

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2012

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ. Գ. ՂԱՐԱԳՅՈՋՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Գ. Ա. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, академик К. Г. КАРАГЕЗЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician K. G. KARAGEUZYAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երեւան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone: (37410) 56-80-67 URL: <http://elib.sci.am> e-mail: mas@sci.am

© НАН РА. Президиум. 2012

© Издательство “Гитутюн”

НАН РА. 2012

ԲՈՎԱՆՂԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ա. Վ. Պողոսյան</i> – L2-օպտիմալ ռացիոնալ մոտարկման գուգամիտության մասին	341
<i>Ա. Ն. Հայրապետյան</i> – Սֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի և անույար ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունները.....	350
<i>Ռ. Վ. Դալլաքյան</i> – Միավոր շրջանում մի դասի անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացման մասին	355
<i>Գ. Ա. Սարգսյան</i> – Հաստատուն գործակիցներով հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումների մասին շրջանում	360

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ռ. Մ. Գիրակոսյան</i> – Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսության մասին	369
<i>Ա. Ա. Պապյան</i> – Հաղորդիչ ուղղանկյուն մեմբրանի տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում	377
<i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Գ. Բ. Ղազարյան</i> – Հաղորդիչ սալի պլանար տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում	382

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Դ. Բ. Հայրապետյան, Հ. Խ. Թևոսյան</i> – Էլեկտրոնային վիճակները և լույսի ուղիղ միջոցառական կլանումը Պեշել-Թելլերի ձևափոխված պոտենցիալով գնդային քվանտային կետում	389
---	-----

ԿԵՆՍԱՖԻԶԻԿԱ

<i>Լ. Յ. Հակոբյան</i> – Երկաթի իոնների ազդեցությունը <i>Rhodobacter sphaeroides</i> բակտերիաների աճման և օքսիդավերականգնողական ակտիվության վրա	396
---	-----

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

<i>Ա. Ֆ. Միրզոյան, Ջ. Ա. Կարապյան, Ֆ. Վ. Միրզոյան, Պ. Ա. Ղազարյան</i> – Պոլիօքսիմետաղներ դասին պատկանող պրեպարատի ազդեցության մեխանիզմը բջիջների միջուկների ըստ պոլիդուրայի դասերի բաշխվածության վրա.....	403
<i>Հ. Մ. Ամիրխանյան, Ս. Հ. Ղազարյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Կ. Գ. Ղարազյոզյան</i> – Օրնիտինի ածանցյալների լիթիումական աղերի ազդեցությունը լիպիդների գերօքսիդացման գործընթացի վրա ուղեղում և լյարդում in vitro փորձերի պայմաններում	411
<i>Մ. Գ. Ռահմանի, Ռ. Գ. Քամալյան, Մ. Ջ. Դեհջան-Բանադակի, Գ. Ջ. Եսկանդարի</i> – Էներգակրիչների կորեյցիան կովերի արյան պլազմայում վաղ կաթնաստվության շրջանում կերի հետ հավելյալ խոլինի կերակրման պայմաններում	417

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

<i>Ա. Ա. Սավայան, Վ. Ա. Չավուշյան</i> – Էթանոլային ինտոքսիկացիայի դադարեցման պայմաններում առնետների ուղեղի locus coeruleus-ի նեյրոնների էլեկտրաֆիզիոլոգիական ուսումնասիրություն	422
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>А. В. Погосян</i> – О сходимости L_2 -оптимальной рациональной аппроксимации	341
<i>А. Н. Айрапетян</i> – Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций.....	350
<i>Р. В. Даллакян</i> – О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций	355
<i>Г. А. Саргсян</i> – О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге	360

МЕХАНИКА

<i>Р. М. Киракосян</i> – К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины	369
<i>А. А. Папян</i> – Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле	377
<i>С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян</i> – Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле	382

ФИЗИКА

<i>Д. Б. Айрапетян, О. Х. Тевосян</i> – Электронные состояния и прямое межзонное поглощение света в сферической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера	389
--	-----

БИОФИЗИКА

<i>Л. Ю. Акоюн</i> – Влияние ионов железа на характеристики роста и редокс активность <i>Rhodobacter sphaeroides</i>	396
--	-----

БИОХИМИЯ

<i>А. Ф. Мирзоян, З. А. Караян, Ф. В. Мирзоян, П. А. Казарян</i> – Механизм действия препарата из класса полиоксиметаллатов на распределение ядер клеток по классам плоидности	403
<i>О. М. Амирханян, С. А. Казарян, С. С. Овакимян, К. Г. Карагезян</i> – Влияние производных литиевых солей орнитина на процесс липидной пероксидации мозга и печени в опытах <i>in vitro</i>	411
<i>М. Г. Рахмани, Р. Г. Камалян, М. Дж. Дехджан-Банадаки, Г. Дж. Ескандари</i> – Корреляция между энергоносителями в плазме крови в ранний период лактации коров, получавших в качестве добавки холин	417

ФИЗИОЛОГИЯ

<i>А. А. Саваян, В. А. Чавушян</i> – Электрофизиологическое исследование нейронов locus coeruleus мозга крыс после этанольной интоксикации.....	422
---	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>A. V. Poghosyan</i> – On a Convergence of the L_2 -Optimal Rational Approximation ...	341
<i>A. N. Hayrapetyan</i> – Boundary Characteristics of Summerizing Spherical Derivative and Annular Function	350
<i>R. V. Dallakyan</i> - On a Representation of One Class of Analytic Functions in the Unit Case	355
<i>G. A. Sargsyan</i> - On Polynomial Solutions in the Disc for Dirichlet Problem of Hyperbolic Equations with Constant Coefficients	360

MECHANICS

<i>R. M. Kirakosyan</i> - On the Refined Theory Thermo-Elasticity of Orthotrope Shells of Variable Thickness	369
<i>A. A. Papyan</i> – The Vibrations of Conductive Rectangle Membrane in the Transverse Magnetic Field.....	377
<i>S. A. Ambartsumian, K. B. Ghazaryan</i> – Planar Vibration of Electroconductive Plate in a Transverse Magnetic Field	382

PHYSICS

<i>D. B. Hayrapetyan, H. Kh. Tevosyan</i> – Electronic States and Direct Interband Light Absorption in a Spherical Quantum Dot with Modified Poschel-Teller Potential	389
---	-----

BIOPHYSICS

<i>L. Y. Hakobyan</i> – Effects of Ferrous Ions on the <i>Rhodobacter sphaeroides</i> Growth Properties and Redox Activity	396
--	-----

BIOCHEMISTRY

<i>A. F. Mirzoyan, Z. A. Karalyan, F. V. Mirzoyan, P. A. Ghazaryan</i> – The Mechanism of Action of the Drug from the Polyoxymetalat Class on the Distribution of Cell Nuclei for Ploid Classes	403
<i>H. M. Amirkhanyan, S. H. Ghazaryan, S. S. Hovakimyan, K. G. Karageuzyan</i> – Effect of Derivatives of Ornithine Lithium Salts on the Process of Lipid Peroxidation in Brain and Liver Homogenates in vitro Experiments	411
<i>M. G. Rahmani, R. G. Kamalyan, M. J. Dehghan-Banadaki, G. J. Eskandari</i> - The Correlation between Energy Carriers in the Blood Plasma of Early Lactating Dairy Cows Receiving Supplemental Choline	417

PHYSIOLOGY

<i>A. A. Savayan, V. A. Chavushyan</i> – Electrophysiological Study of Neurons of locus coeruleus Rat's Brain after Discontinuation of Ethanol Consumption	422
--	-----

MATHEMATICS

УДК 517.518.8, 519.65

A. V. Poghosyan

On a Convergence of the L_2 -Optimal Rational Approximation

(Submitted by academician A. B. Nersessian 31/X 2011)

Keywords: *Rational approximation, Krylov-Lanczos approximation, Bernoulli polynomials, convergence acceleration*

1. We consider the problem of a function approximation by finite number of its Fourier coefficients

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad |n| \leq N.$$

It is well known that approximation of a 2-periodic and smooth function f on the real line by the truncated Fourier series

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{i\pi n x}$$

is highly effective. When the approximated function has a point of discontinuity, approximation by the partial sum $S_N(f)$ leads to the Gibbs phenomenon.

In this paper we consider the L_2 -optimal rational approximation in combination with the Krylov-Lanczos approximation and investigate a convergence of this approach in the regions where the approximated function is smooth.

Denote

$$R_N(f) = f(x) - S_N(f).$$

2. First we introduce the Krylov-Lanczos approximation (see [1-3]). Suppose $f \in C^q[-1, 1]$. By $A_k(f)$ denote the exact value of the jump in the k -th derivative of f

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \dots, q.$$

The basic idea of the Krylov-Lanczos approximation is the following representation of the approximated function

$$f(x) = F(x) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x),$$

where B_k are 2-periodic Bernoulli polynomials with the Fourier coefficients

$$B_{k,n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & n \neq 0 \end{cases}$$

and F is a 2-periodic and relatively smooth function on the real line ($F \in C^{q-1}(R)$) with the Fourier coefficients

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_{k,n}. \quad (1)$$

Approximation of F by the truncated Fourier series leads to the Krylov-Lanczos (KL-) approximation

$$S_{N,q}(f) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x)$$

with the error

$$R_{N,q}(f) = f(x) - S_{N,q}(f).$$

By $\|\cdot\|$ denote the standard norm in the space L_2

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

The following results we need for further comparison.

Theorem 1 [3]. Suppose $f \in C^q[-1,1]$ and $f^{(q)} \in AC[-1,1]$. Then the following estimate holds

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|R_{N,q}(f)\| = |A_q(f)| c(q),$$

where

$$c(q) = \frac{1}{\pi^{q+1} \sqrt{2q+1}}.$$

Theorem 2 [4]. Suppose $f \in C^{q+1}[-1,1]$ and $f^{(q+1)} \in AC[-1,1]$. Then the following estimates hold for $|x| < 1$

$$R_{N,q}(f) = A_q(f) \frac{\varphi_{N,q}(x)}{N^{q+1}} + o(N^{-q-1}), \quad N \rightarrow \infty,$$

where

$$\varphi_{N,q}(x) = \frac{(-1)^{N+\frac{q}{2}} \sin \frac{\pi x}{2} (2N+1)}{2\pi^{q+1} \cos \frac{\pi x}{2}}$$

for even values of q and

$$\varphi_{N,q}(x) = \frac{(-1)^{N+\frac{q+1}{2}} \cos \frac{\pi x}{2} (2N+1)}{2\pi^{q+1} \cos \frac{\pi x}{2}}$$

for odd values of q .

3. Now we introduce the L_2 -optimal rational approximation for additional convergence acceleration of the KL-approximation (see [4]).

Consider a finite sequence of complex numbers $\theta = \{\theta_k\}_{|k|=1}^p$, $p \geq 1$ and denote

$$\Delta_n^0(\theta, F_n) = F_n, \Delta_n^k(\theta, F_n) = \Delta_n^{k-1}(\theta, F_n) + \theta_{k \operatorname{sgn}(n)} \Delta_{(|n|-1) \operatorname{sgn}(n)}^{k-1}(\theta, F_n), k \geq 1,$$

where $\operatorname{sgn}(n) = 1$ if $n \geq 0$ and $\operatorname{sgn}(n) = -1$ if $n < 0$.

By $\Delta_n^p(F_n)$ we denote the classical finite differences which correspond to generalized differences $\Delta_n^p(\theta, F_n)$ with $\theta \equiv 1$.

We have

$$R_{N,q}(f) = R_N^+(F) + R_N^-(F),$$

where

$$R_N^+(F) = \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n e^{i\pi n x}, \quad R_N^-(F) = \sum_{n=-\infty}^{-N-1} F_n e^{i\pi n x}.$$

It can easily be checked that

$$R_N^+(F) = -\frac{\theta_1 F_N e^{i\pi(N+1)x}}{1 + \theta_1 e^{i\pi x}} + \frac{1}{1 + \theta_1 e^{i\pi x}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^1(\theta, F_n) e^{i\pi n x}.$$

Reiteration of this transformation up to p times leads to the following expansion

$$R_N^+(F) = -e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, F_n)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s e^{i\pi x})} + \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 + \theta_k e^{i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^p(\theta, F_n) e^{i\pi n x}.$$

Similar expansion of $R_N^-(F)$ reduces to the following rational (by $e^{i\pi n x}$) approximation

$$S_{N,q,p}(f) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x) + \sum_{n=-N}^N F_n e^{i\pi n x} - e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, F_n)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s e^{i\pi x})} - e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_{-k} \Delta_{-N}^{k-1}(\theta, F_n)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_{-s} e^{-i\pi x})}$$

with the error

$$R_{N,q,p}(f) = f(x) - S_{N,q,p}(f) = R_{N,q,p}^+(f) + R_{N,q,p}^-(f),$$

where

$$R_{N,q,p}^{\pm}(f) = \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 + \theta_{\pm k} e^{\pm i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_{\pm n}^p(\theta, F_n) e^{\pm i\pi n x}. \quad (2)$$

Different methods are known for determination of the unknown parameter θ . One method is described in [4] which leads to the L_2 -optimal rational approximation. In particular, parameters θ_k and θ_{-k} are chosen as follows (see Theorem 3)

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, k = 1, \dots, p, \tau_k > 0, \tau_j \neq \tau_i, j \neq i,$$

where the new parameters τ_k minimize the constant $c_p(q)$ in Theorem 3.

By $\gamma_k(p)$ denote the coefficients of the polynomial

$$\prod_{k=1}^p (1 + \tau_k x) = \sum_{k=0}^p \tau_k(p) x^k.$$

Theorem 3 [4]. Suppose $f \in C^{q+p}[-1, 1]$ and $f^{(q+p)} \in AC[-1, 1]$. If

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, k = 1, \dots, p, \tau_k > 0, \tau_j \neq \tau_i, j \neq i,$$

then the following estimate holds

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{q+1}{2}} \|R_{N,q,p}(f)\| = |A_q(f)| c_p(q),$$

where

$$c_p(q) = \frac{1}{\pi^{q+1}} \left(\int_1^\infty |\phi_{p,q}(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

and

$$\phi_{p,q}(t) = \frac{(-1)^p}{t^{q+1}} - \frac{1}{q!} \sum_{j=1}^p \frac{e^{-\tau_j(t-1)}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (\tau_i - \tau_j)} \sum_{k=0}^p \gamma_k(p) (-1)^{k+1} \sum_{m=0}^{p-k-1} (q+p-k-m-1)! \tau_j^m.$$

Table 1 presents the numerical values of $c_p(q)$ by using parameters τ_k that minimize it. Note that $c_0(q) = c(q)$.

Table 1

Numerical values of $c(q)$ and $c_p(q)$ by using the optimal values of parameters

q	1	2	3	4	5	6
$c(q)$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$
$c_1(q)$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$
$c_2(q)$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$
$c_3(q)$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$4.6 \cdot 10^{-8}$
$c_4(q)$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	$7.0 \cdot 10^{-9}$
$c_5(q)$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-8}$	$8.7 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$

4. In this section we investigate the pointwise convergence of approximation $S_{N,q,p}(f)$ in the regions away from the singularities ($|x| < 1$).

The main result of this paper is:

Theorem 4. Let $f \in C^{q+p+1}[-1, 1]$ and $f^{(q+p+1)} \in AC[-1, 1]$. If

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}$$

then the following estimates hold for $|x| < 1$

$$R_{N,q,p}(f) = A_q(f) \frac{\varphi_{N,q,p}(x)}{N^{q+p+1}} + o(N^{-q-p-1}), N \rightarrow \infty,$$

where

$$\varphi_{N,q,p}(x) = \frac{(-1)^{N+p+\frac{q}{2}} \sin \frac{\pi x}{2} (2N-p+1)}{2^{p+1} \pi^{q+1} q!} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(p)}{\cos^{p+1} \frac{\pi x}{2}}$$

for even values of q and

$$\varphi_{N,q,p}(x) = \frac{(-1)^{N+p+\frac{q+1}{2}} \cos \frac{\pi x}{2} (2N-p+1)}{2^{p+1} \pi^{q+1} q!} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(p)}{\cos^{p+1} \frac{\pi x}{2}}$$

for odd values of q .

Proof. Taking into account that $\theta_k \rightarrow 1$ as $N \rightarrow \infty$ then we need to estimate only the last sum in (2). By the Abel transformation we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_{\pm n}^p(\theta, F_n) e^{\pm i \pi n x} &= -\frac{e^{\pm i \pi (N+1)x}}{1 + e^{\pm i \pi x}} \Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta, F_n)) \\ &\quad - \frac{e^{\pm i \pi (N+1)x}}{(1 + e^{\pm i \pi x})^2} \Delta_{\pm N}^1(\Delta_n^p(\theta, F_n)) \\ &\quad + \frac{1}{(1 + e^{\pm i \pi x})^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_{\pm n}^2(\Delta_n^p(\theta, F_n)) e^{\pm i \pi n x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Now we estimate the sequences $\Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta, F_n))$, $\Delta_{\pm N}^1(\Delta_n^p(\theta, F_n))$ and $\Delta_{\pm n}^2(\Delta_n^p(\theta, F_n))$ as $N \rightarrow \infty$ and $n \geq N+1$.

It is easy to verify that

$$\Delta_n^p(\theta, F_n) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \gamma_k(p)}{N^k} \Delta_{n-\text{sgn}(n)k}^{p-k}(F_n),$$

where the classical finite differences can be calculated by the formula

$$\Delta_n^k(F_n) = \sum_{j=0}^p \binom{k}{j} F_{n-\text{sgn}(n)j}.$$

Taking into account that $\Delta_n^w(\Delta_n^{p-k}(F_n)) = \Delta_n^{w+p-k}(F_n)$, we get

$$\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \gamma_k(p)}{N^k} \sum_{j=0}^{w+p-k} \binom{w+p-k}{j} F_{n-\text{sgn}(n)(k+j)}. \quad (4)$$

Smoothness of F leads to the following asymptotic expansions of the Fourier coefficients

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{s=q}^{q+p-k+1} \frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}} + o(n^{-q-p+k+2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 0, \dots, p.$$

Substituting this into (4), we derive

$$\begin{aligned} \Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta, F_n)) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^p \frac{\gamma_k(p)}{N^k} \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} \sum_{s=q}^{q+p-k+1} \frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}} \\ &\quad \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\pm(k+j)}{n}\right)^{s+1}} + o(n^{-q-p-2}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=0}^p \frac{\gamma_k(p)}{N^k} \sum_{t=0}^{p-k+1} \frac{1}{n^t} \sum_{s=0}^t (\pm 1)^s \binom{t+q}{s} \frac{A_{t-s+q}(f)}{(i\pi)^{t-s}} \alpha_{k,s}(w) + o(n^{-q-p-2}), \end{aligned}$$

where

$$\alpha_{k,s}(w) = \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} (k+j)^s$$

and "+" sign corresponds to positive values of n and "-" sign to negative values. It is well known [4] that $\alpha_{k,s}(w) = 0$ for $s < w+p-k$, hence for $s \geq w+p-k$ and consequently $t \geq w+p-k$, after simple manipulations, we derive

$$\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=0}^p \frac{\gamma_k(p)}{N^k} \sum_{t=w}^1 \frac{\beta_{t,k}^\pm(w)}{n^{p-k+t}} + o(n^{-q-p-2}), \quad (5)$$

where

$$\beta_{t,k}^\pm(w) = \sum_{s=w}^t (\pm 1)^{p+s-k} \binom{t+p-k+q}{p-k+s} \frac{A_{t-s+q}(f)}{(i\pi)^{t-s}} \alpha_{k,s+p-k}(w).$$

Asymptotic expansion (5) immediately shows that $\Delta_n^2(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = o(n^{-p-q-2})$

and the third term in the right hand side of (3) is $o(N^{-q-p-1})$ as $N \rightarrow \infty$.

Taking $n = \pm N$ in (5), we get

$$\Delta_{\pm N}^w(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{k=0}^p \gamma_k(p) \sum_{t=w}^1 \frac{(\pm 1)^{t+p-k} \beta_{t,k}^\pm(w)}{N^t} + o(n^{-q-p-2}). \quad (6)$$

From here we conclude that $\Delta_{\pm N}^1(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = O(N^{-p-q-2})$ as $N \rightarrow \infty$. Then

$$\Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta, F_n)) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{k=0}^p (\pm 1)^{p-k} \gamma_k(p) \beta_{0,k}^\pm(0) + O(N^{-p-q-2}).$$

Taking into account the relations

$$\begin{aligned} (\pm 1)^{p-k} \beta_{0,k}^\pm(0) &= A_q(f) \binom{p-k+q}{p-k} \alpha_{k,p-k}(0) \\ &= A_q(f) \binom{p-k+q}{p-k} \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j \binom{p-k}{j} (k+j)^{p-k} \end{aligned}$$

$$= A_q(f) (-1)^{p-k} \frac{(p-k+q)!}{q!}$$

we get

$$\Delta_{\pm N}^0 \left(\Delta_n^p(\theta, F_n) \right) = A_q(f) \frac{(-1)^{N+p+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p q!} \sum_{k=0}^p (-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(p) + O(N^{-p-q-2}).$$

Now it follows from (3) that

$$R_{N,q,p}^{\pm}(f) = \frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{(1+e^{\pm i\pi x})^{p+1}} \frac{(-1)^{N+p}}{2N^{p+q+1} q!} \frac{A_q(f)}{(\pm i\pi)^{q+1}} \sum_{k=0}^p (-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(p) + o(N^{-p-q-1}).$$

Finally

$$R_{N,q,p}(f) = \frac{(-1)^{N+p}}{N^{p+q+1} q!} \frac{A_q(f)}{\pi^{q+1}} \sum_{k=0}^p (-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(p) \\ \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\pi(N+1)x}}{i^{q+1} (1+e^{i\pi x})^{p+1}} \right] + o(N^{-p-q-1}).$$

This completes the proof.

5. In this section we compare the convergence of the KL and L_2 -optimal rational approximations in the regions away from the singularities and show how the parameters p and q can be chosen in practice for better approximation. We will show that utilization of all available jumps is not always reasonable and more accuracy can be achieved with less jumps in combination with rational corrections.

It is important to notice that Theorem 4 puts additional smoothness requirements on the approximated functions compared to Theorem 2 so in comparisons it must be taken into account. If q is the number of available jumps and $p > 0$ is chosen such that the requirements of Theorem 4 are valid (e.g. when function is infinitely differentiable) then L_2 -optimal rational approximation is more precise (however asymptotically) than the KL-approximation which follows from comparison of Theorems 2 and 4.

Let $f \in C^{M+1}[-1,1]$, $f^{(M+1)} \in AC[-1,1]$, $M \geq 1$. According to Theorems 2 and 4 if the values of p and q satisfy the condition $q+p=M$ then both Theorems 2 and 4 are valid and comparison of corresponding approximations is legal. Then, asymptotic estimates of these theorems will show which values of parameters p and q provide with better accuracy. We show this process for a specific example. Let

$$f(x) = \sin(ax-1),$$

where a is some parameter. We use the values $a = 1/5, 3, 50$ and in Table 2 calculate the values of $\frac{|A_q(f)|}{N^{q+p+1}} \max_{x \in [-0.5, 0.5]} |\varphi_{N,q,p}(x)|$ for $N = 512$ and for different values of p and q with condition $q + p = 5$. Recall that $p = 0$ corresponds to the KL-approximation.

Table 2

Values of $\frac{|A_q(f)|}{N^{q+p+1}} \max_{x \in [-0.5, 0.5]} |\varphi_{N,q,p}(x)|$ for $N = 512$, $q + p = 5$, $p = 0, \dots, 4$ and

$$f(x) = \sin(ax - 1)$$

	$q = 5$ $p = 0$	$q = 4$ $p = 1$	$q = 3$ $p = 2$	$q = 2$ $p = 3$	$q = 1$ $p = 4$
$a = 1/5$	$4.2 \cdot 10^{-24}$	$2.2 \cdot 10^{-23}$	$5.1 \cdot 10^{-22}$	$7.7 \cdot 10^{-21}$	$2.4 \cdot 10^{-19}$
$a = 3$	$2.3 \cdot 10^{-18}$	$7.9 \cdot 10^{-19}$	$1.2 \cdot 10^{-18}$	$1.2 \cdot 10^{-18}$	$2.6 \cdot 10^{-18}$
$a = 50$	$5.5 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$6.4 \cdot 10^{-16}$	$8.0 \cdot 10^{-17}$

The table shows that for $a = 1/5$ the KL-approximation $S_{N,5}(f)$ is the best, for $a = 3$ the L_2 -optimal rational approximation $S_{N,4,1}(f)$ is the best and for $a = 50$ the approximation $S_{N,1,4}(f)$ is the best.

Overall conclusion based on this specific example and on comparison of the asymptotic estimates of Theorems 2 and 4 is the following: not always utilization of all available jumps, by the KL-approximation, leads to the best approximation. This is due to the factor $A_q(f)$ in the estimates. When the values of jumps are rapidly increasing then better accuracy can be achieved by utilization of smaller number of jumps and appropriately chosen corrections based on the smoothness of the approximated function. Which choice of q and p is the best can be concluded from comparison of the corresponding estimates as we did above.

It must be also mentioned that when the jumps are rapidly increasing then getting their approximations is problematic so in that case utilization of the rational corrections is unavoidable for better accuracy.

Institute of Mathematics of NAS RA

A. V. Poghosyan

On a Convergence of the L_2 -Optimal Rational Approximation

We investigate a convergence of the L_2 -optimal rational approximation in the regions away from singularities where the approximated function is smooth. Theoretical estimates show that the rate of convergence is greater than for the classical Krylov-Lanczos method by the order which equals to the order of denominator of the rational approximants.

Ա. Վ. Պողոսյան

L_2 -օպտիմալ ռացիոնալ մոտարկման զուգամիտության մասին

Ուսումնասիրվում է L_2 -օպտիմալ ռացիոնալ մոտարկման զուգամիտությունը հատվածի ներսում, որտեղ ֆունկցիան ողորկ է: Տեսական գնահատականները ցույց են տալիս, որ զուգամիտության արագությունը համեմատած դասական Կոշիլով-Լանցոշի մեթոդի հետ, տարբերվում է կարգով, որը հավասար է ռացիոնալ ֆունկցիայի հայտարարի կարգին:

А. В. Погосян

О сходимости L_2 -оптимальной рациональной аппроксимации

Изучается сходимость L_2 -оптимальной рациональной аппроксимации внутри отрезка, где функция гладкая. Теоретические оценки показывают, что рациональная аппроксимация точнее классического метода Крылова – Ланцоша и разница в порядке сходимости равна порядку знаменателя рационального аппроксиманта.

References

1. *Krylov A.* On approximate calculations. Lectures delivered in 1906. Petersburg. Tipolitography of Birkenfeld. 1907.
2. *Lanczos C.*, Discourse on Fourier Series. Edinburgh. Oliver and Boyd. 1966.
3. *Nersessian A., Poghosyan A.*- Journal of Scientific Computing. 2006. V. 26(1). P. 111-125.
4. *Poghosyan A.*- IMA Journal of Numerical Analysis. 2011. V. 31(2). P.512-527.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5.53

А. Н. Айрапетян

Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/IV 2012)

Ключевые слова: сферические производные, точки Жюлиа, P -последовательность, аннулярная функция

В настоящей заметке теорема Э. Коллингвуда [1] о граничных особенностях функций Цудзи усиливается и распространяется на более широкий класс мероморфных функций с суммируемой сферической производной.

Рассматривается также поведение на границе аннулярных голоморфных функций.

1. Пусть символ D обозначает единичный круг $|z| < 1$, Γ – окружность $|z| = 1$ на комплексной z -плоскости C и $d\sigma(z) = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$ – линейный элемент гиперболической метрики в D . Для произвольных θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, и α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, символом Γ_ζ обозначим окружность, проходящую через точку $z = 0$ и касающуюся Γ в ее точке $\zeta = e^{i\theta}$, а символом $h(\zeta, \alpha)$ – хорду окружности Γ_ζ , оканчивающуюся в точке ζ и образующую с диаметром в ζ направленный угол α , $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Подобласть круга D , ограниченную $h(\zeta, \alpha_1)$ и $h(\zeta, \alpha_2)$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, и Γ_ζ , обозначим символом $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$.

Рассмотрим мероморфную в D функцию f со значениями на сфере Римана Ω над C , и пусть $f^*(z)$ обозначает ее сферическую производную $|f'(z)| / (1 + |f(z)|^2) = f^*(z)$, $z \in D$. Функцию f назовем функцией Цудзи (функцией с суммируемой сферической производной), если

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} f^*(re^{i\theta}) d\theta < +\infty \left(\iint_D f^*(z) dx dy < +\infty, z = x + iy \right). \quad (1)$$

Функции Цудзи рассмотрены в [1], функции с суммируемой сферической производной – в [2]. Определения (1) показывают, что каждая функция Цудзи является функцией с суммируемой сферической производной.

Отрезок $h(\zeta, \alpha)$ называют отрезком Жюлиа для f , если для любых α_1 и α_2 , $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, функция f принимает в $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ бесконечно часто каждое значение из Ω , за возможными не более двумя исключениями. Точку $\zeta \in \Gamma$ называют точкой Жюлиа функции f и относят к множеству $J(f)$, если все $h(\zeta, \alpha)$ служат для f отрезками Жюлиа. Последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 1$, называют P -последовательностью для мероморфной в D функции f , если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой подпоследовательности $\{z_{n_v}\}$ в объединении неевклидовых (гиперболических) кругов $\{z; \sigma(z; z_{n_v}) < \varepsilon\}$ функция f принимает бесконечно часто каждое значение из Ω , за возможными не более двумя исключениями. Отрезок $h(\zeta, \alpha)$ назовем P -отрезком для функции f , если он содержит некоторую ее P -последовательность, и точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$, если каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$ является P -отрезком для f . Простейшие свойства гиперболической (неевклидовой) геометрии в круге D показывают, что каждый P -отрезок мероморфной в D функции f обязан быть для нее отрезком Жюлиа, и следовательно $P(f) \subset J(f)$.

Известно также, что вложение строгое (см., например, [3], теорема 3, или [4], теорема 2). Как обычно, символом $F(f)$ обозначается множество всех точек Фату функции f , т.е. множество точек $\zeta \in \Gamma$, в которых $f(z)$ имеет предел $f(\zeta) \in \Omega$, когда z стремится к ζ , оставаясь внутри каждой области $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, и значение $f(\zeta)$ не зависит от выбора этой области.

2. Э. Коллингвуд [1] доказал, что у произвольной мероморфной функции Цудзи почти все точки на Γ являются либо ее точками Фату, либо точками Жюлиа. Обобщением и усилением этого результата служит

Теорема 1. Для произвольной мероморфной функции f с суммируемой сферической производной почти все точки на Γ принадлежат объединению

$$F(f) \cup P(f).$$

Покажем, что сформулированное утверждение представляет собой частный случай результата общего характера (см [3], теорема 2), согласно которому для любой мероморфной в круге D функции f справедливо представление $\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup I^*(f) \cup E$, в котором линейная лебегова мера $mes E = 0$ и $I^*(f)$ обозначает множество тех точек $\zeta \in \Gamma$, в которых

ни одна из хорд $h(\zeta, \alpha)$ не содержит P -последовательностей функции f и предельные множества $C(f, h(\zeta, \alpha)) = \Omega$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ (о стандартной терминологии в теории предельных множеств см., например, [5], с. 11).

Чтобы обосновать это утверждение, воспользуемся основным результатом статьи [2], теорема 1, согласно которому для произвольной функции f с суммируемой сферической производной на Γ существует множество M , $mes M = 2\pi$, в каждой точке ζ которого функция $f(z)$ имеет конечные пределы, когда $z \rightarrow \zeta$ по хордам $h(\zeta, \alpha)$ для почти всех $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. На основании этого результата заключаем, что у любой функции f с суммируемой сферической производной множество $M \cap I^*(f)$ пустое, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Отметим, что в статье Э. Коллингвуда и Дж. Пирания [6] приведены примеры функций Цудзи, у которых либо множество точек Фату имеет полную меру на Γ , либо все точки Γ являются точками Жюлиа. Более того, на самом деле, в силу известных свойств P -последовательностей в последнем из этих примеров все точки на Γ принадлежат множеству $P(f) = J(f)$ (аналогичная аргументация использована в статье [7] в доказательстве теоремы 2.)

3. В этом пункте рассмотрим структуру граничных особенностей аннулярных функций, введенных в [8].

Аннулярной называют голоморфную в круге D функцию, для которой

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \min \{|f(z)|; z \in L_n\} = +\infty \quad (2)$$

по некоторой последовательности замкнутых жордановых кривых L_n , $n \in N$, лежащих в круге D и охватывающих точку $z = 0$. В традиционной терминологии теории предельных множеств (см. [5], с. 96) определение (2) означает, что множество $\Phi(f, \zeta)$ содержит значение ∞ в каждой точке $\zeta \in \Gamma$.

В [8] приведен пример аннулярной функции f , у которой $J(f) = \Gamma$.

Теорема 2. Для произвольной аннулярной функции f справедливо представление $\Gamma = P(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории и типа $F\sigma$ на Γ .

Для доказательства утверждения теоремы 2 воспользуемся другим, установленным в [3], теорема 1, результатом общего характера.

Для любой мероморфной в D функции f справедливо представление $\Gamma = M(f) \cup P(f) \cup \tilde{I}^*(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории и типа $F\sigma$ на Γ , символом $M(f)$ обозначено множество точек $\zeta \in \Gamma$, в которых предельное множество $C(f, \zeta)$ по всему кругу D не покрывает всю сферу Римана Ω и совпадает с предельными множествами

$C(f, h(\zeta, \alpha))$ для всех значений $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а $\tilde{I}^*(f)$ обозначено множество тех точек $\zeta \in \Gamma$, которые не являются предельными для P -последовательностей функции f и в которых предельные множества $C(f, h(\zeta, \alpha)) = \Omega$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ (так что $\tilde{I}^*(f) \subset I^*(f)$).

Хорошо известно (см., например, [5], с. 107), что первое из свойств точки $\zeta \in M(f)$ влечет существование такой дуги γ на Γ , которая содержит точку ζ и на которой $\text{mes}(F(f) \cap \gamma) = \text{mes} \gamma > 0$. Так как для аннулярной функции f множество $\Phi(f, \zeta)$ в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ содержит значение ∞ , то в любой точке $\zeta \in F(f)$ угловое граничное значение $f(\zeta)$ обязано быть равным ∞ , и поэтому предположение, что $\text{mes} F(f) > 0$, невозможно в силу классической теоремы Лузина – Привалова.

Таким образом, множество $M(f)$ пустое у любой аннулярной функции f .

Далее, поскольку каждая точка $\zeta \in \tilde{I}^*(f)$ не является предельной для P -последовательностей функции f , то согласно [4], лемма 1, множество $\Phi(f, \zeta)$ в каждой точке $\zeta \in \tilde{I}^*(f)$ обязано быть пустым. С другой стороны, как отмечалось выше, для любой аннулярной функции f множество $\Phi(f, \zeta)$ непусто в каждой точке $\zeta \in \Gamma$. Таким образом, у любой аннулярной функции f наряду с $M(f)$ пустым является также и множество $\tilde{I}^*(f)$, что завершает доказательство теоремы 2.

Следствие. Для произвольной аннулярной функции f с суммируемой сферической производной имеет место представление

$$\Gamma = P(f) \cup E, \text{ в котором } \text{mes} E = 0.$$

Действительно, согласно теореме 1

$\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup E$ и $\text{mes} E = 0$, в то время как в доказательстве теоремы 2 отмечалось, что $\text{mes} F(f) = 0$.

Остается открытым вопрос: совпадают множества E в утверждениях этого следствия и теоремы 2.

Выражаю благодарность моему учителю, профессору В.И. Гаврилову за обсуждение полученных результатов.

Государственный инженерный университет Армении

А. Н. Айрапетян

Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций

Теорема Э. Коллингвуда о граничных особенностях функций Цудзи усиливается и распространяется на более широкий класс мероморфных функций с суммируемой сферической производной.

Ա. Ն. Հայրապետյան

Մֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի և անույար ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունները

Ընդհանրացվում և ուժեղացվում է Կոլինգվուդի թեորեմը Ցուձիի ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունների վերաբերյալ և տարածվում մերոմորֆ ֆունկցիաների ավելի լայն դասի վրա, որոնք սֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի են: Դիտարկվում է նաև անույար հոլոմորֆ ֆունկցիաների վարքը եզրագծի վրա:

A. N. Hayrapetyan

Boundary Characteristics of Summerizing Spherical Derivative and Annular Function

The Collingwood theorem concerning boundary characteristics of Tsuji functions which strengthen and spread over a larger set of meromorphic functions with summerizing spherical derivative is discussed.

The behaviour of the considered function on the boundary of annular holomorphic functions is also touched upon.

Литература

1. *Collingwood E. F.* - Nagoya Math. 1967. V. 29. P. 197-200.
2. *Гаврилов В. И.* - Сибирск. матем. ж. 1973. Т. 14. N 5. С. 951-956.
3. *Гаврилов В. И.* - ДАН СССР. 1974. Т. 216. N 1. С. 21-23.
4. *Гаврилов В. И.* - Вестн. МГУ. Сер. матем. и мех. 1976. N 4. С. 36-43.
5. *Носиро К.* Предельные множества. М. ИЛ. 1963. 252 с.
6. *Collingwood E. F., Piranian G.* - Math. Zeitschr. 1964. B. 84. N 3. P. 246-253.
7. *Гаврилов В. И., Канатников А. Н.* - ДАН СССР. 1977. Т. 232. N 6. С. 1237-1240.
8. *Bonar D.D.* On annular functions. Berlin, VEB Deutscher Verlag Wiss. 1971.

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 11/VI 2012)

Ключевые слова: классы функций H^p , A_α^p , дробный интеграл порядка β функции f

Пусть $\mathbb{D} = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Множество аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций обозначим через $Hol(\mathbb{D})$. Далее пусть $0 \leq r < 1$, $0 < p < \infty$, $f \in Hol(\mathbb{D})$ и пусть

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad M_\infty(r, f) = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Скажем, что $f, f \in Hol(\mathbb{D})$, принадлежит классу Харди H^p , $0 < p \leq \infty$, если

$$\|f\|_{H^p} \stackrel{def}{=} \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) < +\infty.$$

Свойства функций классов Харди описаны в [1,2]. Обозначим через A_α^p , $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$, множество тех функций $f, f \in Hol(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p} \equiv \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

где $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ – мера Лебега. Определим $A^p \equiv A_0^p$. Классы

A_α^p некоторыми авторами называются классами Бергмана (см. например [3]). Функции этих классов были исследованы и М. М. Джрбашяном [4], который эти классы обозначил через $H_p(\alpha)$. Свойства этих классов описаны в [5].

В вышеуказанных работах [3 – 5] доказывается, что если $f \in A_\alpha^p$,

$$|f(z)| \leq \frac{C \|f\|_{A_\alpha^p}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1)$$

Пусть $\beta > 0$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in Hol(\mathbb{D})$. Дробным интегралом порядка β функции f называется следующая функция:

$$f_{[\beta]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В [6] доказано, что $f_{[\beta]}(z) \in Hol(\mathbb{D})$. Взяв $\beta = \frac{\alpha+1}{p}$ из теоремы Работы [7], получаем, что если $f(z) = \sum a_n z^n \in A_\alpha^p$, то $f_{\left[\frac{\alpha+1}{p}\right]}(z) \in A^{2p}$.

Известно, что (см. [6]) $H^p \subset A^{p(\alpha+2)}$. Возникает следующий вопрос: принадлежат ли $f_{\left[\frac{\alpha+1}{p}\right]}(z)$ классу H^p . На этот вопрос, в случае когда $0 < p \leq 2$,

положительный ответ дает следующее утверждение.

Теорема 1. Если $f(z) = \sum a_n z^n \in A_\alpha^p$, $0 < p \leq 2$, $\alpha > -1$, то функция

$$h(z) = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

принадлежит классу H^p .

В случае $2 \leq p < +\infty$, взяв $\beta = \frac{p+\alpha-1}{p}$, также доказывается, что фракциональный интеграл порядка β функции f , $f \in A_\alpha^p$, принадлежит классу H^p , т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если $f(z) = \sum a_n z^n \in A_\alpha^p$, $2 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$, то

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z) d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n \quad (2)$$

принадлежит классу H^p .

В [3 – 5] доказано, что если $f \in A_\alpha^p$, $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$, то f имеет следующий вид:

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \frac{f(\rho e^{i\varphi})}{(1-z\rho e^{-i\varphi})^{2+\alpha}} \rho d\rho d\varphi.$$

М. М. Джрбашяном в [4] (см. также [5]) дано еще одно представление функций класса A_{α}^2 , $\alpha > -1$.

Теорема (М. М. Джрбашян). Если $f \in A_{\alpha}^2$, $\alpha > -1$, то

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{2} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\rho z) d\rho, \quad |z| < 1$$

принадлежит классу H^2 , а $f(z)$ имеет следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta}) d\theta}{\left(1 - ze^{-i\theta}\right)^{\frac{3+\alpha}{2}}}. \quad (3)$$

В частном случае $\alpha = 0$ это утверждение доказано Келдышем [8]. Пользуясь результатами теоремы 1 и 2, далее удалось получить интегральные представления типа (3) для функций классов A_{α}^p , $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

Теорема 3. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_{\alpha}^p$, $0 < p \leq 2$, $\alpha > -1$. Тогда $f(z)$

допускает следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta}) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{\alpha+1}{p}-1}},$$

где

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1} f(\rho z) d\rho = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n, \quad |z| < 1. \quad (4)$$

Теорема 4. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_{\alpha}^p$, $2 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$. Тогда $f(z)$

имеет следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta}) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}},$$

где

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z) d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n.$$

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян

**О представлении одного класса аналитических в
единичном круге функций**

Пусть $\mathcal{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Аналитическая в $\mathcal{D}$ функция f принадлежит классу A_α^p , если $\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p dx dy < +\infty$. Доказывается, что для функций классов A_α^p соответствующий дробный интеграл порядка β в частных случаях может принадлежать классам Харди H^p . Далее, пользуясь этими результатами, приводятся два представления (соответственно для случаев $0 < p \leq 2$ и $2 \leq p < +\infty$) функций классов A_α^p , которые в частном случае $p = 2$ совпадают с одним представлением функций класса A_α^2 , полученным М. М. Джрбашьяном.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

**Միավոր շրջանում մի դասի անալիտիկ ֆունկցիաների
ներկայացման մասին**

Թող $\mathcal{D}$ -ն միավոր շրջանն է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության մեջ: $\mathcal{D}$ -ում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան պատկանում է A_α^p դասին, եթե $\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p dA(z) < +\infty$, որտեղ $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$: Ապացուցվում է, որ A_α^p դասերի ֆունկցիաների β կարգի ֆունկցիոնալ ինտեգրալները մասնավոր դեպքերում կարող են պատկանել H^p դասին: Այնուհետև, օգտվելով այդ արդյունքներից, տրվում են (համապատասխանաբար $0 < p \leq 2$ և $2 \leq p < +\infty$ դեպքերի համար) A_α^p դասերի ֆունկցիաների ներկայացումներ, որոնք $p = 2$ մասնավոր դեպքում համընկնում են A_α^2 դասերում Մ. Ջրբաշյանի կողմից տրված ներկայացման հետ:

R. V. Dallakyan

**On a Representation of One Class of Analytic Functions
in the Unit Case**

Let $\mathcal{D}$ be a unit disk of the complex plane $\mathbb{C}$. Analytic in $\mathcal{D}$ function $f(z)$ belongs to A_α^p class if $\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p dA(z) < +\infty$. It is proved that the fractional integral of order β of the function $f(z) \in A_\alpha^p$ in some cases belongs to the classes Hardy H^p .

Using this result we get two representations from the class A_α^p . In the case $p = 2$ these representations coincide with Djrbashyan's representation of the functions $f(z) \in A_\alpha^p$.

Литература

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. Гос. изд техн.-теоретич. лит. М. 1950. 336 с.
2. Duren P. L. Theory of H^p spaces. Academic Press. 1970.
3. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. - Graduate Texts in Mathematics 2000. Springer. New-York, Berlin, etc. V. 199. P. 286.
4. Джрбашян М. М. - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-40.
5. Djrbashian A. E., Shamoian F. A. - Teubner Texts in Mathematics. BSB B. G Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 1988. V. 105. P. 199.
6. Duren P. L., Romberg B., Shields A. L. - J. Reine Angew math. 1969. V. 238. P. 32-60.
7. Maher Marzu M. H. - Bull. Austral. Math. Soc. 1990. V. 42. P. 417-425.
8. Keldysch M. V. - Coptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences USSR (ns). 1941. V. 30. P. 778-780.
9. Buckley S. M., Koskela P., Vukotic D. - Math. Proc. Comb. Soc. 1999. V. 126. P. 369-385.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

Г. А. Саргсян

**О полиномиальных решениях задачи Дирихле для
гиперболических уравнений с постоянными
коэффициентами в круге**

(Представлено академиком В. С. Захаряном 21/VI 2012)

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, полиномиальное решение, полнота, собственная функция, спектральный параметр*

Пусть Ω – единичный круг с центром в начале координат и $\partial\Omega$ – его граница. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, b^2 - ac > 0), \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где a, b, c – вещественные постоянные коэффициенты.

Известно, что для гиперболических уравнений краевые условия задачи, заданные на всей границе ограниченной области, вообще говоря, являются некорректными. Краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка рассмотрены в многочисленных работах [1-5]. Ф. Джоном [2] исследовалась проблема нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны в общей плоской ограниченной области, выпуклой относительно обоих семейств характеристик, в связи с некоторым отображением границы области в себя.

В. И. Арнольд указал на связь задачи Дирихле в эллипсе с проблемой малых знаменателей в контексте влияния на гладкость решения скорости приближения некоторого числа, связанного с задачей рациональными числами [3]. В этих статьях с различных точек зрения были найдены необходимые и достаточные условия корректности задачи (1), (2).

Для гиперболических уравнений известный критерий неединственности решения задачи (1), (2), который заключается в наличии периодических точек автоморфизма, так называемого характеристического бильярда, легко записать как π -рациональность угла между семействами характеристик. Как показано в [4], причиной нарушения единственности

решения задачи (1), (2) является вещественность и π -рациональность угла

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a + c} \text{ между семействами комплексных характеристик.}$$

В [5] рассматривается проблема единственности задачи Дирихле для уравнения колебания струны. Показано, что эта проблема эквивалентна классической проблеме Понселе из проективной геометрии для двух подходящих эллипсов, а также проблеме разрешимости алгебраического уравнения Пелля – Абеля, с которыми связаны некоторые другие задачи. Поскольку уравнения гиперболические, а краевые условия заданы вдоль всей границы, то такие задачи не относятся к числу классических и поэтому их изучение потребовало новых методов.

В настоящей работе предлагается новый и относительно простой метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге, а также предлагается построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Перейдем к построению в явном виде совокупности нетривиальных полиномиальных решений задачи (1), (2).

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = \varphi\left(\left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay\right) + \psi\left(\left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay\right) \quad (3)$$

или в комплексных переменных $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$u(x, y) = F(z + \mu_1 \bar{z}) + G(z + \mu_2 \bar{z}), \quad (4)$$

где

$$\mu_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac} - ai}{b + \sqrt{b^2 - ac} + ai}, \mu_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac} - ai}{b - \sqrt{b^2 - ac} + ai}.$$

Разность $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ назовем углом между характеристиками. Легко

видеть, что $\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{4(b^2 - ac)}{(a + c)^2}$. Для построения совокупности полиномиальных решений задачи (1), (2) сформулируем вспомогательные леммы, которые используются в дальнейшем.

Лемма 1. Для того чтобы $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a + c}$ было рациональным числом, необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном n выполнялось соотношение

$$\mu_2^n = \mu_1^n. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть данное в лемме выражение – рациональное число, т.е. при некоторых целых значениях $n = 2, 3, \dots$ и $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \frac{\pi k}{n} = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a + c}, \quad (6)$$

которое можно переписать в виде

$$\left[i(a + c) + 2\sqrt{b^2 - ac} \right] = \left[i(a + c) - 2\sqrt{b^2 - ac} \right] e^{-\frac{2\pi ki}{n}}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} i(a + c) + 2\sqrt{b^2 - ac} &= \frac{i(b + \sqrt{b^2 - ac} + ai)(b - \sqrt{b^2 - ac} - ai)}{a}, \\ i(a + c) - 2\sqrt{b^2 - ac} &= \frac{i(b + \sqrt{b^2 - ac} - ai)(b - \sqrt{b^2 - ac} + ai)}{a}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} (b + \sqrt{b^2 - ac} - ai)(b - \sqrt{b^2 - ac} + ai) &= \\ = (b + \sqrt{b^2 - ac} + ai)(b - \sqrt{b^2 - ac} - ai) e^{\frac{2\pi ki}{n}}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{(b + \sqrt{b^2 - ac} - ai)}{b + \sqrt{b^2 - ac} + ai} = \frac{(b - \sqrt{b^2 - ac} - ai)}{b - \sqrt{b^2 - ac} + ai} e^{\frac{2\pi ki}{n}}$$

или $\mu_1 = \mu_2 e^{\frac{2\pi ki}{n}}$. Отсюда получаем, что $\mu_1^n = \mu_2^n$. Необходимость доказана.

Проводя рассуждения в обратном порядке, легко установить и достаточность утверждения леммы.

В дальнейшем для построения полиномиальных решений существенную роль будут играть следующие полиномы:

$$\begin{aligned} K_n(z, \bar{z}, \mu) &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{m+1} n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu \bar{z})^{n-2m} (z\bar{z})^m}{m}, \\ P_n(z, \bar{z}, \mu) &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{m+1} n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu \bar{z})^{n-2m}}{m}, \end{aligned} \quad (7)$$

соответственно порядка n и $n - 2$, причем

$$K_1(z, \bar{z}, \mu) = 0, P_1(z, \bar{z}, \mu) = 0, P_2(z, \bar{z}, \mu) = 2\mu.$$

Следующее утверждение сформулируем без доказательства, так как оно доказывается с помощью принципа математической индукции. Эта лемма используется при построении полиномиальных решений задачи (1), (2).

Лемма 2. Для любого натурального $n \geq 2$ имеет место тождество

$$z^n + \mu^n \bar{z}^n = (z + \mu \bar{z})^n - K_n(z, \bar{z}, \mu). \quad (8)$$

На основании леммы 2 легко доказать следующую лемму.

Лемма 3. Если $z \bar{z} = 1$, то для любого натурального $n \geq 2$ имеет место тождество

$$z^n + \mu^n \bar{z}^n = (z + \mu \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu)$$

или

$$\left[(z + \mu \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu) \right] \Big|_{\partial\Omega} = (z^n + \mu^n \bar{z}^n) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (9)$$

На основании леммы (3) имеем

$$\begin{aligned} & \left[(z + \mu \bar{z})^{n+1} - z^{n+1} - \mu^{n+1} \bar{z}^n \right] \Big|_{z\bar{z}=1} = \\ & = \left\{ (z + \mu \bar{z}) \left[(z + \mu \bar{z})^n - z^n - \mu^n \bar{z}^n \right] + \mu (z^{n-1} + \mu^{n-1} \bar{z}^{n-1}) \right\} \Big|_{z\bar{z}=1} = \\ & = \left\{ (z + \mu \bar{z}) P_n + \mu (z + \mu \bar{z})^{n-1} - \mu P_{n-1} \right\} \Big|_{z\bar{z}=1}. \end{aligned}$$

Полагая

$$P_{n+1} = (z + \mu \bar{z}) P_n + \mu (z + \mu \bar{z})^{n-1} - \mu P_{n-1}, \quad (10)$$

получаем рекуррентные формулы для P_n .

Рассмотрим последовательность функции вида

$$u_n(x, y) = \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right]. \quad (11)$$

Теорема 1. Если числа $a \neq 0$, $\frac{1}{\pi} \arctg \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a + c}$ рациональны, то функции (11) являются нетривиальными полиномиальными решениями задачи (1), (2).

Доказательство. Функции $u(x, y)$ в представлении (11) являются полиномами от переменных $(z + \mu_1 \bar{z})$ и $(z + \mu_2 \bar{z})$, следовательно, решениями рассматриваемого уравнения (1). Покажем, что они удовлетворяют и граничному условию (2).

В самом деле, на основании леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) \Big|_{\partial\Omega} &= \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] \Big|_{\partial\Omega} - \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= (z^n + \mu_1^n \bar{z}^n) \Big|_{\partial\Omega} - (z^n + \mu_2^n \bar{z}^n) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следующая теорема указывает на еще одно представление системы нетривиальных полиномиальных решений (11) краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. Систему функций нетривиальных полиномиальных решений (11) краевой задачи (1), (2) можно представить в следующем специальном виде:

$$u(x, y) = (1 - z\bar{z})Q(z, \bar{z}),$$

где

$$Q(z, \bar{z}) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^m \sum_{\omega=0}^{n-2m} \sum_{s=0}^{m+\omega-1} \frac{(-1)^m (n-m-1)! \mu_1^{m+\omega-1-s} \mu_2^s z^{n-m-\omega-v} \bar{z}^{n+\omega-v}}{m! \omega! (n-2m-\omega)!}.$$

Доказательство. С учетом условия $\mu_1^n = \mu_2^n$ и однородности уравнений (1) на основании леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] = \\ &= \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n - z^n - \mu_1^n \bar{z}^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n - z^n - \mu_2^n \bar{z}^n - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] = \\ &= \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[K_n(z, \bar{z}, \mu_1) - P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \frac{1}{n(\mu_2 - \mu_1)} \left[K_n(z, \bar{z}, \mu_2) - P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] = \\ &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1}}{m} \left[1 - (z\bar{z})^m \right] \cdot \left[\mu_1^m (z + \mu_1 \bar{z})^{n-2m} - \mu_2^m (z + \mu_2 \bar{z})^{n-2m} \right] = \\ &= \frac{1 - z\bar{z}}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^m \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1} (z\bar{z})^{m-v}}{m} \cdot \sum_{\omega=0}^{n-2m} (\mu_1^{m+\omega} - \mu_2^{m+\omega}) C_{n-2m}^\omega z^{n-2m+\omega} \bar{z}^\omega = \\ &= (1 - z\bar{z}) \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{v=1}^m \sum_{\omega=0}^{n-2m} \sum_{s=0}^{m+1+\omega} \frac{(-1)^{m+1} (n-m-1)! \mu_1^{m+\omega-1-s} \mu_2^s z^{n-m-\omega-v} \bar{z}^{n+\omega-v}}{m! \omega! (n-2m-\omega)!} = \\ &= (1 - z\bar{z})Q(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем полученный результат на известных спектральных задачах. В работе Р. А. Александрияна [1] в связи с изучением качественного поведения решений системы типа С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости, впервые был поставлен вопрос об исследовании общей спектральной задачи Дирихле:

$$\Delta u + \lambda Lu = 0, \quad (12)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (13)$$

где M и L – линейные дифференциальные операторы второго порядка, λ – спектральный параметр. Краевая задача (12), (13) в случае $Mu = u_{xx} - u_{yy}$, $Lu = u_{xx} + u_{yy}$ путем введения специальных топологических отображений границы в себя подробно изучена Р.А.Александряном [1]. В частности, в случае, когда Ω – единичный круг с центром в начале координат, в явном виде построена полная система собственных функций задачи (12), (13) через известные полиномы Чебышева первого рода.

При

$$Mu = u_{xx} - u_{yy}, Lu = u_{xx} + u_{yy},$$

задача (12), (13) принимает вид

$$(1 + \lambda)u_{xx} - (1 - \lambda)u_{yy} = 0, \quad (14)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (15)$$

и при $|\lambda| < 1$ представляет собой гиперболическое уравнение, содержащее спектральный параметр. Задача состоит в том, чтобы найти такие значения параметра λ , называемые собственными, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (14), удовлетворяющие граничному условию (15), а затем исследовать вопрос полноты системы таких решений в том или ином классе функций.

На основании теоремы 1 и равенства (4), (6) построим следующие функции:

$$u_{n,k}(x, y) = \left[\left(z + e^{-\pi k i / n} \bar{z} \right)^n - P_n \left(z + \bar{z} e^{-\pi k i / n} \right) \right] - \left[\left(z + e^{-\pi k i / n} \bar{z} \right)^n - P_n \left(z + \bar{z} e^{-\pi k i / n} \right) \right], \quad n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (16)$$

Теорема 3. Система функций (16) является системой собственных функций для однородной краевой задачи (14), (15), соответствующей собственным значениям

$$\lambda_{n,k} = \cos \frac{\pi k}{n}, n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Собственные значения $\lambda_{n,k}$ являются бесконечнократными, поскольку $\lambda_{n,k} = \lambda_{np, kp}$, а собственные функции $u_{n,k}(z, \bar{z})$, соответствующие собственному значению $\lambda_{n,k}$ как полиномы различных степеней, линейно независимы. Подставляя $z = \rho e^{i\varphi}$ в формулу (16) и используя известную формулу

$$\cos n\varphi = 2^{n-1} \cos^n \varphi - \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-m-1}^{m-1} 2^{n-2m} \cos^{n-2m} \varphi}{m},$$

после некоторых простых преобразований собственных функций (16) можно сформулировать следующее представление собственных функций задачи (14), (15).

Теорема 4. Если Ω есть круг, то функции

$$u_{n,k}(x, y) = T_n \left(\rho \cos \left(\varphi - \frac{\pi k}{2n} \right) \right) + (-1)^{k+1} T_n \left(\rho \cos \left(\varphi + \frac{\pi k}{2n} \right) \right) \quad (17)$$

являются собственными функциями задачи (14), (15), соответствующими собственным значениям $\lambda_k^n = \cos \frac{\pi k}{n}$, каждое из которых имеет бесконечную кратность; здесь

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, n = 2, 3, 4, \dots k = 1, 2, 3, \dots (n-1),$$

а $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ – полиномы Чебышева первого рода.

Замечание 1. Построенные нами собственные функции (17) совпадают с собственными функциями задачи (14), (15), построенными ранее в работе Р.А.Александряна [1].

Известно [1], что собственные функции (17), соответствующие собственному значению $\lambda_{n,k} = \cos \frac{\pi k}{n}, n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots (n-1)$, образуют

полную систему в $W_2^0(\Omega)$, следовательно, построенные нами собственные функции (16) также образуют полную систему в $W_2^0(\Omega)$.

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = -\lambda \Delta u, \quad (18)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (19)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Теорема 5. Если Ω есть круг $x^2 + y^2 < 1$, то функции

$$u_{n,k}(x, y) = \cos \left[n \arccos \left(x \sin \left(\frac{\pi k}{2n} - \alpha \right) + y \cos \left(\frac{\pi k}{2n} - \alpha \right) \right) \right] + (-1)^{k+1} \cos \left[n \arccos \left(y \cos \left(\frac{\pi k}{2n} + \alpha \right) - x \sin \left(\frac{\pi k}{2n} + \alpha \right) \right) \right]$$

являются собственными функциями краевой задачи (18), (19), соответствующими собственному значению

$$\lambda = \lambda_{n,k} = -\frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2} \cos \frac{\pi k}{2n}, (n = 2, 3, \dots k = 1, 2, \dots (n-1)),$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$, которые образуют полную систему

в $W_2^0(\Omega)$.

Аналогично, легко получить собственные функции уравнения

$$\lambda^2 Lu + \lambda Nu + Mu = 0,$$

если L, N, M – линейные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащие лишь вторые производные по x и y , а Ω – эллипс, причем тип уравнения не играет роли.

Замечание 2. При различных n $u_{n,k}(x, y)$ могут соответствовать одинаковым значениям, однако они оказываются линейно независимыми как полиномы различных степеней. Нужно также отметить, что собственные функции $u_{n,k}(x, y)$ образуют полную систему в круге в смысле метрики всякого такого пространства, где линейное многообразие полиномов, исчезающих на границе, всюду плотно.

Замечание 3. Легко видеть, что если существует решение (1), обращающееся в нуль на $\partial\Omega$, то оно имеет вид (4), и для любой функции ψ

$$u(z, \bar{z}, \mu_1, \mu_2) = \psi(f(z + \mu_1 \bar{z})) - \psi(g(z + \mu_2 \bar{z})) \quad (*)$$

удовлетворяет тому же уравнению и нулевым граничным условиям. Очевидно, что линейно независимых функций вида (*) бесконечно много. Таким образом, либо решение Дирихле для уравнения (1) единственно, либо существует бесконечно много линейно независимых решений.

Государственный инженерный университет Армении

Г. А. Саргсян

О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге

Предлагается новый метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге. Предлагается также построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Գ. Ա. Սարգսյան

Հաստատուն գործակիցներով հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումների մասին շրջանում

Առաջարկվում է նոր մեթոդ՝ կառուցելու հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումները շրջանում: Աշխատանքում առաջարկվում է նաև կառուցել լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի սեփական ֆունկցիաների լրիվ համախումբը:

G. A. Sargsyan

**On Polynomial Solutions in the Disc for Dirichlet Problem of
Hyperbolic Equations with Constant Coefficients**

A new method for construction of the complete set of polynomial solutions in the disc for the Dirichlet problem of hyperbolic equations with constant coefficients is suggested. Construction of the complete set of the eigenfunctions of Dirichlet problem for the equation of span oscillation is also suggested.

Литература

1. *Александрян Р. А.* – Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Вып. 9. С. 455-505.
2. *John F.* – Am. J. Math. 1941. V. 63. P. 141-154.
3. *Арнольд В.И.* – Изв. АН СССР. Серия матем. 1961. Т. 25. N 1. С. 21-86.
4. *Бурский В.П.* – Мат. заметки. 1990. Т. 48. N3.
5. *Бурский В.П., Жеданов* – Укр. мат. журн. 2006. Т. 2.
6. *Бицадзе А. В.* – Некоторые классы уравнений в частных производных. М. Наука. 1981.

твенного состояния и кроме поверхностных сил действует еще и объемная сила произвольного характера с проекциями $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$.

По аналогии [9] воспользуемся методом представления решений в виде степенных многочленов по поперечной координате γ . Очевидно, что для построения самой простой теории, способной описать изгиб оболочки, в многочленах основных напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ необходимо удерживать лишь первые два члена, т.е. принимать для этих напряжений линейные законы распределения по толщине оболочки. Это влечет за собой линейность распределения по толщине оболочки основных деформаций $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}$, а следовательно, и тангенциальных перемещений u_α, u_β . Тогда для соблюдения одинакового порядка в многочленах поперечных касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ следует удерживать по три члена. Итак, в качестве основной гипотезы примем

$$\tau_{\alpha\gamma} = \varphi_1 + \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_3, \quad \tau_{\beta\gamma} = \psi_1 + \gamma\psi_2 + \gamma^2\psi_3. \quad (1.1)$$

Здесь φ_i и ψ_i – функции координат α, β .

Для распределения объемной силы по толщине оболочки примем линейную аппроксимацию.

Кроме (1.1) примем также следующие допущения:

- а) прогиб w по толщине оболочки не меняется;
- б) влияние нормального напряжения σ_γ не принимается во внимание.

Допущение а) можно обосновать следующим образом. В рамках геометрически линейной постановки

$$u_\gamma = w(\alpha, \beta) + \int_0^\gamma e_\gamma d\gamma \approx w. \quad (1.2)$$

Интегральным членом этого выражения пренебрегаем из-за малости не деформации e_γ , а промежутка интегрирования, поскольку $|\gamma| \leq h/2$, а h намного меньше остальных габаритных размеров оболочки. Важно заметить, что учет этого интегрального члена приводит к нарушению линейности распределения тангенциальных перемещений, а следовательно и основных напряжений по толщине оболочки, что существенно и неоправданно осложнит теорию.

В пользу же допущения б) свидетельствуют известные решения многих конкретных задач [2].

Из геометрически линейных соотношений с учетом обобщенного закона Гука и принятых допущений имеем [2]:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= (1 + k_1\gamma)u - \gamma \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_{55}\varphi_1 \right), \\ u_\beta &= (1 + k_2\gamma)v - \gamma \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - a_{44}\psi_1 \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь u, v – тангенциальные перемещения, k_1, k_2 – кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратной формы срединной поверхности, a_{44}, a_{55} – упругие постоянные материала оболочки.

Температуры поверхностей оболочки θ^+ и θ^- считаем известными. Для распределения температуры по толщине оболочки примем линейный закон

$$\theta = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(\theta^+ - \theta^-). \quad (1.4)$$

На основе обобщенного закона Гука и гипотезы Франца Неймана [12] для основных напряжений оболочки получим:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= B_{11}(e_\alpha - \alpha_1\theta) + B_{12}(e_\beta - \alpha_2\theta), \\ \sigma_\beta &= B_{22}(e_\beta - \alpha_2\theta) + B_{12}(e_\alpha - \alpha_1\theta), \\ \tau_{\alpha\beta} &= B_{66}e_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь B_{ij} – параметры материала, которые известными формулами [3] выражаются через упругие постоянные, α_1 и α_2 – коэффициенты теплового расширения по направлениям α и β соответственно. Основные деформации имеют вид:

$$e_\alpha = \varepsilon_1 + \mathcal{X}_1, \quad e_\beta = \varepsilon_2 + \mathcal{X}_2, \quad e_{\alpha\beta} = \omega + \gamma\tau. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \mathcal{X}_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} u + \frac{1}{B} \frac{\partial k_2}{\partial \beta} v - \\ &\quad - k_1^2 w + \frac{1}{AB} \left(Ba_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + a_{44} \psi_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \\ \mathcal{X}_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial k_2}{\partial \beta} v + \frac{1}{A} \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} u - \\ &\quad - k_2^2 w + \frac{1}{AB} \left(Aa_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} + a_{55} \varphi_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\tau = & -\frac{2}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + (k_1 - k_2) \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{AB} \left[a_{55} \left(A \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \varphi_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + a_{44} \left(B \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \psi_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right].\end{aligned}$$

Следуя [2], для усилий и моментов оболочки, с учетом (1.4) и (1.5), получим:

$$\begin{aligned}T_1 = & C_{11} \left(\varepsilon_1 - \alpha_1 \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \right) + C_{12} \left(\varepsilon_2 - \alpha_2 \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \right) + \\ & + k_2 \left[D_{11} \left(\chi_1 - \alpha_1 \frac{\theta^+ - \theta^-}{h} \right) + D_{12} \left(\chi_2 - \alpha_2 \frac{\theta^+ - \theta^-}{h} \right) \right], \\ S_1 = & C_{66} \omega + k_2 D_{66} \tau, \\ N_1 = & \frac{h}{12} [12 \varphi_1 + h^2 (\varphi_3 + k_2 \varphi_2)] \\ M_1 = & D_{11} \left(\chi_1 - \alpha_1 \frac{\theta^+ - \theta^-}{h} \right) + D_{12} \left(\chi_2 - \alpha_2 \frac{\theta^+ - \theta^-}{h} \right) + \\ & + k_2 \left[D_{11} \left(\varepsilon_1 - \alpha_1 \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \right) + D_{12} \left(\varepsilon_2 - \alpha_2 \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (1.9)$$

Здесь, как обычно,

$$C_{ij} = B_{ij} h, \quad D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3}{12}. \quad (1.10)$$

Выражения T_2, S_2, N_2 и M_2 можно получить из (1.9) путем круговой перестановки букв. Поверхностные условия оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^\pm l^\pm + \tau_{\alpha\beta}^\pm m^\pm + \tau_{\alpha\gamma}^\pm n^\pm &= X^\pm, \\ \tau_{\alpha\beta}^\pm l^\pm + \sigma_\beta^\pm m^\pm + \tau_{\beta\gamma}^\pm n^\pm &= Y^\pm, \\ \tau_{\alpha\gamma}^\pm l^\pm + \tau_{\beta\gamma}^\pm m^\pm + \sigma_\gamma^\pm n^\pm &= Z^\pm.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь $l^\pm, m^\pm, n^\pm$ – направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей оболочки $\gamma = \pm h/2$. Они определяются формулами [2]:

$$\begin{aligned}l^\pm = & -\frac{1}{2C^\pm} \frac{1}{H^\pm} \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \quad m^\pm = -\frac{1}{2C^\pm} \frac{1}{H_2^\pm} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \\ n^+ = & \frac{1}{C^+}, \quad n^- = -\frac{1}{C^-}, \quad C^\pm = \sqrt{\left(\frac{1}{2H_1^\pm} \pm \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{2H_2^\pm} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right)^2} + 1.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Коэффициенты Ламе определяются формулами:

$$H_1^\pm = A \left(1 \pm \frac{h}{2} k_1 \right), \quad H_2 = B \left(1 \pm \frac{h}{2} k_2 \right). \quad (1.13)$$

Из шести поверхностных условий (1.11) последние два понадобятся для определения напряжения σ_γ . Из первых четырех условий функции $\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$ можно выразить через $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$. Эти выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{1}{h} (C^+ X^+ + C^- X^-) + \frac{1}{2Ah} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{h}{2} k_1} \left[B_{11} \left(\varepsilon_1 + \frac{h}{2} \chi_2 - \alpha_1 \theta^+ \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{12} \left(\varepsilon_2 + \frac{h}{2} \chi_2 - \alpha_2 \theta^+ \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{1 - \frac{h}{2} k_1} \left[B_{11} \left(\varepsilon_1 - \frac{h}{2} \chi_1 - \alpha_1 \theta^- \right) + B_{12} \left(\varepsilon_2 - \frac{h}{2} \chi_2 - \alpha_2 \theta^- \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \\ & + \frac{B_{66}}{2Bh} \left[\frac{1}{1 + \frac{h}{2} k_2} \left(\omega + \frac{h}{2} \tau \right) + \frac{1}{1 - \frac{h}{2} k_2} \left(\omega - \frac{h}{2} \tau \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad (1.14) \\ \varphi_3 = & \frac{2}{h^2} (C^+ X^+ - C^- X^-) - \frac{4\varphi_1}{h^2} + \frac{1}{Ah^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{h}{2} k_1} \left[B_{11} \left(\varepsilon_1 + \frac{h}{2} \chi_1 - \alpha_1 \theta^+ \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{12} \left(\varepsilon_2 + \frac{h}{2} \chi_2 - \alpha_2 \theta^+ \right) \right] - \frac{1}{1 - \frac{h}{2} k_1} \left[B_{11} \left(\varepsilon_1 - \frac{h}{2} \chi_1 - \alpha_1 \theta^- \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{12} \left(\varepsilon_2 - \frac{h}{2} \chi_2 - \alpha_2 \theta^- \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{B_{66}}{Bh^2} \left[\frac{\omega + \frac{h}{2} \tau}{1 + \frac{h}{2} k_2} - \frac{\omega - \frac{h}{2} \tau}{1 - \frac{h}{2} k_2} \right] \frac{\partial h}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Выражения ψ_2 и ψ_3 можно получить из (1.14) путем круговой перестановки букв.

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной поверхности оболочки имеют известный вид [2]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS_2) + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABk_1 N_1 = -ABX, \\
& \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BS_1) + S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABk_2 N_2 = -ABY, \\
& -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) \right] = -Z, \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AH_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_1 - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} = ABN_1, \\
& \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_2 - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} = ABN_2.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Для грузовых членов имеем [2]:

$$\begin{aligned}
X &= \left(1 + \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2\right) X^+ + \left(1 - \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2\right) X^- + \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} H_1 H_2 P_\alpha d\gamma, \\
Y &= \left(1 + \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2\right) Y^+ + \left(1 - \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2\right) Y^- + \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} H_1 H_2 P_\beta d\gamma, \\
Z &= \left(1 + \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2\right) Z^+ + \left(1 - \frac{h}{2} k_1\right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2\right) Z^- + \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} H_1 H_2 P_\gamma d\gamma.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

В силу выражений (1.14) определение напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек переменной толщины при учете влияния деформаций поперечных сдвигов и температуры сводится к решению пяти дифференциальных уравнений (1.15) относительно пяти функций u, v, w, φ_1, ψ .

2. К разрешающей системе (1.15) следует присоединить краевые условия оболочки. Так как эта система имеет десятый порядок, то на каждом краю оболочки надо ставить по пять условий. Приведем наиболее часто встречающиеся условия для края $\alpha = \text{const}$.

а) свободный край:

$$T_1 = 0, N_1 = 0, S_1 = 0, M_1 = 0, H_1 = 0; \tag{2.1}$$

б) шарнирно опертый край:

$$T_1 = 0, S_1 = 0, M_1 = 0, H_1 = 0, w = 0; \tag{2.2}$$

в) защемленный край:

$$\begin{aligned}
& u = 0, v = 0, w = 0, \\
& \frac{\partial w}{\partial \alpha} - Aa_{55}\varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} - Ba_{55}\psi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что условия защемления можно удовлетворить на всех точках сечения.

Аналогичным образом можно написать условия и для края $\beta = \text{const}$.

3. В случаях достаточно пологих, а также замкнутых, но достаточно коротких оболочек можно значительно упростить теорию, т.е. перейти к

так называемой технической теории. Эти упрощения заключаются в следующем:

а) в геометрических соотношениях для χ_1, χ_2 и τ (1.8) сохраняются лишь члены, содержащие прогиб оболочки;

б) вместо выражений T_1, T_2, M_1 и M_2 (1.9) берутся более простые выражения, где опускаются члены, содержащие кривизны k_1, k_2 ;

в) в выражениях φ_i, ψ_1 (1.14) не принимаются во внимание $\pm \frac{hk_1}{2}$, в силу чего

$$C^{\pm} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta} \right)^2}$$

г) упрощаются и выражения грузовых членов (1.16)

$$X = X^+ + X^- + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\alpha} d\gamma, \quad Y = Y^+ + Y^- + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\beta} d\gamma, \quad Z = Z^+ + Z^- + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\gamma} d\gamma, \quad (2.4)$$

д) в уравнениях равновесия (1.15) опускаются члены ABk_1N_1 и ABk_2N_2 .

Краевые условия записываются, как и прежде, но фигурирующие в них усилия и моменты имеют сравнительно упрощенные выражения.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины

Методом представления решений степенными многочленами строится уточненная теория термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины, учитывающая влияния деформаций поперечных сдвигов и температуры. Для пологих оболочек и оболочек достаточно малой длины рассматривается упрощенный (технический) вариант этой теории.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսության մասին

Լուծումների աստիճանային բազմանդամներով ներկայացման մեթոդով կառուցվում է փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսություն, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների և ջերմաստիճանի ազդեցությունները: Փոքր կորության և բավական կարճ թաղանթների համար դիտարկվում է այդ տեսության պարզեցված (տեխնիկական) տարբերակը:

R. M. Kirakosyan

**On the Refined Theory of Thermo-Elasticity of Orthotrope
Shells of Variable Thickness**

A refined thermo-elasticity theory of orthotrope shells of variable thickness by means of presenting solutions in the form of power polinomal contract, when the influence of transversal shear deformations and temperature are taking into account. For slope shells and shells of sufficiently small length the simplified (technical) variant of this theory is considered.

Литература

1. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 415 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 448 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
4. *Васильев В. В.* - Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. №3. С.46-58.
5. *Гольденвейзер А.А.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.
6. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.
7. *Дургарьян С. М.* - Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №6. С.154-160.
8. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван. Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2000. 122 с.
9. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2011. Т.111. №2. С.148-155.
10. *Лурье А И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М. Гостехиздат. 1947. 251 с.
11. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. Физматгиз. 1963. 635 с.
12. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гостехиздат. 1947. 464 с.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Папян

Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 14/VII 2012)

Ключевые слова: магнитное поле, мембрана, затухание, частота колебаний

Рассматривается колебание упругой изотропной пластинки постоянной толщины $2h$ и конечной электропроводности σ во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$. Пластинка в декартовой системе координат x, y, z расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью xoy . Пластина в декартовой системе координат занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ и $-h \leq z \leq h$. Магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице, а электромагнитное свойство среды, окружающей пластинку, эквивалентным свойствам вакуума.

Для сведения трехмерной задачи магнитоупругих колебаний пластинки к двумерной принимаются следующие предположения:

- допущения для перемещения согласно теории пластин Кирхгофа

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \quad U_2(x, y, z, t) = V(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{и} \\ U_3(x, y, z, t) = w(x, y, t), \quad (1)$$

здесь $U = U(x, y, t)$, $V = V(x, y, t)$ и $w = w(x, y, t)$ искомые перемещения срединной плоскости пластины;

- гипотеза магнитоупругости тонких тел С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Багдасаряна и М. В. Белубекяна относительно поведения компонент индуктивного электромагнитного поля [1]:

$$e_1 = f_1(x, y, t), e_2 = f_2(x, y, t) \quad \text{и} \quad h_3 = g(x, y, t). \quad (2)$$

Согласно принятым допущениям выражения для основных напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + v \frac{\partial U}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+v)} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Из уравнений электродинамики для внутренней области с учетом (1) и (2) для оставшихся компонент индуцированного электромагнитного поля имеем [1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_1 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} B_3 - \frac{\partial U_3}{\partial t} B_2 \right) \right) \\
\frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_3}{\partial x} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} B_1 - \frac{\partial U_1}{\partial t} B_3 \right) \right) \\
\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_3 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} B_2 - \frac{\partial U_2}{\partial t} B_1 \right) \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Проинтегрировав систему (4) по z в пределах от $-h$ до h получим

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} - z \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_1 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} B_3 - \frac{\partial U_3}{\partial t} B_2 \right) \right) \right) \\
h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - z \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} B_1 - \frac{\partial U_1}{\partial t} B_3 \right) \right) \right) \\
e_3 &= \frac{c}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} B_2 - \frac{\partial U_2}{\partial t} B_1 \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения движения в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + K_1 &= \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + K_2 &= \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_3 &= \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$ – объемная сила, обусловленная взаимодействием упругих перемещений и электромагнитного поля (пондермоторная сила). K_1, K_2, K_3 – компоненты объемной силы.

Приведем выражение $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$ для частного случая поперечного магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B_3)$

$$K_1 = \frac{\sigma}{c} \left(e_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial U_1}{\partial t} B_3 \right) B_3, \quad K_2 = \frac{\sigma}{c} \left(e_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial U_2}{\partial t} B_3 \right) B_3 \quad \text{и} \quad K_3 = 0. \quad (7)$$

Для внутренних усилий и моментов имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= C \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad T_2 = C \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ S &= \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad H = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $C = \frac{2Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$.

Проинтегрировав каждое из уравнений движения (3) по z в пределах от $-h$ до h , далее умножив первые два из них на z и вновь проинтегрировав полученные выражения по z в тех же пределах, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{2h\sigma}{c} \left(e_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} B_3 \right) B_3 &= 2h\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{2h\sigma}{c} \left(e_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} B_3 \right) B_3 &= 2h\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 + \frac{\sigma 2h^3}{c^2 3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} B_3^2 &= -\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_2 + \frac{\sigma 2h^3}{c^2 3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} B_3^2 &= -\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя значение N_1 и N_2 в третье уравнение системы (9), с учетом (8) получаем

$$D \Delta \Delta w - \frac{\sigma B_3^2}{c^2} \frac{2h^3}{3} \frac{\partial (\Delta w)}{\partial t} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Если пластина равномерно растянута по направлению Ox и Oy , пренебрегая жесткостью на изгиб, получим

$$\rho \Delta w + \frac{\sigma B_3^2}{c^2} \frac{2h^3}{3} \frac{\partial (\Delta w)}{\partial t} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия закрепленной по краям мембраны имеют вид

$$w=0 \text{ при } x=0,a; \quad w=0 \text{ при } x=0,b,$$

Решение уравнения (12) будем искать в следующем виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(t)_{mn} \sin \mu_m x \sin \lambda_n y, \quad (13)$$

$$\text{где } \mu_m = \frac{\pi m}{a}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b}$$

Подставляя значение (13) в уравнение (12) и делая несколько сокращений, получим

$$\ddot{f}_{mn} + \frac{h^2}{3} \frac{\sigma B_3^2}{c^2 \rho} (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \dot{f}_{mn} + \frac{p(\mu_m^2 + \lambda_n^2)}{2\rho h} f_{mn} = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } \frac{h^2}{3} \frac{\sigma B_3^2}{c^2 \rho} (\mu_m^2 + \lambda_n^2) = \beta, \quad \frac{p(\mu_m^2 + \lambda_n^2)}{2\rho h} = \gamma.$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде $f_{mn} = e^{\omega t}$. Подставляя f_{mn} в уравнение (14), получим квадратное уравнение относительно частот колебаний

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \quad \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}, \quad (15)$$

где $0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2}$ – частота колебаний, 0.5β – коэффициент затухания. Рассмотрим случай, при котором частота колебаний равна нулю

$$\frac{2p(\mu_m^2 + \lambda_n^2)}{\rho h} = \frac{h^4}{9} \frac{\sigma^2 B_3^4}{c^4 \rho^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^2, \quad (16)$$

$$\text{где } p = 2\sigma_0 h, \quad \frac{B_3^4}{16\pi^2 \rho^2 c^4} = \frac{9\sigma_0}{4\pi^2 \rho h^4 \sigma^2 (\mu_m^2 + \lambda_n^2)}.$$

Приведем численные примеры для медной мембраны $\nu = 0,3$, $\sigma = 5,3 \times 10^{17}$ 1/с, $\rho = 8,9$ г/см³, $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, $\sigma_0 = 6,85 \times 10^8$ г/смс², пластинка квадратная $a = b$, соотношение толщины к стороне $h/a = 0,2$.

Рассмотрим следующие случаи: а) $m=1$, $n=1$, б) $m=1$, $n=2$, в) $m=2$, $n=1$ и г) $n=2$, $m=2$. В таблице приведены величины магнитного поля, при котором частота колебаний равна нулю, в случаях а- г. Таблица составлена для $h/a = 0,2$

m	n	B [$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \text{см}^{-\frac{1}{2}} \text{сек}^{-1}$]
1	1	9472.59
1	2	7533.27
2	1	7533.27
2	2	6698.13

Из таблицы следует, что влияние магнитного поля существенно для высоких форм колебаний.

Институт механики НАН РА

А. А. Папян

Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле

На основе теории пластин Кирхгофа и гипотезы магнитоупругости тонких тел С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Багдасаряна, М. В. Белубекяна решается задача магнитоупругих колебаний для мембраны. Исследуется влияние магнитного поля на частоты колебаний.

Ա. Ա. Պապյան

Հաղորդիչ ուղղանկյուն մեմբրանի տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում

Կիրիստոֆի սալերի տեսության և Ա. Ա. Համբարձումյանի, Գ. Ե. Բաղդասարյանի, Մ. Վ. Բելուբեկյանի՝ բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի հիման վրա լուծվում է մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը մեմբրանի համար: Հետազոտված է մագնիսական դաշտի ազդեցությունը տատանման հաճախությունների վրա:

A. A. Papyan

The Vibrations of Conductive Rectangle Membrane in the Transverse Magnetic Field

On the basis of the theory of Kirchhoff's plate and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies of S. A. Ambartsumian, G. E. Baghdasaryan, M. V. Belubekyan, the problem of the vibration of magneto-elasticity for membrane is solved. The influence of the magnetic field on the vibration frequencies is investigated.

Литература

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластины. Изд. ЕГУ. 1991. 144 с.
3. Белубекян В. М., Белубекян М. В. - Изв. НАН Армении. 1999. Т. 52. №2. С. 11 – 12.

МЕХАНИКА

УДК 539

Академик С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян

Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле

(Представлено 9/VIII 2012)

Ключевые слова: *планарные колебания, пластинка, теория магнитоупругости.*

Рассматривается задача обобщённого плоского напряжённого состояния электропроводящей пластинки на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Для того, чтобы обойти необходимость решения уравнений электродинамики в окружающей пластину среде, принимается дополнительное предположение о величинах компонент напряжённости индуцированного магнитного поля на лицевых поверхностях пластинки. Исследуется зависимость частот и коэффициента затухания от величины напряжённости начального поперечного магнитного поля.

1. В большинстве случаев задачи колебаний пластин делятся на две автономные задачи: планарные колебания (обобщённое плоское напряжённое состояние) и изгибные колебания (поперечные колебания) [1-3]. Известно, что в задачах магнитоупругих колебаний пластин существенные эффекты влияния внешнего магнитного поля появляются при исследовании изгибных колебаний [3-7]. Здесь ставится вопрос: возникают ли какие-нибудь эффекты в задачах планарных магнитоупругих колебаний.

Пластина постоянной толщины $2h$ с постоянной электропроводностью σ находится во внешнем магнитном поле с вектором магнитной индукции $\vec{B}_0$, перпендикулярным к срединной плоскости пластинки. В этом случае при допущениях гипотезы магнитоупругости тонких тел задачи планарных и изгибных колебаний разделяются [4].

Согласно [5] система уравнений планарных магнитоупругих колебаний имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sigma}{c} B_{03} \Psi = \\
& = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sigma}{c^2} B_{03}^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \\
& \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sigma}{c} B_{03} \Phi = \\
& = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sigma}{c^2} B_{03}^2 \frac{\partial v}{\partial t},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\
& \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \Psi - \frac{4\pi\sigma}{c^2} B_{03} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}, \\
& \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \Phi - \frac{4\pi\sigma}{c^2} B_{03} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В системе (1.1), (1.2) u, v – тангенциальные перемещения; f – поперечный компонент индуцированного магнитного поля; Φ, Ψ – тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля; E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала пластины; c – электродинамическая постоянная.

Система уравнений (1.1), (1.2) состоит из пяти уравнений относительно пяти искомых функций u, v, f, Φ, Ψ . Однако в (1.2) участвуют также неизвестные величины $h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^-$ – значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на лицевых поверхностях пластины $z = \pm h$.

Для нахождения величин $h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^-$ необходимо также решать уравнения электродинамики для области $|z| > h$. В настоящей работе делается допущение, что этими величинами можно пренебречь:

$$h_1^+ - h_1^- \approx 0, \quad h_2^+ - h_2^- \approx 0. \tag{1.3}$$

В этом случае система уравнений (1.1), (1.2) становится замкнутой и нет необходимости привлечения уравнений электродинамики для внешней среды..

2. Из второго и третьего уравнений системы (1.2) определяются Ψ и Φ следующим образом (с учётом приближения (1.3)):

$$\Psi = -\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Phi = \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.1}$$

После постановки (2.1) в систему (1.1), (1.2) получается следующая система трёх уравнений относительно трёх искомых функций u, v, f :

$$\begin{aligned}
\Delta u + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{B_{03}}{4\pi G} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\Delta v + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{B_{03}}{4\pi G} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta f + B_{03} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В (2.2) использованы известные обозначения

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad c_t^2 = \frac{G}{\rho}. \tag{2.3}$$

Для системы (2.2) вводится преобразование Ламе [8]

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{2.4}$$

При помощи (2.4) система (2.2) известным способом преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{(1-\nu^2)}{4\pi E} f, \\
\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta f + B_{03} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} &= 0, \\
\Delta \Psi &= \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В первом уравнении системы (2.5) принято

$$c_e^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}. \tag{2.6}$$

Из системы (2.5) следует, что наличие магнитного поля влияет только на продольные волны (система уравнений относительно Φ и f) и не влияет на планарные поперечные волны (уравнение относительно Ψ автономно). Если не выполнять преобразование (2.4), уравнение относительно частоты колебаний получится пятой степени. Система (2.5) показывает, что в общем случае характеристическое уравнение задачи распадается на два уравнения: уравнение третьей степени и уравнение второй степени.

3. Для бесконечной пластинки решение системы уравнений (2.5) относительно Φ и f представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_0 \exp[\lambda t - i(k_1 x + k_2 y)], \\
f &= f_0 \exp[\lambda t - i(k_1 x + k_2 y)].
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь λ – комплексная частота, k_1, k_2 – волновые числа.

После подстановки (3.1) в (2.5) получается система из двух однородных уравнений относительно произвольных постоянных $\bar{\Phi}_0, f_0$. Из условия равенства детерминанта указанной системы нулю получается уравнение

$$\alpha^3 + \epsilon\alpha^2 + (1 + \gamma^2)\alpha + \epsilon = 0. \quad (3.2)$$

В (3.2) использованы обозначения

$$\alpha = \frac{\lambda}{kc_e}, \quad \epsilon = \frac{c^2 k}{4\pi\sigma c_e}, \quad \gamma^2 = \frac{(1 - v^2)B_{03}^2}{4\pi E}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (3.3)$$

По теореме Гурвица уравнение (3.2) ($\epsilon > 0, \gamma^2 > 0$) имеет либо один отрицательный корень и два комплексных корня с отрицательной действительной частью, либо три отрицательных корня. В случае отсутствия магнитного поля ($\gamma^2 = 0$) корень $\alpha_1 = -\epsilon$ определяет коэффициент затухания возбуждённого электромагнитного поля, а корни $\alpha_{2,3} = \pm i$ – частоты колебаний пластинки в случае идеального проводника ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_{2,3} = i\sqrt{1 + \gamma^2}. \quad (3.4)$$

4. В случае прямоугольной пластинки ($a \times b$) конечных размеров, ввиду наличия второго уравнения системы (2.5), необходимы дополнительные граничные условия на кромках. Пусть прямоугольная пластинка занимает область $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$. Если считать, что пластинка ни по какой стороне не включена в электрическую цепь, то естественно принять равенство нулю нормальной составляющей плотности электрического тока на краях пластины:

$$\begin{aligned} \gamma_x &= 0 \text{ при } x = 0, a, \\ \gamma_y &= 0 \text{ при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выражения плотности электрического тока в поперечном магнитном поле известны [1]:

$$\gamma_x \sigma \left(\Phi + \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right), \quad \gamma_y = \sigma \left(\Psi - \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (4.2)$$

С учётом (4.2) и выражений для Φ и Ψ из (2.1) граничные условия (4.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \text{ при } x = 0, a, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \text{ при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Не нарушая общности, вместо условий (3.3) можно использовать следующие граничные условия:

$$f = 0 \text{ при } x = 0, a; y = 0, b. \quad (4.4)$$

Пусть на кромке пластины $x = \text{const}$ вместе с условием $f = 0$ заданы также условия Навье:

$$\sigma_{xx} = 0, u_2 = 0. \quad (4.5)$$

При принятых здесь допущениях эти условия приводятся к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0, f = 0. \quad (4.6)$$

Используя преобразование (2.4) и уравнение (2.5), граничные условия (4.6), в свою очередь, заменяются условиями

$$\Phi = 0, f = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (4.7)$$

Из (4.7) и системы (2.5) следует, что в этом случае можно использовать метод разделения переменных в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) e^{i\omega_n t} \sin p_n x, \\ f &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) e^{i\omega_n t} \sin p_n x, p_n = n\pi / a. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Можно показать, что при других вариантах граничных условий метод разделения переменных не проходит. В этих случаях необходимо применение приближённых методов типа Галеркина или Ритца.

Если на всех сторонах прямоугольной пластинки ($x = 0, a, y = 0, b$) заданы условия Навье и пластинка не включена в электрическую цепь, тогда решение задачи можно представить в виде двойных рядов Фурье. Для такой пластинки уравнение, определяющее частоты магнитоупругих колебаний, приводится к виду (3.2), если k заменить выражением

$$k = (p_n^2 + \mu_m^2)^{1/2}, \mu_m^2 = m\pi / b. \quad (4.9)$$

На основе уравнения (3.2) в таблице приводятся численные расчёты относительно коэффициента затухания $\vartheta = -\text{Re}(\lambda)$ и безразмерной относительной минимальной частоты $\alpha_0 = \text{Im}(\alpha)$ в зависимости от напряжённости внешнего магнитного поля B_{03} . Расчёты приведены для квадратной медной пластинки с параметрами

$$a = 10 \text{ см}, E = 1.12 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2, \rho = 8,9 \text{ г/см}^3, \sigma = 5.3 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}; \nu = 0,34.$$

$B_0 (10^3 \text{ гаусс})$	$\vartheta (\text{с}^{-1})$	α_0
5	0.0024	1.0000
10	0.0474	1.0009
50	0.1374	1.0082
100	1.2410	1.0142
200	3.8927	1.0974

Таким образом, из численных результатов следует, что в отличие от изгибных колебаний пластинки [5] (где влияние магнитного поля существенно) для планарных колебаний внешнее магнитное поле напряжённостью, не превышающей 50000 гаусс, не существенно увеличивает частоту колебаний. С другой стороны, имеет место существенное изменение коэффициента затухания аналогично случаю изгибных колебаний.

Отметим, что относительная частота колебаний для приведённых в таблице значений напряжённости внешнего магнитного поля практически не зависит от длины пластинки a . Коэффициент затухания существенно зависит от длины пластинки и изменяется как $\vartheta \sim 1/a$. В случае, когда пластинка включена в цепь переменного электрического тока

$$j_x = J_0 \sin \omega t \text{ при } x = 0, a, \quad (4.10)$$

граничные условия $f = 0$ необходимо заменить на

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4\pi J_0}{c} \sin \omega t \text{ при } x = 0, a. \quad (4.11)$$

Уравнение (2.5), в случае условий (4.11), определяет задачу вынужденных колебаний магнитоупругой пластинки.

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян

Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле

В рамках теории магнитоупругости тонких тел исследована задача планарных колебаний электропроводящей пластинки под действием внешнего поперечного магнитного поля. Изучено влияние интенсивности магнитного поля на частоту колебаний и коэффициент затухания.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Կ. Բ. Ղազարյան

Հաղորդիչ սալի պլանար տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում

Բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում հետազոտված է էլեկտրահաղորդիչ սալի պլանար տատանումների խնդիրը, երբ սալը գտնվում է արտաքին ուղղահայաց մագնիսական դաշտում: Հետազոտված է մագնիսական դաշտի ազդեցությունը հաճախականությունների և մարման գործակցի վրա:

Academician S. A. Ambartsumian, K. B. Ghazaryan

Planar Vibration of Electroconductive Plate in a Transverse Magnetic Field

In the framework of the magnetoelasticity theory of thin bodies the planar (in-plane) vibration of electroconductive plate is studied under the action of an external transverse magnetic field. The influence of magnetic field intensity on vibration frequency and dumping coefficient is investigated.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
3. *Vashakmadze T.* The theory of Anizotropic Elastic Plates. Dordrecht /Boston/ London. Kluwer Acad. Publs. and Springer, 2010. 256 p.
4. *Kaliski S.* - Proc. Vibr. Pol. Acad. Sci. 1962. V.3. №4. P. 225-234.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
6. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Физматлит. 1996. 286 с.
7. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* - Вестник инженерной академии Армении. 2006. № 3. С. 394-399.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.

ФИЗИКА

УДК 621.315

Д. Б. Айрапетян^{1,2}, О. Х. Тевосян¹

**Электронные состояния и прямое межзонное поглощение
света в сферической квантовой точке с модифицирован-
ным потенциалом Пешля –Теллера**

(Представлено академиком Э. М. Казаряном 8/VI 2012)

Ключевые слова: *сферическая квантовая точка, модифицированный потенциал Пешля – Теллера, прямое межзонное поглощение света*

1. Введение. Прогресс современных полупроводниковых технологий сделал возможным производство низкоразмерных полупроводниковых структур, в которых движение носителей заряда (НЗ) ограничено в одном, двух и трех направлениях. К первому классу низкоразмерных полупроводников относятся размерно квантованные (РК) пленки, ко второму – РК проволоки различных сечений, а к третьему – квантовые точки (КТ) [1-3], выращенные в различных диэлектрических матрицах. В последние два-три десятилетия особенно возрос интерес к КТ различных форм и размеров [1, 4-6]. Важным отличием полупроводниковых КТ от вышеупомянутых низкоразмерных систем является полная квантованность энергетического спектра НЗ в них.

Ограничивающий потенциал в большинстве случаев с большой точностью аппроксимируется параболическим потенциалом. Однако в действительности параболический потенциал реализуется только для нижних энергетических уровней. Очевидно, что с ростом квантового числа ход ограничивающего потенциала расходится с параболическим. Для более успешной и реалистичной аппроксимации формируемого ограничивающего потенциала предложено использование модифицированного потенциала Пешля–Теллера (МППТ) [5,7].

В настоящей работе исследованы электронные состояния и межзонное поглощение света в сферической КТ с МППТ при режиме сильного размерного квантования.

2. Электронные состояния. Рассмотрим движение частицы (электрон, дырка) в сферической КТ с ограничивающим МППТ при режиме сильного размерного квантования. При этом энергия кулоновского

взаимодействия между электроном и дыркой намного меньше, чем энергия, обусловленная стенками КТ. Тогда можно в гамильтониане системы пренебречь членом, характеризующим кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой. В этом случае задача сводится к нахождению энергетических уровней электрона и дырки по отдельности. В декартовых координатах для потенциальной энергии частицы можно написать

$$U(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^3 \left(\tilde{U}_i - \tilde{U}_i / \operatorname{ch}^2 \left(\frac{Q_i}{\tilde{\beta}_i} \right) \right), \quad (1)$$

где $\tilde{U}_i$ и $\tilde{\beta}_i$ – соответственно, глубина и полуширина потенциальной ямы, $i = 1, 2, 3$, $Q_i = X, Y, Z$ [7]. На рис.1, а, б приведены зависимости потенциальной энергии частицы от полуширины и глубины потенциальной ямы. Радиус сферической КТ связан с полушириной потенциальной ямы соотношением $R_0 = \gamma_i \tilde{\beta}_i$, где параметр γ_i определяется из эксперимента.

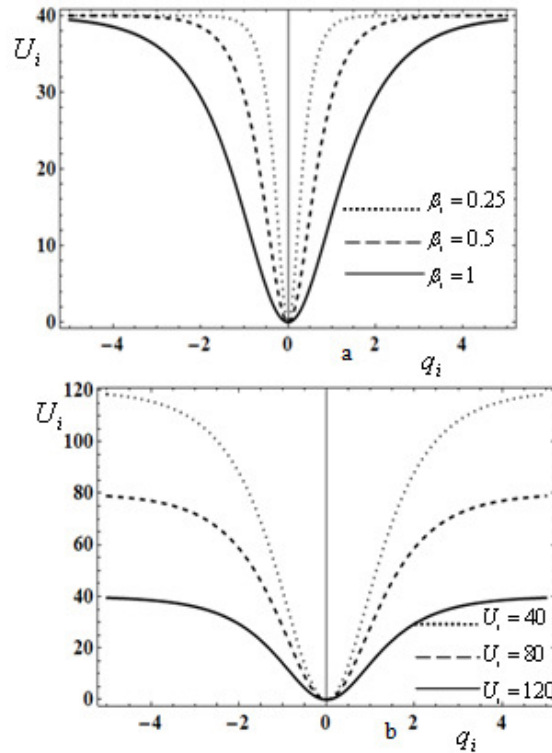


Рис. 1. Модифицированный потенциал Пешля–Теллера: а – для различных значений полуширины потенциальной ямы; б – для различных значений глубины потенциальной ямы.

Гамильтониан системы в безразмерных величинах можно представить в виде суммы гамильтонианов подсистем

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \hat{H}_i, \quad (2)$$

где

$$\hat{H}_i = -\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} - \frac{U_i}{\text{ch}^2\left(\frac{q_i}{\beta_i}\right)}. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения: $\hat{H}_i = \frac{\hat{\mathbf{H}}_i}{E_R}$, $q_i = \frac{Q_i}{a_B}$, $q_i = x, y, z$, $U_i = \frac{\tilde{U}_i}{E_R}$, $\beta_i = \frac{\tilde{\beta}_i}{a_B}$, $E_R = \frac{\hbar^2}{2m_e^* a_B^2}$ – эффективная энергия Ридберга, $a_B = \frac{\kappa \hbar^2}{m_p^* e^2}$ – эффективный боровский радиус частицы, κ – диэлектрическая проницаемость, m_p^* – эффективная масса частицы, e – заряд частицы.

Полную волновую функцию системы ищем в виде

$$\Phi(x, y, z) = \prod_{i=1}^3 \Psi_i(q_i). \quad (4)$$

Тогда задача сводится к нахождению энергетических уровней подсистем по отдельности. После подстановки волновых функций подсистем в соответствующее уравнение Шредингера, введя новые обозначения $\xi_i = th\left(\frac{r}{\beta_i}\right)$, $s_i = \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{1 + 4\beta_i^2 U_i}]$, получаем

$$\frac{d}{d\xi_i} \left[(1 - \xi_i^2) \frac{d\Psi_i(\xi_i)}{d\xi_i} \right] + \left[s_i(s_i + 1) - \frac{\varepsilon_i}{1 - \xi_i^2} \right] \Psi_i(\xi_i) = 0, \quad (5)$$

где введено обозначение $\varepsilon_i = \frac{E_i}{E_R}$. Решение уравнения

Error! Reference source not found. ищем в виде $\Psi_i(\xi_i) = (1 - \xi_i^2)^{\varepsilon_i/2} \Omega(\xi_i)$ и тогда для $\Omega(\xi_i)$ получаем уравнение Куммера [8]

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \xi_i}{2} \left(1 - \frac{1 - \xi_i}{2} \right) \Omega''(\xi_i) + (\varepsilon_i + 1)(1 - 2s_i) \Omega'(\xi_i) - \\ & - (\varepsilon_i - s_i)(\varepsilon_i + s_i + 1) \Omega(\xi_i) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

решение которого задается гипергеометрической функцией Гаусса

$$\Omega(\xi_i) = {}_2F_1 \left\{ \varepsilon_i - s_i, \varepsilon_i + s_i + 1, \varepsilon_i + 1, \frac{1 - \xi_i}{2} \right\}. \quad (7)$$

Окончательно волновая функция системы примет следующий вид:

$$\Phi_p(x, y, z) = C \prod_{i=3}^3 \left(1 - t h^2 \left(\frac{q_i}{\beta_i} \right) \right)^{\varepsilon_i/2} {}_2F_1 \left\{ \varepsilon_i - s_i, \varepsilon_i + s_i + 1, \varepsilon_i + 1, \frac{1 - t h(q_i/\beta_i)}{2} \right\} \quad (8)$$

где C – нормировочная константа, а энергетический спектр частицы будет определяться выражением

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{4\beta_i^2} \right) \left[-(1 + 2n_i) + \sqrt{1 + 4\beta_i^2 U_i} \right]^2 \quad (9)$$

где n_i – квантовые числа, которые принимают значения $n_i = 0, 1, 2, \dots$.

3. Прямое межзонное поглощение света. Перейдем к рассмотрению прямого межзонного поглощения света в квантовой точке с МППТ в режиме сильного РК, когда кулоновским взаимодействием между электроном и дыркой можно пренебречь. Рассмотрим случай тяжелой дырки, когда $m_e^* \ll m_h^*$, где m_e^* и m_h^* – эффективная масса электрона и дырки соответственно. Тогда коэффициент поглощения определяется выражением [9]

$$K = A \sum_{\nu, \nu'} \left| \int \Phi_{\nu}^e \Phi_{\nu'}^h d\vec{r} \right|^2 \delta(\hbar\Omega - E_g - E_{\nu}^e - E_{\nu'}^h), \quad (10)$$

где ν и ν' – наборы квантовых чисел, соответствующих электрону и тяжелой дырке, E_g – ширина запрещенной зоны массивного полупроводника, Ω – частота падающего света, A – величина, пропорциональная квадрату матричного элемента, взятого по блоховским функциям.

Для пороговых частот, учитывая выражения для энергии электрона и дырки (см. уравнение (9)) получаем

$$W_{000} = 1 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d^2}{2\tilde{\beta}_i^2} \left(\frac{\mu}{m_e^*} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tilde{\beta}_i}{d} \right)^2 \frac{\tilde{U}_i m_e^*}{E_g \mu}} + \frac{\mu}{m_h^*} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tilde{\beta}_i}{d} \right)^2 \frac{\tilde{U}_i m_h^*}{E_g \mu}} - 1 \right) \right), \quad (11)$$

где $d = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu E_g}}$, $W_{000} = \frac{\hbar\Omega_{000}}{E_g}$, $\mu = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$ – приведенная эффективная

масса экситона.

Рассмотрим теперь правила отбора при квантовых переходах. Отметим, что возможны переходы между энергетическими уровнями с любыми соответствующими квантовыми числами. Иначе говоря, разрешены переходы с любого n_i к любому n_i' .

4. Обсуждение. Перейдем к обсуждению полученных результатов. На рис. 2 приведена трехмерная зависимость энергии электрона от величины полуширины и глубины потенциальной ямы. Отметим, что численные расчеты сделаны для сферической КТ с МППТ из $GaAs$ со следующими параметрами: $m_e^* = 0.067m_e$, $m_h^* = 0.45m_e$, $\kappa = 13.8$, $E_R = 5.275$ мэВ, $a_B = 104$. Все нижеприведенные расчеты сделаны для случая, когда параметры сферической КТ по всем направлениям одинаковы ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \equiv \beta$ и

$U_1 = U_2 = U_3 \equiv U_0$). Как видно из рис. 2, с увеличением полуширины потенциальной ямы энергия электрона уменьшается, что является следствием уменьшения вклада размерного квантования. Нужно отметить, что с увеличением полуширины потенциальной ямы уменьшаются также межуровневые расстояния энергии, иными словами, энергетические уровни сближаются. Обратная картина наблюдается при изменении глубины потенциальной ямы: с увеличением глубины потенциальной ямы энергия электрона увеличивается, а энергетические уровни отдаляются. Это обусловлено тем, что увеличивается вклад стенок сферической КТ с МППТ в энергию электрона. Частота перехода между основным уровнем ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$) и возбужденным уровнем ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$), при фиксированных значениях $\beta = 1$, $U_0 = 40$ получается $\omega = 4.68 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, что соответствует инфракрасному диапазону спектра.

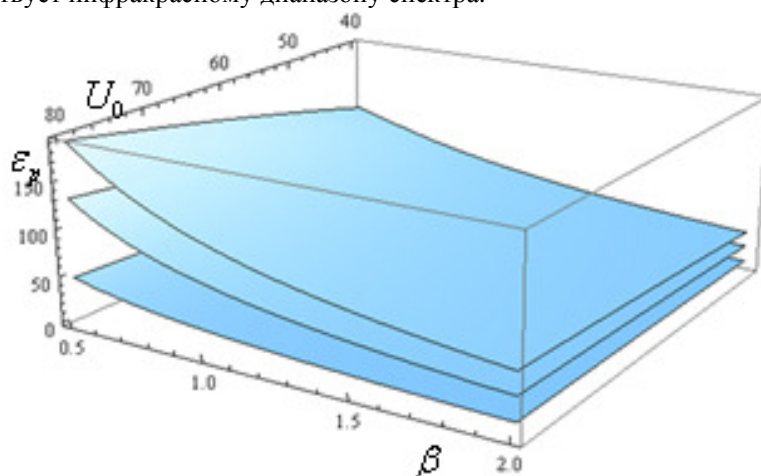


Рис. 2. Трехмерная зависимость энергии электрона в сферической квантовой точке от глубины и полуширины модифицированного потенциала Пешля – Теллера.

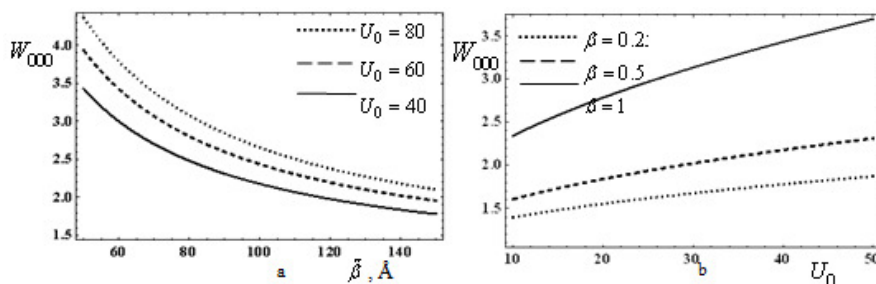


Рис. 3. Зависимость края поглощения от полуширины МППТ при фиксированных значениях глубины ямы (а) и глубины ямы при фиксированных значениях полуширины МППТ (б).

На рис. 3, а, б приведены зависимости порогов поглощения, соответственно, от полуширины и глубины потенциальной ямы при режиме сильного размерного квантования. Как видно из рисунков, с уменьшением полуширины потенциальной ямы край поглощения увеличивается. Это является следствием того, что с уменьшением параметра β ширина эффективной запрещенной зоны увеличивается. На рис. 4 приведена схематическая иллюстрация, наглядно показывающая увеличение ширины эффективной запрещенной зоны при изменении потенциальной ямы, когда полуширина β уменьшается. Обратная картина наблюдается при уменьшении глубины потенциальной ямы. В этом случае ширина эффективной запрещенной зоны уменьшается. Резюмируя вышесказанное, отметим, что уменьшение полуширины потенциальной ямы приводит к “синему” смещению пороговых частот, а уменьшение глубины потенциальной ямы – “красному” смещению пороговых частот.

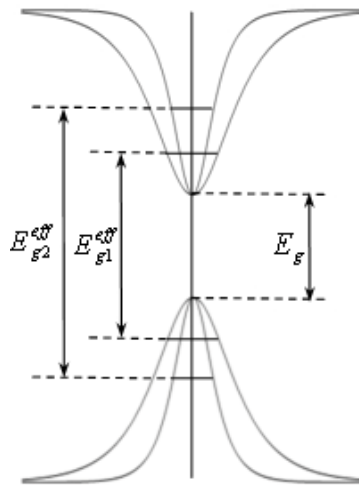


Рис. 4. Схематическая иллюстрация изменения ширины эффективной запрещенной зоны.

¹Российско-Армянский (Славянский) университет

²Государственный инженерный университет Армении

Д. Б. Айрапетян, О. Х. Тевосян

Электронные состояния и прямое межзонное поглощение света в сферической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля – Теллера

Исследованы электронные состояния и прямое межзонное поглощение света в сферической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера. Получены аналитические выражения для энергии и волновой функции частицы. Выявлена зависимость края поглощения от полуширины и глубины потенциальной ямы в режиме сильного размерного квантования. Показано, что уменьшение полуширины потенциальной ямы приводит к “синему” смещению порого-

вых частот, а уменьшение глубины потенциальной ямы – “красному” смещению пороговых частот. Получены правила отборов для квантовых переходов.

Դ. Բ. Հայրապետյան, Հ. Խ. Թևոսյան

Էլեկտրոնային վիճակները և լույսի ուղիղ միջգոտիական կլանումը Պեշել-Թելլերի ձևափոխված պոտենցիալով գնդային քվանտային կետում

Հետազոտվել են Պեշել-Թելլերի ձևափոխված պոտենցիալով գնդային քվանտային կետում էլեկտրոնային վիճակները և լույսի ուղիղ միջգոտիական կլանումը: Ստացվել են վերլուծական արտահայտություններ մասնիկի էներգիական սպեկտրի և ալիքային ֆունկցիայի համար: Չափային քվանտացման ուժեղ ռեժիմի դեպքում դուրս է բերվել կլանման շեմային հաճախությունների կախվածությունը փոսի խորությունից և կիսալայնությունից: Ցույց է տրվել, որ փոսի կիսալայնության փոքրացումը բերում է սահմանային հաճախությունների «կապույտ» շեղմանը, իսկ խորության փոքրացումը՝ սահմանային հաճախությունների «կարմիր» շեղմանը: Ստացվել են քվանտային անցումների համար ջոկման կանոնները:

D. B. Hayrapetyan, H. Kh. Tevosyan

Electronic States and Direct Interband Light Absorption in a Spherical Quantum Dot with Modified Poschel – Teller Potential

Electronic states and direct interband light absorption in the spherical quantum dot with modified Pöschel-Teller potential have been investigated. Analytical expressions for the energy and wave function of particle have been obtained. Dependence of the absorption edge on the half-width and dept of the potential well in the regime of strong sized quantization have been revealed. It has been demonstrated that the reduction of the half-width potential well leads to the “blue” shift of threshold frequencies, and the reduction of the depth of potential well leads to the “red” shift of threshold frequency. Selection rules for quantum transitions have been obtained.

Литература

1. *Harrison P.* Quantum wells, wires and dots. Theoretical and computational physics. John Wiley & Sons ltd, NY, 2005.
2. *Ղազարյան Է. Մ., Պետրոսյան Ս. Գ.,* Կիսահաղորդչային նանոէլեկտրոնիկայի ֆիզիկական հիմունքները, ՌՀՀ հրատարակչություն, Երևան, 2005:
3. *Willardson R. K.* - Ac. Press. 1999. V. 60.
4. *Այրապետյան Դ. Բ.* – Изв. НАН Армении. Физика. 2007. Т. 42. № 6. С. 442-449.
5. *Այրապետյան Դ. Բ., Двоян К. Г., Казарян Э.М., Чанчапанян А.А.* - ДНАН РА. 2008. Т. 108. N 4. P. 320-331.
6. *Atoyan M.S., Kazaryan E.M., Sarkisyan H.A.* - Physica E. 2004. V. 22, Issue 4. P. 860-866.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М. Наука, 1989.
8. *Абрамовица М., Стигана И.* Справочник по специальным функциям. М. Наука. 1979.
9. *Ансельм И. А.* Введение в теорию полупроводников М. Наука, 1978.

BIOPHYSICS

УДК 577.3

L. Y. Hakobyan

Effects of Ferrous Ions on the *Rhodobacter sphaeroides* Growth Properties and Redox Activity

(Submitted by corresponding member of NAS RA A. H. Trchounian 9/VII 2012)

Keywords: *Rhodobacter sphaeroides*, bacterial growth, redox potential, Fe^{2+} , Fe^{3+}

It is well known that growth and hydrogen (H_2) production rate by photosynthetic bacteria vary depending on the microbial culture type, character of substrates utilized and the other factors, namely anaerobic conditions and temperature [1, 2], pH [2], light [1, 2], carbon and nitrogen sources [1-3], and metal ions [2, 4].

Various metals ions such as iron (Fe), magnesium (Mg), molybdenum (Mo), calcium (Ca) are necessary for growth and metabolism of most microorganisms. Firstly, Fe, Mg, Ca, and Mo ions were used as *Rhodobacter sphaeroides* and the other purple bacteria growth medium components [2, 4, 5]. Now, Fe, Mo and nickel (Ni) ions are known as the components of several enzymes involved in H_2 production, such as hydrogenase and nitrogenase [5-10]. Mg ions are one of the most abundant elements within microorganisms. Various photosynthetic pigments such as bacteriochlorophyll (Bchl) contain Mg^{2+} [5]. In addition, these are also various enzymes activators [5].

The effects of different metal ions on H_2 production during dark-fermentation have been studied by different authors [2, 11-13], the effects of these ions on photo-fermentative H_2 production are less examined [5, 9, 10]. In all cases, mechanisms of these effects are not clear, one of the possible mechanisms can be connected with the influence of the metal ions on photosynthetic system formation processes.

The purpose of the present work is to study growth specificity of *R. sphaeroides* MDC6521 in the presence of different concentrations of Fe^{2+} and Fe^{3+} . Growth properties such as specific growth rate as well as absorption spectra, medium pH and redox potential (ORP) during H_2 production were investigated.

Materials and methods. Bacteria and preparation. The purple non-sulfur bacterium *R. sphaeroides* MDC6521 (Microbial Depository Center, Armenia, WDCM803) used in this study was isolated from Arzni mineral springs in Armenia [4, 14]. *R. sphaeroides* was grown in anaerobic conditions in Ormerod medium at 30 ± 2 °C under illumination of approximately 1500 lux [3, 14]. Succinate (3.54 g L^{-1}) and yeast extract (2 g L^{-1}) was used as sole carbon and nitrogen sources [14]. It should be noted that the springs are related to the weak-acid (pH 6.5-7.5) carbonaceous waters containing Mg, Ca, and Fe among a wide range of chemical elements and various microelements. The concentrations of $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ and FeCl_3 in the growth medium ranged from 40 to 120 μM .

pH and ORP measurement. The medium initial pH was adjusted to 7.0 by means of 0.1 M HCl or NaOH by a pH-potentiometer (HANNA Instruments, Portugal) with selective pH electrode (HJ1131B) [3, 4, 14]. ORP of the medium was measured by platinum electrode (EPB-1, Electrometer Equipment State Enterprise, Gomel, Belarus; PT42BNC, Hanna Instruments, Portugal) as described elsewhere [3, 14].

Determination of bacterial growth. Bacterial growth was monitored by a Spectro UV-Vis Auto spectrophotometer (Labomed, USA) by changes in absorbance of cell suspension at 660 nm [14]. Specific growth rate (h^{-1}) was determined as described [4, 14]. The absorption spectra of *R. sphaeroides* suspension were recorded at the wavelength region of 400 to 1000 nm on a programmable Spectro UV-Vis Auto spectrophotometer (Labomed, USA) [4, 14]. For obtaining comparable data the original spectra were subtracted of the scattering and normalized to the same cell concentration.

Reagents used; data processing. Yeast extract (Carl Roths GmbH, Germany), succinic acid (Unichem, China), and the other reagents used were of analytical grade; used acid was neutralized by NaOH. The average data are represented from three independent experiments; the standard errors were calculated as described [3, 14] and did not exceed 5% if not indicated.

Results and discussion. The growth properties were monitored during phototrophic growth of *R. sphaeroides* in Fe^{2+} and Fe^{3+} containing medium. The concentration of Fe^{2+} and Fe^{3+} added in growth medium ranged from 0 to 120 μM . All concentrations of used ions supported the *R. sphaeroides* phototrophic growth. When Fe^{2+} and Fe^{3+} ions added in the culture medium cells final yield was higher than the control (no additions) (Fig. 1). This indicated that used ions could promote the growth of purple bacteria. In all cases, the optical density (OD) of the cultures reached a maximum value at 72 h, after which OD decreased.

In the presence of Fe^{2+} (40–120 μM) specific growth rate was larger than that of control (Fig. 2). The highest growth rate was obtained for bacterial cells with 80 μM Fe^{2+} (see Fig. 2), indicating that Fe^{2+} could promote the growth of these bacteria. The value of specific growth rate with Fe^{3+} was almost the same as the control in all concentrations (see Fig. 2).

Phototrophic growth of *R. sphaeroides* is known to result by synthesis of the photosynthetic apparatus, which consists of two light-harvesting (LH) complexes (B800-850 and B875) surrounding a photochemical reaction center [1,4].

The LH complexes consist of polypeptides and pigments combination, such as carotenoids and Bchl *a* [1]. The absorption spectra of *R. sphaeroides* intact cells grown with Fe^{2+} and Fe^{3+} were investigated in order to reveal light harvesting pigments synthesis. As shown in Fig. 3, in all absorption spectra were observed the various peaks in 400-1000 nm wavelength region, which are typical for purple non-sulfur bacteria and are indicators for their LH components [4]. These peaks could be assigned to carotenoids (450, 478 and 510 nm) and Bchl *a* (590, 800, 850 and 875 nm), respectively. *R. sphaeroides* pigments have been found to be sensitive to the growth medium content [4,14]. As shown in Fig. 3, the various concentration of Fe^{2+} was not affected on the light harvesting pigments synthesis, such as carotenoids. However, decrease in the level of B800-850 complexes was observed with increasing Fe^{2+} ion concentration.

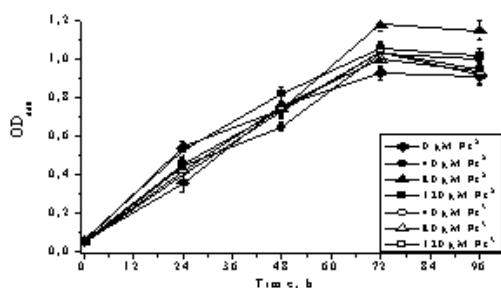


Fig. 1. Anaerobic growth of *R. sphaeroides* MDC6521 at illumination at succinate containing medium at Fe^{2+} and Fe^{3+} various concentrations. Growth was monitored by absorption determination (see Materials and methods).

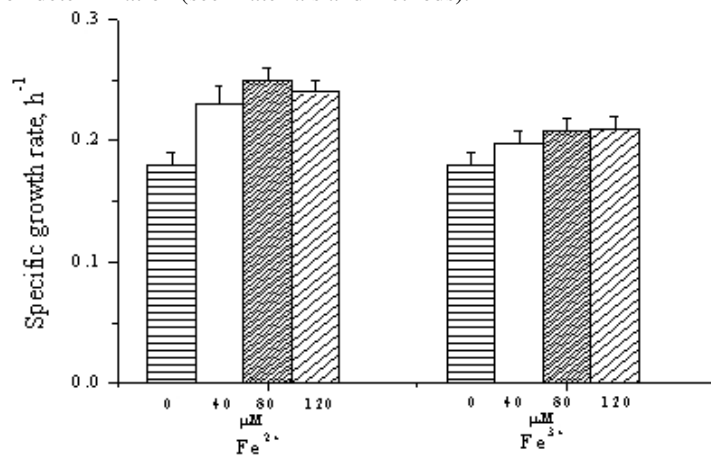


Fig. 2. The effect of Fe^{2+} and Fe^{3+} various concentrations on *R. sphaeroides* MDC6521 specific growth rate.

Fig. 4 shows the effects of Fe^{2+} and Fe^{3+} various concentrations on medium pH variation during bacterial anaerobic growth. The results obtained showed that, the final pH in the presence of all ions was higher than the initial pH,

which is important factor for the bacterial growth [3,4,14]. Increase of medium pH were shown in our previous papers [3,14], but growth time dependence change of pH and its variation for different metal ions were not reported. Various organic substrates stimulate growth of bacterial culture with alkalization of the medium [3]. As shown in Fig. 4, during the growth in the presence of used metal ions up to 72 h medium pH increased from 7.0 (initial pH) to 9.0–9.5. This result was connected with the uptake of organic acids and extrusion of OH^- ions or with the formation of various products such as polyhydroxybutyrate [4]. Then, pH followed to ~ 9.0 , which was probably connected with formation of fermentation end-products, which decay with H_2 production.

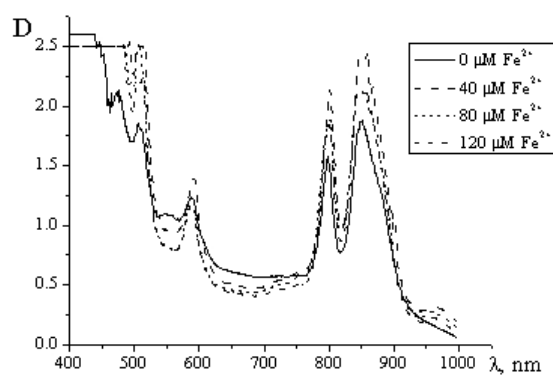


Fig. 3. Dependence of the absorption spectra of *R. sphaeroides* MDC6521 suspension on Fe^{2+} various concentrations. The absorption spectra were recorded as described in Materials and methods. D was optical density.

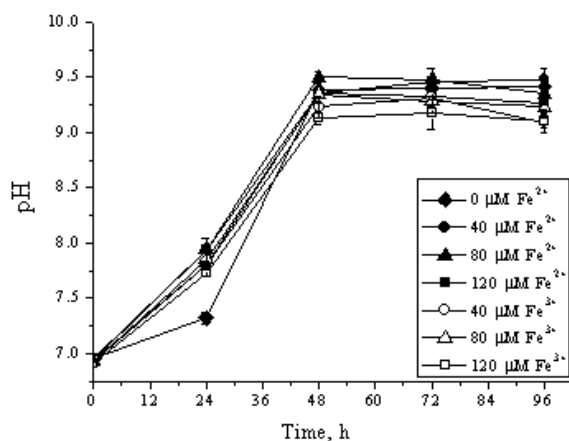


Fig. 4. The change of pH of *R. sphaeroides* MDC6521 during the anaerobic growth at illumination in succinate containing medium at Fe^{2+} and Fe^{3+} various concentrations. The pH was measured at regular intervals by using a pH-potentiometer (see Materials and methods).

The ORP can be considered as the key factor determining bacterial anaerobic growth, which is connected with falling of ORP from positive to negative values [4,14]. Decreasing ORP indicates to enhancement of reduction processes related to formation of fermentation end-products, production of amino acids and synthesis of proteins and other compounds which apparently is typical for the metabolic processes during the cell anaerobic growth [4,14].

Various concentrations of Fe^{2+} ions affected on ORP of *R. sphaeroides* during the anaerobic growth upon illumination (Fig. 5). Actually, ORP of *R. sphaeroides*, measured by a Pt electrode, gradually decreased during the anaerobic growth with Fe^{2+} ions (0-96 h). This decrease was more intensive in the presence of $80\ \mu\text{M}\ \text{Fe}^{2+}$: ORP decreased to $-720 \pm 20\ \text{mV}$ (see Fig. 5). Such decrease might indicate enhanced H_2 production [3,4,14]. In contrast in the presence of Fe^{3+} ORP of medium was not changed much, and its variation was similar to the control (no additions); and H_2 production was not observed (Fig. 5). It is suggested that Fe^{2+} can increase nitrogenase or hydrogenase expression in suitable concentration. Note, ORP was not changed much, and H_2 production was not observed in the absence of Fe^{2+} (see Fig. 5).

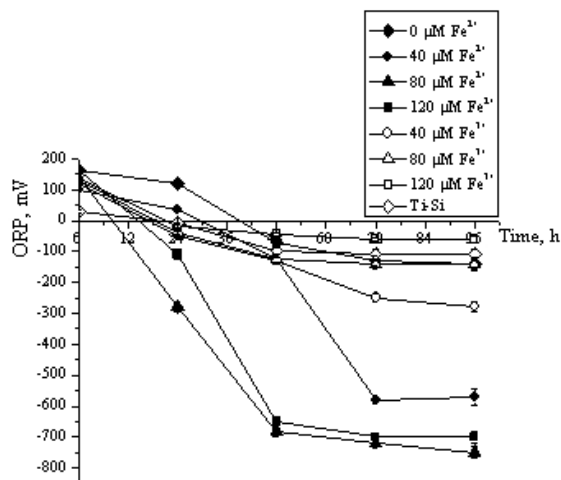


Fig. 5. The change of ORP of *R. sphaeroides* MDC6521 during the anaerobic growth at illumination in succinate containing medium at Fe^{2+} and Fe^{3+} various concentrations. ORP of bacterial growth medium was measured at regular intervals using a Pt and Ti-Si electrodes (see Materials and methods).

Different ways to enhance H_2 production by photosynthetic bacteria are including not only choosing of effective substrates, but also exploring novel pathways in hydrogen metabolism and regulation of electrons transfer within the cell membrane and activity of membrane-associated enzymes [4,14]. This might delight novel ways in regulating H_2 production by different bacteria.

Conclusions. The Fe^{2+} ions affected the growth of *R. sphaeroides* MDC6521, and effects had a concentration-dependent manner. The highest

growth specific rate was obtained with 80 μM Fe^{2+} ions. At the same time Fe^{3+} ions was not affected on the *R. sphaeroides* growth properties. The various concentration of Fe^{2+} was not affected on the photosynthetic apparatus structural components synthesis, such as light harvesting pigments. The obtained results show that H_2 production was detected in all concentrations of Fe^{2+} at 48 h.

Acknowledgments. Cordial thanks to Prof. A. Trchounian and Dr. L. Gabrielyan for many valuable comments and advices. This work was supported by the research grant from the Armenian National Science and Education Fund (ANSEF) based in New York, USA to L. Gabrielyan (NS-Biotechnology-2704).

Yerevan State University

L.Y. Hakobyan

Effects of Ferrous Ions on the *Rhodobacter sphaeroides* Growth Properties and Redox Activity

The Fe^{2+} and Fe^{3+} ions effects on growth properties and external oxidation-reduction potential (ORP) variation during bacterial growth under anaerobic conditions upon illumination were examined of *R. sphaeroides* strain MDC6521 isolated from mineral springs in Armenia were established. These effects had a concentration-dependent manner. The highest growth specific rate was obtained with 80 μM Fe^{2+} ions. In the presence of different concentrations of Fe^{2+} ions ORP decreased up to negative values (-720 ± 20 mV) indicating H_2 production. At the same time the various concentration of Fe^{3+} was not affected on the *R. sphaeroides* growth properties and photosynthetic apparatus structural components synthesis, such as light harvesting pigments.

Լ. Յ. Հակոբյան

Երկաթի իոնների ազդեցությունը *Rhodobacter sphaeroides* բակտերիաների աճման և օքսիդավերականգնողական ակտիվության վրա

Ցույց է տրվել Հայաստանի հանքային աղբյուրներից անջատված *R. sphaeroides* բակտերիաների MDC6521 շտամի աճման և միջավայրի օքսիդավերականգնողական պոտենցիալի (ՕՎՊ) վրա Fe^{2+} և Fe^{3+} իոնների ազդեցությունը, որը դրսևորել է կոնցենտրացիոն կախվածություն: Առավելագույն աճման տեսակարար արագություն է նկատվել 80 մկՄ Fe^{2+} իոնների առկայությամբ: Fe^{2+} իոնների տարբեր կոնցենտրացիաներում դիտվել է միջավայրի ՕՎՊ-ի անկում մինչև բացասական արժեքներ (-720 ± 20 մՎ), ինչը վկայում է H_2 -ի արտադրության մասին: Միևնույն ժամանակ Fe^{3+} իոնները չեն ազդել ո՛չ բակտերիաների աճման, ո՛չ էլ դրանց ֆոտոսինթեզային համակարգի կառուցվածքային բաղադրամասերի՝ լուսահավաք պիգմենտների սինթեզի վրա:

Л. Ю. Акопян

**Влияние ионов железа на характеристики роста и редокс
активность *Rhodobacter sphaeroides***

Показано влияние ионов Fe^{2+} и Fe^{3+} на параметры роста *R. sphaeroides* MDC6521 и окислительно-восстановительный потенциал (ОВП) среды во время роста бактерий, изолированных из минеральных источников Армении. Воздействие имело концентрационную зависимость. Наибольшая удельная скорость роста бактерий наблюдалась в присутствии 80 мкМ Fe^{2+} . В присутствии разных концентраций Fe^{2+} наблюдалось падение ОВП до отрицательных значений (-720 ± 20 мВ), что свидетельствует о производстве H_2 . В то же время ионы Fe^{3+} не влияли на рост и синтез структурных компонентов фотосинтетического аппарата, таких как светособирающие пигменты.

References

1. Gabrielyan L., Trchounian A. In: Trchounian A., editor. Bacterial Membranes. Kerala, India: Research Signpost .2009.
2. Wang J., Wan W. - Int. J. Hydrogen Energy. 2009. V. 34. P. 799–811.
3. Gabrielyan L., Torgomyan H., Trchounian A. - Int. J. Hydrogen Energy. 2010. V. 35. P. 12201–12207.
4. Hakobyan L., Gabrielyan L., Trchounian A. - Int. J. Hydrogen Energy. 2012. V. 37(9). P. 7482–7286.
5. Liu B., Ren N., Ding J. et al. - Int. J. Hydrogen Energy. 2009. V. 34. P. 721–726.
6. Carrieri D., Ananyev G., Garcia Costas A. et al. - Int. J. Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 2014–2022.
7. Mulrooney S., Hausinger R. - FEMS Microbiol. Lett. 2003. V. 27. P. 239–261.
8. Wang J., Wan W. - Bioresour. Technol. 2008. V. 99. P. 8864–8868.
9. Eroglu E., Gündüz U., Yücel M., Eroglu I. - Int. J. Hydrogen Energy. 2011. V. 36. P. 5895–5903.
10. Zhu H., Fang H., Zhang T., Beaudette L. - Int. J. Hydrogen Energy. 2007. V. 32. P. 4112–4118.
11. Karadag D., Puhakka J. - Int. J. Hydrogen Energy. 2010. V. 35. P. 8554–8560.
12. Li C., Fang H. - Chemosphere. 2007. V. 67. P. 668–673.
13. Lin C., Shei S. - Int. J. Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 587–593.
14. Hakobyan L., Gabrielyan L., Trchounian A. - Int. J. Hydrogen Energy. 2012. V. 37(8). P. 6519–6526.

БИОХИМИЯ

УДК 615.218 + 615.856

А. Ф. Мирзоян¹, З. А. Карамян², Ф. В. Мирзоян³, П. А. Казарян⁴

Механизм действия препарата из класса полиоксиметаллатов на распределение ядер клеток по классам плоидности

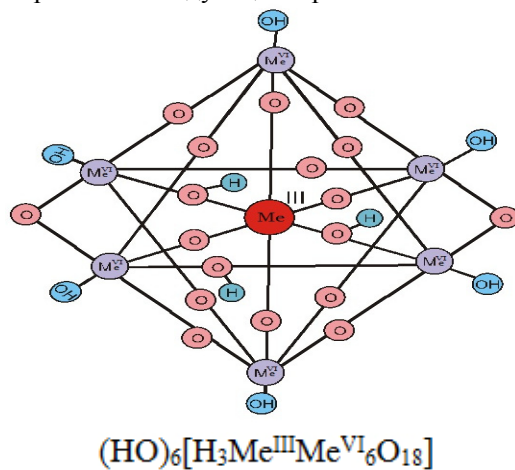
(Представлено чл.-кор. НАН РА Ж. И. Акопяном 23/ IV 2012)

Ключевые слова: полиоксиметаллат, трехвалентный металл, шестивалентный металл, ДНК, плоидность

На современном этапе развития медицины в ряду актуальных проблем одним из важных направлений является металлотерапия, связанная с открытиями в области неорганической химии. Доказано, что полиоксиметаллаты с гидроксо-функциональными группами, содержащие W^{VI} , Mo^{VI} , V^V и другие элементы, обладают противовирусными, антибактериальными и противоопухолевыми свойствами [1-6]. Важно отметить, что в условиях *in vitro* и *in vivo* экспериментально доказана определенная активность полиоксиметаллатов особенно по отношению к РНК содержащим вирусам. В настоящее время по этим направлениям имеется большое число публикаций зарубежных исследователей разных стран (Франция, Япония, США, Бельгия и др.), и это число все время возрастает. Эти публикации нами обобщены в [7]. Трудности, возникающие при использовании полиоксиметаллатов, связаны с не до конца выявленными строениями самих полиоксиметаллатов, что отмечают многие исследователи [8-10]. Полиоксиметаллаты в основном использованы в виде малорастворимых в воде конгломератов переменного состава, в которых число функциональных гидроксогрупп безусловно снижено за счет их участия в реакциях поликонденсации при образовании конгломератных форм. Вследствие поликонденсации и образования конгломератов молярные массы последних резко возрастают, что меняет свойства полиоксиметаллатов, например, они становятся малорастворимыми в воде. Все это, естественно, меняет и их биологическую активность. Возможно, и по этой причине

рекомендованные дозы примененных полиоксиметаллатов достаточно высоки – до 300 мг/кг [11,12], а иногда даже 500 мг/кг [9,13].

Исследования химии полиоксиметаллатов начиная с 1980 г. проводятся и в Армении (ИОНХ НАН РА, Ереван). В отличие от зарубежных школ, синтез и свойства различных полиоксиметаллатов изучались при их весьма малых концентрациях в водных растворах ($n10^{-5}$ - $n10^{-7}$ моль/л), т.е. в условиях, когда они находятся в мономерном состоянии. Поскольку непосредственно такое изучение полиоксиметаллатов невозможно из-за низкого их светопоглощения, в качестве ключа впервые использованы избирательные реакции полиоксиметаллатов с основными красителями. Светопоглощение последних высоко, а окраска образующихся с ними комплексных ассоциатов с полиоксиметаллатами мультиплетно возрастает с ростом числа связанных в ассоциатах катионов красителей. Этот подход позволил получить беспрецедентные данные о составе комплексных ассоциатов полиоксиметаллатов и предложить новый подход к химизму образования полиоксиметаллатов в разбавленных водных растворах – предвидеть их «ядерное» строение [14]. Препарат под условным названием «вомифал» по существу является водным раствором ядра β -полиоксиметаллатов трехвалентного элемента в октоэдрическом окружении шестивалентного металла. В рамках наших представлений [14] этому полиоксиметаллату следует приписать следующее строение:



Этот состав полиоксиметаллата полностью подтверждается результатами изучения условий его получения, химических свойств и элементного состава методами физико-химического и препаративного анализа.

Полиоксиметаллат указанного состава является новой уникальной формой, которая как по химическому составу, так и по форме ранее не описана. В отличие от использованных ранее твердых полиоксиметаллатов, являющихся по существу неорганическими полимерами, этот полиоксиметаллат синтезируется непосредственно в водном растворе в виде новой молекулярной («ядерной») формы в мономерном состоянии, которая в растворе весьма устойчива длительное время (вот уже более двух

лет), не подвергаясь поликонденсации и не образуя малорастворимых в воде конгломератных форм. Все это позволяет предполагать, что этой форме присуща более низкая молекулярная масса и следовательно ее подвижность в водных растворах более высокая. Мы считаем, что указанные особенности, в сочетании с наличием большого числа функциональных гидроксогрупп, должны способствовать повышению у вомифала присущей полиоксиметаллатам биологической активности. Установлено, что препарат обладает рядом преимуществ в отношении фармакологических характеристик. Так, хранение вомифала в течение 18 месяцев при температуре 4-8°C не влияет на его противовирусную активность. Пастеризация вомифала при температуре 70-80°C в течение 30 мин, а также автоклавирование при 1.1 дополнительной атмосфере и 121°C в течение 45 мин не снижают его противовирусную активность.

Целью работы было выявление влияния вомифала на ряд цитологических и цитоморфометрических показателей клеток в условиях *in vitro*.

Материалы и методы исследований. *Клетки.* ВНК-21—культура клеток эмбриональной почки хомяка. Клетки культивировались в среде Eagle MEM, с добавлением 10% бычьей сыворотки (BS). Посевная доза 2×10^5 клеток/мл. Монослой получали через 24 ч после начала пассирования. Все исследования начинались на 24-часовом монослое клеток.

Цитологические и цитометрические исследования. Исследуемые клетки выращивались на стеклах, помещенных в 6-луночные планшеты в условиях 5% насыщения CO₂ и 100% влажности. Клетки извлекались через 24, 48 и 72 ч. Исходной точкой являлся 24-часовой монослой. Все последующие измерения проводились на парных стеклах (24+24 ч Контроль; 24 ч монослой+24 ч вомифал + 48 ч контроль; 24 ч + 48 ч вомифал).

Цитофотометрия ДНК. Для цитохимических и цитологических исследований весь материал фиксировали в 96⁰ этиловом спирте в течение 30 мин, а затем одновременно окрашивали основным фуксином по Фельгену. Гидролиз ДНК проводили в 5N HCl в течение 1 ч при $t = 22^0\text{C}$ (в термостате) и красили реактивом Шиффа по Стоуэлу [15].

Количественное определение комплекса ДНК-фуксин производили на сканирующем микроскопе-фотометре SMP-05 (Opton), оснащенном компьютером и видеокамерой, телевизионным методом на максимуме поглощения комплекса ДНК–фуксин (длина волны 575 нм). Измерения содержания ДНК в каждом случае производили в 100 ядрах. Вычисляли среднее содержание ДНК (в условно сравнимых единицах), определяли площадь и периметр ядер и ядрышек и подсчитывали среднее число ядрышек в ядрах. Затем на основании полученного материала по содержанию в ядрах ДНК строились гистограммы их распределения по плоидности. Для построения гистограмм определяли диплоидный эталон ДНК в ядрах лимфоцитов периферической крови человека. Каждое ядрышко в ядре клетки оконтуривалось и вычислялось вне данных ядра. Ядрышковая ДНК определялась в фибриллярном центре и соединенном с ним около- и периядрышковом хроматине.

При переводе данных условных единиц в единицы плоидности нами использовались в качестве диплоидного и тетраплоидного стандарта ядра гепатоцитов мыши (рис 1).

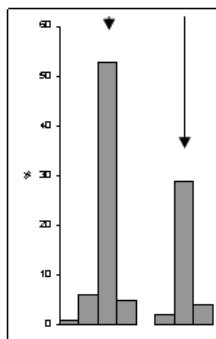


Рис 1. Распределение содержания ДНК в ядрах гепатоцитов здоровых мышей. По горизонтали – плоидность ядер; по вертикали – число ядер. Классовый промежуток равен 10% от единицы плоидности. Стрелками указаны пиковые значения, эквивалентные диплоидному и тетраплоидному стандарту

Определение интерферогенного действия вомифала. Для определения возможной индукции β -интерферона под действием препарата использовались культуры эмбриональной почки хомяка ВНК-21.

Надосадочная жидкость культивируемых клеток собиралась в 2 срока – через 24 и 48 ч после начала инкубации. В опытные лунки вносился препарат в указанной дозе, а в контрольные – чистая среда Eagle MEM. Определение в надосадочной жидкости интерферона- β (ИФН- β) проводилось методом иммуноферментного анализа (ИФА).

Результаты и обсуждение. Данные цитометрического анализа клеток ВНК-21 в контроле и под воздействием вомифала приведены в табл. 1.

Таблица 1

Цитометрия ядер клеток ВНК-21 в контроле и под воздействием вомифала в процессе культивирования

	Ядро	
	площадь	периметр
Сроки	24+24 ч	
ВНК	59.2 $\pm$ 1.7	19.1 $\pm$ 0.4
ВНК+V	54.6 $\pm$ 2.8	16.5 $\pm$ 0.5
Сроки	24+48ч	
ВНК	54.1 $\pm$ 2.4	16.7 $\pm$ 0.4
ВНК+V	50.6 $\pm$ 2.4	16.8 $\pm$ 0.4
Сроки	24+72ч	
ВНК	55.2 $\pm$ 2.8	17.2 $\pm$ 0.5
ВНК+V	48.2 $\pm$ 2.3*	15.9 $\pm$ 0.4

*p<0.1

Как следует из таблицы, существенных изменений цитометрических показателей клеток под воздействием вомифала не выявлено за исключением тенденции к снижению площади ядер при 72-часовой инкубации. Надо отметить, что все изучаемые показатели как в опытных, так и контрольных группах имеют тенденцию к снижению.

В табл. 2 представлены данные цитометрии ядер клеток ВНК-21 в контроле и при воздействии вомифала. Данные цитометрии приведены в условных единицах (у.е.).

Таблица 2

Содержание ДНК (у.е.) в ядрах и околядрышковом хроматине клеток перевивных линий ВНК-21 в контроле и под воздействием вомифала в процессе культивирования

	Ядро	Ядрышко
Сроки	24+24 ч	
ВНК	80.1±4.0	3.2±0.2
ВНК+V	77.5±4.5	4.6±0.6
Сроки	24+48 ч	
ВНК	73.4±3.7	5.7±1.9
ВНК+V	66.5±4.1	4.9±0.4
Сроки	24+72 ч	
ВНК	67.5±2.9	3.3±0.2
ВНК+V	67.9±2.3	3.7±0.3

Из таблицы следует, что с увеличением срока культивирования индекс содержания ДНК в ядрах клеток имеет тенденцию к снижению. При этом существенных отличий контрольных показателей от показателей опытных групп нами не выявлено.

Как видно из рис. 2, с увеличением инкубационного периода в контрольной популяции клеток происходит незначительное смещение гистограммы влево, т.е. происходит недостоверное уменьшение накопления ДНК в ядрах клеток. Данный процесс сопровождается снижением анеуплоидии с 58 до 32%. Нами зафиксировано снижение анеуплоидии под воздействием вомифала до 56% при 24-часовой инкубации и до 16% при 72-часовой инкубации. С учетом того, что анеуплоидия является одним из наиболее важных показателей злокачественного роста [16], можно сделать предварительный вывод об антинеопластической активности вомифала. Важным фактором, определяющим механизм изменений в классах пloidности ДНК под воздействием вомифала, является исчезновение гиподиплоидной и гипертетраплоидной популяций. Подобное действие характерно для некоторых индукторов биологически активных веществ, и в частности индукторов интерферона.

С целью изучения возможного интерферогенного действия препарата нами было проведено исследование интерферогенной способности вомифала в отношении β-ИФН. Выявлено, что препарат является индуктором β-ИФН и, вызывая синтез последнего в дозе 21.7±5.1 IU/мл, за 48 ч

обеспечивает достоверный рост уровня индуцированного эмбриональными клетками β -ИФН (контрольные показатели не отличались от фоновых значений – 0.2 ± 0.02 IU/мл). В более ранние сроки в культуре клеток синтез β -ИФН не отмечался.

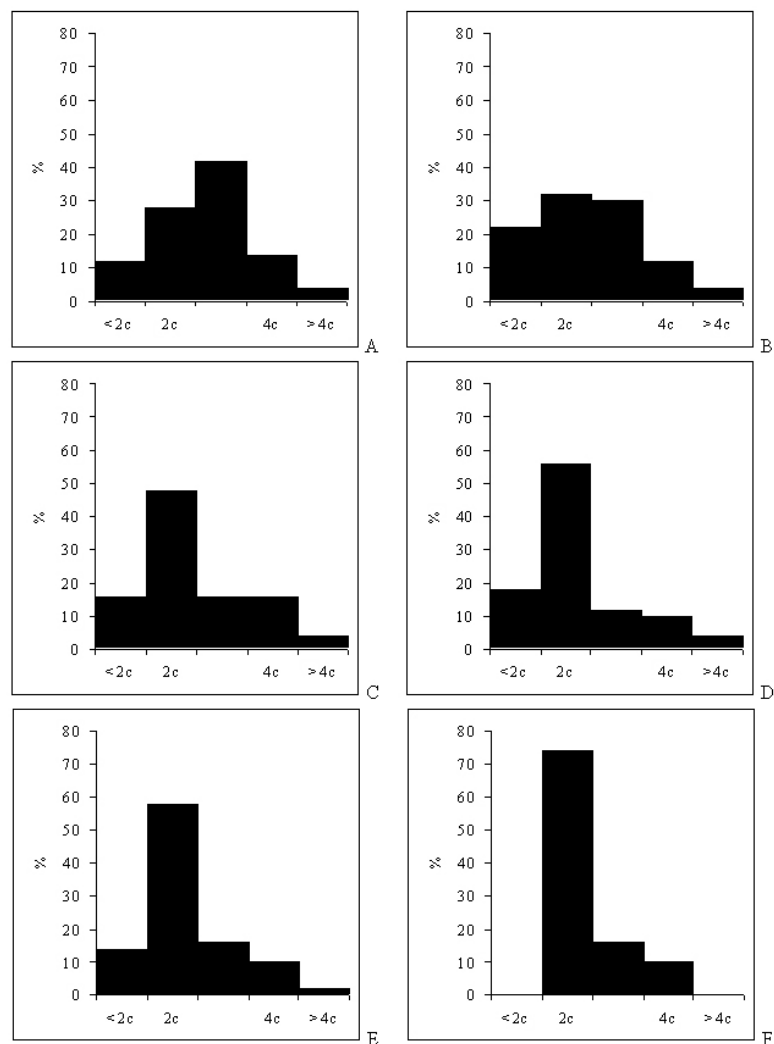


Рис 2. Распределение ядер клеток ВНК-21 по классам пloidности в норме и под воздействием вомифала: А– контроль 48 ч (24+24); В– воздействие вомифала (24 ч); С– контроль 72 ч (24+48); D– воздействие вомифала (48 ч); Е–контроль 96 ч (24+72); F– воздействие вомифала (72 ч). На оси X – классы ДНК по критерию пloidности (с), на оси Y – процент содержания клеток в популяции.

Итак, анализ воздействия вомифала на распределение ядер клеток ВНК-21 по классам плоидности ДНК показал, что препарат обладает способностью к избирательной цитотоксичности, в результате чего меняется состав клеточной популяции – из нее практически полностью исчезают гиподиплоидные и гипертетраплоидные клетки. Подобное действие связано с интерферогенной способностью препарата

¹Медицинский центр «Святой Григорий Просветитель», aibaemer@arminco.com

²Институт молекулярной биологии НАН РА

³Институт общей и неорганической химии им. М.Г. Манвеляна НАН РА, ionx@sci.am

⁴Гематологический центр им. проф. Р.О. Еоляна МЗ РА

А. Ф. Мирзоян, З. А. Карамян, Ф.В. Мирзоян, П. А. Казарян

Механизм действия препарата из класса полиоксиметаллатов на распределение ядер клеток по классам плоидности

Исследовано влияние препарата “вомифал” на распределение ядер клеток ВНК-21 по классам плоидности, выявлено уменьшение содержания клеток с полиплоидными ядрами и исчезновение клеток с гиподиплоидными ядрами после 72-часовой инкубации. Абсолютные показатели содержания ДНК в ядрах клеток при этом остаются без существенных изменений. Подобный эффект сходен с изменениями в клеточных культурах при воздействии интерферонов (ИФН). Выявлено достоверное возрастание количества β -ИФН под влиянием вомифала к 48 ч после начала инкубации. Следовательно, эффект в отношении изменения распределения ядер клеток ВНК-21 по классам плоидности непосредственно связан с интерферогенной активностью препарата.

**Ա. Ֆ. Միրզոյան, Ջ. Ա. Կարապետյան, Ֆ.Վ. Միրզոյան,
Պ.Ա. Դազարյան**

Պոլիօքսիմետալատներ դասին պատկանող պրեպարատի ազդեցության մեխանիզմը բջիջների միջուկների ըստ պլոիդության դասերի բաշխվածության վրա

Հետազոտվել է “Վոմիֆալ” պրեպարատի ազդեցությունը ՎՆԿ-21 բջիջների միջուկների վրա ըստ պլոիդության դասի բաշխվածության: Բացահայտվել են պոլիպլոիդային միջուկներով բջիջների պարունակության նվազում և հիպոդիպլոիդային միջուկներով բջիջների անհետացում 72-ժամյա ինկուբացիայից հետո: Բջիջների միջուկներում ԴՆԹ-ի պարունակության բացարձակ ցուցանիշներն այս դեպքում մնում են առանց էական փոփոխությունների: Այսպիսի էֆեկտը նման է բջիջային կուլտուրաներում ինտերֆերոնների (ԻՖՆ) ազդեցությամբ կատարվող փոփոխություններին: «Վոմիֆալ» ինտերֆերոգենային ակտիվության ուսումնասիրման ընթացքում բացահայտվել է պրեպարատի ազդեցության տակ β ԻՖՆ-ի քանակի հավաստի աճ ինկուբացիան սկզբից մոտ 48 ժամ հետո: Հետևաբար ՎՆԿ-21 բջիջների մոլեկուլների՝ ըստ պլոիդության դասերի, բաշխվածության փոփոխությանը վերա-

բերող էֆեկտը ուղղակիորեն կապված է պրեպարատի ինտերֆերոգենային ակտիվության հետ:

A. F. Mirzoyan, Z. A. Karalyan, F. V. Mirzoyan, P. A. Ghazaryan

The Mechanism of Action of the Drug from the Polyoxymetalat Class on the Distribution of Cell Nuclei for Ploid Classes

Effect of the studied medication on the distribution of the nuclei of BHK-21 cells and ploid classes showed decrease in cells with polyploid nuclei and the disappearance of cells with hypodiploid nuclei after 72 hours of incubation. The absolute rates of DNA content in nuclei of cells in this case remain essentially unchanged. Such an effect is similar to the changes in cell cultures when exposed to interferon (IFN). In the study of the interferonogenic activity of "Vomifal", a significant increase in the amount of β -IFN under the influence of the drug for 48 hours after the start of incubation has been detected. Hence the effect of changes in the distribution of the nuclei of BHK-21 cells by ploid class is directly related to drug's interferonogenic activity.

Литература

1. *Rhule J.T. et al.* - Chem. Rev. 1998. V. 98, P. 327-357.
2. *Hasenkopf B.* - Frontiers in Biosci. 2005. V. 10. P. 275-287.
3. *Pope M. T.* - Springer-Verlag, Berlin, 1983.
4. *Mioc U. B., Todorovic M. R., Davidovic M., Cplomban Ph., Holclaitner-Antunovic J.* - Solid State Ionics. 2005. V. 176. P. 3005-3017.
5. *Roncioni L., Sadler P. J.* - Coordination Chemistry Reviews [Online]. 2007. V. 251. P. 1633-1648.
6. *Jelkic-Stankov M.* - Journal of Trace Elements in Medicine and Biology. 2007. V. 21. P. 8-16.
7. *Միրզոյան Ա. Փ., Միրզոյան Փ. Բ., Կազարյան Պ. Ա.* – Кровь. Ереван. 2009. № 1(9). С. 78-85.
8. *Yamase T.* - J. Mater. Chem. 2005. V.15. P. 4773-4783.
9. *Hill G. L, Weeks M. S. , Schinazi R. F.* - J.Med. Chem. 1990. V. 33. P. 2767-2772.
10. *Ikeda S.* – Antiviral Chem. Chemother. 1993. V. 4. P. 253-262.
11. *Judd D. A., Nettles J. H., Nevins N.* -J. Am. Chem. Soc. 2001. V. 123(5). P. 886-897.
12. *Sarafianos S.G., Korts U.* - Biochem. J. 1996.V. 319. P. 619-626.
13. *Scinazi R., Hill G.* US Patent 009764. 2000.
14. *Mirzoyan F. V.* – In: International polyoxometalate symposium, Jacobs University, Bremen, Germany, 28 July – 1 Ougust, 2009.
15. *Lillie R. D.* Histopathologic technique and practical histochemistry. N. Y. McGraw-Hill. 1965.
16. *Aardema M. J., Albertini S., Arni P., Henderson L. M., Kirsch -Volders M, Mackay J. M, Sarraf A. M, Stringer D. A, Taalman R. D.* - Mutat Res. 1998. Feb. V. 410(1). P. 3-79.

БИОХИМИЯ

УДК 678.943+547.461.3+678.048

**О. М. Амирханян, С. А. Казарян, С. С. Овакимян,
академик К. Г. Карагезян**

**Влияние производных литиевых солей орнитина на
процесс липидной пероксидации мозга и печени
в опытах *in vitro***

(Представлено 11/V 2012)

Ключевые слова: *перекисное окисление липидов, свободнорадикаль-
ное окисление липидов, малоновый диальдегид, антиокислительная актив-
ность*

Нарушение баланса между интенсивностью действия прооксидантных факторов и мощностью антиоксидантной системы клетки, приводящее к чрезмерной активации перекисного окисления липидов (ПОЛ) – окислительному стрессу, является патогеническим фактором для целого ряда заболеваний [1-3]. Известно, что препараты лития (органические и неорганические) оказывают положительное действие как при депрессивных состояниях, так и психических расстройствах организма [4-9]. Среди лекарственных средств наибольшей эффективностью обладает литий оксидбутират, способный корректировать как энергетический и окислительный обмены, так и острое невротическое состояние организма [10-12]. Следовательно действующим началом препарата является не только ион лития, но и анион-оксидбутират, придающий ему качественно новые отличительные особенности.

Целью настоящей работы являлось изучение специфики антиоксидантного действия литиевых солей производных -L-орнитина на процесс свободнорадикального окисления липидов (СРО) в гомогенатах мозга и печени белых крыс в опытах *in vitro*. Рассмотрены эффекты литиевых солей -L-орнитина, N-δ-бензилоксикарбонил -L-орнитина и дибензилоксикарбонил -L-орнитина, впервые синтезированных в Институте тонкой органической химии НАН РА.

Материалы и методы исследований. Эксперименты проводились на 14 беспородных белых крысах-самцах массой 180 – 200 г, содержащихся на обычном пищевом рационе. Животных декапитировали под легким эфирным наркозом, изолированные головной мозг и печень промывали физраствором, очищали от кровеносных сосудов и гомогенизировали в трис-НСl буфере (рН 7.4). Количественное определение малонового диальдегида (МДА) как конечного продукта СРО липидов производилось спектрофотометрически [1,13]. Об антиокислительной активности (АОА) исследуемых соединений судили по их способности тормозить ПОЛ. Иницирование СРО липидов проводилось добавлением к 10%-ным гомогенатам мозга и печени раствора соли Мора, приготовленного на трис-НСl буфере (рН 7.4).

АОА препаратов определяли в неферментативной аскорбатзависимой системе процентным изменением количества МДА в опытных пробах по сравнению с контрольными из расчета на 1 мг предварительно определенного количества белка [14]. Статистическую обработку полученных результатов проводили с использованием критерия достоверности Фишера – Стьюдента.

Результаты и обсуждение. Исследуемые соединения использовались в концентрациях, равных 0.01 и 0.001M.

Согласно данным, представленным в табл. 1, в гомогенатах мозга литиевые соли производных -L-орнитина проявляют существенную АОА, подавляя процесс СРО липидов в пределах 34.9-42.5 % по отношению к контролю. Примечательна при этом несколько большая антиоксидантная активность производных, содержащих бензилоксикарбонильные группы.

Таблица 1

Влияние литиевых солей производных L-орнитина в концентрации 0.01M на содержание МДА (нМ/мг белка) в мозге белых крыс в опытах in vitro

Наименование соединения	Контроль (n=14)	Опыт (n=14)	% разницы от контроля
Литиевая соль-L-орнитина	6.88±0.25	4.48±0.20	- 34.9 p<0.002
Литиевая соль-N- δ- бензилоксикарбонил-L- орнитина	-/-	4.05±0.18	- 41.2 p<0.001
Литиевая соль-дибензило- ксикарбонил-L-орнитина	-/-	3.96±0.15	- 42.5 p<0.001

Аналогичная закономерность констатируется и в печеночной ткани, где под действием изучаемых соединений уровень МДА снижается почти в 2 раза по сравнению с контролем, указывая тем самым на их способность более эффективно ингибировать процесс СРО.

Таблица 2

Влияние литиевых солей производных L-орнитина в концентрации 0.01M на содержание МДА (нМ/мг белка) в печени белых крыс в опытах in vitro

Наименование соединения	Контроль (n=14)	Опыт (n=14)	% разницы от контроля
Литиевая соль-L-орнитина	5.56±0.20	2.92±0.14	- 47.5 p<0.001
Литиевая соль-N- δ-бензилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	2.78±0.12	- 501 p<0.001
Литиевая соль-дibenзилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	2.66±0.10	- 52.3 p<0.001

Установлено, что на стимулирующее действие ионов лития на отдельные стороны функциональной активности организма (развитие, эндокринные функции, активность ферментов в различных биологических системах) зависит от их конкретной концентрации, в связи с чем рассматривалась интенсивность течения процесса СРО липидов при использовании малых доз (0.001M) литиевых солей производных -L-орнитина.

Результаты исследований (табл. 3) указывают, что в гомогенатах мозга действие десятикратно пониженных концентраций литиевых солей производных -L-орнитина характеризуется относительно слабым подавлением ПОЛ, при закономерном снижении уровня МДА под действием всех трех представителей литиевых солей производных -L-орнитина, как и при использовании их больших доз (0.01M).

Таблица 3

Влияние литиевых солей производных L-орнитина в концентрации 0.001M на содержание МДА (нМ/мг белка) в мозге белых крыс в опытах in vitro

Наименование соединения	Контроль (n=14)	Опыт (n=14)	% разницы от контроля
Литиевая соль-L-орнитина	6.34±0.22	5.36±0.20	-15.5 p>0.1
Литиевая соль-N- δ-бензилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	5.28±0.18	-16.7 P=0.1
Литиевая соль-дibenзилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	5.24±0.18	-17.4 P<0.1

В печеночной ткани (табл. 4) в отличие от мозговой под действием испытуемых соединений имеет место более выраженное подавление процесса ПОЛ, особенно под влиянием производных -L-орнитина, имеющих в своих структурах оксibenзилкарбокисильные группы.

Таблица 4

Влияние литиевых солей производных L-орнитина в концентрации 0.001M на содержание МДА (нМ/мг белка) в печени белых крыс в опытах in vitro

Наименование соединения	Контроль (n=14)	Опыт (n=14)	% разницы от контроля
Литиевая соль-L-орнитина	5.32±0.20	4.19±0.18	-21.4 p=0.01
Литиевая соль-N- δ-бензилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	4.07±0.15	-23.6 p<0.01
Литиевая соль-дибензилоксикарбонил-L-орнитина	-//-	3.79±0.12	-28.9 p<0.001

Результаты наших собственных исследований позволяют заключить об АОА литиевых солей производных -L-орнитина в гомогенатах мозга и печени, при более активном их проявлении в печеночной ткани в концентрации 0.01M. Десятикратно сниженные концентрации (0.001M) изученных соединений проявляют свою АОА главным образом в печеночной ткани и особенно те, что являются носителями бензилоксикарбонильных групп, характеризующихся как в больших, так и в малых концентрациях подавляющим действием на процесс СРО липидов в гомогенатах исследованных тканей. Примечательно, что отмеченный антирадикальный эффект обусловлен не только концентрацией ионов лития, но и важным участием при этом и анионов в виде производных аминокислоты, о чем свидетельствуют и ранее проведенные нами исследования по различным производным литиевых солей -L-аргинина [15].

Научно-технологический центр органической и фармацевтической химии НАН РА

**О. М. Амирханян, С. А. Казарян, С. С. Овакимян,
академик К. Г. Карагезян**

**Влияние производных литиевых солей орнитина на процесс
липидной пероксидации в гомогенатах мозга и печени
в опытах in vitro**

Исследовалась роль производных литиевых солей -L-орнитина на процесс течения реакции свободнорадикального окисления липидов в гомогенатах мозга и печени белых крыс. Выяснено, что указанные соединения в концентрации 0,01M заметно подавляют процесс перекисеобразования липидов. Десятикратно (0.001M) уменьшенные концентрации свою антиоксидантную активность проявляют, главным образом в печеночной ткани. Выяснено также, что из производных

литиевых солей орнитина несколько более активны те производные, в структуре которых содержатся бензилоксикарбонильные группы. Следовательно, в деле подавления процесса липидной перекисидации кроме концентраций ионов лития, определенная роль отводится также и анионам – остаткам производных орнитина.

**Հ. Մ. Ամիրխանյան, Ս. Հ. Ղազարյան, Ս.Ս. Հովակիմյան,
ակադեմիկոս Կ. Գ. Ղարազյուզյան**

**Օրնիտինի ածանցյալների լիթիումական աղերի ազդեցությունը
լիպիդների գերօքսիդացման գործընթացի վրա ուղեղում և լյարդում in
vitro փորձերի պայմաններում**

Ուսումնասիրվել է օրնիտինի տարբեր ածանցյալների լիթիումական աղերի դերը սպիտակ առնետների ուղեղի և լյարդի հոմոգենատներում ընթացող լիպիդների ազատ-ռադիկալային օքսիդացման ընթացքի վրա: Պարզվել է, որ վերոհիշյալ միացությունների 0.01 Մ խտության ազդեցության պայմաններում լիպիդների գերօքսիդացման առաջացման գործընթացները զգալիորեն ճնշվում են: Տասնապատիկ նորացված (0.001Մ) լուծույթներն իրենց հակաօքսիդանտային ակտիվությունը ցուցաբերում են հատկապես լյարդային հյուսվածքում: Պարզվել է նաև, որ օրնիտինի լիթիումական աղերի ածանցյալներից առավել ակտիվ են նրանք, որոնք իրենց կառուցվածքում պարունակում են բենզիլօքսիկարբոնիլ խմբեր: Հետևապես լիպիդների գերօքսիդացման գործընթացը ճնշելու գործում, բացի լիթիումի իոնների խտությունից, զգալի դեր ունեն նաև անիոնները՝ օրնիտինի ածանցյալային մնացորդները:

**H. M. Amirkhanyan, S. H. Ghazaryan, S. S. Hovakimyan,
academician K. G. Karageuzyan**

**Effect of Derivatives of Ornithine Lithium Salts on the Process
of Lipid Peroxidation in Brain and Liver Homogenates
in vitro Experiments**

The role of derivatives of -L-ornithine lithium salts on the process of free radical oxidation of lipids in rats brain and liver homogenates was studied. It was shown that 0.01M concentration of compound studied demonstrates the pronounced depression on the process of lipids peroxidation. This effect was demonstrated in tenfold decreased concentration (0.001M) of substances used especially in liver tissue. It was established the higher activity of the derivatives of the ornithine lithium salts, which have benzyl-oxycarbonyl groups in their structure. Consequently, at the inhibitory effect of lipid peroxidation process except the concentrations of lithium ions the definite role is given to anions as residues of ornithine derivatives.

Литература

1. *Владимиров Ю.А., Арчаков А.И.* Перекисное окисление липидов в биологических мембранах. М. Наука. 1972. 252 с.
2. *Sies H.* Angew. Chem. Ed. Engl. 1986. P.1058-1071.
3. *Melord J.M.*- Clin. Biochem. 1993. V. 26. P.351-357.
4. *Аврутский Г. Я.* В кн.: Тезисы всесоюзн. симпозиума “Коррекция острых невротических состояний с помощью оксибутирата лития”. М. 1983. С.5-7.
5. *Baastryp P.C., Schou M.* - Archivs of General Psychiatry. 1967. V. 16. P.162-172.
6. *Berghofer A., Kossmann W., Muller-Oerlinghausen B.* - Acta / Psychiatr. Scand. 1996. V. 93. P.349-354.
7. *Coppen A.*- J. Clin. Psychiatry. 1994. V. 55. P.37-45.
8. *Coppen A., Noguera R., Bailey J., Burns B.H., Swani M.S., Nare E.H., Gardner R., Maggs R.* – Lancet. 1971. N 2. P.275-279.
9. *Guskott R., Tayler L.* - Psychiatry. 1994. V. 164, P.741-746.
10. *Пентюк А. А.* О механизме действия солей лития на энергетический обмен. Автореф. канд. дис. М. 1980.
11. *Шолохов В.М.* Влияние препаратов лития на окислительный обмен. Автореф. канд. дис. М. 1975.
12. *Шолохов В.М.* В кн.: Тезисы всесоюзн. симпозиума «Коррекция острых невротических состояний с помощью оксибутирата лития». М. 1983. С.64-66.
13. *Владимиров Ю.А., Азизова О.А., Деев А.И., Козлов А.В.* В кн.: Свободные радикалы в живых системах. ВИНТИ. 1991. Т. 29. С.126-130.
14. *Lowery D.H., Razenbough N.J., Farr A.L., Rohdall R.J.* - J. Biol. Chem. 1951. V.193. P.265-269.
15. *Карагезян К.Г., Амирханян О. М., Казарян С.С., Овакимян С.С., Григорян К.П., Мамиконян В. Х.* - Мед. наука Армении. 2012. Т. 51. N 4. С.40-45.

the development of fatty liver and limit milk production. Rumen-protected choline (RPC) have been fed to lactating cows to increase the supply of choline to the small intestine with the goal of increasing milk or alleviating the development of fatty liver syndrome [5; 12]. The objective of this study was to observe the correlation between NEFA, BHBA, TG and glucose in the blood plasma of early lactating dairy cows while feeding supplemental choline.

Eight early lactating primiparous and multiparous Holstein cows were used from October 2011 to November 2011 in our study beginning five weeks postpartum. Cows were housed in individual tie stalls and cared for under experimental procedures and protocols approved by the veterinary organization of Iran. Selection of cows was based on parity, milk yield of previous lactation (milk yield of dams for the cows in their first lactation) and body condition score (BCS). The cows received 90 g/d of rumen-protected choline (RPC) product. The RPC product (Reashure Choline, Balchem, USA) is a rumen-protected source of choline chloride. Reashure choline is produced by encapsulating choline chloride with a coating matrix able to resist rumen breakdown and release choline in intestine and contained 25% choline. Cows were fed a total mixed ration (TMR) *ad libitum*. The meal was adjusted to production intensity, and consisted of ordinary alfalfa hay, silage, beet pulp, and concentrates (including barley, corn, canola meal, cottonseed, wheat bran, cottonseed meal, wheat grain, corn gluten meal, soybean meal, sodium bicarbonate, fat meal, limestone and vitamin-mineral supplement). The RPC was top-dressed onto the TMR.

Blood samples were obtained before morning meal from the coccygeal vein on the last day and then were collected in heparinized Vacutainer tubes (Becton Dickinson, Franklin Lakes, NJ). Blood samples were placed on ice immediately following collection. Plasma was harvested after centrifugation of the blood at 3000 g for 15 min. Plasma was stored at -20°C until subsequent analysis for NEFA, BHBA, TG and glucose. The metabolites were measured on “BT 1500 auto-analyzer” through spectrophotometer method, using kits produced by “Farasamed Co, Ltd. Tehran, Iran.

For statistical analysis, experimental data normality was verified, and then data were submitted to analysis of correlation, using SAS (2002) software package.

The data of plasma metabolites for the cows which received choline and the correlations between the metabolites are shown (in Table 1 & 2).

TG level had a positive correlation with glucose (0.393) and a negative correlation with NEFA (-0.189) and a significant negative correlation with BHBA (-0.485). Glucose had a negative correlation with NEFA (-0.338) and a significant negative correlation with BHBA (-0.543). NEFA had a significant positive correlation with BHBA (0.415).

After parturition the demand for energy is increased by the initiation of lactation. The negative energy balance is compensated by the mobilization of NEFA from adipose tissue [1,2]. Therefore, examination of plasma NEFA concentration during early lactation period provides insight into fatty liver development [13].

In the case of excessive fat mobilization, associated with marked formation of acetyl CoA, the tri-carboxylic acid cycle cannot fully metabolize fatty acids. As a consequence, acetyl CoA is converted to acetoacetate which is then reduced to BHBA by BHBA dehydrogenase or spontaneously decarboxylized to acetone [14]. BHBA concentration increased during early lactation period and NEFA provide the substrate for BHBA synthesis. Increased BHBA concentration reveals incomplete oxidation of NEFA in the tri-carboxylic acid cycle during negative energy balance [3].

Table 1

The plasma metabolites of the cows which received choline

Triglyceride	9.00 ± 1.88 (mg/dl)
Glucose	55.00 ± 4.13 (mg/dl)
NEFA	0.237 ± 0.08 (mmol/l)
BHBA	0.453 ± 0.12 (mmol/l)

Table 2

The correlation between plasma metabolites of the cows which received choline

Correlation	Triglyceride	Glucose	NEFA
Glucose	0.393	-----	-----
NEFA	-0.189	-0.338	-----
BHBA	-0.485*	-0.543*	0.415*

* P<0.05

Early lactating cows rely almost exclusively on gluconeogenesis in the liver to meet their glucose requirements. But the level of blood glucose decreases during early lactation due to high demands for lactose synthesis as well as insufficient gluconeogenesis [14, 15]. The rise in NEFA during early lactation expressed enhanced adipose tissue mobilization to cope with the high energy demand for milk synthesis, when the availability and oxidation of glucose was reduced [13].

Reduction in gluconeogenesis by the liver, due to accumulation of fat in the liver, may lower blood glucose levels and decrease insulin secretion, which would support greater lipid mobilization and increase rate of fatty acid uptake

by the liver and increase ketogenesis [3]. An increase in plasma glucose during early lactation will likely increase insulin and decrease NEFA concentration.

The results of our study show that feeding choline improves liver function due probably to increasing formation of VLDL and its export from liver into the blood. In result the amount of TG in blood increases and the level of NEFA decreases.

Due to increase of glucose in the blood, the secretion of insulin increases. Since the increase of insulin suppress fat mobilization from adipose tissue, the amount of NEFA decrease in the blood and as a result, the influx of NEFA into the liver decreases, then the liver has fewer problems for oxidation of NEFA, in consequence, the level of BHBA decreases in the blood.

As a conclusion, we can recommend that choline can be useful in the nutrition of early lactating dairy cows due to increasing formation of VLDL to export fat from liver which results in improvement of liver function.

Armenian State Agrarian University, M.Rahmani@live.com

**M. G. Rahmani, R. G. Kamalyan, M. J. Dehghan-Banadaky,
G. J. Eskandari**

The Correlation Between Energy Carriers in the Blood Plasma of Early Lactating Dairy Cows Receiving Supplemental Choline

In an experiment on early lactating Holstein cows it was shown the presence of correlation between non-esterified fatty acids (NEFA), β -hydroxyl butyric acid (BHBA), triglyceride (TG) and glucose in plasma while feeding diet with choline. TG had a positive correlation with glucose. TG and glucose shown negative correlations with NEFA and BHBA. NEFA had a positive correlation with BHBA. This finding indicates that feeding choline can be useful to divert fatty acids to phospholipid synthesis to export fat from liver as well as improving gluconeogenesis and reduction of fat mobilization from adipose tissue which results in reducing production of BHBA.

**Մ. Գ. Ռահմանի, Ռ. Գ. Քամալյան, Մ. Զ. Դեհջան-Բանադակի,
Գ. Զ. Եսկանդարի**

**Էներգակրիչների կորելյացիան կովերի արյան պլազմայում վաղ
կաթնատվության շրջանում կերի հետ հավելյալ խոլինի կերակրման
պայմաններում**

Հոլսթեյն ցեղի կովերի կաթնատվության վաղ շրջանում կերի հետ խոլինի կերակրման պայմաններում գրանցվում է հավաստի կորելյացիա արյան պլազմայի չեթերիֆիկացված ճարպաթթուների, β -հիդրօքսիկարագաթթվի, եռացիլգլիցերիդների և գլյուկոզի միջև: Եռացիլգլիցերիդների և գլյուկոզի միջև դիտվում է դրական կորելյացիա: Եռացիլգլիցերիդները և գլյուկոզը դրսևորում են բացասական կորելյացիա չեթերիֆիկացված ճարպաթթուների և β -հիդրօքսիկարագաթթվի համեմատ: Վերջիններին միջև դիտվում է դրական կորելյացիա: Տվյալները վկայում են, որ խոլինի կերային հավելումը նպաստում է ճարպաթթուների օգտագործմանը լյարդի ֆոսֆոլիպիդների սինթեզում, ճարպերի հեռացմանը և գլյուկոզի սինթեզին այդ

որգանում, ինչը նվազեցնում է ճարպերի մոբիլիզացումը ճարպային հյուսվածքից և իջեցնում β -հիդրօքսիկարագաթթվի խտությունը արյան պլազմայում:

**М. Г. Рахмани, Р. Г. Камалян, М. Дж. Дехджан-Банадаки,
Г. Дж. Ескандари**

Корреляция между энергоносителями в плазме крови в ранний период лактации коров, получавших в качестве добавки холин

В опытах на коровах породы Голштейн показано наличие корреляции в плазме крови между неэстерифицированными жирными кислотами (НЖК), β -гидроксibuтиратом, триглицеридами (ТГ) и глюкозой в ранний период лактации при скармливании холина. ТГ имели положительную корреляцию с глюкозой. ТГ и глюкоза показывали отрицательную корреляцию с НЖК и β -гидроксibuтиратом. НЖК находилась в положительной корреляции с β -гидроксibuтиратом. Данные указывают на то, что скармливание коровам холина может способствовать направлению обмена НЖК на синтез фосфолипидов и экспорту жиров из печени, а также глюконеогенезу и уменьшению мобилизации жиров из жировой ткани, что приводит к уменьшению продукции β -гидроксibuтирата.

References

1. Drackley J. K. -J. Dairy Sci. 1999. V. 82. P. 2259-2273.
2. Reynolds C. K., Aikman P. C., Lupoli B., Humphries D. J., Beever D. E. - J. Dairy Sci. 2003 V. 86. P. 1201-1217.
3. Grummer R. R. -J. Dairy Sci. 1993. V. 76. P. 3882-3896.
4. Bobe G., Young J. W., D. C. Beitz. - J. Dairy Sci. 2004. V. 87. 3105-3124.
5. Piepenbrink M.S., Overton T.R.- J. Dairy Sci. 2003. V. 86. P. 1722-1733.
6. Mills S.E., Beitz D.C, Young J.W.- J. Dairy Sci. 1986. V. 69. P. 362-370.
7. Veenhuizen J. J., Drackley J.K., Richard M. J., Sanderson T. P., Miller L. D., Young J. W. - J. Dairy Sci. 1991. V.74. P. 4238-4253.
8. Cadorniga-Valino C., Grummer R.R., Armentano L.E., Donkin S.S., Bertics S.J.- J. Dairy Sci. 1997. V. 80. P. 646-656.
9. Duffield T. - Vet. Clin. N. Amer.: Food Anim. Pract. 2000. V.16. P. 231-253.
10. Holtenius P., Hjort M. - Bovine Practitioner 1990. V. 25. P. 91.
11. Erdman R. A., Sharma B. K. - Journal of Dairy Science. 1991. V. 74. P. 1641-1647.
12. Overton T. R., Waldron M. R. - J. Dairy Sci. 2004. 87(E. Suppl.). P. E105-E119.
13. Aeberhard K. I., Bruckmaier R. M., Blum J.W. - J. Vet. Med. 2001. A 48. P. 111-127.
14. Baird G. D. - J. Dairy Sci. 1982. V. 65. P. 1-10.
15. Doepel L., Lapierre H., Keneky J.-J. Dairy Sci. 2002. V. 85. P. 2315-2334.

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.44.018:616.893-053.8-092.9

А. А. Саваян, В. А. Чавушян

**Электрофизиологическое исследование нейронов locus
coeruleus мозга крыс после этанольной интоксикации**

(Представлено чл.-кор. НАН РА Л.Р. Манвеляном 13/VI 2012)

Ключевые слова: *этанольная интоксикация, спайковая активность
нейронов locus coeruleus*

Проблема алкогольной зависимости является одной из важнейших в современной наркологии и психиатрии вследствие ее широкой распространенности и высокого уровня хронической инвалидизации. Этанол (Э) как нейротоксин с множественными эффектами оказывает кратковременное/транзиторное и длительное/устойчивое воздействие на нервную систему. Одними из устойчивых эффектов являются долговременное редуцирование нейрогенеза в гиппокампе [1, 2], всеобщая атрофия структур головного мозга [3] и индукция воспалительных процессов [4].

Длительное/постоянное применение Э развивает физическую зависимость, и вследствие этого приостановка/изъятие Э вызывает ряд симптомов, ассоциированных с сАМР путями и нейротрансмиттерными системами [5]. Примечательно, что хроническое потребление Э индуцирует реорганизацию компонентов клеточных мембран с повышением концентрации холестерина и насыщенных жиров в липидном бислое, вследствие чего ингибируется везикулярный транспорт нейротрансмиттеров и в целом нарушаются функции нейрональных сетей. Известно 5 основных нейротрансмиттерных систем мозга, аффегируемых Э: глутамат-, ГАМК-, допамин-, серотонин- и опиоидэргические системы [6]. Считается, что хроническое применение Э индуцирует ряд изменений в утилизации нейротрансмиттеров, возможно, вследствие изменений на уровне рецепторов, модифицированием синаптических входов. Воздействие Э на выделение нейротрансмиттеров связывают с эффектами Э на внутриклеточный свободный Ca^{2+} [7].

Целью данного исследования явилось электрофизиологическое изучение спайковой активности нейронов locus coeruleus (LC) на высокочас-

тотную стимуляцию (ВЧС) супраоптического ядра (СОЯ) гипоталамуса у крыс спустя 2 месяца после изъятия Э.

Материал и методы. Эксперименты проведены на 6 половозрелых крысах (230 ± 20 г) в группах “Норма” ($n=3$) и “Этанол” ($n=3$). Крысы находились на сухом корме и в качестве единственного источника жидкости получали 15%-ный этанол в течение двух месяцев, после чего были переведены на воду. Спустя 2 месяца после изъятия Э в остром эксперименте животных обездвигивали 1%-ным дитилином (25 мг/кг в/б) и переводили на искусственное дыхание. Модель изолированного головного мозга получали перерезкой спинного мозга глазным скальпелем на уровне грудных T_2 - T_3 сегментов под местным новокаиновым наркозом. После краниотомии стереотаксически ориентированный раздражающий bipolarный электрод вводили в СОЯ гипоталамуса по координатам AP-1.08, $L \pm 1.5$, $DV + 9.3$ мм, а стеклянный микроэлектрод с диаметром кончика 1 мкм, заполненный 2М раствором NaCl, многократно погружали в LC по координатам AP-9.5; $L \pm 1.5$ -3.5; $DV + 7.8$ мм. ВЧС (100 Гц в течение 1 с) осуществляли посредством прямоугольных толчков тока длительностью 0.05 мс и амплитудой 0.16 – 0.18 мА. В онлайн режиме импульсный поток после регистрации подвергался программному анализу, с последующим выводом распределенной в реальном времени пре- и постстимульной спайковой активности единичных нейронов и построенных на их основе гистограмм суммы спайков или усредненных гистограмм частот с данными многоуровневой статистической обработки дифференцированно для престимульного и постстимульного времени, а также на период ВЧС (разработчик В.С. Каменецкий).

Результаты и их обсуждение. У интактных животных экстраклеточной регистрацией фоновой и вызванной спайковой активности одиночных нейронов LC ($n=54$) при ВЧС ипсилатерального СОЯ выявлены: возбудительные ответы в виде тетанической и посттетанической потенциации (ТП и ПТП соответственно) в 19 из 54 испытаний (35.19 %), тормозные ответы в виде тетанической и посттетанической депрессии (ТД и ПТД соответственно) в 13 из 54 испытаний (24 %), одновременно ингибиторные и возбудительные компоненты ответов (ТД+ПТП) в 22 из 54 испытаний (41 %) (рис.1, И). После изъятия Э в нейронах LC нарушение баланса ингибиторных и возбудительных ответов характеризуется доминированием ингибиторного тона (12 из 26 = 46.15%) и наличием значительного числа ареактивных нейрональных единиц (5 из 26 = 19.23%) (рис.1, И).

В норме постстимульные возбудительные эффекты в нейронах LC (рис.1, Е) имеют $M_{PE}=10.69$ спайк/с, что составляет 1.7-кратное ($10.69/6.27$) потенцирование активности, а в группе Этанол $M_{PE}=7.62$ спайк/с, что составляет 1.4-кратное ($7.62/5.26$) потенцирование (рис.1, А). ТД+ПТП в Норме (рис.1, З) проявляют 5.56-кратное ($10.12/1.82$) снижение и 1.13-кратное ($11.49/10.12$) повышение активности по сравнению с частотой фоновой/престимульной активности, в то время как в группе Этанол ТД+ПТП эффекты (рис.1, В) имеют 5.48-кратное ($9.60/1.75$) снижение и 1.53-кратное ($14.68/9.60$) повышение активности.

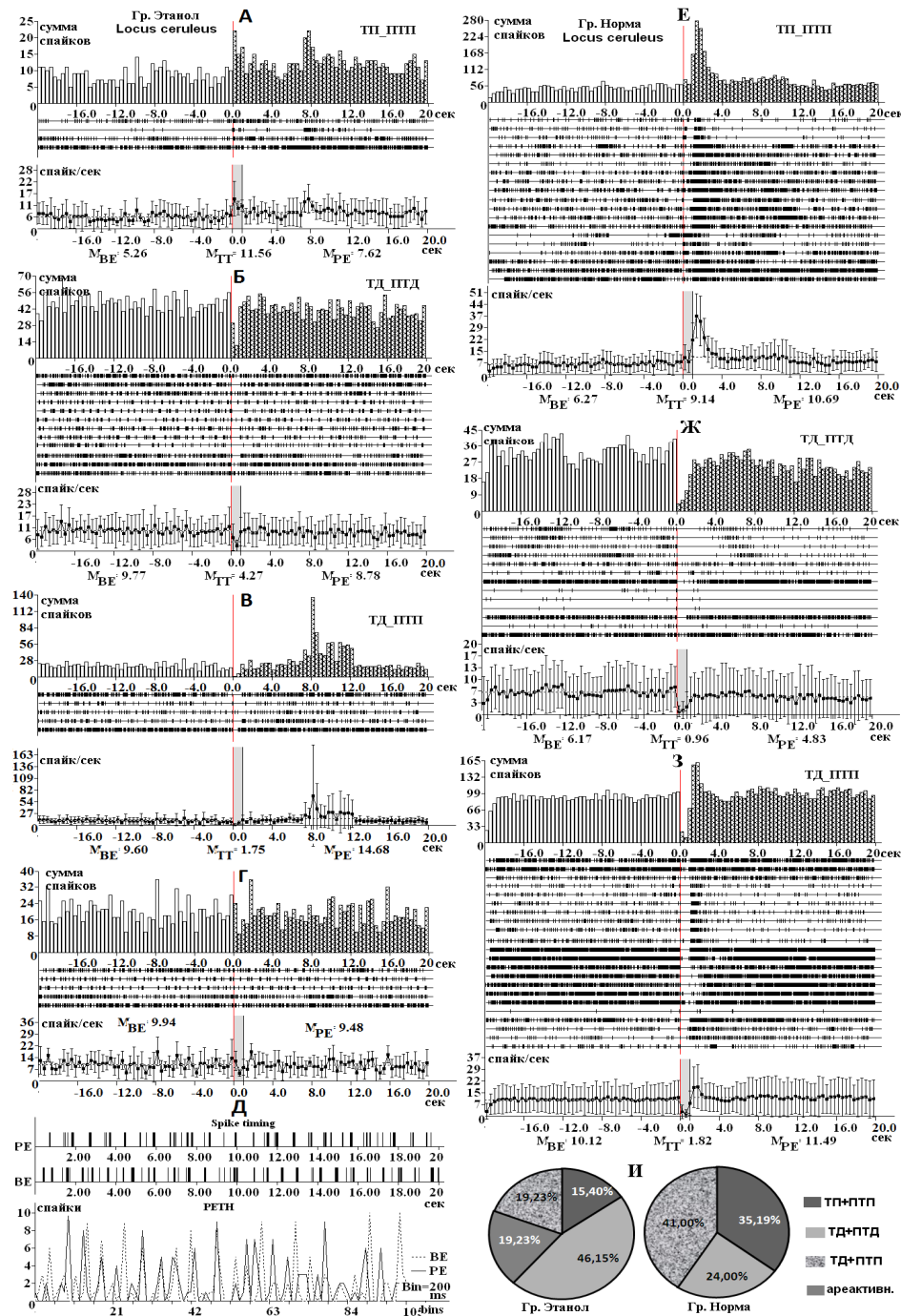


Рис.1. Перистимульные гистограммы суммы спайков, построенные на основе пре- и постстимульной спайковой активности единичных нейронов LC при высокочастотной стимуляции СОЯ для возбуждательных (А, Е), тормозных (Б, Ж) и ТД+ПТП

(В, З) эффектов в группах Э (А-Г) и Норме (Е-З). Снизу – диаграмма средней частоты для данной суммы спайков, с указанием средних цифровых значений в реальном времени 20 с до (M_{BE}) и 20 с после (M_{PE}) ВЧС (в течение 1 с – M_{TT}). Д – перистимульная спайковая активность пароксизмального типа для единичного нейрона LC, представленная в реальном времени (Spike timing) и на перистимульной временной гистограмме (PETH). Сокращения: BE (before event) – временной отрезок до стимуляции, PE (post event) – временной отрезок после стимуляции, TT (time tetanization) – время ВЧС.

ТД+ПТД эффекты в Норме (рис.1, Ж) проявляют 6.43-кратное ($6.17/0.96$) снижение на время ВЧС и 1.28-кратное ($6.17/4.83$) снижение на постстимульное время, а таковые в группе Этанол (рис.1, Б) – $9.77/4.27 = 2.29$ и $9.77/8.78 = 1.1$ -кратное снижение, соответственно.

Анализ результатов дает основание заключить, что после изъятия Э характерными для нейронов LC являются пачечный тип активности в популяциях ареактивных нейронов (рис.1, Г, Д) и нейронов с тормозным типом ответов (рис.1, Б). На рис. 1, Д представлена развернутая в реальном времени пре- и постстимульная эпилептиформная спайковая активность на примере характерного единичного нейрона LC, ассоциируемая с нарушением кальциевых сигнальных путей [8]. Э активирует множество нейротрансмиттерных систем, в частности норадренэргическую и ГАМК-эргическую [9]. ГАМК в коре устанавливает ингибиторный тон, противопоставляемый возбудимости и при этом, если баланс нарушен, имеет место эпилептиформная приступообразная активность [10].

Интересно, что эпилептиформная активность оказывает значительное воздействие на структуру мозга и способна индуцировать нейрональную гибель. Так, выявлены морфологические изменения, связанные с пролонгированной конвульсивной активностью – селективная клеточная гибель в эпилептогенных структурах гиппокампа [11].

1. Физиологический и генетический анализ выявил, что эпилепсия тесно соотносится с потенциалзависимыми ионными (Na^+ , K^+ , Ca^{2+} , Cl^-) и лигандзависимыми каналами (никотиновые ацетилхолиновые и ГАМК рецепторы) [12]; установлена высокая чувствительность NMDA рецепторов гиппокампа к Э в изолированных нейронах и в культурах нейронов *in vivo* [13].

2. Исследования показали, что отдельные структуры мозга обладают избирательной чувствительностью к хронической интоксикации Э, в частности, холинергические ядра переднего мозга, мезокортиколимбическая дофаминергическая система, locus coeruleus и raphe nuclei. Среди возможных мишеней воздействия Э в особенности известны нейротрансмиттеропосредованные ионные каналы (включая глутамат, ГАМК, глицин, никотиновые ацетилхолинэргические и серотонинэргические рецепторы), обслуживающие быстрые синаптические преобразования в мозге [14-16]. В то же время Э повреждает мозг через дифференцированные внутриклеточные сигнальные пути, воздействуя на нейрогенез, клеточную миграцию и выживание [17].

Институт физиологии им. Л.А. Орбели НАН РА

А. А. Саваян, В. А. Чавушян

**Электрофизиологическое исследование нейронов locus coeruleus
мозга крыс после этанольной интоксикации**

В электрофизиологических исследованиях выявлено, что после изъятия этанола нейроны locus coeruleus мозга крыс характеризуются эпилептиформной синаптической активностью, ассоциируемой с нарушением баланса ингибиторной и возбуждательной нейротрансмиссии.

Ա. Ա. Սավայան, Վ. Ա. Չավուշյան

**Էթանոլային ինտոքսիկացիայի դադարեցման պայմաններում
առնետների ուղեղի locus coeruleus-ի նեյրոնների
էլեկտրաֆիզիոլոգիական ուսումնասիրություն**

Էլեկտրաֆիզիոլոգիական փորձերում բացահայտվել է, որ էթանոլի ազդեցության դադարեցման պայմաններում առնետների ուղեղի locus coeruleus-ի նեյրոններին բնորոշ է էպիլեպտիկ բնույթի սինապտիկ ակտիվություն՝ պայմանավորված արգելակիչ և դրդիչ նյարդափոխադրիչների հարաբերակցության խախտմամբ:

A. A. Savayan, V. A. Chavushyan

**Electrophysiological Study of Neurons of locus coeruleus Rat's Brain
After Discontinuation of Ethanol Consumption**

In electrophysiological experiments it was revealed that after discontinuation of ethanol consumption the neurons of locus coeruleus of rat's brain are characterized by epileptiform synaptic activity associated with impairment of ratio of inhibitory and excitatory neurotransmission.

Литература

1. Taffe M. A., Kotzebue R. W., Crean R. D., Crawford E. F., Edwards S., Mandym C. D. - Proceedings of the National Academy of Sciences. 2010.V. 107. N. 24. P. 11104–11109.
2. Morris S. A., Eaves D. W., Smith A. R., Nixon K. - Hippocampus. 2010.V.20. P. 596–607.
3. Bleich S. - Neuroscience Letters. 2003. V. 335. N 3. P. 179–82.
4. Blanco Ana M., Soraya L. Valles, Maria Pascual, Consuelo Guerri. - The Journal of Immunology. 2005. V. 175. P. 6893–899.
5. Knapp C. M., Ciraulo D. A., Kranzler H. R. - Psychiatric News. 2012. V. 47. N 7. P. 26.

6. *Chastaina G.* - The Journal of General Psychology. 2006. V. 133. Issue 4. P. 329-335.
7. *Rabe C. S., Weight F. F.* - J. Pharmacol. Exp. Ther. 1988. V. 244. N 2. P. 417-22.
8. *Magee J.C., Carruth M.* – J. Neurophysiol. 1999 .V. 82. N 4. P.1895-901.
9. *McBride W. J., Murphy J. M., Lumeng L., Li T.-K.* - Alcohol. 1990. V. 7. P. 199–205.
10. *Mathew Jobin, Balakrishnan Savitha, Antony Sherin, Abraham Pretty Mary, Paulose C. S.* - Journal of Biomedical Science. 2012. V. 19. N 25. P. 1-13.
11. *Covolán L, Ribeiro L.T., Long B.M., Mello L.E.* - Hippocampus. 2000. V. 10. P.169-180.
12. *Muhammad Imran Naseer, Li Shupeng, Myeong Ok Kim.* - Molecular Brain. 2009. V. 2. N 20. P. 1-11.
13. *Simson P. E., Criswell H.E., Johnson K.B., Hicks R.E., Breese G. R.* – J. Pharmacol. Exp. Ther. 1991. V. 257. P.225–231.
14. *Gonzales R.A., Hoffman P.L.* - Trends Pharmacol. Sci. 1991. V.12. P. 1–3.
15. *Samson H. H., Harris R. A.* - Trends Pharmacol. Sci. 1992. V.13. P. 206–211.
16. *Tabakoff B., Hoffman P. L.* - Alcohol and alcoholism. Oxford University Press, New York. 1995. V. 2.
17. *Naseer M. I., Lee H. Y., Ullah N., Ullah I., Park M. S., Kim S. H., Kim M. O.* - Synapse. 2010. V. 64. P.181-190.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 112-րդ ՀԱՏՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Կ. Լեոնտև, Ղ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան – Ադդիտիվ կապուլիների երկրաչափություն	7
Վ. Ա. Միրզոյան – Նորմալ հարթ Ric – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների ընդհանուր դասակարգումը	19
Գ. Ա. Մարգարյան – Չորրորդ կարգի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության և շրջանում լուծումների կառուցման մասին	30
Վ. Մ. Ջաքարյան, Ռ. Վ. Դավլաթյան – A_α^p դասի ֆունկցիաների աճի մասին	44
Մ. Կ. Կյուրեղյան, Ս. Ե. Աբրահամյան – Վերջավոր դաշտերի վրա տեղադրության բազմանդամների կառուցման եղանակ	51
Վ. Մ. Ջաքարյան, Ռ. Վ. Դավլաթյան – A_ω դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին	135
Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան, Ռ. Է. Չախմախյան – Էվկլիդեսյան տարածություններում նորմալ հարթ կիսագուգահեռ ենթաբազմաձևությունների դասակարգման մասին	141
Լ. Նուրբեկյան, Դ. Գոմեն – Լագրանժյան դինամիկա և թույլ ԿԱՄ թեորեմ d – անվերջ չափանի տորի վրա	152
Ա. Յու. Շահվերդյան – Լիի մինիմալ հանրահաշիվ, նուրբ սահմաններ և դինամիկ համակարգեր	160
Ա. Ա. Ալեքսանյան, Ա. Վ. Սողոյան – Տեղադրությունների ծնման որոշ խնդիրների NP-լրիվության վերաբերյալ	170
Ա. Վ. Պողոսյան – L_2 -օպտիմալ ռացիոնալ մոտարկման գուգամիտության մասին	341
Ա. Ն. Հայրապետյան – Սֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի և անուլյար ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունները	350
Ռ. Վ. Դավլաթյան – Սիավոր շրջանում մի դասի անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացման մասին	355
Գ. Ա. Մարգարյան – Հաստատուն գործակիցներով հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի բազմանդամային լուծումների մասին շրջանում	360

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Մ. Մ. Վարդանյան – Հաստման և լրացման գործողություններով երկէլեմենտանոց ենթաբազմությունների դասում որոշ ճանաչող համակարգերի մինիմալության մասին	57
---	----

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

Գ. Է. Հարությունյան, Ս. Կ. Շուքուրյան, Ե. Ա. Ջորյան – Անսարքությունների և թեստ ալգորիթմների պարբերականության հիպոթեզ հիշող և դրա կիրառումը հիշող սարքերի ներդրված ինքնաթեստավորող պրոցեսորի ճարտարապետությունում	229
--	-----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան – սարքերում Երկայնական մագնիսական դաշտում հարթ ուղղանկյուն իդեալական հաղորդիչ մեմբրանի լայնական տատանումները	67
Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան – Փոփոխական արագությամբ շարժվող ճաթի բուժման ոչ ստացիոնար խնդիրը	176
Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան – Կամայական արագությամբ շարժվող հորիզոնական դրոշմի խնդրի լուծումը առաձգական կիսահարթության համար	239
Մ. Հ. Մարգարյան – Առաձգական բարակ թաղանթների դասական ճշգրտված տեսություն կառուցումը միկրոպոլյար տեսությունից ելնելով	246
Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան – Ուղղանկյուն առաձգական սալի դիվերգենտ անկայունությունը գազի գերձայնային հոսքում	256
Ռ. Մ. Կիրակոսյան – Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ թաղանթների ջերմաառաձգականության ճշգրտված տեսության մասին	369
Ա. Ա. Պապյան – Հաղորդիչ ուղղանկյուն մեմբրանի տատանումները ուղղահայաց	377

մագնիսական դաշտում <i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Կ. Բ. Ղազարյան</i> – Հաղորդիչ սալի պլանար տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում	382
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ	
<i>Լ. Ա. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Լ. Գ. Ղուլդազարյան</i> – GPS համակարգերի տվյալների հիման վրա Երկրագնդի լիտոսֆերային սալերի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակների որոշման մասին	264
ՖԻԶԻԿԱ	
<i>Է. Մ. Ղազարյան, Ն. Գ. Աղեկյան, Հ. Ա. Սարգսյան</i> – Մեկէլեկտրոնային հոսանքը գլանային նանոշերտում	73
<i>Գ. Ն. Ղարաջյան, Ա. Մ. Կեչիյանց, Ժ. Ռ. Փանոսյան</i> – Տատանողական պրոցեսները և դրանց ճյուղավորումները հակադարձ կապեր պարունակող պլազմախտուցքային համակարգում	185
<i>Ղ. Բ. Հայրապետյան, Հ. Խ. Թևոսյան</i> – Էլեկտրոնային վիճակները և լույսի ուղիղ միջգոտիական կլանումը Պեշել – Թելերի ձևափոխած պոտենցիալով գնդային քվան- տային կետում	389
ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ	
<i>Ս. Ս. Գրիգորյան</i> – Գալակտիկաներում «մուլթ» նյութի բնույթի մասին	272
ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ	
<i>Ս. Մ. Առուստամյան, Լ. Ա. Մանուչարովա, Հ. Ա. Ջալալի, Ի. Ա. Վարդանյան</i> – CH_3O_2 ռադիկալների և օրգանական միացության փոխազդեցության առանձնահատկություն- ները կախված մակերեսի բնույթից	194
<i>Ի. Ա. Վարդանյան</i> – Կրիտիկական երևույթները CH_3O_2 ռադիկալների օրգանական միացության հետ հետերոգեն փոխազդեցության ընթացքում	277
ԿԵՆՍԱՖԻԶԻԿԱ	
<i>Ս. Ե. Զաքարյան, Զ. Ա. Զաքարյան, Ա. Հ. Թռչունյան</i> – Քեմիլյումենեսցենցիայի վեր- լուծության տարբեր մեթոդները մարդու արյան շիճուկի լիպոպրոտեինների ազատ- ռադիկալային գերօքսիդային օքսիդացման մակարդակի գնահատման մեջ օրգանիզ- մում ախտաբանական գործընթացների զարգացման ժամանակ	79
<i>Վ. Ա. Օհանյան</i> – Գերբարձր հաճախության էլեկտրամագնիսական դաշտի և հակա- բիոտիկների համատեղ ազդեցությունը <i>Enterococcus hirae</i> բակտերիաների աճի և կենսունակության վրա	87
<i>Հ. Ռ. Վարդապետյան, Ս. Ս. Բլբուլյան, Ս. Գ. Տիրացույան, Ա. Հ. Թռչունյան</i> – <i>Hyper-</i> <i>cum perforatum</i> -ի էքստրակտների հակառադիկալային և հակաբակտերիալ հատկու- թյունների ուսումնասիրությունը	282
<i>Լ. Յ. Հակոբյան</i> – Երկաթի իոնների ազդեցությունը <i>Rhodobacter sphaeroides</i> բակտերի- աների աճման և օքսիդավերականգնողական ակտիվության վրա	396
ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ	
<i>Ս. Ա. Սիմոնյան, Ի. Հ. Բատիկյան, Ա. Ս. Մարգարյան</i> – Հավի սաղմի հարմարողական մեխանիզմները ինկուբացման տատանողական ջերմաստիճանների նկատմամբ	95
<i>Ս. Մ. Բադալյան</i> – Սիբիրախտի թիվ 55 շտամով վարակված սպիտակ մկների արյան շիճուկի սպիտակուցների քանակական փոփոխությունները գալարմինի ազդե- ցությամբ	102
<i>Գ. Ի. Բսրայեղյան, Պ. Ա. Ղազարյան, Ռ. Ն. Սահակյան, Մ. Ա. Սիմոնյան</i> – Իոնիզացիոն ճառագայթման հեռավոր հետևանքները և կարգավորիչ մեխանիզմները կարդիոմիոցիտներում	110
<i>Գ. Կ. Գևորգյան, Մ. Ա. Դավթյան, Ա. Ա. Համբարձումյան</i> – <i>Candida guilliermondii</i> HI1-4 խմորասնկերի D-ամինաթթվային օքսիդազի մաքրումն ու հատկությունների ուսումնա- սիրումը	200
<i>Ս. Գ. Գրիգորյան</i> – Բնական դիմադրողականության ցուցանիշների փոփոխու- թյունները առնետների և ցուլիկների մոտ հիպոկինեզիայի պայմաններում	208

<i>Ա. Գ. Գրիգորյան</i> – Ածխաջրատների փոխանակության խանգարումներ կենդանիների մոտ հիպոկինեզիայի պայմաններում.....	291
<i>Ա. Ս. Ղարազուլյան</i> – Նոր ցիան խումբ պարունակող լակտոնների ածանցյալի դերը թիմուսի բջջաթաղանթների ֆոսֆոինոզիտիդային ցիկլի բաղադրիչների փոխանակության կանոնավորման գործընթացում սարկոմա 45-ի ժամանակ	297
<i>Ա. Ֆ. Միրզոյան, Ջ. Ա. Կարապետյան, Ֆ. Վ. Միրզոյան, Պ. Ա. Ղազարյան</i> – Պոլիօքսիմետաղներ դասին պատկանող պրեպարատի ազդեցության մեխանիզմը բջիջների միջուկների ըստ պոլիդոմայն դասերի բաշխվածության վրա.....	403
<i>Հ. Մ. Ամիրխանյան, Ս. Հ. Ղազարյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Կ. Գ. Ղարազուլյան</i> – Օրնիտինի ածանցյալների լիթիումական աղերի ազդեցությունը լիպիդների գերօքսիդացման գործընթացի վրա ուղեղում և լյարդում in vitro փորձերի պայմաններում.....	411
<i>Մ. Գ. Ռահմանի, Ռ. Գ. Քամալյան, Ս. Ջ. Դեհջան-Բանադակի, Գ. Ջ. Եսկանդարի</i> – Էներգակրիչների կորեյացիան կովերի արյան պլազմայում վաղ կաթնատվության շրջանում կերի հետ հավելյալ խոլինի կերակրման պայմաններում	417
ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	
<i>Կ. Օ. Հովնանյան, Լ. Հ. Նավասարդյան, Մ. Կ. Հովնանյան, Ա. Հ. Թոչունյան</i> – Մանրէների, սպիրոխետների, խմորասնկերի և նախակենդանիների որոշ տեսակների վոյուտին-թթվակալցիտոմ գոյացությունների մորֆոգենեզի և արտաքին տարբեր գործոնների ազդեցության ուստրակառուցվածքային վերլուծությունը	118
<i>Ս. Ֆ. Շարիֆի Աղաբաբյան, Հ. Հ. Փանոսյան, Յու. Գ. Պոպով, Ա. Ա. Թոչունյան</i> – Ջովշանի (Իրան) երկրաջերմային աղբյուրից բացիլների աերոբ թերմոֆիլ երկու շտամների մեկուսացումը և նույնականացումը.....	303
ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ	
<i>Ք. Վ. Ղազարյան, Ն. Գ. Հունանյան, Ն. Ն. Մելքոնյան</i> – Արյունամատակարարման ազդեցությունը առնետի արգանդի պեյսմեկերային ակտիվության բնութագրերի վրա.....	312
<i>Կ. Ա. Պանչուլազյան</i> – Ջեռնարկչության գործունեության կադրային ռազմավարությունում անձնակազմի հոգեբանական և հոգեֆիզիոլոգիական հետազոտումը	320
<i>Ա. Ս. Չոբանյան, Տ. Ս. Մարտիրոսյան, Հ. Հ. Մկրտչյան</i> – Սինապտիկ ուսուցման պրոցեսի համակարգչային հետազոտություն	328
<i>Ա. Ա. Սավայան, Վ. Ա. Չավուշյան</i> – Էթանոլային ինտոքսիկացիայի դադարեցման պայմաններում առնետների ուղեղի locus coeruleus-ի նեյրոնների էլեկտրաֆիզիոլոգիական ուսումնասիրություն	422
ԿԵՆՂԱՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	
<i>Ս. Ա. Աղայան, Գ. Հ. Բոյախյան</i> – Թոչունների արյան սպորավոր մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը Կովկասում	213

СОДЕРЖАНИЕ 112-го ТОМА

МАТЕМАТИКА

<i>В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян</i> – Геометрия аддитивного канала	7
<i>В. А. Мирзоян</i> – Общая классификация нормально плоских <i>Ric</i> -полусимметрических подмногообразий	19
<i>Г. А. Саргсян</i> – О разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка и построении решений в круге	30
<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян</i> – О росте функций классов A_α^p	44
<i>М. К. Кюрегян, С. Е. Абраамян</i> – Метод построения перестановочных полиномов над конечными полями	51
<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян</i> – О граничных значениях функций классов A_ω ...	135
<i>В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р. Э. Чахмахчян</i> – О классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах	141
<i>Л. Нурбекян, Д. Гомес</i> – Лагранжева динамика и слабая КАМ теорема на d -бесконечномерном торе	152
<i>А. Ю. Шахвердян</i> – Минимальная алгебра Ли, тонкие пределы и динамические системы	160
<i>А. А. Алексанян, А. В. Согоян</i> – Об NP -полноте некоторых задач генерации подстановок	169
<i>А. В. Погосян</i> – О сходимости L_2 -оптимальной рациональной аппроксимации .	341
<i>А. Н. Айрапетян</i> – Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций	350
<i>Р. В. Даллакян</i> – О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций	355
<i>Г. А. Саргсян</i> – О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге	360

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>С. М. Варданян</i> – О минимальности некоторых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств относительно операций пересечения и дополнения	57
--	----

ИНФОРМАТИКА

<i>Г. Э. Арутюнян, С. К. Шукурян, Е. А. Зорян</i> – Гипотеза периодичности ошибок и тестовых алгоритмов для устройств памяти и ее применение в архитектуре процессора встроенного тестирования памяти	228
---	-----

МЕХАНИКА

<i>С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян</i> – Поперечные колебания идеально проводящей плоской прямоугольной мембраны в продольном магнитном поле	67
<i>А. Н. Мартиросян, А. С. Динуниц, А. В. Давтян</i> – Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью	176
<i>А. Н. Мартиросян, А. С. Динуниц, А. В. Давтян</i> – Решение задачи о горизонтальном штампе для упругой полуплоскости при движении с произвольной скоростью	239
<i>С. О. Саркисян</i> – Построение уточненной классической теории упругих тонких оболочек по микрополярной теории	246
<i>М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян</i> – Дивергентная неустойчивость прямоугольной упругой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа ...	256
<i>Р. М. Киракосян</i> – К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины	369

А. А. Папян – Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле	377
С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян – Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле.....	382
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	
Л. А. Агалянов, Р. С. Геворкян, Л. Г. Гулгасарян – К определению напряженно-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем	264
ФИЗИКА	
Г. Н. Караджян, А. М. Кечиянц, Ж. Р. Паносян – Колебательные процессы и их бифуркации в системе плазма–конденсат с обратными связями	185
Д. Б. Айрапетян, О. Х. Тевосян – Электронные состояния и прямое межзонное поглощение света в сферической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля –Теллера	
АСТРОФИЗИКА	
С. С. Григорян – О природе «тёмной» материи в галактиках.....	273
ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	
А. М. Арустамян, Л. Ф. Манучарова, Х. А. Джалали, И. А. Варданян – Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в зависимости от природы поверхности	193
И. А. Варданян – Критические явления при гетерогенном взаимодействии радикалов CH_3O_2 с органическим соединением	277
БИОФИЗИКА	
А. Е. Закарян, З. А. Закарян, А. А. Трчунян – Различные методы хемилюминесцентного анализа в оценке уровня свободнорадикального перекисного окисления липопротеинов сыворотки крови человека при развитии патологических процессов в организме	79
В. А. Оганян – Совокупное воздействие сверхвысоких частот электромагнитного поля и антибиотиков на рост и выживаемость <i>Enterococcus hirae</i>	87
Г. Р. Вардапетян, С. С. Блбулян, С. Г. Тирицунян, А. А. Трчунян – Исследование антирадикальных и антибактериальных свойств экстрактов <i>Hypericum perforatum</i> .	282
Л. Ю. Акопян – Влияние ионов железа на характеристики роста и редокс-активность <i>Rhodobacter sphaeroides</i>	396
БИОХИМИЯ	
А. А. Симонян, И. Г. Батикян, А. С. Маргарян – Механизмы адаптации куриного эмбриона к колебательным температурам инкубирования.....	95
А. М. Бадалян – Количественные изменения белков сыворотки крови белых мышей, зараженных сибирезвонным 55-м штаммом, под воздействием галармина	102
К. И. Израелян, П. А. Казарян, Р. Х. Саакян, М. А. Симонян – Отдаленные последствия радиационного поражения миокарда и регуляторные механизмы в мембранах кардиомиоцитов.....	110
Г. К. Геворкян, М. А. Давтян, А. А. Амбарцумян – Очистка и свойства D-аминокислотной оксидазы из дрожжей <i>Candida guilliermondii</i> НП-4	199
А. Г. Григорян – Изменение показателей естественной резистентности у крыс и бычков при длительной гипокинезии	207
А. Г. Григорян – Нарушения углеводного обмена у животных при гипокинезии	291
А. С. Карагулян – Роль нового производного цианосодержащих лактонов в	297

регуляции метаболизма компонентов фосфоинозитидного цикла мембран клеток тимуса при саркоме-45	
<i>А. Ф. Мирзоян, З. А. Караян, Ф. В. Мирзоян, П. А. Казарян</i> – Механизм действия препарата из класса полиоксиметаллатов на распределение ядер клеток по классам плоидности	403
<i>О. М. Амирханян, С. А. Казарян, С. С. Овакимян, К. Г. Карагезян</i> – Влияние производных литиевых солей орнитина на процесс липидной пероксидации мозга и печени в опытах <i>in vitro</i>	411
<i>М. Г. Рахмани, Р. Г. Камалян, М. Дж. Дехджан-Банадаки, Г. Дж. Ескандари</i> – Корреляция между энергоносителями в плазме крови в ранний период лактации коров, получавших в качестве добавки холин.....	417
МИКРОБИОЛОГИЯ	
<i>К. О. Овнанян, Л. А. Навасардян, М. К. Овнанян, А. А. Трчунян</i> – Ультратруктурный анализ образования волютин-ацидокальцисом у некоторых видов бактерий, спирохет, дрожжей и простейших при морфогенезе клетки и действии различных внешних факторов	118
<i>С. Ф. Шарифи Алгабур, О. А. Паносян, Ю. Г. Попов, А. А. Трчунян</i> – Изолирование и идентифицирование двух аэробных термофильных бацилл из горячего источника Джовшана (Иран)	303
ФИЗИОЛОГИЯ	
<i>К. В. Казарян, Н. Г. Унанян, Н. Н. Мелконян</i> – Влияние кровоснабжения на характеристики пейсмекерной активности матки крысы	312
<i>К. А. Панчулазян</i> – Психологическое и психофизиологическое исследование персонала в кадровой стратегии предпринимательской деятельности	320
<i>А. С. Чобанян, Т. С. Мартиросян, О. А. Мкртчян</i> – Компьютерные исследования процесса синаптического обучения	328
<i>А. А. Саваян, В. А. Чавушян</i> – Электрофизиологическое исследование нейронов <i>locus coeruleus</i> мозга крыс после этанольной интоксикации	422
ЗООЛОГИЯ	
<i>С. А. Агаян, Г. А. Бояхчян</i> – Разнообразие и распространение споровых кровепаразитов птиц Кавказа	213

CONTENTS of 112th VOLUME

MATHEMATICS

V. K. Leontev, G. L. Movsisyan, Zh. G. Margaryan – Geometry of Additive Channels	7
V. A. Mirzoyan – General Classification of Normally Flat <i>Ric</i> -Semisymmetric Submanifolds	19
G. A. Sargsyan – Solvability of the Dirichlet Problem for the Fourth Degree Equation and Construction of the Solutions in a Disc	30
V. S. Zakarian, R. V. Dallakyan – About Growth of A_{α}^p Classes Functions	44
M. K. Kyureghyan, S.Y. Abrahamyan – A Method of Constructing Permutation Polynomials over Finite Fields	51
V. S. Zakaryan, R. V. Dallakyan – About the Bordering Meanings of the A_{ω} Class Functions	135
V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan, R. E. Chakhmakhchyan – On Classification of Normally Flat Semiparallel Submanifolds in Euclidian spaces.....	141
L. Nurbekyan, D. Gomes – Lagrangian Dynamics and a Weak KAM Theorem on the d – infinite Dimensional Torus	152
A. Yu. Shahverdian – Minimal Lie Algebra, Fine Limits, and Dynamical Systems...	160
A. A. Alexanian, A. V. Soghoyan – On NP-completeness of Some Permutation Generation Problems.....	170
A. V. Poghosyan – On a Convergence of the L_2 -Optimal Rational Approximation	341
A. N. Hayrapetyan – Boundary Characteristics of Summerizing Spherical Derivative and Annular Function	350
R. V. Dallakyan - On a Representation of One Class of Analytic Functions in the Unit Case	355
G. A. Sargsyan - On Polynomial Solutions in the Disc for Dirichlet Problem of Hyperbolic Equations with Constant Coefficients	360

APPLIED MATHEMATICS

S. M. Vardanyan – On the Minimality of Some Recognizing Systems in the Class of Two – Element Subsets Concerning the Operations of Intersection and Complement.....	57
---	----

INFORMATICS

G. E. Harutyunyan, S. K. Shoukourian, Y. A. Zorian – Fault and Test Algorithm Periodicity Hypothesis in Memory Devices and Its Application to Memory BIST Processor Architecture	228
--	-----

MECHANICS

S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan – Transversal Vibrations of the Perfect Conductive Plane Rectangular Membrane in the Longitudinal Magnetic Field.....	67
A. N. Martirosyan, A. S. Dinunts, A. V. Davtyan – The Unsteady Problems on Healing of Crack Moving with Arbitrary Velocity	176
A. N. Martirosyan, A. S. Dinunts, A. V. Davtyan – Unsteady Problem on Dynamics of Stamps Moving with Arbitrary Velocity	239
S. H. Sargsyan – The Construction of Improved Classical Theory of Elastic Thin Shells on the Basis of Micropolar Theory.....	246
M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan – The Divergence Instability of the Elastic Rectangular Plate Streamlined by Supersonic Gas Flow	256
R. M. Kirakosyan - On the Refined Theory of Thermo-Elasticity of Orthotrope Shells of Variable Thickness	369
A. A. Papyan – The Vibrations of Conductive Rectangle Membrane in the	377

Transverse Magnetic Field.....	
<i>S. A. Ambartsumian, K. B. Ghazaryan</i> – Planar Vibration of Electroconductive Plate in a Transverse Magnetic Field	382
ELASTICITY THEORY	
<i>L. A. Aghalovyan, R. S. Gevorgyan, L. G. Ghulghazaryan</i> – About Detection of Stress-Strain States of Lithospheric Plates of the Earth Based on GPS Systems Data	264
PHYSICS	
<i>E. M. Kazaryan, N. G. Aghekyan, H. A. Sarkisyan</i> – A Single-Electron Current in a Cylindrical Nanolayer	73
<i>G. N. Gharajyan, A. M. Kechiantz, Zh. R. Panosyan</i> – Oscillating Processes and Their Bifurcations in the System of Plasma–Condensate with Feedbacks	185
<i>D. B. Hayrapetyan, H. Kh. Tevosyan</i> – Electronic States and Direct Interband Light Absorption in a Spherical Quantum Dot with Modified Poschel-Teller Potential.....	389
ASTROPHYSICS	
<i>S. S. Grigoryan</i> – On “Dark” Matter in Galaxies	273
CHEMICAL PHYSICS	
<i>A. M. Arustamyan, L. A. Manucharova, H. A. Jalali, I. A. Vardanyan</i> – Peculiarities of Heterogeneous Interaction of CH_3O_2 Radicals with Organic Compound Depending on the Surface Nature	194
<i>I. A. Vardanyan</i> – Critical Phenomena at Heterogeneous Interaction of CH_3O_2 Radicals with Organic Compound	277
BIOPHYSICS	
<i>A. E. Zagaryan, Z. A. Zagaryan, A. A. Trchounian</i> – Chemiluminescent Analysis Different Methods in Evaluation of Lipoproteins Free Radical Superoxide Oxidation of Human Blood Serum during Different Pathological Processes Development in Organism	79
<i>V. A. Ohanyan</i> – Combined Effects of Extremely High Frequency Electromagnetic Field and Antibiotics on <i>Enterococcus Hirae</i> Growth and Survival	87
<i>H. R. Vardapetyan, S. S. Blbulyan, S. G. Tiratsuyan, A. H. Trchounian</i> – Elucidation of Antiradical and Antibacterial Properties of <i>Hypericum Perforatum</i> Extracts	282
<i>L. Y. Hakobyan</i> – Effects of Ferrous Ions on the <i>Rhodobacter Sphaeroides</i> Growth Properties and Redox Activity	396
BIOCHEMISTRY	
<i>A. A. Simonyan, I. H. Batikyan, A. S. Margayan</i> – The Adaptation Mechanisms of Chick Embryo at Variable Incubation Temperature.....	95
<i>A. M. Badalyan</i> – Quantitative Changes of Blood Serum Proteins of White Mice Infected with Anthrax 55 Strain Under the Influence of Galarmin	102
<i>K. I. Israelyan, P. A. Ghazaryan, R. Kh. Sahakyan, M. A. Simonyan</i> – Long-Term Effects of Ionizing Radiation and Regulatory Mechanisms in Cardiomyocytes....	110
<i>G. K. Gevorgyan, M. A. Davtyan, A. A. Hambardzumyan</i> – Purification and Properties of D-Amino-Acid Oxidase from <i>Candida guilliermondii</i> HII-4	200
<i>G. Grigoryan</i> – Changes of Some Parameters of Natural Resistance in Animals during Prolonged Hypokinesia	208
<i>A. G. Grigoryan</i> – Distortion of Carbohydrate Metabolism in Animals during Hypokinesia	291
<i>A. S. Karagulyan</i> – The Role of New Cyan Containing Lactones Derivative in Regulation of a Metabolism of Thymus Cells Membrane Phosphoinositide Cycle Components in Case of Sarcoma-45	297
<i>A. F. Mirzoyan, Z. A. Karalyan, F. V. Mirzoyan, P. A. Karalyan</i> – The	403

mechanism of Action of the Drug from the Polyoxymetalat Class on the Distribution of Cell Nuclei for Ploid Classes	
<i>H. M. Amirkhanyan, S. H. Ghazaryan, S. S. Hovakimyan, K. G. Karageuzyan</i> – Effect of Derivatives of Ornithine Lithium Salts on the Process of Lipid Peroxidation in Brain and Liver Homogenates in vitro Experiments.....	411
<i>M. G. Rahmani, R. G. Kamalyan, M. J. Dehghan-Banadaky, G. J. Eskandari</i> - The Correlation between Energy Carriers in the Blood Plasma of Early Lactating Dairy Cows Receiving Supplemental Choline	417
MICROBIOLOGY	
<i>K. O. Hovnanyan, L. A. Navasardyan, M. K. Hovnanyan, A. A. Trchounian</i> – Ultrastructural Analysis of Volutin-Acidocalciumosomes Formation in Some Species of Bacteria, Spirochetes, Yeast and Protozoa during Morphogenesis and under Environment Different Factors Action	118
<i>S. F. Sharifi Alghabpoor, H. H. Panosyan, Yu. G. Popov, A. A. Trchounian</i> – Isolation and Identification of Two Aerobic Thermophilic Bacilli from Jowshan (Iran) Hot Spring	303
PHYSIOLOGY	
<i>K. V. Kazaryan, N. G. Hunanyan, N. N. Melkonyan</i> – Effect of Blood Supply on Parameters of Pacemaker Activity of Rat Uterus.....	312
<i>K. A. Panchulazyan</i> – Psychological and Psychophysiological Investigation of Personal within Human Resources Strategy for Business Activity	320
<i>A. S. Chobanyan, T. C. Martirosyan, H. H. Mkrtchyan</i> – Computational Investigations of Synaptic Learning Process.....	328
<i>A. A. Savayan, V. A. Chavushyan</i> – Electrophysiological Study of Neurons of Locus Coeruleus Rat's Brain after Discontinuation of Ethanol Consumption	422
ZOOLOGY	
<i>S. A. Aghayan, G. A. Boyakhchyan</i> – Diversity and Prevalence of Avian Haemosporidian Parasites in Caucasus	213