

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

2012

Երևան

Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ. Գ. ՂԱՐԱԳՅՈՋՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԲՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Ս. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Գ. Ա. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, академик К. Г. КАРАГЕЗЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician E. G. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician K. G. KARAGEUZYAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician R. M. MARTIROSYAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրության հասցեն՝ 0019, Երեւան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone: (37410) 56-80-67 URL: <http://elib.sci.am> e-mail: mas@sci.am

© НАН РА. Президиум. 2012

© Издательство “Гитутюн”

НАН РА. 2012

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Վ. Ս. Զաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան* – A_∞ դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին . 135
- Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան, Ռ. Է. Չախմախյան* – Էվկլիդեսյան տարածություններում նորմալ հարթ կիսագուգահեռ ենթաբազմաձևությունների դասակարգման մասին 141
- Լ. Նուրբեկյան, Դ. Գոմես* – Լագրանժյան դինամիկա և թույլ ԿԱՄ թեորեմ d – անվերջ չափանի տորի վրա..... 152
- Ա. Յու. Շահվերդյան* – Լիի մինիմալ հանրահաշիվ, նուրբ սահմաններ և դինամիկ համակարգեր..... 160
- Ա. Ա. Ալեքսանյան, Ա. Վ. Սողոյան* – Տեղադրությունների ծնման որոշ խնդիրների NP -լրիվության վերաբերյալ 170

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան* – Փոփոխական արագությամբ շարժվող ճաքի բուժման ոչ ստացիոնար խնդիրը 176

ՖԻԶԻԿԱ

- Գ. Ն. Ղարաջյան, Ա.Մ. Կեչիյանց, Ժ. Ռ. Փանոսյան* – Տատանողական պրոցեսները և դրանց ճյուղավորումները հակադարձ կապեր պարունակող պլազմախտուցքային համակարգում..... 185

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

- Ա. Մ. Առուստամյան, Լ. Ա. Մանուշարովա, Հ. Ա. Ջալալի, Ի.Ա. Վարդանյան* – CH_3O_2 ռադիկալների և օրգանական միացության փոխազդեցության առանձնահատկությունները՝ կախված մակերեսի բնույթից 194

ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ

- Գ. Կ. Գևորգյան, Մ. Ա. Դավթյան, Ա. Ա. Համբարձումյան* – *Candida guilliermondii* HPI-4 խմորասնկերի D-ամինաթթվային օքսիդազի մաքրումն ու հատկությունների ուսումնասիրումը 200
- Ա.Գ. Գրիգորյան* – Բնական դիմադրողականության ցուցանիշների փոփոխությունները առնետների և ցուլիկների մոտ հիպոկինեզիայի պայմաններում 208

ԿԵՆԴԱՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ս.Ա. Աղայան, Գ.Հ. Բոյախյան* – Թռչունների արյան սպորավոր մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը Կովկասում ----- 213

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>В. С. Захарян, Р. В. Даллакян</i> – О граничных значениях функций классов A_ω	135
<i>В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р.Э. Чахмахчян</i> – О классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах	141
<i>Л. Нурбекян, Д. Гомес</i> – Лагранжева динамика и слабая КАМ теорема на d -бесконечномерном торе	152
<i>А. Ю. Шахвердян</i> – Минимальная алгебра Ли, тонкие пределы и динамические системы	160
<i>А. А. Алексанян, А. В. Согоян</i> – Об NP -полноте некоторых задач генерации подстановок	170

МЕХАНИКА

<i>А.Н. Мартиросян, А.С. Динуни, А.В. Давтян</i> – Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью	176
---	-----

ФИЗИКА

<i>Г. Н. Караджян, А. М. Кечиянц, Ж. Р. Паносян</i> – Колебательные процессы и их бифуркации в системе плазма–конденсат с обратными связями	185
---	-----

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

<i>А. М. Арустамян, Л. Ф. Манучарова, Х. А. Джалали, И. А. Варданян</i> – Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в зависимости от природы поверхности	194
--	-----

БИОХИМИЯ

<i>Г. К. Геворкян, М. А. Давтян, А. А. Амбарцумян</i> – Очистка и свойства D-аминокислотной оксидазы из дрожжей <i>Candida guilliermondii</i> НП-4	200
<i>А. Г. Григорян</i> – Изменение показателей естественной резистентности у крыс и бычков при длительной гипокинезии	208

ЗООЛОГИЯ

<i>С. А. Агаян, Г. А. Бояхчян</i> – Разнообразие и распространение спорных кровепаразитов птиц Кавказа	213
--	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

V.S. Zakaryan, R.V. Dallakyan – About the Bordering Meanings of the A_ω Class Functions.....	135
V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan, R. E. Chakhmakhchyan – On Classification of Normally Flat Semiparallel Submanifolds in Euclidedan spaces	141
L. Nurbekyan, D. Gomes – Lagrangian dynamics and a Weak KAM Theorem on the d – infinite Dimensional Torus	152
A. Yu. Shahverdian – Minimal Lie Algebra, Fine Limits, and Dynamical Systems	160
A. A. Alexanian, A. V. Soghoyan – On NP-completeness of Some Permutation Generation Problems ..	170

MECHANICS

A. N. Martirosyan, A. S. Dinunts, A. V. Davtyan – The Unsteady Problems on Healing of Crack Moving with Arbitrary Velocity	176
--	-----

PHYSICS

G. N. Gharajyan, A. M. Kechiantz, Zh. R. Panosyan – Oscillating Processes and Their Bifurcations in the System of Plasma–Condensate with Feedbacks	185
--	-----

CHEMICAL PHYSICS

A. M. Arustamyan, L. A. Manucharova, H.A. Jalali, I. A. Vardanyan – Peculiarities of Heterogeneous Interaction of CH_3O_2 Radicals with Organic Compound Depending on the Surface Nature	194
--	-----

BIOCHEMISTRY

G. K. Gevorgyan, M. A. Davtyan, A.A. Hambardzumyan – Purification and properties of D-Amino-Acid Oxidase from <i>Candida guilliermondii</i> HPI-4	200
A. G. Grigoryan – Changes of Some Parameters of Natural Resistance in the Blood Serum of Rats and Calves during Prolonged Hypokinesia	208

ZOOLOGY

S. A. Aghayan, G. A. Boyakhchyan – Diversity and Prevalence of Avian Haemosporidian Parasites in Caucasus	213
---	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян

О граничных значениях функций классов A_ω

(Представлено 8/VI 2011)

Ключевые слова: ядра типа Коши, Шварца и Пуассона, гармонические функции, функции с конечным полным изменением, мера, B -измеримые множества, ω -емкость множества

Применение М. М. Джрбашяном нового подхода с интегродифференцированием привело к законченной форме теории факторизации классов $N\{\omega\}$ неванлинновского типа, которые зависят от функции параметра $\omega(x)$, заданной в $[0,1)$ [1]. Граничные свойства этих классов даны в совместной книге М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [2].

Через Ω обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$,

2) $\omega(0) = 1, \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty$.

Далее условимся функцию $P(\tau)$ включать в класс P_ω , если

$$P(0) = 1, P(\tau) = \tau \int_{\tau}^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx, \quad \tau \in (0,1],$$

где $\omega(x) \in \Omega$. Функция $P(\tau)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1]$, причем

$$P(+0) = P(0) = 1, \quad P(1) = 0.$$

Определим далее последовательность Δ_k следующим образом:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_k = k \cdot \int_0^1 \omega(x) \cdot x^{k-1} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для $\omega(x) \in \Omega$ рассмотрим следующий степенной ряд:

$$C(z, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1. \quad (1)$$

Функция $C(z, \omega)$ в равной мере, как и функция

$$S(z, \omega) = 2C(z, \omega) - C(0, \omega) = 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1, \quad (2)$$

аналитична в круге $U = \{z; |z| < 1\}$ и в точке $z = 1$ имеет особенность, причем

$$\lim_{r \rightarrow 1} C(r, \omega) = \lim_{r \rightarrow 1} S(r, \omega) = +\infty.$$

Теперь пусть $\omega(x) \in \Omega$ и $P(\tau) \in P_\omega$. Введем в рассмотрение следующий оператор:

$$L^{(\omega)}\{\Phi(x)\} = -\frac{d}{dx} \left\{ x \int_0^1 \Phi(x\tau) dP(\tau) \right\}, x \in (0, 1), \quad (3)$$

предполагая, что в надлежащих классах допустимых функций $\Phi(x)$, определенных на $(0, 1)$, левая часть тождества (3) существует хотя бы почти всюду на $(0, 1)$.

Можно убедиться (см. [1-4]), что применение оператора $L^{(\omega)}$ к какой-либо функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ на величину Δ_k , т.е.

$$L^{(\omega)}[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta_k z_k.$$

Применение же обратного оператора суть деление коэффициентов степенного ряда на величину Δ_k . В частности, оператор $L^{(\omega)}$ переводит ядра $C(z, \omega)$ и $S(z, \omega)$ в обычные ядра Коши и Шварца.

В общем случае оператор $L^{(\omega)}$ является взаимнооднозначным соответствием в классе голоморфных в U функций.

Введем в рассмотрение также следующую гармоническую в U функцию:

$$P(\gamma, r, \omega) = \operatorname{Re} S(re^{i\gamma}, \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\Delta_k} \cos k\gamma. \quad (4)$$

Заметим, что в частном случае $\omega(x) \equiv 1$ функция $P(\gamma, r, \omega)$ тождественна с ядром Пуассона.

Обозначим через U_ω множество гармонических в U функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^\pi |u_\omega(re^{i\varphi})| d\varphi < +\infty,$$

где $\omega(x) \in \Omega$ и $u_\omega(re^{i\varphi}) = L^{(\omega)}[u(re^{i\varphi})]$.

В [2] (см. с. 37) доказано, что класс U_ω совпадает с множеством гармонических функций $U(z)$, представимых в виде интеграла

$$U(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi - \gamma, r, \omega) d\psi(\gamma); \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \quad (5)$$

где $\psi(\gamma)$ произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[0, 2\pi]$.

Определим класс $A_\omega (\omega \in \Omega)$ как множество голоморфных в U функций, для которых $\sup_{0 \leq r \leq 1} m_\omega(r, f) < +\infty$, где

$$m_\omega(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ \ln |f(re^{i\theta})| \right\} d\theta. \quad (6)$$

Под Ω_0 будем понимать множество функций $\omega(x)$, определенных на $[0, 1)$ и подчиненных следующему условию:

1) $\omega(x)$ положительна, непрерывна и не убывает на $[0, 1)$, причем в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|\omega(x) - 1| \leq k(\delta) \cdot x, \quad 0 \leq x < \delta < 1;$$

$$2) \omega(0) = 1, \quad \int_0^1 \omega(x) dx \equiv \|\omega_1\|_1 < +\infty.$$

Заметим, что когда $\omega(x) \in \Omega_0$, то $A_\omega \subset A_0$, где A_0 – известный класс Островского – Неванлинны ([6]).

Условимся говорить, что B -измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет положительную ω -емкость $C_\omega(E)$, если существует мера $\mu \prec E$, для которой функция

$$U_\omega(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} |C_\omega(re^{i(\varphi-\gamma)}, \omega)| d\mu(\gamma) \quad (7)$$

остается равномерно ограниченной по $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $r \rightarrow 1-0$. Здесь $\mu \prec E$ означает, что мера μ сосредоточена на множестве E , т. е. $\int_E d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = \mu(E) = 1$. В случае отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu \prec E$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} U(re^{i\varphi}) = +\infty,$$

будем считать, что ω -емкость множества E равна нулю. При этом соответственно будем писать $C_\omega(E) > 0$ или $C_\omega(E) = 0$. Нетрудно убедиться, что при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$ определение $C_\omega(E)$ совпадает с определением α -емкости [2].

Теорема 1. Пусть $f(z) \in A_\omega$, $\omega(x) \in \Omega_0$ и не имеет нулей. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|, \omega)} = 0 \quad (8)$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества, ω -емкость которого равна нулю.

Доказательство. Если для некоторой точки $e^{i\theta}$ не имеет места равенство (8) (см. [5]), то существует последовательность $\{z_n\} \subset U$ такая, что $z_n \rightarrow e^{i\theta}$, когда $n \rightarrow +\infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|f(z_n)|}{C(|z_n|, \omega)} = d \neq 0. \quad (9)$$

Известно, что (см. [5]) если гармоническая функция $\ln|f(z)| \in U_\omega$ и имеет место равенство (9), то $\ln|f(z)|$ имеет следующее представление:

$$\ln|f(z)| = u(z) + s \cdot \operatorname{Re} S(re^{i(\theta-\varphi)}, \omega); \quad z = re^{i\varphi}, \quad (10)$$

где $u(z)$ – гармоническая функция из класса U_ω такая, что

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{u(z)}{C(|z|, \omega)} = 0, \quad (11)$$

а $2\pi s$ – скачок функции $\psi(\gamma)$ в точке θ в представлении (5) гармонической функции $\ln|f(z)|$.

Из (10), пользуясь (9) и (11), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} S(r_n e^{i(\theta-\varphi_n)}, \omega)}{S(r_n, \omega)} = d \neq 0, \quad z_n = r_n e^{i\varphi_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Обозначим через F_β луч, образующий угол β с радиусом, проходящим через точку $e^{i\theta}$. В [5] (теорема 2) доказано, что если последовательность $\{z_n\}$ находится на луче F_β , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} S(re^{i(\theta-\varphi_n)}, \omega)}{S(r_n, \omega)} = 2 \cos^2 \beta.$$

Так как здесь можно взять и $\beta = 0$, то с самого начала последовательность $\{z_n\}$ можно взять так, чтобы все его члены находились на радиусе, соединяющем точки 0 и $e^{i\theta}$. Таким образом, если (9) имеет место, то можно предполагать, что все точки z_n , $n = 1, 2, \dots$, находятся на вышеупомянутом радиусе.

Но известно (см. [2], с.118), что радиальные предельные значения любой функции из класса A_ω , $\omega \in \Omega_0$ существуют и конечны для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$, причем эти предельные значения могут равняться нулю только на множестве, ω -емкость которого равна нулю.

Так как $f(z)$ не имеет нулей, то в тех точках $e^{i\theta}$, где существует и конечен $\lim_{z=re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{z=re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|, \omega)} = 0,$$

причем ω -емкость множества, где нарушается это равенство, очевидно равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $f(z) \in A_\omega$, $\omega(x) \in \Omega_0$ и не имеет нулей. Если для некоторой точки $e^{i\theta}$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|, \omega)} = d \neq 0,$$

то угловые граничные значения (см. [6]) функции $\frac{\ln|f(z_n)|}{C(|z|, \omega)}$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$, не существуют, причем ω -емкость множества, где эти угловые граничные значения не существуют, равна нулю.

Доказательство. Если условия теоремы имеют место, то из теоремы 2 работы [5] имеем

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in F_\beta} \frac{\ln|f(z)|}{C(|z|, \omega)} = 2 \cos^2 \beta,$$

где F_β – луч, образующий угол β с радиусом, проходящим через точку $e^{i\theta}$. Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Следующее утверждение является следствием теоремы 2 работы [5].

Теорема 3. Пусть $f(z) \in A_\omega$, $\omega(x) \in \Omega_0$ и не имеет нулей. Тогда для любой точки $e^{i\theta}$, если z стремится к $e^{i\theta}$ по касательному к окружности пути,

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{\ln|f(z_n)|}{C(|z|, \omega)} = 0.$$

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, Р. В. Даллакян
О граничных значениях функций классов A_ω

Доказан ряд теорем о граничных значениях функций классов A_ω .

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Չաքարյան, Ռ. Վ. Դալլաքյան
 A_ω դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին

Ապացուցված են մի շարք թեորեմներ A_ω դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների մասին:

Academician V. S. Zakaryan, R.V. Dallakyan
About the Bordering Meanings of the A_ω Class Functions

Several theorems about the bordering meanings of the A_ω class functions have been proved.

Литература

1. Джрбашян М. М. - Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). С. 517-615.
2. Джрбашян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Изд. фирма "Физ.-мат. лит." ВО "Наука". 1993.
3. Джрбашян М. М., Захарян В. С. – Изв. АН СССР. Серия матем. 1970. Т. 34. С. 1262-1339.
4. Джрбашян А. М., Захарян В.С. – Изв. НАН Армении. Математика. 2009. Т. 44. № 6. С. 5-62.
5. Захарян В.С., Даллакян Р. В. - Математика в высшей школе. 2010. Т. 6. С. 5-16.
6. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М. Гос. изд-во техн.-теоретич. лит. М. 1950.

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р.Э. Чахмахчян

**О классификации нормально плоских полупараллельных
 подмногообразий в евклидовых пространствах**

(Представлено академиком В. С. Захаряном 3/X 2011)

Ключевые слова: *полупараллельные подмногообразия, Ric -полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы и полуэйнштейновы подмногообразия.*

Подмногообразие M евклидова пространства E_n называется полупараллельным, если полупараллельна его вторая фундаментальная форма α_2 . Теории полупараллельных подмногообразий посвящена монография Ю.Г.Лумисте [1]. Полупараллельные подмногообразия входят в класс Ric -полусимметрических подмногообразий, которые исследованы в [2-7]. Настоящая работа посвящена общей локальной классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в E_n .

Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . Отождествляя точку x с её радиус-вектором, имеем (см. [1, 8])

$$dx = \omega^A e_A, \quad de_A = \omega_A^B e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \quad A, B, C = 1, \dots, n.$$

Пусть $M - m$ -мерное подмногообразие в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ можно привести к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, где $x \in M$, $e_i \in T_x(M)$, $i, j, k = 1, \dots, m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta = m+1, \dots, n$, а $T_x(M)$ и

$T_x^\perp(M)$ – касательное и нормальное пространства к M в точке x . По известной схеме (см. [1-3]) будем иметь

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha$$

Здесь h_{ij}^α – компоненты второй фундаментальной формы α_2 , ω_i^j – 1-формы римановой связности ∇ на M , а ω_α^β – 1-формы нормальной связности $\nabla^\perp$. Компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ этих связностей и тензора Риччи R_1 определяются по формулам

$$R_{ikl}^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ – компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$ (коэффициент $1/m$ опускаем, поскольку в наших рассуждениях он не играет роли). При $R=0$ подмногообразие называется локально евклидовым, а при $R^\perp=0$ – нормально плоским. В дальнейшем через $T_x^{(0)}$, T'_x , $T_x^{(1)}$ будем обозначать, соответственно, пространства дефектности, относительной дефектности и кодефектности подмногообразия M в точке x (см. [2, 3, 9]). Определение полуэйнштейнова пространства можно найти в [2].

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют, и в силу этого в некотором ортонормированном базисе все они могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Подставляя в (1.2), получим $R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}$, $\rho_i = \sum_\alpha \left[(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha \right]$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются *главными векторами кривизны* (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n . Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$. Если $\langle, \rangle$ – скалярное произведение в E_n , то $\rho_i = \langle n_i, n_i \rangle - \langle H, n_i \rangle$.

Известно, что если вектор $n_i \neq 0$, то $e_i \in T_x^{(0)}$ тогда и только тогда, когда n_i ортогонален всем остальным г.в.к. и его кратность равна единице. Напомним, что ненулевой однократный г.в.к., ортогональный всем остальным г.в.к., называется *сингулярным*. Ненулевые г.в.к., отличные от сингулярных, называются *регулярными* [7].

Пусть в каждой точке x нормально плоское m -мерное подмногообразие M в E_n имеет q различных г.в.к. $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно, $p_1 + \dots + p_q = m$.

Через $F_x^{(\varphi)}$ ($\varphi = 1, \dots, q$) обозначим p_φ -мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет только одно собственное значение кратности p_φ . Это собственное значение мы будем обозначать через $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Именно в указанном выше смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим г.в.к. n_φ . Подпространства $F_x^{(\varphi)}$ являются инвариантными подпространствами матриц $\|h_{ij}^\alpha\|$ и, следовательно, матрицы $\|R_{ik}\|$. В дальнейшем будем предполагать, что в некоторой области на M подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности, и через $F^{(\varphi)}$ обозначать соответствующее распределение. Справедливо разложение в прямую сумму: $T_x(M) = F_x^{(1)} + \dots + F_x^{(q)}$. Важнейшие свойства подпространств $F_x^{(\varphi)}$ и их связь с $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ получены в [7].

Пусть M является m -мерным нормально плоским подмногообразием в E_n . Для того, чтобы M было Ric -полусимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его г.в.к. n_i удовлетворяли условию $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle \cdot \langle n_i, n_j \rangle = 0$ [1,2]. Отсюда следует, что множество ненулевых г.в.к. нормально плоского Ric -полусимметрического подмногообразия разбивается на группы, обладающие следующими свойствами: 1) если векторы n_i и n_j ($i \neq j$) принадлежат одной и той же группе, то они удовлетворяют условию $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle = 0$; 2) если векторы n_i и n_j принадлежат разным группам, то они ортогональны и не удовлетворяют условию $\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H \rangle = 0$. Множество всех сингулярных г.в.к. Ric -полусимметрического подмногообразия M обозначим через $W^{(0)}$. Будем считать также, что $W^{(0)}$ содержит нулевой г.в.к., если такой имеется. Регулярные г.в.к. разбиваются на группы, содержащие не менее двух векторов или один вектор, имеющий кратность. Эти группы будем обозначать через $W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$. Из свойства 1) следует, что собственные значения тензора Риччи, соответствующие векторам одной и той же группы, равны между собой, а разным группам соответствуют разные собственные значения тензора Риччи.

Пусть M является m -мерным нормально плоским Ric -полусимметрическим подмногообразием индекса дефектности $\mu = \dim T_x^{(0)}$ в E_n ($n - m \geq 2$) и в каждой точке $x \in M$ имеет две группы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ регулярных г.в.к. (что не будет умалять общности рассуждений). Пусть в $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ имеются по q_1 и q_2 вектора соответственно: $n_1, \dots, n_{q_1} \in W^{(1)}$, $n_{q_1+1}, \dots, n_{q_1+q_2} \in W^{(2)}$. Как мы знаем, векторы, принадлежащие разным группам, ортогональны. Пусть $T_x^{W^{(1)}} = F_x^{(1)} + \dots + F_x^{(q_1)}$, $T_x^{W^{(2)}} = F_x^{(q_1+1)} + \dots + F_x^{(q_1+q_2)}$. Наша цель – доказать, что в случае, когда кратности векторов $n_1, \dots, n_{q_1}$, $n_{q_1+1}, \dots, n_{q_1+q_2}$ больше единицы, распределения $T^{W^{(1)}}$, $T^{W^{(2)}}$ параллельны друг относительно друга в римановой связности на M .

Обозначим кратности этих векторов через $p_1, \dots, p_{q_1}, p_{q_1+1}, \dots, p_{q_1+q_2}$ соответственно и будем считать, что все они больше единицы. Адаптированный к M ортонормрепер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ можно выбрать так, чтобы в каждой точке $x \in M$ $e_{i_\varphi} \in F_x^{(\varphi)}$, $e_{i_u} \in F_x^{(u)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, где индексы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi, \chi &= 1, \dots, q_1, \quad u, v = 1, \dots, q_2, \quad i_\varphi, j_\varphi = p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + p_\varphi, \\ r_u, s_u &= p_1 + \dots + p_{q_1} + p_{q_1+1} + \dots + p_{q_1+u-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{q_1} + p_{q_1+1} + \dots + p_{q_1+u-1} + p_{q_1+u}, \\ r, s &= p_1 + \dots + p_{q_1+q_2} + 1, \dots, m, \quad \alpha, \beta = m+1, \dots, n, \quad i, j, k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельны в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\beta^\alpha = 0$. Тогда $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \omega^i$ и, кроме того,

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \quad (1)$$

С учетом принятых обозначений имеем $\omega_r^\alpha = 0$, если $\lambda_r^\alpha = 0$.

Пусть в (1) $i = i_\varphi$, $j = j_\varphi$ ($i_\varphi \neq j_\varphi$). Тогда левая часть равна нулю и, следовательно, $h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0$.

Аналогичным образом, если $i = r_u$, $j = s_u$ ($r_u \neq s_u$), то $h_{r_u s_u k}^\alpha = 0$. Полагая в (1) $i = j = i_\varphi$, а затем $i = j = j_\varphi$, $j_\varphi \neq i_\varphi$, получим $h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0$, $h_{i_\varphi i_\varphi j_\varphi}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi j_\varphi}^\alpha$, $\varphi \neq \psi$, $h_{i_\varphi i_\varphi r_u}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r_u}^\alpha$, $h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha$.

Аналогично $h_{r_u r_u r_u}^\alpha = 0$, $h_{r_u r_u s_u}^\alpha = h_{s_u s_u s_u}^\alpha$, $u \neq v$, $h_{r_u r_u j_\varphi}^\alpha = h_{s_u s_u j_\varphi}^\alpha$, $h_{r_u r_u r}^\alpha = h_{s_u s_u r}^\alpha$. Следовательно,

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \sum_{\psi \neq \varphi} h_{i_\varphi i_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + \sum_u h_{i_\varphi i_\varphi r_u}^\alpha \omega^{r_u} + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r, \quad (2)$$

$$d\lambda_{(u)}^\alpha = \sum_{v \neq u} h_{r_u r_u s_v}^\alpha \omega^{s_v} + \sum_{\varphi} h_{r_u r_u i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{r_u r_u r}^\alpha \omega^r. \quad (3)$$

Если в (1) положить $i = r$, $j = j_\varphi$, а затем $i = r$, $j = s_v$, то будем иметь

$$(\lambda_{(\varphi)}^\alpha - \lambda_r^\alpha) \omega_{j_\varphi}^r = h_{r j_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + \sum_{\psi \neq \varphi} h_{r j_\varphi k_\psi}^\alpha \omega^{k_\psi} + \sum_u h_{r j_\varphi r_u}^\alpha \omega^{r_u} + h_{r r j_\varphi}^\alpha \omega^r + h_{r j_\varphi t}^\alpha \omega^t, \quad t \neq r, \quad (4)$$

$$(\lambda_{(v)}^\alpha - \lambda_r^\alpha) \omega_{s_v}^r = h_{r s_v s_v}^\alpha \omega^{s_v} + \sum_{u \neq v} h_{r s_v r_u}^\alpha \omega^{r_u} + \sum_u h_{r s_v j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + h_{r r s_v}^\alpha \omega^r + h_{r s_v t}^\alpha \omega^t. \quad t \neq r. \quad (5)$$

Умножая равенство (4) на $\lambda_{s_v}^\alpha$, а (5) на $\lambda_{i_\psi}^\alpha$ и суммируя по α , получим

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{r j_\varphi j_\varphi}^\alpha &= 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{r j_\varphi k_\psi}^\alpha = 0, \quad \varphi \neq \psi, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{r j_\varphi r_u}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{r r j_\varphi}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{r j_\varphi t}^\alpha = 0, \quad t \neq r, \\ \sum_\alpha \lambda_{i_\psi}^\alpha h_{r s_v j_\varphi}^\alpha &= 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{i_\psi}^\alpha h_{r s_v r_u}^\alpha = 0, \quad u \neq v, \quad \sum_\alpha \lambda_{i_\psi}^\alpha h_{r s_v s_v}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha h_{r r s_v}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha h_{r s_v t}^\alpha = 0, \quad t \neq r. \end{aligned}$$

Эти соотношения получены на основании того, что г.в.к., принадлежащие разным группам, ортогональны, т.е. $\sum_\alpha \lambda_{i_\varphi}^\alpha \lambda_{r_u}^\alpha = 0$. Тогда $\sum_\alpha (\lambda_{i_\varphi}^\alpha d\lambda_{r_u}^\alpha + \lambda_{r_u}^\alpha d\lambda_{i_\varphi}^\alpha) = 0$ и, подставляя сюда соотношения (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \lambda_{r_u}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi s_u}^\alpha &= 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{i_\varphi}^\alpha h_{r_u r_u i_\varphi}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha (\lambda_{i_\varphi}^\alpha h_{r_u r_u s_v}^\alpha + \lambda_{r_u}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi s_v}^\alpha) = 0, \quad u \neq v, \\ \sum_\alpha (\lambda_{i_\varphi}^\alpha h_{r_u r_u k_\psi}^\alpha + \lambda_{r_u}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi k_\psi}^\alpha) &= 0, \quad \varphi \neq \psi, \quad \sum_\alpha (\lambda_{i_\varphi}^\alpha h_{r_u r_u r}^\alpha + \lambda_{r_u}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Если в (1) положить $i = i_\varphi$, $j = j_\psi$, $\varphi \neq \psi$, а затем $i = r_u$, $j = s_v$, $u \neq v$, то будем иметь

$$(\lambda_{j_\psi}^\alpha - \lambda_{i_\varphi}^\alpha) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = h_{i_\varphi j_\psi i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{i_\varphi j_\psi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + \sum_{\chi \neq \varphi, \psi} h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha \omega^{k_\chi} + \sum_v h_{i_\varphi j_\psi s_v}^\alpha \omega^{s_v} + h_{i_\varphi j_\psi r}^\alpha \omega^r, \quad (6)$$

$$(\lambda_{s_v}^\alpha - \lambda_{r_u}^\alpha) \omega_{s_v}^{r_u} = h_{r_u s_v r_u}^\alpha \omega^{r_u} + h_{r_u s_v s_v}^\alpha \omega^{s_v} + \sum_{l \neq u, v} h_{r_u s_v s_l}^\alpha \omega^{s_l} + \sum_{\psi} h_{r_u s_v j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{r_u s_v r}^\alpha \omega^r. \quad (7)$$

При $i = i_\varphi$, $j = r_u$ из (1) имеем

$$(\lambda_{i_\varphi}^\alpha - \lambda_{r_u}^\alpha) \omega_{i_\varphi}^{r_u} = h_{i_\varphi r_u i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{i_\varphi r_u r_u}^\alpha \omega^{r_u} + \sum_{\psi \neq \varphi} h_{i_\varphi r_u j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + \sum_{v \neq u} h_{i_\varphi r_u s_v}^\alpha \omega^{s_v} + h_{i_\varphi r_u r}^\alpha \omega^r. \quad (8)$$

Умножая (6) на $\lambda_{s_v}^\alpha$, а (7) на $\lambda_{j_\chi}^\alpha$ и суммируя по α , получим следующие соотношения:

$$\sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{i_\varphi j_\psi i_\varphi}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{i_\varphi j_\psi j_\psi}^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha = 0, \quad \chi \neq \varphi, \chi \neq \psi, \varphi \neq \psi, \quad \sum_\alpha \lambda_{s_v}^\alpha h_{i_\varphi j_\psi s_u}^\alpha = 0,$$

$\varphi \neq \psi$,

$$\sum_{\alpha} \lambda_{j_{\chi}}^{\alpha} h_{r_u s_v j_{\psi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{j_{\chi}}^{\alpha} h_{r_u s_v r_u}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{j_{\chi}}^{\alpha} h_{r_u s_v s_l}^{\alpha} = 0, \quad l \neq u, l \neq v, u \neq v, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{j_{\chi}}^{\alpha} h_{r_u s_v s_v}^{\alpha} = 0, \quad u \neq v.$$

Умножая (8) на $\lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha}$, а затем на $\lambda_{r_u}^{\alpha}$ и суммируя по α , получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \left(\lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} \right)^2 \omega_{i_{\varphi}}^{r_u} &= \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u i_{\varphi}}^{\alpha} \omega^{i_{\varphi}} + \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u r_u}^{\alpha} \omega^{r_u} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u j_{\psi}}^{\alpha} \omega^{j_{\psi}} + \\ &+ \sum_{v \neq u} \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u s_v}^{\alpha} \omega^{s_v} + \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{r_u i_{\varphi} r}^{\alpha} \omega^r, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha} \left(\lambda_{r_u}^{\alpha} \right)^2 \omega_{i_{\varphi}}^{r_u} &= \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u i_{\varphi}}^{\alpha} \omega^{i_{\varphi}} + \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u r_u}^{\alpha} \omega^{r_u} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u j_{\psi}}^{\alpha} \omega^{j_{\psi}} + \\ &+ \sum_{v \neq u} \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u s_v}^{\alpha} \omega^{s_v} + \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{r_u i_{\varphi} r}^{\alpha} \omega^r. \end{aligned} \quad (10)$$

Если в (9) и (10) учесть соотношения

$$\sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u j_{\psi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{r_u r_u j_{\psi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} i_{\varphi} r_u}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{r_u s_v j_{\varphi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{r_u r_u i_{\varphi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{r_u i_{\varphi} r}^{\alpha} = 0,$$

где $\varphi \neq \psi$, $u \neq v$, то окончательно получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \left(\lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} \right)^2 \omega_{i_{\varphi}}^{r_u} &= \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u i_{\varphi}}^{\alpha} \omega^{i_{\varphi}} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u j_{\psi}}^{\alpha} \omega^{j_{\psi}}, \\ -\sum_{\alpha} \left(\lambda_{r_u}^{\alpha} \right)^2 \omega_{i_{\varphi}}^{r_u} &= \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u r_u}^{\alpha} \omega^{r_u} + \sum_{v \neq u} \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u s_v}^{\alpha} \omega^{s_v}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u i_{\varphi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{i_{\varphi}}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u j_{\psi}}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u r_u}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{r_u}^{\alpha} h_{i_{\varphi} r_u s_v}^{\alpha} = 0, \quad \omega_{i_{\varphi}}^{r_u} = 0. \quad (11)$$

На основании последнего равенства системы (11) заключаем, что распределения $T^{W^{(1)}}$, $T^{W^{(2)}}$ параллельны друг относительно друга на подмногообразии M . Поскольку число распределений в наших рассуждениях не играло никакой роли, то справедлива следующая

Теорема 1. Пусть M является t -мерным нормально плоским *Ric*-полусимметрическим подмногообразием евклидова пространства E_n ($n-t \geq 2$) и пусть в каждой точке M допускает всего p групп $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$ регулярных главных векторов кривизны. Если кратности всех этих векторов больше единицы, то распределения $T^{W^{(1)}}$, $T^{W^{(2)}}$, ..., $T^{W^{(p)}}$, соответствующие группам $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$, параллельны друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$) в римановой связности на M .

Условие полупараллельности нормально плоского подмногообразия в E_n в терминах г.в.к. имеет следующий вид: $(n_i - n_j) \langle n_i, n_j \rangle = 0$ для любых двух г.в.к. n_i, n_j [1]. Итак, любые два г.в.к. нормально плоского полупараллельного подмногообразия равны друг другу или взаимно ортогональны. Следовательно, множество регулярных г.в.к. полупараллельного подмногообразия разбивается на группы $W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(p)}$, где каждая группа состоит из взаимно ортогональных векторов, кратности которых ≥ 2 . При доказательстве теоремы 1 главную роль играло условие взаимной ортогональности регулярных г.в.к., а также то, что их кратности были ≥ 2 . Поэтому в случае полупараллельного подмногообразия распределения $F^{(\varphi)}$ (см. §1), отвечающие регулярным г.в.к., будут параллельны друг относительно друга (но не относительно $T^{(0)}$). Интегральное многообразие распределения $F^{(\varphi)}$, как известно [1-3], является сферой размерности p_φ . Поскольку сферы как подмногообразия неприводимы, то разложение $T_x(M) = T_x^{(0)} + F_x^{(1)} + \dots + F_x^{(q)}$, где q – число регулярных г.в.к. (одномерные подпространства $F^{(\varphi)}$, соответствующие сингулярным г.в.к., содержатся в $T_x^{(0)}$), фактически является V -разложением 3. Сабо [10]. Продолжая это разложение до соответствующего Z -разложения [10], получим $T_x(M) = Z_x^{(0)} + Z_x^{(1)} + \dots + Z_x^{(q)}$, где $Z_x^{(\varphi)}$, $\varphi > 0$, является расширением $F_x^{(\varphi)}$ только за счёт $T_x^{(0)}$. Распределения $Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(q)}$, как известно [10], параллельны на всём подмногообразии M . Что представляют собой их интегральные многообразия, выясним несколько позже.

Нормально плоские полупараллельные подмногообразия были классифицированы и геометрически описаны в терминах скрещенных произведений в [1] и [11]. Однако результаты, полученные в [1] и [11], нельзя считать окончательными, поскольку термин “скрещенное произведение” (т.е. произведение $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_r$, наделённое римановой метрикой $ds_0^2 + f_1^2 ds_1^2 + \dots + f_r^2 ds_r^2$, где f_k – знакпостоянные функции на M_0) характеризует внутреннюю геометрию. Подмногообразие необходимо геометрически описывать с точки зрения объёмлющего пространства, а не с точки зрения внутренней метрики.

Определение. Изометрическое погружение $M = M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow E_n$ произведения римановых многообразий $M_1, \dots, M_r$ в E_n называется сплетающимся произведением

подмногообразий $M_1, \dots, M_r$, если M неприводимо в E_n как подмногообразие (многообразие и его изометрический образ мы отождествляем).

Это понятие было введено первым автором в [12]. Там же доказана следующая общая классификационная.

Теорема 2. В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X, Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова (в частности, риччи-плоского, локально евклидова) подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.

Возвратимся теперь к распределениям $Z^{(\varphi)}$ и выясним, что представляют из себя их интегральные многообразия. Поскольку $Z_x^{(\varphi)}$ является расширением подпространства $F_x^{(\varphi)}$ только за счёт $T_x^{(0)}$, то $Z_x^{(\varphi)}$ можно представить в виде следующей прямой суммы: $Z_x^{(\varphi)} = F_x^{(\varphi)} + T_x^{(0, \varphi)}$, где $T_x^{(0, \varphi)}$ – некоторое подпространство в $T_x^{(0)}$. Если $T_x^{(0, \varphi)}$ является нулевым, то распределение $Z^{(\varphi)}$ совпадает с $F^{(\varphi)}$ и его интегральное многообразие является сферой. Пусть $T_x^{(0, \varphi)}$ не является нулевым и пусть $M^{(\varphi)}$ обозначает интегральное многообразие распределения $Z^{(\varphi)}$. Если $M^{(\varphi)}$ будем рассматривать как подмногообразие в E_n , то $T_x^{(0, \varphi)}$ будет его пространством дефектности, а $F_x^{(\varphi)}$ – пространством кодефектности в точке x . Распределение $F^{(\varphi)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие является сферой, т.е. вполне омбилическим подмногообразием в $M^{(\varphi)}$. Это значит, что для $M^{(\varphi)}$ выполняются условия следующей теоремы.

Теорема 3. ([2]). Пусть M – n -мерное риманово многообразие с постоянным индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $T^{(1)}$, $\dim T^{(1)} = n - \mu \geq 2$. Если его интегральное многообразие $M^{(1)}$ является вполне омбилическим в M , то: 1) M локально изометрично либо цилиндру над $M^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu - 1)$ -мерным образующим над конусом, построенным над $M^{(1)}$, 2) M полуэйнштейново либо

риччи-плоское тогда и только тогда, когда $M^{(1)}$ эйнштейново; более того, если $M^{(1)}$ эйнштейново с константой $\varphi \leq 0$, то M полуэйнштейново, если же $\varphi > 0$, то M либо полуэйнштейново, либо риччи-плоское.

На основании этой теоремы заключаем, что $M^{(\varphi)}$, как подмногообразие в E_n , локально изометрично или цилиндру над сферой, или конусу над сферой, или цилиндру над конусом, построенным над сферой. Далее, рассуждая как и в [12], приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M является полупараллельным тогда и только тогда, когда оно представляет собой открытую часть одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского локально евклидова подмногообразия, (2) сферы, (3) конуса над сферой (с точностью до изометрии), (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий, каждое из которых является конусом над сферой (с точностью до изометрии), и локально евклидова подмногообразия (возможно размерности ноль), (б) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

Государственный инженерный университет Армении

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р.Э. Чахмахчян

О классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах

Доказано, что в евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M является полупараллельным тогда и только тогда, когда оно представляет собой открытую часть одного из следующих подмногообразий: 1) нормально плоского евклидова подмногообразия, 2) сферы, 3) конуса над сферой (с точностью до изометрии), 4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий, каждое из которых является конусом над сферой (с точностью до изометрии), и локально евклидова подмногообразия (возможно размерности ноль), 5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.

Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան, Ռ. Է. Չախմախչյան
Էվկլիդեսյան տարածություններում նորմալ հարթ կիսագուգահեռ
ենթաբազմաձևությունների դասակարգման մասին

Ապացուցված է, որ E_n Էվկլիդեսյան տարածությունում նորմալ հարթ M ենթաբազմաձևությունը հանդիսանում է կիսագուգահեռ այն, և միայն այն դեպքում, երբ նա հանդիսանում է հետևյալ ենթաբազմաձևություններից մեկի բաց մաս՝ 1) նորմալ հարթ լոկալ Էվկլիդեսյան ենթաբազմաձևության, 2) սֆերայի, 3) սֆերայի վրա կառուցված կոնի (իզոմետրիայի ճշտությամբ), 4) ենթաբազմաձևությունների նորմալ հարթ միահյուսված արտադրյալի, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է կոն կառուցված սֆերայի վրա (իզոմետրիայի ճշտությամբ), և լոկալ Էվկլիդեսյան ենթաբազմաձևության (հնարավոր է գրոյական չափողականության), 5) վերը թվարկված ենթաբազմաձևությունների դասերի ուղիղ արտադրյալի:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan, R. E. Chakhmakhchyan
On Classification of Normally Flat Semiparallel Submanifolds in Euclidean spaces

It has been proved that a normally flat submanifold M in Euclidean space E_n is semiparallel if and only if it is an open part of one of the following submanifolds: 1) normally flat locally Euclidean submanifold, 2) sphere, 3) cone over sphere (up to the isometry), 4) normally flat interlacing product of semi-Einstein submanifolds, each of which is cone over sphere (up to the isometry), and locally Euclidean submanifold (may be of zero dimension), 5) direct product of the above enumerated classes of submanifolds.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer. 2009.
2. *Мирзоян В.А.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т.67. N 5. С. 107-124.
3. *Мирзоян В.А.*- Матем. сб. 2006. Т. 197. N 7. С. 47-76.
4. *Мирзоян В.А.*- Матем. сб. 2008. Т. 199. N 3. С. 69-94.
5. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.*- ДНАН РА. 2009. Т. 109. N 2.С. 119-125.
6. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.* - Вестник ГИУА(Политехник). 2011. Т. 3. N 1.С. 3-7.
7. *Мирзоян В.А.*- Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. N 6. С. 47-78.

8. *Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S.* Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000.
9. *Chern S.S., Kuiper N.-* Ann. of. Math. 1952. V. 56. N 3. P. 422-430.
10. *Szabo Z.I.* - J. Differential Geom. 1982. V. 17. N 4. P. 531-582.
11. *Dillen F., Nölker S.-* J. Reine Angew. Math. 1993. V. 435. P. 33-63.
12. *Mirzoyan V.A.-* ДИАН ПА 2012. Т 112. N1. С. 19-29.

MATHEMATICS

УДК 517.938

L. Nurbekyan¹, D.Gomes²

Lagrangian dynamics and a Weak KAM Theorem on
 the d – infinite dimensional torus

(Submitted by corresponding member of NAS RA A.A.Sahakyan13/X 2012)

Keywords: *dynamical systems, partial differential equations, viscosity solutions, weak KAM theory, Aubry-Mather, Vlasov-Poisson system*

1.Introduction. Certain partial differential equations on infinite dimensional spaces can be treated via infinite dimensional dynamical systems. Consequently one needs to develop the theory of infinite dimensional dynamical systems. In the paper [2] authors define a natural Riemannian structure on the space of square integrable functions $L^2(0,1)$ on the basis of which they introduce a so called *infinite dimensional torus* T . For a certain class of Hamiltonians they were able to prove the existence of a viscosity solution to the *cell problem* on T . As an application they obtain existence of an existence of absolute action-minimizing solutions of prescribed rotation number for the one-dimensional nonlinear Vlasov system with periodic potential.

The aim of the current work is to generalize the results proven in [2] for the higher dimensional case. As a consequence one can get the existence of the solutions and asymptotics to the d - dimensional ($d \geq 1$) nonlinear Vlasov system with periodic potential. Moreover, we prove the existence of the so called *two sided minimizers* for the cell problem over the d -infinite dimensional torus T^d .

2.Notations and definitions. I^d will denote the d -dimensional unit cube in $\mathbb{R}^d$. As usual $|\cdot|$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ will respectively represent the Euclidian norm and inner product in $\mathbb{R}^d$. T^d will be the notation for the d -dimensional torus. The distance on T^d is the following:

$$\|x\|_{\mathbb{T}^d} = \inf_{k \in \mathbb{Z}^d} \|x + k\|, x \in \mathbb{T}^d.$$

L^d will be the d -dimensional Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$. ν_0 will be the restriction of L^d on the unit cube I^d .

We will denote by $L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$ the space of all square integrable functions defined on the unit cube $L^2(I^d; \mathbb{R}^d) := \{M : I^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \int_{I^d} |M(x)|^2 d\nu_0 < \infty\}$. $L^2_{\mathbb{Z}}(I^d; \mathbb{R}^d)$ will be the set of the square integrable functions with d -integer values: $L^2_{\mathbb{Z}}(I^d; \mathbb{R}^d) := \{M \in L^2(I^d; \mathbb{R}^d) : M(x) \in \mathbb{Z}^d, \forall x \in I^d\}$.

$P_2(\mathbb{R}^d)$ denotes the set of all Borel probability measures on $\mathbb{R}^d$ with finite second order moments: $P_2(\mathbb{R}^d) := \{\mu \in P(\mathbb{R}^d); \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu < \infty\}$.

If $(E, \|\cdot\|)$ is a norm space, $L^2(0, T; E)$ is the set of Borel functions $M : (0, T) \rightarrow E$ such that $\int_0^T \|M_t\|_E^2 dt < \infty$. We will write M_t in place of $M(t)$.

If $M : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ is a measurable map and μ is a measure defined on a sigma algebra $\mathcal{F}$ then $\nu = M\#\mu$ is the measure defined on sigma algebra $\mathcal{G}$ given by $\nu[C] = \mu[M^{-1}(C)]$ for all sets $C \in \mathcal{G}$.

Suppose $(S, dist)$ is a complete metric space and $\sigma : (0, T) \rightarrow S$. Denote by σ_t the value of σ at t . If there exists $\beta \in L^2(0, T)$ such that $dist(\sigma_t, \sigma_s) \leq \int_s^t \beta(u) du$ for every $s < t$ in $(0, T)$, we say that σ is absolutely continuous. Denote by $AC^2(0, T; S)$ the set of all absolutely continuous paths $\sigma : (0, T) \rightarrow S$.

Denote by G the set of bijections $G : I^d \rightarrow I^d$ such that G, G^{-1} are Borel and preserve the Lebesgue measure.

Definition 2.1. Let $U : L^2(I^d; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. (i) We say that U is periodic if it is invariant under integer valued translations. (ii) We say that U is invariant under the action G or rearrangement invariant if $U(M \circ G) = U(M)$ for all $M \in L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$ and $G \in G$.

3. d -infinite dimensional torus $\mathbb{T}^d$ and the space $\mathcal{S}^d$. Let $\hat{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ be the integer part function i.e. $\hat{x} = \sup\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ and $\pi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ be the fractional part function i.e. $\pi(x) = x - \hat{x}$, for $x \in \mathbb{R}$. $L^2_{\mathbb{Z}}(I^d)$ is a subgroup of $(L^2(I^d), +)$ and thus we can consider the quotient space which will be the d -dimensional L^2 -torus $\mathbb{T}^d$. So we set

$$TL^2(I^d; \mathbb{R}^d) := L^2(I^d; \mathbb{R}^d) \times L^2(I^d; \mathbb{R}^d), \mathbb{T}^d := L^2(I^d; \mathbb{R}^d) / L^2_{\mathbb{Z}}(I^d; \mathbb{R}^d).$$

Note that function π projects a function $M = (M_1, \dots, M_d) \in L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$ onto $\mathbb{T}^d$ as follows

$$\pi(M(x)) = (\pi(M_1(x)), \pi(M_2(x)), \dots, \pi(M_d(x))), x \in \mathbb{I}^d.$$

The norm on $L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$ induces distance $dist_{\mathbb{Z}}$ on T^d given by

$$dist_{\mathbb{Z}}(M_1, M_2) = \inf_{Z \in L^2_{\mathbb{Z}}(I^d; \mathbb{R}^d)} \|M_1 - M_2 - Z\|. \quad (3.1)$$

Endowed with this distance T^d becomes a metric space.

Proposition 3.1. $(T^d, dist_{\mathbb{Z}})$ is a complete, separable metric space.

We do further factorization of the space T^d with respect to the group G . Denote by W_{T^d} the Wasserstein distance on the torus T^d . Recall that if $\mu, \nu \in P(T^d)$ and $\Gamma(\mu, \nu)$ is the set of Borel measures on $T^d \times T^d$ which have μ and ν as marginals, then

$$W_{T^d}^2(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{T^d \times T^d} \|x - y\|_{T^d}^2 d\gamma(x, y) \quad (3.2)$$

We will identify $P(T^d)$ with $P([0,1]^d)$. The group G is a non commutative group which acts on $L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$: $(G, M) \rightarrow M \circ G$. This is an action which preserves the norm of M . But G acts on $L^2_{\mathbb{Z}}(I^d; \mathbb{R}^d)$, it provides an action on the quotient space T^d .

The metric on T^d induces a function which is a *quasimetric* on the quotient space T^d/G i.e. for $M_1, M_2 \in L^2(I^d; \mathbb{R}^d)$ put

$$dist_{weak}(M_1, M_2) = \inf_{G \in G} dist_{\mathbb{Z}}(M_1, M_2 \circ G).$$

It is symmetric and satisfies triangle inequality because $dist_{\mathbb{Z}}$ does so. So it is an quasimetric on T^d/G . It is not a metric because there can be two functions M_1, M_2 which have 0 weak distance but their projections on T^d/G are different. We *metrize* it by gluing the functions which have 0 weak distance.

Definition 3.1. The space S_d is the factor space of the space $L^2(I)$ w.r.t. the equivalence relation $\sim: M_1 \sim M_2$ iff $dist_{weak}(M_1, M_2) = 0$. Furthermore the distance $dist_S$ is defined by the formula $dist_S([M_1], [M_2]) = dist_{weak}(M_1, M_2)$ for any equivalence classes $[M_1], [M_2] \in S_d$.

Remark 3.1. One can prove that $M_1 \sim M_2$ iff $\pi(M_1) \# \nu_0 = \pi(M_2) \# \nu_0$.

The metric space $(S_d, dist_S)$ enjoys some nice topological properties.

Theorem 3.1. The metric spaces $(S_d, dist_S)$ and $(P(T^d), W_2)$ are isometric.

From this Theorem we immediately have:

Corollary 3.1. The space $(S_d, dist_S)$ is a complete, separable, compact metric space.

We next compute the first cohomology group of T^d , and then the first equivariant cohomology group of T^d under the action of G .

Proposition 3. 2. Assume $S : L^2(I^d; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ is Frechet differentiable and Lipschitz. (i) If dS is periodic in the sense that $d_{M+Z}S = d_MS$ for all $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ and $Z \in L^2_{\mathbf{Z}}(I^d; \mathbf{R}^d)$, then there exist a unique $C \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ and $U : L^2(I^d; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ periodic such that $S(M) = U(M) + \langle C, M \rangle$. (ii) If, in addition, $M \rightarrow d_MS(M)$ is rearrangement invariant the C is a constant function and U is rearrangement invariant.

4.Weak KAM theory on $L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$. Let $c \in \mathbb{R}^d$ and

$$L(M, N) = \frac{1}{2} \|N\|^2 - \frac{1}{2} W(M),$$

together with

$$L_c(M, N) = L(M, N) - c \int_I Nd\nu_0, \bar{L}(M, N) = L_c(M, -N).$$

Here, $W : L^2(I^d; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ is C^1 periodic, semiconcave and semiconvex, Lipschitz and differentiable invariant under the action of G . Define the Legendre transforms of $L(M, \cdot)$ and $L_c(M, \cdot)$:

$$H(M, N) = \frac{1}{2} \|N\|^2 + \frac{1}{2} W(M),$$

and

$$H_c(M, N) = H(M, N + c), \bar{H}(M, N) = H_c(M, -N).$$

We now consider viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations in the infinite dimensional setting. We recall the definition of viscosity solutions.

Definition 4. 1. Let V be a real valued proper functional defined on $L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ with values in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Let $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ and $\xi \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$. (i) We say that ξ belongs to the subdifferential of V at M and we write $\xi \in D^-V(M)$ if $V(M + X) - V(M) \geq \langle \xi, X \rangle + o(\|X\|)$ for all $X \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$. (ii) We say that ξ belongs to the superdifferential of V at M and we write $\xi \in D^+V(M)$ if $-\xi \in D^-(-V)(M)$.

Remark 4.1. When the sets $D^-V(M)$ and $D^+V(M)$ are both nonempty, then they coincide and consist of a single element. That element is $\nabla V(M)$, the gradient of V at M .

We can now define the notion of viscosity solution for a general Hamilton-Jacobi equation of the type

$$F(M, \nabla U(M)) = 0.$$

Definition 4.2. Let $V : L^2(I^d; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous. (i) We say that V is a viscosity subsolution for (4.1) if $F(M, \zeta) \leq 0$ for all $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ and all $\zeta \in D^+V(M)$. (ii) We say that V is a viscosity supersolution for (4.1) if $F(M, \zeta) \geq 0$ for all $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ and all $\zeta \in D^-V(M)$. (iii) We say that V is a viscosity solution for (4.1) if V is both a subsolution and a supersolution for (4.1).

4.1. A preliminary stationary Hamilton-Jacobi equation. Define an action

$$A_\varepsilon(x) := \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} \tilde{L}(x, \dot{x}) dt,$$

which is well defined for $x \in AC_{loc}^2((0, \infty); L^2(I^d; \mathbf{R}^d))$, since $\tilde{L}$ is bounded by below by $-c^2/2$. We do not display its dependence on c to keep notation simpler. Set

$$V_\varepsilon(M) := \inf_x \{A_\varepsilon(x) : x \in AC_{loc}^2((0, \infty); L^2(I^d; \mathbf{R}^d))\} \quad (4.2)$$

Since $\tilde{L}$ is invariant under the action of G , so is V_ε . The fact that $\tilde{L}(\cdot, N)$ is periodic ensures that V_ε is periodic.

In [2] it was proven that in the one dimensional case, when M is monotone nondecreasing (4.2) admits a minimizer. This minimizer is in $H_{loc}^2((0, \infty); L^2(I^d; \mathbf{R}^d))$ and satisfies the Euler-Lagrange equation. We have shown that for every $d \geq 1$ the minimizers exist on an everywhere dense G_δ subspace of the space $L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$.

One the most important features of the value function V_ε is the following:

Theorem 4.1. V_ε is a Lipschitz function and a viscosity solution of the equation

$$\varepsilon V_\varepsilon(M) + \tilde{H}(M, \nabla_{L^2} V_\varepsilon(M)) = 0. \quad (4.3)$$

Furthermore we have that:

Proposition 4.1. The superdifferential D^-V_ε is not empty at every point $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$.

Moreover V_ε is differentiable on an everywhere dense G_δ set.

Main result concerning variational problem 4.2 is the following theorem:

Theorem 4.2. Problem (4.2) admits a unique minimizer for any differentiability point $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ of the value function V_ε .

4.2. The cell problem. Consider function $U_\varepsilon := V_\varepsilon - \inf V_\varepsilon$, where V_ε is the value function defined in the previous section. One can show that:

Proposition 4.2. (i) The function U_ε is Lipschitz and $U_\varepsilon(M) = U_\varepsilon(\bar{M})$ whenever $[M] = [\bar{M}]$.

(ii) Every subfamily of $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ admits a subsequence converging uniformly to some U which is κ -Lipschitz. Every subfamily of $\{\varepsilon V_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ admits a subsequence converging uniformly to a constant depending on c which we denote $-\bar{H}(c)$.

The limit function U enjoys a nice variational representation.

Proposition 4.3. For any $T > 0$ and any $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$

$$U(M) = \inf \left\{ \int_0^T \tilde{L}(x(s), \dot{x}(s)) + \bar{H}(c) ds + U(x(T)); x(0) = M, x \in AC^2((0, T); L^2(I^d; \mathbf{R}^d)) \right\} \quad (4.4)$$

Theorem 4.3. U is a viscosity solution to the equation

$$H(M, c + \nabla_{L^2} U) = \bar{H}(c). \quad (4.5)$$

Additionally for every differentiability point $M \in L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ of the function U there exists a unique trajectory $x \in C^2([0, \infty); L^2(I^d; \mathbf{R}^d))$ which is a minimizer for the problem (4.4) for all times $T > 0$ and which satisfies Euler-Lagrange equation

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} \nabla_{L^2} W(x), \quad (4.6)$$

with $x(0) = M$ and $\dot{x}(0) = -(c + \nabla U(M))$. Furthermore, x minimizes the action

$\tilde{A}_T(y) = \int_0^T \left(\tilde{L}(y(s), \dot{y}(s)) + \bar{H}(c) \right) ds$ over all trajectories $y \in AC^2((0, T); L^2(I^d; \mathbf{R}^d))$ with endpoints $y(0) = x(0)$ and $y(T) = x(T)$.

We also show the existence of so called two sided minimizers of the action

$$\tilde{A}_{t_1}^{t_2}(y) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\tilde{L}(y(s), \dot{y}(s)) + \bar{H}(c) \right) ds.$$

Theorem 4.4. There exist points $(x, p) \in T^*L^2(I^d; \mathbf{R}^d)$ s.t. there exists a unique trajectory $x \in C^2(\mathbb{R}; L^2(I^d; \mathbf{R}^d))$ which satisfies the Euler-Lagrange equation (4.6), passes through $(x, p) : x(0) = x, p(0) = p$, and minimizes the action $\tilde{A}_{t_1}^{t_2}$ for all times $t_1 < t_2$.

¹ Yerevan State University, levonnurbekian@yahoo.com

² Instituto Superior Tecnico, dgomes@math.ist.utl.pt

L. Nurbekyan, D.Gomes

**Lagrangian dynamics and a Weak KAM theorem on
the d – infinite dimensional torus**

The space $L^2(0,1)$ has a natural Riemannian structure of the basis of which in their recent work W. Gangbo and A. Tudorascu introduced an infinite dimensional torus T . For a certain classes of Hamiltonians they prove an existence of a viscosity solution to the cell problem on T . In the current work we generalize obtained results for the so called higher dimensional case, where we start with the space $L^2\left((0,1)^d;\mathbb{R}^d\right)$ and introduce the d – infinite dimensional tours T^d .

Լ. Նուրբեկյան, Դ. Գոմես

Լագրանժյան դինամիկա և թույլ ԿԱՄ թեորեմ d – անվերջ չափանի տորի վրա

$L^2(0,1)$ տարածությունն օժտված է բնական Ռիմանյան կառուցվածքով: Հիմնվելով այդ կառուցվածքի վրա, Վ. Գանգբոն և Ա. Տուդորասկուն ներմուծել են *անվերջ չափանի* T տորի գաղափարը: Համիլտոնյանների որոշակի դասի համար նրանք ապացուցել են *տարրական* Համիլտոն- Յակոբի հավասարման թույլ լուծման գոյությունը T -ի վրա: Սույն աշխատանքում մենք ընդհանրացնում ենք վերը նշված արդյունքը բազմաչափ դեպքի համար:

Л. Нурбекян, Д. Гомес

Лагранжева динамика и слабая КАМ теорема на d -бесконечномерном торе

Пространство $L^2(0,1)$ имеет естественную Риманову структуру. На основании этой структуры В. Гангбо и А. Тудораску в одной из недавних работ ввели понятие *бесконечномерного* тора T . Впоследствии им удалось доказать существование вязкостного решения элементарной задачи Гамильтона – Якоби. Эти результаты нами обобщены для так называемого d -бесконечномерного тора T^d , полученного из пространства $L^2\left((0,1)^d;\mathbb{R}^d\right)$ аналогичным образом.

References

1. *Edgar A.* - Acta Math. 1968. V. 121. P. 31-47.
2. *Ganbo W., Tudorascu A.* - Adv. Math. 2010. V. 224. N1. P. 260-292.

3. *Ganbo W., Tudorascu A.* A Weak KAM theorem; from finite to infinite dimensions. Optimal transportation, geometry and functional inequalities. Ed. Norm., 45-72, CRM Series, 11. Pisa, 2010
4. *Gomes D.* Hamilton Jacobi Equations, Viscosity Solutions and Asymptotics of Hamiltonian Systems, PhD Dissertation, University of California at Berkeley, 2000.
5. *Villani C.* Topics in optimal transportation, Graduate Studies in Mathematics 58, American Mathematical Society, 2003.

MATHEMATICS

2000 Mathematics Subject Classification. 11U10, 22E60, 31C40, 37C70, 37E05, 37M10.

A. Yu. Shahverdian

Minimal Lie Algebra, Fine limits, and Dynamical Systems

(Submitted by academician V. S. Zakaryan 14/XI 2011)

Key words: discrete dynamical systems, Lie algebras, fine sets, fine attractors

1. Introduction.

This paper advances the suggested in [1]–[4] difference analysis which is a method for analyzing discrete dynamical systems. This method is based on studying the higher absolute differences taken from progressive terms of system's orbit. This is motivated by an observation [5] that some natural systems (e.g., the visual cortex) process the information contained in signal's higher difference structure. A minimal Lie algebra considered in this paper provides us with the axiomatic basis for difference analysis. The identity $x + x \equiv 0$, which is a basic one in the Lie algebras, leads us to some exotic arithmetic, maps, and dynamics. The situation considered is opposite (in axiomatic sense) to so-called idempotent or tropical analysis [6] where another exotic identity $x + x \equiv x$ is postulated.

In next Section 2 the difference analysis is briefly described and a minimal Lie algebra is defined. In Section 3 we are interested in the topological aspect of the suggested algebra – to determine the limiting difference orbits (as the order of differences tends to ∞) we involve a version of the thinness from the probabilistic potential theory. In last Section 4 a difference-shift transform and Bernoulli maps are studied.

2. Difference analysis and minimal Lie algebra.

2.1. *Difference analysis.* In difference analysis a given orbit is decomposed into the sign and magnitude components which are studied independently. The sign component $S = (S_m)_{m=1}^{\infty}$

reflects the alternation in monotony (increase/decrease) of higher absolute differences taken from the successive terms of the orbit. The magnitude (or, height) component $H = (H^{(m)})_{m=1}^\infty$, which consists of these absolute differences, does not depend on S_m .

Let us present some formal definitions. Let $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ($0 \leq x_n \leq 1$) be an infinite numerical sequence – this can be some time series, results of an experiment, or an orbit of some map. We consider m -th order absolute differences:

$$H_n^{(0)} = x_n, \quad H_n^{(m+1)} = |H_{n+1}^{(m)} - H_n^{(m)}| \quad (m \geq 0, n \geq 1) \quad (1)$$

and define m -th difference sequence as $H^{(m)} = (H_n^{(m)})_{n=1}^\infty$. We also let

$$S_m = (\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \dots, \delta_n^{(m)}, \dots) \quad \text{where} \quad \delta_n^{(m)} = \begin{cases} 1, & H_{n+1}^{(m)} \geq H_n^{(m)} \\ 0, & H_{n+1}^{(m)} < H_n^{(m)}. \end{cases} \quad (2)$$

The S_m and $H^{(m)}$ are called m -th S- and H-components of $\mathbf{x}$. Instead of binary sequence in Eq. (2) one can also deal with the corresponding real numbers $S_m = 0.\delta_1^{(m)}\delta_2^{(m)}\dots$ (binary expansion; the same notation as in (2)). Thus, given time series (orbit) $\mathbf{x}$ we define and study two others, the sign and magnitude series $(S_m)_{m=1}^\infty$ and $(H^{(m)})_{m=1}^\infty$.

The S -component extracts from $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty$ some binary constituents S_m . One can prove that for arbitrary $\mathbf{x}$ the H -component also contains arbitrarily long binary samples. Hence, for many cases the difference orbits are reduced to a "minimal" form of binary sequences – namely with the aim of studying this "minimal" case a simplified version of the Lie algebra in next Section is introduced.

2.2. Minimal Lie algebra. The binary operation of taking the absolute difference $\xi \oplus \eta = |\xi - \eta|$ between two binary variables $\xi, \eta \in \{0, 1\}$ satisfies the identity $\xi \oplus \xi = 0$ postulated in Lie algebras as well as the group-theoretical axioms (Eq. (3)); generalizing this observation we consider some minimal abstract Lie algebras.

Let X be an abstract set on which a binary operation denoted $[x, y]$ be defined. It is assumed that this operation satisfies relations:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z], \quad [x, y] = [y, x], \quad [x, 0] = x, \quad [x, x] = 0 \quad (3)$$

that is, $G = (X, [,])$ is an abstract commutative group on X . For $x \in X$ and binary $\alpha \in \{0, 1\}$ we define a multiplication: $\alpha x = 0$ if $\alpha = 0$ and $\alpha x = x$ if $\alpha = 1$. Since our main interest is the last relation in (3) which is a basic one in Lie algebras, we call the group G with assigned on it binary multiplication αx a minimal Lie algebra.

We extend the binary bracket (3) to n -ary version $[x_1, \dots, x_n]$: if for some $n \geq 3$ the $(n-1)$ -ary bracket is already defined, then we let

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], [x_2, \dots, x_n]].$$

As a consequence of the relation $[x, x] = 0$ in (3) it follows (next Proposition 1) that n -ary bracket can be expressed by a binary version $\mathbb{P}$ of the Pascal triangle of binomial coefficients, $\mathbb{P} = (\alpha_{i,k})_{i,k}$ where $0 \leq i \leq k$, $k \geq 1$, and $\alpha_{i,k} \in \{0, 1\}$. The first line ($k = 1$) of $\mathbb{P}$ consists of

a single number 1 denoted as $\alpha_{0,1}$ or $\alpha_{1,1}$, and its every k -th line ($k \geq 2$) $\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{k,k}$ is determined recurrently: we suppose $\alpha_{0,k} = \alpha_{k,k} = 1$ and then let

$$\alpha_{i,k} = \alpha_{i-1,k-1} \oplus \alpha_{i,k-1} \quad (1 \leq i \leq k-1), \quad \text{that is} \quad \alpha_{i,k} = \begin{cases} 0, & \binom{k}{i} \text{ is even} \\ 1, & \binom{k}{i} \text{ is odd.} \end{cases}$$

Proposition 1. *Let $x_0, \dots, x_n \in X$ and $z_m = [x_0, \dots, x_m]$ ($0 \leq m \leq n$). Then it follows:*

$$z_n = [\alpha_{0,n}x_0, \alpha_{1,n}x_1, \dots, \alpha_{n,n}x_n], \quad x_n = [\alpha_{0,n}z_0, \alpha_{1,n}z_1, \dots, \alpha_{n,n}z_n].$$

We assume that there is a functional μ ,

$$\mu : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{such that} \quad \mu([x_0, \dots, x_n]) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \mu(x_i) \quad (4)$$

(here, $\mu(0)$ is not defined since (4) with equal x_i can lead to some contradictions) and assign a topology on X by defining: if $x \neq 0$ then $x_n \rightarrow x$ (x_n converges to x as $n \rightarrow \infty$) if $\mu(x_n) \rightarrow \mu(x)$, and $x_n \rightarrow 0$ if $\mu(x_n) \rightarrow 0$. Then it follows that $G = G(X, [,], \mu)$ is a topological group. One can consider the direct products of such algebras (e.g., for the aims of the multidimensional difference analysis). Let $G_i = G(X_i, [,]_i, \mu_i)$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 2$ be some minimal Lie algebras; then one can construct such algebra $\mathbf{G} = G_1 \times \dots \times G_n$ on cartesian product $\mathbf{X} = X_1 \times \dots \times X_n$ by assuming that $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = ([x_1, y_1]_1, \dots, [x_n, y_n]_n)$ for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ and that $\boldsymbol{\mu} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is given by $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

2.3. Independent random binary processes. We present an example of minimal algebra defined on the collection X of pairwise independent binary random variables $\xi \in \{0, 1\}$. For $\xi, \eta \in X$ we consider a variable $\xi \oplus \eta (= [\xi, \eta])$, whose distribution of probabilities coincides with the distribution of the absolute difference $|\xi - \eta|$. We assign the probabilities as $P(\xi = \lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^\lambda \pi)$ where $\lambda \in \{0, 1\}$ and $\pi \in (0, 1)$ and denote $\pi = \pi(\xi)$ (to avoid some formal complications we assumed $\pi \neq 0, 1$). The $\mu(\xi) = -\ln \pi(\xi)$ is a functional of the type (4) (see next Theorem 1), and hence, we obtain a probabilistic example $G = G(X, \oplus, \mu)$ of the minimal algebra.

In the following we consider the absolute differences taken from a given random process $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ where ξ_n are independent and take the values 0 and 1 with positive probabilities – such $\boldsymbol{\xi}$ (but not their difference series) are studied, e.g., in a paper by Marsaglia [7]. The variables $\xi_n \oplus \xi_{n+1}$ also take binary values with some positive probabilities, and the difference (of order 1) process $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots)$ is defined as independent process where the distribution of $\xi_n^{(1)}$ coincides with the distribution of $\xi_n \oplus \xi_{n+1}$. The k -th order ($k \geq 1$) difference process $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ is defined as 1st order difference taken from $\boldsymbol{\xi}^{(k-1)}$. Our assumption that for every $0 \leq k \leq +\infty$ the process $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ is independent yields that $\pi(\xi_n^{(k)})$ are determined by k th line of $\mathbb{P}$:

Theorem 1. *For $n, k \geq 1$ the following relations are true:*

$$\xi_n^{(k)} = [\xi_n, \dots, \xi_{n+k}], \quad \ln \pi([\xi_n, \dots, \xi_{n+k}]) = \sum_{0 \leq i \leq k} \alpha_{i,k} \ln \pi(\xi_{n+i}). \quad (5)$$

3. Fine limits in minimal Lie algebras.

We are interested in the topological aspect of the algebras $G = (X, [,], \mu)$ – we consider the limits of infinite sequences from X . In potential theory the Wiener criterion and fine sets are used for studying the limits of potentials (e.g., the Cartan theorem on quasi-continuity of the Newton potential [8, 9]). Following this, we assign some "fine" sets ($\mathfrak{F}$ -sets) in natural series $\mathbb{N}$ and consider fine convergence ($\mathfrak{F}$ -convergence) and fine limits ($\mathfrak{F}$ -lim) of difference orbits. We use potential theory terminology (fine or thin sets, etc) because of formal similarity of next relation (7) with the Wiener criterion in the probabilistic potential theory [10, 11].

We consider the following binary codes of numbers $k \in \mathbb{N}$ – it is a vector $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$ with binary components $s_i \in \{0, 1\}$ (bits) for which $k = \sum_{i=0}^{p-1} s_i 2^i$ and $s_p = 1$. Let $w(k) = \sum_{i=0}^{p-1} s_i$ be the number of units (the weight) in the code of k . For $e \subset \mathbb{N}$ we define

$$\mathcal{C}(e) = \sum_{k \in e} w(k) \quad (6)$$

and call $\mathcal{C}(e)$ the capacity of e . For $E \subseteq \mathbb{N}$ we denote $E_n = E \cap \{k \in \mathbb{N} : 2^n \leq k < 2^{n+1}\}$.

Definition 1. A set $E \subset \mathbb{N}$ is called a fine set ($\mathfrak{F}$ -set) if the relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{C}(E_n) < \infty \quad (7)$$

holds. An infinite sequence $x_n \in X$ is called $\mathfrak{F}$ -convergent to x ,

$$\mathfrak{F}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ if there is an } \mathfrak{F}\text{-set } E \text{ such that } \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N} \setminus E}} \mu(x_n) = \mu(x). \quad (8)$$

The $\mathcal{C}$ is an additive measure on subsets of $[2^n, 2^{n+1})$ and $\mathcal{C}([2^n, 2^{n+1})) = 2^n$. We consider the sets $B_n(s) = \{2^n \leq k < 2^{n+1} : w(k) \leq s\}$ where $0 \leq s \leq n$. Since for some cases $\mathcal{C}(B_n(s)) \leq \text{const.} \mathcal{C}(\partial B_n(s))$ (when n is large and s is small; for such cases the $\mathcal{C}(B_n(s))$ can be substituted by $\mathcal{C}(\partial B_n(s))$ which is equal to $\binom{n}{s}$) what is a characteristic property of classical capacities (with $\text{const.} = 1$, e.g., [10]), we called $\mathcal{C}$ a capacity.

It follows from (6) that the capacity $\mathcal{C}$ concerns several notions in information theory. To demonstrate this we identify a number $k \in [2^n, 2^{n+1})$ (the segment of natural numbers, $2^n \leq k < 2^{n+1}$) with a vertex $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ (the binary code of k) of n -dimensional cube $[0, 1]^n$. If $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ and $(s'_0, s'_1, \dots, s'_{n-1})$ are the codes of k and k' , then the Hamming distance between k and k' is the number of such i for which $s_i \neq s'_i$. By Eq. (6) the capacity $\mathcal{C}$ of $B_n(s)$ is equal to the following sum of binomial coefficients: $\sigma(n, s) = \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$. The cardinality of $B_n(s)$ (the Hamming volume) is also equal to $\sigma(n, s)$; the σ coincides also with some other quantities in coding theory mentioned in next Proposition (see, e.g., [13] for details and definitions; for estimates of σ by Shannon function see [14]). In next formulation, $V_H(e)$ is the Hamming volume of e , b_H is the Hamming bound from coding theory (the $b_H(n, s)$ is an upper bound for the size of binary s -error corrected codes of length n), and $H(x) = x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)$ is the Shannon entropy function (it is assumed for its argument in (9) that $s/n < 1/2$).

Proposition 2. *The $B_n(s)$ is a ball of radius s in the Hamming metric (the Hamming ball) centered at 2^n and the following relations*

$$\mathcal{C}(B_n(s)) = V_H(B_n(s)) = 2^n (b_H(n, s))^{-1} = 2^{nH(s/n) + o(n)} \quad (9)$$

hold. Particularly, it follows that the union $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(s_n)$ is an $\mathfrak{F}$ -set if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_H(n, s_n))^{-1} < \infty.$$

A computation shows that there exists a union of balls $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(s_n)$ whose radii s_n grow to ∞ and such that E is an $\mathfrak{F}$ -set. Hence, every such E with upper bounded radii s_n is also an $\mathfrak{F}$ -set. This explains the reason of our Definition 1 – it is allowed by this Definition that some small sets E of indices $k \in \mathbb{N}$ can be neglected when determining the $\mathfrak{F}$ -limits (cp. Eq. (8)). For example, if E is a union of balls $B_n(s_n)$ whose radii $s_n \leq s$, then for every $k \in E$ the $\pi(\xi_n^{(k)})$ (Section 2.3) is a product of lesser than s different $\pi(\xi_i)$, what implies that as a rule, their limit as k growth to ∞ remaining in E , does not exist. E.g., one can refer to identically distributed ξ – here, $\pi(\xi_i) \equiv \pi$, $0 < \pi < 1$ and $\pi(\xi_n^{(k)}) \equiv \pi^{2^{w(k)+1}}$ (a self-similar structure of the triangle $\mathbb{P}$ yields that the number of units in k -th line of $\mathbb{P}$ is equal to $2^{w(k)+1}$).

The discussed is similar to metrical statements on covering the classical fine sets by (euclidean and non-euclidean) balls (e.g., [9]). We formulate another related metrical result from [2, 4]. For $x \in [0, 1]$ we consider infinite binary expansions $x = 0.x_1, x_2, \dots$ and let for $k \geq 2$ the E_k be the collection of such $x \in [0, 1]$ for which every segment $x_i, \dots, x_{i+k}$ of the expansion contains both symbols 0 and 1.

Theorem 2. *For every $k \geq 2$ the Hausdorff dimension $D(E_k)$ of the set E_k satisfies the following relation:*

$$\sum_{n=1}^k 2^{-nD(E_k)} = 1.$$

For q -adic version of this Theorem, see [2, 4].

Definition 2. *Let $G = G(X, [,], \mu)$ be given, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $x_n \in X$ be infinite sequence, $x_n^{(k)} = [x_n, \dots, x_{n+k}]$, and x_n^∞ be $\mathfrak{F}$ -limit of the sequence $x_n^{(k)}$ as $k \rightarrow \infty$. The $\mathbf{x}^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \dots)$ is called the final difference sequence for $\mathbf{x}$.*

Thus, it follows from (4) that if for $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ the $\mathbf{x}^\infty$ exists, then for every n

$$\mathfrak{F}\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \alpha_{i,k} \mu(x_{n+i}) = \mu(x_n^\infty).$$

E.g., it follows from (5) that for a given random process ξ the differences $\xi^{(k)}$ converge to ξ^∞ iff for every n the $\pi(\xi_n^{(k)})$ is $\mathfrak{F}$ -convergent to some numbers $s_n \in [0, 1]$; then $\pi(\xi_n^\infty) = s_n$.

Theorem 3. *If ξ is identically distributed binary process (the Bernoulli trials), then ξ^∞ is the symmetric equi-distributed process.*

The next Theorem relates to arbitrary $G = (X, [,], \mu)$, usual limits, and ω -sets (cluster sets); we remind that a set is called a perfect set if it is closed and its every point is also its limiting point. In applications this Theorem can concern the conservative systems as well as can explain the emergence of the Cantorian structure in the attractors of dissipative systems (see Theorem 7 for an example):

Theorem 4. *Let $x_n \in X$ be infinite sequence and $z_n = [x_0, \dots, x_n]$. If $\mu(x_n) = \text{const.} > 0$, then ω -set of the sequence $\mu(z_n)$ is a discrete countable closed set. If $\mu(x_n)$ is monotone and decreases to 0, then ω -set of the $\mu(z_n)$ is a nontrivial perfect set.*

4. Application to dynamical systems.

We define a difference-shift transform $([2, 4])$ and present some results on so-called Bernoulli maps. We first consider arbitrary groups $G = (X, [,])$ defined by (3) and formulate the following (the Proposition 4 concerns arbitrary minimal algebras $G = (X, [,], \mu)$):

Definition 3. *Let $T : X \rightarrow X$ be a map. The map $\hat{T} : X \rightarrow X$ defined as $\hat{T}x = [x, Tx]$ is called algebraically conjugate to T . A map T is called commutative if $T\hat{T} = \hat{T}T$.*

Proposition 3. *Let $T : X \rightarrow X$ be commutative. Then for $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$*

$$[x, Tx, \dots, T^n x] = \hat{T}^n x, \quad [x, \hat{T}x, \dots, \hat{T}^n x] = T^n x. \quad (10)$$

Proposition 4. *Let $T : X \rightarrow X$ be commutative and $x_n = T^n x$ be an orbit. Then if x_1^∞ exists, then for every $n \geq 1$ the x_n^∞ also exists, and the final orbit is: $x_n^\infty = T^n x_1^\infty$.*

The algebraic conjugation differs from the topological one: e.g., the Bernoulli shift B (defined in next Section) is topologically conjugate to so-called tent and 4-logistic maps [12], but B is not algebraically conjugate to them.

4.1. A difference-shift map. We consider the Bernoulli shift $B : x \mapsto \{2x\}$ (dyadic or bit-shift map [12, 16]; $\{\cdot\}$ and $[\cdot]$ denote the fractional and entire parts of a positive number, $a = \{a\} + [a]$) and the difference-shift map M $([2, 4])$, both are defined on the segment $[0, 1]$ (their graphs on Fig. 1 are presented). In binary notation these maps are defined as follows:

$$B : 0.\omega_1\omega_2\dots \mapsto 0.\omega_2\omega_3\dots \quad \text{and} \quad M : 0.\omega_1\omega_2\dots \mapsto 0.(\omega_1 \oplus \omega_2)(\omega_2 \oplus \omega_3)\dots \quad (11)$$

The shift M is the sum of the identical map $Ex = x$ and the shift B with respect to some exotic arithmetic, $M = E \dagger B$. This arithmetic is the following: considering binary expansion,

$$\text{for } a = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots \text{ and } b = 0.\delta_1\delta_2\dots \text{ we define } a \dagger b = 0.(\varepsilon_1 \oplus \delta_1)(\varepsilon_2 \oplus \delta_2)\dots \quad (12)$$

Considering binary expansion of natural numbers: $c(m) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ where $m = \sum_{i=0}^q \varepsilon_i 2^i$ and $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, for $a, b \in \mathbb{N}$ we define: if $c(a) = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$, $c(b) = (\delta_0, \dots, \delta_k)$, then $c(a \dagger b) = (\varepsilon_0 \oplus \delta_0, \dots, \varepsilon_k \oplus \delta_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$ (we assumed $n \geq k$). For $a, b \in \mathbb{R}^+$ the $a \dagger b \in \mathbb{R}^+$ is a real number for which $[a \dagger b] = [a] \dagger [b]$ and $\{a \dagger b\} = \{a\} \dagger \{b\}$; for example, $5 \dagger 1 = 4$, $5 \dagger 3 = 6$, $6 \dagger 3 = 5$. It is clear how this arithmetic is extended to arbitrary real numbers from $\mathbb{R}$. This determines an additive commutative group $(\mathbb{R}, \dagger)$ with the arithmetic (12) which is not isomorphic to the

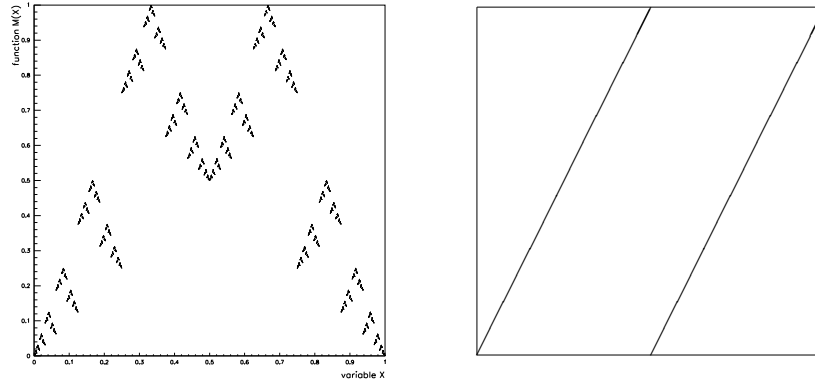


FIGURE 1. The "fractal" letter "M" $([2, 4])$ – the graph of the difference shift M , and the graph of the Bernoulli shift B . These maps are algebraically conjugate to each other: $[x, Mx] = Bx$ and $[x, Bx] = Mx$.

standard additive group $(\mathbb{R}, +)$ of real numbers. In next Proposition the group $G = ([0, 1], \dagger)$ with the arithmetic (12) is considered:

Proposition 5. *For the maps B and M the relations $\hat{B} = M$, $\hat{M} = B$, $BM = MB$ hold, and hence, they are algebraically conjugate each other and both are commutative: $B\hat{B} = \hat{B}B$, $M\hat{M} = \hat{M}M$. In addition, Eq. (10) gives the following identities:*

$$[x, Bx, \dots, B^n x] = M^n x, \quad [x, Mx, \dots, M^n x] = B^n x. \quad (13)$$

The Eq. (13) and Birkhoff ergodic theorem (one can prove that the Lebesgue measure on $[0, 1]$ is invariant measure for B and for M) imply the "a.e."-convergence ("almost every") of the mean values of difference series $H^{(m)}$ (we denote them $H_B^{(m)}$ and $H_M^{(m)}$) for these maps:

Proposition 6. *There is a positive constant C such that for a.e. $x \in [0, 1]$ the relation*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n H_B^{(m)}(x) = C \quad (= \int_0^1 B(x) dx = 1/2)$$

holds. The same is true for the map M .

Let us consider the topological entropy of the map M . The topological entropy $h(T)$ of a map $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ concerns the ability of T to transform a given segment $\Delta \subseteq [0, 1]$ into a number of smaller ones (for strict definition see, e.g., [15, 17]). Theorem 6 follows from Theorem 5 and the Bowen lemma on periodic orbits ([17], Ch. 5.4).

Theorem 5. *Let $p \geq 3$ and a number $0 < x < 1$ be binary-rational,*

$$x = 0.s_0 s_1 \dots s_{p-1} s_p 00 \dots \quad (s_0, s_1, \dots, s_{p-1} \in \{0, 1\}, s_p = 1, s_{p+i} = 0 \text{ for } i \geq 1).$$

Then the orbit $(M^m x)_{m \geq 0}$ is periodic with the period $T = 2^{\lceil \log_2(p-1) \rceil}$.

Theorem 6. *The topological entropy of the map M is positive, $h(M) > 0$.*

The difference orbits of M coincide with its iterates, $S_m = H^{(m)} = M^m$. As noticed in Section 2.1, such a situation is quite common, and hence, the shift M is quite universal when one applies difference analysis. In literature, a universality of the Bernoulli shift B in chaotic dynamics is also noted [12].

4.2. Bernoulli maps. Let us denote $\Omega = [0, 1]$, $X = 2^\Omega$ and for $A, B \in X$ define a bracket $[A, B] = A \Delta B$ where Δ is the symmetric difference: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, Then Eq. (3) is satisfied and hence the group $G = (X, \Delta)$ is determined. We define the multiplication: $0A = \emptyset$ and $1A = A$ and present the following formula:

$$[A_0, A_1, \dots, A_n] = \alpha_{0,n}A_0 \Delta \alpha_{1,n}A_1 \Delta \dots \Delta \alpha_{n,n}A_n.$$

Let a positive Borelian measure $\mathbf{m}$ on Ω be given, $\mathbf{m}(\Omega) = 1$. We consider Bernoulli maps: a map $T : \Omega \rightarrow \Omega$ is called the Bernoulli map (with respect to $\mathbf{m}$) if for every measurable $A \subseteq \Omega$ the relation $\mathbf{m}(A \cap TA) = \mathbf{m}(A)\mathbf{m}(TA)$ holds. For $A \in X$ one can define a random variable $\xi_A = \xi_A(x)$ which takes the value 1 if $x \in A$ and 0 if $x \in A^C$ and whose distribution of probabilities is: $P(\xi_A = 1) = \mathbf{m}(A)$ and $P(\xi_A = 0) = 1 - \mathbf{m}(A)$. It follows that a map $T : \Omega \rightarrow \Omega$ is a Bernoulli map iff for every $A \subset \Omega$ of positive $\mathbf{m}$ -measure the variables ξ_A and ξ_{TA} are independent. Then $\mu(A) = -\ln |2\mathbf{m}(A) - 1|$ is of the type (4) (cp. Section 2.3). Let for a map T and $A \subseteq \Omega$ the A_T^∞ denotes the following fine difference attractor

$$A_T^\infty = \mathfrak{F}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [A, TA, \dots, T^n A]$$

and $E_A(T)$ denotes the ω -set of the sequence $\mathbf{m}(\hat{T}^n A)$. The next Theorem provides us with a topological criterion for a measure $\mathbf{m}$ on Ω to be an invariant measure for a given Bernoulli map. It also asserts that it is either $A_T^\infty = \Omega$ or (under an assumption on monotony) $A_T^\infty = \emptyset$ (in both cases – up to a set of zero $\mathbf{m}$ -measure):

Theorem 7. *Let T be a Bernoulli map on $(\Omega, \mathbf{m})$ and $A \subseteq \Omega$ be a set of positive $\mathbf{m}$ -measure. If $\mathbf{m}(T^n A) = \mathbf{m}(A)$ for every n , then $E_A(T)$ is a discrete countable closed set and $\mathbf{m}(A_T^\infty) = 1$. If $\mathbf{m}(T^n A)$ is monotone and decreases to 0 as n growth to ∞ , then $E_A(T)$ is a non-trivial perfect set and $\mathbf{m}(A_T^\infty) = 0$.*

Acknowledgments. The author thanks R. Hilfer and M. Timme for discussions and interest to this work.

Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA

State Engineering University of Armenia

Email: svrdn@yerphi.am

Հոգվածը վերաբերվում է տարբերությունների անալիզին, որը դիսկրետ դինամիկ համակարգերի հետազոտության նոր մեթոդ է: Դիտարկվում է Լիի միհիմալ հանրահաշիվ, որը աքսիոմատիկ հիմք է տարբերությունների անալիզի համար: Դիտարկվում են նուրբ բազմություններ, որոնք սահմանվում են հավանական պոտենցիալի տեսության Վիների տիպի պայմանի միջոցով: Քննարկվում է կապը կոդավորման տեսության հետ: Սահմանվում է տարբերական արտապատկերում և ուսումնասիրվում է նրա կապը Բերնուլիի դիադիկ արտապատկերման հետ: Տրվում է չափի ինվարիանտության տոպոլոգիական պայման և բերվում է նուրբ աստորակտորներին վերաբերվող թեորեմ:

REFERENCES

- [1] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* – Fractals. 1999. V.7, P. 93-103.
- [2] *Shahverdian A. Yu.* – Fractals. 2000. V.8, N.1, P. 49-65.
- [3] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* In: Proc. V-th Intern. Congress Math Modeling, JINR, Dubna, Russia, 2002.
- [4] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* – Comm. Nonlin. Sci. & Comp. Simul. 2007. V.12, N.1, P. 233-242.
- [5] *Miller K. D.* In: *Domany E., van Hemmen J. L., Schulten K. (Eds).* Models of Neural Networks. V. III, Springer, N.Y., 1996.
- [6] *Litvinov G. L., Maslov V. P., Sergeev S.N. (Eds).* Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics. Proc. Intern. Workshop, Moscow Independent University, 2007.
- [7] *Marsaglia G.* – Ann. Math. Stat. 1971. V. 42, P. 1922-1929.
- [8] *Brelot M.* Topologies and Boundaries in Potential Theory. Springer, Berlin, 1971.
- [9] *Shahverdian A. Yu.* – Computational Methods and Function Theory. 2011. V.11, N.1, P. 71-121.
- [10] *Dynkin E. B., Yushkevich A. A.* Theorems and Problems on Markov Processes. Nauka, 1967.
- [11] *Kemeny J. G., Snell J. L., Knapp A. W.* Denumerable Markov Chains. Springer, N.Y. 1976.
- [12] *Schuster H. G.* Deterministic Chaos. Weinheim, Berlin 1984.
- [13] *Hall J. I.* Notes on Coding Theory. Michigan State University, 2010.
- [14] *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete Mathematics: a Foundation of Computer Science. Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [15] *Shub M.* In: Proc. Intern. Congress of Math. ICM-2006, P.1-22, Madrid, 2006.
- [16] *Billingsley P.* Ergodic Theory and Information. Wiley, N-Y, 1965.
- [17] *Martin N. F., England J. W.* Mathematical Theory of Entropy. Addison-Wesley, Massachusetts, 1981.

MATHEMATICS

УДК 519.161

A. A. Alexanian, A. V. Soghoyan

On NP-completeness of Some Permutation Generation Problems

(Submitted by academician Yu. H. Shoukourian 2/II 2012)

Keywords: *permutation, generating set, "strong" generating set, NP-completeness, subgroup distance problem, monotone one-in-three 3sat problem.*

1. Introduction. Let S_n be the group of all permutations of an n -element set. We investigate the computational complexity of the following problems.

Problem 1 (Permutation Generation by Sets). *Given a permutation $\pi \in S_n$ and a collection of sets $X_1, \dots, X_m$ of permutations from S_n , decide whether π can be expressed as a composition $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, where $\sigma_i \in X_i, 1 \leq i \leq m$, and if the answer is positive, find the permutations σ_i .*

This problem is obviously in NP , as a sequence of $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ can be guessed from respective sets and easily tested for $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$. The number of guesses grows exponentially, as it is equal to $\prod_{i=1}^m |X_i|$, where $|X_i|$ stands for the number of elements in X_i . We construct a polynomial-time reduction from the Subgroup Distance Problem (see[1,2]), which is well-known to be NP -complete. This proves NP -completeness of the Problem 1.

Problem 2 (Permutation Knapsack). *Given a permutation $\pi \in S_n$ and a sequence of permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ from S_n , decide whether there exists a subsequence X of indices, say $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, that $\pi = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$, and if the answer is positive, find X . (Note that X may have any length between 1 and m .)*

This problem is also in NP , as the sequence of indices X can be guessed and the condition $\pi = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ tested in polynomial time. The number of possible guesses is exponential and is equal to 2^m . We prove NP -completeness of this problem by construction of a polynomial-time reduction from the Monotone One-In-Three 3Sat problem, which is NP -complete (see [3,4]).

We show by restriction that the Problem 1 contains the Problem 2 as a special case, which corresponds to an instance of the Problem 1 with $|X_i| = 2$ for each $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Thus, the Problem 1 remains NP -complete even in case all sets X_i consist of exactly 2 permutations.

2. NP -completeness of the Permutation Generation by Sets.

Definition 3. The Cayley distance $d(\pi, \sigma)$ between permutations π and $\sigma \in S_n$ is the minimum number of transpositions which are needed to change π to σ by post-multiplication, i.e.

$$d(\pi, \sigma) = \min \{n \mid \sigma = \pi \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n, \rho_i \text{ is a transposition}\}.$$

The distance from a permutation π to a subgroup $H \leq S_n$ is defined as $\min_{\sigma \in H} d(\pi, \sigma)$.

Problem 4 (Subgroup Distance). Given $\pi \in S_n$, a set of generators of a subgroup $H \leq S_n$, and an integer K , decide whether $d(\pi, H) \leq K$.

It was first proven in [1] that the Subgroup Distance Problem is NP -hard and, subsequently, a much simpler proof of NP -completeness was given in [2].

To prove NP -completeness of the Problem 1 we use the well-known algorithm of Sims that constructs a set of "strong" generators for a permutation group given by a set of generators (see [5,6]). Let a subgroup $G \leq S_n$ is given by a set of generators T . Sims's algorithm (also known as Schreier-Sims algorithm) constructs in polynomial time a sequence of sets of permutations $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ such that any permutation in G can be uniquely expressed as a composition $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$, where $\sigma_i \in Y_i, 1 \leq i \leq n-1$. Note that each Y_i contains the identity permutation. The collection of sets $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ is called a set of "strong" generators for G . Having this set of generators one can easily test whether a given permutation from S_n belongs to G .

Theorem 5. The Permutation Generation by Sets problem is NP -complete.

Proof. As stated above, for the reduction we use the subgroup distance problem. So consider an instance of subgroup distance problem, consisting of a given permutation $\pi \in S_n$, a set of generators of a subgroup $H \leq S_n$, and an integer K . In order to transform this instance to an instance of the permutation generation by sets problem, first we apply Sims's algorithm to the set of generators of H to obtain a set of "strong" generators - $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$. This is done in polynomial time. We denote

by Z the set consisting of the identity permutation and all transpositions in S_n . Obviously $|Z| = 1 + \binom{n}{2}$.

Now we define $m = n - 1 + K$ and $X_i = Y_i$ for $1 \leq i \leq n - 1$ and $X_i = Z$ for $n \leq i \leq m$. It can be readily verified that the size of $X_1, \dots, X_m$ is polynomial. Thus π and $X_1, \dots, X_m$ form an instance of the permutation generation problem. Any composition of the form $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, where $\sigma_i \in X_i$, $1 \leq i \leq m$, can be split into two parts - $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ and $\sigma_n \dots \sigma_{n+K-1}$. The first part represents a permutation from H and each permutation from H can be obtained this way. The second part represents a composition of not more than K transpositions and any composition of K or less transpositions can be obtained that way. It is clear now that

$$d(\pi, H) \leq K \Leftrightarrow \pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m, \sigma_i \in X_i, 1 \leq i \leq m.$$

3. NP-completeness of the Permutation Knapsack.

Problem 6 (Monotone One-In-Three 3Sat). *Given a conjunctive normal form D over the set of Boolean variables $x_1, x_2, \dots, x_p$, such that $D = \bigwedge_{j=1}^q K_j$, where each clause K_j consists of exactly 3 different literals, which are simply variables, i.e. there is no negation, decide whether there is a truth assignment to the variables such that each clause K_j has exactly one true literal (and thus exactly two false literals).*

Theorem 7. *The Permutation Knapsack problem is NP-complete.*

Proof. Consider an instance of Monotone One-In-Three 3Sat problem, consisting of variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ and a conjunctive normal form $D = \bigwedge_{j=1}^q K_j$. To transform this to an instance of the Permutation Knapsack problem we set $m = p$ and $n = 3q$. Construct the permutation π that acts on $\{1, 2, \dots, n\}$ as follows. For each $j = 1, 2, \dots, q$ define M_j as $\{3j-2, 3j-1, 3j\}$; therefore $\{1, 2, \dots, n\} = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_q$ and the union is disjoint. We define π to act on M_j as a 3-cycle $(3j-2 \ 3j-1 \ 3j)$, i.e π performs a cyclical shift on M_j , $1 \leq j \leq q$. Permutations σ_i , $1 \leq i \leq m$, are defined as follows: σ_i acts on M_j as a 3-cycle $(3j-2 \ 3j-1 \ 3j)$ if $x_i \in K_j$ and fixes all points in M_j if $x_i \notin K_j$, $1 \leq j \leq q$. Thus, σ_i performs a cyclical shift on M_j -s that correspond to the clauses containing x_i and fixes all other points. Note that for each j there exist exactly 3 permutations σ_i that cyclically shift the point in M_j .

Let $f : \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \rightarrow \{0, 1\}$ be a truth assignment such that each clause K_j has exactly one true literal and $f(x_{i_1}) = f(x_{i_2}) = \dots = f(x_{i_k}) = 1$ and $f(x_t) = 0$ for the rest of the variables. Consider the composition $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$. For each $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ exactly one of the variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ say x_{i_1} belongs to K_j , hence σ_{i_1} shifts cyclically the points in M_j and all other permutations $\sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}$ fix those points. Therefore for each $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ the composition $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ performs a cyclical shift on M_j and so $\pi = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ and this presents a solution of the instance of the Permutation Knapsack problem.

Now assume that $\pi = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$. Define the truth assignment by setting $x_t = 1 \Leftrightarrow t \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. It can be readily verified that for an arbitrary j exactly one of the permutations $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}$ cyclically shifts M_j and the rest fix all points in M_j . Let this be σ_{i_1} . This means that x_{i_1} is the only true valued literal that belongs to K_j and so K_j has exactly one true and two false literals. Therefore, the above truth assignment solves the instance of the Monotone One-In-Three 3Sat problem.

Theorem 8. *The Permutation Knapsack problem can be reduced in polynomial time to the Permutation Generation by Sets problem with $|X_i| = 2$ for each $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

Proof. Let π and $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \in S_n$ be an instance of the Permutation Knapsack problem. For each $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ define $X_i = \{\sigma_i, e\}$, where e stands for an identity permutation. Then the instance for the Permutation Generation by Sets will be π and $X_1, X_2, \dots, X_m$. Obviously, $\pi = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k} \Leftrightarrow \pi$ can be represented by a composition of permutations from $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Corollary 9. *The Permutation Generation by Sets remains NP complete even if each X_i consists of 2 elements.*

Yerevan State University

A. A. Alexanian, A. V. Soghoyan

On NP-completeness of Some Permutation Generation Problems

We investigate the computational complexity of two problems concerning permutations: finding an expression for a given permutation $\pi \in S_n$ as a composition of permutations $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, taken from the given sets of permutations $\sigma_1 \in X_1, \dots, \sigma_m \in X_m$, or as a composition of permutations $\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, picked from a given sequence of permutations $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. We prove NP-completeness of the both problems and show that the first problem

contations the second one as a special case, which corresponds to an instance of the first problem with $|X_i| = 2$ for each $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Thus, the first problem remains *NP*-complete even in case all sets X_i consist of exactly two permutations.

Ա. Ա. Ալեքսանյան, Ա. Վ. Սողոյան
Տեղադրությունների ծնման որոշ խնդիրների *NP*-լրիվության վերաբերյալ

Հետազոտվում է տեղադրություններին վերաբերող երկու խնդիրների հաշվողական բարդությունը՝ գտնել տրված $\pi \in S_n$ տեղադրության ներկայացումը տրված տեղադրությունների բազմություններից վերցված $\sigma_1 \in X_1, \dots, \sigma_m \in X_m$ տեղադրությունների $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$ արտադրյալի տեսքով, և տրված $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ տեղադրություններից ընտրված $\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, արտադրյալի տեսքով: Ապացուցվում է երկու խնդիրների *NP*-լրիվությունը և ցույց է տրվում, որ առաջին խնդիրը պարունակում է երկրորդը որպես մասնավոր դեպք, որը համապատասխանում է առաջին խնդրի նմուշին, որում $|X_i| = 2$ բոլոր $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ համար: Այսպիսով, առաջին խնդիրը մնում է *NP*-լրիվ նույնիսկ այն դեպքում, երբ բոլոր X_i բազմությունները պարունակում են ճիշտ երկու տարր:

А. А. Алексанян, А. В. Согоян
Об *NP*-полноте некоторых задач генерации подстановок

Исследуется вычислительная сложность двух задач, касающихся подстановок: выражения заданной подстановки $\pi \in S_n$ в виде произведения подстановок $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, взятых из заданных множеств подстановок $\sigma_1 \in X_1, \dots, \sigma_m \in X_m$, или в виде произведения подстановок $\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, выбранных из заданной последовательности подстановок $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Доказана *NP*-полнота обеих задач и показано, что первая из них содержит вторую в виде частного случая, соответствующего экземпляру первой задачи с $|X_i| = 2$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Таким образом, первая задача остается *NP*-полной даже в случае, когда все множества X_i состоят в точности из двух подстановок.

References

1. *Pinch R.G.E.* – In: *Combinatorics and Probability* (edited by Graham Brightwell, Imre Leader, Alex Scott and Andrew Thomason), (CUP, 2007) 473-480; arXiv:math/0511501v1 [math.CO] 20 Nov 2005.

2. *Buchheim C., Cameron P.J., Wu T.* On the Subgroup Distance Problem ECCC, TR06-146, 2006.
3. *Schaefer T.J.* – In: Proc. 10th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, 216-226.
4. *Garey M.R., Johnson G.S.* Computers and intractability: a guide to the theory of NP -completeness, W.H.Freeman, San Francisco, CA, 1979.
5. *Sims C.C.* In: Proc. Second Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation. New York. ACM Press. 1971. P. 23-28.
6. *Seress A.* Permutation group algorithms. Cambridge University Press. 2003.

МЕХАНИКА

УДК 539.1

А. Н. Мартиросян, А. С. Динунц, А. В. Давтян

Нестационарная задача о заживлении трещины, движущейся с переменной скоростью

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. Г. Багдоевым 1/VII 2011)

Ключевые слова: *метод свертки, движущиеся трещины, смешанные граничные задачи.*

В настоящей статье исследуются нестационарные смешанные задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью. Рассматривается полубесконечная трещина, в которой содержится жидкость с примесями и край которой движется по произвольному закону $x=l(t)$. В граничных условиях учитывается наращивание границы трещины; показано, что на крае трещины, т.е. при $x \rightarrow \ell(t)$, особенностей не имеется. Приведено решение задачи наращивания границы трещины, край которой движется с произвольной скоростью, при наличии износа в изотропной упругой среде.

Пусть край полубесконечной трещины, в которой содержится жидкость (флюид) с примесями, двигается по произвольному закону вдоль оси x в изотропной упругой среде. В случае нулевой скорости движения края трещины задача наращивания границы трещины аналитически и численно исследована в [1, 2], с обсуждениями возможных применений результатов к геотермальным, технологическим, биологическим трещинам. Вместе с тем представляет интерес изучение соответствующих задач заживления подобных полостей и разломов, условно называемых в [1, 2] трещинами, когда, кроме потока флюида в них [1, 2], имеется движение самого края разлома с произвольной скоростью, причем подобного рода задачи рассматривались в разных вариантах в [3].

Рассмотрим следующую задачу, когда граничные условия имеют вид ($y=0$)

$$\sigma_{xy} = 0 - \infty < x < \infty; \quad V = 0, \quad x > l(t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\{ \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi \right\} \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{K\bar{a}^2}{\rho_s} + \xi \right) \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{i_0}{\rho_s} H(x - \xi)H(t - \tau), x < l(t), \xi < l(\tau), \quad (1)$$

где $l(t)$ – закон движения края трещины, K – коэффициент вертикального износа. При $t = 0$ имеем нулевые начальные условия. Решение задачи (1) ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x . Обозначив через $\bar{U}, \bar{V}$ преобразования Лапласа по t от U, V и через $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{V}}$ преобразования Фурье по x от $\bar{U}, \bar{V}$, решение задачи ищется в виде

$$\bar{U}; \bar{V} = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_n y} \bar{\bar{U}}_n; \bar{\bar{V}}_n d\bar{\alpha}, \quad (2)$$

$s = -i\omega$ – параметр преобразования Лапласа по t и имеют место соотношения

$$\bar{\beta}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, c_1 = \bar{a}, c_2 = b, \bar{\bar{V}}_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1, \bar{\bar{V}}_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{\bar{U}}_2. \quad (3)$$

Подставляя (2) в граничные условия (1), получим уравнение

$$\bar{\bar{\Omega}} = i C_0 R(\bar{\alpha}) \bar{\beta}_2 \bar{\bar{V}}, \quad (4)$$

где используются обозначения

$$\bar{\bar{\Omega}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st - i\bar{\alpha}x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + K_2 \frac{\partial U}{\partial x} + K_3 \frac{\partial V}{\partial y} \right) dt dx, \quad (5)$$

$$R(\bar{\alpha}) = \frac{-\bar{\beta}_1 \omega^3 + \bar{\alpha}^2 b^2 K_2 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) + K_3 b^2 (\bar{\beta}_1^2 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2) + 2\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2)}{\omega^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 C_0},$$

$$C_0 = (K_2 + K_3) b^2 \bar{a}^{-2}, K_2 = \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi, K_3 = \frac{K\bar{a}^2 \rho}{\rho_s} + \xi.$$

Функция $R(\bar{\alpha})$ в комплексной плоскости $\bar{\alpha}$ имеет два чисто мнимых и два вещественных корня: $\bar{\alpha}_{1,3} = \pm \frac{\omega}{a} \alpha_{1,3}, \bar{\alpha}_{2,4} = \pm \frac{\omega}{a} i \alpha_{2,4}; \alpha_1, \alpha_2 \in R$ и $R(\bar{\alpha}) \rightarrow 1$ при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$. После выбора ветвей функций $\bar{\beta}_n$, используя теорему Винера–Пэли [4], получаем факторизацию функции $R(\bar{\alpha})$ в следующем виде:

$$R(\bar{\alpha}) = R^+(\bar{\alpha}) R^-(\bar{\alpha}), R \pm (\bar{\alpha}) = G_{\pm}(\bar{\alpha}) \frac{\left(\bar{\alpha} \pm \frac{\omega}{a} \alpha_1 \right) \left(\bar{\alpha} \pm \frac{\omega}{a} i \alpha_2 \right)}{\left(\frac{\omega}{a} \pm \bar{\alpha} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{b} \pm \bar{\alpha} \right)^{3/2}}, \quad (6)$$

где $R^+(\bar{\alpha})$ и $R^-(\bar{\alpha})$ – аналитические и отличные от нуля функции, соответственно, в полуплоскостях $\text{Im}(\bar{\alpha}) > 0$ и $\text{Im}(\bar{\alpha}) < 0$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{S}}_+ \bar{\bar{S}}_- \bar{\bar{\Omega}}, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{\bar{S}}_+ = \frac{(\omega/b + \bar{\alpha})(\omega/\bar{a} + \bar{\alpha})^{1/2}}{(\bar{\alpha} + \omega\alpha_1/\bar{a})(\bar{\alpha} + \omega i\alpha_2/\bar{a})} G_+^{-1}(\bar{\alpha}),$$

$$\bar{\bar{S}}_- = \frac{1}{iC_0} \frac{(\omega/b - \bar{\alpha})(\omega/\bar{a} - \bar{\alpha})^{1/2}}{(\bar{\alpha} - \omega\alpha_1/\bar{a})(\bar{\alpha} - \omega i\alpha_2/\bar{a})} G_-^{-1}(\bar{\alpha}),$$

$$G^-(\bar{\alpha}) = \text{Exp} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\bar{a}/b} \arctg \frac{\bar{a}^3/b^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2(K_2 - K_3)\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\bar{a}^2/b^2 - \zeta^2}}{(K_3(\zeta^2 - 1) - K_2\zeta^2)(2\zeta^2 - \bar{a}^2/b^2)} \frac{d\zeta}{\zeta - a\bar{\alpha}/\omega} \right\}, \bar{\bar{P}}_{\pm} = \frac{1}{\bar{\bar{S}}_{\pm}}. \quad (8)$$

Важно отметить, что особые точки функции $\bar{\bar{S}}_{\pm}$ находятся, соответственно, в нижней и верхней полуплоскости. Вычисляем оригиналы $S_{\pm}(t, x); P_{\pm}(t, x)$ по формуле обращения

$$f(t, x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{f}}(s, \bar{\alpha}) \exp(st - i\bar{\alpha}x) d\bar{\alpha}. \quad (9)$$

Произведя во внутреннем интеграле подстановку $\bar{\alpha} = \omega\alpha/a$ и используя представление

$$s^{\lambda} \Gamma(-\lambda) = \int_0^{\infty} t_1^{-\lambda-1} \exp(-st_1) dt_1, \lambda = 0.5; 1.5, \quad (10)$$

для $S_{\pm}(t, x); P_{\pm}(t, x)$ можно записать

$$S_+(t, x) = \frac{\sqrt{i}}{4\pi^2 i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{(\bar{a}/b - \alpha) \sqrt{1 - \alpha} G_-^{-1}(\alpha)}{\Gamma(-0.5) \sqrt{\bar{a}} (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2 i) t_1^{3/2}} \exp[s(t - t_1 - \alpha x/\bar{a})] dt_1. \quad (11)$$

Интеграл в (11) по переменной s дает δ -функцию от аргумента $t - t_1 - \alpha x/\bar{a}$. Вычисляя интеграл от $\delta(t - t_1 - \alpha x/\bar{a})$ функции по переменной t_1 , формулу (11) можно привести к следующему виду:

$$S_+(t, x) = \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{a}/b - \alpha) \sqrt{1 - \alpha} G_-^{-1}(\alpha) d\alpha}{\Gamma(-0.5) \sqrt{\bar{a}} (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2 i) (t - \alpha x/\bar{a})^{3/2}}. \quad (12)$$

Так как при $x > 0$ подынтегральное выражение в формуле (12) является аналитической функцией от переменной α в верхней полуплоскости плоскости α , можно деформировать путь интегрирования в формуле (12) в нижней полуплоскости плоскости α при $x > 0$. Тогда можно записать

$$S_+(t, x) = \frac{2H(x)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} H\left(\frac{at}{x} - 1\right) \int_1^{\bar{a}t/x} \frac{i\sqrt{i}(\bar{a}/b - \alpha) \sqrt{\alpha - 1} G_-^{-1}(\alpha) d\alpha}{\Gamma(-0.5) \sqrt{\bar{a}} (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2 i) \sqrt{t - \alpha x/\bar{a}}} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{2i\sqrt{i}(\bar{a}/b - \alpha_2 i)\sqrt{\alpha_2 i - 1}G_-^{-1}(\alpha_2 i)}{\Gamma(-0.5)\sqrt{a}(\alpha_2 i - \alpha_1)\sqrt{t - \alpha_2 ix/\bar{a}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{2i\sqrt{i}(\bar{a}/b - \alpha_1)\sqrt{1 - \alpha_1}G_-^{-1}(\alpha_1)}{\Gamma(-0.5)\sqrt{a}(\alpha_1 - \alpha_2 i)\sqrt{t - \alpha_1 x/\bar{a}}} . \quad (13)$$

Чтобы облегчить дальнейшие вычисления, функции $G_{\pm}(\alpha), G_{\pm}^{-1}(\alpha)$ можно представить в несколько иной форме. Функции $G_{\pm}(\alpha), G_{\pm}^{-1}(\alpha)$ являются аналитическими на всей комплексной полуплоскости α за исключением точек, принадлежащих разрезам $[\pm 1; \pm \bar{a}/b]$.

Если замкнутые линии охватывают разрезы по отдельности, то значения аналитических во внешней области функций определяются их граничными значениями по формуле Коши для неограниченных областей

$$G_{\pm}(\alpha) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{G_{\pm}(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad G_{\pm}^{-1}(\alpha) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{G_{\pm}^{-1}(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta.$$

Контур $C_{\pm}$ обходятся по часовой стрелке. Деформацией контуров на вещественную ось новые выражения для функций приводятся к следующему виду:

$$G_{\pm}(\alpha) = 1 + \int_1^{\bar{a}/b} \frac{F_1(u) du}{u \pm \alpha}, \quad G_{\pm}^{-1}(\alpha) = 1 + \int_1^{\bar{a}/b} \frac{F_2(u) du}{u \pm \alpha}, \quad (14)$$

где

$$F_1(u) = \frac{\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2 \frac{K_2 - K_3}{a} u^2 \beta_1^* \beta_2 \right)}{\pi \sqrt{\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2 \frac{K_2 - K_3}{a} u^2 \beta_1^* \beta_2 \right)^2 + (\zeta^2 - \beta_2^2)^2 \left(\frac{K_3}{a} (\beta_1^*)^2 - \frac{K_2}{a} u^2 \right)^2}} G_-(u),$$

$$F_2(u) = \frac{-\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2 \frac{K_2 - K_3}{a} u^2 \beta_1^* \beta_2 \right)}{\pi \sqrt{\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2 \frac{K_2 - K_3}{a} u^2 \beta_1^* \beta_2 \right)^2 + (\zeta^2 - \beta_2^2)^2 \left(\frac{K_3}{a} (\beta_1^*)^2 - \frac{K_2}{a} u^2 \right)^2}} G_-^{-1}(u),$$

$$\beta_1^*(u) = \sqrt{u^2 - 1}, \beta_2(u) = \sqrt{u^2 - \frac{\bar{a}^2}{b^2}}.$$

В формуле (13), произведя подстановку $y = \sqrt{\alpha - 1}/\sqrt{t - \alpha x/\bar{a}}$ и используя теорему Коши о вычетах, можно после нескольких преобразований (интегрирование по частям и дифференцирование по параметру под знаком интеграла) получить

$$S_+(t, x) = \frac{2i\sqrt{i}H(x)}{\Gamma(-0.5)\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ H\left(\frac{\bar{a}t}{x} - 1\right) \left[1 - \int_{\bar{a}t/x}^{\bar{a}/b} \frac{(\bar{a}/b - u)\sqrt{u - 1}F_2(u) du}{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i)\sqrt{u - \bar{a}t/x}} H\left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x}\right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для оригинала $P_+(t, x)$:

$$P_+(t, x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\pi i a^{-3/2}}\sqrt{x}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ H\left(\frac{\bar{a}t}{x} - 1\right) \left[\frac{(\alpha_1 - \bar{a}/b)(\alpha_2 i - \bar{a}/b)}{\sqrt{1/b - t/x}\sqrt{\bar{a}/b - 1}} \left(1 - \int_1^{\bar{a}/b} \frac{F_1(u)}{\bar{a}/b - u} du\right) H\left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4x(1 - \bar{a}/b + \alpha_1 + \alpha_2 i)}{\sqrt{\bar{a}}} + \sqrt{\bar{a}} \int_1^{\bar{a}/b} F_1(u) du + \pi \int_{\frac{\bar{a}t}{x}}^{\bar{a}/b} \frac{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i) F_1(u) du}{(\bar{a}/b - u)\sqrt{u - 1}\sqrt{u - \bar{a}t/x}} H\left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x}\right) \right] \right\},$$

а функции $S_-(t, x); P_-(t, x)$ получаются, соответственно, от $S_+(t, x); P_+(t, x)$ заменой x на $-x$ и умножением на постоянные $1/iC_0$ и iC_0 . Представим изображения функций $\Omega(t, x); V(t, x)$ (обозначения их $\bar{\bar{\Omega}}(s, \alpha); \bar{\bar{V}}(s, \alpha)$) в виде

$$\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\bar{\Omega}}_+ + \bar{\bar{\Omega}}_-, \quad \bar{\bar{V}} = \bar{\bar{V}}_+ + \bar{\bar{V}}_-, \quad \bar{\bar{V}}_+ = 0, \quad (16)$$

где $\bar{\bar{\Omega}}_+(t, x); \bar{\bar{V}}_-(t, x)$ - не известны и подлежат определению.

Для оригиналов $\Omega(t, x); V(t, x)$ имеем

$$V(t, x) = V_+(t, x)H(x - l(t)) + V_-(t, x)H(l(t) - x); \\ \Omega(t, x) = \Omega_+(t, x)H(x - l(t)) + \Omega_-(t, x)H(l(t) - x). \quad (17)$$

Здесь $\Omega(t, x) = \Omega_+(t, x)$ при $x > l(t)$, $V = V_-(t, x)$ при $x < l(t)$ не известны. Из формулы (15) нетрудно заметить, что функция $\bar{\bar{S}}(s, \bar{\alpha})$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\bar{\bar{S}}_{\pm}, \bar{\bar{P}}_{\pm}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$S_+(t, x) = P_+(t, x) = 0 \text{ при } x < bt, \\ S_-(t, x) = P_-(t, x) = 0 \text{ при } x > -bt, -b < \dot{l}(t) = dl/dt < b. \quad (18)$$

Подставляя (15), (16) в (17) и учитывая (18), можно, как в [3], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t в виде

$$V_- = S_- ** [(S_+ ** \Omega_- - P_- ** V_+)H(l - x + 0)], \\ \Omega_+ = -P_+ ** [(S_+ ** \Omega_- - P_- ** V_+)H(x - l + 0)]. \quad (19)$$

Поскольку из (1) имеем, что $\Omega_- = -i_0 H(x - \xi)H(t - \tau)/\rho_s, x < l(t)$, можно с учетом (15) представить $S_+ ** \Omega_-$ в виде

$$S_+ ** \Omega_- = -\frac{i_0}{\rho_s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t S_+(t', x') H(x - x' - \xi) H(t - t' - \tau) dt' dx' = \\ = \frac{2i_0}{\rho_s \sqrt{i\pi}} H(x - \xi) \sqrt{x - \xi} H(T - 1) \left\{ 1 - \int_T^{\bar{a}/b} \frac{(\bar{a}/b - u)\sqrt{u - 1}\sqrt{u - T} F_2(u) du}{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i)u} H\left(\frac{\bar{a}}{b} - T\right) \right\}, \\ T = \frac{\bar{a}(t - \tau)}{x - \xi}. \quad (20)$$

Подставляя выражения $S_+ ** \Omega_-$ и $S_-(t, x)$ в (19) с учетом (16), после громоздких вычислений получается

$$V_- = -\frac{2i_0(x-\xi)}{\rho_s C_0 \pi} \operatorname{Re} \left(A(I_{11} + I_{12}) + I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} \right), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi_0 - 1}{\varphi_0 + 1} \right| - \frac{(\ell(t_0'') - x)\varphi_0}{x - \xi} \right) H(L_0 - 1) + \frac{1}{2} \left(\ln(T - \sqrt{T^2 - 1}) - \sqrt{T^2 - 1} \right) H(1 - L_0), \\ I_{22} &= - \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_{L_1}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left(\frac{(\ell(t_1'') - x)\varphi_1 \sqrt{u - L_1}}{u(x - \xi) + (\ell(t_1') - \xi) \left(L_1 + \frac{h}{\varphi_1^2} \right)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}} \ln \left| \frac{\varphi_1 - \sqrt{\frac{u+h}{u-L_1}}}{\varphi_1 + \sqrt{\frac{u+h}{u-L_1}}} \right| \right) H(L_1 - 1) H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L_1\right) dudh, \\ I_{12} &= \int_{L_0}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left(\frac{\sqrt{u - L_0} (\ell(t_0'') - \xi)}{(u - T)(x - \xi)\varphi_0} - \frac{1}{2\sqrt{u+1}} \ln \left| \frac{\varphi_0 - \sqrt{\frac{u+1}{u-L_0}}}{\varphi_0 + \sqrt{\frac{u+1}{u-L_0}}} \right| \right) H(L_0 - 1) H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L_0\right) du + \\ &+ \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left(\frac{\sqrt{u-1}\sqrt{T^2-1}}{u-T} - \frac{1}{2\sqrt{u+1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+1}{T-1}} - \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}}{\sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}} \right| \right) H(1 - L_0) du, \\ I_{21} &= \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \left\{ \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi_1 \sqrt{h} - 1}{\varphi_1 \sqrt{h} + 1} \right| + \frac{\varphi_1 \sqrt{h}}{1 - \varphi_1^2 h} \right) H(L_1 - 1) + \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}} - 1}{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}} + 1} \right| - \frac{\sqrt{T-1}\sqrt{T+h}}{h+1} \right) H(1 - L_1) \right\} dh, \\ I_{23} &= \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left(\frac{\sqrt{(bu - \bar{a})(bT - \bar{a})(T+h)}}{(\bar{a} + hb)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b}} - \sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b}} + \sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}} \right| \right) H(1 - L_1) H\left(T - \frac{\bar{a}}{b}\right) dudh, \\ I_{24} &= - \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_{L_1}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left(\frac{\sqrt{(u-1)(T+h)(T-1)}}{(h+1)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}} - \sqrt{\frac{u+h}{u-1}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-1}} + \sqrt{\frac{u+h}{u-1}}} \right| \right) H(1 - L_1) dudh, \end{aligned}$$

$$F_3(h) = \int_h^{\bar{a}/b} \frac{d}{du} \left(\frac{(\bar{a}/b - u) \sqrt{u-1} F_2(u)}{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i)} \right) \frac{du}{\sqrt{u-h}},$$

$$F_4(u) = \frac{(\bar{a}/b - u) \sqrt{u-1} (u - T) F_2(u)}{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i) u},$$

$$l(t_n'') - x - \frac{a(t - t_n'')}{h_n} = 0, \varphi_n = \sqrt{\frac{l(t_n'') - \xi}{l(t_n'') - x}}, L_n = \frac{a(t_n'' - \tau)}{l(t_n'') - \xi}, h_0 = 1, h_1 = h,$$

$$A = 1 - \int_1^{\bar{a}/b} \frac{(\bar{a}/b - u) F_2(u) du}{(u - \alpha_1)(u - \alpha_2 i)}.$$

Как видно из последней формулы, при $x \rightarrow \ell(t)$ особенностей не имеется, что в других задачах статики и динамики известно из решений работ [1, 2, 5].

Для неподвижной трещины указанная задача решена в [2], получено вертикальное перемещение среды на трещине $V(t, x)$, записано выражение полуширины трещины $b(t, x) = b_0 + V(t, x)$ и численно решено уравнение $b_0 + V(t, x) = 0$, определяющее процесс x, t залечивания для макротрещин с начальной полушириной $b_0 = 0.1$ см, $b_0 = 1$ см и микротрещин с $b_0 = 10^{-5}$ см. По построенным графикам $x = x(t)$ для различных постоянных процессов в биологии, сейсмологии, геотермальных и технологических трещин удалось выяснить их прямолинейный характер для макротрещин и наличие существенно криволинейной части для микротрещин, причем наклон dx/dt для макротрещин намного больше, чем для микротрещин. Используя метод нелинейной волновой динамики для описания статистики [6-8] указанного процесса залечивания [2], согласно которому по средней кривой процесса $x = x(t)$, можно определять характер его детерминированности согласно уравнению [2, 9]

$$dx/dt = a_0 + \gamma P/2, \quad (22)$$

где a_0 есть относительно малый наклон кривой $x = x(t)$ на предварительной линейной латентной хаотичной [2, 9] части процесса, а полное уравнение (22) характеризует нелинейный почти детерминированный процесс в окончательной стадии его развития. Причем естественно по самой постановке задачи и по прямолинейным графикам $x(t)$ считать

для макротрещин вероятность $P = 1$, тогда находится постоянный нелинейный коэффициент γ для всех процессов [2], а затем определяется по (22) вероятность $P \ll 1$ для микротрещин, т.е. процесс для них является хаотичным. Те же исследования применяются нами для движущихся по произвольному закону трещинам, для которых $V(t, x)$ дается (21). Взяв в качестве $l(t)$ полученную нами аналитическую формулу для практической кривой, данной в виде графика распространяющейся макроскопической трещины в [10], удастся провести аналогичный метод получения кривых залечивания движущихся трещин флюидом [2] и их статистики.

Следует отметить, что обратный процесс формирования магистральных макротрещин после резкого перехода от хаотичных микро- и мезотрещин к детерминированным макротрещинам является актуальной задачей механики разрушения [10-12], причем указанные переходы являются типичными триггерными фазовыми переходами, аналогичными генерации лазерного излучения, сверхпроводимости, большинству биологических процессов [7, 13]. При этом указанные переходы можно изучать методами нелинейной волновой динамики [2].

Горисский государственный университет

А. Н. Мартиросян, А. С. Динуц, А. В. Давтян

Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью

Методом свертки решается задача о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в полубесконечный тонкий разлом в виде полуполосы (трещины), край которой движется с произвольной скоростью в термоупругой плоскости.

Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ա. Ս. Դինունց, Ա. Վ. Դավթյան

Փոփոխական արագությամբ շարժվող ճաքի բուժման ոչ ստացիոնար խնդիրը

Փաթույթների մեթոդով լուծված է ջերմաառաձգական հարթության մեջ կիսաանվերջ բարակ շերտի (ճաքի) բուժման խնդիրը ներս թափանցող հեղուկ-խառնուրդների միջոցով, երբ ճաքի եզրը շարժվում է կամայական վերջավոր արագությամբ:

The Unsteady Problems on Healing of Crack Moving with Arbitrary Velocity

By convolution method the problem of healing of moving with the arbitrary velocity semi-infinite thin fracture (crack), by current of mixture of fluid-crystallines in it, within infinite thermo elastic media is solved.

Литература

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В.- ДНАН РА. 2010. Т.110. N 2. С.151-162.
2. Bagdоеv A.G., Martirosyan G.A., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V. In: VII Int. Conf. "The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media". Goris. Armenia. 2011. P. 8.
3. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. "Зангак-97". 2007. 244 с.
4. Винер Н., Пэли П. Преобразование Фурье в комплексной области. М.Наука.1964. 268 с.
5. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А. В кн.: Материалы VI междунар конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис – Степанакерт. 2008. С. 345-349.
6. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика. Т.3. М. Мир.1998. 331с.
7. Эбеллинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.:Мир. 1979. 278 с.
8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М. Наука. 1976. 494 с.
9. Мартиросян А.Н., Багдоев А.Г. - ДНАН РА, 2008. Т. 108. N 4. С. 341-349.
10. Туманов Н.В. В кн.: Материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды". Т. 2. Дилижан, Армения. 2010. С.194-198.
11. Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V. In: Int. Conf. "Topical Problems of Continuum Mechanics". V. 2. Dilijan, Armenia. 2010. P. 256-261.
12. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. Изд-во Московского физ.-тех. ин-та (Гос.университет). 2008. 214 с.
13. Хакен Г. Синергетика. М. Мир. 1980. 404 с.

ФИЗИКА

УДК 533.924

Г. Н. Караджян¹, А. М. Кечиянц¹, Ж. Р. Паносян²

Колебательные процессы и их бифуркации в системе плазма–конденсат с обратными связями

(Представлено академиком Д.М. Седракяном 16/ I 2012)

Ключевые слова: *взаимодействие плазмы с поверхностью, напыление, эрозия, нелинейная динамика*

1. При получении тонких пленок некоторых материалов [1-3] в ионно–плазменных устройствах решающее влияние на свойства полученных тонкопленочных структур оказывают динамические факторы роста. Динамические технологические режимы роста позволяют получить тонкие пленки с весьма нетривиальной архитектурой поверхности и объема. Это экзотические ажурные высокопористые структуры металлов и полупроводников низкой летучести [1], нанокompозитные алмазно-графитовые материалы с регулируемой концентрацией и размерами вертикально связанных кристаллитов [2], синусоподобные образования с изменяемыми периодом и линейными размерами [3], другие образования на поверхности и в композитной матрице напыляемого вещества.

Эксперименты показывают, что процессы массопереноса в ионно-плазменных устройствах в окрестности ростовой поверхности демонстрируют довольно сложную, неустойчивую динамику. Такого рода динамика зачастую приводит к плохой воспроизводимости экспериментальных и технологических результатов роста пленок, природа которой до конца не выяснена.

Нетривиальная динамика роста тонких пленок в ионно-плазменных устройствах обусловлена в основном взаимодействием двух существенно неравновесных подсистем – плазмы в прикатодном слое и конденсата на ростовой поверхности. Физические механизмы этого взаимодействия остаются еще недостаточно изученными.

Олемской с соавторами [4,5] предложили простую модель со сложной динамикой, моделирующую неравновесные процессы массопереноса при взаимодействии плазмы с ростовой поверхностью. Эта модель привязывалась к конкретному типу ионно-плазменного устройства (магнетрон тлеющего разряда с полым катодом) и к конкретным экспериментальным результатам. Между тем, предложенная модель, динамика которой намного богаче, чем описано в работах [4,5], представляет самостоятельный интерес стимулирует теоретические исследования в этой области.

В работах [4,5] модельная динамическая задача исследовалась в адиабатическом приближении: трехмерное фазовое пространство в целях упрощения задачи сводилось к одномерному. Математический инструмент, который при этом использовался – принцип подчинения Хакена [6], обычно применяют в тех ситуациях, когда большая размерность системы не позволяет решить задачу аналитически.

В настоящей работе модель Олемского с соавторами [4,5] изучается стандартными методами качественного исследования динамических систем в трехмерном фазовом пространстве, без сведения задачи к одномерной или двумерной. Вдали от состояния равновесия используется численный счет. Адиабатическое приближение и принцип подчинения Хакена не используются.

2. Модель, предложенная в работах [4,5], такова. Система плоская, состоит из четырех плоских слоев ([7], рис.1) (сверху вниз): приповерхностного слоя плазмы, адсорбционной пленки, слоя конденсата и слоя подложки. Толщина слоев по порядку величин разная. Приповерхностный слой плазмы имеет толщину дебаевской длины экранирования, адсорбционная пленка состоит практически из одноатомного слоя адсорбированных атомов, слой конденсата простирается на сотни и тысячи атомных расстояний, подложка имеет макроскопические размеры.

Адсорбционная пленка далее именуется также «ростовой поверхностью». Некоторые термодинамические модели адсорбционных пленок представлены в обзоре [8]. В данной модели предполагается, что адсорбционная пленка является двумерной, с известным термодинамическим фазовым пространством. Предполагается, что, регулируя динамику системы (например, посредством выбора начальных/конечных состояний системы и/или управляющих параметров), можно в принципе "попасть" в желаемую область термодинамического фазового пространства адсорбционной пленки и обеспечить тем самым целевую структуру пленки в процессе стационарного или нестационарного режима роста.

Модель оперирует двумя различными потоками нейтральных атомов и ионов: потоком плазменной накачки J_p и потоком напыления-эрозии $J(t)$, t – время. Поток плазменной накачки J_p стационарен, задан, имеет диффузионно-пролетную природу, поступает на верхнюю границу приповерхностного слоя плазмы из неисчерпаемого источника напыляемого вещества. За положительное направление обоих потоков принято направление сверху вниз. Положительным значениям $J(t)$ соответствует поток напыления (к ростовой поверхности), отрицательным значениям – поток эрозии (от ростовой поверхности). Кольцо массопереноса [9], помимо других процессов переноса, вносит свой вклад как в поток эрозии (полукольцо распыления и испарения), так и в поток напыления (полукольцо возврата на ростовую поверхность).

Динамические переменные модели: поток напыления-эрозии $J(t)$, поверхностная концентрация $n(t) \geq 0$ атомов и ионов напыляемого вещества в плазме (в непосредственной близости от ростовой поверхности), температура $T(t)$ ростовой поверхности, отсчитанная от температуры окружающей среды.

Управляющие параметры системы: величина потока плазменной накачки $J_p \geq 0$, поверхностная концентрация адсорбированных на ростовой поверхности атомов $n_p > 0$, константа нелинейной обратной связи $b_T > 0$ для скорости изменения температуры ростовой поверхности, константа нелинейной обратной связи $b_J > 0$ для скорости изменения потока напыления-эрозии, а также $t_n > 0$, $t_T \geq 0$, $t_J \geq 0$ – характерные масштабы времени для динамических переменных $n(t)$, $T(t)$, $J(t)$, соответственно. Число размерных управляющих параметров модели равно семи.

Уравнения движения модели таковы [4,5]:

$$t_n \frac{dn}{dt} = n_p - n - t_n J, \quad (1)$$

$$t_T \frac{dT}{dt} = -T - b_T n J, \quad (2)$$

$$t_J \frac{dJ}{dt} = -J_p - J + b_J n T. \quad (3)$$

Таким образом, в описанной выше модели система представляется динамической, диссипативной, со стационарной внешней накачкой.

Используя формулы

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t}{t_n} \geq 0, \quad \sigma = \frac{t_T}{t_n} \geq 0, \quad \kappa = \frac{t_J}{t_n} \geq 0, \\ X &= \frac{n}{n_p} \geq 0, \quad Y = t_n b_J T, \quad Z = \frac{t_n J}{n_p}, \\ \alpha &= \frac{t_n J_p}{n_p} \geq 0, \quad \beta = b_T b_J n_p^2 > 0,\end{aligned}\tag{4}$$

размерные уравнения движения можно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{dX}{d\tau} = -X - Z + 1,\tag{5}$$

$$\sigma \frac{dY}{d\tau} = -Y - \beta XZ,\tag{6}$$

$$\kappa \frac{dZ}{d\tau} = -Z + XY - \alpha.\tag{7}$$

В уравнениях (5-7): τ – безразмерное время, X – безразмерная приповерхностная концентрация атомов, Y – безразмерная температура ростовой поверхности, Z – безразмерный поток напыления-эрозии. Управляющие параметры в (5-7): α – относительный поток плазменной накачки, β – мультипликативная сила обратных связей, σ и κ – относительные масштабы времени. Управляющий параметр β зависит от трех варьируемых в широких пределах величин, поэтому интервал его изменения чрезвычайно велик. Число безразмерных управляющих параметров системы равно четырем.

3. Исследование состояний равновесия системы уравнений (5-7) показало следующее. Состояния равновесия (X_s, Y_s, Z_s) системы зависят лишь от двух управляющих параметров, α и β . Координаты состояния равновесия подчиняются следующим алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned}X_s &= 1 - Z_s, \\ Y_s &= -\beta(1 - Z_s)Z_s, \\ Z_s^3 - 2Z_s^2 + (1 + \frac{1}{\beta})Z_s + \frac{\alpha}{\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Кубичное уравнение (8) при $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ (см. неравенства в (4)) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Таким образом, при данных значениях управляющих параметров система допускает единственное физическое состояние равновесия.

Чтобы определить тип единственного состояния равновесия, необходимо исследовать комплексный спектр

$$\Lambda_m = \lambda_m + i\omega_m, \quad m = 1, 2, 3,$$

матрицы устойчивости системы (5-7). Матрица устойчивости имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -\frac{\beta}{\sigma} & -\frac{1}{\sigma} & -\frac{\beta}{\sigma}(1-Z_s) \\ -\frac{\beta}{\kappa}(1-Z_s)Z_s & \frac{1}{\kappa}(1-Z_s) & -\frac{1}{\kappa} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где Z_s – действительный корень кубического уравнения (8).

Громоздкие выражения для собственных значений матрицы устойчивости опускаются. Спектр матрицы устойчивости зависит от всех управляющих параметров системы.

Таким образом, чтобы определить местоположение состояния равновесия в трехмерном пространстве динамических переменных, достаточно знать величину относительного потока плазменной накачки и мультипликативную силу обратных связей. Показатели затухания и частоты собственных колебаний в окрестности состояния равновесия определяются всеми четырьмя безразмерными управляющими параметрами.

Аналитический и численный анализ комплексного спектра матрицы устойчивости показал следующее. При $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$, $\kappa > 0$ (см. неравенства в (4)) в системе реализуются два типа состояния равновесия. Первый тип – устойчивый фокус. Ему соответствуют колебательные релаксации в окрестности состояния равновесия. Второй тип – устойчивый узел. Этому типу состояния равновесия соответствуют монотонные релаксации. Другие типы состояний равновесия (неустойчивый фокус, неустойчивый узел, седло-фокус, седло-узел, предельные циклы и другие, более сложные) при данных значениях управляющих параметров обнаружить пока не удалось.

4. Однопараметрический бифуркационный анализ системы уравнений (5-7) показал следующее. В системе возможны бифуркации типа состояния равновесия при непрерывном изменении некоторых управляющих параметров.

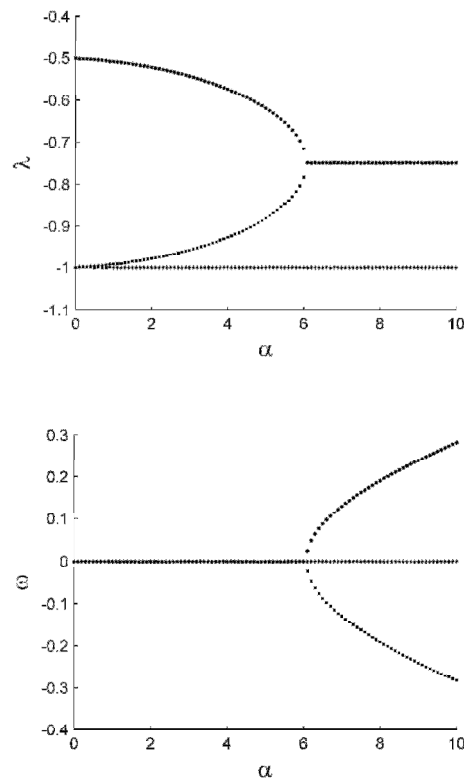


Рис. 1. Бифуркации показателя затухания λ и частоты колебания ω для фазовых траекторий из окрестности состояния равновесия при непрерывном изменении потока плазменной накачки α . Дискретные управляющие параметры: $\beta = 0.001$, $\sigma = 2$, $\kappa = 1$.

Рис.1 демонстрирует бифуркации показателя затухания и частоты колебания для фазовых траекторий из окрестности состояния равновесия в случае, когда бифуркационным параметром является относительный поток плазменной накачки. При нулевой плазменной накачке колебания отсутствуют: реализуются лишь две моды монотонных релаксаций, с показателями затухания $\lambda = -0.5$ и $\lambda = -1.0$. При возрастании плазменной накачки возникает третья мода монотонных релаксаций. Две первые моды монотонных релаксаций постепенно сближаются и в критической точке $\alpha_b = 6.07$ непрерывным образом (неравновесный фазовый переход II рода) переходят в колебательный режим с показателем затухания $\lambda_b = -0.75$. Таким образом, релаксационные колебания генерируются спонтанно, в критической точке, из тривиальной ветви $\omega = 0$. Процесс напоминает генерацию релаксационных колебаний лазера

в рамках модели Статца – Де Марса [10]. В обоих случаях релаксационные колебания описываются устойчивыми фокусами, в случае модели Статца – Де Марса – двумерным.

5. Численное исследование временных зависимостей и фазовых траекторий системы уравнений (5-7) в окрестности состояния равновесия и вдали от него показало следующее. Временные зависимости и соответствующие фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$ имеют однозначные пределы (рис. 2, 3). Такое временное поведение соответствует утверждениям о единственности и типе состояния равновесия. Чем дальше начальное состояние находится от состояния равновесия, тем сложнее временное поведение и соответствующая фазовая траектория. Это указывает на сильную зависимость динамики системы от стартового состояния. Для наиболее сложных траекторий понятие "показатель затухания" теряет смысл. Для таких траекторий изучалась величина конечного времени, за которое фазовая траектория «довольно близко» (по определенному критерию) подходит к состоянию равновесия. Оказалось, что это время сильно зависит от всех четырех управляющих параметров системы. Частота колебаний со временем может меняться (рис. 2), но только в том случае, когда фазовая траектория проходит вдали от состояния равновесия.

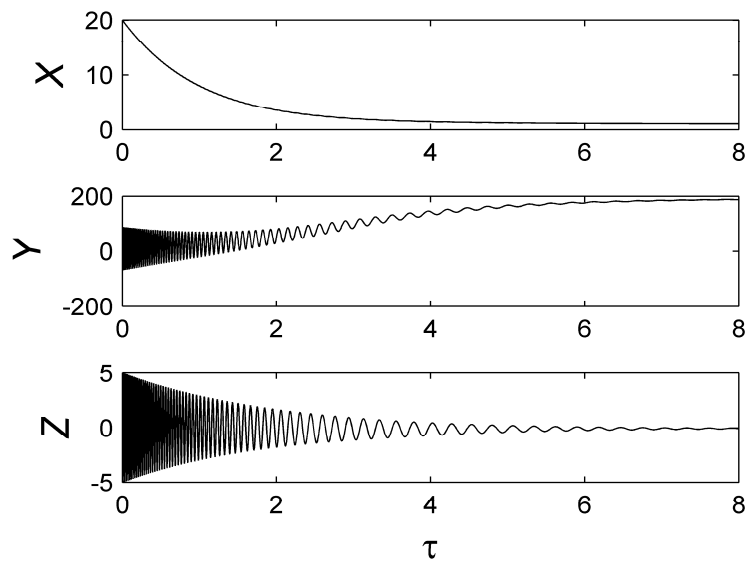


Рис. 2. Временные зависимости динамических переменных. Управляющие параметры: $\alpha = 200$, $\beta = 5000$, $\sigma = 20$, $\kappa = 1$.

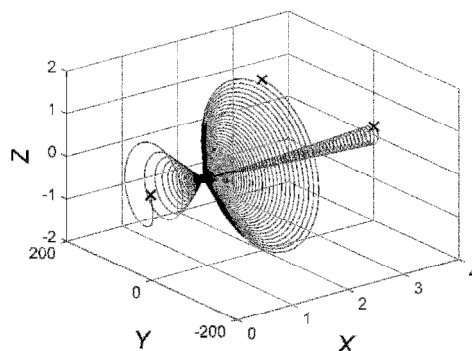


Рис. 3. Три фазовые траектории, исходящие из трех различных начальных точек (обозначены крестами), демонстрирующие колебательную релаксацию к единственной точке состояния равновесия. Управляющие параметры: $\alpha = 10$, $\beta = 5000$, $\sigma = 1$, $\kappa = 1$.

6. Математическое моделирование системы плазма–конденсат, проведенное в настоящей работе, позволяет глубже проникнуть в физические механизмы взаимодействия плазмы с ростовой поверхностью, понять природу неустойчивостей системы плазма–конденсат, выяснить возможные причины плохой воспроизводимости экспериментальных результатов роста пленок в ионно-плазменных устройствах. Подобное знание имеет прикладное значение: оно позволяет разрабатывать эффективные технологические режимы роста тонких пленок в динамическом режиме, в частности, управлять неустойчивым поведением системы.

Работа выполнена в рамках проекта А-1695 Международного Научно-Технического Центра.

¹Институт радиофизики и электроники НАН РА

²Государственный инженерный университет Армении

Г. Н. Караджян, А. М. Кечиянц, Ж. Р. Паносян

Колебательные процессы и их бифуркации в системе плазма-конденсат с обратными связями

Исследуется трехмерная нелинейная динамика системы плазма–конденсат со стационарной внешней плазменной накачкой. Показано, что в такой системе возможен неравновесный фазовый переход – спонтанная генерация релаксационных колебаний динамических переменных.

Գ. Ն. Ղարաջյան, Ա. Մ. Կեչիյանց, Ժ. Ռ. Փանոսյան

**Տատանողական պրոցեսները և դրանց ճյուղավորումները հակադարձ կապեր
պարունակող պլազմախտուցքային համակարգում**

Հետազոտվում է արտաքին կայուն պլազմային մղումով պլազմախտուցքային համակարգի եռաչափ ոչ գծային դինամիկան: Ցույց է տրված, որ այդպիսի համակարգում կարող է գոյություն ունենալ անհավասարակշիռ փուլային անցում, որը դինամիկական մեծությունների նվազող տատանումների ինքնաբեր գեներացիա է:

G.N. Gharajyan, A.M. Kechiantz , Zh. R. Panosyan

**Oscillating Processes and Their Bifurcations in the System of Plasma–Condensate
with Feedbacks**

The three-dimensional nonlinear dynamics of plasma–condensate systems with stationary external plasma pumping is studied. It is shown, that in such system nonequilibrium phase transition is possible – spontaneous generation of damping oscillations of dynamic variables.

Литература

1. *Перекрестов В. И.* - Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. N 19. С. 41.
2. *Яфаров Р.К.* - ЖТФ. 2007. Т. 77. N 1. С. 79.
3. *Panosyan Zh.R., Meliksetyan A.V., Voskanyan S.S., Yengibaryan Y.V., Sahakyan A.A., Darbasyan A.T.* - Diamond and Related Materials. 2006. V. 15. P. 394.
4. *Перекрестов В.И., Олемской А.И., Корнющенко А.С., Косминская Ю.А.* – ФТТ. 2009. Т. 51. N 5. С. 1003.
5. *Олемской А.И., Ющенко О.В., Жиленко Т.И.* – ФТТ. 2011. Т. 53. N 4. С. 789.
6. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М. Мир. 1985. 423 с.
7. *Perekrestov V.I., Olemskoi A.I., Kosminska Yu.O., Mokrenko A.A.* - Phys. Lett. 2009. A. V. 373 P. 3386.
8. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* – УФН. 1998. Т. 168. N10. С. 1083.
9. *Жиглинский А.Г., Кучинский В.В.* Массоперенос при взаимодействии плазмы с поверхностью. М. Энергоатомиздат. 1991. 206 с.
10. *Тарасов Л.В.* Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. М. Радио и связь. 1981. 440 с.

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124

А. М. Арустамян, Л. Ф. Манучарова, Х. А. Джалали,
академик И. А. Варданян

Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в зависимости от природы поверхности

(Представлено 12/X 2011)

Ключевые слова: *радикал, поверхность, метан, цепной механизм*

Интерес к изучению гетерогенных радикальных стадий с участием пероксидных радикалов в основном обусловлен несколькими причинами. Во-первых, подобные стадии имеют место при газофазном окислении органических соединений. Во-вторых, в присутствии аэрозолей в атмосфере они могут влиять на скорость фотохимической деградации летучих органических соединений и тем самым на состав атмосферы.

В работе приводятся новые экспериментальные данные, касающиеся взаимодействия радикалов CH_3O_2 с метаном на твердой поверхности NH_4NO_3 при комнатной температуре, а также обобщены результаты исследований гетерогенной реакции радикалов с органическим соединением в зависимости от природы поверхности (TiO_2 , NH_4NO_3 , NaCl и KCl). Все указанные соединения присутствуют в виде аэрозолей в атмосфере.

Исследования проводились с помощью разработанной нами методики, описанной в основном в работах [1, 2], которая позволяет изучать на уровне радикалов гетерогенные радикальные стадии. Суть методики заключается в следующем. Для регистрации радикалов применяется метод вымораживания радикалов в сочетании со спектрометром ЭПР [3]. Реакция изучается в потоке в капиллярном стеклянном реакторе [4] при низких давлениях (10^{-2} торр), что позволяет свести к минимуму вклад гомогенного взаимодействия радикалов,

соблюдая условие, при котором время пребывания реакционной смеси в реакторе должно быть на порядок и более меньше времени гомогенной реакции. Это подтверждается соответствующими расчетами с учетом константы скорости гомогенной реакции радикалов с исследуемым молекулярным соединением.

Реагенты – радикалы и органическое соединение подаются одновременно через отдельные вводы в капиллярный реактор ($l = 2$ см, $d = 0.14$ см). Ввод малых количеств молекулярного реагента осуществляется через капилляр. Внутренняя поверхность реактора покрывается тем или иным веществом. Предусмотрена возможность экспериментального контроля отсутствия гомогенной реакции подачей смеси реагентов по обводному пути, минуя реактор. В зависимости от типа конкретной изучаемой реакции для выполнения вышеуказанного условия предварительно расчетным путем подбираются длина и диаметр капилляра, а также скорость потока газов. До подачи реагирующей смеси предварительно регистрируется начальная концентрация радикалов.

Покрывание поверхности капиллярного реактора осуществлялось обработкой 10%-ной водной суспензией TiO_2 (рутил) либо 10%-ным водным раствором NH_4NO_3 , NaCl и KCl , соответственно, с дальнейшим выпариванием растворителя.

Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в зависимости от природы поверхности в силу полноты данных анализированы на примере метана, хотя подобные экспериментальные данные на TiO_2 получены и в случае ацетальдегида.

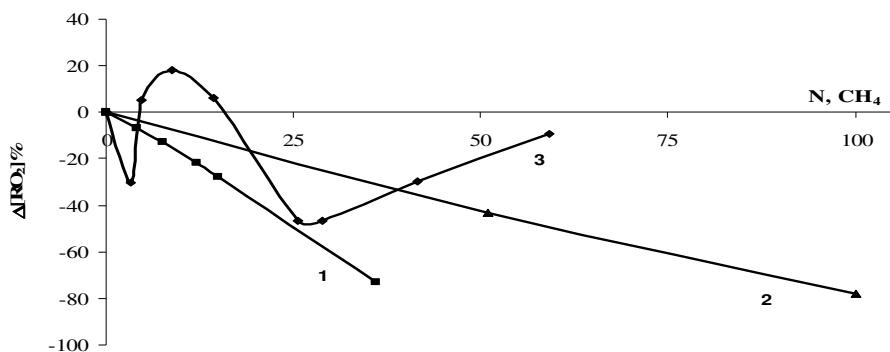
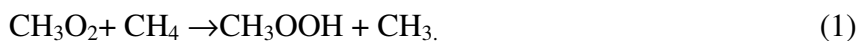


Рис.1. Зависимость изменения количества радикалов ($\Delta[\text{RO}_2]$) от исходных количеств метана ($N \times 10^{16}$ молекул) при $T=293\text{K}$. Кривые: 1 – NaCl , 2 – KCl , 3 – TiO_2 .

На рис.1 приводится зависимость изменения количества радикалов ($\Delta[RO_2]$) от количества метана при $T=293K$ в случае NaCl (кривая 1), KCl (кривая 2) [1, 5] и TiO_2 (кривая 3) [6].

Как видно из сравнения этих данных, вид кривых 1 и 2 отличается от вида кривой 3 как в количественном, так и в качественном аспекте. В случае твердой поверхности солей наблюдается только уменьшение количества радикалов, причем в случае NaCl оно значительно больше. Однако в случае TiO_2 наряду с расходом радикалов при малых количествах метана (органического соединения) наблюдается размножение радикалов, т.е. количество детектируемых радикалов превышает его исходное количество.

Расходование радикалов при их взаимодействии с органическим соединением объясняется [6] гетерогенной реакцией:



Из экспериментальных данных также следует, что скорость расходования радикалов больше на поверхности TiO_2 . Так, например, при количестве метана, равном $[CH_4] = 3,2 \times 10^{16}$ молекул, расход радикалов CH_3O_2 составляет по крайней мере 30 % , а на поверхности NaCl – около 7% .

Ясно, что это результат большей константы скорости взаимодействия пероксидных радикалов с метаном на поверхности TiO_2 , чем на солевых поверхностях. Как видно из рис. 1, в случае TiO_2 при больших количествах метана ($8,8 \times 10^{16}$ молекул) количество радикалов превышает исходное на 18%. Обнаруженное размножение радикалов объясняется дополнительным расходом органического соединения по цепному механизму вследствие гетерогенного радикального распада CH_3OOH . Данный феномен имеет место только на поверхности оксида титана.

На рис.2 представлены экспериментальные данные по взаимодействию радикалов с метаном в случае солевой поверхности, содержащей кислород (NH_4NO_3). Опыты показали, что и на этой поверхности происходит взаимодействие пероксидных радикалов с органическим соединением, как с метаном, так и с ацетальдегидом.

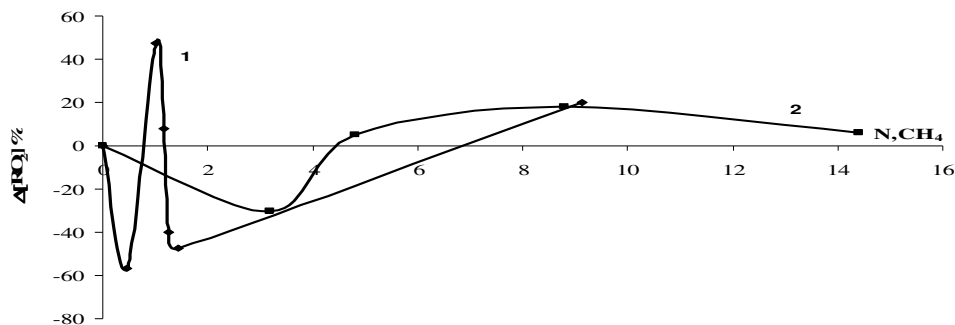


Рис.2. Зависимость изменения количества радикалов ($\Delta[RO_2]$) от исходных количеств метана ($N \times 10^{16}$ молекул) при $T=293K$. Кривые: 1 – NH_4NO_3 , 2 – TiO_2 .

Обращает на себя внимание тот факт, что характер этой зависимости отличается от такового в случае других солевых поверхностей, не содержащих кислород. Она близка к данным, полученным в случае оксида титана и представленным на том же рис. 2 кривой 2 [6].

Из сравнения кривых 1 и 2 следует, что поверхность NH_4NO_3 значительно активнее, чем поверхность TiO_2 . Так, например, при подаче $[CH_4]=10^{16}$ молекул количество радикалов превышает исходное на 47%. Кроме того расходование протекает более интенсивно и наблюдается при значительно меньших количествах метана.

Ранее феномен размножения радикалов объяснялся нами цепным разветвленным механизмом расходования метана, инициированного реакцией (1) [6]. Была рассмотрена также модель подобного цепного процесса в приближении Лэнгмюра–Хиншельвуда в присутствии следов кислорода [7] для хорошо адсорбирующегося органического соединения, которая качественно описывала экспериментально наблюдаемый феномен. В случае плохо адсорбирующегося соединения- метана возможно, что работает механизм Ридила–Или.

Таким образом, явление размножения радикалов наблюдается только в случае кислородсодержащей поверхности. Из полученных данных также следует, что в атмосфере в присутствии подобных аэрозолей вклад гетерогенных реакций радикалов с различными органическими соединениями может существенно влиять на протекающие в ней процессы. Детализация конкретного механизма взаимодействия с активным центром поверхности является предметом дальнейших исследований.

**А. М. Арустамян, Л. А. Манучарова, Х. А. Джалали,
академик И. А. Варданян**

**Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2
с органическим соединением в зависимости от природы поверхности**

Приводятся новые экспериментальные данные, касающиеся взаимодействия при комнатной температуре радикалов CH_3O_2 с метаном на твердой поверхности NH_4NO_3 . Обобщены результаты исследований гетерогенной реакции радикалов с органическим соединением в зависимости от природы поверхности (TiO_2 , NH_4NO_3 , NaCl и KCl).

**Ա. Մ. Առուստամյան, Լ. Ա. Մանուչարովա, Հ. Ա. Ջալալի,
ակադեմիկոս Ի.Ա. Վարդանյան**

**CH_3O_2 ռադիկալների և օրգանական միացության փոխազդեցության
առանձնահատկությունները՝ կախված մակերեսի բնույթից**

Ամփոփված են գերօքսիդային ռադիկալների և մեթանի միջև TiO_2 , NH_4NO_3 , NaCl և KCl մակերևույթների վրա ընթացող ռեակցիայի վերաբերյալ ստացված էքսպերիմենտալ տվյալները: Շղթայական ճյուղավորված մեխանիզմով մեթանի ծախսով պայմանավորված ռադիկալների բազմացման երևույթը դիտվում է միայն թթվածին պարունակող մակերևույթի վրա:

**A. M. Arustamyan, L. A. Manucharova, H. A. Jalali,
academician I. A. Vardanyan**

**Peculiarities of Heterogeneous Interaction of CH_3O_2 Radicals with Organic
Compound Depending on the Surface Nature**

The results of the interaction between peroxy radicals and methane on the surface of TiO_2 , NH_4NO_3 , NaCl and KCl have been summarized. The phenomenon of radicals multiplication, due to the consumption of methane by chain branching mechanism, is observed only in the presence of oxygen containing surface.

Литература

1. *Manucharova L.A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I. A.* - International Journal of Chemical Kinetics. 2004. V. 36. N 1. p. 591-595.
2. *Манучарова Л.А., Царукян С.В., Арустамян А.М., Джалали Х.*- Хим.журн. Армении. 2010. Т. LXIII. С. 37-40.
3. *Nalbandyan A.B., Vardanyan I.A., Arustamyan E.A., Oganessian E.A., Dorunts A.G.*- Progress in Astronautics and Aeronautics. 1988. V. 113. pp. 58-63.

4. *Вартикян Л.А., Гарибян Е.Г., Варданын И.А., Налбандян А.Б.* - Кинетика и катализ. 1980. Т. 21. N 1. С. 174.
5. *Манучарова Л.А., Царукян С.В., Варданын И.А.*- ДНАН РА. 2007. Т.107. С. 239-246.
6. *Jalali H.A., Manucharova L.A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I.A.*- Russian Journal of Phys. Chem. A. 2011. V. 85. N 3. p. 483-485.
7. *Jalali H.A., Vardanyan I.A.*- Archivum Combustionis. 2010. V.30. N 4. p. 297-302.

BIOCHEMISTRY

УДК 577.151.125

G. K. Gevorgyan^{1,2}, academician M. A. Davtyan¹, A. A. Hambardzumyan²

Purification and properties of D-Amino-Acid Oxidase from

Candida guilliermondii HII-4

(Submitted 10/X 2011)

Keywords: *Candida guilliermondii* HII-4, D-amino-acid oxidase, chromatofocusing, PAAG-electrophoresis, activation energy, substrate specificity.

Introduction. D-amino-acid oxidase (D-amino acid: oxygen oxidoreductase (deaminating); EC 1.4.3.3) is a member of the class of flavin dehydrogenase/oxidases and catalyzes the oxidative deamination of D-amino acids, producing the corresponding α -keto acid and ammonia with concomitant reduction of molecular oxygen to hydrogen peroxide [1]. This enzyme has found considerable practical importance not only in basic research but also in biotechnology. D-amino-acid oxidases from porcine kidney and several fungi have been used for the separation of racemic amino acid mixtures, preparation of keto-acids, in the modification of cephalosporin C, estimation of D-amino acids, especially in biosensors for the detection of D-amino acids in various biological samples [2,3]. Despite the fact that the presence of D-amino-acid oxidases (DAAO) has been reported in many organisms [4], the only DAAO species available for commercial use in a homogenous form and in large quantities was the one from pig kidney [5]. In last two decades efforts of many scientists were directed towards obtaining an alternative source among microorganism species. The attempts to purify DAAO as a flavoprotein from microorganisms, particularly from yeast, have been hampered by the low concentration of the enzyme in the cells, its

instability and the impossibility of using the well-established purification procedure of DAAO from pig kidney [6]. It has been shown that DAAO is constitutively present at a very low level in yeast *Rhodotorula gracilis*, but its synthesis can be selectively induced by the presence of D-amino acids in the growth medium [7].

We here describe for the first time the purification scheme of *Candida guilliermondii* HII-4 DAAO, including the chromatofocusing step, without any initial induction, and represent some physicochemical and catalytic properties of the enzyme to be helpful in biotechnological applications.

Materials and methods. All reagents were of analytical grade and purchased from commercial sources. *C. guilliermondii* cells were from YSU microorganism culture collection. For production culture, an optimized synthetic growth medium containing 3.1 g (NH₄)₂SO₄, 1.23 g KH₂PO₄, 0.625 g MgSO₄*7H₂O, 0.125 g CaCl₂*2H₂O, 0.125 g NaCl, 0.1 g ZnSO₄, 8*10⁻⁵ g biotin, 10 g glucose and 10 g yeast extract in a total volume of 1 l, with the pH adjusted to 5.5 by HCl was used [8]. Cells were grown at 30°C under shaking conditions (200 rpm). After 20 h cultivation (late exponential phase) cells were harvested by centrifugation at 10,000g for 20 min at 4°C and stored at -20°C prior to use.

DAAO activity was assayed spectrophotometrically by measuring hydrogen peroxide production by monitoring an absorbance at 550 nm. The assay mixture (total volume of 1 ml) contained 30 mM D-proline, 5 mM phenol, 0.3 mM 4-aminoantipyrine in 50 mM Tris-HCl buffer (pH=8.3) with 2 U horseradish peroxidase. FAD could be omitted from assay mixtures without any effect on activity measurements. One unit of activity corresponds to the production of 1 µmol hydrogen peroxide per minute at 30°C with 30 mM D-proline as substrate. Protein concentration was determined using Lowry, Bradford or Groves-Davis protein assay according to the sample total protein content.

The purification procedure was carried out at 4°C. Cell paste was resuspended (300 g/l) in 20 mM Tris-HCl (pH=8.3) buffer containing 2 mM EDTA, 0.1 mM PMSF (buffer A) and homogenized by sonication with ultrasonic disrupter for 20 min (30 seconds processing and 30 seconds of rest) at 4°C. After sonication the homogenate was centrifuged and supernatant was applied to DEAE-toyopearl 650M anion exchange column (90x2.7) pre-equilibrated with the buffer A and eluted with a linear gradient from 0 to 0.15 M NaCl. Active fractions were combined, dialyzed against 100 volumes of the same buffer and saturated with ammonium sulfate at 0.5 M

saturation. The suspension was loaded on phenyl-sepharose CL-4B column (30x1.5) pre-equilibrated with 0.5 M ammonium sulfate saturated buffer A. The column was washed of its 3 volumes with salt saturated pre-equilibration solution at room temperature to remove unabsorbed proteins. The enzyme was eluted with a linear gradient containing from 0.5 to 0 M ammonium sulfate and from 0 to 2% Triton X-100 elution detergent in buffer A. Active fractions were combined and dialyzed against 100 volumes of buffer A pH adjusted to 8.6 and applied to PBE 94 chromatofocusing column (12x1.5) pre-equilibrated with Tris-acetic acid buffer pH 8.6. Elution was made with the diluted polybuffer at pH 6.5. Active fractions were combined, dialyzed against 100 volumes of buffer A pH adjusted to 8.3 and concentrated against polyethylene glycol 35,000 for 4 h. Concentrated protein probe was applied to a column (70x1.0) of toyopearl HW-50F equilibrated with 20 mM Tris-HCl (pH=8.3) buffer containing 2 mM EDTA and 0.1 mM PMSF for gel-filtration. The enzyme was eluted with the same buffer. The molecular mass of the native enzyme was determined by gel filtration on the same column calibrated with marker proteins mentioned above.

The homogeneity of DAAO was determined by PAAG (7.5%) electrophoresis at pH 8.9. SDS-PAAG (7.5%) electrophoresis was performed following a modification of the method of Laemmli with separating gels of pH 8.9; gels were stained with Coomassie Brilliant Blue R-250 for 12 h and destained by diffusion in a mixture of 7% acetic acid and 25% methanol in water.

The time-dependence of thermal inactivation of DAAO was determined by heating enzyme solutions in tubes over the temperature range 20-60°C in 20 mM Tris-HCl (pH 8.3) buffer containing 2 mM EDTA and 0.1 mM PMSF. The activation energy (E_a) for DAAO reaction was obtained from the slopes of the Arrhenius and the first-order inactivation plots.

The values of K_m and V_{max} together with their standard deviations were determined as a result of multidimensional linear regression of the reaction rate depending on the concentration of D-amino acids using the program "GAUSS 4.0".

Results and discussion. DAAO isolated by the present procedure (1480-fold purification factor) had a specific activity of 11.54 $\mu\text{mol/min}$ per mg protein using D-proline as substrate at 30°C. Table 1 summarizes the results of a typical purification procedure.

Table 1

Purification of D-amino-acid oxidase from *C. guilliermondii*

Purification step	Total activity (U)	Protein (mg)	Specific activity (U/mg)	Purification factor	Yield (%)
Crude extract	93.6	12 000	0.0078	1	100.0
DEAE-toyopearl 650M	76.2	924	0.0825	11	81.4
Phenyl-sepharose CL-4B	45.4	372	0.122	16	48.5
Chromatofocusing on PBE 94	28.7	6.33	4.53	581	30.6
Toyopearl HW-50F	8.7	0.75	11.54	1480	9.3

The activity was measured with D-proline as substrate. Starting material: 128 g of frozen cell paste.

After each step of purification PAAG electrophoresis was performed to determine homogeneity of DAAO samples (fig. 1a).

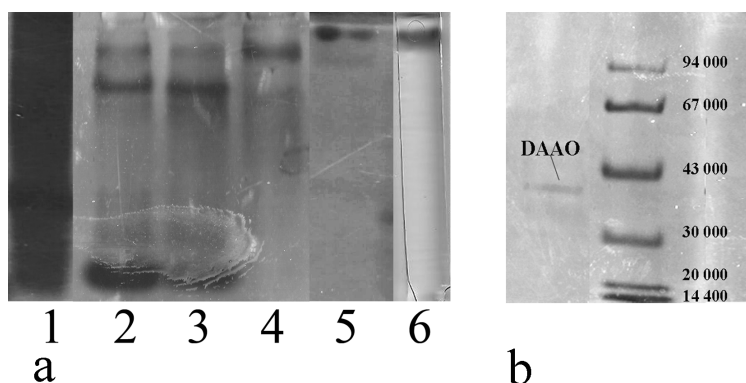


Fig. 1. a - Polyacrylamide gel electrophoresis of samples at different stages of purification. Gel was stained with Coomassie Blue R-250. (1) crude extract after sonication (supernatant); (2) after DEAE-toyopearl 650M; (3) after phenyl-sepharose chromatography; (4) after chromatofocusing; (5) after gel-filtration; (6) activity staining of enzyme after gel filtration with D-Ala as substrate, b - SDS-polyacrylamide gel electrophoresis of purified DAAO. Marker proteins and their molecular weights are shown at the right side in the figure.

On SDS-gel electrophoresis, the final preparation migrated as a main protein band, with a molecular mass of 38.4 ± 1.2 kDa (fig. 1b). The native molecular weight was estimated to be 78.6 kDa by gel-filtration on toyopearl HW-50F (data not shown), suggesting that the DAAO from the yeast *C. guilliermondii* exists as a homodimer. The molecular mass is similar to those of DAAO

from *Rhodotorula gracilis* [6], *Rhodospiridium toruloides* [9] and *Trigonopsis variabilis* [10], which have been reported to be homodimers of 79, 72 and 80 kDa, respectively.

The pH-activity profile of the enzyme (fig. 2a) shows that the optimum pH was at 8.0. The enzyme activity was assayed in 50 mM polybuffer, containing citric acid, Tris, Hepes and boric acid in the 2.8-9.35 pH range, and DAAO activity was more than 90% of the maximum in a rather narrow pH from 7.5 to 8.4. The pH-stability was also determined by incubating DAAO preparations at the temperature of enzyme half inactivation for 20 minutes with 50 mM buffers in the pH range from 5.0 to 10.0. As it could be expected from the pH-activity profile, DAAO from *C. guilliermondii* shows stability in the pH range from 7.4 to 9.0 (fig. 2b) with the loss of its activity no more than 10%.

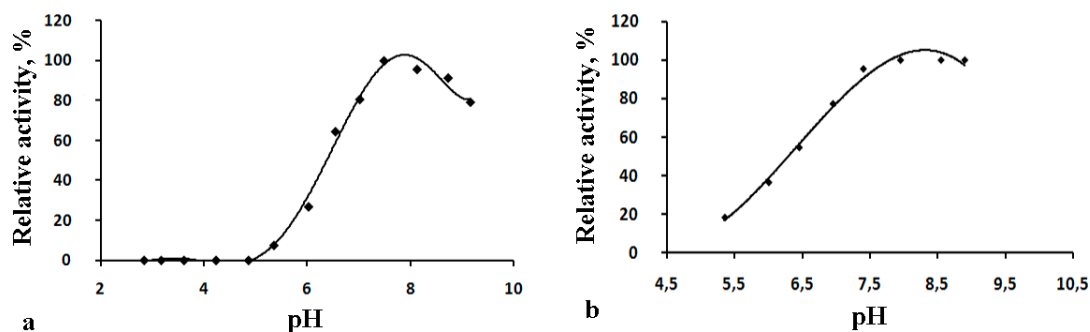


Fig. 2. pH-activity (a) and pH-stability (b) profiles of *C. guilliermondii* D-amino-acid oxidase

The optimum temperature was 33°C and the activity was above 90% of the maximum in the range from 24 to 38°C (fig. 3a). It is also noticeable, that this enzyme was highly unstable to heat inactivation, and a sharp decrease in activity is observed above 40°C. DAAO from *C. guilliermondii* losses 50% of its enzymatic activity starting from 45°C achieving to full inactivation at the range of temperature from 58 to 60°C (fig. 3b). The activation energy for DAAO reaction was calculated to be 60 kJ/mol at 30°C. It was slightly higher in comparison with *Rhodotorula gracilis* DAAO catalytic reaction activation energy, which has been reported to be 38.3 kJ/mol [11].

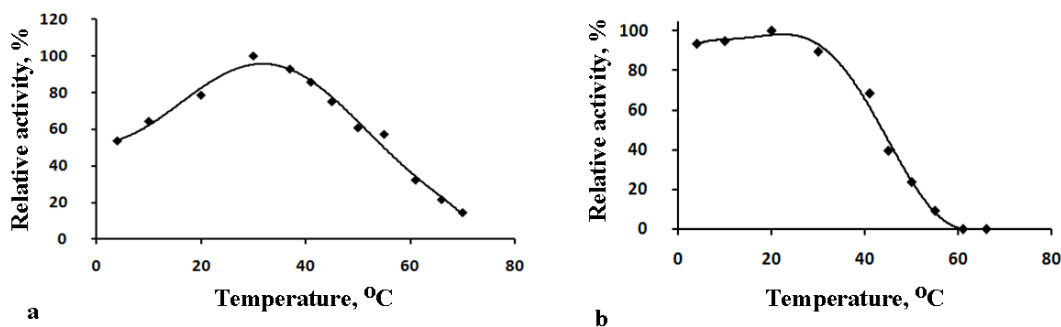


Fig. 3. An optimum temperature profile (a) and relative activity/temperature dependence (b) for *C. guilliermondii* DAAO

The strict D-isomer specificity of the enzyme is confirmed, since no reaction could be detected with L-amino acids [12]. Moreover, the presence of the L-isomer does not interfere with DAAO activity, so for some amino acids DL-mixtures were used for substrate specificity determination with the concentrations two times higher than that for pure D-amino acids. The K_m and V_{max} values were calculated to be 7.9 ± 0.9 with 22.3 ± 3.6 for D-Pro and 8.8 ± 1 with 16.9 ± 3.4 for D-Ala, respectively. Table 2 summarizes the substrate specificity data of purified DAAO. An enzyme was active toward several D-amino acids with D-proline being the best substrate for *C. guilliermondii* DAAO. This pattern is similar to that for mammalian DAAO to have the highest affinity to D-Pro and to oxidize achiral glycine [12]. Similarities are observed with the *Candida boidini* DAAO in manner to oxidize neutral and hydrophobic D-amino acids which have shorter carbonic chain [13]. Substrate specificity then differs markedly from other yeast source DAAO with it more widely specification. This could be a probable result of non-inducible DAAO obtaining procedure from *C. guilliermondii* cells. It was also noticeable that *C. guilliermondii* DAAO has a significant affinity to D-isoleucine and D-norvaline 22.6 and 2.4 times higher than that for D-Leu and D-Val, respectively (see table 2). This type of specificity, however, associated with the enzyme catalytic active site three-dimensional structure, which, in contrast to human DAAO, is not investigated clearly.

Table 2

Substrate specificity of DAAO from *C. guilliermondii*

Substrate	Concentration, mM	Relative activity, % *	Substrate	Concentration, mM	Relative activity, % *
D-Pro	30	100	DL-Met	60	7,6
D-Ala	30	74,5	DL-Tre	60	6,1
D-Val	30	29,1	DL-Asp	60	11,2
D-Leu	30	3,9	DL-Asn	30	7,7
D-Ser	30	13,2	DL-norvaline	60	71,6
D-Lys	30	3,4	Glycine	60	5,8
D-Trp	10	3,3	L-Pro	30	0,0
D-Tyr	15	0,8	L-Tre	30	0,0
DL-Ile	60	83,6	L-Ile	30	0,0

* Activity is given relative to that measured for D-Pro; values are means for three determinations; the enzyme did not show activity toward all L-amino acids

As it was stated above starting material for enzyme purification was 128 g cell paste. It is noticeable, that from this material after homogenization by sonication it was available to obtain pure supernatant with the total protein content of 12 g, which is nearly 10% of initial weight. This first step with high yield of protein extraction was also important and peculiar procedure demonstrated. Considering the fact that these results were obtained without any initial enzyme inducing procedures, and, in addition, the wide substrate specificity of *Candida guilliermondii* DAAO, we assume that this source D-amino-acid oxidase could be produced, purified in short order with chromatofocusing, immobilized and used for different biotechnological applications.

¹ Yerevan State University

² “Armbiotechnology” Scientific and Production Center SNCO, NAS RA

G. K. Gevorgyan, academician M. A. Davtyan, A. A. Hambardzumyan

Purification and Properties of D-Amino-Acid Oxidase from *Candida guilliermondii* HII-4

D-amino-acid oxidase was purified from the yeast *Candida guilliermondii* HII-4 using chromatofocusing method. The native enzyme exists as a homodimer with the molecular weight of 78.6 kDa. The optimum pH and temperature were 8.0 and 33°C. The strict D-stereospecificity of the enzyme is confirmed, K_M and V_{max} values were determined for D-proline and D-alanine, which, among 22 tested, were the best substrates of the enzyme.

Գ. Կ. Գևորգյան, ակադեմիկոս Մ. Ա. Դավթյան, Ա. Ա. Համբարձումյան

***Candida guilliermondii* HII-4 խմորասնկերի D-ամինաթթվային օքսիդազի մաքրումն ու հատկությունների ուսումնասիրումը**

D-ամինաթթվային օքսիդազն անջատվել և մաքրվել է *Candida guilliermondii* HII-4 խմորասնկերից քրոմատոֆոկուսացման մեթոդի կիրառմամբ: Նատիվ ֆերմենտն իրենից ներկայացնում է հոմոդիմեր՝ 78.6 կԴա մոլեկուլյար զանգվածով: Օպտիմալ pH և ջերմաստիճանը կազմել են, համապատասխանաբար, 8.0 և 33°C: Հաստատվել է բացարձակ ստերեոսպեցիֆիկություն D-իզոմերների նկատմամբ: Հաշվարկվել են K_M -ի ու V_{max} -ի արժեքները D-պրոլինի և D-ալանինի համար, որոնք փորձարկված 22 ամինաթթուների շարքում լավագույն սուբստրատներն էին տվյալ ֆերմենտի համար:

Очистка и свойства D-аминокислотной оксидазы из дрожжей *Candida guilliermondii* НП-4

Из дрожжей *Candida guilliermondii* НП-4 с использованием метода хроматофокусирования выделена и очищена D-аминокислотная оксидаза. Природный фермент представляет собой гомодимер с молекулярной массой 78.6 кДа. Оптимальные значения pH и температуры – 8.0 и 33°C. Подтверждена абсолютная стереоспецифичность фермента, а также вычислены значения K_M и V_{max} для D-пролина и D-аланина, которые оказались наиболее хорошими субстратами из 22 испытанных аминокислот.

References

1. Massey V., Hemmerich P. Biochem. Soc. Trans. 1980. N 8. P. 246-256.
2. Dominguez R., Serra B., Reviejo A.J., Pingarron J.M. Anal. Biochem. 2001. V. 298. P. 275-282.
3. Ihaba Y., Mizukami K., Hamada-Sato N., Kobayashi T. et al. - Biosens. Bioelectron. 2003. V. 19. P. 423.
4. Davtyan M.A., Papoyan A.R., Oganesyan S.P.- Appl. Biochem. and Microbiol. 2001. V. 37. N3. P. 257-259.
5. Bright H.J., Porter, D.J.T. - The Enzymes. 1975. V. 12, part B. P. 445-456.
6. Simonetta M.P., Vanoni M.A., Casalin P.- Biochim. Biophys. 1987. Acta 914, P. 136-142.
7. Simonetta M.P., Vanoni M.A., Curti, B. - FEMS Microbiol. Lett. 1982. V. 15. P. 27-32.
8. Gevorgyan G. K. - Biolog. Journal of Armenia. 2011. V. 63. N 4. P. 115-121.
9. Lee Y., Chu, W. - Process Biochemistry 1998. V. 33. Issue 4. P. 461-467.
10. Sz wajcer E., Mosbach K. - Biotechnology Letters. 1985. V. 7, N 1. P. 1-7.
11. Massey V., Curti B., Ganther H. - Journal of Biol. Chem. 1966. V. 241. N 10. P. 2347-2357
12. Pollegioni L., Ghisla S., Pilone M.S. - Biochem. J. 1992. V. 286 P. 389-394
13. Yurimoto H., Hasegawa T., Sakai Y., Kato N. - Biosci. Biotechnol. Biochem. 1992. V. 65. N 3. P. 627-633

БИОХИМИЯ

УДК 636:612. 015.3

А. Г. Григорян

Изменение показателей естественной резистентности у крыс и бычков при длительной гипокинезии

(Представлено академиком К.Г.Карагезяном 20/І 2012)

Ключевые слова: *гипокинезия, естественная резистентность, лизоцим, гликопротеиды*

Гипокинезия – длительное ограничение двигательной активности приобретает в настоящее время все большую актуальность. Проблема актуальна и в сельском хозяйстве, особенно в животноводстве и звероводстве, в связи с экономической целесообразностью содержания большого количества животных на максимально малых площадях, как например стойлового содержания сельскохозяйственных животных.

Концентрация большого количества сельскохозяйственных животных на ограниченных площадях и дополнительные погрешности при стойловом содержании приводят к нарушению важнейших функций организма, что ведет к падению продуктивности, нарушению воспроизводительных функций, снижению естественной резистентности, сокращению сроков эксплуатации. Поэтому исследование пределов, до которых можно уменьшить параметры места обитания животных без нарушения роста, развития и процессов размножения, весьма актуально [1 -6].

По мнению ряда авторов [1], гиподинамию – своеобразное воздействие, приводящее к перестройке всех важных функциональных систем организма, нельзя рассматривать как простое снижение функциональных возможностей и тренированности к обычным нагрузкам; в зависимости от степени ограничения подвижности и индивидуальных особенностей

организма гипокинезия может провоцировать развитие некоторых патологических состояний или вызывать сдвиги, граничащие с патологией. Неизбежным следствием длительной гипокинезии является снижение уровня резистентности к действию неблагоприятных факторов внешней среды и нарушение естественного иммунитета [1,2].

В настоящей статье исследованы некоторые показатели естественной неспецифической резистентности у крыс и бычков в условиях длительного ограничения двигательной активности. Рассмотрены активность лизоцима в сыворотке крови крыс и бычков и содержание гликопротеидов в сыворотке крови бычков.

Лизоцим (мурамидаза) – фермент класса гидролаз, широко распространенный в природе и обладающий бактерицидными свойствами, содержится в тканях и жидкостях большинства живых организмов, растениях, а также в некоторых бактериях и фагах..

К гликопротеидам (мукопротеиды), являющимся сложными белками, относятся многие белки плазмы крови (иммуноглобулины, трансферины), некоторые ферменты и некоторые гормоны, которые участвуют в приспособительных реакциях организма в ответ на стресс-факторы и др.

Опыты были проведены на 70 белых беспородных крысах-самцах в количестве с исходной массой 120-160 г. Животные подопытных и контрольных групп подбирались по принципу аналогов. Подопытные крысы помещались в специально сконструированные нами клетки (140×60×60 мм), ограничивающие их двигательную активность. Кормили и поили их из специальных кормушек и поилок, разработанных в научно-исследовательской лаборатории экспериментально-биологических моделей РАМН. Контрольные животные (n=30) находились в обычных условиях вивария. Длительность гипокинезии в этой серии составила 45 дней. Кровь для исследований брали в динамике как до гипокинезии, так и на 5-, 15-, 25-, 35-, 45-е сутки гипокнезии,

Дальнейшие исследования были проведены на бычках 4-месячного возраста с исходной массой 70-80 кг в количестве 6 голов. Двигательную активность экспериментальных животных в количестве 3 голов ограничивали в индивидуальных клетках (50×130 см). Животные контрольной группы в количестве 3 голов содержались в боксах, размером 2×4 м на одну голову. Контрольные бычки в течение эксперимента имели ежедневный двухчасовой выгул. Длительность гипокинезии в этой серии наблюдений составила 120 суток. Кровь для иссле-

дований брали в динамике как до ограничения двигательной активности, так и на 5-, 10-, 15-, 30-, 45-, 60-, 75-, 90-, 105-, 120-е сутки гипокинезии.

Активность лизоцима определяли методом В.М.Мутовина в модификации Митюшникова, в основу которого положена диффузия лизоцима в агар и задержка им роста культуры *Micrococcus Lisodeicticus*.

У подопытных крыс активность лизоцима в течение 45-суточной гипокинезии имела тенденцию к понижению. Уже на 25-е сутки ограничения двигательной активности титр лизоцима у них уступал таковому у контрольных животных на 8 %, а на 35-е сутки – на 25%.

Активность лизоцима в сыворотке крови подопытных животных оставалась пониженной до конца эксперимента в среднем на 32% по сравнению с данными, полученными у контрольных животных (табл. 1).

Таблица 1

Оценка показателей титрации лизоцима крови (мм) по диаметру зоны задержки роста тесткультуры у белых крыс при 45-суточной гипокинезии ($M \pm m$, $n_o=8$, $n_k=6$)

Группа животных	Сроки исследования, сутки					
	Фон	5	15	25	35	45
Опыт	21.12±0.60	20.9±0.60	20.5±0.60	19.6±0.90	16.25±0.50*	14.5±0.90*
Контроль	21.50±0.80	21.5±0.80	21.7±0.80	21.3±0.60	21.70±1.10	21.3±1.30

* $P \leq 0.05$

О состоянии естественной резистентности у бычков судили не только по активности лизоцима, но и по содержанию в сыворотке крови гликопротеидов. В первые 15 суток эксперимента изменений лизоцимной активности и содержания гликопротеидов нами не обнаружено. Начиная с 30-х суток ограничения двигательной активности у подопытных бычков отмечается незначительное (на 2.4%) снижение лизоцимной активности. В эти же сроки наблюдается достоверное снижение содержания гликопротеидов (на 22%) в сыворотке крови. Эти показатели и в последующем имели тенденцию к снижению.

На 45-е сутки исследования лизоцимная активность у подопытных животных была ниже, чем у контрольных, на 5.6%, в то время как содержание гликопротеидов было наиболее низким (ниже, чем у контрольных животных, на 24 %).

На 60- и 70-е сутки исследований как активность лизоцима, так и содержание гликопротеидов, по сравнению с контролем, снижается соответственно на 21 и 18 %.

Достоверное уменьшение лизоцимной активности по отношению к величинам, полученным у контрольных животных, наблюдалось только в конце эксперимента, на 90-, 105-, 120-е сутки, и соответственно составило 15, 30, 41 %. В указанный период содержание гликопротеидов в сыворотке крови подопытных животных также было ниже, чем у контрольных животных, соответственно на 1, 5 и 6 % (табл. 2).

Таблица 2

Исследование содержания гликопротеидов (г/л) и лизоцима (мм) у бычков 4-месячного возраста при 120-суточной гипокинезии

Сроки исследования, сутки	Показатели			
	Гликопротеиды		Лизоцим	
	опыт	контроль	опыт	контроль
Фон	1.03±0.02	1.06±0.04	22.33 ± 0,97 *	22.0±1,40
5	1.03±0.01	1.04±0.04	22.20± 0.97	22.33±2,05
10	1.03±0.02	1.04±0.03	22.20±0.97	22.33±1.40
15	1.02±0.01	1.04±0.02	22.70±0.80	22.0±2.05
30	0.81±0.03*	1.04±0.02	21.80±0.97	22.33±2.05
45	0.79±0.02*	1.04±0,02	21.70±0.97	23.0±0.70
60	0.81±0.03*	1.02±0.02	21.20±1.13	22.33±2.40
75	0.81±0.03	1.03±0.07	20.20±1.13	22.33±2.70
90	1.01±0.02	1.00±0.07	19.20±1.13	22.70±2.40
105	1.01±0.03	1.06±0.04	15.33±1.13*	22.0±0.70
120	0.98±0.02*	1.04±0.02	13.30±0.80*	22.70±0.70

* $P \leq 0.05$

Таким образом, снижение лизоцимной активности и содержания гликопротеидов в сыворотке крови подопытных животных в условиях гипокинезии является одним из звеньев в общей цепи изменений в организме, происходящих в процессе обмена веществ, результатом которого, возможно, является снижение барьерных функций организма.

Государственный аграрный университет Армении

А. Г. Григорян

Изменение показателей естественной резистентности у крыс и бычков при длительной гипокинезии

Исследованы показатели неспецифической резистентности – активность лизоцима в сыворотке крови крыс и бычков и содержание гликопротеидов в сыворотке крови бычков в условиях гипокинезии. Установлено достоверное снижение содержания гликопротеидов и активности лизоцима – одних из звеньев в общей цепи изменений в организме, происходящих в процессе обмена веществ, возможным следствием чего является снижение барьерных функций организма..

Ա. Գ. Գրիգորյան

Բնական դիմադրողականության որոշ ցուցանիշների փոփոխությունները կենդանիների մոտ հիպոկինեզիայի պայմաններում

Հետազոտվել են ոչ հատուկ դիմադրողականության այնպիսի ցուցանիշներ ինչպիսին են գլիկոպրոտեիդների պարունակությունը և լիզոցիմ ֆերմենտի ակտիվությունը հիպոկինեզիայի ենթարկված ցուլիկների և սպիտակ առնետների արյան սիժուկում: Հետազոտությունների ընթացքում գրանցվել է նշված ցուցանիշների փաստացի անկում, ինչը, հավանաբար, հանդիսանում է մի առանձին օղակ ընդհանուր նյութափոխանակության խանգարումների շղթայում, ինչը իվերջո հանգեցնում է օրգանիզմի պատնեշային համակարգի ֆունկցիայի թուլացմանը:

A. G. Grigoryan

Changes of Some Parameters of Natural Resistance in the Blood Serum of Rats and Calves during Prolonged Hypokinesia

We have investigated such parameters of nonspecific resistance as lysozyme activity in serum of rats and calves. The content of glycoproteids in the blood serum of calves in hypokinesia.

During the study we found a significant decrease in blood content of glycoproteins and lysozyme activity, which apparently is one of the links in the whole chain of changes in the body that occur in metabolism and as a possible consequence, decrease the barrier function of the body.

Литература

1. *Какурин Л.И., Катковский Б.С.* Некоторые физиологические аспекты длительной невесомости. Физиология человека и животных. Сборник статей. М. Наука. 1982.
2. *Коваленко Е.А.* - Космическая биология и авиакосмическая медицина. 1986. Т.10. № 1. С. 3-15.
3. *Коваленко Е.А., Гуровский Н.Н.* Гипокинезия. М. Медицина. 1980. 320 с.
4. *Макаров Г.Ф. и др.* - Космическая биология и авиакосмическая медицина. 1980. Т. 13. С. 64-67.
5. *Смирнов К.В.* Пищеварение и гипокинезия. М. Медицина. 1990. 225 с.
6. *Миллер Ф., Вандом А., МакБревер Дж.* В кн.: Состояние гипокинезии.. Лондон. 2010. (пер. с англ.)

ԿԵՆԴՐԱՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՈւՏԴ 576.895.42:599.323. 4

Ս.Ա. Աղայան^{1,2}, Գ.Հ. Բոյախյան¹

Թռչունների արյան սպորավոր մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը Կովկասում

(Ներկայացված է ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. Մանվելյանի կողմից 14/II 2012)

Առանցքային բառեր. *թռչունների արյան մակաբույծներ, Plasmodium spp., Haemoproteus spp., Leucocytozoon spp., տարածվածություն, ՊՇՌ-հետազոտություններ, հապլոտիպեր:*

Ներածություն: Կովկասը կենսաբազմազանությամբ աշխարհի առավել հարուստ տարածաշրջաններից մեկն է [1,2]: Թռչունների, ինչպես նաև նրանց մակաբույծների հետազոտություններին վերջին տարիներին առանձնահատուկ ուշադրություն է դարձվում: Թռչուններն ախտահարվում են վիրուսային, բակտերիալ, մակաբուծային և սնկային պաթոգեններով և կարող են նրանց պահեստարաններ հանդիսանալ [3,4]: Ինֆեկցիոն և մակաբուծային հիվանդությունները, հատկապես նրանք, որոնք հայտնաբերվում են վայրի բնության մեջ, հաճախացել են վերջին մի քանի տասնամյակներում [2]: Այս հիվանդությունները կարևոր գործոն են բնական էկոհամակարգերի գործունեության մեջ [5,6]: Ինչպես հայտնի է, արյան սպորավոր մակաբույծները կարող են կենսաբազմազանության ոչնչացման պատճառ հանդիսանալ, ինչը հատկապես վտանգավոր է էնդեմիկ ֆաունայի համար [1,2]:

Մեր ուսումնասիրության առարկա հանդիսացող թռչունների արյան սպորավորներին պատկանող *Plasmodium*, *Haemoproteus* և *Leucocytozoon* ցեղերի մակաբույծները փոխանցվում են բազմազան և բավականին լայն տարածում ունեցող երկթևանի միջատների միջոցով՝ մոծակների, գիշերային մլակների, մծիկների [7]: Այս միջատները կոսմոպոլիտ են և հայտնաբերվել են բոլոր մայրցամաքներում՝ բացառությամբ Անտարկտիդայի:

Գրավոր աղբյուրներում բավարար տեղեկություն չկա թռչունների արյան մակաբույծների ուսումնասիրությունների վերաբերյալ: Մեր հետազոտությունների նպատակն է բացահայտել թռչունների արյան մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը կենսաբազմազանությամբ հարուստ Կովկասյան տարածաշրջանում:

Նյութեր և մեթոդներ: 2010 թ. մայիսից օգոստոս ընկած ժամանակահատվածում հավաքվել է թռչունների 34 տեսակի շուրջ 396 արյան նմուշ՝ Հայաստանի Հանրապետության (ՀՀ) և Լեռնային Ղարաբաղի Հանրապետության (ԼՂՀ) (206 նմուշ), ինչպես նաև ՌԴ Կրասնոդարի երկրամասի (190 նմուշ) մի շարք անտառային վայրերից (նկ. 1):



Նկար 1. Նմուշի հավաքման վայրերը Հայաստանում (Armenia), ԼՂՀ-ում և ՌԴ-ում (Russia):

Թռչունների որսն իրականացվել է համապատասխան ցանցերի միջոցով: Որոշվել է յուրաքանչյուր թռչնի տեսակը, ապա երակից վերցվել է արյան նմուշը: Արյունը պահվել է սենյակային ջերմաստիճանում էթանոլի 96%-ոց լուծույթում: Բոլոր թռչուններն օղակավորվել են՝ բացառելու համար միևնույն առանձնյակի կրկնակի որսը, և բաց են թողնվել:

Արյան նմուշից անջատվել է ամբողջական ԴՆԹ-ն (և՛ թռչնի, և՛ մակաբույծի առկայության դեպքում): Թռչնի մոտ *Haemoproteus spp.*, *Plasmodium spp.* և *Leucocytozoon spp.* առկայությունը պարզելու համար կիրառվել է ՊՇՌ (պոլիմերազային շղթայական ռեակցիաներ) մեթոդը: Մակաբույծի նույնականացման համար կիրառվել են պրայմերներ, որոնք ծածկում են նրա միտոքոնդրիալ ցիտոքրոմ Բ գենը, որն ամենալայն կիրառություն ունեցող մարկերն է վերոհիշյալ մակաբույծների հայտնաբերման համար [8,9]:

ՊՇՌ-ն իրականացվել է օգտագործելով հետևյալ պրայմերները՝ HAEMNF – CATATATTAAGAGAATTATGGAG, HAEMNR2 – AGAGGTGTAGCATATCTATCTAC [9]: Ռեակցիայի պայմաններն են՝ 30 վրկ – 95° C, 30 վրկ – 52° C, և 45 վրկ 72° C 40 ցիկլով: Ցիկլիկ ռեակցիաներից առաջ նմուշներն ինկուբացվել են 95° C՝ 15 րոպե տևողությամբ և ռեակցիայից հետո 60° C 10 րոպե տևողությամբ: 12,5 μl ռեակցիայի լուծույթը պարունակել է 2 μl անջատված ԴՆԹ-ից, 0,24 uM յուրաքանչյուր պրայմերից, 1x of GoTaq® Flexi Buffers, 0,287 mM՝ dNTP, 2 mM՝ MgCl₂, 5,978 μl՝ H₂O և 1,2 u՝ Taq ԴՆԹ պոլիմերազա (Promega Corporation) վերջնական կոնցենտրացիաներով:

ԴՆԹ-ի առկայությունը պարզելու համար վերջնանյութը ենթարկվել է էլեկտրոֆորեզի 2,0% ագարոզային գելի վրա, արդյունքը դիտվել է ՈՒՄ ճառագայթների տակ: Դրական արդյունք ցույց տված նմուշները մաքրվել են՝ օգտագործելով ExoSAP-IT PCR Clean-up Kit (USB Corporation), և ուղարկվել են Macrogen (Macrogen corporation-Netherlands) նուկլեոտիդային հաջորդականության որոշման համար: Հաջորդականությունները մշակվել են BioEdit ծրագրով [10], և հապլոտիպերը որոշվել են DNAsp 5 ծրագրով [11]: Պարզելու համար հապլոտիպերի պատկանելությունն այս կամ այն

մակարայի տեսակին, դրանք համեմատվել են գեների միջազգային բանկում և MalAvi բազայում [9] առկա հաջորդականությունների հետ:

Արդյունքներ: Ուսումնասիրված 396 նմուշներից, որոնք ներկայացնում են թռչունների 34 տեսակ, վարակվածների թիվը կազմել է 249 նմուշ՝ 29 թռչնատեսակ:

Աղյուսակ 1

ՊՇՌ հետազոտության արդյունքները Հայաստանում և ՌԴ Կրասնոդարի մարզում

Թռչնի տեսակը	Նմուշների քանակը	Հայաստան		ՌԴ Կրասնոդարի մարզ	
		Թռչ. առանձ. քանակը	Վարակված. էքստենսիվությունը	Թռչ. առանձ. քանակը	Վարակված. էքստենսիվությունը
<i>Erithacus rubecula</i>	40	3	33,0% (1)	37	59,5% (22)
<i>Parus caeruleus</i>	23	8	25,0% (2)	15	80,0% (12)
<i>Parus major</i>	65	34	79,4% (27)	31	74,2% (23)
<i>Phylloscopus lorenzii</i>	38	37	29,7% (11)	1	100,0% (1)
<i>Phylloscopus nitidus</i>	24	19	47,3% (9)	5	60,0% (3)
<i>Sylvia atricapilla</i>	24	10	50,0% (5)	14	64,3% (9)
<i>Turdus merula</i>	38	19	78,9% (15)	19	84,2% (16)
Մնացած տեսակները	144	76	64,5% (49)	68	69,1% (47)
Ընդհանուր	396	206	57,7% (119)	190	70,0% (133)
Նմուշներ (ընդհանուր)			Վարակվածներ (ընդհանուր)		
396			62,8% (249)		

Համեմատվել են Հայաստանի և ՌԴ Կրասնոդարի երկրամասի թռչունների վարակվածության աստիճանները որոշ տեսակների համար, ինչպես նաև ընդհանուր վարակվածության աստիճանները (աղ. 1):

Ուսումնասիրվել են նուկլեոտիդային 147 հաջորդականություններ, որոնք ներկայացնում են 40 առանձին հապլոտիպեր. դրանցից 26-ը ներկայացնում են *Haemoproteus spp.*, 11-ը՝ *Plasmodium spp.* և միայն 3-ը՝ *Leucocitozoon spp.* (աղ. 2): Հայտնաբերվել են նաև որոշ նոր հապլոտիպեր, որոնք մինչ օրս գրանցված չեն եղել գեների միջազգային բանկում:

Աղյուսակ 2

Թռչունների մակաբույծների նուկլեոտիդային հաջորդականությունները և հապլոտիպերի քանակը

Նուկլեոտիդային հաջորդականություն – 147 (40 հապլոտիպ)								
Haemoproteus spp. - 26			Plasmodium spp. - 11			Leucocytozoon spp. - 3		
Նոր	Գեն բանկ		Նոր	Գեն բանկ		Նոր	Գեն բանկ	
8 հապլ.	Կոսմ.	Եվր.	5 հապլ.	Կոսմ.	Եվր.	1 հապլ.	Կոսմ.	Եվր.
	2 հապլ.	16 հապլ.		5 հապլ.	1 հապլ.		0 հապլ.	2 հապլ.

Քննարկում և եզրակացություն: Վերջին տասնամյակների ընթացքում, երբ մակաբույծների ուսումնասիրության ոլորտ ներմուծվեցին պոլիմերազային շղթայական ռեակցիաների վրա հիմնված մեթոդները [12,13], թռչնի մալարիան, որը հետաքրքրություն էր ներկայացնում հատկապես էկոլոգիական և էվոլյուցիոն առումներով, մեծ թափով սկսեց ուսումնասիրվել [9]: Չնայած նրան, որ ժամանակակից մեթոդները հեշտացրել են մակաբույծների ուսումնասիրությունները, դրանք ևս զուրկ չեն թերություններից և կարիք ունեն հետագա զարգացման և կատարելագործման:

Հայտնի է, որ ՊՇՌ մեթոդով աշխատելիս չի կարելի լիարժեք համոզված լինել, որ բացասական արդյունք ցույց տված նմուշներում մակաբույծներ չկան [14], այնուամենայնիվ մեր վերլուծությունները հիմնվում են ստացված և առկա արդյունքների վրա:

Թռչունների վարակվածության էքստենսիվությունը կազմում է 62,8%, ինչը այլ աշխարհագրական տարածքների համեմատ բավականին բարձր ցուցանիշ է [15,16]: Ուսումնասիրված թռչունների համարյա բոլոր տեսակների մոտ վարակվածության մակարդակը Կրասնոդարի երկրամասում ավելի բարձր է, քան Հայաստանում, ինչը հավանաբար պայմանավորված է բնակլիմայական պայմաններով:

147 նուկլեոտիդային հաջորդականությունների հետազոտության արդյունքում հայտնաբերվել են թռչունների մալարիա հարուցող մակաբույծների 3 ցեղեր, որոնցից առավել հաճախ հանդիպում է *Haemoproteus spp.*¹ 105 նուկլեոտիդային հաջորդականություն (71,4%), նրան հաջորդում են *Plasmodium spp.*² 31 նուկլեոտիդային հաջորդականություն (21,1%) և *Leucocytozoon spp.*² 11 նուկլեոտիդային հաջորդականություն (7,5%): Մեր հետազոտությունների արդյունքում բացահայտվել են նաև 14 նոր հապլոտիպեր, որոնք մինչ այժմ ոչ մի տեղ գրանցված չեն եղել, ինչը վկայում է տարածաշրջանում թռչունների արյան սպորավորների էնդեմիկության բավականին բարձր մակարդակի մասին: Հայտնաբերվել են նաև 7 կոսմոպոլիտ հապլոտիպեր, որոնք գրանցված են եղել նաև այլ աշխարհամասերում: Հաշվի առնելով այն, որ մակաբույծներն ունեն չափազանց ցածր սպեցիֆիկություն թռչունների տեսակների նկատմամբ [14], կարելի է խոսել առկա վտանգի մասին, այսինքն՝ մակաբույծները համաճարակի պոտենցիալ աղբյուր են, ինչը հատկապես վտանգավոր է էնդեմիկ ֆաունայի համար:

Հետազոտությունը կատարվել է Գալուստ Գյուլբենկյան հիմնադրամի ֆինանսական աջակցությամբ:

¹ՀՀ ԳԱԱ Կենդանաբանության և հիդրոէկոլոգիայի գիտական կենտրոն, կենդանաբանության ինստիտուտ

²Երևանի պետական համալսարան

Ս.Ա. Աղայան, Գ.Հ. Բոյախչյան

Թռչունների արյան սպորավոր մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը Կովկասում

Մակաբույծների բազմազանությունը և տարածվածությունը որոշելու նպատակով գենետիկական ուսումնասիրության են ենթարկվել Հայաստանի, Լեռնային Ղարաբաղի Հանրապետության և ՌԴ Կրասնոդարի երկրամասի 12 տարբեր վայրերից հավաքված թռչունների արյան նմուշներ: Ուսումնասիրվել են նաև նուկլեոտիդային 147 հաջորդականություններ, որոնք ներկայացնում են տարբեր հապլոտիպեր: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս Կովկասի տարածաշրջանում թռչունների՝ մակաբույծներով վարակվածության և մակաբույծների էնդեմիկության բավականին բարձր մակարդակ:

С.А. Агаян, Г.А. Бояхчян

Разнообразие и распространение споровых кровепаразитов птиц Кавказа

С целью определения разнообразия паразитов и их распространения генетически изучены образцы крови птиц из 12 различных местностей Армении, Нагорно-Карабахской Республики и Краснодарского края Российской Федерации. Исследованы также 147 нуклеотидных последовательностей, представляющих различные гаплотипы. Полученные данные свидетельствуют о широкой распространенности и высокой степени эндемизма определенных кровепаразитов птиц Кавказа.

S.A. Aghayan, G.A. Boyakhchyan

Diversity and Prevalence of Avian Haemosporidian Parasites in Caucasus

Blood samples of birds from 12 different districts of Armenia, Republic of Nagorny Karabakh and Krasnodar Region of Russia were examined genetically to determine the diversity and prevalence of parasites. 147 nucleotide sequences representing various haplotypes were also investigated. The obtained data show wide prevalence and high degree of endemism of avian hemosporidian parasites in Caucasus.

Գրականություն

1. Warner R. E. - The Condor. 1968. V. 70. №. 2. P. 101-120.
2. Jones K. E., Patel N. G. et al. - Nature. 2008. V. 451. №. 7181. P. 990-993.

3. *Davis J. W., Anderson R.C. et al.* Parasitic Diseases of Wild Mammals. Iowa State University Press. Ames. IA. 1971.
4. *Hubálek Z.* - Journal of Wildlife Diseases. 2004. V. 40. №. 4. P. 639-659.
5. *Daszak P., Cunningham A. A. et al.* - Science. 2000. V. 287. №. 5452. P. 443-449.
6. *Harvell C. D., Mitchell C. E. et al.* - Science. 2002. V. 296. P. 2158-2162.
7. *Njabo K., Cornel A. et al.* - Malaria jornal. 2009. V. 8. P. 193-204.
8. *Valkiūnas G., Bensch S. et al.* - Journal of Parasitology. 2006. V. 92. №. 2. P. 418-422.
9. *Bensch S., Hellgren O. et al.* - Molecular Ecology Resources. 2009. V. 9. P. 1353-1358.
10. *Hall T.A.* - Nucleic Acids Symposium Series. 1999. V. 41. P. 95-98.
11. *Librado P. and Rozas J.* - Bioinformatics. 2009. V. 25. P. 1451-1452.
12. *Feldman R. A., Freed L. A. et al.* - Molecular Ecology. 1995. V. 4. №. 6. P. 663-674.
13. *Bensch S., Stjernman M. et al.* - The Royal Society. 2000. V. 267. P. 1583-1589.
14. *Szymanski M. M., Lovette I. J.* - Journal of Parasitology. 2005. V. 91. №. 4. P. 768-774.
15. *Ishtiaq F., Gering E. et al.* - Journal of Wildlife Diseases. 2007. V. 43. №. 3. P. 382-398.
16. *Martinsen E. S., Blumberg B. J. et al.* - Journal of Wildlife Diseases. 2008. V. 44. №. 2. P. 260-268.