n_k}^t(f)\| = +\infty .$$

Теорема доказана.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта NSCS 13-1A313.

Институт математики НАН РА

С. Л. Гогян

Об одном свойстве слабого жадного алгоритма по общей системе Хаара

Построены общая система Хаара $H = \{h_i\}$ и элемент из $L^1(0,1)$ такие, что для этого элемента ни одна ветвь слабого жадного алгоритма по системе H не сходится в $L^1(0,1)$.

Ս. Լ. Գոգյան

**Ըստ Հաարի ընդհանրացված համակարգի թույլ ազահ
ալգորիթմի մի հատկության մասին**

Կառուցված է Հաարի ընդհանրացված $H = \{h_i\}$ համակարգ և $L^1(0,1)$ -ից էլեմենտ այնպիսին, որ այդ էլեմենտի համար թույլ ազահ ալգորիթմի իրագործումներից ոչ մեկը չի զուգամիտում $L^1(0,1)$ -ում ըստ H համակարգի:

S. L. Gogyan

**On a Property of Weak Greedy Algorithm
with Respect to the General Haar System**

The General Haar system $H = \{h_i\}$ and the element from $L^1(0,1)$ are constructed in such a way, that no branch of Weak Greedy Algorithm with respect to H converges in $L^1(0,1)$.

Литература

1. *Temlyakov V. N.* - Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33-107.
2. *Wojtashchik P.* - Journal of Approximation Theory. 2000. V. 107. P. 293-314.
3. *Gogyan S.* - Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161 P. 49-64.

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора произведений Бляшке и
 Джрбашяна, а также связующих их функций

(Представлено академиком В.С. Захаряном 12/XII 2014)

Ключевые слова: оператор интегродифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна, классы типа Дирихле.

Введение. Пусть $\mathbb{D} = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Броманом [1] были рассмотрены классы S_α аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, коэффициенты Тейлора – Маклорена которых удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |a_n|^2 < +\infty, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $0 < p < +\infty, -1 < \alpha < +\infty$. Класс D_α^p определяется как множество аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых выполняется условие

$$\|D_\alpha^p\|^p = \int_0^r \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha |f'(re^{i\theta})|^p r dr d\theta < +\infty$$

в случае, когда $\alpha + 1 < p$ классы D_α^p называются классами типа Дирихле.

Скажем, что множество точек $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ является множеством единственности для класса D_α^2 , если из того, что $f(a_n) = 0$ и $f \in D_\alpha^2$, вытекает, что $f \equiv 0$. В работе [2] Г. Шапиро и А. Шильдсом получен исчерпывающий ответ на вопрос: когда последовательность $\{a_n\}$ будет множеством единственности для класса $D_\alpha^2, 0 \leq \alpha < 1$. Для более общих классов $D^2(\omega)$ аналогичный результат получен В. С. Захаряном [3].

В настоящей работе исследуется вопрос принадлежности некоторых аналитических в единичном круге функций классу типа Дирихле $D_\alpha^2, 0 < \alpha < 1$. Связь между классами S_α и $D_\alpha^2, 0 < \alpha < 1$ впервые (насколько

это известно авторам) показана В. С. Захаряном [4], доказавшим, что $f(z) \in D_\alpha^2$, $0 < \alpha < 1$ тогда и только тогда, когда $f(z) \in S_{1-\alpha}$. Пользуясь этим замечанием В. С. Захаряна о принадлежности интересующих нас функций классу D_α^2 , $0 < \alpha < 1$, мы получили некоторые новые результаты о коэффициентах Тейлора – Маклорена этих функций.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < +\infty. \quad (1)$$

Произведением Бляшке называется следующая функция:

$$B(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \cdot \frac{|z_n|}{z_n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

О свойствах произведения Бляшке см. например [5, 6].

М. М. Джрбашяном [7, глава IX; 8] введены в рассмотрение классы N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) определяется посредством α -характеристики

$$T_\alpha(r, F) = m_\alpha(r, F) + N_\alpha(r, F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \{T_\alpha(r, F)\} < +\infty.$$

При этом функции $m_\alpha(r, F)$, $N_\alpha(r, F)$ и $T_\alpha(r, F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r, F)$, $N(r, F)$ и $T(r, F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha = 0$, так что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < +\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0 = N, \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Оператор интегриродифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1 < \alpha < +\infty$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} \{\varphi(r)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

$$D^0 \{\varphi(r)\} = \varphi(r),$$

$$D^{-\alpha} \{\varphi(r)\} = \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} \{\varphi(r)\}, \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Для аналитических функций, принадлежащих классу N_α , функция $T_\alpha(r, F)$ определяется следующим образом:

$$T_{\alpha}(r, f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log \left| f \left(r e^{i\theta} \right) \right| d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha} \{ \varphi(r) \} = \max \{ D^{-\alpha} \{ \varphi(r) \}; 0 \}.$$

Известно, что (см. [7, 8]) аналитическая функция класса N_{α} имеет вид

$$f(z) = e^{i\gamma + \lambda k_{\alpha} z^{\lambda}} B_{\alpha}(z; \{a_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_{\alpha}(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\},$$

где γ – произвольное вещественное число, λ – произвольное натуральное

число, $K_{\alpha} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi; \pi]$,

$$B_{\alpha}(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{-W_{\alpha}(z; a_n)},$$

$$W_{\alpha}(z, \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x} dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^{\alpha} x^{k-1} dx - \bar{\xi}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^{\alpha} x^{k-1} dx \right\} z^k, \quad |z| < 1, |\xi| < 1,$$

$$S_{\alpha}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right], \quad |z| < 1.$$

Функция $S_{\alpha}(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Шварца, $\operatorname{Re} S_{\alpha}(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Пуассона. При $\alpha = 0$ эти ядра совпадают с ядрами Шварца и Пуассона соответственно.

$B_{\alpha}(z; \{a_n\})$ называется произведением Джрбашяна. В специальном случае $\alpha = 0$ произведение B_{α} совпадает с произведением Бляшке (см. [7, 8]).

$$B_0(z; \{a_n\}) = B(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}.$$

В [9] М. М. Джрбашяном и В. С. Захаряном доказано следующее утверждение.

Теорема (о взаимосвязи произведений B_{α} и B). *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{1+\alpha} < +\infty, \quad (-1 < \alpha < 0) \quad (2)$$

имеет место представление

$$B_{\alpha}(z; \{a_n\}) = B(z; \{a_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{\alpha}(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\},$$

где $\omega(\theta)$ – невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, имеющая вид

$$\omega(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\theta D^{-\alpha} \log \left| \frac{B_\alpha(r_n e^{i\theta}; \{a_n\})}{B(r_n e^{i\theta}; \{a_n\})} \right| d\theta \quad (3)$$

$$(0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \uparrow 1).$$

Приведем также определение классов T_β ($0 < \beta < 1$), входящих в класс $N = N_0$. Скажем, что $w(z) \in T_\beta$, если

$$\int_0^1 \frac{A(r, w)}{(1-r)^\beta} dr < +\infty,$$

где

$$A(r, w) = \iint_{|z| < r} \frac{|w'(z)|^2}{(1 + |w'(z)|^2)^r} dx dy.$$

Известно, что (см. [10]) если $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in T_\beta$ ($0 < \beta < 1$) и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^\beta < +\infty.$$

Основные результаты. Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что выполняется условие (2). Тогда

$$B_\alpha(z; \{z_n\}) \in D_{1+\alpha}^2, B(z; \{z_n\}) \in D_{1+\alpha}^2.$$

Замечание. Для произведения Бляшке утверждение теоремы известно, однако, по мнению авторов, доказательство этой теоремы представляет определенный интерес, так как оно основано на ранних работах известных математиков.

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (2). Тогда функция

$$g_\alpha(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\}, |z| < 1,$$

где $\omega(\theta)$ – невозрастающая функция конечной вариации на $[0, 2\pi]$, имеющая вид (3), принадлежит классу $D_{1+\alpha}^2$.

Замечание. Если $\omega(\theta)$ – невозрастающая функция конечной вариации, не имеющая вид (3), то утверждение теоремы может и не выполняться.

Теорема 3. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что выполняется условие (2). Тогда для коэффициентов Тейлора – Маклорена функции $g_\alpha(z)$ имеет место следующее условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{g}_{\alpha}(n)|^2 n^{-\alpha} < +\infty.$$

Теорема 4. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (2). Тогда

$$1. \hat{B}_{\alpha}(n) = \sum_{k=0}^n \hat{g}_{\alpha}(k) \cdot \hat{B}(n-k)$$

$$2. \hat{B}(n) = \sum_{k=0}^n \hat{h}_{\alpha}(k) \cdot \hat{B}_{\alpha}(n-k),$$

где $h_{\alpha}(z) = [g_{\alpha}(z)]^{-1}$.

Теорема 5. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что выполняется условие (2). Тогда между коэффициентами Тейлора – Маклорена функций $g_{\alpha}(z)$ и $h_{\alpha}(z) = [g_{\alpha}(z)]^{-1}$ имеет место следующая взаимосвязь:

$$\hat{g}_{\alpha}(0) \cdot \hat{h}_{\alpha}(0) = 1,$$

$$\sum_{k=0}^n \hat{g}_{\alpha}(k) \cdot \hat{h}_{\alpha}(n-k) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 6. Пусть $0 < \gamma < 0$. Тогда для любого δ , $0 < \delta < 1 - \gamma$ существуют произведения Бляшке и Джрбашиана, множества нулей которых совпадают, такие, что коэффициенты Тейлора – Маклорена этих произведений удовлетворяют следующим условиям:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma} |\hat{B}(n)|^2 < +\infty,$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma} |\hat{B}_{\alpha}(n)|^2 < +\infty,$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma+\delta} |\hat{B}(n)|^2 = +\infty,$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma+\delta} |\hat{B}_{\alpha}(n)|^2 = +\infty.$$

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян, И. В. Оганисян

**О коэффициентах Тейлора произведений Бляшке и Джрбашяна,
а также связующих их функций**

С использованием теоремы Г. Шапиро и А. Шильдса, а также замечания В. Захаряна доказано существование произведений Бляшке и Джрбашяна с одинаковым множеством нулей, коэффициенты Тейлора – Маклорена которых удовлетворяют некоторым новым ограничениям. Получена оценка для коэффициентов Тейлора этих функций.

Ռ. Վ. Դալլաքյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան

**Բլաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալների Թեյլորի գործակիցների
և այդ արտադրյալները կապող ֆունկցիաների մասին**

Օգտագործելով Գ. Շապիրո և Ա. Շիլդցի մի թեորեմը ու Վ. Զաքարյանի մի դիտողությունը ապացուցվել է միևնույն զրոներով Բլաշկեի և Ջրբաշյանի այնպիսի արտադրյալների գոյությունը, որոնց Թեյլորի գործակիցները բավարարում են որոշ նոր տիպի սահմանափակումների: Ստացվել են նաև գնահատականներ այդ ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար:

R. V. Dallakyan, I. V. Hovhannisyan

**About the Taylor Coefficients of Blaschke and M. Djrbashyan Products
and Functions Connecting these Products**

In this paper, using a theorem of Shapiro and Shields, as well as one remark of V. Zakaryan, is proved the existence of Blaschke and M. Djrbashyan products with the same set of zeros, the coefficients of the Taylor which satisfy some new restrictions. Also is found new estimation for the Taylor coefficients of these products.

Литература

1. *Broman A.* - On two classes of trigonometrical series. Thesis, University of Uppsala. 1947.
2. *Shapiro H., Shilds A.* - Math. Z. 1962. V. 80. P. 217-229.
3. *Захарян В. С.* - ДАН АрмССР. 1964. Т. 38. N 4. С. 199-206.
4. *Захарян В. С.* - Изв. АН АрмССР. 1967. Математика. Т. 2. N 2. С. 117-122.
5. *Duren P. L.* - Theory of H^p spaces. Pure and Applied Mathematics. V. 38. Academic Press, New York – London. 1970.
6. *Привалов И. И.* - Граничные свойства аналитических функций. М.–Л. Гос. изд. технико-теоретической лит. 1950.
7. *Джрбашян М. М.* - Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. С. 671:

8. Джрбалян М. М., Захарян В. С. - Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. Изд. фирма физ.-мат. лит. ВО "Наука". 1993. С. 223
9. Джрбалян М. М., Захарян В. С. - Мат. заметки. 1968. Т. 4. N1. С. 3-10.
10. Джрбалян М. М., Захарян В. С. - ДАН СССР. Математика. 1967. Т. 173. N 6. С. 1247-1250.
11. Carleson L. On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets. Thesis. University of Uppsala. 1950.

S. S. Chidemyan¹, A. H. Jivanyan², academician G. H. Khachatryan³,
H. G. Khasikyan⁴

Palm-Vein Based Fuzzy Vault Scheme

(Submitted 12/XII 2014)

Keywords: *palm vein, biometrics, fuzzy vault, template protection, authentication.*

1. Introduction. Often there are situations when we need to protect some critical information called key. People cannot remember cryptographically secure keys, so it is a good idea to use physiological features of a person (e.g. fingerprints, palm prints or palm veins) to provide an access to this kind of information. The authentication based on biometrics is a very good mechanism; however, such authentication technology needs large storage of biometric data, which appears to be the drawback, and also there is a risk of private data leakage and identity theft. It is a big issue, because biometric characteristics are inherent to a person and once lost, they would never be refreshed.

Biometric template protection schemes [1] that are combining cryptography with biometrics are considered to be a promising solution to above issues. In this work we consider the palm veins as this kind of biometrics. Experiments on CASIA database [2] show that the minutiae features extracted from palm veins are discriminating features in the hand vein images.

Many famous biometric template protection schemes have been proposed such as fuzzy commitment scheme [3], fuzzy vault scheme [4] and fuzzy extractor [5]. Among them the fuzzy vault scheme proposed by Juels and Sudan [4] has become one of the most popular key-binding approaches, because it provides effective and provable security for biometric template protection. The scheme introduced by A. Juels and M. Wattenberg [3] is not order invariant, which is the weakest point of the algorithm described in [3], because the data extracted from the biometric template is not in the same order for the most types of biometrics. In contrast, the *fuzzy vault scheme* has a property of order invariance.

The rest of this paper is organized in the following manner. In section 2 the construction of fuzzy vault scheme is discussed. In section 3 the fuzzy vault scheme for palm veins is proposed. In section 4 some experimental results of

fuzzy vault scheme's implementation are introduced. Finally, in section 5, conclusions are given with some discussions.

2. Fuzzy Vault Scheme. As it was mentioned above the fuzzy vault scheme provides an effective and provable security for biometric template protection [4] and has a property of order invariance. So it suits the best for our purpose. Let us briefly introduce that scheme.

Let F be a finite field of size n and biometric template of the user can be written as follows: $X = (x_1, x_2, \dots, x_s)$, where $\forall i = 1 \dots s : x_i \in F$. Let us denote the secret polynomial by $p(x)$. The degree of $p(x)$ is $k = s - t - 1$, where $t < s$ and coefficients of $p(x) : p_j \in F$. Let $r \in \{s+1, \dots, n\}$

Locking algorithm

1. Having $p(x)$ of degree k we evaluate it on the points of biometric.

Let: $y_i = p(x_i) \forall i = 1 \dots s$.

2. Choose $r - s$ distinct random points from $F \setminus X$ so called *chaff points*:

$x_{s+1}, \dots, x_r$.

3. Choose $y_i \in F$ such that $\forall i = s+1 \dots r : y_i \neq p(x_i)$

4. Construct vault: $V = \{(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_r, y_r)\}$.

Unlocking algorithm

1. Let we have new biometric $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_s)$, where $\forall i = 1 \dots s : x'_i \in F$.

2. Having vault V , constructed by locking algorithm, the secret polynomial can be reconstructed if X' has at least $s - t$ common points with the original biometric X , using Lagrange interpolation or Reed Solomon codes.

3. Implementation of the Fuzzy Vault Scheme for palm-veins.

3.1. Extraction of biometric data from palm-veins. The vein pattern can be well represented by a number of critical points referred as minutiae points. The branching points and the ending points in the vein pattern skeleton image are the two types of critical points to be extracted. Ending points here are mainly ending points of vein skeleton curves that placed at the edge of region of interests (ROI) and resulted from the cropping of hand image while obtaining ROI. Although these ending points are not real ending points of vein on palm, they are taken because they contain geometrical information about the shape of the skeletons of the vein pattern. As for bifurcation points, they are the junction points of three curves. Fig. 1 illustrates some of bifurcation and ending points on vein pattern's skeleton representation. Experiments on CASIA database [2] show that we can extract on average 25 minutiae points from each vein pattern, including 10 bifurcation points and 15 ending points on average for each vein pattern. This quantity of minutiae points is quite enough for our purpose.

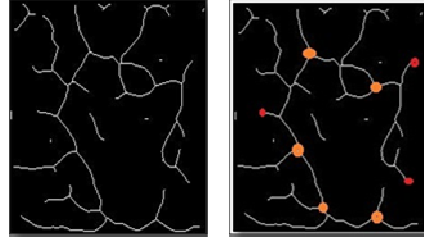


Fig. 1. Some of bifurcation points and ending points are marked by red circle:

3.2. *Implementation of fuzzy vault based on the extracted data.* The experiments were carried on the database of palm-veins CASIA [2]. This database has been acquired using a contactless imaging device and has images from 100 users. Six images were acquired from each user and these images were acquired in two different data acquisition sessions (three images in each session) with a minimum interval of one month. Since palm veins are most visible under 850 nm wavelength illuminations, only the images under these wavelength illuminations are chosen.

Encoding. The biometric template X , discussed above, is constructed using x and y coordinates of minutiae points. In the current implementation, a randomly generated secret S is 120-bit random key, which is used for constructing the secret polynomial $p(x)$.

For each degree of the polynomial n in range $[5, 12]$ and the number of the minutiae points $=25$, the chaff points were taken $r-s=200$.

From this point on, all operations take place in Galois fields $GF(2^{10})$: we concatenate x and y coordinates of a minutiae (5-bits each) as $[x | y]$ to arrive at the 10-bit locking/unlocking data unit u .

In enrollment phase mosaic matching [9] was used on 5 templates and the last one was used for verification.

Decoding. Here, the user tries to unlock the vault V using the query minutiae. Assume we have s query minutiae (X') and $u'_1, u'_2, \dots, u'_s$ are the points to be used in polynomial reconstruction. These points are found by comparing u_i , $i = 1, 2, \dots, s$, with the values of the vault V , namely $v_1, v_2, \dots, v_r$. If any u_i is equal to $v_1, v_2, \dots, v_r$, the corresponding vault point is added to the list of points to be used. Assume that this list has m points, where $m \leq r$. Now, for decoding a n -degree polynomial, $n + 1$ unique projections are necessary. We have to find all possible C_m^{n+1} combinations of $n + 1$ points, among the list with size m . For each of these combinations, we construct the Lagrange interpolating polynomial.

If the query minutiae list (X') overlaps with template minutiae list (X) in at least $(n+1)$ points, for some combinations, the correct secret will be decoded. This indicates the desired outcome when query and template palm-vein are from the same palm.

4. The results of the experiments. Below the results of the tests on the palm-vein database are attached. There are six imprints of the same palm-vein

and five of them were used to enroll the user (using mosaic matching) and the last one was used to verify if the user had passed the authentication.

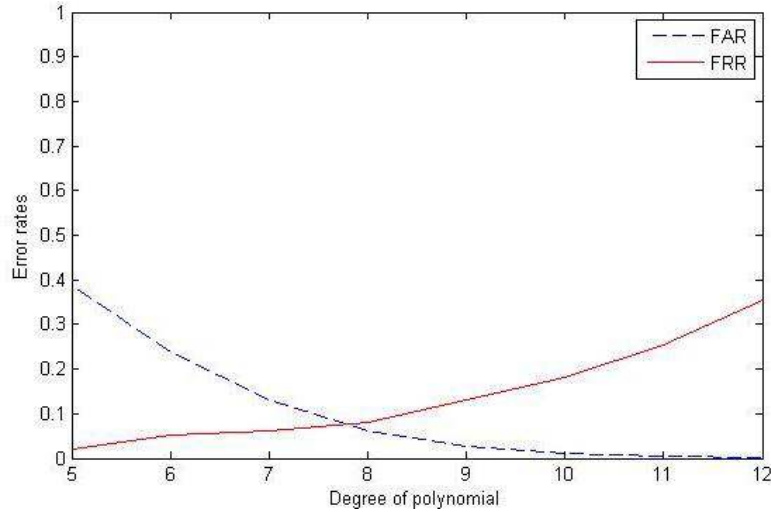


Fig. 2. Error rate curves of palm-veins fuzzy vault scheme.

5. Conclusion. In this paper we have presented the results of actual implementation of the fuzzy vault using palm-vein minutiae data. Experiments on CASIA database show that we can extract on average 25 minutiae points from each vein pattern, including 10 bifurcation points and 15 ending points on average for each vein pattern. This quantity of minutiae points is enough for 120-bit key generation and for the practical accuracy of the system ($FAR < 0.01$). Compared with fingerprint based schemes the FRR of this system is lower, however there are other benefits of this biometrics, such as stability of the vein patterns over a long period of time and, what is more important, invisibility to the human eyes (what makes it much harder to copy the features).

Acknowledgement. This work was supported by State Committee Science MES RA, in frame of the research project SCS 13-1B352.

¹Russian Armenian (Slavonic) University, serchch@gmail.com

²American University of Armenia, ajivanyan@aua.am

³American University of Armenia, National Academy of Sciences of Armenia, gurgenkha@aua.am

⁴National Academy of Sciences of Armenia, hkhasikyan@aua.am

**S. S. Chidemyan, A. H. Jivanyan, academician G. H. Khachatryan,
H. G. Khasikyan**

Palm-Vein Based Fuzzy Vault Scheme

Fuzzy Vault is one of the most popular biometric encryption schemes, which aims to encode users' critical information in such a way that only the legitimate users are able to access it.

In this paper, the template protection scheme is combined with biometrics, which results a provable security for the key binding problem. In particular, in this paper the

approach for constructing a fuzzy vault scheme for the palm veins is presented. The proposed fuzzy vault scheme has been implemented and tested on the publicly available database of palm vein patterns derived from infrared scanner. The results are presented in the last section of the paper.

**Ս. Ս. Զիդեմյան, Ա. Հ. Զիվանյան, ակադեմիկոս Գ. Հ. Խաչատրյան,
Հ. Գ. Խասիկյան**

**Ձեռքի ափի երակների վրա հիմնված «ոչ հստակ» պահոցների
սխեմա**

Ոչ հստակ պահոցների սխեման ծածկագրման ամենահայտնի սխեմաներից է, որի նպատակն է ծածկագրել օգտագործողի կարևոր ինֆորմացիան այնպես, որ միայն օրինական օգտագործողները ստանան դրան հասանելիություն:

Այս հոդվածում շաբլոնների պաշտպանության գաղափարը միավորված է կենսա-չափական բնութագրերի հետ, ինչը բերում է բարձր անվտանգությանը բանալու կցման խնդրի համար: Մասնավորապես, այս հոդվածում ներկայացված է ձեռքի ափի երակներից ստացված բնութագրերի հիման վրա «ոչ հստակ» պահոցների սխեմայի կառուցման մեթոդը: Առաջարկված սխեման իրականացվել էր ծրագրային և թեստավորվել էր բաց հասանելիության մեջ գտնվող ձեռքի ափի երակների բազայի վրա: Արդյունքները ներկայացված են այս հոդվածի վերջին բաժնում:

**С. С. Чидемян, А. А. Дживанян, академик Г. А. Хачатрян,
О. Г. Хасикян**

Схема “нечетких хранилищ”, основанная на венах ладони

Схема “нечетких хранилищ” – одна из самых популярных схем шифрования, целью которой является кодирование важной информации пользователя таким образом, чтобы только легальные пользователи имели доступ к ней.

Схема защиты шаблонов используется вместе с биометрическими данными, что приводит к высокой безопасности проблемы связывания ключа. Представлен метод построения схемы “нечетких множеств” для вен ладони. Представленная схема была программно реализована и протестирована на находящейся в открытом доступе базе вен ладоней. Результаты представлены в последнем разделе статьи.

References

1. *Uludag U., Pankanti S., Prabhakar S., Jain A. K.* - Proceedings of the IEEE. 2004. V. 92. N. 6. P. 948–960,
2. CASIA MS Palmprint V1 Database, [Online]. Available: <http://biometrics.idealtest.org/dbDetailForUser.do?id=5>.
3. *Juels A., Wattenberg M.* In: Proceedings of the 1999 6th ACM Conference on Computer and Communications Security (ACM CCS '99). November 1999. P. 28–36.
4. *Juels A., Sudan M.* In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory. July 2002. P.408.

5. *Dodis Y., Ostrovsky R., Reyzin L., Smith A.* - SIAM Journal on Computing. 2008. V. 38. N 1. P. 97–139.
6. *Wanga L. Y., Leedhamb G., Choa D. S. Y.* Minutiae feature analysis for infrared hand vein pattern biometrics. Pattern Recognition Society, Published by Elsevier Ltd, All rights reserved, 2007.
7. *Hassan Soliman, Abdelnasser Saber Mohamed, Ahmed Atwan* –International Journal of Video & Image Processing and Network Security IJVIPNS-IJENS. 2012. V. 12. N 01 28. P.28-39.
8. *Yingbo Zhou, Ajay Kumar* - IEEE Transactions on Information Forensics and Security. December 2011. V. 6. N 4. P. 1259-1274., 2011.
9. *Jainv A. K., Ross A.*- Proc. IEEE-ICASSP 2002. P.4064-4067. May 2002.

CRYPTOGRAPHY

УДК 004.9

K. M. Kyuregyan

Some Modifications of SAFER+

(Submitted by academician G. H. Khachatrian 17/X 2014)

Keywords: *block cipher, encryption, decryption, round, Armenian shuffle, differential cryptanalysis.*

1. Introduction. SAFER+ is one of the block ciphers of SAFER family proposed by Prof. James L. Massey together with Prof. Gurgen H. Khachatrian and Dr. Melsik K. Kyuregyan. It is a 128 block size encryption algorithm with three different user-selected-key lengths, namely 128, 192 and 256. SAFER+ was submitted as a candidate for the Advanced Encryption Standard (AES) [3] and was subsequently adopted for use in the challenge/response entity authentication scheme in the Bluetooth protocol for wireless communications [5]. In this paper some modifications of SAFER+ algorithm are proposed resulting about 1.7 times faster algorithm implementation on ARM platform.

2. Brief description of SAFER+ algorithm. SAFER+ is a 128-bit block cipher. In Fig. 1 the encryption structure of the SAFER+ algorithm is introduced.

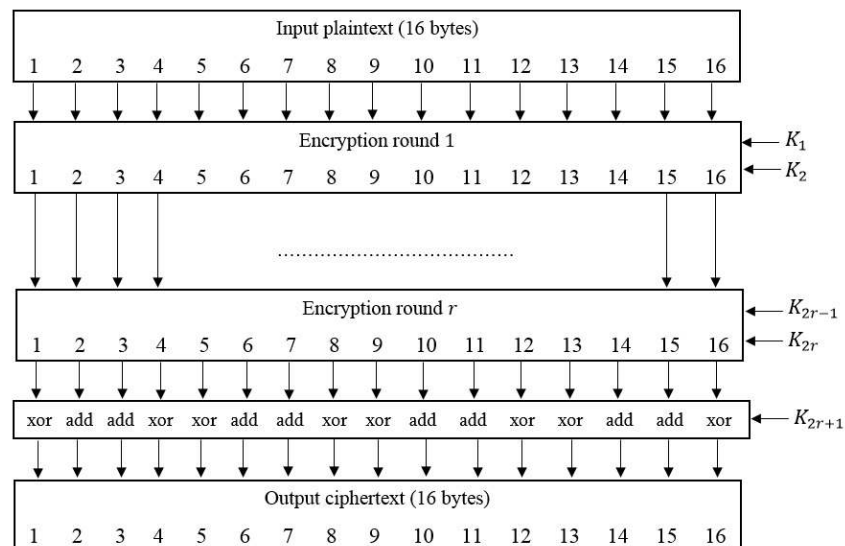


Fig. 1

The 16 byte plaintext block passes through $r=6$ rounds of encryption for 128 bit key and $r=9$ rounds of encryption for 256 bit key. In each round of encryption two subkeys are used. These round subkeys $(K_1, K_2, \dots, K_{2r+1})$ are determined from the user-selected key K according to the key schedule of SAFER+. The details of the key schedule structure are introduced in [3]. The last subkey K_{2r+1} is “added” to the block produced by the r rounds of encryption in the manner that the bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are added together bit-by-bit modulo two (the bitwise “exclusive-or” operation) while the bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are added together modulo 256 (“byte addition”). This “addition” of round subkey K_{2r+1} constitutes the *output transformation* for encryption and produces the ciphertext block of 16 bytes.

The input for decryption is the ciphertext block of 16 bytes. The decryption begins with the *input transformation* that undoes the *output transformation* in the encryption process. At first the round subkey K_{2r+1} is “subtracted” from the ciphertext block in the manner that the round subkey bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are added together bit-by-bit modulo two to the corresponding ciphertext bytes while the round subkey bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are subtracted modulo 256 from the corresponding ciphertext bytes. The result of this “subtraction” is the same 16-byte block as was produced from the r rounds of encryption before the output transformation was applied. This block then passes through the r rounds of decryption, the round i of which undoes the round $r-i+1$ of encryption, where $i=1, 2, \dots, r$. After the round r we obtain a plaintext block. Note that the round keys for decryption are the same as those for encryption but are used in reverse order.

2.1 SAFER+ encryption round. The SAFER+ round schema is given in Fig. 2. The first operation within the round $i, 1 \leq i \leq r$, is the “addition” of the round subkey K_{2i-1} to the 16-byte round input in the manner that the bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are added together bit-by-bit modulo two while the bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are added together modulo 256. The 16-byte result of this “addition” is then processed by a *nonlinear layer* in the manner that the value x of byte j is converted to $45^x \bmod 257$ for bytes $j=1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16$ (with the convention that when $x=128$, then $45^{128} \bmod 257 = 256$ is represented by 0), while the value x of byte j is converted to $\log_{45} x$ for bytes $j=2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15$ (with the convention that when $x=0$, then the output $\log_{45} 0$ is represented by 128). The round key K_{2i} is then “added” to the output of the *nonlinear layer* in the manner that the bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are added together bit-by-bit modulo two, while the bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are added together modulo 256. The 16-byte result of this “addition”

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}]$$

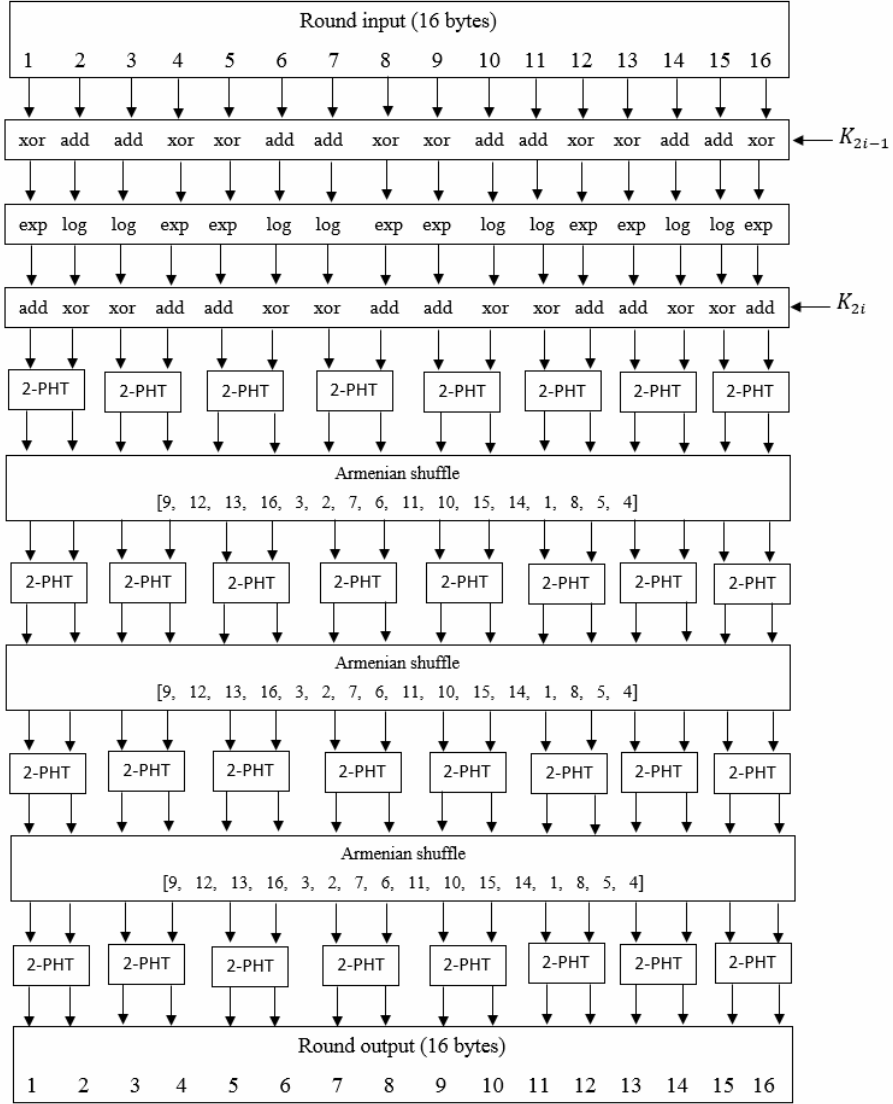


Fig. 2

is then postmultiplied by the matrix M modulo 256 to give the 16-byte round output

$$y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}]$$

in the manner

$$y = Mx,$$

where M is the following 16×16 matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 16 & 8 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 16 & 8 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 16 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 16 & 8 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 16 & 8 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 16 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 16 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 8 & 4 \\ 16 & 8 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

This operation gives

$$y_3 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 2x_8 + \\ + 16x_9 + 8x_{10} + 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$$

(where the arithmetic is modulo 256) as follows from the second column of the matrix M . Multiplication by matrix M provides the *linear layer* of the round that consists of the cascade of 2-PHT and 3 times “Armenian shuffle”+2-PHT operations. “Armenian shuffle” is the coordinate permutation [9, 12, 13, 16, 3, 2, 7, 6, 11, 10, 15, 14, 1, 8, 5, 4] and 2-PHT is Pseudo-Hadamard matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

that has as an input 2 bytes (a_1, a_2) and as an output $(2a_1 + a_2, a_1 + a_2)$ 2-bytes over the ring of integers modulo 256 (all operations are modulo 256).

2.2. SAFER+ decryption round. In the decryption round of SAFER+ simply inverts in reverse order the operations from the encryption round. Thus, the first operation in the decryption round is to postmultiply the 16-byte round input

$$y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}]$$

by the matrix M^{-1} , which is modulo 256 inverse of M , to give the 16-byte result

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}]$$

in the manner

$$x = yM^{-1},$$

where matrix M^{-1} is the 16×16 matrix ($-i$ denote $256-i$ in modulo 256 arithmetic)

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 4 & -8 & 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 & 4 & -2 & 2 & -8 & 16 & -2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 4 & -8 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & -2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -2 & 2 & -8 & 16 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -8 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -8 & 16 & -2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 4 & -8 & 2 & -2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -4 & 4 & -2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 4 & -8 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -8 & 16 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & 4 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & 2 & -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ -8 & 16 & -4 & 4 & -2 & 4 & -2 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -8 & 2 & -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -8 & 16 & -4 & 4 & -2 & 4 & -1 & 1 & -2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

For instance, these operations give

$$x_{10} = -4y_1 + 4y_2 - y_3 + y_4 - 2y_5 + 4y_6 - 2y_7 + 4y_8 - 8y_9 + 16y_{10} - y_{11} + 2y_{12} - 2y_{13} + 2y_{14} - y_{15} + y_{16}$$

The round subkey $K_{2r-2i+2}$ is then “subtracted” from x in the manner that the round subkey bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are subtracted modulo 256 from the corresponding bytes of x while the round subkey bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are added bit-by-bit modulo 2 to the corresponding bytes of x . Then the 16-byte result of this “subtraction” is then processed nonlinearly in the manner that the value x of byte j is converted to $\log_{45} x$ for bytes $j=1,4,5,8,9,12,13,16$ (again with the convention that when $x=0$, then the output $\log_{45} x$ is represented by 128), while the value x of byte j is converted to $45^x \bmod 257$ for bytes $j=2,3,6,7,10,11,14,15$ (again with the convention that when $x=128$, then $45^{128} \bmod 257 = 256$ is represented by 0). The round key $K_{2r-2i+1}$ is then “subtracted” from the 16-byte result in the manner that the round subkey bytes 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 and 16 are added bit-by-bit modulo 2 to the corresponding input bytes while the round subkey bytes 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 and 15 are

subtracted modulo 256 from the corresponding input bytes to obtain the 16-byte round output.

3. Some modifications of SAFER+. We propose three major modifications for SAFER+. They concern both nonlinear and liner parts of algorithm:

1. As it can be seen from Fig. 2, for SAFER+ algorithm exp boxes were used for 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16 bytes while log boxes were used for 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15 bytes. Here we propose to use exp boxes for 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12 bytes and log boxes for 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16 bytes.
2. It is clear from Fig. 2, that the liner part of algorithm starts so-called 2-PHT operation. We propose to start the liner part from shuffling of bytes immediately. As such in this case we will have 4 times of byte shuffling instead of 3.
3. We propose to use [7, 12, 9, 14, 5, 8, 13, 10, 11, 4, 3, 6, 15, 2, 1, 16] “Armenian shuffle” instead of [9, 12, 13, 16, 3, 2, 7, 6, 11, 10, 15, 14, 1, 8, 5, 4]. As the result of the last two modifications we will have completely different liner transformation matrix.

The properties of these modifications are analyzed in detail in the next section.

4. The result of the modifications. Firstly a differential cryptanalysis of a modified version of SAFER+ has been implemented. The attack by differential cryptanalysis on an r -round cipher relies on being able to find a $r-1$ round differential whose probability is substantially greater than the average probability of such a differential, which is $\frac{1}{2^{128}-1} \approx 2^{-128}$ for a 16-byte block

length, i.e. for any selected key after $r-1$ round differential the probability is smaller then 2^{-128} . Providing the count of rounds of SAFER+ we have analyzed all the possible “highly probable” 5-round and 8-round differential chains (see [2]) and have found that due to second and third modifications their probabilities are substantially less than 2^{-128} and 2^{-256} correspondingly then before modifications, but the count of rounds before and after modifications stays the same i.e. after $r=6$ and $r=9$ rounds by differential cryptanalysis it is impossible to find out master key used in the algorithm. Secondly, when implementing a SAFER+ algorithm on ARM platform due to the modified version it is possible to xor four bytes simultaneously, which was impossible with a regular SAFER+. The first modification also shortens the count of operations on ARM platform in the liner part of the algorithm structure (multiplication by matrix). As such the main result of these modifications is that SAFER+ will run ≈ 1.7 times faster on ARM platform.

5. Conclusion. In this paper three major modifications of SAFER+ algorithm are implemented resulting an increase of the speed of algorithm implementation on ARM platform about 1.7 times. In addition it is shown that these modifications will not affect the security of SAFER+.

6. Acknowledgment. The author is thankful to Prof. Guren H. Khachatryan and Dr. Melsik K. Kyuregian for very useful discussions and comments.

This work was supported by State Committee Science MES RA, in frame of the research project SCS-13-1B352.

Institute for Informatics and Automaton Problems of NAS RA
e-mail: knarikyuregyan@gmail.com

K. M. Kyuregyan

Some Modifications of SAFER+

Some modifications of SAFER+ encryption algorithm of SAFER family are presented. After these modifications SAFER+ stays secure against differential cryptanalysis, but these modifications make SAFER+ algorithm implementation ≈ 1.7 times faster on ARM platform.

Ք. Մ. Կյուրեղյան

SAFER+ համակարգի որոշ ձևափոխություններ

Ներկայացված է SAFER ընտանիքին պատկանող SAFER+ ծածկագրական համակարգի որոշ ձևափոխություններ: Կատարվել է դիֆերենցիալ վերլուծություն, ինչը ցույց է տվել, որ SAFER+ ծածկագրական համակարգը այդ ձևափոխություններից հետո ևս կայուն է դիֆերենցիալ վերլուծության նկատմամբ և շնորհիվ այդ ձևափոխությունների ARM պլատֆորմի վրա ≈ 1.7 անգամ ավելի արագ է:

К. М. Кюрегян

Некоторые модификации SAFER+

Представлены некоторые модификации криптографической системы SAFER+ из семьи SAFER. Проведенный дифференциальный анализ, показал, что после этих модификаций система SAFER+ также устойчива по отношению к дифференциальному анализу и благодаря им SAFER+ на платформе ARM в ≈ 1.7 раза быстрее

References

1. *Biham E., Shamir A.* In: Advances in Cryptology-CRYPTO'90 (Eds. A. J. Menezes and S. A. Vanstone), Lecture Notes in Computer Science No. 537, Heidelberg and New York: Springer 1990, p. 212-241.
2. *Massey J. L.* In: Fast Software Encryption II (Ed. B. Prenell), Lecture Notes in Computer Science No. 1008, New York, Springer 1995, p. 212-241.
3. *Massey J. L., Khachatrian G. H., Kyuregian M. K.* "Nomination of SAFER + as Candidate Algorithm for the Advanced Encryption Standard (AES)", NIST AES Proposal, 1998.
4. *Massey J. L., Khachatrian G. H., Kyuregian M. K.* "Nomination of SAFER++ as Candidate Algorithm for the New European Schemes for Signatures", Integrity and Encryption (NESSIE), Submission document from Cylink Corporation, 2000.
5. BLUETOOTH SPECIFICATION Version 1.0B, 29 Nov. 1999,
http://www.bluetooth.com/link/pec/bluetooth_b.pdf.

УДК 539.3

В. М. Белубекян¹, М. В. Белубекян²

**Резонансные и локализованные сдвиговые колебания
в слое с прямоугольным поперечным сечением**

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 28/XI 2014)

Ключевые слова: *антиплоские волны, упругий цилиндр, сосредоточенная масса, локализованные колебания.*

При наличии в упругом теле свободного края могут появиться резонансные и локализованные в окрестности свободного края колебания. Обзор по этим колебаниям приводится в монографии [1]. Естественно ставится вопрос о связи между исследованиями по резонансным и локализованным колебаниям. Для ответа на этот вопрос предлагается рассмотреть наиболее простую модельную задачу.

1. Пусть цилиндрическое тело занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-\infty < z < \infty$. Рассматривается антиплоская задача (чисто сдвиговые колебания) [2]

$$u = v = 0, w = w(x, y, t). \quad (1.1)$$

Уравнение задачи имеет вид

$$c_t^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.2)$$

где μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала цилиндра.

Три плоскости, ограничивающие цилиндр, закреплены

$$w = 0 \text{ при } x = a, y = 0, b. \quad (1.3)$$

Предполагается, что на границе $x = 0$ задано специальное граничное условие

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

Граничное условие (1.4) может появиться вследствие либо наличия тонкого слоя из материала с отличными от цилиндра характеристиками [3, 4], либо наличия сосредоточенной массы, распределенной по плоскости $x = 0$.

Решение уравнения (1.2), удовлетворяющего граничным условиям (1.3) при $y = 0, b$, представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_n t} w_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в (1.2) приводит к уравнению

$$w_n'' + \lambda_n^2 (\eta_n^2 - 1) w_n = 0, \quad \eta_n^2 = \omega_n^2 c_t^{-2} \lambda_n^{-2}. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) в общем случае может иметь решение, удовлетворяющее как условию $\eta_n^2 < 1$, так и условию $\eta_n^2 \geq 1$.

Аналогичная ситуация имеет место в задаче распространения сдвиговых волн в двухслойной среде [5].

Уравнение (1.6) имеет решение, удовлетворяющее условию $w = 0$ при $x = a$ из (1.3)

$$w_n = A_n \sin \sqrt{\eta_n^2 - 1} \lambda_n (a - x). \quad (1.7)$$

Требую, чтобы решение (1.5) с учетом (1.7) удовлетворило граничному условию (1.4), получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\eta_n^2 - 1} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\eta_n^2 - 1} \lambda_n a \right) = \alpha c_t^2 \lambda_n \eta_n^2. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) в частных случаях $\alpha = 0$ (край $x = 0$ свободен) и $\alpha \rightarrow \infty$ (край $x = 0$ закреплён) имеет только те решения, которые удовлетворяют условию

$$\eta_n^2 \geq 1. \quad (1.9)$$

С другой стороны, для больших $\lambda_n a$ в приближении

$$\operatorname{cth} \sqrt{1 - \eta_n^2} \lambda_n a \approx 1. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\eta_n^2 < 1 \quad (1.11)$$

$$\eta_n^2 = 2 \left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2 c_t^4 \lambda_n^2} \right)^{-1}. \quad (1.12)$$

Решение (1.12) соответствует результату решения задачи о локализованных колебаниях, когда вместо условия $w = 0$ при $x = 0$ ставится условие $\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0$.

Отсюда следует, что для достаточно больших $\lambda_n a$ уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее как условию (1.9) (согласно [1] собственные колебания), так и условию (1.9) (локализованные у свободного края колебания). Но частота локализованных колебаний с увеличением n (моды колебаний) увеличивается и может сравняться при некотором $n = N$ с частотой первой моды собственных колебаний ($n = 1$), что и будет причиной резонанса.

2. Предельным переходом $\eta_n \rightarrow 1_n$ можно показать, что уравнение (1.8) имеет решение, удовлетворяющее условию (1.11) (типа локализованных колебаний) при условии

$$\xi_n^2 > \beta^{-1}, \quad (2.1)$$

где приняты новые обозначения

$$\xi_n = \lambda_n a, \quad \beta = \alpha c_t^2 a^{-1}. \quad (2.2)$$

Примечание: если вместо условия $w=0$ при $x=0$ принять условие свободного края $\partial w / \partial x = 0$ при $x=0$, то предельных ($\lambda_n a \gg 1$) локализованных колебаний не существует.

Уравнение (1.8) можно переписать в виде

$$\sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} = \beta \Omega_1^2, \quad (2.3)$$

где введен новый безразмерный параметр частоты.

Пусть ξ_1 удовлетворяют условию (2.1), т.е. $\xi_1^2 > \beta^{-1}$ и Ω_1 есть минимальный корень решения уравнения

$$\sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2} = \beta \Omega_1^2, \quad (2.4)$$

удовлетворяющего условию $\Omega_1^2 > \xi_1^2$.

Требуя, чтобы безразмерная частота (собственная) Ω_1 совпадала с n -й частотой локализованных колебаний, необходимо n найти из решения уравнения

$$\sqrt{n^2 \xi_1^2 - \Omega_1^2} \operatorname{cth} \sqrt{n^2 \xi_1^2 - \Omega_1^2} = \beta \Omega_1^2. \quad (2.5)$$

Из (2.5) или из (1.12) можно для определения числа n получить следующую приближенную формулу:

$$n = E \left[\frac{\Omega_1^2}{\xi_1^2} (\beta^2 \Omega_1^2 + 1) \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

где оператор E означает целую часть числа аргумента плюс единица.

Приведем некоторые приближенные численные результаты для $\xi_1 = 2\pi(a = 2b)$:

$$\begin{aligned} \beta = 1,1 &\Rightarrow \Omega_1^2 \approx 78,96, n = 10 \\ \beta = 1,8 &\Rightarrow \Omega_1^2 \approx 40,113, n = 13 \\ \beta = 9 &\Rightarrow \Omega_1^2 \approx 41,5, n = 76 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Нетрудно проверить, что условие существования локализованных колебаний (2.1) удовлетворяется.

¹Ереванский государственный университет

²Институт механики НАН РА

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением

Установлены условия, при которых возможны одновременно локализованные и объемные сдвиговые колебания. Определяется частота n -й моды локализован-

ных колебаний, совпадающая с минимальной частотой объемных колебаний. Это совпадение является причиной внутреннего резонанса.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

**Ռեզոնանսային և տեղայնացված սահքի տատանումները
ուղղանկյուն կտրվածքով շերտում**

Հաստատված են պայմաններ, որի դեպքում հնարավոր են միաժամանակ տեղայնացված և ծավալային սահքի տատանումներ: Որոշված է տեղայնացված տատանումների n -րդ մոդայի հաճախությունը, որը համընկնում է ծավալային տատանման միմիալ հաճախության հետ: Այդ համընկնումը հանդիսանում է ներքին ռեզոնանսի պատճառ:

V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

**Resonance and Localized Shear Vibration in the Layer
with Rectangular Cross Section**

The conditions of the possibility of simultaneous existence of the localized and volume shear vibrations are established. The localized frequency of the n -st mode is determined, which is equal to the minimal volume frequency. This equality is a reason of the internal resonance.

Литература

1. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. Физматлит. 2010. 280 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
3. Белубекян М. В. - В сб.: Актуальные проблемы неоднородной механики. Ереван. 1991. С. 66-71.
4. Белубекян М. В. - Изв. АН Армении, Механика. 1991. Т. 44. N 3. С. 7-10.
5. Newton M. I., Mehale G., Martin F. Gizeli E., Meizak R. F.- Generalized Love waves Europhysics letters. 2002. V. 58. N 6. P. 818-822.

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

Академик И. А. Варданян

Реакции радикалов ОН на твердой поверхности NaCl

(Представлено 26/IX 2014)

Ключевые слова: радикал, поверхность, реакция, рекомбинация.

Ранее в ряде работ [1-7] методом ЭПР спектроскопии в сочетании с кинетическим методом вымораживания радикалов была установлена возможность взаимодействия пероксидных радикалов CH_3O_2 с органическими соединениями на поверхности некоторых веществ, входящих в состав атмосферных аэрозолей. В ходе этих исследований было обнаружено удивительное явление размножения радикалов, приписанное дополнительному расходу органического соединения (метана, ацетальдегида) на твердой поверхности по вырожденно-разветвленному цепному механизму. Возможность реакции адсорбированных атомов Н с O_2 с образованием радикалов HO_2 была предсказана в [8] и показана кинетическими методами, комбинированными с оптической спектроскопией, и методом изотопов в [9].

Что касается радикалов ОН, то в работе [10] на основании косвенных данных было сделано заключение о возможности реакции радикалов ОН и HO_2 с органическими соединениями на поверхности TiO_2 .

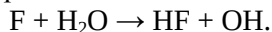
Настоящая работа посвящена описанию и интерпретации результатов экспериментов по изучению возможности взаимодействия радикалов ОН с СО при комнатной температуре на твердой поверхности NaCl, присутствующего в атмосфере в качестве аэрозоля. Были поставлены и решены следующие задачи:

1) на примере СО показать возможность гетерогенного взаимодействия радикалов ОН с молекулярным соединением и дать количественную оценку скорости этого процесса;

2) получить информацию о роли гетерогенной реакции радикалов ОН с СО в процессах, протекающих в атмосфере и при газофазном окислении органических соединений.

Экспериментальная часть. Экспериментальная установка подобна детально описанной в работе [11]. Все эксперименты проводились при низких давлениях ($p=3.15 \text{ mbar}$) в интервале времени 3-15 мс в проточном цилиндрическом реакционном сосуде из пирекса ($l=60 \text{ см}$, $d=3 \text{ см}$) с пере-

мещающимся кварцевым пробоотборником для радикалов ОН. Источником радикалов служила реакция



Атомы фтора создавались при диссоциации F_2 , разбавленного He, в разряде. Реакция протекала полностью до того, как смесь поступала в реактор. Радикалы ОН детектировались методом LIF (лазером индуцированной флуоресценции). Поверхность реакционного сосуда покрывалась NaCl, а именно обрабатывалась 10%-ным водным раствором NaCl с последующим выпариванием воды. Температура опытов составляла 300 К.

Для исключения возможности гомогенной реакции опыты проводились при малых временах пребывания реагирующей смеси в реакторе ($t \sim \text{мс}$) и с малыми количествами СО. Каждая серия экспериментов требовала стабилизации состояния поверхности. В первые часы работы наблюдались более высокие скорости реакции, чем через несколько часов. Измерения проводились после стабилизации состояния поверхности.

Экспериментальные результаты и обсуждение. Реакция



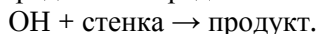
изучалась по измерению концентрационного профиля радикалов ОН в отсутствие и в присутствии СО. Концентрация реагентов в объеме находилась в интервалах:

$$\begin{aligned} 1.0 \cdot 10^{-14} \leq [\text{OH}], \text{ моль/см}^3 &\leq 2.0 \cdot 10^{-14}, \\ 0.5 \cdot 10^{-10} \leq [\text{CO}], \text{ моль/см}^3 &\leq 1.0 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

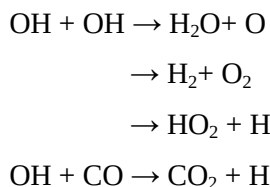
В ходе опытов установлено, что поведение радикалов ОН и воспроизводимость данных зависела от количества F_2 в потоке. Наилучшая воспроизводимость результатов наблюдалась при низких концентрациях F_2 , в частности при

$$[\text{F}_2] = 4.4 \cdot 10^{-14} \text{ моль/см}^3 \text{ и } [\text{H}_2\text{O}] = 2.1 \cdot 10^{-10} \text{ моль/см}^3.$$

В отсутствие СО реакция радикалов представляется следующим образом:



Гомогенными реакциями радикалов ОН



в условиях настоящих опытов можно пренебречь, учитывая значения вышеуказанных концентраций этих радикалов и СО и соответствующих констант скорости. Кинетическое поведение радикалов ОН в отсутствие СО представлено на рис.1.

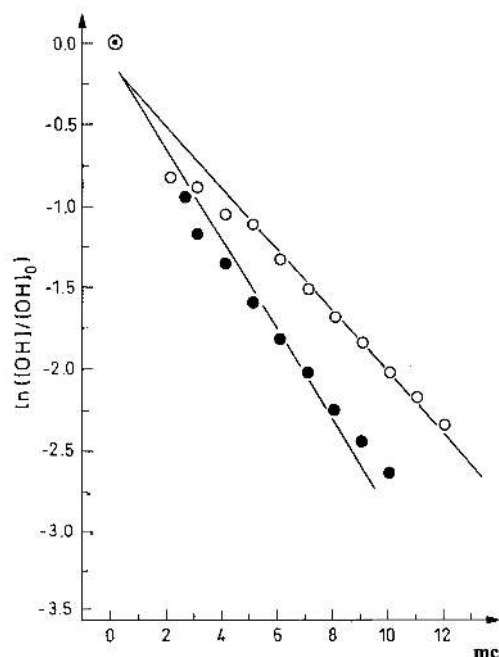


Рис.1. Зависимость $\ln ([\text{OH}]/[\text{OH}]_0)$ от времени в отсутствие (o) и в присутствии (●) CO на поверхности NaCl, $p=3.1\text{mbar}$.

Расхождение радикалов OH на поверхности NaCl происходит со значительной скоростью. Из данных, представленных на рис 1, определена константа скорости гетерогенной гибели радикалов OH на поверхности NaCl: $k_{\text{гет}} = 230 \pm 30 \text{ s}^{-1}$. В серии экспериментов определена зависимость константы скорости $k_{\text{гет}}$ от давления. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

p (мбар)	$k_{\text{гет}}$ (среднее) s^{-1}	$1/k_{\text{гет}}$ (среднее) s	γ (реком.)
2.1	302	$3.31 \cdot 10^{-3}$	-
3.14	230	$4.34 \cdot 10^{-3}$	$(2.7 \pm 1.3) 10^{-2}$
4.7	180	$5.55 \cdot 10^{-3}$	-

Наблюдается заметная зависимость значений константы скорости от давления. Отсюда можно заключить, что скорость контролируется диффузией. Из опытных данных в интервале времен $6 < t(\text{мс}) < 7$, где происходит значительный расход радикалов, был оценен нижний предел значения коэффициента диффузии D из следующего выражения:

$$t = x^2/2D,$$

где x – радиус реакционного сосуда, D – коэффициент диффузии в $\text{см}^2/\text{с}$. Он оказался равным

$$D \geq 160 \text{ см}^2/\text{с}.$$

Значение D , определенное согласно [12], оказалось равным $285 \text{ см}^2/\text{с}$. Для определения коэффициента гетерогенного увода γ воспользуемся следующим выражением для константы скорости $k_{\text{гет}}$ гетерогенного увода (рекомбинации радикалов ОН):

$$1/k_{\text{гет}} = 1/(\gamma \cdot u)/d + 1/(c D)^2,$$

где u – средняя скорость, d – диаметр реакционного сосуда, а c – некая константа.

Определяя $1/k_{\text{гет}}$ при двух разных давлениях p_1 и p_2 и принимая во внимание, что $D_1/D_2 = p_2/p_1$, а τ_1 и τ_2 равняются $1/k_{\text{гет}}$, при двух разных давлениях p_1 и p_2 для коэффициента γ получим следующее выражение:

$$\gamma = d(1 - p_1/p_2)/(\tau_1 - \tau_2(p_1/p_2))u,$$

Соответствующие экспериментальные и вычисленные значения при $T = 300 \text{ К}$ и $u = 10^4 \text{ см/с}$ представлены в табл. 1. Рекомендуемое значение $\gamma = (2.7 \pm 1.3)10^{-2}$. Значительная разница в значениях не удивительна для гетерогенных процессов. Результаты опытов в присутствии СО представлены на рис.1.

Обычно состояние поверхности контролировалось повторением экспериментов до и после эксперимента с СО. Как видно из полученных данных, в присутствии СО наблюдается значительное увеличение расхода радикалов ОН. Дополнительное расходование указанных радикалов в условиях настоящих опытов было приписано гетерогенной реакции этих радикалов с СО. Оценка вклада гомогенной реакции при наибольшей подаче оксида углерода с учетом значения $k_{\text{гом}} = 9.10^{10} \text{ см}^3/\text{моль} \cdot \text{с}$ [13] дает $k_{\text{гом}} \cdot [\text{CO}] = 9.3 \text{ с}^{-1}$. Экспериментальные значения $k_{\text{гет}}$ в отсутствие и в присутствии оксида углерода приведены в табл. 2.

Таблица 2

$T[\text{К}]$	$P[\text{мбар}]$	$\text{CO}[\text{моль}/\text{см}^3]$	$k(\text{среднее})[\text{с}^{-1}]$	$\Delta k_{\text{гет}}[\text{с}^{-1}]$
300	3.15	10^{-10}	350 ± 30	120
300	3.15	-	230 ± 30	

Разница $\Delta k_{\text{гет}}$ между двумя значениями константы скорости гетерогенного увода радикалов в отсутствие и в присутствии СО значительна и более чем на порядок больше $k_{\text{гом}} \cdot [\text{CO}]$.

Обзор литературных данных, касающихся значений констант скорости реакции (1), свидетельствует о большом разбросе значений энергии активации (E_a) [14], причем это относится не только к абсолютным значениям, но и к знаку. Эти значения находятся в следующих пределах:

$$+ 33.5 \geq E_a \geq -14.2 \text{ КДж/моль}.$$

Это расхождение становится более значительным в опытах при температурах, близких к комнатной. Возможным объяснением этого феномена может быть:

- 1) изучение взаимодействия радикалов ОН с СО происходило в условиях, полностью не исключающих протекания вторичных реакций и их влияния на результаты измерений;
- 2) образование комплекса $(\text{ОНСО})^\#$;

3) заметная роль гетерогенного взаимодействия радикалов OH с оксидом углерода, в частности при низких температурах и давлениях, которая зависит от условий эксперимента (размеры, состояние и вид покрытия поверхности реакционного сосуда).

Не исключая вклада первых двух вариантов, на основании представлений, развитых в [1-9, 15, 16], и опытных данных, полученных в настоящей работе, мы допускаем возможность и варианта 3.

Поскольку опыты по изучению константы скорости гомогенной реакции (1) происходили в реакторах с различной поверхностью, то возможно, что доля влияния гетерогенной реакции на результаты измерений была значительной и к тому же разной. Нужно отметить, что поверхность NaCl, использованная в настоящей работе, является имитацией поверхности аэрозоля. Реально поверхность аэрозоля NaCl на 2-3 порядка больше использованной в данной работе. К тому же вклад гетерогенной реакции может быть значительным вплоть до парциальных давлений оксида углерода в 10 мбар. Очевидно, что в атмосфере, богатой аэрозолями, гетерогенный увод радикалов OH может быть значительным.

Автор благодарит проф. Х. Г. Вагнера и проф. В. Хака (Goettingen, Max-Planck Institut fuer Stroemungsforschung) за предоставленную возможность проведения эксперимента, а также за обсуждение результатов работы.

Институт химической физики им. А. Б. Налбандяна НАН РА
e-mail: ivardan@ichph.sci.am

Академик И. А. Варданян

Реакции радикалов OH на твердой поверхности NaCl

Методом лазером индуцированной флуоресценции показана возможность гетерогенного взаимодействия радикалов OH с CO на поверхности NaCl при комнатной температуре и низких давлениях. В качестве источника радикалов OH использовалась реакция $F + H_2O \rightarrow HF + OH$. Определена константа скорости рекомбинации радикалов OH на поверхности NaCl.

Ակադեմիկոս Ի. Ա. Վարդանյան

OH ռադիկալների ռեակցիաները NaCl-ի պինդ մակերևույթի վրա

Լազերով հարուցված ֆլուորեսցենցիայի եղանակով ցույց է տրված CO-ի հետ OH ռադիկալների ռեակցիայի հնարավորությունը NaCl-ի մակերևույթի վրա սենյակային ջերմաստիճանում և ցածր ճնշումների դեպքում: Որպես ռադիկալների աղբյուր կիրառվել է $F + H_2O \rightarrow HF + OH$ ռեակցիան: Որոշված է այդ ռադիկալների ռեկոմբինացիայի արագության հաստատունը NaCl-ի մակերևույթի վրա:

Academician I. A. Vardanyan

Reactions of OH Radicals on a Solid NaCl-Surface

Using laser induced fluorescence method the possibility of the reaction of OH radicals with CO on a solid NaCl-surface is shown at room temperature and low pressures. As a source of OH radicals the $F + H_2O \rightarrow HF + OH$ reaction was chosen. The rate constant of radicals recombination on the NaCl-surface at room temperature is determined.

Литература

1. *Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* - Int. J. Chem. Kinet. 2004. V. 36. N.11. P. 591.
2. *Манучарова Л. А., Царукян С. В., Варданян И. А.* - ДНАН РА. 2007, Т. 107. С. 239.
3. *Vardanyan I. A., Manucharova L.A., Tsarukyan S.V.* - 21th Intern. Symp. On Gas Kinetics, leuven , Belgium, Book of Abstracts. 2010. P. 202.
4. *Джалали Х. А., Манучарова Л. А., Царукян С. В., Варданян И. А.* - Журн. физ. химии. 2011.Т. 85. N 3. С. 553.
5. *Арустамян А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А.* - ДНАН РА. 2012. Т. 112. С. 194.
6. *Vardanyan I. A., Manucharova L. A., Jalali H. A., Tsarukyan S. V.* - Хим. журн. Армении. 2012. Т. 65. С. 132.
7. *Vardanyan I. A., Arustamyan A. M., Manucharova L. A., Tsarukyan S. V.* - 22nd Intern. Symp. on Gas Kinetics (GK-2012). Book of Abstracts. Boulder, Colorado, USA. 2012. P. 205.
8. *Азатян В. В., Семенов Н. Н.* - Кинетика и катализ. 1972. Т. 13 N 1. С. 17.
9. *Азатян В. В., Рубцов Н. М., Цветков Г. И., Черныш В. И.* - Журн. физ. химии. 2005. Т. 79. N 3. С. 397.
10. *Behnke W., Koch W. et al.* - Atm. Envir. 1988. V. 22. P. 1113.
11. *Hack W. , M.Wagner, K. Hoyer mann* - J. Phys. Chem. 1995. V. 99. P. 10847
12. *Dixon-Lewis* - Proc. Roy. Soc. London. 1972. A.330. P. 219.
13. *Gandpanche F., Ivanov A., Devolder P., Gershenson YU., Sawerysyn J.-P.* - 14th Intern. Symp. on Gas Kinetics. 1996. P. A12.
14. *Hirschfelder J. O., Curtis Ch. F., Bird R. B.* Molecular Theory of Gases and Liquids.1965.
15. NIST, Chem.Kinetics Database,1992.
16. *Bakhchadjyan R. H. , Vardanyan I. A.* - Int. J. Chem. Kinet. 1994, V. 26, P. 595.

ГЕОХИМИЯ

УДК 532.5

Академик С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян

Гидрогеодинамические и геохимические предвестники землетрясений на территории Армении

(Представлено 19/XI 2014)

Ключевые слова: *флюиды, геохимия, гидрогеодинамика, землетрясение, подземные воды, источник, напряженность, деформация.*

Введение. Сильные землетрясения, произошедшие за последние годы, показали, что несмотря на длительные исследования прогноз землетрясений на сегодняшний день остается нерешаемой проблемой. Однако появились обоснованные надежды на значительное продвижение в проблеме прогноза землетрясений. В частности, выявлены значительные возможности применения гидрогеодинамических и геохимических методов.

К гидрогеодинамическим и геохимическим предвестникам землетрясений относятся эффекты, связанные с воздействием процессов подготовки землетрясений на динамику и химический состав флюидов, распространенных в земной коре. Метод изучения гидрогеодинамических и геохимических предвестников землетрясений стал широко внедряться за последние 20-30 лет.

Работы по изучению режима подземных вод с целью выявления предвестников землетрясений начаты в Армении с 1986 г. До Спитакского землетрясения (7.12.88, $M=6.9$) на территории республики были размещены шесть наблюдательных гидрогеодинамических скважин (Управление геологии Армении), входящих в региональную сеть наблюдений на Кавказе. На основании изучения региональных закономерностей режима подземных вод и обработки данных получены гидродеформационные поля [1], которые характеризуют напряженное состояние недр.

Метод гидрогеодинамических предвестников (ГГД), разработанный в Институте физики Земли [2], впервые применен в Армении [3]. Использование метода требует учета данных о гидрогеологическом режиме подземных вод района исследований, влияния метеорологических факторов на уровень вод, сведений о геодинамических процессах, что в конечном

итоге позволит повысить достоверность интерпретации результатов гидрогеодинамических наблюдений.

Обработка данных по режиму минеральных вод за 1989-1992 гг. позволила выделить гидрогеохимические эффекты, предшествовавшие сильным землетрясениям на территории Армении [3]. Метод гидрогеохимического мониторинга внедрен с 1998 г. (пресные воды), далее наблюдательная сеть мониторинга была расширена, в настоящее время она включает пять минеральных источников и пресные родники. Метод способствует выявлению среднесрочных предвестников по аномальным явлениям, которые предшествуют землетрясениям, из чего следует, что изменяются величина деформации земной коры, химический состав, снижаются или повышаются уровень подземных вод и температура.

Наблюдательная сеть. Территория Армении характеризуется зональным строением, обусловленным разграничивающими ее четырьмя разломами глубокого заложения: Лалвар-Мравская, Базумо-Севанская, Анкаван-Сюникская и Ереванская зоны разломов [4] (рис.1).

В гидрогеологическом отношении территория Армении представляет собой высоко приподнятую область дренажа и относится к зоне интенсивного водообмена с направлением стока поверхностных вод от складчатого сооружения в сторону Куринской и Среднеараксинской депрессий. Для размещения наблюдательных скважин выбирались участки и водоносные горизонты с низким уровнем неконтролируемых помех с тем, чтобы определить особенности режима этих горизонтов и реакции на подготовку землетрясений. Режимные наблюдения за ходом уровня подземных вод с целью выявления гидрогеодинамических предвестников проводились по наблюдательным скважинам, расположенным как в зонах тектонических нарушений, так и на ненарушенных участках. Гидрогеохимические наблюдения включают данные по химии и температуре вод минеральных источников Азатаван, Веди, Суренаван, Бжни и Арзни и пресных родников. Сеть гидрогеохимических наблюдений размещена на территории Центральной Армении (рис. 1). Вединское месторождение минеральных вод приурочено к зоне тектонического нарушения, пересекающего верхнемиоценовые отложения близмеридиального направления. В динамике минеральных вод месторождения большую роль играет смешивание грунтовой воды, что приводит к изменению общей минерализации в вертикальном разрезе. Месторождение Суренаван находится в пределах Приараксинской зоны. Основным структурным элементом этой зоны является Ереванский глубинный разлом. Месторождение Бжни приурочено к долине р. Раздан. Участок месторождения расположен в ядре Арзаканской складки, сложенной метаморфическими сланцами, прерванными гранитами. В пределах месторождения ядро складки разорвано крупным тектоническим нарушением постэоценового возраста – Разданским. Месторождение минеральных вод Арзни в структурном отношении приурочено к средней части Разданской впадины тектонического происхождения [5].

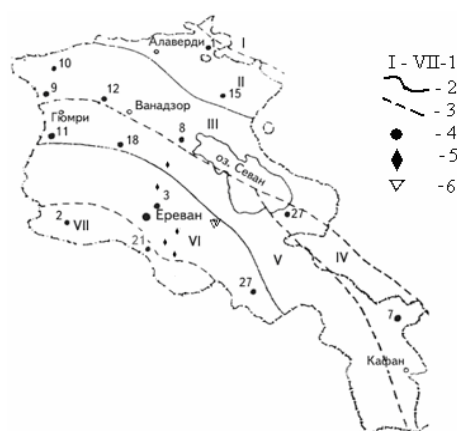


Рис.1. Схема тектонической зональности Армении, составленная А.Т.Асланяном. 1— номера зон; 2— границы оротектонических поясов; 3 — границы тектонических зон; 4 — эпицентры землетрясений; 5 — минеральные источники; 6 — пресные родники.

Режиμοобразующие факторы подземных вод. Разнообразие геологического строения, геоморфологические особенности, метеорологические факторы влияют на формирование режима подземных вод Армении. Но одними из основных режиμοобразующих факторов являются метеорологические: атмосферные осадки и их инфильтрация, изменение атмосферного давления. Годовые циклы включают сезонные изменения уровня вод по наблюдательным скважинам с различным диапазоном изменения амплитуд. Из 14-и наблюдательных скважин колебания уровня вод сезонный ход имеется в 8-ми скважинах, по уровню вод двух скважин сезонный ход наблюдается слабо, а по остальным четырем отсутствует. Влияние инфильтрации атмосферных осадков на уровень подземных вод выражается чаще всего смещением на 1-2 месяца сезонного хода изменения уровня вод. Интервал смещения зависит от климатических условий района расположения скважины относительно области питания водоносного горизонта и фильтрационных свойств пород [3]. Обнаружены небольшие вариации во времени коэффициента барометрической эффективности и периодов пилообразных колебаний уровня подземных вод, которые могут являться отражением геодинамических процессов.

Формирование минеральных вод Армении происходят в самых разнообразных геологических условиях. Характерной особенностью минеральных вод Армении является большое содержание углекислого газа, а для вод зон разломов глубинного заложения в химическом составе преобладает гидрокарбонат натрия. Повышенный газовый фактор является причиной движения минеральных вод в приповерхностной зоне, явление газ-лифта отмечается с одной стороны, а с другой – выделение в водонесущих трещинах и на поверхности значительного количества травертин. По гидрохимическим пунктам наблюдений (рис. 1) сезонный ход изменения

уровня вод наблюдается в скважине Суренаван (рис. 2), по остальным минеральным источникам влияния атмосферных осадков на уровень вод не наблюдается. Наблюдается тренд на повышение значений общей минерализации вод мин. ист. Арзни с 2008 г. по настоящее время; по водам мин. ист. Бжни наблюдается тренд на понижение с 2008 по 2013 гг., что

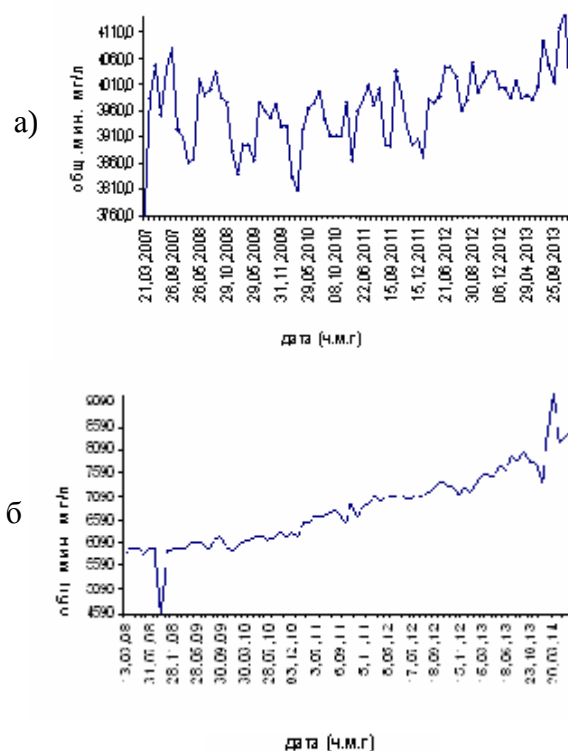


Рис.2. а – сезонные изменения значений общей минерализации воды в скважине Суренаван; б – тренд (повышение) значений общей минерализации воды в скважине Арзни.

указывает на геодинамические процессы, имеющие место в земной коре за указанный период.

Сейсмический режим региона. Данные по сейсмическим наблюдениям и гидрогеодинамическим скважинам предоставлены Национальной сейсмической службой Республики Армения (НССЗ). Рассмотрены сейсмические события за последние пять лет, произошедшие на территории Армении с $M \geq 2$. За весь период произошло 276 сейсмических события (рис. 3), из которых 23 землетрясения с $M \geq 3$ и два землетрясения с $M > 4$: 18.06.09, Гарни; 29.09.11 в районе Ашоцка. Карта сейсмичности региона Армении отражает скопление эпицентров землетрясений на севере и в центральной части территории Армении (рис. 3.) Гидрогеодинамические скважины установлены по всему региону, а гидрогеохимические пункты

наблюдений расположены в центральной части. По напряжениям, имеющим место вокруг каждой наблюдательной скважины в связи с произошедшими местными землетрясениями, определены количественные значения деформаций. Наибольшее значение деформации – 10^{-5} имело место в скважине Ашоцк (скв. 10, рис. 1) в связи с землетрясением 03.05.12, $M=3.4$, при этом эпицентрального расстояния составляло 2 км. Значения деформации чуть ниже – 10^{-7} определены на расстоянии 4-5 км от гидрогеодинамических пунктов наблюдения в Арташате, Карчахпюре и от гидрогеохимических пунктов Веди, Азатаван и пресного родника Гарни в связи с произошедшими сейсмическими событиями: 28.12.11, $M=3.1$; 05.10.10, $M=3.3$. Построена карта напряженно-деформационного поля земной коры Армении за 2009-2013 гг. (рис. 4).

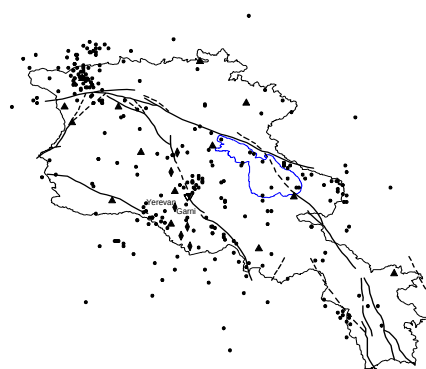


Рис.3. Карта эпицентров землетрясений:
Карта напряженно-деформационного

- — эпицентры очагов землетрясений;
- ◆ — минеральные источники;
- ▲ — гидрогеодинамические скважины;
- ▽ — пресные родники;
- ~ — активные разломы.

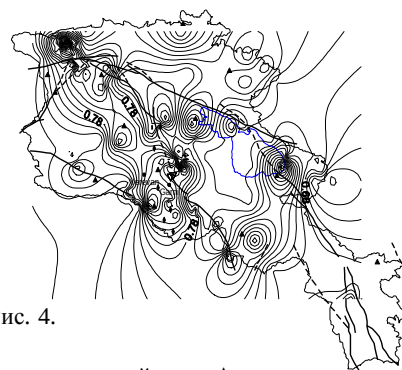


Рис. 4.

поля земной коры Армении
за 2009-2013 гг. с $M>2$;
▽ — значение деформации.

Как видно из рис.4, напряженные точки региона отражены в северной, центральной частях и на юге оз. Севан, отсутствие напряжения наблюдается на юге территории Армении.

Эффекты, предшествующие геодинамическим процессам земной коры территории Армении по геохимическим и гидрогеодинамическим пунктам наблюдений, следующие.

Изменения уровня воды в скважине Арташат носят пилообразный характер (рис. 5) начиная с 2011 г. по настоящее время. Пилообразные изменения уровня воды в скважине происходят на фоне тренда на повышение уровня воды, что является отражением геодинамических процессов (сжатие), протекающих в верхних слоях земной коры Ереванского тектонического блока. Во время местного землетрясения-1, как видно из рис. 5, увеличиваются период и амплитуда пилообразных колебаний. Эффекты, предшествовавшие местным землетрясениям (2009-2012 гг., $M>2$), выяв—

лены по изменениям вод в скважине Ашоцк, форма вариаций воды – ступенчатое понижение и повышение уровня. Самое высокое значение $D=11 \cdot 10^{-5}$ имело место вокруг скажины Ашоцк при землетрясении 03.05.12, $M=3.4$, эпицентр которого находился на расстоянии 2.2 км от скважины.

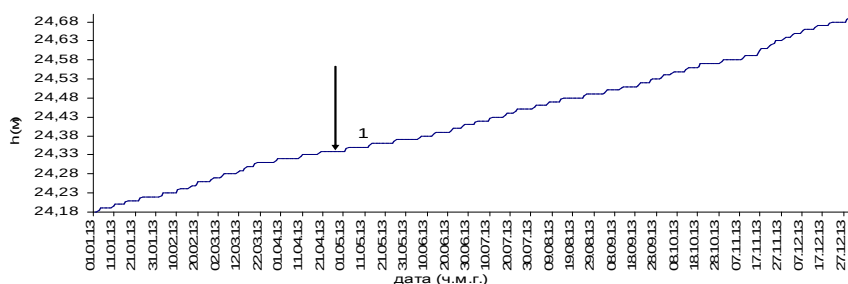


Рис.5. Изменения уровня вод в гидрогеодинамической скважине Арташат. 1 – землетрясение 27.04.13, $M=2.3$, $D=14$.

Наиболее четко геохимические аномалии проявляются в макрокомпонентном составе подземных вод и газов [6]. В таблице приводятся гидрогеохимические эффекты по Mg и Cl и общей минерализации вод минеральных источников, предшествующих сейсмическим событиям с $M>2$. Данные таблицы получены в результате применения статистических методов обработки, в частности, определены: $\bar{K}$ – фоновые значения величин концентраций компонентов Mg^{2+} и Cl^- и общей минерализации минеральных вод, δ – дисперсия как среднее квадратическое отклонение от фоновых значений вариационного ряда, A – величина геохимического эффекта, $A = \bar{K} + n\delta$, где n – число, указывающее, во сколько раз увеличивается дисперсия во время сейсмического события для определяемого химического компонента вод по пунктам наблюдений минеральных источников. В таблице в зависимости от параметров произошедших землетрясений: магнитуды M и эпицентрального расстояния D значение числа n меняется. В данной статье приводятся предварительные данные исследований гидрогеохимических эффектов по химическим компонентам вод, в дальнейшем предполагается определить наиболее информативные компоненты химии вод для каждой минеральной скважины с целью оценки величины геохимического эффекта в зависимости от параметров землетрясений.

Выводы. Для макрокомпонентного состава минеральных вод характерным эффектовым признаком является уменьшение или увеличение среднего значения их концентраций.

Механизм формирования гидрогеохимических эффектов объясняется изменением напряженно-деформированного состояния среды при подготовке землетрясений.

Параметры землетрясения																
Дата	φ	λ	М	Г Г Х												
				Mg					Cl				Общ. мин			
				D	$\overline{K}$	δ	$\overline{K}$	A	$\overline{K}$	δ	$\overline{K}$	A	$\overline{K}$	δ	$\overline{K}$	A
Бжни																
18.06.2009	40,23	44,82	3,8	35	84	2	85	A= $\overline{K}$ - δ	500	4	486	A= $\overline{K}$ -3 δ	4911	11	4879	A= $\overline{K}$ +3 δ
14.10.2011	40,27	44,77	3,6	22	73	2	70	A= $\overline{K}$ +2 δ	428	4	444	A= $\overline{K}$ -4 δ				
Арзни																
18.06.2009	40.23	44.82	4,1	20	184	2	189	A= $\overline{K}$ +2 δ	2213	7	2237	A= $\overline{K}$ +3 δ	6160	9	6082	A= $\overline{K}$ +9 δ
Азатаван																
27.04.2013	39,98	44,72	2,3	5	82	3	83	A= $\overline{K}$ - δ	17830	13	17784	A= $\overline{K}$ -3 δ	33182	16	33249	A= $\overline{K}$ +4 δ
Веди																
16.03.2010	39,93	44,72	2,1	1	104	3	97	A= $\overline{K}$ -2 δ	120	1	121	A= $\overline{K}$ + δ	3821	6	3854	A= $\overline{K}$ +5 δ
19.10.2011	40,02	44,48	3,4	30	100	3	102	A= $\overline{K}$ + δ	120	2	124	A= $\overline{K}$ -2 δ	3815	6	3853	A= $\overline{K}$ +6 δ
12.02.2012	40	44,73	2,3	8	100	2	104	A= $\overline{K}$ -2 δ	115	2	110	A= $\overline{K}$ +2 δ	3848	7	3789	A= $\overline{K}$ -8 δ
Суренаван																
18.06.2009	40.23	44.82	4,1	20	346	2	347	A= $\overline{K}$ + δ	460	3	469	A= $\overline{K}$ -3 δ	3920	7	3977	A= $\overline{K}$ +8 δ
17.03.2012	39.77	44.82	2,6	8	340	3	336	A= $\overline{K}$ -2 δ	462	2	459	A= $\overline{K}$ -1,5 δ				

Примечания. М-магнитуда, D-эпицентральное расстояние, А- величина геохимического эффекта, $\bar{K}$ - фоновое значение, δ - дисперсия.

Установлено влияние сейсмического поля очагов слабых ($M > 2$) коровых ($H = 5-10$ км) землетрясений на геохимические компоненты минеральных вод объектов наблюдений, удаленных на расстояние $D \leq 30$ км.

По результатам геодинамических наблюдений (гидрогеодинамические скважины) процессов земной коры Армении выявлено, что за последние пять лет повысилась геодинамическая активность земной коры Ширакского тектонического блока, Центрально-Армянского тектонического комплекса, который дифференцируется на активные блоки: Апаран-Анкаванский, Мецаморский и Севанский.

По изменению макрокомпонентного ($\text{Na}^+, \text{Ca}^{2+}, \text{Mg}^{2+}, \text{Cl}^-, \text{SO}_4^{2-}, \text{HCO}_3^- \cdot \text{H}_4\text{SiO}_4$) и газового (CO_2) состава минеральных вод можно судить о повышении активности геодинамических процессов в Ераносском и Арабатском тектонических блоках.

Геохимические методы прогноза могут применяться как дополнительные с другими, прежде всего гидрогеодинамическим и деформационным.

Институт геологических наук НАН РА

Академик С. В. Григорян, Р. А. Пашаян, Л. В. Арутюнян

Гидрогеодинамические и геохимические предвестники землетрясений на территории Армении

Приводятся результаты гидрогеодинамических и геохимических предвестников, предшествовавших землетрясениям на территории Армении за последние пять лет. Рассмотрены сейсмичность региона и ее связь с изменениями уровня воды в гидрогеодинамических скважинах и геохимическим составом вод минеральных источников Бжни, Арзни, Азатаван, Веди и Суренаван.

**Ակադեմիկոս Ս. Վ. Գրիգորյան, Ռ. Ա. Փաշայան,
Լ. Վ. Հարությունյան**

Հայաստանի տարածքի երկրաշարժերի հիդրոերկրադինամիկական և հիդրոքիմիական նախանշանները

Հոդվածում ներկայացվում են վերջին 5 տարվա ընթացքում ՀՀ տարածքում երկրաշարժերին նախորդող հիդրոերկրադինամիկական և երկրաքիմիական նախանշանների արդյունքները: Դիտարկվել են տարածաշրջանի սեյսմիկությունը և դրա կապը հիդրոերկրադինամիկական հորատանցքերում ջրի մակարդակի փոփոխության և հանքային աղբյուրների երկրաքիմիական բաղադրության հետ (Բջնի, Արզնի, Ազատական, Վեդի և Սուրենական):

Academician S. V. Grigoryan, R. A. Pashayan, L. V. Harutyunyan

**Hydrogeodynamic and Geochemical Earthquake Precursors
in the Territory of Armenia**

The results of hydrogeodynamic and geochemical precursors observed before earthquakes in the territory of Armenia for the last five years are described. The seismicity of the region is considered and its connection with the changes of water level in hydrogeodynamic boreholes and geochemical composition of mineral springs water of Bjni, Arzni, Azatavan, Vedi and Surenavan.

Литература

1. *Пашаян Р. А., Саргсян А. З.* – Изв. НАН РА. Науки о Земле. 2006. Т. 19. №3. С. 30-36.
2. Гидрогеодинамические предвестники землетрясений. М. Изд. АН СССР. ИФЗ. 1984. 120 с.
3. *Пашаян Р. А.* Исследование гидрогеодинамических эффектов как предвестников землетрясений на территории Армении. Канд .дис. Ереван. 1998. 163 с.
4. *Асланян А. Т.* Региональная геология Армении. Ереван. Айпетрат. 1968. 408 с.
5. Геология Армянской ССР. Т. 9. Минеральные воды. Ереван. Изд. АН Арм. ССР. 1969. 523 с.
6. *Осика Д. Г.* Флюидный режим сейсмически активных областей. М. Наука. 1981.

MICROBIOLOGY

УДК 595

**G. S. Shahinyan, H. H. Panosyan, corresponding member of
NAS RA A. H. Trchounian**

Characterization of Lipase Producing Thermophilic Bacilli Isolated from Armenian Geothermal Springs

(Submitted 12/1 2015)

Keywords: *Lipase production, lipase activity, lipolytic activity, thermophilic bacilli, hot springs.*

Introduction. Lipases (E.C. 3.1.1.3) catalyze the hydrolysis of acyl-glycerol long chains. They are widely present in nature and are found in plants, animals and microorganisms [1]. Bacterial and fungal lipases are used in food, detergent, drug and cosmetics productions due to the unique ability of performing chemical biotransformation [2-4]. Bacterial lipases are stable and active in organic solutions, do not require co-enzymes, they have higher level of enantomeric excess and have wider range of substrate selection compared to inorganic catalyzers [5, 6].

Many representatives of the genus *Bacillus* and related genera isolated from diverse extreme environments like terrestrial geothermal springs and marine hydrothermal vents have been reported as the main source of thermostable lipases [7, 8]. Lipases from bacilli are easily produced and display high tolerance toward organic solvents, proving them useful in the synthesis of esters for food industry, cosmetics and biodiesel production. Many of them preserve their activity at extreme temperatures and pH, and therefore they can be applied in laundry formulations [9]. Thermostable enzymes are able to brave high temperature, thus endow longer half-life to the biocatalyst. Their ability to conduct various reactions to higher process rates because of increase in substrate diffusion coefficient and reduce viscosity at higher temperatures makes them a preferred choice over mesophilic sources [10]. Isolation of more thermostable lipase producers from high temperature environments such as hot springs is required in order to satisfy the need for thermozymes.

The aim of the presented work was the screening active lipase producers among the thermophilic bacilli strains isolated from different geothermal springs of Armenia, their identification based on phenotypic characteristics, as

well as the estimation of the effects of temperature and pH on their lipase production and activity.

Materials and methods. *Enrichment and selection of active lipase producers.* The 72 thermophilic bacilli strains used in this study have been previously isolated from the geothermal springs distributed in Armenia [11].

All isolates were preliminary screened for their lipolytic activity in the solid medium containing Tween 80 (1%), CaCl_2 (0.1%), peptone (0.5%), NaCl (0.5%) and agar (1%), pH 7.0 [12]. The plates were incubating at 55°C. The lipase activity was measured by the diameter of the precipitated area formed around the colony after 72 h of incubation. The lipase activity index (LAI) value, which represents the ratio between the halo diameter and the microbial colony diameter, were used to evaluate the production level of lipase [7, 13].

Phenotypic characteristics of selected isolates. Microbial colonies were described by color, size, shape, surface and margins on nutrient broth (NB) agar. The cell morphology, sporulation and motility were determined by light microscope (Motic 10).

The temperature range for growth was determined after incubation of isolates at temperature from 25 to 65°C with 10°C intervals. The pH dependence of growth was tested at pH range from 5 to 10. The anaerobic growth, catalase and oxidase activity, reduction of nitrate to nitrite, Voges-Proskauer reaction, formation of dihydroxyacetone and indol were determined according to [14]. The utilization of citrate and different substrates as carbon sources (D-glucose, L-arabinose and D-mannitol) was determined using the Simmon's and Hugh Leyfsona's medium, correspondingly [12]. The casein, starch and gelatin hydrolyses were tested by streak flask technique [12].

The identification of microorganisms was performed according to the Bergey's manual [15].

Effect of temperature and pH on lipase production. The optimal conditions for enzyme production were tested in an inducing medium with pH from 5.0-10 containing 1% Tween 80 as a substrate [16]. The plates were incubating at temperatures from 25 to 65 °C with 10°C intervals. The lipase activity index (LAI) was collaborated to find the optimal conditions for lipase production.

Determination of crude lipase activity at different pH and temperature. Lipase activity was measured by titrating free fatty acids released by hydrolysis of tween [12, 17]. Bacteria were cultured in the enrichment medium continuing 1% tween 80 overnight with shaking (150 rpm) at 55°C. The cultures were centrifuged at 9000 rpm for 5 min and supernatant was used as crude enzyme source. Reaction mixture containing 1.0 ml tween 80, 5.0 ml buffer (50 mM sodium acetate buffer (pH 5), 50 mM phosphate buffer (pH 6.0 and 7.0), 50 mM Tris-HCl (pH 8.0 and 9.0) or 50 mM sodium bicarbonate buffer (pH 10)) and 1.0 ml of crude enzyme was incubated with shaking (150 rpm) at temperature ranging between 25°C and 65°C with 10°C intervals for 30 minutes. The reaction was terminated by adding 1 ml ethanol and titrated with 0.1 N potassium hydroxide using phenolphthalein (0.1%) as an indicator. The control contained the same ingredients, but the reaction was terminated prior to

addition of the crude enzyme. One unit of lipase activity (U) was defined as the release of 1 μmol of fatty acid per min under mentioned conditions.

Statistical analysis. The standard deviation, standard error and mean values were calculated using Microsoft Excel 2010, R-Project. The p values were calculated using the R-Project online resource for statistical computing (<http://www.r-project.org/>).

Results and discussion. *Detection of active lipase producers.* In order to detect the lipase producing strains all bacilli cultures were cultivated on medium containing tween 80 as carbon and energy source. From 72 studied bacilli strains 20 were detected to be lipase producers. The corresponding results are represented in Table 1.

Table 1
Number of lipase producers among screened bacilli isolates
in the media containing Tween 8

Origin (hot spring location)	Number of screened isolates	Number of lipase producer strains
Jermuk	15	4
Uyts	16	4
Akhurik	10	6
Gyl	3	2
Arzakan	10	1
Qarvachar	10	4
Hanqavan	6	2
Darayurd	1	1
Bjni	1	0

Two most active lipase producers designed as strains Akhurik 106 and Akkurik 107 were selected for further studies. The LAI values for Akhurik 106 and Akhurik 107 were 2.0 cm and 1 cm, respectively (Fig. 1).

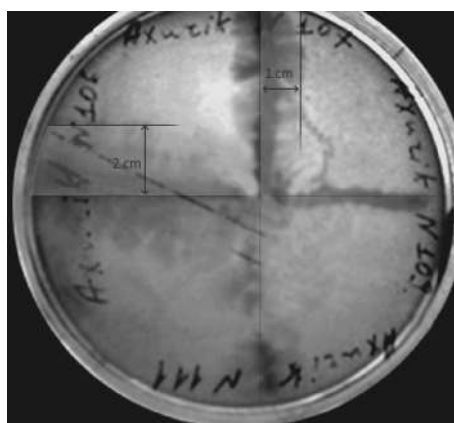


Fig. 1. Lipase production by the studied strains (Ca^{2+} salts of fatty acids precipitation zones around the colonies indicate lipase production). For the others to this and the other figures, see Materials and methods.

Phenotypic characteristics of selected isolates. On solid NB the strain Akhurik 106 formed irregular, white colored, opaque, flat, smooth surface, lobate margin, homogenous colonies, while the strain Akhurik 107 formed circular, milky colored, umbonate, homogenous colonies (Fig. 2).

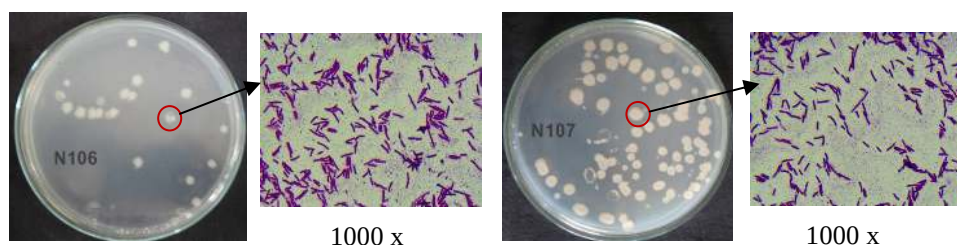


Fig. 2. Colonies and morphological characteristics of Akhurik 106 and Akhurik 107

Table 2
Some phenotypic characteristics of the studied isolates

Phenotypic characteristics	Akhurik 106	Akhurik 107	<i>B. subtilis</i> *
Cell size [μm]			
Width	1.5–2.0	1.0–2.0	0.7–0.8
Length	4.0–5.0	4.0–5.0	2.0–3.0
Motility	+	+	+
Endospore			
Form	Ellipsoidal	Ellipsoidal	Ellipsoidal
Location	Central	Central	Subterminal
Swell sporangia	-	-	-
Optimum temperature	55°C	55°C	28–30°C
Optimum pH	6.5–7.0	7.0–8.0	5.5–8.5
Oxidase	+	+	+/-
Voges-Proskauer test	-	+	+
Nitrate reduction to nitrite	-	+	-
Acid from			
D-Glucose	+	+	+
L-Arabinose	+	+	+
D-Manitol	+	+	+
Gas from glucose	-	-	-
Hydrolysis of			
Casein	-	-	+
Gelatin	+	+	+
Starch	+	+	+
Utilization of citrate	-	-	+
Formation of			
Indole	-	-	NA
Dihydroxyacetone	-	+	NA

**B. subtilis* was chosen as a reference strain [Bergey's Manual of Systematic Bacteriology, 2009].

Cells of the strains were Gram positive, motile rod shaped varying in length between 4.0 to 5.0 μm and in width between 1.0 to 2.0 μm (Fig. 2).

The cells formed central ellipsoid endospores. The strain Akhurik 107 was positive according to Voges-Proskauer test, formed dihydroxyacetone and reduced nitrite from nitrate. The isolates hydrolyzed starch and gelatin, but did not use citrate and did not form gas from glucose. Some phenotypic characteristics of the isolates are displayed in the Table 2.

The both strains showed ability to growth in the different range of temperature. The optimal temperature value was 55°C. The pH range for growth of strains Akhurik 106 and Akhurik 107 was from 6.0 to 9.0 with the optimum pH at 6.5-7.0 and 7.0-8.0, correspondingly.

Following to the criteria of Bergey's manual the isolates were identified as *Bacillus* sp. (Akhurik 106) and *Bacillus licheniformis* (Akhurik 107). The identification of the studied isolates up to species should be confirmed by 16S rDNA analysis.

Effect of temperature and pH on lipase production. The enzyme production by microorganisms depends on environmental conditions such as temperature and pH, and presence of inductors or repressors [16]. The pH of the medium plays a critical role for the optimal physiological performances of the bacterial cell and the transport of various nutrient components across the cell membrane aiming at maximizing the enzyme yields. In an order to optimize the conditions for lipase production by selected bacilli the LAI were evaluated in Petri dishes containing the inducing medium with pH from 5.0-10. Incubation was performed at optimum growth temperature of the strains. The results indicated that the strains able to produce lipase from wide range of pH (from 5.0 to 10), but the highest lipase production (LAI 1.4) of the *Bacillus licheniformis* Akhurik 107 occurred in the medium with pH 7.0. For the strain *Bacillus* sp. Akhurik 106 the highest lipase production (LAI 1.5) observed at pH 6.0 and 7.0 (Fig. 3). Willerding A.L. et al. [16], showed the highest lipase production for 24 different bacterial strains observed at pH 8.0 and 30°C. The optimal production of lipase by *Bacillus* strain J33, *B. megaterium* AKG-1 and *B. thermocatenuatus* DSM 730 was also reported at pH 8.0, 7.0-8.0 and 7.4, respectively [18, 19]. Even though the activity values are comparable to the data from literature, the lipases produced by the studied strains remain active in wide pH range.

The lipase production levels at optimal pH varied depending on the temperature and incubation time. The lowest value of LAI was detected at 25°C temperature after 24 hours incubation. The LAI values reached its maximum (1.5 and 1.6 for *Bacillus* sp. Akhurik 106 and *Bacillus licheniformis* Akhurik 107, correspondingly) at 55°C temperature after 48 h of incubation (Fig. 4).

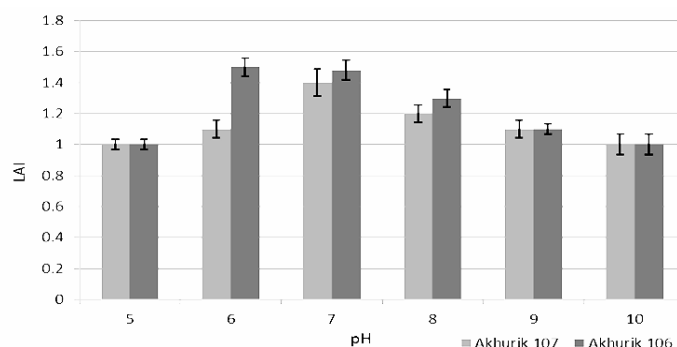


Fig. 3. Lipase production rates at different pH values by the studied bacilli expressed with LAI.

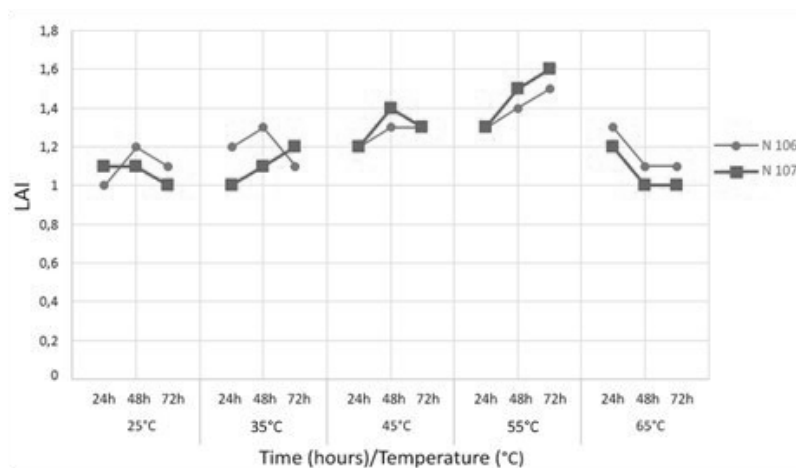


Fig. 4. Lipase activity index (LAI) up to 72 hours at different temperatures.

Sidhu et al. 1998 [20] showed that thermostabile lipase production by thermophilic *Bacillus* sp. RS-12 was growth-associated and at the medium contained 0.5% Tween 80 gave a maximal yield of the enzyme at 50°C cultivation temperature. *B. thermoleovorans* ID-1, isolated from hot springs in Indonesia, showed high extracellular lipase production at 65°C [12]. The results indicated that optimal conditions for lipase production of the strains *Bacillus* sp. Akhurik 106 and *Bacillus licheniformis* Akhurik 107 were pH 6.0-7.0 and 55°C cultivation temperature.

Effect of pH and temperature on lipase activity. In order to optimize the lipase activity of the strains the effect of the pH and temperature on lipase activity of the strains was determined. The crude lipase activity was studied at the different range of pH (5-10) and optimal growth temperature of the strains. The highest lipase activity levels (0.89 U/ml and 0.75 U/ml for the strains *Bacillus* sp. Akhurik 106 and *Bacillus licheniformis* Akhurik 107, respectively) were defined at pH 6.5 - 7.0 (Fig. 5).

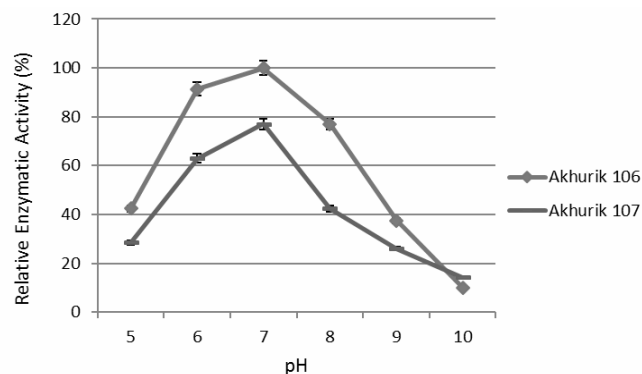


Fig. 5. Effect of the different pH on the lipase activity of studied strains. The maximal enzymatic activity (0.89 U/ml) at pH 7.0, for *Bacillus* sp. Akhurik 106 was defined as 100%.

Assuming that enzyme is stable at elevated temperatures, the productivity of the reaction can be enhanced greatly by operating at a relatively high temperature. Therefore, the optimal lipase activity temperature has been determined. The temperature optimum for lipase activity at defined optimal pH coincides with the growth optimal temperature of the strains. Thus, the highest lipase activity for both strains was displayed at 55°C (Fig. 6), but the crude enzyme remained active in temperature range of 25 to 65°C.

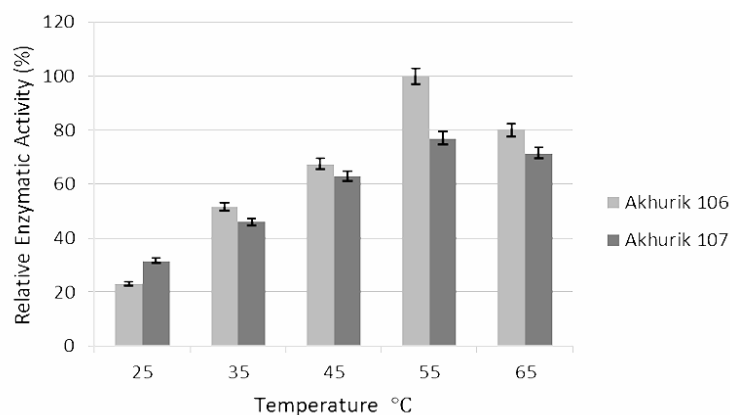


Fig. 6. Effect of the different temperature on the lipase activity of studied strains. The maximal enzymatic activity (0.89 U/ml) for *Bacillus* sp. Akhurik 106 at 55°C, pH 7.0 was defined as 100%.

The maximum values of crude enzyme activity were 0.89 U/ml and 0.75 U/ml for *Bacillus* sp. Akhurik 106 and *Bacillus licheniformis* Akhurik 107, respectively in temperature of 55°C and pH 7.0.

The lipase activity of different bacterial groups at wide range of pH and temperature has been reported [7]. Lee et al. 1999 [12] determined optimal lipase activity of *B. thermoleovorans* ID-1 at pH 7.5. The thermostable lipase produced by *Bacillus* sp. J 33 had a high activity at pH 7.6 and 55°C [21]. One

of the comparably notable thermostable lipase was isolated by Wang et al. 1995 [22] from a *Bacillus* strain. This enzyme had maximum activity at 60°C. An extracellular *Bacillus* lipase isolated by Sidhu et al. 1998 [19] had an activity optimum at 50°C. The crude lipase from the studied strains, compared to the literature data, has an advantage of operating at wide range of pH and temperature.

The results indicated that studied *Bacillus* strains might be prospective for various biotechnological applications and industry as lipases producers. Purification and more detail investigation of the isolated bacilli lipase are planning to be performed.

Acknowledgments. The work was partially supported by Basic support from Ministry of Education and Science of Armenia and by grant from the Armenian National Science and Education Fund (ANSEF-2011 Microbio-2493) based in New York, USA.

Yerevan State University
e-mail: grigorshah@gmail.com

**G. S. Shahinyan, H. H. Panosyan, corresponding member
of NAS RA A. H. Trchounian**

Characterization of Lipase Producing Thermophilic Bacilli Isolated from Armenian Geothermal Springs

72 bacilli strains previously isolated from different geothermal springs of Armenia were screened for their lipase production. Two most active lipase producing bacilli strains designed as *Bacillus* sp. Akhurik 106 and *Bacillus licheniformis* Akhurik 107 were selected and characterized based on morphological, cultural, biochemical and physiological properties. The temperature of 55°C and pH 6.5–7.0 were defined to be the optimal conditions for lipase production. The activities of crude enzymes of these strains were 0.89 U/ml and 0.75 U/ml at the optimum pH and temperature, respectively. These strains might be used as lipase producers.

**Գ. Ս. Շահինյան, Հ. Հ. Փանոսյան, ՀՀ ԳԱԱ
թղթակից անդամ Ա. Հ. Թռչունյան**

Հայաստանի երկրաջերմային աղբյուրներից անջատված լիպազ արտադրիչ ջերմասեր բացիլների շտամների ուսումնասիրությունը

Հայաստանի տարածքում գտնվող տարբեր երկրաջերմային աղբյուրներից նախապես անջատված բացիլների 72 շտամներում ուսումնասիրվել է լիպազ սինթեզելու ունակությունը: Երկու, առավել ակտիվ լիպազ արտադրիչ շտամներն ընտրվել են հետագա ուսումնասիրությունների նպատակով: Վերջիններս ըստ ձևաբանական, կուլտուրային, կենսաքիմիական և ֆիզիոլոգիական հատկանիշների նույնականացվել են որպես *Bacillus* sp. Akhurik 106 և *Bacillus licheniformis* Akhurik 107. Պարզվել է, որ լիպազի սինթեզի համար ջերմաստիճանային օպտիմումը 55°C է, իսկ pH-ի՝ 6.5–7.0. Այդ պայմաններում չմաքրված ֆերմենտների ակտիվությունները *Bacillus* sp. Akhurik 106 և *Bacillus licheniformis* Akhurik 107 շտամների համար կազմել են համապատաս-

խանաբար 0.89 Մ/մլ և 0.75 Մ/մլ: Այդ շտամները կարող են կիրառվել որպես լիպազ-
ների արտադրիչներ:

**Г. С. Шагинян, О. А. Паносян, член-корреспондент
НАН РА А. А. Трчунян**

**Изучение липаз-продуцирующих термофильных штаммов
бацилл, изолированных из геотермальных источников Армении**

Исследованы 72 штамма бацилл, ранее изолированных из разных геотермальных источников Армении, на способность синтеза липаз. Были отобраны два наиболее активных липаз-продуцирующих штамма. По морфологическим, культуральным, биохимическим и физиологическим свойствам штаммы были идентифицированы как *Bacillus* sp. Akhurik 106 и *Bacillus licheniformis* Akhurik 107. Оптимальная температура синтеза липаз была 55°C, а pH 6.5–7.0. При этих условиях активность неочищенных ферментов штаммов *Bacillus* sp. Akhurik 106 и *Bacillus licheniformis* Akhurik 107 составила 0.89 и 0.75 Е/мл, соответственно. Эти штаммы могут быть использованы как продуценты липаз.

References

1. Villeneuve P., Muderhwa J. M., Graille J., Haas M. J. - J. Mol. Catal. B: Enzym. 2000. V. 9. P. 113-148.
2. Grbavcic S. Z., Dimitrijevic-Brankovic S. I., Bezbradica D. I., Siler-Marinkovic S. S., Knezevic Z. D. - J. Serb. Chem. Soc. 2007. V. 72. P. 757-765.
3. Gupta N., Shai V., Gupta R. - J. Proc. Biochem. 2007. V. 42. P. 518-526.
4. Franken L.P.G., Marcon N.S., Treichel J., Oliviera D., Freire D.M.G., Dariva C. - J. Food Bioproc. Technol. 2009. V. 3(4). P. 511-520.
5. Andualema B., Gessesse A. - J. Biotechnology. 2012. V.11. P. 100-118.
6. Sharma R., Thakur V., Sharma M., Birkeland N. K. – In: Shatyanarayana T., Littlechild J., Kawarabayasi Y. (eds), Thermophilic microbes in environmental and industrial biotechnology: *Biotechnology of thermophiles*. New York. Springer. 2013. P. 905-927.
7. Sharma R., Chisti Y., Banerjee U.Ch. – J. Biotechnol. Adv. 2001. V. 19. P. 627-662.
8. Ahmed E.H., Raghavendra T., Madamwar D. A – J. Appl. Biochem. Biotechnol. 2010. V. 160. P. 2102-2113.
9. Guncheva M., Zhiryakova D. – J. Mol. Catalysis B: Enzymatic. 2011. V. 68. Issue 1. P. 1-21.
10. Ebrahimpour A, Khormania A, Lai O. M., Tanduba C. J., Voon T.S., Mukhlio S. – Electron. J. Biotechnol. 2010.
11. Panosyan H. – In: Abstr. Book of International Scientific Workshop on “Trends in Microbiology and Microbial Biotechnology”. Yerevan. YSU press. 2014. P. 32.
12. Netrusov A. I. – Guide to Practical Training on Microbiology. Moscow. Academy Publishing. 2005. P. 608 (Russian).
13. Chaves G.M., Cavalcanti M.A., Porto A. L. F. – Brazil. J. Microbiol. 2003. V. 34. N 3. P. 197–202.
14. Gordon R., Haynes W., Pang Ch.-N. The genus *Bacillus*, United States Department of Agriculture Handbook no. 427. 1973. P. 283.

15. *Svec P., Devriese L.A., Genus I.* – In: De Vos P., Garrity G.M., Jones D., Krieg N.R., Ludwig W., Rainey F.A., Schleifer K.H., Whitman W.B., editors. *Bergey's manual of systematic bacteriology*. 2nd ed. V. 3. 2009. New York. Springer. P. 594-607.
16. *Willerding A.L., de Oliveira L.A., Moreira F.W., Germano M.G., Chagas Jr. A.F.* – J. Enzyme Research. 2011. SAGE-Hindawi. V. 2011. P. 1-5.
17. *Lee D.-W., Koh Y.-S., Kim K.-J., Kim B.-C., Choi H.-J., Kim D.-S., Suhartono M.T., Pyun Y.-R.* – FEMS Microbiol. Lett. 1999. V.179. P. 393-400.
18. *Sekhona A., Dahiya N., Tewari R. P., Hoodal G. S.* – Ind. J. Biotechnol. 2006. V. 5. P. 179-183.
19. *Nawani N., Dosanjh N., Kaur J.* – Biotechnol. Lett. 1998. V. 20. P. 997-1000.
20. *Sidhu P., Sharma R., Soni S. K., Gupta J. K.* – Folia Microbiol. 1998. V. 43. P. 51-54.
21. *Nawani N., Kaur J.* – J. Mol. Cell Biochem. 2000. V. 206. P. 91-96.
22. *Wang Y., Srivastava K.C., Shen G.J., Wang H.Y.* – J. Ferment. Bioeng. 1995. V. 79. P. 433-438.

БОТАНИКА

УДК 634.0.11

Член-корреспондент НАН РА Ж. А. Варданян

**Дендрологические особенности верхнего и нижнего
пределов распространения древесных растений Армении**

(Представлено 15/IX 2014)

Ключевые слова: дендрофлора, древесные растения, верхний и нижний пределы, уязвимость, лесные экосистемы.

Произрастание древесных растений у верхнего альпийского и нижнего степного пределов их распространения требует наличия соответствующих факторов роста. Для существования древесных растений в горных условиях известны два предела: альпийский (верхний) и степной (нижний). Во всех случаях проникновение их за существующие пределы ограничивается почвенно-климатическими условиями. Как правило, альпийская граница обуславливается коротким вегетационным периодом и недостатком тепла в летние месяцы, а степная, наоборот, недостатком влаги – неудовлетворительное количество осадков, низкая относительная влажность воздуха и соотношение осадков и испарения.

В условиях южнокавказского экорегиона, где и находится Армения, имеются две четко выраженные границы распространения древесных растений: верхняя и нижняя. Верхняя (альпийская) проходит на высоте 2500-2700 м над ур. м. Эта граница так же отчетливо выражена на отдельных хребтах Малого Кавказа. В историческое время под влиянием климатических и антропогенных факторов, кроме массового уничтожения лесов, были нарушены также их вертикальные границы. Исторические, археологические, палеоботанические и другие данные свидетельствуют о том, что лесопокрытая площадь Армении в прошлом была примерно в 2,5-3 раза больше и еще в первом тысячелетии до н. э. составляла около 35% [1]. В настоящее время в северо-восточных лесорастительных районах верхняя граница проходит на высотах 1900-2000 м над ур. моря. В центральных районах, где распространены островные порослевые древостои с преобладанием из *Quercus macranthera*, верхняя граница проходит на высотах 2400-2500 м, завершаясь в отдельных частях кривоствольными древостоями из *Betula litwinowii*. Что касается юго-восточной Армении, то здесь

она проходит на высотах 2500-2600 м. Хотя на Кавказе наблюдается континентализация климата, тем не менее за последние 200-300 лет под влиянием интенсивного антропогенного воздействия верхняя граница снизилась везде на 150-200 м, а в отдельных случаях (юго-восточная Армения) – до 300-500 м. Поэтому гораздо беднее дендрофлора представлена на верхнем пределе распространения древесной растительности, т. е. в экстремальных условиях местопроизрастания на высотах 2500-2700 м, где единичные низкорослые деревья и кустарники (около 30 видов) образуют субальпийские криволесья или небольшие заросли низкорослых кустарников и кустарничков (табл. 1): *Juniperus hemisphaerica*, *Rhododendron caucasicum*, *Vaccinium uliginosum*, *Rubus idaeus*, *Rhamnus depressa* и др. [2, 3]. Нижняя граница древесной растительности в республике проходит в виде полосы «светлых лесов», которые являются переходными между поясом аридных (можжевеловых и лиственных) редколесий и полупустынь. Как закономерное явление на нижней границе количество годовых осадков совпадает с количеством испаряемости. Нижняя граница леса в северо-восточных районах проходит на высоте 550-700 м над ур. м., в центральном регионе – 1450-1550 м, а в юго-восточном – 600 м над ур. м. Древесные растения характеризуются низким ростом: деревья – небольшой высотой, редким стоянием на фоне ксерофильной травянистой растительности в большей части полынной полупустыни [3, 4].

На нижней границе распространения древесных растений в предгорном и нижнегорном поясах дендрофлора представлена 177 видами (табл. 1), что составляет около 55 % общего состава дендроразнообразия республики.

Таблица 1

Дендрологическая характеристика верхнего и нижнего пределов распространения древесной растительности Армении

Вертикальные пределы	Характер древесной растительности по вертикальным поясам	Пределы вертикального распространения м над ур. м.	Количество видов		В том числе по жизненным формам				
			число	% от общ. числа видов дендрофлоры Армении	деревья	кустарники	кустарнички	полукустарники	Лианы
Нижний	Сухой субтропический	до 700 (800)	87	26,9	44	25	-	13	5
	Предгорный и полупустынный	700-1000(1200)	177	54,8	54	72	9	34	9
	Аридных редколесий	1000 (1200) - 1500 (1600)	202	62,5	85	71	-	43	3
Верхний	Смешанных широколиственных Лесов	1900 - 2200 (2400)	219	67,8	93	82	13	28	3
	субальпийских редколесий	выше 2200 (2400)	34	10,5	11	13	3	7	-

Так, на высотах около 400 м над ур. м. – в наиболее низинных местообитаниях в долинах р. Аракс (юго-восточная Армения) встречаются в основном пустынные элементы, приуроченные к руслам рек, или же рассеянно встречаются единичные особи *Pistacia mutica*, *Punica granatum*, *Ephedra distachya*, *Atraphaxis spinosa*, *Rhamnus pallasii* и др., а также *Cotinus coggygria*, *Amygdalus nairica*, *Cercis griffithii*, *Zygophyllum atriplicoides* и др. В северо-восточных, сравнительно влажных лесорастительных условиях – в ущельях рек Агстев и Дебет произрастает ряд сухих субтропических видов древесных: *Ficus carica*, *Diospyros lotus*, *Periploca graeca*, *Hedera helix* и др.

При изучении способов размножения, роста по высоте и диаметру и предельного возраста древесных растений как у верхнего, так и нижнего пределов их распространения было выбрано несколько наиболее характерных и богатых в дендрологическом отношении объектов (местообитаний): юго-восточный, сравнительно сухой лесорастительный регион – бассейны р. Мегри (до 750 м и выше 2100 м) и р. Арпа (до 1100 м и выше 220 м) и частично центральный – верховье р. Мармарик (выше 2100 м). Дендроклиматические условия у альпийской границы распространения древесных растений, по данным метеорологической станции Джермука (2066 м), характеризуются следующими показателями: продолжительность вегетационного периода 120-150 дней, средняя температура воздуха в июле 15,1⁰ С, среднегодовое количество осадков 700-800 мм. Эти показатели вполне обеспечивают влагой древесные растения, а фактор температуры (тепла) находится в норме минимума.

По литературным данным [5-7] интенсивность роста древесных растений весьма слабая, как у альпийской, так и у полярной границы, что обусловлено недостатком летнего тепла. По данным К. Шротера [5], в Швейцарских Альпах на высоте 2230 м ширина годичного кольца у рододендрона (*Rhododendron ferrugineum*) в возрасте 109 лет составляла 0.016 мм. Г.И. Галазий [6] отмечает, что *Abies sibirica* у верхнего предела распространения древесной растительности в верховьях р. Лангетуй имел в возрасте 35 лет годичный прирост в высоту 7.8 см, по диаметру 0.13 см, а *Pinus sibirica* в верховьях р. Быстрой в возрасте 300 лет – среднегодовой прирост в высоту 1.5 см, по диаметру 0.07 см.

Из приведенных данных (табл. 2) видно, что прирост по высоте у большинства видов древесных на верхней границе распространения (верховья р. Арпа) весьма незначителен. Особенно низок он у 150-летнего *Juniperus polycarpus* – 1.1 см в год. Наибольший прирост – 6.0 см отмечен у *Sorbus aucuparia* в возрасте 17 лет (Джермукское ущелье), однако с возрастом он также падает до 3-4 см в год. Весьма низок прирост у растений по диаметру, особенно у кустарников, например, у *Daphne glomerata* – 0.04 см.

Особенности роста древесных растений у нижнего предела распространения нами изучены в основном в аридных “светлых” редколесьях Южной Армении, главным образом, на высотах 700-1200 м над ур. м. Климатические условия нижнего предела распространения древесных растений, по данным метеостанции Арени (нижнее течение р. Арпа), таковы: среднегодовая температура 10.8⁰С, продолжительность вегетационного

периода 200-220 дней, средняя температура воздуха в июле 25.9⁰С, абсолютный максимум 40⁰С, годовая сумма осадков 350-400 мм.

Таблица 2

**Дендрологическая характеристика древесных растений
у верхнего предела распространения**

Название вида	Место исследования	Состояние Растения	Лет	Высота, см	Диаметр, см	Среднего-дичный прирост, см	
						по высоте	по диаметру
<i>Betula litwinowii</i> Береза Литвинова	Джермукское ущ., 2300 м ущ. р. Мармарик, 2250 м	здоровое суховершинит	8 38	58 115	1,2 5,2	7,4 3,0	0,15 0,12
<i>Populus tremula</i> Осина	Ущ. р. Мармарик, 2100 м	здоровое	12	280	2,2	2,3	0,2
<i>Acer trautvetteri</i> Клен высокогорный	Мегринский хр., 2150 м	здоровое	42	140	5,0	3,5	0,011
<i>Sorbus aucuparia</i> Рябина обыкновенная	Джермукское ущ., 2250 м Мегринский хр., 2380 м	здоровое суховершинит	17 27	100 200	1,2 2,7	7,5 6,0	0,1 0,05
<i>S. subfusca</i> Р. Буроватая	Джермукское ущ., 2350 м	здоровое	21	110	1,5	5,2	0,07
<i>Juniperus polycarpus</i> Можжевельник многоплодный	Елегисское ущ., 2400 м	здоровое	150	170	14,0	1,1	0,01
<i>J. hemisphaerica</i> М. низкорослый	Селимский пер., 2650 м	здоровое	40	90	1,5	2,2	0,04
<i>Quercus macranthera</i> Дуб крупнопыльниковый	Джермукское ущ., 2300 м	суховершинит	35	110	4,0	3,1	0,11
<i>Daphne glomerata</i> Волчник скупенный	Варденинский хр.	суховершинит	11	40	0,5	3,6	0,04

Лето засушливое, средняя относительная влажность воздуха часто снижается до 30%. Высокие летние температуры, малое количество осадков за вегетационный период и низкая относительная влажность воздуха обуславливают высокую испаряемость и недостаток влаги в почве. Поэтому в этих условиях у нижнего предела распространения древесные растения низкорослые и с сильно развитой корневой системой.

Одним из наиболее стойких компонентов аридного редколесья и других типов ксерофильной растительности является *Rhamus pallasii*, у которого отмечается самый медленный рост. Медленным ростом в высоту отличаются также можжевельник – 0.76 см, фисташка туполистная – 9.0 см, миндаль – 5.1 (табл. 3).

Таблица 3

Дендрологическая характеристика ксерофильных древесных растений у нижнего предела распространения

Название Вида	Место иссле-дова- ния	Состояние растения	Возраст, лет	Высота, см	Диаметр, см	Средне- дичный прирост, см	
						по высоте	по диаметру
<i>Pistacia mutica</i> Фисташка туполистная	Ущелье р. Арпа 1050 м	здоровое	20	180	3,8	9,0	0,1
<i>Amigdalus fenzliana</i> Миндаль Фенцля	Ущелье р. Арпа, 1050 м	здоровое	16	85	2,6	5,1	0,16
<i>Paliurus spina- christi</i> Держи-дерево	Ущелье р. Мегри, 750 м	здоровое	32	220	5,5	6,8	0,17
<i>Rhamnus pallasii</i> Жостер Палласа	Ущелье р. Арпа, 980 м	суховершинит здоровое	15 28	60 120	1,5 2,0	4,3 4,0	0,1 0,07
<i>Jasminum fruticans</i> Жасмин кустарниковый	Ущелье р. Арпа, 1100 м	здоровое	20	45	0,8	2,2	0,04
<i>Cotinus coggygia</i> Скумпия	Капанское ущелье, 750 м	здоровое	32	150	7,5	5,0	0,23
<i>Ephedra procera</i> Хвойник высокий	Ущелье р. Арпа, 1100 м	здоровое	30	120	2,0	4,0	0,06
<i>Lonicera iberica</i> Жимолость иберийская	Капанское ущелье, 750 м	здоровое	25	105	2,0	4,0	0,08
<i>Halimodendron halodendron</i> Чингиль серебристый	Ущелье р. Арпа, 1100 м	здоровое	28	120	2,1	4,0	0,07
<i>Juniperus foetidissima</i> Можжевельник острочешуйчатый	Мегри, 750 м	здоровое	170	130	7,8	0,76	0,01

Сравнительно интенсивным ростом в высоту характеризуются держи-дерево – 6.8 см, чингиль серебристый и жимолость иберийская – по 4.0 см. В этих условиях древесные растения характеризуются значительно пониженным ростом по диаметру – по 0.07 см у *Rhamnus pallasii* и *Halimodendron halodendron* и 0.08 см – у *Lonicera iberica*.

У некоторых видов кустарников можно установить следующую закономерность в росте: в молодом возрасте он достаточно интенсивный, а с

возрастом скорость роста уменьшается. По всей вероятности, это является результатом приспособления к борьбе с травяным покровом ксерофильной растительности. Пока всходы древесных растений не перегонят травяной покров, они интенсивно растут в высоту. Вместе с тем необходимо учитывать то, что общий медленный рост в высоту и по диаметру у древесных растений является результатом недостатка влаги.

Сравнивая рост древесных растений у верхнего и нижнего пределов распространения, следует отметить, что в первом случае прирост в высоту и по диаметру значительно меньше, чем во втором. Очевидно, недостаток тепла и короткий вегетационный период являются более лимитирующими факторами роста древесных растений, чем недостаток влаги при длительном вегетационном периоде. В результате этих постоянно отрицательно действующих факторов на верхней и нижней границах распространения общим в развитии древесных растений является короткий срок жизни.

Кроме того, у деревьев и кустарников на степной границе превалирует вегетативное размножение, однако почти у всех видов древесных растений на нижнем пределе наблюдаются и редкие семенные всходы. Недостаток влаги и развитие травяного покрова ограничивают массовое семенное возобновление древесных растений, однако у них развита способность размножаться вегетативно – порослью от пня и иногда корневыми отпрысками.

При изучении вертикальных границ распространения как лесных формаций в целом, так и отдельных представителей дендрофлоры, в частности, нами выявлено [2, 3], что высотные пределы распространения отдельных видов в различных лесорастительных условиях в пределах республики неодинаковы. Это обусловлено, в первую очередь, биоэкологическими особенностями данного вида, экологическими условиями местопроизрастания, а также наличием и характером растительных формаций и группировок, содержащих древесные растения. Одновременно выяснено, что некоторые виды, на территории Армении не обладающие высокой экологической пластичностью и не поднимающиеся в горы до альпийского предела распространения древесной растительности, в других горных регионах Кавказа и Средней Азии, особенно на Памиро-Алае, по отдельным убежищам поднимаются до высоты около 3000 м над ур. м. [8]. Типичным примером могут служить *Rhus coriaria* (до 2900 м), *Acer laetum* в Кахетии растет на высоте 1700 м, *Hippophae rhamnoides* на Памиро-Алае – до 3800 м, *Ficus carica* – до 1900 м, *Salix wilhelmsiana* – до 3500 м и др.

Наши исследования подтверждаются общими закономерностями [9], а именно: с продвижением к востоку пределы абсолютных высот произрастания растительности повышаются.

В последнее время наблюдается некоторое изменение климата, а в ближайшие десятилетия прогнозируются глобальные изменения в его масштабах, в результате чего создастся угроза почти для всех природных экосистем Армении. В ближайшие 50-100 лет намечаются повышение средней температуры на 2-3⁰С и снижение атмосферных осадков на 10-15%. В этом случае произойдет смещение и продвижение природных экосистем вверх по горному профилю на 200-400 м в зависимости от особенностей

орографических условий данного региона [10, 11]. Это, конечно, приведет к резкому изменению флористического состава и площадей, занимаемых теми или иными видами растений, в первую очередь древесными, что, безусловно, отразится на биоразнообразии в целом [11, 12].

Уязвимость лесных экосистем Армении от воздействия прогнозируемых изменений климата в различных лесорастительных регионах республики выразится по-разному. Так, в северо-восточном регионе для верхней границы леса сложатся благоприятные условия, т.е. ожидается ее повышение на 150-200 м. Благодаря высоким адаптационным способностям для большинства лесных пород на высотах от 1600 до 1750 м над ур. м. Существенных изменений не произойдет. Нижняя граница леса на южных склонах, где в основном аридные редколесья, по всей вероятности, начнет подниматься, параллельно в этих сообществах древесной растительности начнет увеличиваться количество представителей полупустыни.

В центральном регионе для верхней границы леса прогнозируемые изменения климата будут благоприятными, и следует ожидать ее повышения. В этом лесном регионе наиболее уязвимыми окажутся южные склоны по нижней границе леса (1450-1550 м), где ожидается наступление степной растительности и вытеснение порослевых дубовых формаций.

Что касается юго-восточного лесного региона, то здесь наиболее уязвимой окажется нижняя граница древесной растительности. Здесь ожидаются ухудшение условий для семенного возобновления древесных растений, усиление проникновения полупустынных видов растений, расширение площадей грабовых и дубовых лесов на 100-150 м. Для верхнего предела леса условия станут благоприятными, и следует ожидать его повышения.

Таким образом, по Армении наиболее уязвимой оказывается нижняя граница (нижний лесной пояс), где изменения могут произойти в течение ближайших 50-100 лет, а для верхней границы леса, где условия станут благоприятными, потребуется несколько столетий ввиду медленного естественного лесовозобновления.

Институт ботаники НАН РА

Член-корреспондент НАН РА Ж.А. Варданян

Дендрологические особенности верхнего и нижнего пределов распространения древесных растений в Армении

Проведено сравнительное изучение роста и дендрометрических параметров древесных растений у верхнего и нижнего пределов их распространения. Показано, что прирост по высоте и диаметру у верхнего предела значительно меньше, чем у нижнего. Выявлено, что высотные границы распространения отдельных видов в различных лесорастительных условиях в пределах республики неодинаковы, что обусловлено, в первую очередь, геоморфологическими и орографическими условиями данного региона. Обсуждаются также вопросы уязвимости лесных экосистем Армении, обусловленной воздействием прогнозируемых изменений

климата. Наиболее уязвимой оказывается нижняя граница лесной растительности, где изменения могут произойти в течение ближайших 50-100 лет.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ժ. Հ. Վարդանյան

Հայաստանում ծառաբույսերի դենդրոլոգիական առանձնահատկությունները տարածման վերին և ստորին սահմաններում

Կատարվել է ծառաբույսերի տարածման վերին և ստորին սահմաններում աճի ու դենդրոմետրիկ ցուցանիշների համեմատական ուսումնասիրություն: Ցույց է տրված, որ ծառերի ու թփերի աճը ըստ բարձրության և բնի (ցողունի) տրամագծի վերին սահմանում զգալիորեն քիչ է, քան տարածման ստորին սահմանում: Բացահայտված է նաև, որ առանձին տեսակների ուղղաձիգ տարածման սահմանները հանրապետության տարբեր անտառաձման պայմաններում տարբեր է, որը պայմանավորված է, առաջին հերթին, տվյալ տարածաշրջանի գեոմորֆոլոգիական և լեռնագրական առանձնահատկություններով: Աշխատանքում քննարկվում են նաև Հայաստանի անտառային էկոհամակարգերի խոցելիության հարցերը՝ պայմանավորված կլիմայի կանխատեսվող փոփոխությունների ազդեցությամբ: Առավել խոցելի է գնահատվում անտառային բուսականության ստորին սահմանը, որտեղ փոփոխությունները կարող են տեսանելի լինել արդեն առաջիկա 50-100 տարիներին:

Corresponding member of NAS RA Zh. Vardanyan

The Features of the Upper and Lower Limits of Distribution of Woody Plants in Armenia

Comparative research of growth and dendrometrical characteristics of woody plants at their upper and lower distribution limits is done. It is shown, that there is sensibly lesser growth by height and diameter at the upper limit than at the lower. It is found that the altitude limits of distribution for particular species in different forest conditions of the republic are not similar, which is first of all connected with geomorphology and orography of the particular region. The issues relating to the vulnerability of forest ecosystems of Armenia resulting from the predictable climate change are discussed too. The most vulnerable is the lower forest limit, which can be affected by changes in the following 50-100 years.

Литература

1. Хуришудян П. А. В сб.: Проблемы изменения климата. Ереван. 1999. С. 110-122 (на арм. яз.).
2. Варданян Ж. А. Деревья и кустарники Армении в природе и культуре. Ереван. 2003. 367 с.
3. Варданян Ж. А. - Биолог. журн. Армении. 1989. Т. 42. N 3. С. 207-213.
4. Гулисашвили В. З. – Лесоведение. 1976. N 3. С. 37-43.
5. Schroeter C. Das Pflanzenleben der Alpen. Zurich. 1926. 1288 S.
6. Галазий Г. И. - Тр. БИН АН СССР, сер. 3 (геоботаника). 1954. Т. 9. С. 210-329.
7. Гулисашвили В. З. - Изв. Всес. геор. общ., 1958. Т. 90. N 2. С. 158-163.

8. *Запрягаева В. И.* - Лесные ресурсы Памиро-Алая. Л., 1976. 595с.
9. *Агаханянц О. Е.* Аридные горы СССР. Природа и географические модели флорогенеза. М. 1981. 270 с.
10. Биоразнообразие Армении. Первый национальный доклад. Ереван. 1999. 144 с. (на арм. яз.).
11. *Файвуш Г. М.* - Проблемы изменения климата. Ереван. 2003. С. 186-190.
12. *Агасян А. Л., Калашиян М. Ю., Карапетян В. О., Налбандян А. В., Файвуш Г. М., Ханджян Н. Л., Хуришудян П. А.* В сб.: Проблемы изменения климата. Ереван. 1999. С. 89-101.