ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2014

Ереван Երևան Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone:(37410)56-80-67URL:http://elib.sci.ame-mail: rnas@sci.am

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

C O N T E N T S

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно-линейных функций

(Представлено 16/ IV 2014)

Ключевые слова: *общая система Франклина, базисность, пространство Харди.*

В недавней работе авторов [1] определена и исследована система из кусочно-линейных функций, определенных на R. Напомним определение этой системы.

Определение 1. *Последовательность (разбиение)* $T = \{t_n : n \geq 0\}$ *называется допустимой (на* R*), если* T *всюду плотно в* R *и* $t_i \neq t_j$, *когда* $i \neq j$.

Для допустимой последовательности $T = \{t_n : n \geq 0\}$ и $n \geq 1$ обозначим $T_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = T_n$. Через S_n обозначается пространство непрерывных на R функций f с носителем $[\tau_0^n; \tau_{n+1}^n]$ и линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$, $i = 0,1,...,n$. Очевидно, что $\dim S_n = n$ и $S_n \subset \subset S_{n+1}$. Следовательно, для $n \geq 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1}, и $\| f \|_2 = 1$. Эта функция называется n-й функцией Франклина на R^1, соответствующей разбиению T.

Определение 2. *Общая система Франклина на* R^1 $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ *соответ - ствующая разбиению* T, *определяется по правилу:* $f_1(x)$ *– это норми - рованный в* $L_2(R)$ B*-сплайн, соответствующий точкам* t_0, t_1, t_2, *и для* $n \geq 2$ *функция* $f_n(x)$ *является* n*-й функцией Франклина, соответствующей разбиению* T.

Из всюду плотности на R последовательности T следует, что $\bigcup_{n\geq 2} S_n$ всюду плотно в $L_p(R)$, $1 \leq p < \infty$. Поэтому система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_p(R)$, $1 \leq p < \infty$.

Через $K_n(t,\tau)$ обозначим n-е ядро Дирихле системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е.

$$K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n} f_k(t) f_k(\tau). \tag{1}$$

В работе [1] доказано, что

$$\int_R |K_n(x,t)|\,dt \le 3, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-t|>\delta} |K_n(x,t)|\,dt = 0, \text{ для любого } \delta>0.$$

Для системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в работе [1], в частности, сформулированы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции $f\in C(R)$ с компактным носителем частичные суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье по системе $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходятся к $f(x)$ на R.*

Теорема 2. *Пусть $T=\{t_n : n\ge 0\}$ – допустимая последовательность на R, тогда соответствующая ей система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L_p(R)$ для $1\le p<\infty$.*

Теорема 3. *Для каждой допустимой последовательности на R соответствующая ей система Франклина на R^1 является безусловным базисом в $L_p(R)$, $1<p<\infty$.*

Напомним определение системы Стромберга [2]. Пусть N – множество натуральных чисел, $R_0=N\cup\{0\}\cup\{-n/2 : n\in N\}$ и $R_{1/2}=R_0\cup\{1/2\}$. Через S_0 и $S_{1/2}$ обозначим множества непрерывных и кусочно-линейных функций из $L_2(R)$, соответственно, с узлами из R_0 и $R_{1/2}$. Существует единственная функция $f\in S_{1/2}$ со свойствами: f ортогональна S_0, $\|f\|_2=1$ и $f(1/2)>0$. Далее полагается, что $f_{jk}(x)=2^{j/2} f(2^j x-k)$, $j,k\in Z$, где Z – множество целых чисел. Стромберг [2] доказал, что система $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(R)$, а также безусловным базисом в $L_p(R)$, $1<p<\infty$, и $H^1(R)$.

Отметим, что система Стромберга $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$, в отличие от общей системы Франклина на R^1, не является базисом в $L_1(R)$, поскольку $\int_R f_{jk}(x)dx=0,\ j,k\in Z.$ Не известно, существует ли одноиндексная нумерация системы $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$, при которой частичные суммы ряда Фурье–Стромберга непрерывной функции с компактным носителем локально равномерно сходятся.

Отметим также, что для общей системы Франклина на R^1 определен ряд Фурье для каждой локально интегрируемой функции, чего нельзя сказать о системе Стромберга. Но эта система не является базисом в $H^1(R)$, так как интегралы функций этой системы не равны нулю.

Здесь мы определим класс систем из кусочно-линейных функций с компактным носителем, которые образуют базис в пространстве $H^1(R)$.

Пусть $T=\{t_n : n\geq 0\}$ – допустимая последовательность, а $T_n=\{t_i : 0\leq \leq i\leq n+1\}$ и $\pi_n=\{\tau_i^n : \tau_i^n\leq \tau_{i+1}^n, 0\leq i\leq n\}$ определены, как выше. Через S_n^0 обозначим пространство непрерывных на R функций F с носителем $[\tau_0^n;\tau_{n+1}^n]$, линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n;\tau_{i+1}^n]$, $i=0,1,...,n$, и с нулевым интегралом. Очевидно, что $S_1^0=\{0\}$, $\dim S_n^0=n-1$ и $S_n^0\subset S_{n+1}^0$ для $n\geq 1$. Следовательно, для $n\geq 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $F\in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| F\|_2=1$. Эта функция называется n-й функцией Франклина в $H^1(R)$, соответствующей разбиению T.

Определение 3. *Общая система Франклина в $H^1(R)$ $\{F_n(x) : n\geq 2\}$, соответствующая разбиению T, определяется по правилу: для $n\geq 2$ $F_n(x)$ это n-я функция Франклина в $H^1(R)$, соответствующая разбиению T.*

Пусть $D_n(t,\tau)$ – ядро проектора из пространства $L_{loc}(R)$ в S_n^0. Верна следующая

Лемма 1. *Для $D_n(t,\tau)$ имеет место представление*

$$D_n(t,\tau)=K_n(t,\tau)-\sum_{i=1}^{n} a_i^n N_i(t)\sum_{j=1}^{n} K_n(\tau_j^n,\tau)(\lambda_j^n+\lambda_{j+1}^n), \tag{3}$$

где $K_n(t,\tau)$ определяется формулой (1), $\lambda_j^n=\tau_j^n-\tau_{j-1}^n$, а коэффициенты a_i^n определяются формулами

$$a_i^n=\frac{\int_R K_n(\tau_i^n,\tau)\,d\tau}{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^n+\lambda_{j+1}^n)\int_R K_n(\tau_j^n,\tau)\,d\tau}. \tag{4}$$

Из соотношений (1)-(4) выводится

Лемма 2. *Для $D_n(t,\tau)$ имеет место* $\int_R |D_n(t,\tau)|\,d\tau<6$.

Отсюда получается

Теорема 1. Пусть T – допустимая последовательность. Тогда соответствующая ей система $\{F_n(x) : n\geq 2\}$ является базисом в пространстве $L_0^1(R)$, где $L_0^1(R)$ – пространство интегрируемых на R функций с нулевым интегралом.

С применением леммы 1 и свойств ядра $K_n(t,\tau)$ доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть допустимая последовательность T такая, что соответствующая ей система $\{F_n(x) : n\geq 2\}$ является базисом в про-*

странстве $H^1(R)$. *Тогда существует постоянная* $\gamma > 1$ *такая, что для всех* n *выполняются*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n} \le \gamma \text{, когда } i = 1, 2, ..., n-1. \quad (4)$$

Лемма 4. *Пусть допустимая последовательность* T *такая, что соответствующая ей система* $\{F_n(x): n \ge 2\}$ *является базисом в пространстве* $H^1(R)$. *Тогда существует постоянная* $\beta > 0$ *такая, что для всех* n *выполняются*

$$\lambda_1^n + \lambda_2^n \ge \beta \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^n \quad \text{и} \quad \lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n \ge \beta \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^n . \quad (5)$$

Оказывается, что условия (4), (5) также достаточны. А именно верна следующая

Теорема 2. Пусть T – допустимая последовательность и $\{F_n(x): n \ge 2\}$ – соответствующая ей система. Тогда $\{F_n(x): n \ge 2\}$ является базисом в пространстве $H^1(R)$ тогда и только тогда, когда выполняются (4) и (5).

Отметим, что разбиения отрезка $[0;1]$, для которых выполняются условия, аналогичные условиям (4), называются регулярными по парам. В работе [3] доказано, что общая система Франклина на $[0;1]$ является базисом в $H^1[0;1]$ тогда и только тогда, когда порождающее ее разбиение регулярно по парам. Аналогичная теорема для периодической общей системы Франклина доказана в работе [4]. Как указано в теореме 2, для $H^1(R)$ добавляется еще условие (5).

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1А006.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно-линейных функций

Построен класс ортонормированных в $L^2(R)$ систем, состоящих из кусочно-линейных функций. Получены необходимые и достаточные условия на порождающую последовательность, при которых соответствующая система будет базисом в $H^1(R)$.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան, Կ. Ա. Քեռյան

$H^1(R)$-ում կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներից կազմված մի բազիսի մասին

Կառուցված է $L^2(R)$-ում օրթոնորմավորված, կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներից կազմված համակարգերի դաս: Ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ծնող տրոհման վրա, որոնց դեպքում համապատասխան համակարգը կլինի բազիս $H^1(R)$–ում:

Academician G. G. Gevorgyan, K. A. Keryan

On a Basis in $H^1(R)$, Consisting of Piesewise Linear Functions

A class of orthonormal in $L^2(R)$ systems, consisting of piecewise linear functions is constructed. Necessary and sufficient conditions in terms of generating partition are obtained for the corresponding system to be a basis in $H^1(R)$.

Литература

1. *Геворкян Г. Г., Керян К. А.* – ДНАН РА. 2013. Т. 113. № 4. С. 331-336.
2. *Stromberg J.*-O. In: Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math. Wadsworth, Belmont, CA. 1983. P. 475–494.
3. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Studia Math. 2005. V. 167. P. 259 – 292.
4. *Keryan K. A., Pogosyan M. P.* – J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. № 1. P. 56-79.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций

(Представлено 19/ V 2014)

Ключевые слова: *Классы функций* $T_\beta(0\le\beta<1)$, $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, *функция Альфорса–Сымидзу, произведения Бляшке, произведения Джрбашяна, оператор интегродифференцирования Риммана-Лиувилля, радиальный предел, емкость множества.*

Введение. Для данного значения $\beta(0<\beta<1)$ в класс T_β (см. [1]) входят мероморфные в круге $|z|<1$ функции $f(z)$, для которых

$$T_\beta(f)\equiv\int_0^1(1-r)^{-\beta}A(r;f)\,dr<+\infty,$$

где

$$A(r;f)=\iint_{|z|<r}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}dxdy$$

известная функция Альфорса – Сымидзу.

Известный результат Карлесона гласит ([1], теорема 3.3): для каждой функции $f(z)\in T_\beta$ радиальный предел $\lim\limits_{r\to1-0}f\left(re^{i\theta}\right)$ существует и конечен для всех $\theta\in[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0,2\pi]$, $(1-\beta)$ – емкость нуль. Иначе говоря, множество E обладает свойством: для любой меры μ, сосредоточенной на E и такой, что $\mu(E)=1$,

$$\lim_{r\to1-0}\left\{\max_{0\le\varphi\le2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\theta)}{\left|1-re^{i(\varphi-\theta)}\right|^{1-\beta}}\right\}=+\infty.$$

Известно также, что если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in T_\beta$, то (см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\beta |a_n|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Пусть $f(z)$ – произвольная функция из класса $L(0,l)$, $(0<l<+\infty)$. Оператор интегрирования (при $-1<\alpha<+\infty$) и оператор дифференцирования (при $-1<\alpha<0$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяются следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt, (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} f(r), (-1<\alpha<0).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r) \equiv f(r).$$

Далее, пусть

$$D_{(+)}^{-\alpha} f = \begin{cases} D^{-\alpha} f(r), \text{ если } D^{-\alpha} f(r) \ge 0 \\ 0, \qquad\quad \text{если } D^{-\alpha} f(r) < 0 \end{cases}.$$

Пользуясь аппаратом операторов интегродифференцирования в смысле Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян (см. [3], гл. IX) ввел в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, определив характеристическую функцию T_α следующим образом. Пусть для каждого значения $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

$$m_\alpha(r;f) \equiv m_\alpha(r;\infty) = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

$$N_\alpha(r;f) \equiv N_\alpha(r;\infty) = \frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}(\log r - k_\alpha) +$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha}{t}\left[n(t;\infty)-n(0;\infty)\right]dt,$$

где $k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, $n(0;\infty)$ – кратность возможного полюса функции f в точке $z=0$, $n(t;\infty)$ – число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \le t (0<t<1)$ и отличных от $z=0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Класс $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r;f) \equiv m_\alpha(r;f) + N_\alpha(r;f)$$

как множество тех мероморфных в $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha\left(r;f\right)\right\}<+\infty .$$

При этом функции $m_\alpha\left(r;f\right), N_\alpha\left(r;f\right)$ и $T_\alpha\left(r;f\right)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций (см. [4]) $m\left(r;f\right), N\left(r;f\right)$ и $T\left(r;f\right)$, совпадая с ними при $\alpha=0$. Таким образом $N_0 \equiv N$.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0 = N\left(-1<\alpha<0\right).$$

Существенную роль (см. [3]) в факторизационной теореме функций классов $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ играют введенные М. М. Джрбашяном произведения B_α, которые определяются следующим образом. Пусть последовательность $\left\{z_n\right\}$ подчинена условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|z_n\right|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ \left(0<\left|z_n\right|\le\left|z\right|_{n+1}<1, n=1,2,\ldots\right). \tag{2}$$

Тогда по определению

$$B_\alpha\left(z;\left\{z_n\right\}\right)=\prod_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{-W_\alpha\left(z,z_n\right)},$$

где для $\left|z\right|<1$ и $\left|\xi\right|<1$

$$W_\alpha\left(z;\xi\right)=\int_{\left|\xi\right|}^{1}\frac{\left(1-x\right)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+\alpha+k\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1+k\right)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{\left|\xi\right|}\left(1-x\right)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\xi}^{\,k}\int_{\left|\xi\right|}^{1}\left(1-x\right)^\alpha x^{-k-1}dxdx\right\}z^k .$$

Далее пусть

$$g_\alpha\left(z\right)=C\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega\left(\theta\right)\right\},\ \left|z\right|<1, \tag{3}$$

где C – постоянное, $S_\alpha\left(z\right)=\Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}}-1\right\}$ – ядро М. М. Джрбашяна (типа Шварца), $\omega\left(\theta\right)$ – невозрастающая функция конечной вариации на $\left[0,2\pi\right]$.

Следующая теорема характеризует граничные свойства функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ ([5], теорема 2.9 при $\omega\left(x\right)=\left(1-x\right)^\alpha$).

Теорема А. *Если* $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$, *то предел*

$$F\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to1-0}F\left(re^{i\theta}\right)$$

существует для любого $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Доказывается также, что эта теорема неулучшаема ([5], теорема 2.12, 2.13).

Определим класс $A_\alpha^* (-1 < \alpha \le 0)$ (см. [5], с.145) как множество тех аналитических в единичном круге функций f из N_α, которые имеют следующее представление:

$$f(z) = B_\alpha (z; \{z_n\}) g_\alpha (z). \tag{4}$$

Цель этой работы – получить более тонкие оценки для коэффициентов Тейлора функций этих классов.

Известно, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, является аналитической функцией из класса $N_\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$, то (см. [5 - 7]) имеет место точная оценка, доказанная С. Н. Мергеляном при $\alpha = 0$, С. С. Степаняном при $-1 < \alpha < 0$ и И. В. Оганисяном при $-1 \le \alpha < +\infty$.

$$|a_n| \le \exp\left\{ \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \sqrt[\alpha+2]{C_\alpha (\alpha+1) n^{1+\alpha}} \left(1 + O(1)\right) \right\}, \; n \to \infty,$$

где C_α – некоторая постоянная.

Если же $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(|z| < 1)$ является функцией из класса $A_\alpha^* (-1 < \alpha \le 0)$ (см. [5], с.186; [8]), верна оценка

$$|a_n| = O(n^\alpha), n \to \infty. \tag{5}$$

Основные результаты. n-й коэффициент функции $f(z)$ будем обозначать, как обычно, через $\hat{f}(n)$. Первым результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть $\{z_n\}$ – любая последовательность комплексных чисел из единичного круга $|z| < 1$ такая, что выполняется условие (2). Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha} \left| \hat{B}_\alpha (n) \right|^2 < +\infty. \tag{6}$$

Доказательство. В работе [9] доказано, что при условии (2) $B_\alpha (z; \{z_n\})$ принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Это означает, что соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2. *Пусть $-1 < \alpha < 0$ и пусть*

$$g_\alpha (z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha \left(e^{-i\theta} z\right) d\omega(\theta) \right\}, \; |z| < 1,$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция конечной вариации на* $[0,2\pi]$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \left|\hat{g}_{\alpha}(n)\right|^{2} < +\infty. \qquad (7)$$

Доказательство. Пользуясь определением ядра S_{α}, имеем

$$g_{\alpha}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{2d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\omega(\theta)\right\}.$$

В работе [9] доказано, что функция

$$k_{\alpha}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\}, \ |z|<1,$$

принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Следовательно соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Далее, пользуясь полученными результатами, докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *– функция из класса* $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left|\hat{f}(n)\right|^{2} < +\infty \qquad (8)$$

Доказательство. Так как $f(z)$ из класса A_{α}^{*}, то $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = B_{\alpha}\left(z;\{z_n\}\right)g_{\alpha}(z).$$

Далее, так как $B_{\alpha}\left(z;\{z_n\}\right)$ и $g_{\alpha}(z)$ являются функциями из класса $T_{-\alpha}$, то нетрудно убедиться, что $f(z)$ принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Это означает, что соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание 1. Имеет место следующее включение:

$$A_{\alpha}^{*} \subset T_{-\alpha}, \alpha \in (-1;0].$$

Замечание 2. Полученная оценка для коэффициентов Тейлора функций класса $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$ позволяет получить более точную (чем пользуясь оценкой (5)) теорему для радиальных предельных значений функций классов $N_{\alpha}(-1<\alpha<0)$. А именно, теорема A непосредственно следует из теоремы 3, если иметь в виду, что любую функцию из класса $N_{\alpha}(-1<\alpha<0)$ можно представить как частное двух функций из класса $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$.

Отметим, что теорема A была доказана с использованием параметрического представления для функций классов N_{α}.

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций

М. М. Джрбашяном введены классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ мероморфных в единичном круге функций и произведения B_α, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с классом N Неванлинны и произведениями Бляшке. Карлесоном ранее были введены другие классы T_β, входящие в класс N, которые существенно отличаются от классов $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$. Для коэффициентов Тейлора аналитических функций этих классов известны различные оценки. Для коэффициентов Тейлора функций из подкласса A_α^* классов $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ получена оценка нового типа.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի Թեյլորի գործակիցների մասին

Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծվել են միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկ-ցիաների $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ դասեր և B_α արտադրյալներ, որոնք $\alpha=0$ հատուկ դեպքում համընկնում են Ռ. Նևանլիննայի N դասի և Բլյաշկեի արտադրյալների հետ: Ավելի վաղ Կառլեսոնի կողմից ներմուծվել էին միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների T_β դասերը, որոնք ընկած են N դասում, բայց էապես տարբերվում են $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ դասերից: Դուրս են բերվում նոր տիպի գնահատականներ $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ դասերի A_α^* ենթադասերի ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար:

Academician V. S. Zakaryan, I. V. Hovhannisyan

On Taylor Coefficients of a Class of Functions Analytic in Disc

Classes $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ and products $B_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ are introduced by M. M. Djrbashyan which in the special case $\alpha=0$ are identical with Nevanlinna class and Blaschke product. Classes T_β are introduced by L. Carleson and $T_0\equiv N_0\equiv N.$ In this paper new type estimations are found for Taylor coefficients of functions from subclass $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$ of $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$.

Литература

1. *Carleson L.* On a class of meromorphik functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala, 1950. 127 p.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Изв. АН Арм ССР. Математика. 1967. Т. 2. N5. С. 275-294.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
4. *Nevanllina R.* Einduetige Analytische Functionen. Springer. Berlin1. 937. 388 с.
5. *Джрбашян М. М., В. С. Захарян* - Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
6. *Степанян С. С.* - ДАН Арм. ССР. 1982. Т. 35. N3. С. 107-113.
7. *Оганисян И. В.* Некоторые дополнительные свойства функций класса М. М. Джрбашяна. Деп. в Арм. НИИНТИ. 4.9 (1989). N49-Ар.
8. *Оганисян И. В.*- ДАН Арм ССР. 1989. Т. 88, N2, С. 55-60.
9. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - ДАН СССР. 1967. Т. 173. N6. С. 1247-1250.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.544.8

В. А. Бабаян

О граничной задаче Гильберта в пространстве непрерывных функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 5/ VI 2014)

Ключевые слова: *задача Гильберта, аппроксимативная единица, краевая задача, интеграл типа Коши, непрерывные функции.*

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть G – односвязная ограниченная область комплексной плоскости, ограниченная кривой Ляпунова Γ. Не умаляя общности, можем предполагать, что $0 \in G$. Работа посвящена исследованию в этой области граничной задачи Гильберта в пространстве непрерывных функций. Классическая постановка этой задачи следующая. Требуется определить функцию Φ, аналитическую в области G и непрерывную вплоть до границы Γ по граничному условию

$$\Re a(t)\Phi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

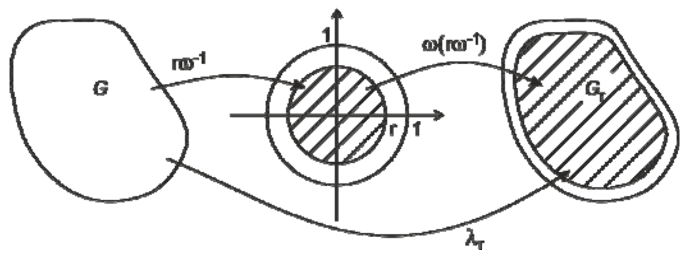
где a и f – заданные функции на Γ. В случае, когда f непрерывна по Гельдеру на Γ, а $a(t) \neq 0$ и также удовлетворяет условию Гельдера на Γ, задача (1) исследована в различных работах (см. исторический обзор к главе 4 в [1], см. также [2]). В случае непрерывных функций данная постановка уже не является корректной, так как интеграл типа Коши не является ограниченным в пространстве непрерывных функций. В работах Г. М. Айрапетяна (см.[3]) предложена новая постановка граничных задач, которая позволила исследовать задачу Гильберта в пространствах интегрируемых функций в единичном круге [4].

В настоящей работе мы исследуем задачу Гильберта в пространстве непрерывных функций, используя идею, развитую Г. М. Айрапетяном и его учениками.

Для точной формулировки введем следующие определения.

Пусть $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D$ – его граница. Обозначим ω функцию, конформно отображающую круг D на область G, и для любого $0 < r < 1$ положим

$$\lambda_r(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)), \quad z \in G. \tag{2}$$



Рассмотрим следующую задачу:

Определение 1. *Определить голоморфную в* G *функцию* Φ *по граничному условию*

$$\left\|\Re\left(a\left(t\right)\Phi\left(\lambda_r\left(t\right)\right)\right)-f(t)\right\|_{C\left(\Gamma\right)}\underset{r\to1}{\longrightarrow}0. \tag{3}$$

Здесь f – заданная на Γ непрерывная функция, $a\left(t\right)\neq0$ при $t\in\Gamma$ и $a\in C^{\left(\alpha\right)}\left(\Gamma\right)$. Не умаляя общности, можем предполагать, что $\left|a\left(t\right)\right|=1$ при $t\in\Gamma$. Задачу (3) будем называть задачей G. При $f\equiv0$ задачу G будем называть однородной.

Перейдем к решению задачи (3). Обозначим $z=\omega\left(\zeta\right)\in D,\ \tau=\omega\left(t\right)\in T$. Отметим, что функция

$$\Omega\left(z\right)=\Phi\left(\omega^{-1}\left(z\right)\right),\quad z\in D \tag{4}$$

аналитична в круге D. В этих обозначениях условие (3) примет вид

$$\left\|\Re\left(a\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right)\Omega\left(r\tau\right)\right)-f\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right)\right\|_{C\left(T\right)}\underset{r\to1}{\longrightarrow}0.$$

Обозначим

$$A\left(\tau\right)=a\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right),\quad F\left(\tau\right)=f\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right),\quad \tau\in T. \tag{5}$$

Тогда последнее предельное соотношение примет вид

$$\lim_{r\to1}\max_{t\in T}\left|\Re\left(A\left(\tau\right)\Omega\left(r\tau\right)\right)-F\left(\tau\right)\right|=0. \tag{6}$$

Далее, учитывая, что функция $\left|A\left(\tau\right)\right|=1$ на единичной окружности T, представим ее в виде [5]

$$A\left(\tau\right)=\tau^{\kappa}e^{i\Re\psi\left(\tau\right)}, \tag{7}$$

где $\kappa=\underset{T}{ind}\,A=\dfrac{1}{2\pi}VarA\left(\tau\right)\Big|_T$, а ψ – аналитическая функция, определенная по формуле Шварца [5]:

$$\psi\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\alpha\left(\tau\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau},\quad \alpha\left(\tau\right)=argA\left(\tau\right)-\kappa\theta,\tau=e^{i\theta}.$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\left\|\Re\left(\tau^{\kappa}e^{i\psi\left(\tau\right)}\Omega\left(r\tau\right)\right)-e^{-\Im\psi\left(\tau\right)}F\left(\tau\right)\right\|_{C\left(T\right)}\xrightarrow[r\to1]{}0.$$

Случаи неотрицательного и отрицательного κ рассмотрим отдельно.

Пусть $\kappa \geq 0$. Тогда аналитическая в круге D функция $z^{\kappa} e^{i\psi(z)} \Omega(rz) = S(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $D \cup T$, и на границе T удовлетворяет условию $\Re(S(\tau)) = g_r(\tau)$, где

$$g_r(\tau) = \Re\left(\tau^{\kappa} e^{i\psi(\tau)} \Omega(r\tau)\right). \tag{8}$$

Тогда функция $S(z)$ определяется по формуле Шварца

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T g_r(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ic, \quad z \in D.$$

Зафиксируем $z \in D$ и перейдем к пределу в последнем равенстве при $r \to 1$. Получим

$$z^{\kappa} \Omega(z) = \frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ice^{-i\psi(z)}. \tag{9}$$

Пусть $\kappa = 0$. Тогда последнее выражение примет вид

$$\Omega(z) = \frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ice^{-i\psi(z)},$$

или, возвращаясь к переменной $\zeta \in G^{+}$ и $t \in \Gamma$,

$$\Phi(\zeta) = e^{-i\psi(\omega(\zeta))} \left(\int_T f(t) e^{-\Im\psi(\omega(\tau))} \frac{\omega(t) + \omega(\zeta)}{\omega(t) - \omega(\zeta)} \frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)} + ice^{-i\psi(z)} \right). \tag{10}$$

Покажем, что функция (10) является решением задачи (3). Подставляя (10) в предельное соотношение (3), получим

$$\left\| \Re\left(\frac{e^{i\Re\psi(\omega(t_0)) - i\psi(r\omega(t_0))}}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))} f(t) \frac{\omega(t) + r\omega(t_0)}{\omega(t) - r\omega(t_0)} \frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)} \right) - f(t_0) \right\|_{C(\Gamma)} =$$

$$\left\| \Re\left(\frac{e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(t) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right) - F(\tau_0) \right\|_{C(T)} \equiv P.$$

Функция ψ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $D \cup T$, следовательно,

$$\max_{\tau_0} \left| e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} - 1 \right| \leq c(1 - r)^{\sigma} \tag{11}$$

при некотором $0 < \sigma < 1$. Далее, так как $e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau)$ непрерывна на T, имеем

$$\max_{\tau_0} \left| \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq c \|F\|_{C(T)} \ln|1 - r|^{-1}. \tag{12}$$

Используем неравенства (11) и (12) для оценки P. Имеем

$$P \leq \left\| \Re\left(\frac{e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} - 1}{2\pi i} e^{\Im\psi(\tau_0)} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right) \right\|_{C(T)} +$$

$$+\left\|\Re\left(\frac{e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+r\tau_0}{\tau-r\tau_0}\frac{d\tau}{\tau}\right)-F(\tau_0)\right\|_{C(T)} \equiv I_1+I_2.$$

Из (11) и (12)

$$I_1 \le c\|F\|_{C(T)}(1-r)^{\alpha}\ln|1-r|^{-1},$$

следовательно, I_1 стремится к нулю при $r\to 1$.

$$I_2=\left\|\Re\left(\frac{e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+r\tau_0}{\tau-r\tau_0}\frac{d\tau}{\tau}\right)-F(\tau_0)\right\|_{C(T)}\le$$

$$\le c\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\Im\psi\left(e^{i\theta}\right)}F\left(e^{i\theta}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}d\theta-e^{-\Im\psi\left(e^{i\theta_0}\right)}F\left(e^{i\theta_0}\right)\right\|_{C(T)}.$$

Последнее выражение также стремится к нулю по свойству интеграла Пуассона от непрерывных функций [6]. Таким образом, функция (10) является решением задачи (3). Итак, при $\kappa=0$ задача (3) имеет решение для любой $f\in C(\Gamma)$, и соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое над полем действительных чисел решение. Общее решение задается формулой (10). Пусть $\kappa>0$. Тогда из (9) имеем, что правая часть обращается в нуль при $z=0$ вместе с производными до порядка $\kappa-1$. Следовательно, $c=0$, и

$$\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=0,\quad \Re\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{\kappa+1}}=\Im\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{\kappa+1}}=0 \quad (13)$$

при $k=1,2,...,\kappa-1$. При выполнении $2\kappa-1$ условий (13) решение Φ определяется по формуле

$$\Phi(\zeta)=\frac{e^{-i\psi(\omega(\zeta))}}{\zeta^{\kappa}2\pi i}\int_T e^{-Im\psi(\tau)}f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}. \quad (14)$$

Соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений.

Теперь рассмотрим случай $\kappa<0$. Представим функцию $\Omega(rz)$ в виде

$$\Omega(rz)=\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k z^k+z^{-\kappa}\Omega_{1r}(z). \quad (15)$$

Используя это представление, уравнение (8) представим в следующей форме:

$$\Re\left(e^{i\psi(\tau)}\Omega_{1r}(\tau)\right)=g_r(\tau)-\Re\left(e^{i\psi(t)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k\tau^{k+\kappa}\right).$$

Используя формулу Шварца, получим

$$e^{i\psi(z)}\Omega_{1r}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T g_r(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_T\Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k\tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+ic.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $r \to 1$. Если $z \in D$, то соотношение (15) в пределе примет вид $\Omega(z) = \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k z^k + z^{-\kappa}\Omega_1(z)$, где $d_k = \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!}$. Таким образом, получим

$$e^{i\psi(z)}\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_T \Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} + ic.$$

Итак,

$$\Omega(z) = \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k z^k + z^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{z^{|\kappa|}e^{-i\psi(z)}}{2\pi i}\int_T \Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} + icz^{|\kappa|}e^{i\psi(z)},$$

и, следовательно, общее решение задачи (3) определяется по формуле

$$\Phi(\zeta) = \left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(\zeta)}}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))}f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)} + V_0(\zeta), \tag{16}$$

где

$$V_0(\zeta) = ic\left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}e^{-i\psi(\omega(\zeta))} + \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k\left(\omega(\zeta)\right)^k - \\ -\left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}e^{-i\psi(\omega(\zeta))}\int_\Gamma\left(\Re e^{i\psi(\omega(\tau))}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k\left(\omega(\tau)\right)^{k+\kappa}\right)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}. \tag{17}$$

Далее, используя преобразования, аналогичные случаю $\kappa = 0$, доказываем, что функция

$$\Psi(\zeta) = \left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(\zeta)}}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))}f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}$$

является решением задачи (3), а функция V_0 (функция (17)) – решение соответствующей однородной задачи. Таким образом, получаем, что при $\kappa < 0$ неоднородная задача всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет $2\kappa + 1$ линейно независимых над полем действительных чисел решений. Суммируя вышеизложенное, получаем следующую теорему.

Теорема. *Задача G при $\kappa = 0$ имеет решение для любой функции $f \in C(\Gamma)$, и соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое решение. При $\kappa > 0$ однородная задача не имеет нетривиальных решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимы и достаточны $2\kappa - 1$ линейно независимых условий* (13) *на функцию f. При $\kappa < 0$ неоднородная задача разрешима для любой функции $f \in C(\Gamma)$, а соответствующая однородная задача имеет $2\kappa + 1$ линейно независимых* *решений. Линейная зависимость рассматривается над полем действительных чисел.*

Южный федеральный университет, РФ
e-mail: bvazgen@gmail.com

В. А. Бабаян

О граничной задаче Гильберта в пространстве непрерывных функций

Исследуется граничная задача Гильберта в пространстве непрерывных функций. Предложена новая постановка этой задачи, которая позволяет решить ее, когда граничная функция непрерывна на Γ. В явном виде получены условия разрешимости неоднородной задачи, а также линейно независимые решения однородной задачи. Решение неоднородной задачи записывается в явном виде.

Վ. Ա. Բաբայան

Անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում Հիլբերտի եզրային խնդրի մասին

Ուսումնասիրվում է Հիլբերտի եզրային խնդիրը անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում: Առաջարկվում է խնդրի նոր դրվածք, որը թույլ է տալիս լուծել այն, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ է Γ-ի վրա: Բացահայտ տեսքով ստացված են համասեռ խնդրի լուծելիության պայմանները, ինչպես նաև համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումները: Անհամասեռ խնդրի լուծումը գրվում է բացահայտ տեսքով:

V. A. Babayan

On a Hilbert Boundary Value Problem in the Space of Continuous Functions

The Hilbert boundary value problem in the space of continuous functions is investigated. It is introduced a new formulation of the problem, which allows to solve it when the boundary function is continuous. The conditions of the solvability of inhomogeneous problem and linearly independent solutions of the corresponding homogeneous problem are obtained in explicit form. The solution of the inhomogeneous problem is obtained in explicit form as well.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. Физматгиз. 1963. 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. ОГИЗ. 1945. 448 с.
3. *Айрапетян Г. М.* - Изв. АН Армении. Математика. 1990. Т. 25. No.1. С. 3-20.
4. *Айрапетян Г. М.*- ДАН СССР. 1993. Т. 328. №5. С.533-535.
5. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1984. 320 с.
6. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М. ИЛ. 1975. 312 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемленной опорой

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 25/ III 2014)

Ключевые слова: *упруго-защемленная опора, уточненная теория, поперечный сдвиг, ортотропная балка, переменная толщина.*

Рассматривается ортотропная балка прямоугольного поперечного сечения переменной толщины. Один конец балки упруго защемлен, а другой лежит на классической шарнирной опоре. Краевая часть балки вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части достаточно мала относительно длины балки. Пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса–Винклера, определяются параметры упруго-защемленной опоры. Решается задача изгиба балки линейно переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки. Получены безразмерные значения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента балки, анализ которых привел к качественным заключениям.

1. В правой системе координат xyz рассмотрим упруго-защемленную опору общего типа (рис.1).

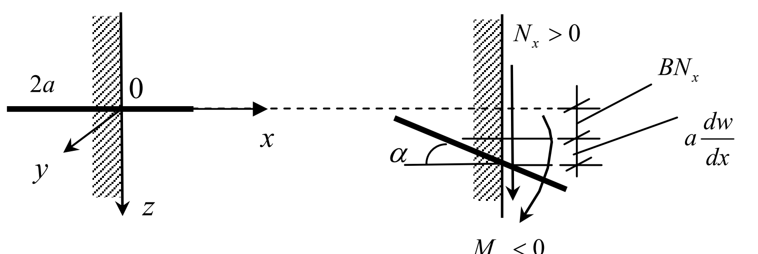


Рис. 1.

Краевая часть балки вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части $2a$ достаточно мала относительно длины балки. Для простоты положим, что балка испытывает деформирование только поперечного изгиба. Тогда в опорном сечении балки возникнут только поперечная сила N_x и изгибающий момент M_x. Не нарушая общности, положим, что в

принятой системе координат $N_x > 0$, $M_x < 0$ (рис.1). Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части aN_x и момента M_x ось балки в опорном сечении $x = 0$ будет вращаться на некоторый угол α. Этот угол, а следовательно, и его тангенс dw/dx зависят от вращающих моментов. В работе [3] условия рассмотренной упруго-защемленной опоры представлены в виде
при $x = 0$

$$w = a\frac{dw}{dx} + BN_x, \ \frac{dw}{dx} = D\left(aN_x - M_x\right). \tag{1.1}$$

В этой же работе приведены способы опытного определения параметров B и D. Очевидно, что между значениями этих параметров существует определенная связь, обусловленная физико-механическими свойствами упруго-деформированного массива и размерами вставленной части балки. Ниже попытаемся аналитически выяснить эту связь, пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса–Винклера. Согласно этой гипотезе нормальные и касательные силы, которыми действует упруго-деформируемый массив на вставленную часть балки вследствие изменения ее положения, прямо пропорциональны соответствующим перемещениям.

Упруго-деформированный массив на вставленную часть балки (рис.2) вследствие ее вертикального перемещения вниз w_0 будет действовать силами:

1) на грань $EGHF$ нормальной силой от сжатия $2k_1w_0ab$;

2) на грань $ABCD$ нормальной силой от растяжения $2k_2w_0ab$;

3) на гранях $EADF$ и $GBCH$ одинаковыми касательными силами от скольжения, сумма которых составит $4k_3w_0ah$;

4) на торец $EABG$ касательной силой от скольжения k_3w_0bh.

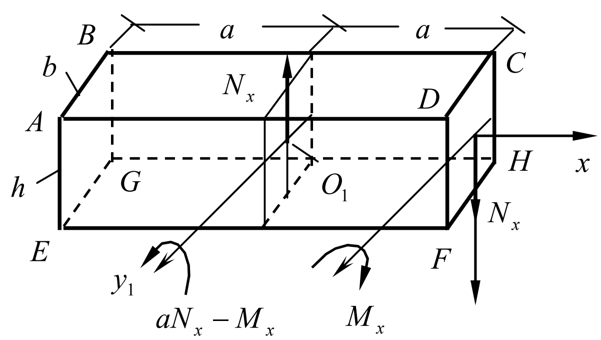


Рис. 2.

Коэффициенты пропорциональности k_1, k_2 и k_3 относятся к сжатию, растяжению и скольжению соответственно. Все отмеченные силы направлены вертикально вверх. Их сумма составит

$$F = \left[2\left(k_1 + k_2\right)ab + k_3h\left(4a + b\right)\right]w_0. \tag{1.2}$$

Эта сила уравновешивает поперечную силу $N_x\left(x=0\right)$. Следовательно

$$F=N_x\left(x=0\right)=\frac{w_0}{B}\Rightarrow B=\frac{1}{2\left(k_1+k_2\right)ab+k_3h\left(4a+b\right)}, \tag{1.3}$$

Вследствие вращения вставленной части на угол α упругий массив на нее будет действовать нормальными и касательными силами, которые относительно центральной оси 0_1y_1 создают моменты:

1) от сил граней $EGHF$ и $ABCD$

$$\frac{2}{3}\left(k_1+k_2\right)a^3b\frac{dw}{dx},$$

2) от сил граней $EADF$ и $GBCH$

$$\frac{4}{3}k_3a^3h\frac{dw}{dx},$$

3) от сил торца $ABGE$ $k_3a^2bh\dfrac{dw}{dx}$.

Сумма этих моментов составляет

$$M=\frac{a^2}{3}\left[2ab\left(k_1+k_2\right)+h\left(4a+3b\right)k_3\right]\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}. \tag{1.4}$$

Этот момент уравновешивает моменты $\left(aN_x-M_x\right)_{x=0}$. Следовательно,

$$M=\left(aN_x-M_x\right)_{x=0}=\frac{1}{D}\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}\Rightarrow D=\frac{3}{a^2\left[2ab\left(k_1+k_2\right)+h\left(4a+3b\right)k_3\right]}. \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.5) нетрудно получить

$$\frac{3}{D}-\frac{a^2}{B}=2a^2hbk_3. \tag{1.6}$$

Если пренебречь влиянием касательной силы, действующей на торце балки, то связь между параметрами упруго-защемленной опоры (1.6) примет вид

$$\frac{D}{B}=\frac{3}{a^2}. \tag{1.7}$$

Имея в виду, что площадь торца балки bh и коэффициент скольжения k_3 сравнительно малы, ниже при рассмотрении числового примера, будем пользоваться этим соотношением.

Отметим также, что иногда торец балки не соприкасается с упруго-деформируемым массивом. Тогда (1.7) будет точным.

2. Рассмотрим ортотропную балку прямоугольного поперечного сечения bxh, ширина которого постоянна, а толщина линейно меняется по длине:

$$h=h_0+h_1x. \tag{2.1}$$

Здесь h_0 и h_1 заданные постоянные величины, а x – расстояние от левого края балки (рис. 3). Левый край балки толщиной h_0 и длиной $2a$ вставлен в упруго-деформируемый массив. Правый край свободно лежит на классической шарнирной опоре. Балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности $q \, ^{н}/_{м^2}$.

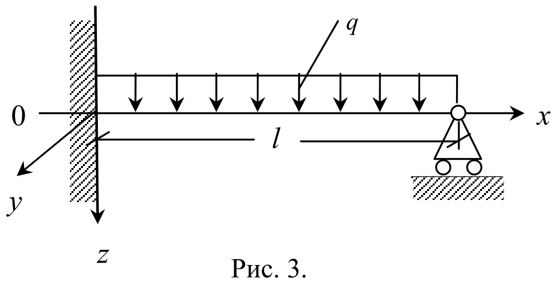


Рис. 3.

Дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба рассматриваемой балки в рамках уточненной теории [2], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, имеют вид

$$\begin{gathered} 2h\frac{d\varphi}{dx}+4\varphi\frac{dh}{dx}=-3q, \\ Eh^2\frac{d^3w}{dx^3}+2Eh\frac{d^2w}{dx^2}\frac{dh}{dx}-Ea_{55}h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}-2Ea_{55}h\frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+8\varphi=0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь E – модуль Юнга материала по направлению оси $0x$, φ – искомая функция, определяющая перерезывающую силу N_x, a_{55} – упругая постоянная, связывающая деформацию поперечного сдвига и касательное напряжение балки в плоскости $y0z$ [1].

Пользуясь [3], для краевых условий можно написать:

при $x=0$

$$w=a\frac{dw}{dx}+BN_x, \; \frac{dw}{dx}=D\left(aN_x-M_x\right). \tag{2.3}$$

при $x=l$

$$w=0, \; M_x=0. \tag{2.4}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{gathered} x=l\overline{x}, \; l=nh_0, \; h=h_0H, \; H=1+\gamma\overline{x}, \; \gamma=nh_1, \\ w=h_0\overline{w}, \; q=E\overline{q}, \; a_{55}E=\chi, \; \varphi=E\overline{\varphi}. \\ N_x=Eh_0^2\overline{N}, \; M_x=Eh_0^3\overline{M}, \; B=\frac{\overline{B}}{Eh_0}, \; D=\frac{\overline{D}}{Eh_0^3}. \\ b=kh_0, \; a=ml. \end{gathered} \tag{2.5}$$

С учетом этих обозначений уравнения (2.2) и условия (2.3), (2.4) примут вид

$$\begin{gathered} 2H\frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{x}}+4\gamma\overline{\varphi}=-3n\overline{q}, \\ H^2\frac{d^3\overline{w}}{d\overline{x}^3}+2\gamma H\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\chi nH^2\frac{d^2\overline{\varphi}}{d\overline{x}^2}-2\chi\gamma nH\frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{x}}+8n^3\overline{\varphi}=0, \end{gathered} \tag{2.6}$$

при $\overline{x}=0$

$$\overline{w} = m\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} + \overline{B}\overline{N}\,,\ \frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} = n\overline{D}\left(mn\overline{N} - \overline{M}\right), \tag{2.7}$$

при $\overline{x} = 1$

$$\overline{w} = 0\,,\ \overline{M} = 0. \tag{2.8}$$

В рамках теории [2] при обозначениях (2.5) безразмерные усилия и изгибающий момент имеют выражения:

$$\overline{N} = \frac{kH}{12n^3}\left[8n^3\overline{\varphi} - \gamma H\left(\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2} - n\chi\frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{x}}\right)\right], \tag{2.9}$$

$$\overline{M} = -\frac{kH^3}{12n^2}\left(\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2} - n\chi\frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{x}}\right). \tag{2.10}$$

Задачу можно решить методом коллокаций, представив решение в виде степенных многочлено

$$\overline{w} = a_0 + \sum_{i=1}^{j} a_i\overline{x}^i\,,\ \overline{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^{j} b_i\overline{x}^i\,. \tag{2.11}$$

Разделив интервал $0 \le \overline{x} \le 1$ на j части и записывая уравнения (2.6) в $j-1$ точках, а краевые условия (2.7), (2.8) в точках $\overline{x} = 0$, $\overline{x} = 1$, получим систему алгебраических уравнений относительно $2(j+1)$ неизвестных. Число многочленов (2.11) увеличим настолько, чтобы добиться практической сходимости процесса вычислений. Расчеты удобно делать, считая $\overline{q} = 1$; получим значения величин $\overline{w}/\overline{q}$, $\overline{\varphi}/\overline{q}$, $\overline{N}/\overline{q}$ и $\overline{M}/\overline{q}$. В силу линейности задачи в конкретном случае можно эти значения умножить на соответствующее значение $\overline{q}$ и получить решение для этого случая.

Пусть

$$\begin{gathered} n = 8,\ m = 1/16\,,\ k = 0{,}5\,,\ \gamma = 1, \\ \overline{B} = 0.5; 1; 2;\ \left(\overline{D} = 12\overline{B}\right);\ \chi = 0;\ 8. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В табл. 1 иллюстрирован процесс сходимости определения значений $\overline{w}/\overline{q}$ при $\overline{B} = 1, \chi = 8$. Имея в виду, что упругие постоянные материалов определяются обычно с точностью от трех до пяти процентов, нетрудно убедиться, что практическая сходимость в данном случае наступает при $j < 7$. Такая же картина имеется и во всех остальных случаях (2.12).

Таблица 1

	j	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\overline{B} = 1$	6	26.43	71.52	117.6	152.9	172.1	174.1	160.2	132.8	94.79	49.23	0.0
	7	27.45	75.48	125.1	163.3	184.3	187.2	173.1	144.3	103.9	54.82	0.0
$\chi = 8$	8	27.03	74.53	123.4	160.8	181.1	183.6	169.4	140.9	101.1	53.07	0.0
	9	27.17	75.08	124.4	162.1	182.8	185.3	171.1	142.4	102.3	53.77	0.0
$\gamma = 1$	10	27.12	74.96	124.3	161.8	182.4	184.9	170.6	141.9	101.9	53.57	0.0
	11	27.14	75.02	124.3	161.9	182.5	185.1	170.8	142.1	102.1	53.65	0.0
	12	27.13	75.01	124.3	161.9	182.5	185.0	170.8	142.1	102.0	53.63	0.0

В табл. 2÷4 приведены значения $\overline{w}/\overline{q}$, $\overline{N}/\overline{q}$ и $\overline{M}/\overline{q}$ при (2.12).

Таблица 2

$\dfrac{\overline{w}}{\overline{q}}$		$\overline{B}=0$		$\overline{B}=1$		$\overline{B}=2$		$\overline{B}=5$	
		χ		χ		χ		χ	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\overline{x}$	0	0	0	19.86	27.13	32.07	43.03	52.52	68.15
	0.1	15.81	18.07	56.99	75.01	81.44	107.4	119.3	155.4
	0.2	45.75	52.81	97.53	124.3	128.0	164.8	174.4	223.8
	0.3	73.79	86.12	128.8	161.9	162.2	204.7	209.9	266.7
	0.4	92.63	109.4	145.9	182.5	177.2	223.7	224.1	283.1
	0.5	99.70	119.4	147.8	185.0	175.9	221.9	218.2	275.2
	0.6	95.15	115.7	135.7	170.8	159.5	201.7	194.9	246.3
	0.7	80.50	99.61	11.9	142.1	130.4	166.0	157.9	200.4
	0.8	58.03	73.26	79.46	102.0	91.99	118.2	110.7	141.5
	0.9	30.31	39.17	41.15	53.63	47.48	61.75	56.93	73.44
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 3

$\dfrac{\overline{N}}{\overline{q}}$		$\overline{B}=0$		$\overline{B}=1$		$\overline{B}=2$		$\overline{B}=5$	
		χ		χ		χ		χ	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\overline{x}$	0	2.360	2.562	2.233	2.368	2.159	2.259	2.052	2.108
	0.1	1.955	2.162	1.828	1.968	1.754	1.859	1.648	1.708
	0.2	1.555	1.762	1.428	1.568	1.354	1.459	1.248	1.308
	0.3	1.155	1.362	1.028	1.168	0.954	1.059	0.848	0.908
	0.4	0.755	0.962	0.628	0.768	0.554	0.659	0.448	0.508
	0.5	0.355	0.562	0.228	0.368	0.154	0.259	0.048	0.108
	0.6	-0.045	0.162	-0.172	-0.032	-0.245	-0.140	-0.352	-0.292
	0.7	-0.445	-0.238	-0.572	-0.432	-0.645	-0.540	-0.752	-0.692
	0.8	-0.845	-0.638	-0.972	-0.832	-1.045	-0.940	-1.152	-1.092
	0.9	-1.245	-1.038	-1.372	-1.232	-1.446	-1.340	-1.552	-1.492
	1	-1.634	-1.438	-1.762	-1.632	-1.836	-1.739	-1.943	-1.892

Таблица 4

$\dfrac{\overline{M}}{\overline{q}}$		$\overline{B}=0$		$\overline{B}=1$		$\overline{B}=2$		$\overline{B}=5$	
		χ		χ		χ		χ	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\overline{x}$	0	-2.838	-4.496	-1.821	-2.943	-1.233	-2.079	-0.382	-0.866
	0.1	-1.115	-2.607	-0.199	-1.209	0.329	-0.431	1.095	0.660
	0.2	0.289	-1.037	1.103	0.205	1.573	0.897	2.254	1.867
	0.3	1.373	0.212	2.085	1.299	2.497	1.904	3.092	2.753
	0.4	2.137	1.142	2.748	2.073	3.100	2.592	3.611	3.320
	0.5	2.581	1.751	3.090	2.528	3.384	2.960	3.809	3.567
	0.6	2.706	2.041	3.112	2.662	3.347	3.008	3.688	3.493
	0.7	2.509	2.011	2.815	2.476	2.991	2.736	3.246	3.099
	0.8	1.994	1.660	2.197	1.971	2.315	2.144	2.485	2.386
	0.9	1.158	0.989	1.259	1.145	1.318	1.231	1.403	1.353
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Для наглядности на рис. 4÷7 приведены графики изменения по длине балки величин $\overline{w}/\overline{q}$, $\overline{\varphi}/\overline{q}$, $\overline{N}/\overline{q}$ и $\overline{M}/\overline{q}$ при $\overline{B}=0.5$, для классического случая $\chi=0$ и для случаев учета влияния поперечного сдвига $\chi=5$ и $\chi=8$.

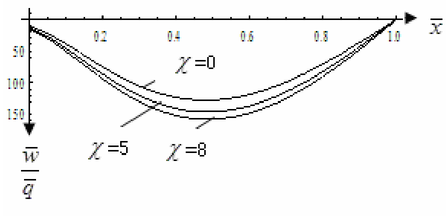


Рис. 4.

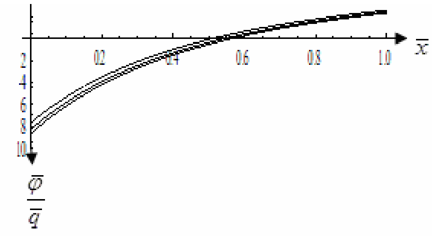


Рис. 5.

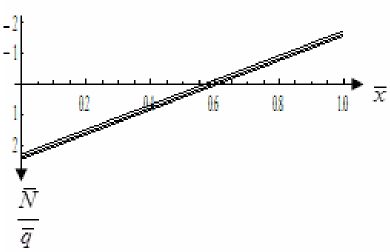


Рис. 6.

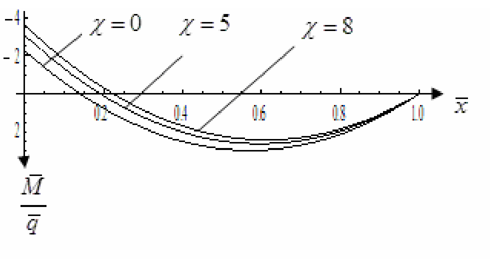


Рис. 7

Отмеченные таблицы и графики приводят к следующим заключениям:

1. С возрастанием параметра $\overline{B}$, а следовательно, и $\overline{D}$ изгибающий момент на упруго-защемленной опоре $\overline{x}=0$, оставаясь отрицательным, по модулю уменьшается. Это и естественно, так как возрастание параметров $\overline{B}$ и $\overline{D}$ означает ослабление упруго-защемленной опоры, уменьшение ее жесткости.

2. Возрастание $\overline{B}$ и $\overline{D}$ приводит к увеличению прогибов.

3. При больших значениях $\overline{B}$ вместо геометрической линейной постановки принимает нелинейную постановку.

4. При стремлении $\overline{B}$ к бесконечности упруго-защемленная опора исчезает и левый конец балки становится свободным, а правый – шарнирно опертым, балка превращается в механизм, и ее равновесие при действии вертикальной нагрузки невозможно.

5. Значение параметра χ, учитывающего влияние поперечного сдвига, мало влияет на форму графика изменения $\overline{\varphi}/\overline{q}$ по длине балки.

6. Значение χ практически не влияет на форму графика поперечной силы $\overline{N}/\overline{q}$, которая практически остается прямой линией.

7. Как и следовало ожидать, возрастание χ приводит к увеличению прогибов балки.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемленной опорой

Пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса – Винклера, определяются параметры упруго-защемленной опоры балки и связь между ними. Решается задача изгиба ортотропной балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-защемленной опоры. Учитывается влияние поперечного сдвига. На основе полученного решения делаются качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան

Առաձգական ամրակցման հենարանով փոփոխական հաստության օրթոտրոպ հեծանի ծռման ոչ դասական խնդիրը

Օգտվելով Ֆուսս – Վինկլերի վարկածին անալոգ վարկածից՝ որոշվում են հեծանի առաձգական ամրակցման հենարանի պարամետրերը և նրանց միջև եղած կապը: Լուծվում է առաձգական ամրակցման հենարանով փոփոխական հաստության օր-թոտրոպ հեծանի ծռման խնդիրը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Ստացված լուծ-ման հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan

Non Classical Problem of Bending of an Orthotropic Beam of Variable Thickness with Elastically Clamped Support

Using the hypothesis, similar to the Fuss-Winkler's one, parameters of the elastically clamped support of a beam and the connection between them are determined. The problem of bending of an orthotropic beam of variable thickness in the presence of elastically clamped support is solved. The effect of shear forces are taken into account. On the basis of the received solution the qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван. Изд. НАН РА «Гитутюн». 2000. 122 с.
3. *Киракосян Р.* М. - ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 101-107.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 28/ IV 2014)

Ключевые слова: *устойчивость упругой прямоугольной пластинки, сосредоточенная инерционная масса, сосредоточенный инерционный момент поворота, сверхзвуковое обтекание.*

Введение. Как известно [1–3], для обеспечения безопасности полета на современном этапе развития околозвуковой и сверхзвуковой авиации и ракетотехники при проектировании и конструировании любого летательного аппарата неизбежно возникает вопрос об упругой устойчивости панелей их обшивки и хвостового оперения, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки. Поэтому рассмотрение задач устойчивости тонких упругих пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, в которых поведение пластинки жёстко связано с воздействием обтекающего её сверхзвукового потока газа, имеет важное прикладное и теоретическое значение. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций: статическую (дивергентную) и динамическую (флаттерную) неустойчивости. Деформации, возникающие при флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин [1, с.175]. Изучению данного вопроса посвящено огромное количество работ, всеобщий обзор которых содержится, в частности, в монографии [2].

В предлагаемой работе исследуется устойчивость состояния невозмущённого равновесия тонкой упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, направленным от шарнирно закреплённого края к свободному краю параллельно остальным двум шарнирно закреплённым краям, в предположении, что вдоль свободного края пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки. С помощью аналитических и численных методов анализа показано, что состояние невозмущённого равновесия прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы устойчиво, в отличие от состояния невозмущённого равновесия обтекаемой удлинённой пластинки, которое при определенных значениях скорости потока газа теряет динамическую устойчивость: имеет место явление флаттера. Найдены критические скорости флаттера. Показана существенная зависимость критической скорости флаттера от отношения коэффициентов, характеризующих, соответственно, сосредоточенные инерционные моменты поворота и массы, приложенные вдоль свободного края удлинённой пластинки.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. При этом предполагается, что течение газа является плоским и потенциальным, и пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромки $x=0$, $y=0$ и $y=b$ шарнирно закреплены. Будем считать, что шарниры идеальны. Край $x=a$ пластинки, вдоль которого приложены одновременно инерционные массы m_c и моменты поворота I_c, свободен [3 (с. 27, 101), 4].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено, и пластинка начнет совершать возмущённое движение с прогибом $w=(x,y,t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [5, 6]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль свободного края пластинки $x=0$ сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c. При этом влиянием распределённой массы пластинки и сил сопротивления можно пренебречь согласно примечанию 1.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [5, 6], описываются следующим дифференциальным уравнением [3 (с. 245)]:

$$D\Delta^2 w + a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \qquad (1.1)$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жесткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [3, 4]

$$w = 0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,,\quad x = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -D^{-1}I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = D^{-1}m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,,\ x = a\,; \qquad (1.2)$$

$$w = 0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,,\quad y = 0 \text{ и } y = b, \qquad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшие значения скорости потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к неустойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3).

Примечание 1. Методы исследования неконсервативных задач упругой устойчивости могут быть разбиты на две группы [1, 3]. К первой группе принадлежат методы, основанные на непосредственном анализе дифференциальных уравнений, описывающих движение упругого тела – «точные методы». К другой группе относятся приближённые методы, суть которых сводится к замене упругого тела некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы с последующим анализом этой эквивалентной системы [3 (с. 27, 101)]. В данной работе с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче устойчивости распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [3 (с. 101), 4]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления, быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа: значения критических скоростей являются несколько завышенными.

2. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n p x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot\exp(\lambda t)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}\,, \qquad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение

$$(p^2-1)^2+\alpha_n^3 p=0\,,\ \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}\,,\ \alpha_n^3>0\,, \tag{2.2}$$

которое, очевидно, имеет два отрицательных действительных корня $p_1<0$, $p_2<0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4}=\alpha\pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha>0$. Следовательно, общее решение уравнения (1.1) в соответствии с выражением (2.1) запишется в виде суммы

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\exp(\mu_n p_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot\exp(\lambda t)\,,\quad \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.3}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; p_k – корни уравнения (2.2), определяемые следующими выражениями [7]:

$$p_{1,2}=-\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-\frac{q-1}{2}}\,,\quad p_{1,2}<0\,,$$

$$p_{3,4}=\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+\frac{q-1}{2}}. \tag{2.4}$$

Здесь q ($q>1$) – единственный действительный корень кубического уравнения [7]

$$8\cdot(1+q)^2(q-1)=\alpha_n^6,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3},\quad \mu_n=\pi nb^{-1}. \tag{2.5}$$

Подставляя общее решение (2.3) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2), (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравнивая определитель этой системы к нулю, после несложных преобразований получаем дисперсионное уравнение в безразмерных переменных относительно собственного значения λ системы «пластинка–поток» (1.1)–(1.3) в виде следующего биквадратного уравнения:

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+(\chi_n A_1+\delta_n A_2)\lambda^2+A_3=0\,,\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1},\ \delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}; \tag{2.8}$$

χ_n и δ_n – приведенные значения сосредоточенных инерционных моментов поворота I_c и масс m_c соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x=a$. В данной работе выражения, определяющие коэффициенты A_i уравнения (2.8), не приведены в силу их громоздкости и ограниченности размера статьи.

С помощью аналитических и численных методов исследования легко показать, что коэффициенты $A_0=A_0(q,n,\gamma)$, $A_1=A_1(q,n,\gamma)$, $A_2=A_2(q,n,\gamma)$, $A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu)$ биквадратного уравнения (2.8) и его дискриминант положительны для всех значений $q>1$, $n\geq 1$, $\gamma=ab^{-1}\in(0,\infty)$, $\nu\in(0,0.5)$. А это означает, что характеристическое уравнение (2.8) имеет две пары чисто мнимых корней, так как $\lambda_1^2<0$, $\lambda_2^2<0$.

Следовательно, возмущённое движение системы “пластинка–поток” (1.1)-(1.3) при всех значениях “характерных” параметров a, b, n, ν, I_c, m_c, q является устойчивым.

Дисперсионное уравнение, соответствующее случаю, в котором $V=0$ (необтекаемая пластинка), имеет вид биквадратного уравнения (2.8), коэффициенты A_{0i} которого определяются выражениями: $A_{00}= sh(2\pi n\gamma)-2\pi n y$, $A_{01}= 4ch^2(\pi n\gamma)$, $A_{02}= 4sh^2(\pi n\gamma)$, $A_{03}= (1-\nu)\cdot(2(1-\nu)\pi n\gamma+(3+\nu) \quad sh(2\pi n\gamma))$. Из очевидной положительности коэффициентов A_{0i} и дискриминанта $\Delta_0=(\chi_n A_{01}+\delta_n A_{02})^2-4\chi_n\delta_n A_{00}A_{03}$, $\chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1}$, $\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}$, следует, что возмущённое движение необтекаемой прямоугольной пластинки ($V=0$), так же, как и при её обтекании сверхзвуковым потоком газа ($V\neq 0$), является устойчивым при всех значениях параметров системы (1.1)–(1.3).

Рассмотрим частные случаи.

3.1. Пусть $a\to\infty$, что соответствует случаю, в котором полубесконечная пластина-полоса обтекается сверхзвуковым потоком газа. Легко показать, что в этом случае также возмущённое движение, будучи устойчивым при отсутствии обтекания $(V=0)$, остается таковым и при обтекании ($V\neq 0$).

В самом деле, при условии $a\to\infty$ дисперсионное уравнение (2.8) запишется в виде

$$\chi_n\delta_n a_{01}\lambda^4+(\chi_n a_{11}+\delta_n a_{21})\lambda^2+a_{31}=0\,,\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1}\,,\ \delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}\,, \quad (3.1)$$

где $a_{01}=1$, $a_{11}=\sqrt{2(q+1)}(q+\sqrt{q^2-1})$, $a_{21}=\sqrt{2(q+1)}$,

$$a_{31}=2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2.$$

Характеристическое уравнение (3.1) в силу очевидной положительности его коэффициентов a_{i1} и дискриминанта $\Delta_1=2(q+1)\left[\chi_n(q+\sqrt{q^2-1})-\right.$ $\left.-\delta_n\right]^2+4\chi_n\delta_n(1+2q\nu+\nu^2)$ при всех значениях параметров системы: $\chi_n=$ $=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1}>0$, $\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}>0$, $q>1$, $\nu\in(0,0.5)$ имеет две пары чисто мнимых корней. Следовательно, возмущённое движение обтекаемой полубесконечной пластины-полосы является устойчивым.

При отсутствии обтекания ($V=0$) характеристическое уравнение системы имеет вид: $\chi_n\delta_n\lambda^4+2(\chi_n+\delta_n)\lambda^2+(1-\nu)(3+\nu)=0$, откуда из очевидной положительности его коэффициентов и дискриминанта $\Delta_{11}=(\chi_n-\delta_n)^2+$ $+\chi_n\delta_n(1+\nu)^2$ следует, что возмущённое движение пластины-полосы при отсутствии обтекания также является устойчивым.

3.2. Рассмотрим поведение возмущённого движения удлинённой пластинки ($b\to\infty$) в сверхзвуковом потоке газа.

Дисперсионное уравнение (2.8) при условии $b\to\infty$ запишется в виде

$$\chi\delta a_{02}\lambda^4+(\chi a_{12}+\delta a_{22})\lambda^2+a_{32}=0\,,\quad \chi=I_c a(Dr)^{-1}\,,$$

$$\delta=m_c a^3(Dr^3)^{-1}\,,\quad r=a\sqrt[3]{a_0\rho_0 V D^{-1}}\,; \quad (3.2)$$

где $a_{02}=1-\exp(-2r)-2(\exp(-0.5r)-\exp(-1.5r))cos(0.5\sqrt{3}r)$;

$$a_{12} = 1 + 2\exp(-1.5r)\cos\left(\frac{\pi}{6} - 0.5\sqrt{3}r\right);\ a_{32} = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.5\sqrt{3}r\right)\cdot\exp(-1.5r);$$

$$a_{22} = 1 + \exp(-2\,\mathrm{r}) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0.5\sqrt{3}r\right)\cdot\exp(-0.5r) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.5\sqrt{3}r\right)\cdot\exp(-1.5r)\,.$$

Область устойчивости M_0 при всех $\chi > 0$ и $\delta > 0$ определяется соотношениями

$$a_{02} > 0\ ,\ a_{12} > 0\ ,\ a_{22} > 0\ ,\ a_{32} > 0\ ,\ \Delta_2 > 0\,, \qquad (3.3)$$

где $\Delta_2 = (\chi a_{12} + \delta a_{22})^2 - 4\chi\delta a_{02}a_{32}$ – дискриминант биквадратного уравнения (3.2). При значениях параметров из области M_0 уравнение (3.2) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: обтекаемая удлинённая пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Легко показать, что коэффициенты уравнения (3.2) $a_{i2} > 0$ при всех $r > 0$. Тогда в силу условий (3.3) границей области устойчивости M_0 является гиперповерхность

$$\Delta_2 = (\chi a_{12} + \delta a_{22})^2 - 4\chi\delta a_{02}a_{32} = 0\,, \qquad (3.4)$$

на которой дисперсионное уравнение (3.2) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе области устойчивости (3.4) при скоростях потока $V \geq V_{cr\cdot fl}$ возмущённое движение обтекаемой удлинённой пластинки теряет динамическую устойчивость: из области устойчивости M_0 плавно переходит в область флаттерной неустойчивости M_1, определяемую соотношением $\Delta_2 < 0$ при условиях $a_{i2} > 0$. Здесь $V_{cr.fl}$ – критическая скорость флаттера, разграничивающая области M_0 и M_1, которая находится по формуле $V_{cr.fl} = r_{cr}^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ в соответствии с обозначением (3.2): $r^3 = a_0\rho_0 a^3 V D^{-1}$; а r_{cr} – первый корень уравнения (3.4). Из условия $\Delta_2 < 0$ следует, что при значениях параметров из области M_1 дисперсионное уравнение (3.2) имеет две пары комплексно сопряженных корней, по крайней мере одна из которых имеет положительную вещественную часть.

Приведенная критическая скорость флаттера $V_{cr.fl}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ является функцией только от отношения $k = \chi\cdot\delta^{-1}$ (или $k = I_c\left(m_c a^2\right)^{-1}$) в силу соотношений (3.2) и (3.4).

Проведенные аналитические и численные исследования показали, что при значениях $k \in [0.013, 0.078]$ и скоростях потока газа $V \geq V_{cr\cdot fl}$ происходит «мягкий» переход возмущённого движения обтекаемой удлинённой пластинки из области устойчивости M_0 в область динамической неустойчивости M_1: гармонические колебания пластинки плавно переходят во флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде. В таблице представлены некоторые значения приведённых критических скоростей флаттера $V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, соответствующие значениям $k \in [0.013, 0.078]$. Критическая скорость флаттера $V_{cr.fl}$ как функция от параметра $k = \chi\delta^{-1} = I_c\left(m_c a^2\right)^{-1}$ (остальные параметры считаются фиксированными) достигает при $k \approx 0.06$ наименьшего значения: $min V_{cr \cdot fl} = 64.41 D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}$, которое примерно в два раза меньше критической скорости флаттера, найденной в работе [3] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой удлинённой пластинки в случае, в котором скорость сверхзвукового потока направлена от жёстко защемлённой кромки к свободной кромке параллельно бесконечным краям пластинки.

$k = I_c(m_c a^2)^{-1}$	0.013	0.02	0.04	0.06	0.078
$V_{cr.fl} \cdot (a_0\rho_0 a^3) D^{-1}$	215.45	104.23	74.09	64.41	85.18

Дисперсионное уравнение (3.2), соответствующее условию $r = 0$ ($V = 0$), описывается соотношением $\chi\delta\lambda^4 + 3(\chi + \delta)\lambda^2 = 0$, откуда следует, что оно имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2. Это означает, что при скорости потока газа $V = V_{cr.div} = 0$ ($V_{cr.div}$ – критическая скорость дивергенции) невозмущённая форма равновесия необтекаемой удлинённой пластинки является статически неустойчивой, а устойчивой является искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка), около которой необтекаемая удлинённая пластинка совершает гармонические колебания. При скоростях потока газа $V > V_{cr \cdot fl} = 0$, т.е. при обтекании возмущённое движение удлинённой пластинки становится статически устойчивым: пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённой формы равновесия.

Заметим, что в случае, когда скорость потока газа направлена от свободного края пластинки к шарнирно закреплённому краю, картина поведения возмущённого движения системы «пластинка–поток» в смысле потери устойчивости иная, более сложная [7]. В работе [7] с помощью аналитических методов анализа в пространстве «характерных» параметров задачи выделены области, в которых возмущённое движение пластинки теряет как статическую, так и динамическую устойчивость: имеет место дивергенция, либо локализованная дивергенция в окрестности свободного края пластинки, либо флаттер пластинки. При этом критическая скорость дивергенции зависит от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки и не зависит от сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс, приложенных вдоль свободного края пластинки. В случае, когда ширина пластинки превосходит ее длину более чем в два раза, наблюдается только лишь явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки, аналогичное явлению локализованной дивергенции, возникающей при обтекании полубесконечной пластины–полосы сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. А в случае, когда отношение ширины пластинки к ее длине примерно порядка одной тысячной и меньше, поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки: имеют место явления дивергенции и флаттера, которые при изменении скорости потока газа либо чередуются, либо флаттер возникает в зоне дивергентной неустойчивости. Потеря устойчивости возмущённого движения пластинки наиболее ярко проявляется при умеренных значениях отношения ширины пластинки к её длине, при которых имеет место как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости: зоны дивергентной и флаттерной неустойчивости либо чередуются, либо флаттерная неустойчивость возникает в зоне дивергентной неустойчивости [7]. При этом наименьшее значение критической скорости флаттера больше значения $\min V_{cr\cdot fl} = 64.41D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}$, найденного в настоящей работе.

4. Основные результаты. С помощью аналитических и численных методов исследования исходной задачи устойчивости (1.1)-(1.3) получены следующие результаты.

Показано, что возмущённое движение обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы не теряет устойчивости, в отличие от удлинённой пластинки, которая при отсутствии обтекания, будучи статически неустойчивой, при обтекании становится статически устойчивой. Найдены критические скорости флаттера, при превышении которых возмущённое движение обтекаемой удлинённой пластинки теряет динамическую устойчивость: удлинённая пластинка совершает флаттерные колебания около невозмущённой формы равновесия.

Институт механики НАН РА

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа

Рассмотрена задача устойчивости прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа, направляемом от шарнирно закрепленного края к противоположному свободному краю параллельно двум другим шарнирно закрепленным краям. Показано, что возмущенное движение прямоугольной пластины устойчиво.

M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan

On the Problem of the Stability of an Elastic Rectangular Plate in the Supersonic Gas Flow

The problem of the stability of an elastic rectangular plate is investigated in a supersonic flow of gas, directed from the hinged fixed edge to the opposite free edge, parallel to the other two hinged fixed edges. It is shown that the perturbed motion of the rectangular plate is stable.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է հոդակապորեն ամրակցված եզրից դեպի հակադիր ազատ եզրը՝ զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված, որ ուղղանկյուն սալի խոտորված շարժումը կայուն է:

Литература

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
2. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. М. Наука. 2006. 247 с.
3. *Болотин В.В*. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Наука. 1961. 329 с.
4. *Ржаницын А. Р.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
5. *Ильюшин А. А.* – ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. *Ashley H., Zartarian G.* – J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
7. *Белубекян М.В., Мартиросян С. Р.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67(2). С. 8-28.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МЕХАНИКА

УДК 621.38

А. А. Гукасян

Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 12/ V 2014)

Ключевые слова: *кинематика, многозвенный упругий манипулятор, криволинейные координаты.*

Введение. Исследование движения манипуляционных роботов во многих случаях более удобно определять с помощью некоторых криволинейных координат. За такие координаты могут быть приняты любые непрерывные однозначные функции $s_p\left(p=1,2,3\right)$ от декартовых координат, удовлетворяющие необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно декартовых координат. Методы построения криволинейных систем координат проведены в работах [1-3]. Здесь будем рассматривать лишь ортогональные системы. Ниже приводится краткое описание математической модели многозвенного манипулятора с обобщенной упругостью и исследуется кинематика движения в криволинейных координатах.

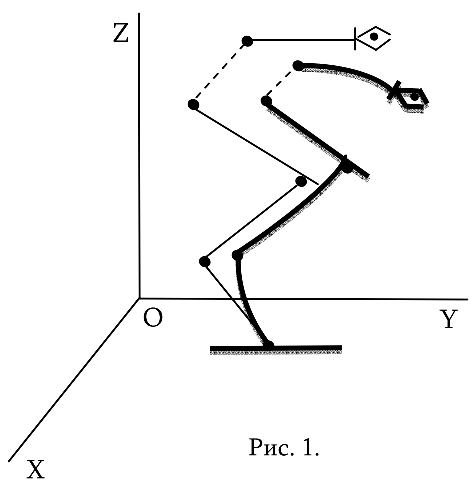


Рис. 1.

1. Математическая модель многозвенного манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируется как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [4-7]. Манипуляционные роботы с такими свойствами в дальнейшем назовем манипулятором с обобщенной упругостью (рис. 1).

Обобщенные координаты

жесткой модели манипулятора, определяющие его конфигурацию в пространстве *OXYZ*, обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$, дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах, обозначим через $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$ $(m \le n)$ (рис. 2). Деформацию упругих звеньев манипулятора относительно их недеформированного состояния определим через вектор $\mathbf{w}(t,\xi) = (w_1(t,\xi), w_2(t,\xi), \ldots, w_k(t,\xi))^T$, где ξ – произвольная точка упругого звена. Заметим, что координаты $\alpha_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ и $\beta_j\,(j = 1,2,\ldots,m)$ зависят только от времени.

Декартовые координаты, определяющие положения точек манипулятора в пространстве, зависят как от обобщенных координат жесткой модели $\alpha_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$, так и от дополнительных координат $w_l(t,\xi)$ $(l = 1,2, \ldots,k)$ и $\beta_j\,(j = 1,2,\ldots,m)$, т. е.

$$q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}) \quad (i = 1,2,3). \tag{1.1}$$

Следовательно, криволинейные координаты произвольной точки манипулятора s_p $(p = 1,2,3)$ также будут зависеть от вышеназванных координат

$$s_p = s_p(q_1,q_2,q_3) = s_p\left[f_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})\right] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), \quad (p = 1,2,3) \tag{1.2}$$

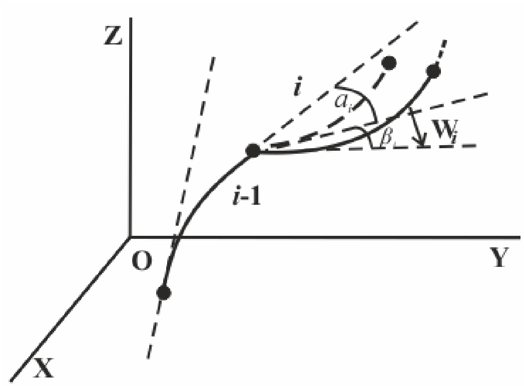


Рис. 2.

Определим скорость движения точек упругого манипулятора в рамках линейной теории упругости, согласно которой жесткость соединительных узлов между звеньями велика $(c_j \sim \varepsilon^{-1})$, а обобщенные координаты β_j малы $(\beta_j \sim \varepsilon, \quad j = 1,2,\ldots,m)$. Предполагается также, что компоненты вектора упругих смещений звеньев малы по сравнению с их линейными размерами, т. е. $w_l(t,\xi) \sim \varepsilon, w_l'(t,\xi) \sim \varepsilon, \dot{w}_l(t,\xi) \sim \varepsilon, (l = 1,2,\ldots,k)$, где $\varepsilon << 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой. Согласно вышеизложенному в пределе при $\varepsilon \to 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а звенья – абсолютно твердыми телами.

2. Скорость движения в криволинейных координатах. Радиус-вектор произвольной точки манипулятора относительно неподвижной точки будет функцией от криволинейных координат $s_p\ (p = 1,2,3)$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3). \qquad (2.1)$$

Дифференцируя зависимость (2.1) по времени, с учетом (1.2) для скорости движения найдем следующие выражения:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \right]. \qquad (2.2)$$

Так как при составлении каждой из производных $\dfrac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p}(p = 1,2,3)$ переменной считается только данная координата $s_p\ (p = 1,2,3)$, то отвечающая ей координатная линия оказывается годографом вектора $\boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3)$. Следовательно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} = H_p \cdot s_p^0 \quad (p = 1,2,3), \qquad (2.3)$$

где s_p^0 – орт данной оси криволинейных координат, а величины

$$H_p = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \right| = \left[\left(\frac{\partial q_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

называются коэффициентами Лямэ. Направляющие косинусы координатных осей определяются выражениями [1, 2]

$$\begin{aligned} \cos(s_p^0 \cdot i) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot i = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_1}{\partial s_p}, \\ \cos(s_p^0 \cdot j) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot j = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_2}{\partial s_p} \quad (p = 1,2,3), \\ \cos(s_p^0 \cdot k) &= \frac{1}{H_p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \cdot k = \frac{1}{H_p} \frac{\partial q_3}{\partial s_p}. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

С учетом (2.3), (2.4) вектор скорости (2.2) в криволинейной системе координат представим в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] s_p^0. \qquad (2.6)$$

Формулу (2.6) можно представить в более удобном виде, вводя обобщенные матрицы Лямэ $\mathbf{H}_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})(p = 1,2,3)$, элементы которых зависят от коэффициентов Лямэ $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ и изменения геометрической структуры манипулятора относительно обобщенных координат α_i, β_j, w_l $(i = 1, 2, \ldots, n,$ $j = 1, 2, \ldots m, l = 1, 2, \ldots, k)$.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(3 \times n)$ с общим элементом

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \right\}_{p,i=1}^{3,n}. \tag{2.7}$$

Матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ размера $(3 \times m)$ имеет следующие элементы:

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \right\}_{p,j=1}^{3,m}. \tag{2.8}$$

Введем также матрицу $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ с элементами

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \right\}_{p,l=1}^{3,k}. \tag{2.9}$$

$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(3 \times k)$.

Вектор скорости (2.6) с учетом введенных обобщенных матриц Лямэ (2.7) - (2.9) представим в виде суммы трех слагаемых

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}}. \tag{2.10}$$

При $\boldsymbol{\beta} = 0$ и $\mathbf{w} = 0$ формула (2.10) совпадает с формулой, определяющей скорость движения для абсолютно жесткой модели манипулятора, поскольку $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \mathbf{H}^*(\boldsymbol{\alpha})$, а при $\mathbf{w} = 0$, $(\boldsymbol{\beta} \neq 0)$ (2.10) совпадает с формулой, определяющей скорость движения манипулятора, соединительные узлы между звеньями которого обладают упругой податливостью [8].

Для оценки слагаемых в (2.10) в рамках принятой модели манипулятора пользуемся разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и $H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ $(p = 1, 2, 3)$ по формуле Тейлора относительно β_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и $w_l(t, \xi)(l = 1, 2, \ldots, k)$ с точностью ε

$$s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + o(\varepsilon^2), \tag{2.11}$$

$$H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + o(\varepsilon^2)$$

$$(p = 1, 2, 3). \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) и (2.12) в (2.6) или в (2.10), после некоторых вычислений вектор скорости движения манипулятора с точностью ε представим в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right] s_p^0 + \sum_{p=1}^{3} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \right.\right.\right.$$

$$+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\Bigg)\beta_j\Bigg]\dot{\alpha}_i\Bigg\}s_p^0+\sum_{p=1}^{3}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{l=1}^{k}\Bigg(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial \alpha_i}+$$

$$+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\Bigg)w_l\Bigg]\dot{\alpha}_i\Bigg\}s_p^0+\sum_{p=1}^{3}\Bigg[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\dot{\beta}_j\Bigg]s_p^0+$$

$$+\sum_{p=1}^{3}\Bigg[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\dot{w}_l\Bigg]s_p^0 \qquad (2.13)$$

или, выводя матрицы $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ и $\mathbf{H}_5^*$ $(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+$$
$$+\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}$$

или

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})+\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})+\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}), \qquad (2.14)$$

где

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ \ \mathbf{v}_2=\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}},$$
$$\mathbf{v}_3=\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}.$$

Здесь матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ имеет размерность $(3\times n)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \qquad (2.15)$$

$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$ имеет элементы

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j\partial \alpha_i}+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\right]\beta_j\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \quad (2.16)$$

Элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$ зависят от $\mathbf{w}(t,\xi)$ и являются

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})=\left\{\sum_{l=1}^{k}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial \alpha_i}+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right]w_l\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \quad (2.17)$$

Матрицы $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$ и $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$ имеют размерность $(3\times n)$.

Матрицы $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ имеют размерность $(3\times m)$, $(3\times k)$ соответственно с элементами

$$\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\right\}_{p,j=1}^{3,m}, \qquad (2.18)$$

$$\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right\}_{p,l=1}^{3,k}. \qquad (2.19)$$

Разложения (2.11), (2.12) позволяют представить вектор скорости (2.14) движения многозвенного упругого манипулятора в рамках скорости движения абсолютно жесткой модели с добавлением слагаемых, порядок которых не превышает ε. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ – скорость движения жесткой модели манипулятора, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – скорость, обусловленная упругостью соединительных узлов манипулятора $\left(\mathbf{v}_2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\sim\varepsilon\right)$, а $\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}$ – скорость, обусловленная упругостью звеньев манипулятора $\left(\mathbf{v}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}\right)\sim\varepsilon\right)$. При $\beta_j = 0$ $(j=1,2,\ldots,m)$ $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0$, а при $w_l(t,\xi)=0$ $(l=1,2,\ldots,k)$ $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0$.

3. Ускорение в криволинейных координатах. После определения скорости движения характерных точек манипулятора с обобщенной упругостью по формуле (2.14) можно также определять проекции вектора ускорения a_p $(p=1,2,3)$ на осях криволинейной системы координат. Проекции вектора ускорения определяются следующим образом:

$$a_p = \mathbf{a}\cdot s_p^0 = \frac{1}{H_p}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s_p}, \tag{3.1}$$

где согласно (2.3) $\dfrac{1}{H_p}\dfrac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} = s_p^0$ $(p=1,2,3)$.

Проведя ряд преобразований, получим для проекции вектора ускорений движения манипулятора [1, 2]

$$a_p = \frac{1}{H_p}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{s}_p}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2}\right\}\ (p=1,2,3),\ v^2 = \sum_{p=1}^{3} v_p^2, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} v_p &= H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j\partial\alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j}\right)\beta_j\right]\dot{\alpha}_i + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{k}\left(H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l\partial\alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\right)w_l\right]\dot{\alpha}_i + \\ &+H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_j}\dot{\beta}_j + H_p(\boldsymbol{\alpha},0,0)\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}\dot{w}_l. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим компоненты вектора ускорения движений манипулятора с обобщенной упругостью в зависимости от обобщенных координат $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$, скоростей $(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\mathbf{w}})$ и ускорений $(\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\mathbf{w}})$

$$a_p = a_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\mathbf{w}}\right)\ (p=1,2,3). \tag{3.4}$$

При малых деформациях компоненты вектора ускорений a_p $(p=1,2,3)$ также можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$a_p = a_p^1\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right) + a_p^2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right) + a_p^3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}\right)\ (p=1,2,3), \tag{3.5}$$

где слагаемые $a_p^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ $(p=1,2,3)$ соответствуют ускорению движений абсолютно жесткой модели манипулятора, а слагаемые $a_p^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}})$ и $a_p^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}})$ $(p=1,2,3)$ зависят от упругости соединительных узлов и упругости звеньев манипулятора, соответственно.

Институт механики НАН РА

А. А. Гукасян

Кинематика упрогого манипулятора в криволинейной системе координат

В криволинейной системе координат исследована кинематика многозвенного упругого манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора моделируются как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. В рамках линейной теории упругости получены выражения для скорости и ускорения движений характерных точек звеньев и схвата упругого манипулятора через обобщенные матрицы Ляме.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Առաձգականությամբ մանիպուլյատորի կինեմատիկան կորագիծ կոորդինատական համակարգում

Կորագիծ կոորդինատական համակարգում ուսումնասիրվում է բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկան: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորվում են որպես առաձգական ձողեր, իսկ օղակների միացման հանգույցները պարունակում են մեծ կոշտությամբ առաձգական էլեմենտներ: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում ստացված են մանիպուլյատորի բնութագրիչ կետերի և բռնիչի շարժման արագության ու արագացման արտահայտությունները Լյամեի ընդհանրացված մատրիցայի միջոցով:

A. A. Ghukasyan

Kinematics of the Elastic Manipulator in Curvilinear Coordinates System

In curvilinear coordinates system the kinematics of multilink elastic manipulator is investigated. It is supposed that the manipulator links are modeled as elastic bars and connecting nodes between links contain the elastic elements of large rigidity. In the framework of linear theory of elasticity the expression for speed as well as acceleration of motion of characteristic link points and elastic manipulator clamp through generalized matrix of Lame are obtained. As an example, the kinematic correlation of motion of two-link manipulator with one elastic link and two elastic connecting hinges is determined.

Литература

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. Москва. Наука. 1961. 824 с.
2. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретичекой механики. Часть 1. М. Наука. 1967. 467 с.
3. БЭС, Математика. М. Большая российская энциклопедия. 1998. 845 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. М. Наука. 1989. 363 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С.101-113.
6. *Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Вешников В. Б., Самвелян К. В., Степанов В. П., Шушко Д. А.* Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт №231. ИПМ АН СССР. М. 1984. 66 с.
7. *Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С. 63-71.
8. *Гукасян А. А., Мачкалян Р. Н.* – Изв. НАН РА..Механика, 2007. Т. 60. №3. С.114-120.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

ФИЗИКА

УДК 621.315

З. Г. Григорян[1], Л. С. Петросян[1,2], академик Э. М. Казарян[1]

Примесные состояния в эллипсоидальных и линзообразных квантовых точках с конечным ограничивающим потенциалом

(Представлено 25/VII 2014)

Ключевые слова: *квантовая точка, эллипсоид, линза, примесные состояния.*

Введение. Последние десятилетия квантовые точки (КТ) очень интенсивно исследуются как теоретически, так и экспериментально. Благодаря своим уникальным свойствам, эти структуры широко используются в разных областях высокотехнологичной промышленности: в дисплеях, лазерах, сенсорах и т. п. [1-3]. Современные методы выращивания КТ позволяют получать структуры сферической, эллипсоидальной, цилиндрической, пирамидальной, линзообразной и других форм (см. напр. [4-10]).

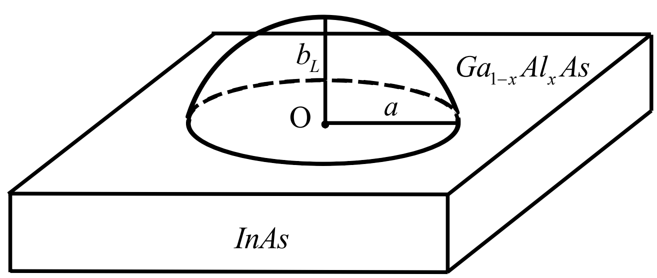


Рис. 1. Линзообразная квантовая точка.

В частности, в результате спонтанного распада на островки тонкого слоя одного материала, осажденного на поверхности другого, отличающегося постоянной решеткой (например InAs/CaAs), могут образоваться линзообразные КТ, у которых высота мало отличается от радиуса основания

($b_L / a \approx 1$, см. рис. 1.) [11]. Следует отметить, что форма и размеры КТ очень сильно влияют на ее физические свойства, и так как в процессе роста КТ возникают деформации ее поверхности, то возникает необходимость учета этого обстоятельства при описании физических процессов в КТ. С другой стороны, существование примеси тоже может оказать большое воздействие на характеристики КТ [12-15]. В связи с этим следует отметить, что авторами [16] в рамках теории возмущений был предложен метод, с помощью которого можно определить воздействие деформации внешней формы КТ на ее электронные состояния. Если рассмотреть линзообразную форму КТ как малуюдеформацию полусферической, а эллипсоидальную – сферической, то этим методом можно учесть влияние таких деформаций на примесные состояния, соответственно в полусферической и сферической КТ. Это и является целью данной работы.

2. Теория. Рассмотрим КТ по форме, мало отличающейся от сферической. Поверхность КТ и потенциальную энергию представим в следующем виде [17]:

$$r_s = r_0\left(1 + f\left(\theta,\varphi\right)\right), \tag{1}$$

$$U\left(r\right) = \begin{cases} U_1\left(r\right), & r < r_s \\ U_2\left(r\right), & r > r_s \end{cases}, \tag{2}$$

где $f\left(\theta,\varphi\right) << 1$ – некоторая функция, $U_1\left(r\right)$ и $U_2\left(r\right)$ – потенциалы, зависящие только от радиальной координаты.

Как было показано в [16], подобную задачу можно решить в рамках теории возмущений. В качестве невозмущенной задачи были рассмотрены электронные состояния в сферической КТ с ограничивающим потенциалом

$$U\left(r\right) = \begin{cases} U_1\left(r\right), & r < r_0 \\ U_2\left(r\right), & r > r_0 \end{cases}. \tag{3}$$

В этом случае волновую функцию невозмущенной задачи можно представить как произведение

$$\Psi^0_{nlm}\left(r,\theta,\varphi\right) = Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)\begin{cases} R_{1nl}\left(E^0_{nl},r\right) & r < r_0 \\ R_{2nl}\left(E^0_{nl},r\right) & r > r_0 \end{cases}, \tag{4}$$

где $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ – сферические гармоники, $R_{1nl}\left(E^0_{nl},r\right)$ и $R_{2nl}\left(E^0_{nl},r\right)$ – радиальные волновые функции. E^0_{nl} – энергия невозмущенной задачи. Тогда, как показано в [16], поправки к энергии ΔE_{nlm} состояния, опиисываемого квантовыми числами n, l, m, находятся из условия

$$Det(d_{ij}^{l,m,n}) = 0, \tag{5}$$

где $d_{ij}^{n,l,m} = T_{nl} f_{lij} + \delta_{ij}\Delta E_{nlm}$,

$$T_{nl} = \frac{\left(R_{1nl}^{(0,2)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right) - R_{2nl}^{(0,2)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right)\right) r_0}{\left(R_{1nl}^{(1,1)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right) - R_{2nl}^{(1,1)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right) - R_{2nl}^{(0,1)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right)\frac{R_{1nl}^{(1,0)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right) - R_{2nl}^{(1,0)}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right)}{R_{1nl}\left(E_{nl}^{0}, r_0\right)}\right)}, \quad (6)$$

$$f_{lmm'} = \int Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi) f(\theta,\varphi) Y_{lm'}(\theta,\varphi) d\Omega, \quad (7)$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Нашей целью будет описание примесных состояний в эллипсоидальной и линзообразной КТ на основе приведенного выше механизма расчетов.

2. 1. Эллипсоидальная КТ. Рассмотрим примесные состояния в эллипсоидальной КТ, по форме мало отличающейся от сферической. Для ограничивающего потенциала воспользуемся моделью прямоугольной потенциальной ямы конечной высоты. Тогда для потенциальной энергии примесного электрона, когда примесь находится в центре эллипсоида, можем записать

$$U^{e}(r) = \begin{cases} U_1^{e}(r) = -\dfrac{e}{\varepsilon r^2}, & r < r_s^{e} \\ U_2^{e}(r) = U_0^{e} - \dfrac{e}{\varepsilon r^2}, & r > r_s^{e} \end{cases}, \quad (8)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость материала КТ и окружающей среды (мы считаем, что в обоих случаях значение ε одно и то же).

В декартовых координатах поверхность эллипсоида описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (9)$$

где a, b, c полуоси эллипсоида. Пусть a – наименьшая полуось эллипсоида, $b = a(1+\alpha_e k)$ и $c = a(1+\alpha_e)$, где α_e и k параметры задачи, описывающие связь между полуосями: $0 < \alpha_e \ll 1$ и $0 < \alpha_e k << 1$. Иначе говоря, эллипсоид мало отличается от сферы. Когда $k = 0$ или 1, реализуются вытянутый или же сплюснутый эллипсоиды вращения соответственно [5]. Из условия равенства объёмов эллипсоида и сферы с радиусом r_0 в первом приближении по α_e можно представить связь между r_0^e и a, а также дать явный вид функции $f^e(\theta,\varphi)$:

$$r_0^e = a\left(1 + \alpha_e \frac{1+k}{3}\right), \quad (10)$$

$$f^e(\theta,\varphi) = \alpha_e \cos^2\theta + \alpha_e k \sin^2\theta \sin^2\varphi - \alpha_e \frac{1+k}{3}. \quad (11)$$

Решения уравнения Шредингера для невозмущенной задачи, когда

$$\begin{aligned} U_1^{e}(r) &= -\frac{e}{\varepsilon r^2}, \\ U_2^{e}(r) &= U_0^{e} - \frac{e}{\varepsilon r^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

известны и имеют вид [18]

$$\Psi^{e0}_{nlm}\left(r,\theta,\varphi\right)=Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)\begin{cases}R^{e}_{1nl}\left(E^{0}_{nl},r\right) & r<r^{e}_{0}\\ R^{e}_{2nl}\left(E^{0}_{nl},r\right) & r>r^{e}_{0}\end{cases}, \qquad (13)$$

где

$$\begin{aligned}R^{e}_{1nl}(E^{e}_{nl},r)&=C^{e}_{1nl}e^{-\gamma^{e}_{1nl}r}r^{\ell}\ {}_1F_1\left[\ell+1-k^{e}_{1nl},2\ell+2;2\gamma^{e}_{1nl}r\right],\\ R^{e}_{2nl}(E^{e}_{nl},r)&=C^{e}_{2nl}e^{-\gamma^{e}_{2nl}r}r^{\ell}\ U\left[\ell+1-k^{e}_{2nl},2\ell+2;2\gamma^{e}_{2nl}r\right],\end{aligned} \qquad (14)$$

${}_1F_1\left[a,b,z\right]$ и $U\left[a,b,z\right]$ – вырожденные гипергеометрические функции первого и второго родов соответственно, $\gamma^{e}_{1nl}=\sqrt{-2\mu_e E^{e}_{nl}/\hbar^2}$, $\gamma^{e}_{2nl}=$ $=\sqrt{2\mu_e\left(U^{e}_{0}-E^{e}_{nl}\right)/\hbar^2}$, $k^{e}_{1nl}=e^2\mu/\gamma^{e}_{1nl}\hbar^2$, $k^{e}_{2nl}=e^2\mu/\gamma^{e}_{2nl}\hbar^2$, μ – эффективная масса электрона, C^{e}_{1nl} и C^{e}_{2nl} – нормировочные коэффициенты. Подставляя найденные волновые функции в интеграл (7) и производя интегрирование для $f_{lmm'}$ получим

$$\begin{aligned}f^{e}_{lmm'}&=\alpha_e\left(\frac{2l\left(l+1\right)-2m^2-1}{\left(2l-1\right)\left(2l+3\right)}-\frac{1}{3}\right)\delta_{mm'}+\\ &+\alpha_e k\left(\frac{l\left(l+1\right)+m^2-1}{\left(2l-1\right)\left(2l+3\right)}\delta_{m,m'}+P_{lm}\delta_{m,m'-2}+P_{lm'}\delta_{m,m'+2}-\frac{1}{3}\right),\end{aligned} \qquad (15)$$

где $P_{lm}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{\left(l-m-1\right)\left(l-m\right)\left(l+m+1\right)\left(l+m+2\right)}}{\left(2l+3\right)\left(2l-1\right)}$.

Далее из условия равенства нулю детерминанта (5) для энергетических поправок ΔE^{e}_{n1m} $\left(m=0,\pm1\right)$ окончательно найдем

$$\begin{aligned}\Delta E^{e}_{n10}&=\frac{2}{15}T^{e}_{n1}\alpha_e\left(-2+k\right),\\ \Delta E^{e}_{n11}&=\frac{2}{15}T^{e}_{n1}\alpha_e\left(1-2k\right),\\ \Delta E^{e}_{n1-1}&=\frac{2}{15}T^{e}_{n1}\alpha_e\left(1+k\right),\end{aligned} \qquad (16)$$

где T^{e}_{n1} определяется согласно (6).

2. 2. Линзообразная КТ. Теперь рассмотрим примесные состояния в линзообразной КТ, геометрически мало отличающейся от полусферы, когда примесь находится в центре основания линзообразной области. Пусть ограничивающий потенциал имеет вид

$$U^{L}\left(r,\theta\right)=U^{L}\left(r\right)+U^{L}\left(\theta\right), \qquad (17)$$

где

$$U^{L}\left(r\right)=\begin{cases}-\dfrac{e^2}{\varepsilon r} & r<r^{L}_{s}\\ U^{L}_{0}-\dfrac{e^2}{\varepsilon r} & r>r^{L}_{s}\end{cases}, \qquad (18)$$

$$U^L(\theta)=\begin{cases}0 & \theta<\pi/2\\ \infty & \theta>\pi/2\end{cases}. \tag{19}$$

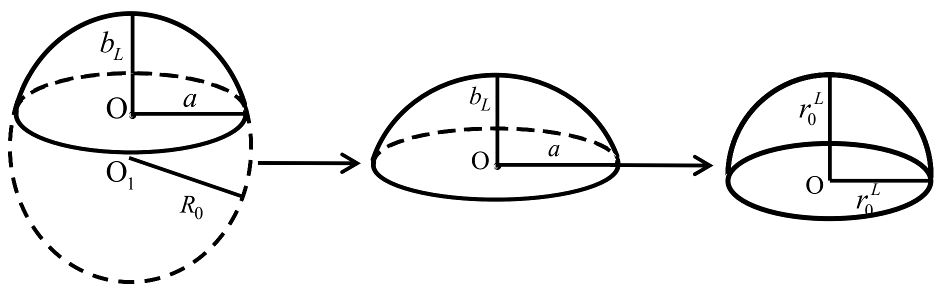


Рис. 2. Схематическое представление перехода от линзообразной области к полусферической.

В декартовых координатах поверхность линзы описывается уравнением

$$x^2+y^2+\left(z+R_0-b_L\right)^2=R_0^2, \tag{20}$$

где R_0 радиус сферы, от которой отсечена линзообразная часть, b_L – высота линзы (см. рис. 2). Пусть $b_L=R_0\left(1-\alpha_L\right)$, где $0\le\alpha_L<<1$, т.е. линза мало отличается от полусферы. С учетом равенства объёмов линзы и полусферы с радиусом r_0^L в первом приближении по α_L получим $r_0^L=R_0\left(1-\frac{\alpha_L}{2}\right)$, $f^L(\theta,\varphi)=\frac{\alpha_L}{2}-\alpha_L\cos\theta$.

В случае полусферической КТ решения уравнения Шредингера для невозмущенной задачи, когда

$$\begin{aligned}U_1^L(r)&=-\frac{e}{\varepsilon r^2},\\ U_2^L(r)&=U_0^L-\frac{e}{\varepsilon r^2},\end{aligned} \tag{21}$$

имеют вид [13]

$$\Psi_{nlm}^{L0}(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}0 & \theta>\pi/2\\ Y_{lm}(\theta,\varphi)R_{1nl}^L\left(E_{nl}^{L0},r\right) & \theta<\pi/2,\ r<r_0^L\\ Y_{lm}(\theta,\varphi)R_{2nl}^L\left(E_{nl}^{L0},r\right) & \theta<\pi/2,\ r>r_0^L\end{cases}, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}R_{1nl}^L(E,r)&=C_{1nl}^L e^{-\gamma_{1nl}^L r} r^\ell\ {}_1F_1\left[\ell+1-k_{1nl}^L,2\ell+2;2\gamma_{1nl}^L r\right],\\ R_{2nl}^L(E,r)&=C_{2nl}^L e^{-\gamma_{2nl}^L r} r^\ell\ U\left[\ell+1-k_{2nl}^L,2\ell+2;2\gamma_{2nl}^L r\right],\end{aligned} \tag{23}$$

$\gamma_{1nl}^{L}=\sqrt{-2\mu E_{nl}^{L}/\hbar^{2}}$, $\gamma_{2nl}^{L}=\sqrt{2\mu\left(U_{0}^{L}-E_{nl}^{L}\right)/\hbar^{2}}$, $k_{1nl}^{L}=e^{2}\mu/\gamma_{1nl}^{L}\hbar^{2}$, $k_{2nl}^{L}=e^{2}\mu/\gamma_{2nl}^{L}\hbar^{2}$, а C_{1nl}^{L} и C_{2nl}^{L} – нормировочные коэффициенты. Следует отметить, что равенства нулю угловой волновой функции электрона на основании линзообразной области приводит к требованию равенства суммы $l+|m|$ нечетному числу.

Проводя вычисления, аналогичные случаю эллипсоидальной КТ, для $f_{lmm'}^{L}$ получим

$$f_{lmm'}^{L}=\alpha_{L}\left[\frac{1}{2}-\frac{C_{l,m}(l+m)!!}{2^{l-m}\left(\frac{l-m-1}{2}\right)!}\cdot\right.$$

$$\left.\left(A_{l,m}C_{l+1,m}\frac{(l+m)!!}{(2l+2)\cdot\left(\frac{l-m+1}{2}\right)!}+B_{l,m}C_{l-1,m}\frac{(l+m-2)!!}{l\cdot\left(\frac{l-m-1}{2}\right)!}\right)\right]\delta_{mm'} \qquad (24)$$

где $A_{\ell,m}=\sqrt{\frac{(l+1)^{2}-m^{2}}{4(l+1)^{2}-1}}$, $B_{\ell,m}=\sqrt{\frac{l^{2}-m^{2}}{4l^{2}-1}}$ и $C_{l,m}=(-1)^{m}\sqrt{(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$, $a!!$ – двойной факториал.

Как следует из (24), имеет место равенство $f_{lmm}^{L}=f_{l,-m,-m}^{L}$, следовательно, вырождение снимается частично, т. к. полярная симметрия задачи сохраняется и вырождение по знаку m остается. Для поправок к энергии основного $(l=1,\ m=0)$ и первого возбужденного $(l=2,\ m=\pm1)$ состояний соответственно получим

$$\Delta E_{110}^{L}=\frac{1}{4}\alpha_{L}T_{11}^{L},$$
$$\Delta E_{121}^{L}=\Delta E_{12-1}^{L}=\frac{1}{8}\alpha_{L}T_{12}^{L}. \qquad (25)$$

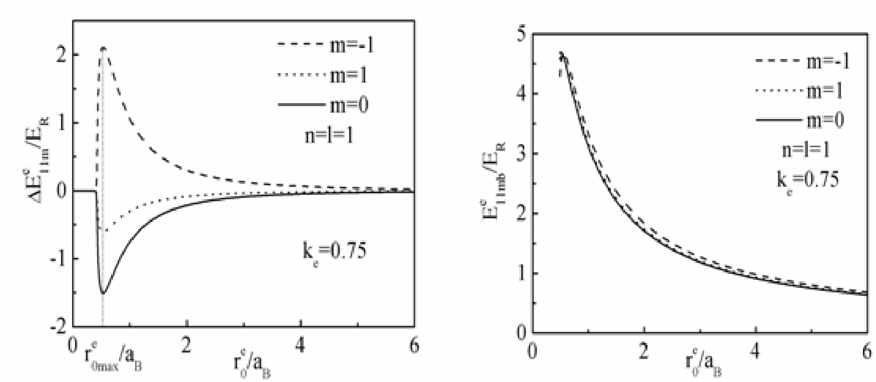


Рис. 3. Зависимость поправки ΔE_{11m}^{e} от радиуса КТ при $\alpha=0.2$, $\nu=42.75$.

Рис. 4. Зависимость энергии связи E_{110b}^{e} от радиуса при $\alpha=0.2$, $\nu=42.75$.

3. Обсуждение результатов. Для проведения количественных оценок отметим, что численные расчеты сделаны на примере соединения $GaAs / Ga_{1-x}Al_xAs$, когда $x = 0.3$, $\mu = 0.067 m_e$, $U_0^{e,L} = 224.46\,\mathrm{meV}$ и $\varepsilon = 13.1$, где m_e – масса свободного электрона. При этом вычисления проведены в единицах $E_R = \frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2}$ и $a_B = \frac{\hbar^2 \varepsilon}{\mu e^2}$. На рис. 3 и 6 представлены зависимости поправки энергии ΔE_{11} для эллипсоидальной и линзообразной КТ от радиуса r_0. Как видно на рисунках, для больших значений радиуса ΔE_{11} стремится к нулю. С уменьшением радиуса КТ поправка увеличивается и, достигнув своего максимального значения, резко убывает. Это объясняется тем, что при сравнительно больших радиусах частица локализована далеко от стенок КТ, вследствие чего слабо чувствует влияние границы КТ.

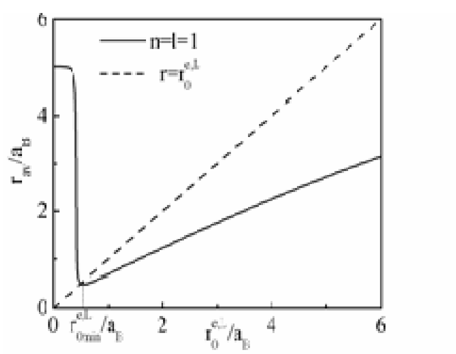
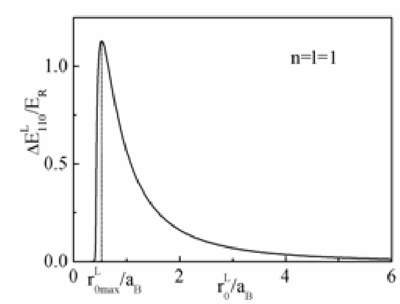


Рис. 5. Зависимость среднего значения координаты r от радиуса КТ.



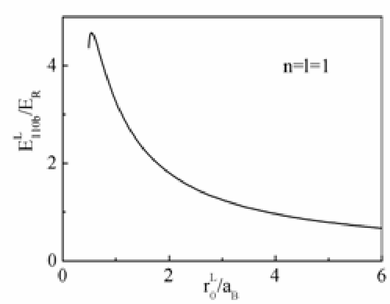


Рис. 6. Зависимость поправки ΔE_{110}^L от радиуса КТ при $\alpha = 0.2$. $\nu = 42.75$.

Рис.7. Зависимость энергии связи E_{110b}^L от радиуса КТ при $\alpha = 0.2$, $\nu = 42.75$.

Поэтому поправка к энергии, обусловленная деформацией геометрической формы КТ, проявляется слабо. При меньших значениях радиуса вклад несферичности границы возрастает. Однако дальнейшее убывание радиуса приводит к выскакиванию частицы из КТ и ее локализации в окружающей КТ среде (область $r < r_{0\max}$ на рис. 5). Естественно, при локализации частицы вне квантовой точки несферичность границы слабее влияет на энергию НЗ.

Энергия связи электрона определяется как разность $E_{nlmb}^{e,L} = \tilde{E}_{nlm}^{e,L} - E_{nlm}^{e,L}$, где $\tilde{E}_{nlm}^{e,L}$ – энергия электрона в эллипсоидальной, линзообразной КТ без примеси. На рис. 4 и 7 показаны зависимости энергии связи от радиуса КТ. Когда радиус увеличивается, энергия связи уменьшается и постепенно стремится к энергии связи примеси в массивном образце. Когда радиус уменьшается, энергия связи доходит до своего максимума и начинает резко убывать. При этом энергия связи достигает своего максимума, когда электрон находится на наиближайшем расстоянии от примеси (когда $r = r_{0\min}^{e,L}$, см. рис.5).

[1] Российско-Армянский (Славянский) университет
[2] Ереванский государственный медицинский университет

З. Г. Григорян, Л. С. Петросян, академик Э. М. Казарян

Примесные состояния в эллипсоидальных и линзообразных квантовых точках с конечным ограничивающим потенциалом

Исследованы примесные состояния в эллипсоидальных и линзообразных квантовых точках с конечным ограничивающим потенциалом. Показано, что в эллипсоидальной КТ энергия связи в зависимости от радиуса сферы имеет максимум.Этот максимум соответствует тому значению радиуса, при котором электрон находится на наиближайшем расстоянии от примеси. Тот же результат получен и для линзообразной КТ. Получены также зависимости энергетических поправок к энергии сферической и полусферической КТ соответственно от радиуса сферы и полусферы.

Զ. Հ. Գրիգորյան, Լ. Ս. Պետրոսյան, ակադեմիկոս Է. Մ. Ղազարյան

Խառնուրդային վիճակները վերջավոր սահմանափակող պոտենցիալով էլիպսարդային և ոսպնյակաձև քվանտային կետերում

Դիտարկված են խառնուրդային վիճակները վերջավոր սահմանափակող պոտենցիալով էլիպսարդային և ոսպնյակաձև քվանտային կետերում: Ցույց է տրված, որ էլիպսարդային քվանտային կետում էլեկտրոնի կապի էներգիան, կախված սֆերայի շառավղից, ունի մաքսիմում: Վերջինս համապատասխանում է շառավղի այն արժեքին, որի դեպքում էլեկտրոնը ամենամոտն է խառնուրդին: Նույն արդյունքն է ստացվել նաև ոսպնյակաձև քվանտային կետի համար: Պատկերված են նաև գնդային և կիսա-

գնդային քվանտային կետերի էներգիական ուղղումների կախվածությունները համապատասխանաբար գնդի և կիսագնդի շառավիղներից։

Z. H. Grigoryan, L. S. Petrosyan, academician E. M. Kazaryan

Impurity States in Ellipsoidal and Lens Shaped Quantum Dots with Finite ConfinementPotential

Impurity states in ellipsoidal andlens shaped quantum dots (QD) with finite confinement potential are investigated. It is shown that in the ellipsoidal QD the binding energy has its maximum depending on sphere radius. This maximum corresponds to the value of the radius, at which electron is at the nearest distance from impurity. The same result was obtained for the lens shaped QD. The corrections to the electron energy in the spherical and semispherical QD depending correspondingly on the sphere and semi sphere radius were also obtained.

Литература

1. *Anikeeva P., Halpert J., Bawendi M., Bulovic V.* - Nano Letters. 2009. 2009. V. 9 (7). P. 2532.
2. *Wilk A., Kovsh A. R., Mikhrin S. S., Chaix C., Novikov I. I., Maximov M. V., Shernyakov Yu. M., Ustinov V. M., Ledentsov N. N.*- Journal of Crystal Growth. 2005. V. 278. P. 338.
3. *Arregui F. J.* Sensor Based on Nanostructure Materials. Springer. 2010.
4. *Hayrapetyan D. B., Kazaryan E. M., Tevosyan H. Kh.* - Superlattices and Microstructures. *H. Kh. V H. Kh.* 2013. V. 64**.** P. 204.
5. *Dvoyan K. G., Kazayan E. M., Petrosyan L. S.* – Physica E. 2005. V. 28**.** P. 333.
6. *Hayrapetyan D. B., Dvoyan K. G., Kazaryan E. M.* - Journal of Contemporary Physics. 2007. V. 42. P. 151.
7. *Hayrapetyan D. B., Kazaryan E. M., Tevosyan H. Kh.* – Physica E. 2012. V. 46. P. 274.
8. *Pelucchi E., Baier M., Ducommun Y., Watenabe S., Kapon E.* - Phys. stat. sol. (b). 2003. V. 238. P. 233.
9. *Rodriguez A., Giner C., Ulloa S., Antuna J.* - Phys. Rev. B. 2001. V. 63. P. 125319.
10. *Grigoryan Z. H., Petrosyan L.S., Kazaryan E. M.* - Electronic states in quantum lens with semifinite confinement potential // Conference ICSMN-2013, May 24-26.
11. *Liao X., Zou J., Duan X., Cockayne D., Leon R., Lobo C.* - Phys. Rev. B. 1998. V. 58. R4235.
12. *Barati M., Rezaei G., Vahdani M. R. K.* - Phys. stat. sol. (b). 2007. V. 244 P. 2605.
13. *Григорян З. Г.* - Доклады НАН РА. 2014 V. 114. N 2**.** P. 116.
14. *Lili He,Wenfang Xie.* - Superlattices and Microstructures. 2013. V. 47. P. 266.

15. *HaticeTaş, Mehmet Şahin*. - J. Appl. Phys. 2012. V. 111. P. 083702.
16. *Grigoryan Z. H., Kazaryan E. M., Petrosyan L. S.* – 2014. Physica E. V. 61. P. 53.
17. *Меликян А.О., Минасян Г.Р.* - Вестник РАУ. 2012. V. 1. P. 77.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* - Квантовая механика. М. Наука. 1989.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 114 2014 № 3
Volume

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

А. С. Мартиросян, С. В. Царукян, академик И. А. Варданян

Кинетический анализ модели цепного процесса окисления органического соединения (RH), инициированного реакцией CH_3O_2 + RH, на разных поверхностях

(Представлено 16/VI 2014)

Ключевые слова: *радикал, поверхность, углеводород, альдегид, механизм.*

Ранее в работах [1 – 3] была установлена возможность гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением на поверхности TiO_2, NH_4NO_3, NaCl и KCl. Эти вещества присутствуют в виде аэрозолей в атмосфере, поэтому эти данные представляют интерес с точки зрения изучения процессов, происходящих как в атмосфере, так и при газофазном окислении органических соединений типа углеводородов и альдегидов. На основании исследований особенностей этого взаимодействия в зависимости от природы поверхности был сделан вывод, что на поверхности TiO_2 и NH_4NO_3 процесс протекает по цепному вырожденно-разветвленному механизму с размножением радикалов. Причем в случае соли скорость процесса и превышение концентрации пероксидных радикалов по сравнению с исходной значительно выше. На поверхности NaCl и KCl наблюдается только расходование радикалов, а скорость процесса значительно ниже, чем в случае TiO_2 и NH_4NO_3. В работе [4] для объяснения данных, полученных в случае TiO_2, была предложена модель цепного вырожденно-разветвленного гетерогенного процесса окисления органического соединения (RH), инициированного реакцией радикалов CH_3O_2 с RH. Модель была рассмотрена в приближении Лэнгмюра–Хиншельвуда и удовлетворительно описывала экспериментальные результаты.

В настоящей работе качественно смоделирован процесс, который имеет место на поверхностях NH_4NO_3 и NaCl. Результаты сравнены с данными, полученными на TiO_2. Кроме того рассмотрена модель процесса в приближении Ридила–Или для плохо адсорбирующихся органических соединений. Исследование влияния природы поверхности на особенности процесса, установленное экспериментально [2, 3], математически осуществляется изменением значений констант скорости.

На основании экспериментальных данных на более активной поверхности (NH_4NO_3) принималось, что константы скорости радикальных стадий выше, а на менее активной поверхности (NaCl) меньше, чем в исходном варианте (TiO_2). Что касается стадии гетерогенной гибели радикалов, то картина обратная. Ниже приводится гетерогенная модель:

Приближение	Лэнгмюра–Хиншельвуда	Ридила–Или
1.$CH_3O_2 + RH \rightarrow CH_3OOH + R$	$k_1 = 4\times10^{-7}$ см^2/част.с	$k_1 = 1\times10^{-11}$ см^3/част.с
2.$R + O_2 \rightarrow RO_2$	$k_2 = 10^{-4}$ см^2/част.с	$k_2 = 10^{-9}$ см^3/част.с
3.$CH_3OOH \rightarrow CH_3O + OH$	$k_3 = 10^{8}$-10^{13} см^2/част.с	$k_3 = 10^{8}$-10^{13} см^2/част.с
4.$OH + RH \rightarrow R + H_2O$	$k_4 = 5\times10^{-3}$ см^2/част.с	$k_4 = 10^{-10}$ см^3/част.с
5.$CH_3O + RH \rightarrow CH_3OH + R$	$k_5 = 2\times10^{-6}$ см^2/част.с	$k_5 = 2\times10^{-11}$ см^3/част.с
6.$RO_2 + RH \rightarrow ROOH + R$	$k_6 = 4\times10^{-7}$ см^2/част.с	$k_6 = 10^{-1}$ см^3/част.с
7.$ROOH \rightarrow RO + OH$	$k_7 = 10^{8}$-10^{13} см^2/част.с	$k_7 = 10^{8}$-10^{13} см^2/част.с
8.$RO + RH \rightarrow ROH + R$	$k_8 = 2\times10^{-6}$ см^2/част.с	$k_8 = 2\times10^{-11}$ см^3/част.с
9.$RO_2 \rightarrow P$ (продукт)	$k_9 = 10^{4}$ с$^{-1}$	$k_9 = 10^{3}$ с$^{-1}$
10.$RO_2 \rightarrow (RO_2)_d$	$k_{10} = 2\times10^{5}$ с$^{-1}$	$k_{10} = 2\times10^{4}$ с$^{-1}$
11.$CH_3O_2 \rightarrow (CH_3O_2)_d$	$k_{11} = 2\times10^{5}$ с$^{-1}$	$k_{11} = 2\times10^{4}$ с$^{-1}$

Расчеты проводились с помощью программы VALKIN [5] на основе ROW-4. Значения констант скорости приведены согласно [6]. Начальные условия: T = 300K, приближение Лэнгмюра–Хиншельвуда: $[CH_3O_2]_0 = 3\times10^{11}$, $[RH]_0 = 10^{12}$, $[O_2]_0 = 10^{12}$ частиц/см^2; приближение Ридила–Или: $[CH_3O_2] = 1\times10^{14}$ частиц/см^2, $[RH] = 1\times10^{16}$, $[O_2] = 1\times10^{16}$ частиц/см^3.

В случае NH_4NO_3 принималось, что константы скорости радикальных стадий в 10 раз больше, чем в случае TiO_2, а гетерогенной гибели радикалов – в 10 раз меньше. Что касается солевой поверхности NaCl, то константы скорости радикальных стадий в 10 раз меньше, чем в случае TiO_2, а гетерогенной гибели – в 10 раз больше. Ясно, что порядок увеличения или уменьшения констант в количественном аспекте носит несколько произвольный характер, но в качественном аспекте точно отражает экспериментальную картину.

На рис. 1 и 2 приведены кинетики расходования RH и радикалов CH_3O_2 в зависимости от природы поверхности в случае TiO_2, NH_4NO_3 и NaCl.

Как видно из сравнения кинетических кривых на рис. 1, наибольшая скорость расходования RH наблюдается на поверхности NH_4NO_3. При $t = 10^{-6}$с количество израсходованного RH составляет 99%, в то время как в случае TiO_2 и NaCl – 29.4 и 2.5% соответственно (в последнем случае ничтожно мало). Подобная картина наблюдается и в случае радикалов CH_3O_2 (рис. 2). В эксперименте [1 – 3] также наибольшая скорость расходования радикалов имеет место на поверхности NH_4NO_3, а наименьшая – на поверхности NaCl.

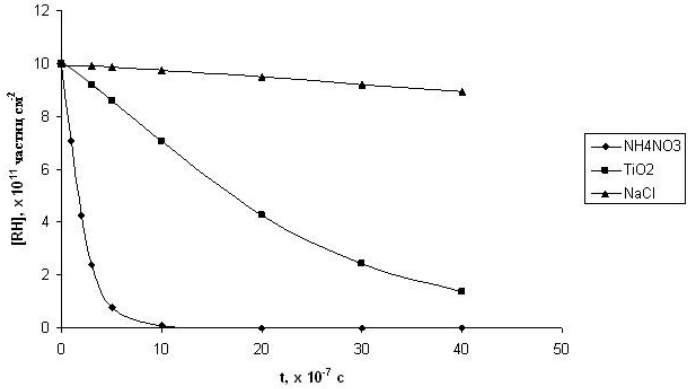


Рис. 1. Кинетика расходования RH.

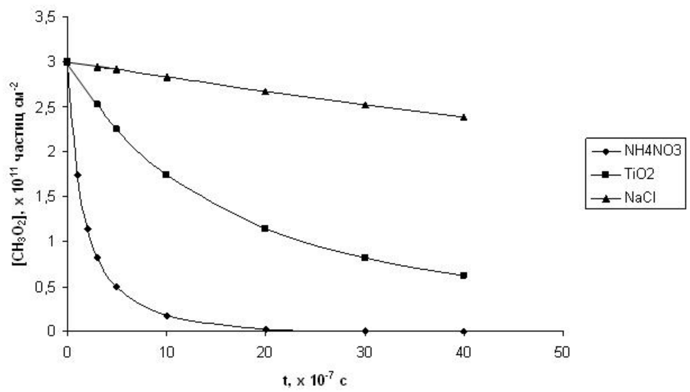


Рис. 2. Кинетика расходования радикалов CH_3O_2.

На рис. 3 приведена кинетика накопления радикалов RO_2 в зависимости от типа поверхности. На поверхности NH_4NO_3 уже при $t = 3\times10^{-7}$с концентрация радикалов достигает максимума, превосходя исходные значения концентрации радикалов CH_3O_2 примерно в 1.4 раза. В случае NaCl она ничтожно мала, при более глубоких превращениях исходных реагентов в интервале изученных времен $[RO_2]$ тем не менее не превышает 25% от исходной концентрации радикалов.

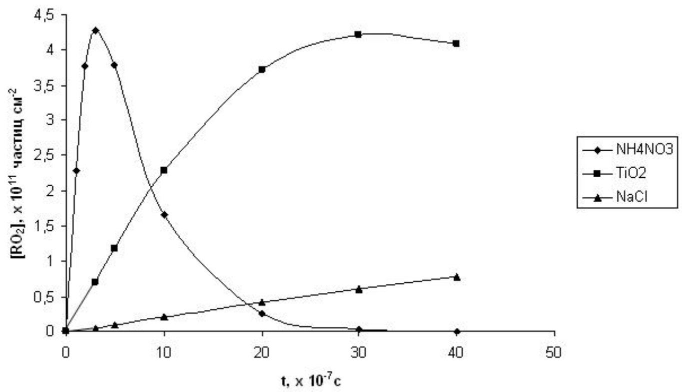


Рис. 3. Кинетика накопления радикалов RO_2.

Сопоставив эти данные с данными, приведенными на рис. 1 и 2, становится очевидным, что действительно на поверхности NH_4NO_3 в значительных количествах образуются радикалы RO_2 и несколько меньше на TiO_2. Поэтому больше будет количество десорбированных радикалов RO_2, которые, накладываясь на количество непрореагировавших радикалов CH_3O_2, могут в сумме превысить исходное количество радикалов CH_3O_2.

На рис. 4 представлена кинетика накопления суммы радикалов ($[CH_3O_2]_d + [RO_2]_d$). Как видно из рисунка, в случае NH_4NO_3 уже при $5 \times^{-}$ $\times 10^7$с концентрация десорбированных пероксидных радикалов превышает исходную концентрацию радикалов CH_3O_2. В случае TiO_2 это наблюдается при $t = 4 \times 10^{-6}$с. В случае NaCl в изученном интервале времен ($[CH_3O_2]_d + [RO_2]_d$) она намного ниже исходной.

Информация о десорбированных пероксидных радикалах представляет интерес, поскольку в эксперименте [1 – 3] за процессом следят по поведению радикалов в газовой фазе после прохождения реагирующей смеси через капиллярный реактор с соответствующим покрытием в условиях, исключающих гомогенные реакции. Ясно, что превышение количества радикалов после реактора и расходования части исходных радикалов возможно только при дополнительном расходовании органического соединения с образованием новых пероксидных радикалов. Поскольку возможности кинетического метода вымораживания радикалов в сочетании со спектрометром ЭПР [7], использованного в эксперименте, ограничены, то разделить пероксидные радикалы разного типа практически не удается и регистрируется сумма радикалов.

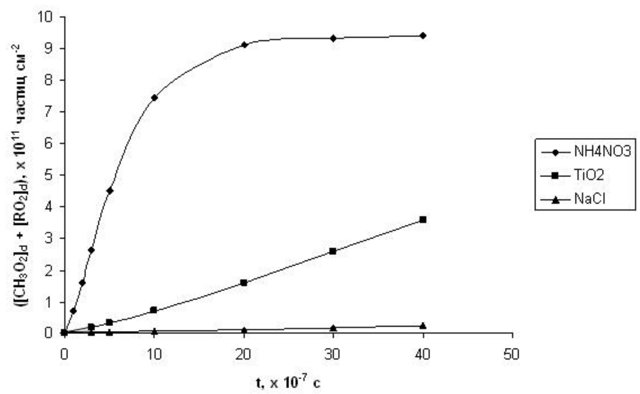


Рис. 4. Кинетика накопления суммы радикалов ($[CH_3O_2]_d + [RO_2]_d$).

Как видно из полученных данных, модель описывает экспериментально наблюдаемую разницу в поведении процесса на разных поверхностях. В зависимости от скорости радикальных стадий могут быть те или иные скорости процесса в целом. Фактически и в случае солей NaCl и KCl эта модель работает. При этом отсутствие видимого размножения радикалов связано с тем, что скорости радикальных стадий малы, а гибель радикалов значительна. Цепной процесс возможен и на NaCl, только он не проявляется в эксперименте в доступных измерению количествах.

Влияние природы поверхности, рассмотренное нами в приближении Лэнгмюра–Хиншельвуда, качественно хорошо согласуется с экспериментом. Представляло интерес проанализировать эту возможность в приближении Ридила–Или. С этой целью в таблице приведены также соответствующие константы скорости отдельных стадий.

Расчеты показали, что и в этом случае возможно превышение количества пероксидных радикалов по сравнению с исходным. Что касается рассмотрения влияния типа поверхности, то математическое выражение его изменения подобно выше использованному.

На рис. 5 представлена кинетика процесса в приближении Ридила–Или. Как видно из рисунка, наибольшие скорости расходования реагентов наблюдаются на NH_4NO_3 и TiO_2. Причем скорость расходования RH выше, чем CH_3O_2, т.е. процесс носит многостадийный характер. Из сравнения данных, полученных в обоих приближениях, следует, что в качественном аспекте они одинаковы. На рис. 6 представлена кинетика накопления суммы радикалов ($[CH_3O_2]_d + [RO_2]_d$). В обоих приближениях наименьший выход в случае NaCl.

Как видно при том же подходе, и в случае приближения Ридила–Или уменьшение или увеличение соответствующих констант скорости радикальных стадий качественно одинаково влияет на процесс, что говорит о жизнеспособности модели и в приближении Ридила–Или.

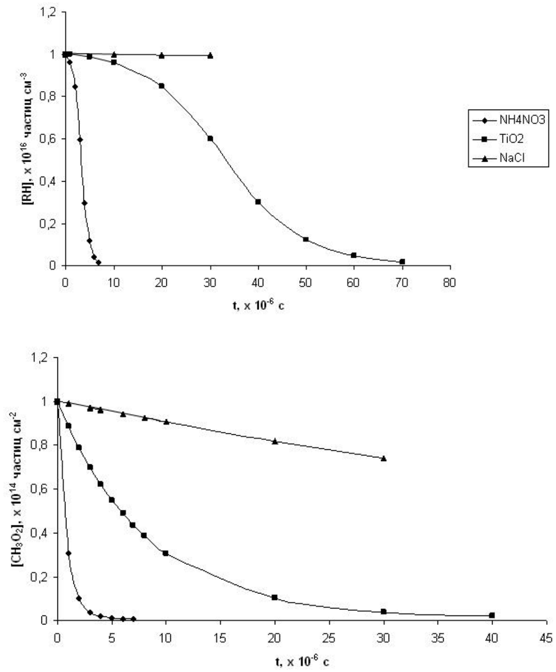


Рис. 5. Кинетика расходования RH и CH_3O_2 радикалов в зависимости от типа поверхности.

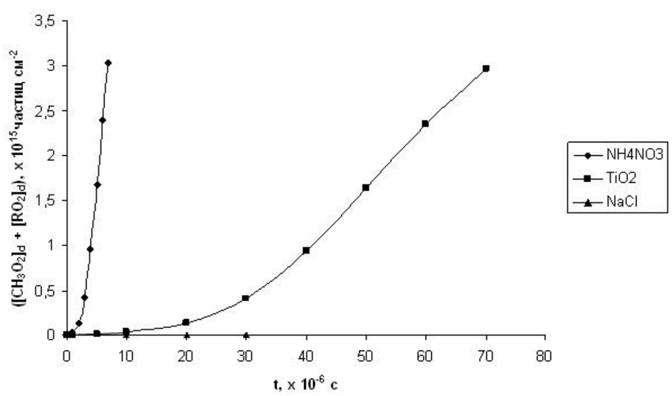


Рис. 6. Кинетика накопления суммы радикалов ($[CH_3O_2]_d + [RO_2]_d$).

Оценим параметр λ, характеризующий цепной процесс, в случае приближений Лэнгмюра–Хиншельвуда и Ридила–Или. Он определяется отношением числа израсходованных молекул RH на число прореагировавших активных частиц – радикалов CH_3O_2. В первом случае он порядка нескольких единиц, во втором случае больше (примерно в 2 раза). Поскольку концентрации реагентов в случае Ридила–Или значительно выше, то модель оказывается более чувствительной к количественному изменению констант скоростей. Однако в качественном аспекте картина та же.

Полученные данные свидетельствуют о том, что вышеуказанный подход позволяет объяснить экспериментально наблюдаемые кинетические закономерности и особенности процесса в зависимости от природы поверхности. На активной поверхности, где скорость взаимодействия радикалов с молекулярным соединением значительна, цепной процесс развивается интенсивней, и суммарное количество пероксидных радикалов уже при малых временах реакции может стать выше исходного количества пероксидных радикалов, т.е. имеет место размножение радикалов. В случае неактивной поверхности цепной процесс развивается медленно, и суммарное количество пероксидных радикалов практически оказывается ниже исходного.

Анализ показывает жизнеспособность модели в различных приближениях. Принципиальным является цепной характер механизма, заложенного в модель.

Институт химической физики
им. А. Налбандяна НАН РА

А. С. Мартиросян, С. В. Царукян, академик И. А. Варданян

Кинетический анализ модели цепного процесса окисления органического соединения (RH), инициированного реакцией CH_3O_2 + RH, на разных поверхностях

Рассмотрена модель цепного процесса окисления органического соединения (RH) на различных поверхностях, инициированного реакцией CH_3O_2 + RH. Экспериментально наблюдаемые закономерности процесса в зависимости от природы поверхности на основе анализа модели объясняются соответствующим изменением констант скорости гетерогенных радикальных стадий.

Ա. Ս. Մարտիրոսյան, Ս. Վ. Ծառուկյան,
ակադեմիկոս Ի.Ա. Վարդանյան

CH_3O_2 + RH ռեակցիայով հարուցված տարբեր մակերևույթների վրա ընթացող օրգանական միացության (RH) շղթայական օքսիդացման պրոցեսի մոդելի կինետիկական անալիզը

Վերլուծվել է CH_3O_2 + RH ռեակցիայով հարուցված տարբեր մակերևույթների վրա ընթացող օրգանական միացության (RH) օքսիդացման շղթայական պրոցեսի մոդելը: Փորձնականորեն դիտվող օրինաչափությունները՝ կախված մակերևույթի բնույթից, բացատրվում են համապատասխան հետերոգեն ռադիկալային փուլերի արագության հաստատունների փոփոխությամբ:

A. S. Martirosyan, S. V. Tsarukyan, academician I. A. Vardanyan

Kinetic Analysis of Model of Chain Oxidation Process of Organic Compound (RH), Initiated by Reaction of CH_3O_2 + RH on Different Surfaces

The model of chain oxidation process of organic compound (RH), initiated by reaction of CH_3O_2 + RH on different surfaces has been considered. It is shown that the kinetic peculiarities of the process, observed experimentally, can be explained by the change in the rate constans of heterogeneous radical stages.

Литература

1. *Manucharova L. A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I.A.* – International Journal of Chemical Kinetics. 2004. V. 36. N 1. P. 591-595.
2. *Jalali H. A., Manucharova L. A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I. A*.- Russian Journal of Phys. Chem. A. 2011. V. 85. N3. P. 483-485
3. *Арустамян, А. М., Манучарова Л. А., Джалали Х. А., Варданян И. А*.- ДНАН РА. 2012. Т.112. С. 193-199.
4. *Jalali H. A., Vardanyan I. A*.- Archivum Combustionis. 2010. V.30. N 4. P. 297-302.
5. *Tavadyan L. A., Chachoyan A*.- Chemistry and Physics of Lipids. 2007. V. 147. P. 30.
6. *Крылов О. В.* В сб.: Проблемы кинетики элементарных химических реакций. М. Наука. 1973. С.115.
7. *Nalbandyan A. B., Vardanyan I. A., Arustamyan A. M., Oganesyan E. A., Dorunts A. G.* - Dynamic of Reactive Systems. Pt.1: Flames. Progress in Astronautcs and Aeronautics. 1988. V. 113. P. 58-63.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

ХИМИЯ

УДК 541:138.3:547

К. С. Маргарян[1], С. А. Саргисян[2]

Электросинтез и свойства золотосодержащих пленок полиаминотиазола

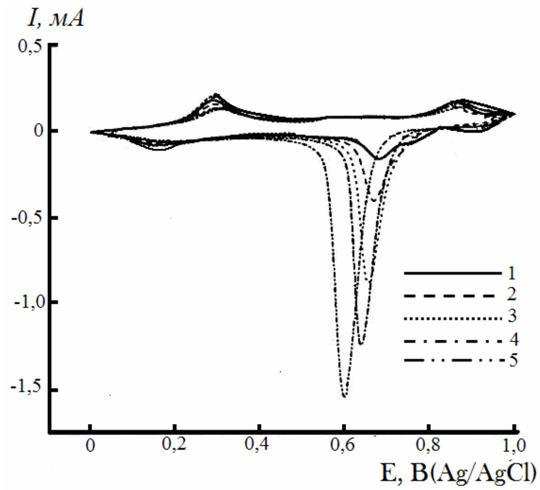
(Представлено чл.-кор. НАН РА С.П. Давтяном 22/V 2014)

Ключевые слова: *электросинтез, полиаминотиазол, золотосодержащие, пленка, вольтамперограммы.*

Потенциальные возможности практического применения пленок электроактивных полимеров в источниках тока, катализе, медицине, сенсорах и других областях [1-5] продолжают поддерживать значительный интерес исследователей к этой области. Материалом, применяемым в качестве модификаторов электродной поверхности, может служить полиаминотиазол (PATA). Об использовании в этой области аминопроизводных тиазола к настоящему времени известно мало [6-8]. Структура полимера позволяет использовать PATA как проводящую матрицу для включения частиц металлов из растворов и формирования на этой основе композитных материалов

Для получения металл-полимерного композита на основе золота и PATA на золотом электроде предварительно синтезировали PATA по методу, описанному в [8]. Затем полимерную пленку с подложкой погружали в раствор HCl различной концентрации (0.2; 0.6; 1 M) и выдерживали при высоком анодном потенциале (1.0 В) в течение различного времени (0-300 с). Полученные при этом хлоридные комплексы золота, по-видимому диффузировали в пленку PATA и частично в прилегающий раствор. После снятия циклических вольтамперограмм в направлении катодных потенциалов в 1 M HCl при скорости развертки потенциала 20 мВ/с (рисунок) обнаружен новый катодный пик при E≈0.64 В (τ=50 с), соответствующий восстановлению хлоридного комплекса золота.

При увеличении времени выдержки электрода с пленкой при потенциале 1.0 В интенсивность пика возрастает и смещается в более отрицательную область. Причиной этого, по всей вероятности, является необратимость электродного процесса, приводящая к росту перенапряжения (и, соответственно, к смещению потенциала пика) с ростом токов, связанному с участием больших количеств вещества в электродном процессе, что и заметили авторы работы [9]).



Циклическая вольтамперограмма пленки PATA на золотом электроде в 1 М HCl при потенциале 1В, с: 1 – 2; 2 – 50; 3 – 100; 4 – 150; 5 – 300.

В этом случае нельзя исключить, что образующиеся аддукты окисления (хлоридные комплексы золота) преимущественно локализуются на электродной (металлической) поверхности. В этих условиях на формирующемся слое аддуктов окисления может возникать скачок потенциала, т.е. протекать своеобразная пассивация процесса окисления.

Электросинтез полиаминотиазольных пленок проводили в трехэлектродной стеклянной ячейке путем электрополимеризации 2-аминотиазола, при циклировании потенциала в различных пределах (E=0.2-1.8 В) на рабочем золотом электроде. Все значения потенциалов приведены относительно хлорсеребряного электрода в насыщенном растворе KCl. Получение металл-полимерного композита на основе золота и PATA проводили по методике, описанной в [9]. Оценочная толщина полученных пленок PATA (за 10-12 циклов синтеза) составляет 0.4-1.2 мкм. Для синтеза и измерения использовали потенциостат "ПИ-50-1", скорость развертки потенциала V=20 мВс$^{-1}$. Мономер 2-аминотиазол, синтезированный и очищенный согласно методике [10], представляет собой бесцветные кристаллы с $T_{пл.}$=91-92°C.

Таким образом, при потенциале максимальной скорости восстановления получаемых хлоридных комплексов E=0.6 В ($\tau = 300$ с) полиаминотиазол находится в проводящей (эмеральдиновой) форме. Следовательно, можно заключить, что восстановление протекает не столько на золотом электроде, сколько на PATA, имеющей развитую поверхность. Данный процесс изучался ранее в [5], где показано, что получаемые хлоридные комплексы золота сначала сорбируются в пленке полианилина (за счет электростатического взаимодействия аниона тетрахлораурата с положительно заряженной сеткой эмеральдинового РАТА), а затем восстанавливаются до металла в ходе катодного процесса.

[1]Ереванский государственный медицинский университет им. М. Гераци
[2]Государственный инженерный университет Армении
e-mails: artsar86@mail.ru
ssargsyan@seua.am

К. С. Маргарян, С. А. Саргисян

Электросинтез и свойства золотосодержащих пленок полиаминотиазола

Синтезированы золотосодержащие аминотиазольные пленки на золотом электроде. Установлено, что при увеличении времени выдержки золотого электрода с пленкой в 1 М HCl при потенциале E=1 В интенсивность пика восстановления возрастает и смещается в отрицательную сторону.

Կ. Ս. Մարգարյան, Ս. Հ. Սարգսյան

Ոսկի պարունակող ամինաթիազոլային թաղանթների էլեկտրասինթեզը և հատկությունները

Սինթեզվել են ոսկի պարունակող ամինաթիազոլային թաղանթներ: Հաստատվել է, որ 1M HCl լուծույթում պահպանման ժամանակահատվածի ավելացմամբ (E=1 Վ) վերականգնման մաքսիմումների աճ և դեպի կաթոդային մարզ տեղաշարժ է նկատվում:

K. S. Margaryan, S. A. Sargsyan

Electrosynthesis and Properties of Gold Films of Polyaminothiazole

Gold-aminothiazol films on a gold electrode are synthesized. It has been established that at the increase of the hold time of the gold electrode with the film in 1M HCl potential E = 1 V intensity of recovery peak increases and shifts to the negative side.

Литература

1. *Kumar D., Sharma R.C.* - Eur. Polym. S. 1998. V. 34. P. 1053-1060.
2. *Batich C. D., Laitinen H. A., Zhou H. C.* - J. Electrochem. Soc.1990. V. 137. P. 883.

3. Электрохимия полимеров / М.Р. Тарасевич, С.Б. Орлов и др. - М. Наука. 1990. 238 с.
4. *Moutet J.-C., Ouennoughi Y., Ourari A., Hamar-Thibault S.* - Electrochim. Acta V. 40. 1995. P. 1827.
5. *Hatchett D. W., Josowicz M., Janata J., Baer D.* - Chem. Mater. 1999. V. 11. P. 2989.
6. *Jenkins I. H., Pickup P.G.* - Macromolecules. 1993. V. 26. P. 4450.
7. *Дубровский Р. А., Аксиментьева Е. А.* - Электрохимия. 2008. Т. 44. N 2**.** С. 252-255.
8. *Саргисян С. А., Маргарян К. С.* - Химический журнал Армении. 2014. Т. 67. № 1. С. 135-139.
9. *Обрезков Н. П., Иванов В. Д., Малев В. В.* - Электрохимия. 2012. Т. 48. №5. С. 529-537.
10. *Ясницкий Б. Г., Долберг Е. Б.* - Методы получения хим. реактивов и препаратов. Вып. 11. М. Изд-во UPEA. 1964. С. 22.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 541.18.044

А. Г. Погосян

Температурно-зависимые фазовые переходы в системе алкилсульфонат/вода. Молекулярно-динамическое исследование

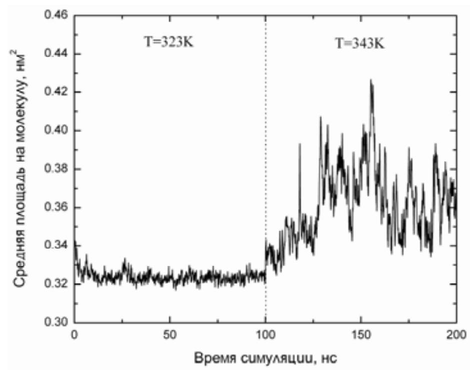
(Представлено академиком А. А. Шагиняном 30/VI 2014)

Ключевые слова: *метод молекулярной динамики, амфифильные соединения, алкилсульфонат*

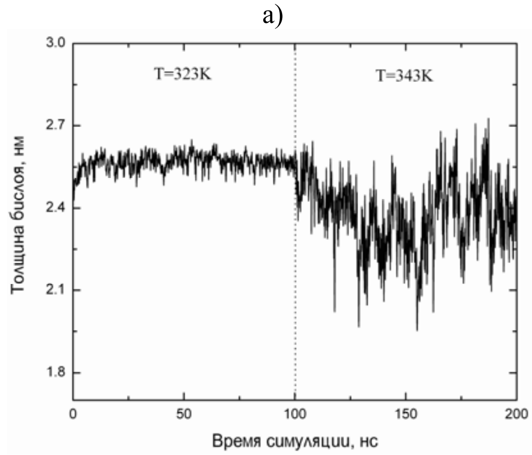
Введение. Известно, что амфифильные соединения (АС) достаточно интенсивно применяются в различных областях – от медицины до промышленности. В зависимости от концентрации, температуры и длины углеводородной цепи молекул могут наблюдаться разные фазы в системе АС/вода [1, 2]. Эти фазы классифицируются как кристаллическая, «гель», «коагель», жидко-кристаллическая и т. д.

АС, имеющие характер поверхностно-активных веществ (ПАВ), достаточно интесивно исследовались в течение многих лет как экспериментальными, так и теоретическими методами. В последнее время с повышением вычислительных мощностей компьютерный эксперимент стал хорошим инструментом для анализа структуры и динамических свойств подобных систем [3-6].

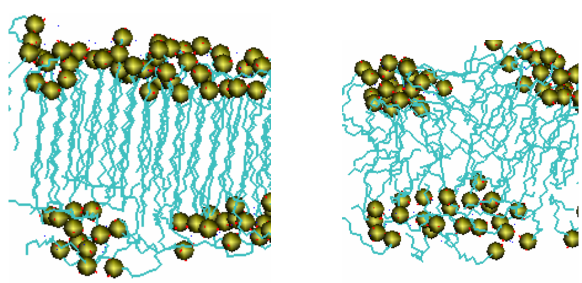
Целью данной работы являлось детальное исследование температурно-зависимого фазового перехода в системе пентадецилсульфонат натрия (ПДСН)/вода с помощью молекулярно-динамического (МД) моделирования, в результате которого были оценены температурные точки фазовых переходов. Был проведен ряд моделирований при фиксированной температуре, а также несколько моделирований по методу охлаждение/нагревание (cooling/heating simulation annealing). Некоторые структурные параметры, такие как толщина образующихся бимолекулярных слоев (далее бислой), средняя площадь, занимаемая молекулой ПДСН на поверхности слоя, были получены и сопоставлены с известными экспериментальными данными с целью проверки точности МД моделирования.



а)



б)



в)

T=323K T=343K

Рис. 1. Средняя площадь на молекулу ПДСН (а), расстояние сера-сера (бислоя) (б) в зависимости от времени симуляции. Представлены также мгновенные рисунки системы (в).

Результаты МД моделирования. Бислой молекул ПДСН ($C_{15}H_{31}SO_3Na$) в водной среде был построен с помощью разработанного нами программного кода, где модель молекулы ПДСН была взята из наших предыдущих исследований. Для построенной системы, состоящей из 128 молекул ПДСН и 2251 молекулы воды, была проведена минимизация энергии в 5000 шагов методом наискорейшего спуска с целью удаления высокоэнергетических контактов.

Параметры силового поля молекулы ПДСН были генерированы с помощью сервера Dundee [7], а парциальные заряды были скорректированы согласно [8]. Для молекул воды была использована модель SPC [9], валентные связи удерживались с помощью алгоритма LINCS [10]. Исследования проводились при температурах 323 и 343K. Для исследования фазового перехода было проведено моделирование «отжига» (annealing simulation) с температуры 323 до 343K.

Для контроля давления был применен алгоритм Берендсена [11], а также механизм V-rescale для контроля температуры. Также применялся метод PME [12], ван дер Ваальсовы взаимодействия обрезались на радиусе 1.2 нм. Далее на платформе ArmGrid (http://www.grid.am) был проведен ряд параллельных моделирований общей длительностью в 200 нс.

Результаты и обсуждение. На рис.1 приведено изменение средней площади на молекулу ПДСН на поверхности бислоя, а также толщины бислоя. Одновременно с кривыми представлены также мгновенные картинки системы. Как можно видеть, толщина бислоя при T=323K колеблется в пределах $\sim 2.45 \pm 0.2$ нм и при нагревании системы до 343K уменьшается до значений ~ 2.2 нм. Ранее методом дифракции рентгеновских лучей под малыми углами [2] было установлено, что при малых концентрациях воды толщина бислоя ПДСН имеет значения порядка d≈2.75 нм, т.е. полученные методом МД результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. В отличие от толщины бислоя, средняя площадь на молекулу ПДСН колеблется в пределах ~0.32 нм^2 и при нагревании достигает величины ~0.38 нм^2.

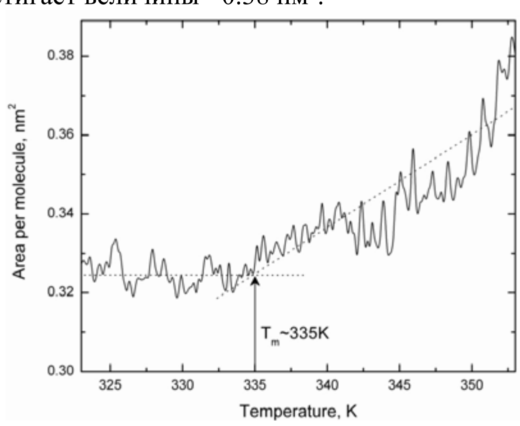


Рис. 2. Средняя площадь на молекулу ПДСН в зависимости от температуры.

С целью визуализации структурных изменений представлены рисунки системы ПДСН/вода при T=323K и T=343K (рис. 1). При T=323K видно наличие «гель»-фазы с взаимопроникающими гидрофобными цепями молекул ПДСН, более известной как гель L_β-фаза. Между тем, увеличение температуры приводит к нарушению упорядоченности углеводородных цепочек внутри бислоя и образованию так называемых «кластерных регионов» [13, 14], т.е. на основании данных компьютерного эксперимента можно предположить, что обычная «гель»-фаза одновременно сосуществует с L_α-фазой.

Изучение особенностей траектории движения молекул внутри бислоя указывает на наличие фазового перехода от «геля» к жидкой структуре. В этом плане было проведено моделирование «отжига» с целью выявить температуру фазового перехода. Как известно, средняя площадь на молекулу достаточно чувствительна к изменениям фазового перехода, по этой причине на рис. 2 представлена кривая изменения средней площади на молекулу ПДСН в зависимости от температуры. Из полученного уклона на кривой была оценена точка фазового перехода, равная приблизительно 335K.

Выводы. Проведено МД моделирование системы ПДСН/вода при двух разных температурах. При фиксированной температуре T=323K получено наличие «гель»-фазы с взаимопроникающими углеводородными цепочками молекул ПДСН, с толщиной бислоя $\sim 2.45 \pm 0.2$нм. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [2]. Повышение температуры до T=343K приводит к переходу в жидкую структуру с нарушением упорядоченности углеводородных цепей молекул ПДСН, т.е. имеет место фазовый переход «гель»-жидкость. При нагревании толщина бислоя уменьшается, одновременно увеличивается средняя площадь на одну молекулу ПДСН на поверхности бислоя, что приводит к полному беспорядку углеводородных цепей внутри бислоя.

Методом моделирования «отжигом» исследован широкий температурный диапазон и оценена точка фазового перехода. Результаты показали, что фазовый переход происходит при температуре ~335K. Анализ основных структурных параметров, полученных МД моделированием, показывает хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Международный научно-образовательный
центр (МНОЦ) НАН РА

А. Г. Погосян

Температурно-зависимые фазовые переходы в системе алкилсульфонат/вода. Молекулярно-динамическое исследование

С помощью метода молекулярной динамики исследованы температурно-зависимые фазовые переходы в системе алкилсульфонат/вода. Для системы, содержащей 128 молекул пентадецилсульфоната натрия и 2251 молекулу воды, методом моделирования «отжигом» определена точка фазового перехода «гель»-жидкость (T=335K). Исследования проводились с использованием программного пакета GROMACS с соединенно-атомным силовым полем. Анализ структурных параметров образующихся бислоев показал достаточно хорошее соответствие полученных результатов с экспериментальными данными.

Ա. Հ. Պողոսյան

Ալկիլսուլֆոնատ/ջուր համակարգերում, ջերմաստիճանից կախված, փուլային անցումների ուսումնասիրությունը մոլեկուլային դինամիկայի մեթոդով

Ուսումնասիրվել են ալկիլսուլֆոնատ/ջուր համակարգում ջերմաստիճանից կախված փուլային անցումները՝ օգտագործելով մոլեկուլային դինամիկայի մեթոդը: 128 նատրիում պենտադեցիլ սուլֆոնատ/2251 ջուր համակարգի համար գրանցվել է «գել»-հեղուկ փուլային անցման ջերմաստիճանը (T=335K)՝ օգտագործելով ջերմաստիճանային փոփոխման մոտեցումը: Օգտագործվել է GROMACS ծրագրային փաթեթի «միացյալ» ուժային դաշտը: Կառուցվածքային պարամետրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս բավարար համընկնում փորձարարական արդյունքների հետ:

A. H. Poghosyan

Temperature Dependent Phase Transitions in Alkyl Sulfonate/Water Systems. A Molecular Dynamics Study

The temperature dependent phase transitions in alkyl sulfonate/water system were examined using molecular dynamics method. The gel-to-liquid phase transition point (T=335K) was identified on system consisting of 128 sodium pentadecyl sulfonate (SPDS) and 2251 water molecules by means of simulated annealing treatment. The GROMACS software package with united atom force field was used. The analysis of the structural parameters shows satisfactory agreement with exiting experimental findings.

Литература

1. *Zana R.* Dynamics of Surfactant Self-Assembles: Micelles, Microemulsions, Vesicles and Lyotropic Phases, CRC Press, FL. V. 126, 2005.
2. *Shahinyan A. A.* The role of structural organization of ionic micelles at the mechanism of forming macromolecules in emulsions Yerevan. NAS RA. 1985. 181 p.
3. *Poghosyan A. H., Yeghiazaryan G. A., Gharabekyan H.H., Koetz J., Shahinyan A. A.* - Molecular Simulation 2008. V. 33. P. 1155–1163.
4. *Poghosyan A. H., Arsenyan L. H., Gharabekyan H.H., Koetz J., Shahinyan A.A.* - J.Phys. Chem. B 2009. V.113. P.1303–1310.

5. *Poghosyan A. H., Arsenyan L. H., Gharabekyan H. H., Falkenhagen S., Koetz J., Shahinyan A. A.* - J. Colloid & Interface Sci. 2011. V. 358. P. 175-181.
6. *Poghosyan A. H., Shahinyan A. A.* - Computer Physics Communications. 2009. V. 180. P. 238–240.
7. *Schuettelkopf A. W., van Aalten D.M.F.* - Acta Crystallogr. D. 2004. V. 60. P. 1355-1363.
8. *Huibers P. D. T.*- Langmuir. 1999. V.15. P. 7546-7550.
9. *Berendsen H.J.C., Postma J.P.M., van Gunsteren W. F., Hermans J.* In: Intermolecular Forces. Reidel. Dordrecht. 1981. P. 331–342.
10. *Hess B., Bekker H., Berendsen H.J.C., Fraaije J.* - Journal of Computational Chemistry. 1997. V. 18. P. 1463–1472.
11. *Berendsen H. J. C., Postma J.P.M., van Gunsteren W. F., DiNola A., Haak J. R.* - J. Chem. Phys. 1994. V.81. P. 3684-3690
12. *Darden T., York D., Pedersen L.* - J. Chem. Phys. 1993. V. 98. P. 10089-10092.
13. *Poghosyan A. H., Gharabekyan H.H., Shahinyan A. A.* - IJMP C. 2007. V. 18. P. 73-89.
14. *Poghosyan A. H., Arsenyan L.H., Shahinyan A.A.* - Langmuir. 2013. V. 29. P. 29-37.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

БИОХИМИЯ

УДК 577.17

Т. С. Хачатрян

Роль холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил -α, β-дегидротирозина в изменении концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в сыворотке крови крыс в условиях экспериментального гипотиреоза

(Представлено академиком М. А. Давтяном 16/IV 2014)

Ключевые слова: *тиреоидные гормоны, гипотиреоз, тиреотропный гормон гипофиза, холиновый эфир N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил-α,β-дегидротирозина, нейромедиаторы.*

Как известно, одной из наиболее распространённых патологий щитовидной железы (ЩЖ) млекопитающих является её дисфункция – гипотиреоз (ГПТ) – клинический синдром, вызванный длительным, стойким недостатком тиреоидных гормонов (ТГ) в организме, сопровождающийся снижением их биологического эффекта на тканевом уровне [1]. Нарушение функции ЩЖ означает снижение (ГПТ) или повышение (тиреотоксикоз, гипертиреоз) выработки ТГ – тироксина (Т4) и трийодтиронина (Т3) [2]. Согласно [3, 4], систему нейроэндокринной регуляции клетки помимо ТГ и стероидных гормонов составляют также нейромедиаторы (НМ), в число которых входит ацетилхолин (АХ), являющийся одним из эфиров холина [5]. В коррегировании соматических и нейрогенных нарушений заметную роль играют эфиры и амиды холина с точки зрения особенностей их синтеза и биологической активности [6]. Вместе с тем отсутствуют сведения относительно действия эфиров и амидов холина на изменение показателей тиреотропного гормона гипофиза (ТТГ), общего Т3 и Т4 в крови крыс различных возрастных групп при патологиях ЩЖ типа ГПТ.

С целью использования синтетических аналогов нейромедиаторов на примере ХДТ в данных сериях исследований в одинаковых экспериментальных условиях определяли его оптимальную дозу и степень выраженности и идентичности его эффекта на пятнадцатимесячных крысах. Анализ недавних изучений нейропротекторных агентов позволяет заключить, что нужны новые эффективные средства для лечения патологии ЩЖ типа ГПТ [7].

С учётом мультифакторной и мультифазной модели развития патологий ЩЖ, таких как ГПТ, эффективной может стать нейропротекторная стратегия терапии ГПТ посредством ХЭА, типа ХДТ [8 – 12].

В данной статье рассмотрено действие холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил-α,β-дегидротирозина (ХДТ), относящегося к холиновым эфирам N-замещённых-α, β-дегидроаминокислот (ХЭА), на изменение показателей ТТГ, общего Т3 и Т4 в крови пятнадцатимесячных крыс при экспериментальной дисфункции ЩЖ типа ГПТ.

Материал и методы. Исследования проведены на 100 пятнадцатимесячных крысах-самцах (линии Вистар, массой 220 – 270 г). ГПТ вызывался путём проведения тиреоидэктомии (ТЭК), осуществляемой по следующему алгоритму. Для проведения операции крысы под эфирным наркозом фиксировались в положении на спине. Доступ к ЩЖ осуществлялся через разрез кожи в области шеи длиной около 3.5 – 4 см. Затем обнажали ЩЖ, производили отпрепаровку 2/3 её части с сохранением паращитовидных желёз и с помощью острых ножниц отсекали доли, после чего под каждую из них подводили лигатуры. Раны послойно зашивались. Животные хорошо переносили операцию и спустя 0.5 – 1 ч после операции подходили к корму и воде. ТЭК была проведена у 80 крыс. Животные были разделены на 3 подопытные группы: 1) интактные животные – 20 экземпляров; 2) животные с ГПТ, не получавшие каждодневных внутримышечных инъекций ХДТ, – 30 экземпляров; 3) животные с ГПТ, получавшие ХДТ в дозе 10^{-14} М в течение 14 дней – 50 экземпляров. После ТЭК и окончания дачи ХДТ у всех 100 крыс были проведены декапитация и сбор крови. В сыворотке с помощью иммуноферментного метода анализа (ИФА) определялась концентрация ТТГ, общего Т3 и Т4. Статистическую обработку проводили с использованием t-критерия Стьюдента.

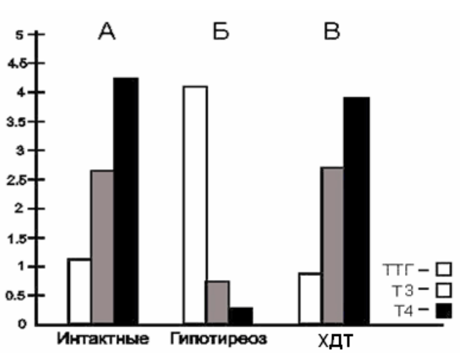


Рис. 1. Особенности изменения концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови пятнадцатимесячных крыс в норме (А), при гипотиреозе (Б) и после действия холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-O-изопропил-α,β-дегидротирозина (В) в дозе 10^{-14} М. Концентрация тиреотропного гормона гипофиза выражена в мМЕ/мл трийодтиронина в нг/мл, тироксина в мкг/мл.

Результаты и обсуждение. ТЭК у крыс 2-й подопытной группы приводила к возникновению у них характерных сдвигов в содержании ТТГ и ТГ в крови, которые отражали возникновение у них состояния ГПТ. Как видно на рис. 1, Б, ТЭК приводила к значительному повышению содержания ТТГ (на 439.5 %) в сыворотке крови у крыс данной подопытной группы; содержание общего Т3 понижалось на 45.6% по сравнению с интактными животными (рис. 1, А); содержание же общего Т4 понижалось на 41.3 %, соответственно. После введения ХДТ в дозе 10^{-14} М в течение 14 дней у крыс 3-й подопытной группы были отмечены следующие показатели: содержание ТТГ в крови составило 93.3% по сравнению с нормой, принятой за 100 % (рис. 1, А); содержание общего Т3 составило 98.1%; содержание общего Т4 составило 86.9 % (рис. 1, В).

Таким образом применение ХДТ способствует нормализации практически до нормы вышеуказанных показателей ТТГ и ТГ в крови у пятнадцатимесячных гипотиреоидных крыс. Полученные результаты могут быть учтены в клинической практике, при прогнозировании течения и исхода функционального восстановления у лиц с такой патологией ЩЖ, как ГПТ.

Институт прикладных проблем физики НАН РА
e-mail: pharmatica@mail.ru

Т. С. Хачатрян

Роль холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-О-изопропил-α,β-дегидротирозина в изменении концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в сыворотке крови крыс в условиях экспериментального гипотиреоза

Изучены особенности концентрации тиреотропного гормона гипофиза и тиреоидных гормонов в крови крыс с экспериментальным гипотиреозом до и после инъекций холинового эфира N-(2-метоксибензоил)-О-изопропил-α,β-дегидротирозина. У пятнадцатимесячных крыс при гипотиреозе наблюдалось резкое повышение уровня тиреотропного гормона гипофиза и резкое понижение уровня тиреоидных гормонов в крови. При введении холинового эфира N-(2-метоксибензоил) -О-изопропил-α,β-дегидротирозина происходило понижение концентрации тиреотропного гормона гипофиза и повышение уровня тиреоидных гормонов и достигало их значений у интактных животных.

Տ. Ս. Խաչատրյան

Քոլինի էսթեր N-(մեթոքսիբենզոիլ)-O-իզոպրոպիլ-α,β-դեհիդրոթիրոզինի դերը առնետների արյան մեջ հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության փոփոխման փորձնական հիփոթիրեոզի պայմաններում

Հետազոտել է հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության աստիճանը առնետների արյան մեջ, փորձարարական հիփոթիրեոզի պայմաններում, քոլինի էսթեր N-(մեթոքսիբենզոիլ)-O-իզոպրոպիլ-α,β-դեհիդրոթիրոզին օգտագործելուց առաջ և հետո։ Տասնհինգ ամսական առնետների մոտ փորձարարական հիփոթիրեոզի պայմաններում կենդանիների արյան մեջ տեղի են ունենում

հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի բաղադրության կտրուկ աճ և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության կտրուկ նվազում: Քոլինի էսթեր N-(մեթոքսիբենզոիլ)-O-իզոպրոպիլ-α,β-դեհիդրոթիրոզինի ազդեցության տակ կենդանիների արյան մեջ տեղի են ունենում հիփոֆիզի թիրոիդ հորմոնի բաղադրության կտրուկ նվազում և վահանագեղձի հորմոնների բաղադրության կտրուկ աճ, որը բնորոշ է նորմալ կենդանիներին:

T. S. Khachatryan

Role of Choline Ester N-(2-metoxybenzoyil)-O-isopropyl-α, β-dehydrothyrosine in the Change of the Concentration of Thyroid Stimulating Hormone and Thyroid Hormones in Blood Serum of Rats in Experimental Hypothyroidism Conditions

The aim of the present study is to investigate the features of thyroid stimulating hormone concentrations and thyroid hormones in the blood of rats with experimental hypothyroidism before and after injection of the choline ester of N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl-α,β-dehydrothyrozine. The studies have shown that there is a sharp increase of thyroid stimulating hormone level and a sharp drop in the level of thyroid hormones in the blood of fifteen-month rats with hypothyroidism. Decrease of the concentration of thyroid stimulating hormone and increase of the level of thyroid hormones in the blood serum of rats take place and reached their values in intact animals under the action of choline ester of N-(2-methoxybenzoyl)-O-isopropyl-α,β-dehydrothyrozine.

Литература

1. *Ámino N., Ide A., Tamai H.* - Nihon Rinsho. 2012. N 70. V.11. P.1983-1987.
2. *Soma S., Shimegi S., Suematsu N., Sato H.* - Sci Rep. 2013.N 11. P. 38.
3. *Ridgway N. D. J.* -Crit Rev Biochem Mol Biol. 2013. N 48. V. 1. P. 20-38.
4. *Dimov D., Kanev K., Dimova I.* - Acta Biochim Pol. 2012. N 59. V. 2. P.313-316.
5. *McRae S., Chen X., Kratz K., Samanta D., Henchey E., Schneider S., Emrick T.* - Biomacromolecules. 2012. N 13. V.7. P.2099-2109.
6. *Bilic-Komarica E., Beciragic A., Junuzovic D.* - Med Arh. 2012. N 66. V. 6. P.364-368.
7. *Parrat D., Meyer P.* - Rev Med Suisse. 2013. N 9. V. 368. P. 36-39.
8. *Amino N., Ide A., Tamai H.* - Nihon Rinsho. 2012. N 11. P.1983-1987.
9. *Gaitonde D. Y., Rowley K. D., Sweeney L. B.* - Am Fam. Physician. 2012. N 86. V. 3. P. 244-251.
10. *Klein I.* - Clin Endocrinol Metab. 2013. N 98. V. 2. P. 508-510.
11. *De Luca F., Santucci S., Corica D., Pitrolo E., Romeo M., Aversa T.* - Ital Pediatr. 2013. N 39. P. 8.
12. *Noguerol Álvarez M., Odriozola Sánchez J., Avila Londoño D. A., Corcuera Martínez A. I., Rabanal Basalo A., Carmona Mejía P. A.* - Semergen (Spain). 2012. N 8. P. 483-490.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 159.98+159.9:331.108.2+612.821+614.2

К. А. Панчулазян

Психофизиологическое исследование функционального состояния организма с применением полиграфа в психологическом обеспечении безопасности кадровой стратегии

(Представлено академиком М. А. Давтяном 6/VI 2014)

Ключевые слова: *психофизиологическое исследование, оценка достоверности информации, комплексный психологический опрос, индивидуально-психологические особенности, база персональных данных.*

Анатомо-физиологические и индивидуально-психологические особенности (ИПО) индивида формируют бессознательное и сознательное поведение человека. Качественно-количественное соотношение индивидуальных биологических компонентов делает индивид неповторимой индивидуальностью.

Полиграф, или детектор лжи (ДЛ), – многофункциональное устройство для компьютерного тестирования (КТ) ИПО индивида и психофизиологического исследования (ПФИ) изменения функционального состояния организма в динамике детектирования лжи [1]. Основан на принципе добровольности опроса с применением полиграфа (ОПП), не наносит ущерба жизни и здоровью человека, не причиняет вреда окружающей среде и соответствует требованиям к цифровым устройствам класса А, согласно разделу 15 устава FCC [2]. Позволяет многосторонне инструментально документировать ПФИ в системе методик комплексного психологического опроса (КПО) при определении психофизиологического статуса (ПФС) индивида, отборе персонала на профпригодность, исследовании и решении задач человеческого фактора (ЧФ) на производстве [3]. Регистрирует изменения неспецифических вегетативных реакций организма в границах «норма – акцентуация – патология» в ответ на вербальное и акустическое раздражение [4]. Выявляет ИПО по флуктуации интегральных физиологических индикаторов реактивности организма – сердцебиения (кардиоваскулярная реакция), микропотоотделения (кожногальваническая реакция(КГР)), грудного и диафрагмального дыхания в процессе КПО кандидата на профпригодность. Обнаруживает адекватность (правдивость) или неадекватность (лживость) ответных неспецифических физиологических реакций на осознанные вербальные раздражители (вопросы КТ). Проводит оперативную психодиагностику и восстановительную регуляцию психоэмоционального состояния организма, в частности положительной служебной мотивации, методом биологической обратной связи (БОС). Квантифицирует результаты психологической коррекции функциональных нарушений нервной системы (НС): неврозы, стрессы различной этиологии, депрессии, острое и хроническое умственное утомление и др. Оценивает достоверность информации (верификацию правды) в системе психологического обеспечения безопасности бизнеса (ПОББ) регистрацией вегетативных, мимических, психомоторных реакций организма исследуемого, обосновывая психологическую интерпретацию специалиста [5].

Служба психологической безопасности бизнеса (СПББ) в качестве компьютерного тестирования (КТ) с применением компьютерного полиграфа (КП) LX-3000W функционировала на крупном алмазообрабатывающем предприятии (АОП) Республики Армения в 2002 – 2008 гг. На основе научно-технического «Руководства по использованию КП LX-3000W» лицензированной компании США Lafayette Instrument Company с программным обеспечением Polygraph LX Software V.8.1.1 и алгоритмом обсчета результатов POLYSCORE® разработана и продуктивно применена качественно новая модифицированная система методик семантического составления, взаимозаменяемости и тематической дополняемости тестов (опросников полиграфа), адаптированная к специфике алмазообрабатывающего производства, индивидуальным психологическим, психофизиологическим, психофизическим, психосоциальным и интеллектуально-профессиональным особенностям персонала АОП.

Полиграфологическое ПФИ работников участков производственной зоны (ПЗ) АОП проводилось по трем направлениям: 1) скрининговое (просеивающее) исследование поступающего на службу персонала; 2) режимное исследование (РИ) при плановой или внезапной проверке; 3) служебное расследование (СР) при нарушении режима безопасности (кража, подмен, фальсификация и др.) производства. До проведения основного этапа исследования (собственно КТ), при подозрении на ситуационную неадекватность вегетативного, мимического, психомоторного характера или сознательных попыток исследуемого исказить результаты КТ, практиковалось проведение Stimtest в формате RA (оценка ранга) с индикацией ДЛ заведомо значимого стимула, например, собственного имени исследуемого в ряде нейтральных имен, для выявления адекватности или неадекватности неспецифических физиологических вегетативных реакций исследуемого с психологическими осознанными вербальными раздражителями, вопросами тестов. КТ проводится в соответствии с алгоритмом результатов POLYSCORE®, который вычисляет общую вероятность обмана (ОВО) применительно к методикам составления опросников: формата ZCT (метод зоны сравнения) и формата MGQT (модифицированый метод общих вопросов), использующих технику контрольных вопросов, относящихся к вероятной лжи. Если метод формата ZCT направлен на расследование только одного факта, то метод MGQT предназначен для выяснения нескольких аспектов одного и того же факта. Кроме того, при методе MGQT применяются смешанные последовательности вопросов, необходимые для получения достаточной информации в отношении контрольных вопросов. Метод ZCT по сравнению с методом MGQT дает меньше неопределенных результатов с более высокой вероятностью правильного заключения, т.е. более достоверен. В ПФИ использовалась и методика Rank Field (ранжирование поля (РП)), полезная для выявления у исследуемых подозрительных тем с участками неискренности и большей «прицельности» в семантическом составлении опросников с учетом ИПО обследуемых. При использовании опросников в формате ZCT или MGQT регистрируется не менее трех полиграмм и рассчитывается ОВО. Например, ОВО больше 0.99 означает, что менее 1% исследуемых могли бы демонстрировать такие реакции и при этом говорить правду. Алгоритм обсчета результатов POLYSCORE® анализирует в выбранных полиграммах физиологические кривые, полученные от датчиков, вычисляет ОВО в процентном выражении и дает окончательный вывод (ОВ): No Deception Indication (обман не обнаружен) в интервале менее 1 – 5%, Inconclusive (неопределенный) в интервале 5 – 95% или Deception Indication (обман обнаружен) в интервале 95 – более 99% ОВО. Правильное решение неопределенного результата – повторное ПФИ. Предложенная Кливом Бакстером 7-бальная шкала оценки реакций учитывает не только факт (наличие) реакции, но и обеспечивает возможность измерять (квантифицировать) в определенной степени ее величину (силу) для экспертной количественной оценки (ЭКО) ПФИ [6 – 8]. Polygraph Report (отчет полиграфа) КТ каждого исследуемого сохраняется в виде индивидуального файла полиграфа (ФП).

ДЛ в системе СПББ является надежным источником информации в вопросах, по которым не существует архивов, и за короткое время решает задачи, которые другими способами решить невозможно или чрезвычайно трудно [9]. Поэтому методом TES проводится скрининговое ПФИ нанимаемого на службу персонала, затрагивающее много различных тем относительно безопасности и надежности проверяемого, истинные ответы на которые он может скрывать [10]. Некоторые используемые темы ПФИ методом TES: 1) состояние здоровья (скрываемые психические нарушения и заболевания); 2) нанесение финансового ущерба или совершение кражи на предыдущих местах работы; 3) инициирование утечки конфиденциальной информации; 4) наличие пагубных увлечений (алко-, нарко-, игрозависимость); 5) фальсифицирование анкетных данных о себе; 6) криминальное прошлое или связи с криминальными структурами; 7) истинный мотив поступления на АОП; 8) финансовые аспекты (банковские кредиты, неоплаченные долги) и иная скрываемая информация. Во время детектирования обратимые физиологические сдвиги наблюдаются в сердечно-сосудистой, психоэмоциональной, эндокринной и дыхательной системах. Динамика соотношения «возбуждение синаптической нервной системы (СНС) – уменьшение электросопротивления кожи» достоверно информирует о секреции потовых желез и функциональном состоянии СНС, что отражается в колебании амплитуды КГР.

Материал и методы исследования. КТ с применением КП LX-3000W прошли около 2000 работников участков ПЗ и отделов АОП. В английской (42 теста) и русской (18 тестов) версиях ДЛ в рабочем состоянии находятся 60 тестов, еще 21 тест – в взаимозаменяемом резерве. Итого 81 психологический тест-опросник по 7 основным темам – кража, подмен, хищение, воровство, нажива, подлог, фальсификация – наиболее вероятным специфическим видам нарушения режима безопасности бизнеса АОП. Предваряя каждое КТ, параллельно над тестами проводили подготовительную работу – адаптацию теста к ИПО исследуемого и теме детектирования: 1) обновление содержания темы; 2) изменение формулировок вопросов с сохранением содержания и цели темы; 3) семантическое составление новых тестов, соответствующих функциональным должностным обязанностям (ФДО), технологии обработки алмазов (распиловка, обдирка, шлифовка, огранка) в бриллианты (промывка, сортировка, оценка).

Физиологические реакции от датчиков преобразуются в цифровую форму, хранятся на магнитных носителях высокой плотности и воспроизводимы для анализа КТ. Обсчет полученных экспериментальных данных (полиграмм) проводился двумя методами: ЭКО реакции на каждый значимый (проверочный) вопрос для каждого физиологического показателя – дыхания, КГР и сердечно-сосудистой активности и автоматического компьютерного анализа (АКА) алгоритмом обсчета POLYSCORE®. Программное обеспечение POLYSCORE® (Windows®-based), разработанное Лабораторией прикладной физики (APL) Университета Джона Хопкинса (США), применяется для компьютерной обработки данных, полученных в ходе проверок на полиграфе. POLYSCORE® реализует алгоритм анализа физиологической информации на основе метода статистических сравнений и по данным APL обеспечивает более 99% достоверности интерпретации. Система обработки данных программным обеспечением Objective Scoring System (OSS), разработанная для доказательных целей, важна в суде, позволяет полиграфологам достичь практически полного консенсуса в оценке точности ОПП, составляет эмпирическую основу результатов анализа КТ и подтверждения достоверности ОВ [6, 11].

Результаты и обсуждение. По данным на 14.11.2005 за 3 года работы СПББ ПФИ в рамках скринингового (TES) исследования РИ и СР прошли около 2000 работников ПЗ, не считая повторных ПФИ и начинающих работников АОП. Повторные ПФИ исследуемые проходили по новым, незнакомым для себя тестам с одинаковой или иной темой: в первом случае – для сохранения фактора неожиданности, используя психологическую неподготовленность исследуемого к очередному ПФИ, а во втором случае – для проверки исследуемого на возможную причастность к иному виду нарушения режима безопасности бизнеса на АОП. Во всех случаях каждое ПФИ носило характер научно объективного исследования с соблюдением конкретных производственных взаимоотношений в диаде исследующий – исследуемый, охватывало определенный временной отрезок работы исследуемого на предприятии и не выходило за рамки его профессиональных возможностей и ФДО. На основе сравнительного анализа полученного экспериментального психофизиологического и психологического материала сформирована база персональных данных (БПД) АОП, позволяющая оперативно решать задачи, связанные с ЧФ на алмазообрабатывающем производстве.

Сравнительный анализ результатов ПФИ работников ПЗ АОП за первый 3-летний период 05.11.2002 – 14.10.2005 показал достоверную динамику убывания общего количества ОВ «обман обнаружен» от числа исследованных. За первые 13 месяцев (05.11.2002 – 30.11.2003) работы СПББ в процентном соотношении ПФИ количество ОВ «обман обнаружен» составило 23.68%, за следующие 10.5 месяца (01.02.2004 – 16.12.2004) – 16.96% и за последние 10 месяцев (13.01.2005 – 14.11.2005) – 11.23% от числа исследованных.

Если итог 3-летней работы СПББ АОП разделить на два примерно равных временных периода, то за первые 17.5 месяца (05.11.2002 – 23.04.2004 гг.) количество ПФИ с ОВ «обман обнаружен» составило 22,61% от числа исследованных, а за вторые 18 месяцев (02.05.2004 – 14.11.2005 гг.) – 13.93% от числа исследованных, что в 1.62 раза меньше по сравнению с первым периодом работы СПББ.

С целью экспертной психологической диагностики и психофизиологического анкетирования (ПФА) поступающих на АОП работников разработана и продуктивно использовалась авторская интегральная система методик КПО «Индивидуально-психологические особенности кандидата на профпригодность» [3]. За период с 11.05.2003 по 07.05.2004 по системе методик КПО проведено психологическое тестирование (ПТ) и ПФА 753 работников, данные которых приобщены к результатам их последующих ПФИ и вошли в БПД АОП. Система КПО уже на стадии предварительного КТ позволяет выявлять индивидуальные психологические, психофизиологические, физиологические компоненты личности и корригировать тематические опросники полиграфа с ПФС исследуемого при определении соответствия в исполнении ФДО персонала АОП. Процедура полиграфологического ПФИ носит характер гласности, т.е. исследуемый полностью информирован о ее содержании, а в своих выводах специалист основывается в первую очередь на результатах ЭКО и уже позже анализирует и интерпретирует их посредством алгоритмов АКА и РП. Результаты ПФИ носят вероятностный характер и не доказывают виновность или невиновность исследуемого по отношению к конкретному деянию, однако научно обоснованным методом инструментального обнаружения скрываемой информации достоверно документируют его причастность или непричастность и признание в совершении противозаконного действия.

Достоверные результаты ПФИ первых 3 лет работы СПББ АОП позволяют констатировать факт продуктивного функционирования полиграфа в выявлении: 1) причастности или непричастности индивида к различным видам нарушения режима безопасности; 2) наличия фактора психологического сдерживания недобросовестных работников; 3) профпригодности работников и соответствие в исполнении ФДО. В полиграфологии достоверен ОВ, основанный на регистрации максимального числа физиологических параметров и полученный в результате многостороннего и неоднократного ПФИ [12].

Психологически сдерживающий эффект полиграфологических проверок состоит в том, что работник, знающий о функционировании СПББ, как правило, отказывается от совершения противозаконных действий, наносящих ущерб предприятию отчасти из опасения быть пойманным, но очевиден психологический тормоз, останавливающий его на пути к преступлению. Полиграф как инструмент закладывания фундамента доверия в профессиональных отношениях работодатель – работник является гарантией качества в кадровой стратегии, обеспечении внутренней безопасности, повышении конкурентоспособности и развитии бизнеса государственной или частной структуры.

Выводы. 1. Компьютерное тестирование с применением полиграфа является достоверной многосторонней системой психофизиологического и психологического исследования индивидуально-психологических особенностей кандидата на профпригодность и детектирования лжи в системе психологического обеспечения безопасности бизнеса.

2. Бесконтактная оценка достоверности информации системой методик комплексного психологического опроса с регистрацией физиологических неспецифических вегетативных, мимических и психомоторных реакций организма позволяет научно обоснованно обнаруживать достоверность высказываний исследуемого.

3. Кооперация компьютерного тестирования с применением полиграфа с комплексным психологическим опросом с регистрацией физиологических реакций организма служит универсальным средством декодирования первичных и вторичных невербальных элементов в кадровой стратегии и обеспечении внутренней безопасности.

4. Компьютерное тестирование с применением полиграфа позволяет оперативно проводить психодиагностику функциональных нарушений нервной системы, восстановительную регуляцию и психологическую коррекцию психоэмоционального состояния организма методом биологической обратной связи.

5. Комплексный психологический опрос с применением полиграфа дает возможность корректного проведения индивидуального и группового психологического тренинга и мониторинга персонала предприятия с целью поддержания положительной служебной мотивации, обеспечения карьерного и личностного роста, решения задач конфликтологии.

6. Модифицированная система методик семантического составления тестов полиграфа, адаптированная к специфике предприятия и индивидуальным психофизиологическим и интеллектуально-профессиональным особенностям персонала, позволяет минимизировать вероятность получения неопределенного результата детектирования.

Институт физиологии им. акад. Л. А. Орбели НАН РА

К. А. Панчулазян

Психофизиологическое исследование функционального состояния организма с применением полиграфа в психологическом обеспечении безопасности кадровой стратегии

Разработана адаптированная к специфике предприятия многосторонняя система комплексного психологического опроса для исследования индивидуально-психологических особенностей персонала на профпригодность. Модифицирована методика семантического составления опросников полиграфа в системе психологического обеспечения безопасности бизнеса. Обнаружено, что опрос с применением полиграфа является интегральным методом оценки достоверности информации в кадровой стратегии и решении задач человеческого фактора. Подтверждено, что бесконтактная оценка достоверности информации позволяет верифицировать искренность вербальных ответов по вегетативным, мимическим и психомоторным реакциям индивида.

Կ. Ա. Պանչուլազյան

Օրգանիզմի ֆունկցիոնալ վիճակի հոգեֆիզիոլոգիական հետազոտությունը պոլիգրաֆի միջոցով կադրային ռազմավարությունում հոգեբանական անվտանգության ապահովմամբ

Մշակված է հիմնարկության սպեցիֆիկային ադապտացված կոմպլեքսային հոգեբանական հարցման բազմակողմանի համակարգ անձնակազմի պրոֆպիտանելիության անհատական հոգեբանական առանձնահատկությունների հետազոտության համար: Մոդիֆիկացվել է պոլիգրաֆի հարցաշարերը կազմելու իմաստաբանական մեթոդաբանությունը բիզնեսի անվտանգության հոգեբանական ապահովման համակարգում: Բացահայտվել է, որ պոլիգրաֆի կիրառմամբ հարցումը տեղեկատվության հավաստիության կադրային ռազմավարության և մարդկային գործոնի խնդրի լուծման ինտեգրալային մեթոդ է: Հաստատվել է, որ տեղեկատվության հավաստիության անկոնտակտ գնահատումը թույլ է տալիս վերիֆիկացնել անձնակազմի բանավոր (վերբալ) պատասխանների իսկությունը ըստ վեգետատիվ, միմիկական և հոգեշարժողական ռեակցիաների:

K. A. Panchulazyan

Psychophysiological Investigation of the Organism’s Functional Condition with the Use of Polygraph in Psychological Safety Support of the Human Resources Strategy

Specially tailored multilateral system of complex psychological survey within the frame of individual psychological characteristics investigation of personnel capabilities according to industry specifics has been developed. It was developed the method of semantic questioner composition for the system of psychological business safety. It has been revealed that questioning by using polygraph represents an integral method for assessment of information accuracy in HR strategy and human element. It is established that invasive assessment of information significance let to verification of verbal responses sincerity by autonomic, mimic and psychomotor reactions of the personnel.

Литература

1. *Асямов С. В.* Стратегия выявления лжи. М. Щит, 2006.
2. *Комиссарова Я. В.* Полиграфология: реалии сегодняшнего дня. Юридическая психология. 2006. С. 40 – 46
3. *Панчулазян К. А.* - Доклады НАН РА. 2012. Т. 112. N3. С. 320 – 327.
4. *Панчулазян К. А.* - Вестник МАНЭБ. 2005. Т. 10. N 2. С. 175 – 177.
5. *Пиз А.* В кн.: Язык телодвижений. Как читать мысли других людей по их жестам. М. Эксмо. 2003. С. 117 – 121.
6. *Азарова Н. Ю., Жирнов С. И., Корочкин П. Б.* Обзор методик полиграфных проверок США. Редакция Коровина В. В. М. ЦИПТ «ЭКСПЕРТ». 2013.
7. *Matte J. A.* - Polygraph. 2007. V. 36. N. 2. P. 84 – 90.
8. *Harwell E. M.* – Polygraph. 2000. V. 29. N. 2. P. 195 – 197.
9. *Пеленицын А. Б., Сошников А. П.* - Эксперт-криминалист. № 2. М. Юрист. 2011. С. 12 – 15.
10. *Сошников А. П.* В. кн.: Оценка персонала. Психологические и психофизические методы. М. Эксмо. 2010. С. 27 – 33.
11. *Алексеев Л. Г.* Психофизиология детекции лжи. Методология. М. ООО «Галерея Принт». 2011.
12. *Варламов В. А., Варламов Г. В., Комиссарова Я. В.* Составление заключений по материалам психофизиологических исследований. М. 2009.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

УДК 581.112

В. В. Казарян, Ж. О. Овакимян, З. М. Паравян

Рост и фотосинтетическая деятельность торчков дуба крупнопыльникового в зависимости от высоты местопроизрастания и порослевой нагрузки

(Представлено чл.-кор. НАН РА Ж. А. Варданяном 5/II 2014)

Ключевые слова: *дуб крупнопыльниковый, порослевая нагрузка, показатели роста, функциональная активность.*

Любое нарушение целостности растительного организма приводит к морфо-структурным и физиолого-биохимическим изменениям. Характер этих сдвигов зависит не только от степени вмешательства в организм растения, но и от условий местопроизрастания, особенно от высоты над уровнем моря.

После сплошных вырубок дубовых древостоев в Северной Армении возникла необходимость их восстановления вегетативным путем. С этой целью нами был использован способ порослевой нагрузки в среднем лесном поясе (1500-1600 м над ур. м.). Анализ морфологических и физиолого-биохимических показателей привел к заключению, что в этих условиях оптимальной порослевой нагрузкой является наличие на пнях двух – трех порослей [1-4]. Согласно нашим [5, 6] и другим литературным [7] данным этот факт обусловлен уровнем корне-листовой интеграции.

Однако дубравы Северной Армении распространяются до высоты 1800-2000 м над ур. м. Поскольку имеется тесная взаимосвязь процессов жизнедеятельности растений с условиями произрастания, следует полагать, что уровень корне-листовой интеграции зависит от высоты местности, в связи с чем возникает необходимость выбора оптимального варианта порослевой нагрузки на разных высотах [4].

Материал и методика. Объектами исследования служили 45-50-летние порубленные в 1997-1998 гг. дубравы Ванадзорского лесничества Гугаркского лесхоза (Северная Армения). Исследования проводились на высотах 1300, 1600 и 1900 м над ур. м.

Порослевая нагрузка регулировалась по следующим вариантам: К – контроль, 4 – оставлены четыре, 3 – три, 2 – две и 1 – одна поросль. В периоде бурного роста (конец июня – июль) определялись содержание хлорофилла по Маккини [8], связь с липопротеидным комплексом (ЛПК) по Осиповой [9] и интенсивность фотосинтеза колориметрически. Объектами исследования служили торчки дуба крупнопыльникового.

Известно, что рост дуба формируется в виде торчков [10], при этом теряется ведущая роль главной оси, происходит неустойчивое моноподиальное ветвление побегов, образуется система ветвей примерно с одинаковым ростом и сглаживанием различий между главной осью и боковыми побегами.

В конце периода роста (конец августа – начало сентября) определялись поверхность листьев методом контура [11] и дендрометрические показатели торчков. Повторность определений 8-кратная.

Результаты и обсуждение. Наши исследования по формированию листового аппарата торчков порослей дуба выявили, что высота местопроизрастания существенно влияет на показатели листьев (рис. 1).

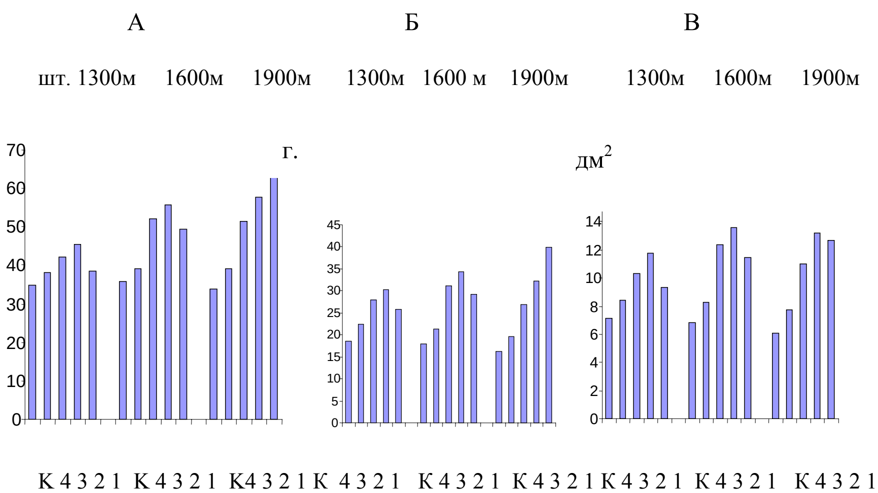


Рис. 1. Число (А), поверхность (Б) и сухой вес (В) листьев торчков дуба на разных высотах произрастания и при разной порослевой нагрузке.

Данные рис. 1 показывают, что с высотой произрастания число и общая поверхность листьев увеличиваются. Однако при этом, как правило, поверхность одного листа уменьшается. Мелколистность рассматривается как общая закономерность, связанная с высотой произрастания и усилением солнечной радиации [12]. Между тем следует отметить, что формирование мелколистности компенсируется увеличением толщины листьев за счет разрастания палисадной паренхимы.

По нашему мнению, мелколистность и утолщение листьев способствуют большему поглощению света, а поскольку каждая клетка содержит пластиды, то число последних увеличивается и, следовательно, имеется больше реакционных центров фотосинтеза.

С другой стороны, мелколистность и утолщение листа свидетельствуют о развитии ксерофитных признаков, что очень важно для регуляции водного режима при высокой интенсивности света на больших высотах произрастания [13].

Результаты опытов показали, что при регуляции порослевой нагрузки наблюдается следующая картина: у контрольного и 4-порослевого вариантов площадь общей поверхности листьев с увеличением высоты произрастания от 1300 до 1900 м падает, тогда как при 2- и 3-порослевой нагрузке она возрастает и пик приходится на 1600 м, а у однопорослевого варианта – на 1900 м. Сухой вес листьев меняется аналогично изменению поверхности. Это подтверждает мнение, что сдвиги в сухом весе листьев происходят за счет их утолщения.

Содержание хлорофилла и интенсивность фотосинтеза листьев дуба крупнопыльникового в зависимости от высоты произрастания и порослевой нагрузки пней (M±m)

Вариант	Хлорофилл, мг/г сухого вещества				
	а	б	а+б	а/б	Прочность связи с ЛПК, % от общего хлорофилла
1300 м над ур. м.					
Контроль	5.54±0.21	2.61±0.11	8.15±0.24	2.12	21.6
4 поросли	5.66±0.12	2.46±0.08	8.12±0.14	2.30	19.8
3 поросли	5.84±6.47	2.17±0.10	8.01±0.22	2.69	17.6
2 поросли	5.91±9.80	1.96±0.07	7.87±0.18	3.02	16.6
1 поросль	6.04±2.44	1.81±0.08	7.85±0.20	3.34	15.7
1600 м над ур. м.					
Контроль	5.16±0.19	2.38±0.09	7.54±0.21	2.17	24.1
4 поросли	5.23±0.16	2.17±0.06	7.40±0.17	2.41	22.0
3 поросли	5.40±0.24	1.98±0.07	7.38±0.25	2.73	20.2
2 поросли	5.52±0.26	1.78±0.09	7.30±0.27	3.10	18.8
1 поросль	5.56±0.18	1.60±0.07	7.16±0.19	3.48	17.1
1900 м над ур. м.					
Контроль	4.91±0.22	2.16±0.08	7.07±0.23	2.27	26.3
4 поросли	5.11±0.24	2.02±0.05	7.13±0.24	2.53	24.7
3 поросли	5.29±0.18	1.86±0.10	7.17±0.20	2.84	23.8
2 поросли	5.32±0.19	1.64±0.10	6.96±0.21	3.24	21.6
1 поросль	5.43±0.12	1.51±0.07	6.94±0.14	3.60	18.7

Высота произрастания и порослевая нагрузка в комплексе повлияли на количественные и качественные показатели хлорофилла (таблица). Как и ожидалось, увеличение высоты произрастания и соответственно усиление интенсивности освещенности привели к уменьшению содержания общего хлорофилла. Однако темпы количественного уменьшения хлорофилла *а* более низкие, чем хлорофилла *б*. Данное явление закономерно и объясняется отношением этих форм хлорофилла к свету [14], в результате чего общее содержание хлорофилла с высотой уменьшается, а соотношение *а*/*б* увеличивается.

Качественные изменения зеленых пигментов проявились в упрочнении их связи с липопротеидным комплексом по мере возрастания высоты местопроизрастания, что является результатом адаптации растений к интенсивному освещению и предохранения молекул хлорофилла от распада [15].

При этом примечательно, что уменьшение порослевой нагрузки приводит, с одной стороны, к уменьшению количества хлорофилла в листьях, с другой – к упрочнению его связи с ЛПК. Этому явлению было дано объяснение с точки зрения увеличения корнеобеспеченности листьев: чем выше корнеобеспеченность, тем слабее связь хлорофилла с ЛПК [15]. Однако к этому следует прибавить также изменение светового фактора при разной порослевой нагрузке, так как в растениях побеги взаимно затеняют друг друга. В нашем случае чем больше побегов на пне, тем больше их взаимное затенение. При этом в порослевой кроне создается разная интенсивность света, что параллельно с высотой произрастания влияет на качественные и количественные показатели хлорофилла.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что эффект изменения интенсивности света как при различных высотах местности, так и при порослевой нагрузке на качественные и количественные изменения хлорофилла одинаков, хотя уровень влияния указанных факторов может быть разным. Этот факт имеет весьма важное значение для проведения лесовосстановительных работ на срубленных древостоях, так как влияет на фотосинтетический аппарат растений, играющий большую роль в продукционном процессе леса. Данное явление следует рассматривать в аспекте физиологической адаптации хлорофиллоносного аппарата к порослевой нагрузке. Изменения, происходящие в фотосинтетическом аппарате листьев порослей дуба, отразились на его функциональной активности (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что с высотой местности способность ассимиляции углекислоты порослями возрастает, что свидетельствует о повышении фунциональной активности молекул хлорофилла.

При рассмотрении полученных данных с точки зрения порослевой нагрузки выяснилось, что максимальная интенсивность фотосинтеза при высотах 1300 и 1600 м приходится на 2-порослевой вариант, затем 3-порослевой, а при 1900 м – на однопорослевую нагрузку, потом 2-порослевую. Очевидно, на это явление влияет интенсивность света. Как известно, в горных условиях с повышением уровня местопроизрастания снижается температурный оптимум фотосинтеза, возрастает потребность растения в свете и, следовательно, его поглощение в процессе фотосинтеза.

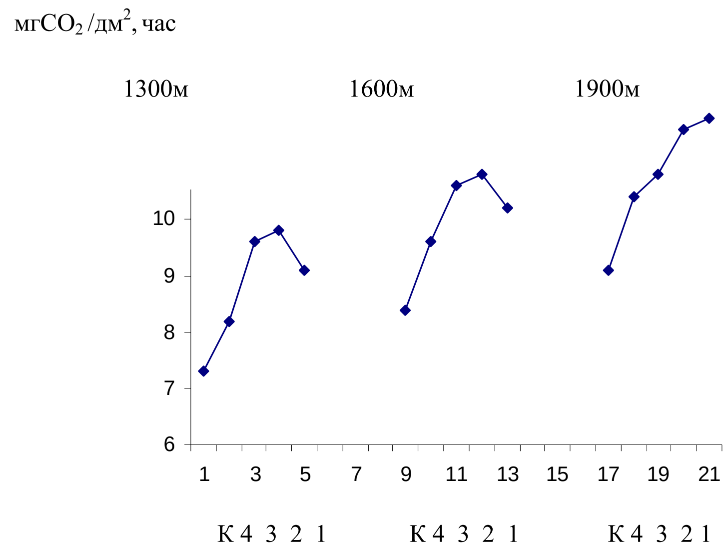


Рис. 2. Интенсивность фотосинтеза листьев дуба в зависимости от высоты произрастания и порослевой нагрузки пней.

Как было показано ранее [2, 3, 5], изменение интенсивности фотосинтеза при различной порослевой нагрузке тесно коррелирует с уровнем корне-листовой интеграции. На основании этого можно утверждать, что на высотах 1300 и 1600 м оптимальная корне-листовая корреляция проявилась у экземпляров с 2-3 порослями, а при 1900 м – у одно- и двухпорослевых растений.

Обобщая полученные данные, можно прийти к заключению, что при регулировании числа порослей необходимо учесть высоту произрастания порослевого древостоя и соответственно проявлять избирательность.
Наши опыты показали, что в условиях Северной Армении оптимальной порослевой нагрузкой дуба крупнопыльникового на высоте 1300-1600 м над ур. м. является вариант с 2-3 порослями, а 1900 м – с одной порослью.

Институт ботаники НАН РА

В. В. Казарян, Ж. О. Овакимян, З. М. Паравян

Рост и фотосинтетическая деятельность торчков дуба крупнопыльникового в зависимости от высоты местопроизрастания и порослевой нагрузки

Изучено влияние числа пневых порослей в вырубленных дубравах Северной Армении на показатели роста, фотосинтетическую активность, содержание хлорофилла и его связь с липопротеидным комплексом в зависимости от высоты местопроизрастания. Выяснено, что в условиях Северной Армении оптимальной

порослевой нагрузкой дуба крупнопыльникового на высоте 1300 – 1600 м над ур. м. является вариант с 2 – 3 порослями, а 1900 м – с одной порослью.

V. V. Kazaryan, J. H. Hovakimyan, Z. M. Paravyan

Growth and Photosynthetic Activity of Quercus Macranthera Depending on Coppice Load and Altitude

The influence of the number of shoots on stubs in felled oak forests on the index of growth, photosynthetic activity, chlorophyll and its relationship to the lipoproteid complex, depending on the altitude in Northern Armenia has been studied. It was shown, that the best shoot load of Quercus macranthera in Northern Armenia at an altitude of 1300 – 1600 m above sea level is an option with 2 – 3 verdures and in case of 1900 m – an option with one verdure.

Վ. Վ. Ղազարյան, Ժ. Հ. Հովակիմյան, Զ. Մ. Պառավյան

Խոշորառէջ կաղնու աճման և ֆոտոսինթետիկ գործունեության կախվածությունը աճելավայրի բարձրությունից և մացառային ծանրաբեռնվածությունից

Ուսումնասիրվել է Հյուսիսային Հայաստանի հատված կաղնուտների կոճղաշվային վերականգնումը մացառային ծանրաբեռնվածության տարբերակով՝ կախված աճելավայրի բարձրությունից։ Պարզվել է աճման, ֆոտոսինթեզի ինտենսիվության, տերևներում՝ քլորոֆիլի պարունակության կապը ճարպասպիտակուցային համալիրի հետ՝ կախված աճելավայրի բարձրությունից և մացառային ծանրաբեռնվածությունից։ Եզրակացություն է արվել, որ Հյուսիսային Հայաստանի պայմաններում ծովի մակարդակից 1300 – 1600 մ բարձրության վրա խոշորառէջ կաղնու օպտիմալ մացառային ծանրաբեռնվածությունը կոճղի վրա 2 – 3 մացառ թողնել է, իսկ 1900 մ-ում՝ 1 մացառ։

Литература

1. *Казарян В. В., Давтян В. А., Симонян Р. К.* В кн.: Материалы междунар. конф. «Проблемы современной дендрологии». М. 2009. С. 702 - 705.
2. *Казарян В. В., Давтян В. А., Мартиросян В. С.* – ДНАН Армении. 2009. Т. 109. N2. С. 189 - 193.
3. *Казарян В. В., Давтян В. А., Оганесян Л. Н.* В сб.: Флора, растительность и растительные ресурсы Армении. Ереван. 2009. С. 114 - 115.
4. *Казарян В. В., Давтян В. А.* - Научные чтения памяти проф. А.А. Яценко-Хмелевского «Структурно-функциональные исследования растений в приложении к актуальным проблемам экологии и эволюции биосферы». СПб. 2009. С. 22 - 23.
5. *Давтян В. А., Казарян В. В., Овакимян Ж. О.* - Изв. аграрной науки. Тбилиси. 2010. Т. 8. N 2. С. 111 - 114.
6. *Казарян В. В., Овакимян Ж. О.* В кн.: Материалы XIII делегатского съезда русского ботанического общества. Тольятти. 2013. С. 70 - 71.
7. *Казарян В. О., Хуршудян П. А., Габриелян В. Г.* - Тр. Тбилисского ин-та леса. 1974. Т. 21. С. 154 - 171.
8. *Mackinney G.* –J. Biol. Chem. 1941. V. 140. N 1. P. 315 - 321.

9. *Осипова О. П.* - ДАН СССР. 1947. Т. 37. N8.
10. *Вознесенский В. Л., Заленский О. В., Семихатова О. А.* Методы исследования фотосинтеза и дыхания растений. М. – Л. Наука. 1965. С. 799 - 801.
11. *Ничипорович А. А., Строганова Л. Е., Чмора С. Н., Власова Н. П.* Фотосинтетическая деятельность растений в посевах. М. Изд-во АН ССР. 1961. 160 с.
12. *Кернер Х.* В кн.: Экология высокогорий Тбилиси. Мецниереба. 1988. С. 27 - 39.
13. *Нахуцришвили Г. Ш. Гамцелидзе З. Г.* Жизнь растений в экстремальных условиях высокогорий. Л. Наука. 1984. 123 с.
14. *Любименко В. Н.* К вопросу о функциональной энергии листа в фотосинтезе. Избр. тр. Киев. 1963. Т. 1. С.126 - 134.
15. *Казарян В. О.* Физиологические аспекты эволюции от древесных к травам. Л. Наука. 1990. 348 с.