

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XLI, № 5
1965

Խմբագրական կոլեգիա

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնաձու, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
շուտ ԳԱ բրբակից-անդամ, Վ. Մ. ԽԱՌԱ-
ՅԱՆ, շուտ ԳԱ բրբակից-անդամ, Վ. Հ.
ՀԱՍԻԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, շուտ ԳԱ բրբակից-անդամ
(պատ. խմբագրի տեղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻԲ-
ՅԱՆ, շուտ ԳԱ բրբակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐ-
ՉՈՅԱՆ, շուտ ԳԱ բրբակից-անդամ, Ս. Ս.
ՄԿՐՏՉՅԱՆ, շուտ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ.
ՆԱԶԱՐՈՎ, շուտ ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ.
ՋՐԱՆՇՅԱՆ, շուտ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ.
խմբագրի), Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, շուտ ԳԱ
բրբակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв редактор), В. О.
КАЗАРЯН, чл.-корресп. АН АрмССР
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն

Մարեմաթիկա

Հ. Ս. Մարտիկոսյան — Ինքնուժամայում օպերատորների ոչ-ինքնաճամայում գրչոս թերի սպեկտրի նկատագրություն մի եզանակի մասին 257

Յ. Կ. Հարո.բյունյան — L_p [0,1] առաջածությունը բազիսների վարքերի գուգամիտություն մասին 264

Վու Ն.գոան և Ի. Վ. Սատրովսկի — Մերոտորֆ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալի մասին 272

Մեխանիկա

Գ. Ե. Բաղդասարյան և Վ. Վ. Գևորգի — Անիզոտրոպ փակ զլանային թաղանթի գինամիկ կայունությունը 278

Մուլի օեոսքյուն

Կ. Ս. Կարապետյան — Անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բետոնի սողի վրա՝ կախված բեռնազորման մոմենտում բետոնի չափակից 282

Սասղագիտություն

Դ. Ա. Գուրգաղյան — Հայկական ՈՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ — Կարճալիբրոնկման մի գեղբի մեկնարանությունը 287

Ստրգանական էիմիա

Ս. Ն. Ավագյան և Ռ. Ա. Կարապետյան — Մանգանի և պղնձի սուլֆատների կոմպլեքսային միացությունները 2-բյուրրուտեն-2-ի նկատմամբ 294

Եիմիմիա

Ա. Կ. Իսկանդարյան — Արկաթ պարունակող կանաչ նեմային պիգմենտների իզոմաթիկացիան 297

Բույսերի բիմիմիա

Ս. Աս. Զոլուսեիցկայա, Ի. Հ. Հակոբյան և Վ. Դ. Ռայսյան — Է.գիտամին խորգենուց 301

Կ.ե.ոբիմիա

Վ. Հ. Պարոնիկյան — Օգտակար նանածոյի նանքումարմում էլեմենտների պարունակությունների բաշխման ֆունկցիայի նարցի շուրջը 308

Բովանդակություն XLI նատորի 315

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- Р. М. Мартиросян* — Об одном методе исследования спектра возмущения самосопряженных дифференциальных операторов 257
- Ф. Г. Арутюнян* — О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства $L_p [0,1]$ 264
- Ву Нгоан* и *И. В. Островский* — О логарифмической производной мероморфной функции 272

Механика

- Г. Е. Багдасарян* и *В. Ц. Гнуни* — Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки 278

Теория ползучести

- К. С. Карпетян* — Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от возраста бетона к моменту загрузки 282

Астрономия

- Г. А. Гурзадян*, чл.-корр. АН Армянской ССР — Интерпретация одной ультрафиолетовой вспышки 287

Неорганическая химия

- С. Н. Авакян* и *Р. А. Карпетян* — Комплексные соединения сульфатов марганца и меди с 2-хлорбутеном-2 294

Биохимия

- А. К. Искандарян* — Идентификация зеленых железосодержащих гемовых пигментов 297

Биохимия растений

- С. Я. Золотницкая*, *Г. О. Акопян* и *В. Д. Райсян* — Витамины Е на герани 301

Геохимия

- В. О. Пароникян* — О функции распределения содержания рудообразующих элементов в теле полезного ископаемого 308
- Содержание XLI тома 315

Р. М. Мартиросян

Об одном методе исследования спектра возмущений
 самосопряженных дифференциальных операторов

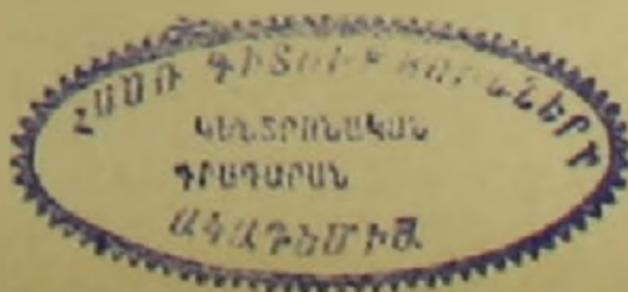
(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 27 V 1965)

Заметка посвящена исследованию спектра несамосопряженного возмущения $T = A + S^2$ самосопряженного дифференциального оператора A , где S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $q(x)$. В случаях, когда A есть дифференциальный оператор нечетного порядка $A = (-1)^n i \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$ в $L_2(-\infty, \infty)$ или полигармонический оператор $A = (-\Delta)^k$ в $L_2(E_n)$ (где E_n — n -мерное евклидово пространство, $n > 3$ нечетно и $2k > n$), основной результат нашего исследования состоит в том, что если $q(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то множество собственных значений возмущенного оператора T (с учетом и тех, которые лежат на спектре невозмущенного оператора A) может быть лишь конечным. Это утверждение получено путем применения некоторых предложений, верных в произвольных гильбертовых пространствах и составляющих содержание теоремы A и лемм 1—5, и хорошо иллюстрирует возможности предлагаемого в заметке общего метода, основанного на этих предложениях.

Перейдем к изложению упомянутых выше лемм. Условимся всюду ниже понимать под A самосопряженный оператор, определенный на плотном многообразии D_A гильбертового пространства H , а под T — замкнутый оператор, определенный формулой $T = A + S^2$ ($D_T = D_A$), где S — ограниченный (несамосопряженный) оператор. Через R_A будет обозначаться резольвента оператора A . Первые две из приводимых ниже лемм доказаны, по существу, в работе автора [1], хотя и явно не сформулированы, и поэтому мы доказательства опускаем.

Лемма 1. Если λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A и для некоторой последовательности $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ операторы $SR_n S$ существуют и вполне непрерывны, то λ_0 — точка спектра оператора T .

Лемма 2. Если λ_0 не принадлежит спектру оператора A и оператор $SR_n S$ вполне непрерывен, то λ_0 — или собственное значение, или регулярная точка оператора T .



ԲՅՈՒՆ

Чтобы сформулировать следующую лемму, обозначим через $A(\lambda)$ оператор, действующий в банаховом пространстве B , определенный в некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ комплексной плоскости, за исключением, быть может, самой точки $\lambda = \lambda_0$, и допускающий представление

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^r \frac{\Phi_k(\cdot, \lambda) \varphi_k}{(\lambda - \lambda_0)^{n_k}} + K(\lambda), \quad (1)$$

где $\varphi_k \in B$ ($k = 1, 2, \dots, r$), $K(\lambda)$ — ограниченный оператор, аналитически зависящий от λ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, а $\Phi_k(\cdot, \lambda)$ — аналитические функционалы в этой окрестности, т. е. для любого ограниченного и аналитического в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ оператора $R(\lambda)$ и любого $\varphi \in B$ функция $\Phi_k(R(\lambda)\varphi, \lambda)$ аналитична в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. При этом мы называем оператор $R(\lambda)$ аналитическим в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, если для любого функционала $f \in B'$ и элемента $\varphi \in B$ функция $f(R(\lambda)\varphi)$ аналитична в указанной окрестности. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Пусть в некоторой окрестности U точки $\lambda = \lambda_0$ имеет место представление (1) и пусть радиус Фредгольма оператора $K(\lambda_0)$ больше единицы. Тогда или λ_0 не является предельной точкой собственных значений оператора $A(\lambda)$, или существует окрестность точки λ_0 , целиком состоящая из собственных значений.

Лемма 4. Пусть λ_0 не принадлежит спектру оператора A и пусть оператор SR, S вполне непрерывен для всех λ из односвязной области, содержащей точку λ_0 , и также точки вида $\lambda = \sigma + i\tau$ со сколь угодно большими вещественными τ . Тогда λ_0 не может быть предельной точкой собственных значений оператора T .

В самом деле, пусть λ — собственное значение оператора T . Тогда существует такое v , $\|v\| > 0$, что $v + R_\lambda S^2 v = 0$. Но в таком случае, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение. Итак, достаточно показать, что собственные значения уравнения $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ не могут сгущаться к λ_0 , а это следует из леммы 3, ибо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|R_{\sigma + i\tau}\| = 0$.

Лемма 5. Пусть вне спектра оператора A оператор SR, S вполне непрерывен и пусть некоторая окрестность точки λ_0 (за исключением, быть может, самой точки λ_0) не содержит собственных значений оператора A . Пусть голоморфные функции $w_1(t)$ и $w_2(s)$ определены соответственно в областях G_1 и G_2 комплексной плоскости и отображают их на некоторые окрестности U_1 и U_2 точки λ_0 . Пусть, далее, подобласти $G_1^+ \subset G_1$ и $G_2^- \subset G_2$ отображаются этими функциями однолистно на части $O_1 \subset U_1$ и $O_2 \subset U_2$ окрестностей U_1 и U_2 , отсекаемые соответственно верхней и нижней полуплоскостями. Пусть, кроме того, для всех $t \in G_1$ и $s \in G_2$ определены операторы Φ_t и Ψ_s , допускающие представление

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^p \frac{\Phi_k(\cdot, t) \varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + K_t, \quad (2)$$

$$\Psi_s = \sum_{l=1}^q \frac{\Psi_l(\cdot, s)}{(s - s_0)^{n_l}} + M_s, \quad (3)$$

где $\varphi_k, \psi_l \in H$, $w_1(t_0) = w_2(s_0) = \lambda_0$ ($t \in G_1^+$, $s_0 \in G_2^-$), а линейные функционалы $\Phi_k(\cdot, t)$ и $\Psi_l(\cdot, s)$, равно как и линейные вполне непрерывные операторы K_t и M_s , аналитически зависят от t и s соответственно в G_1 и G_2 . Если $\Phi_t \equiv SR_{w_1(t)}S$ ($t \in G_1^+$), $\Psi_s \equiv SR_{w_2(s)}S$ ($s \in G_2^-$), то точка λ_0 не является предельной точкой собственных значений (включая и лежащие на спектре оператора A) оператора T .

В самом деле, согласно лемме 3, оператор $(E + \Phi_t)^{-1}$ ($t \in G_1$) существует для всех $t \in G_1$, за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек, ибо $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|R_{\lambda_0 + i\tau}\| = 0$. Поэтому точка

$\lambda_0 = w_1(t_0)$ не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T , лежащих в верхней полуплоскости, ибо каждое такое собственное значение λ , попадающее в O_1 , представляется в виде $\lambda = w_1(t)$, $t \in G_1^+$, и если v — соответствующий собственный элемент, то легко видеть, что $\varphi = Sv \neq 0$ и $\varphi + SR_{w_1(t)}S\varphi = 0$, т. е. оператор $E + SR_{w_1(t)}S$ не обратим для бесчисленного множества значений t из G_1^+ , вопреки тождеству $\Phi_t \equiv SR_{w_1(t)}S$. Точно так же убеждаемся, привлекая к рассмотрению оператор Ψ_s , что λ_0 не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T , лежащих в нижней полуплоскости. Наконец, чтобы убедиться в том, что λ_0 не может оказаться предельной точкой вещественных собственных значений оператора T (лежащих на спектре оператора A), достаточно, очевидно, показать, что если λ^* принадлежит непрерывному спектру оператора A и является собственным значением оператора T , то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (E + SR_{\lambda_0 + i\tau}S)v = 0 \quad (\text{Im } \tau = 0) \quad (4)$$

при некотором $v \in H$, $v \neq 0$, после чего останется лишь повторить вышеприведенные выкладки. Но это предельное равенство является следствием следующего более общего предложения, установленного в работе автора [2]: если λ_0 является точкой непрерывного спектра некоторого самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H и если уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо, то $u = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_{\lambda_0 + i\tau} f$ ($\text{Im } \tau = 0$).

Приведем следующую теорему, на которую будем опираться ниже и доказательство которой дано в работе автора [1]. При этом заметим, что точку λ_0 мы называем, следуя Данфорду, точкой непрерывного спектра несамосопряженного оператора T , если λ_0 не является собственным значением этого оператора и многообразие $(T - \lambda_0 E)D_T$ плотно в H и незамкнуто.

Теорема А. Пусть A и V — замкнутые линейные операторы (вообще говоря, несамосопряженные и неограниченные) с плотными областями определения в гильбертовом пространстве H , а U — ограниченный линейный оператор (несамосопряженный), причем $D_A \subset D_U$. Тогда:

1) если λ_0 является регулярной точкой оператора A и

$$\|VR_{\lambda_0}U\| < 1, \quad (5)$$

где R_{λ_0} — резольвента оператора A , то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 является его регулярной точкой;

2) если точка спектра λ_0 оператора A не является собственным значением и если существует такая последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, что

$$\sup_n \|(\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n}\| < \infty, \quad (6)$$

$$\liminf_n \|VR_{\lambda_n}U\| = q < 1, \quad (7)$$

то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 принадлежит его спектру, не являясь собственным значением;

3) если $(A + UV)^* = A^* + (UV)^*$ и выполнены условия (6) и (7), то точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра оператора $T = A + UV$.

Переходя к приложениям, рассмотрим оператор $T = A + S^2$ в $L_2(-\infty, \infty)$, где A — дифференциальный оператор нечетного порядка

$A = (-1)^n i \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$, а S — оператор умножения на $\sqrt{q(x)}$, где $q(x)$ —

комплекснозначная функция и при некотором $\varepsilon_0 > 0$ удовлетворяет условию

$$|q(x)| < Ce^{-\varepsilon_0|x|} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (8)$$

Теорема 1. Собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и вещественные), где S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию (8), могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left(\frac{2\pi(n+1)}{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx \right)^{\frac{2n-1}{2n}} \quad (9)$$

собственных значений нет и все остальные точки вещественной оси принадлежат непрерывному спектру оператора T .

Будем считать $\operatorname{Im} i > 0$ и положим $\lambda = t^{2n+1}$, $0 < \operatorname{arg} t < \frac{\pi}{2n+1}$. Тогда

ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_{λ} оператора A представляется в форме

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n e^{i \frac{2r\pi}{2n+1}} e^{-it e^{i \frac{2r\pi}{2n+1}}(x-y)}, \quad x-y > 0 \\ & \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} e^{i \frac{(2r+1)\pi}{2n+1}} e^{-it e^{i \frac{(2r+1)\pi}{2n+1}}(x-y)}, \quad x-y < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Считая $x - y$ произвольного знака, положим

$$\begin{aligned} \Phi(t, x - y) &= \\ &= \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \left\{ \sum_{r=0}^n e^{i \frac{2rc}{2n+1}} e^{ite^{i \frac{2rc}{2n+1}}(x-y)} - \sum_{r=0}^{n-1} e^{i \frac{(2r+1)c}{2n+1}} e^{-ite^{i \frac{(2r+1)c}{2n+1}}(x-y)} \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это — целая функция по t .

Положим, наконец,

$$\begin{aligned} \Psi(t, x - y) &= \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n e^{i \frac{2rc}{2n+1}} \left\{ e^{ite^{i \frac{2rc}{2n+1}}(x-y)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\sum_{p=0}^{2n-1} |ite^{i \frac{2rc}{2n+1}}(x-y)|^p}{p!} \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что и $\Psi(t, x - y)$ — целая функция. Если, далее, обозначить через $\chi(x)$ функцию, равную 1 при положительных x и 0 при отрицательных x , то, очевидно,

$$\begin{aligned} K(x, y, \lambda) &= \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{e^{i \frac{2rc}{2n+1}}}{p!} |ite^{i \frac{2rc}{2n+1}}(x-y)|^p + \\ &\quad + \Psi(t, x - y) - \chi(y - x) \Phi(t, x - y). \end{aligned}$$

Теперь из леммы 5 немедленно следует, что $\lambda = 0$ не может быть предельной точкой собственных значений λ_k оператора T , для которых $\text{Im } \lambda_k > 0$ (точно так же можно рассмотреть случай, когда $\text{Im } \lambda_k < 0$). Все остальные утверждения теоремы вытекают уже из формулы (10), если воспользоваться леммами 1, 2 и 4. Наконец, из теоремы А следует, что вне круга радиуса (9) нет собственных значений оператора T , ибо очевидно, что

$$\|SR_\lambda S\| < \frac{2\pi(n+1)}{(2n+1)\|t\|^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx.$$

Перейдем, наконец, к изучению спектра несамосопряженных возмущений оператора

$$A = (-\Delta)^k \quad (11)$$

в $L_2(E_n)$, где Δ — оператор Лапласа, E_n — евклидово пространство нечетной размерности $n \geq 3$, k — целое положительное число, причем $2k > n$. Как известно, оператор $A = (-\Delta)^k$ самосопряженный и его спектр непрерывен и совпадает с положительной полуосью. Более того, как это следует из вычислений, проведенных в работе автора [2], ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ этого оператора имеет вид

$$K(x, y, \lambda) = \frac{2i\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} e^{i m n \frac{\pi}{k}} \Phi\left(t e^{i m \frac{\pi}{k}}, x-y\right), \quad (12)$$

где положено $\lambda = t^{2k}$, $0 < \arg t < \frac{\pi}{k}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$\Phi(r, x) = \int_0^1 e^{i r |x| s} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad (13)$$

причем $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если размерность n пространства E_n нечетна, причем $n \geq 3$ и $2k > n$, то собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и положительные), где A определено формулой (11), а S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию (8), могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int_{E_n} |q(x)| dx \right\}^{\frac{2k}{2k-n}} \quad (14)$$

собственных значений нет, и все остальные точки положительной полуоси принадлежат непрерывному спектру оператора T .

В самом деле, поскольку $\operatorname{Im}(t e^{i m \frac{\pi}{k}}) > 0$, то формулы (12) и (13) для ядра резольвенты оператора A , также условие (8) показывают, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T и вне ее этот оператор может иметь лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне положительной полуоси. Доказательство немедленно следует из лемм 1, 2 и 4. Из теоремы А вытекает, далее, что вне круга радиуса (14) нет собственных значений оператора T , поскольку, как легко видеть,

$$|SR, S| \leq \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int_{E_n} |q(x)| dx.$$

Остается показать, что ни одна точка положительной полуоси не может быть предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!), т. е. что мы находимся в условиях применимости леммы 5. С этой целью введем обозначения

$$\psi(r, x) = \int_0^1 \left\{ e^{i r |x| s} \sum_{l=0}^{2k-n-1} \frac{(i r |x| s)^l}{l!} \right\} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds,$$

$$\Psi(t, x) = i \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} \psi(te^{\frac{m\pi}{k}}, x) e^{i m \frac{x}{k}}$$

и

$$a_l = \frac{1}{l!} \int_0^1 s^l (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds$$

Легко видеть, что

$$K(x, y, \lambda) = -i \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}} \frac{a_{2p}}{1 - e^{\frac{i(2p+\pi)}{k}}} |x-y|^{2p} t^{2p} + \Psi(t, x-y)$$

Поскольку первый член правой части содержит лишь четные степени $|x-y|$, а второй член $\Psi(t, x-y)$ — целая функция по t , то условия леммы 5 выполняются, что и доказывает теорему.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ,

Ինֆինիտիմալ օպերատորների ոչ-ինֆինիտիմալ ցրգոսմանների սպեկտրի հետազոտության մի եղանակի մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է A ինքնահամալուծ օպերատորի $T = A + S^2$ ոչ-ինքնահամալուծ ցրգոսման սպեկտրի հետազոտության մի եղանակ, որտեղ S -ը սահմանափակ «պերատոր է: Այն հիմնված է նրա վրա, որ եթե SR, S օպերատորը (որտեղ R -ն A օպերատորի ռեզոլվենտն է) լիովին անընդհատ է A օպերատորի սպեկտրից դուրս և եթե ունի վերջավոր շափանի մնացք (ընդհանրապես ասած, որոշ ուղիղանի մակերևույթի վրա) A օպերատորի անընդհատ սպեկտրի $i = i_0$ կետի շրջակայքում ապա i_0 -ն չի կարող հանդիսանալ T ցրգոսման օպերատորի սեփական արժեքների սահմանային կետ: Այս պնդումը վերստին է $T = A + S^2$ օպերատորի սպեկտրի հետազոտման նկատմամբ, որտեղ $A = (-\Delta)^k$ պոլիհարմոնիկ օպերատոր է $L_2(E_n)$ տարածության մեջ, E_n -ը n շափանի էվկլիդեսյան տարածություն է և $2k > n$, իսկ S -ը բազմապատկման օպերատորն է անվերջությունում էրապոնենցիալ կարգի նվազող կոմպլեքսարժեք ֆունկցիայով: Ապացուցված է, որ այդ օպերատորի սեփական արժեքները կարող են կազմել լոկ վերջավոր բազմություն, ընդ որում

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)! E_n} \int |q(x)| dx \right\}^{2k-n}$$

շատագուց շրջանից դուրս սեփական արժեքներ չկան: Համանման պնդում ստացված է կետ կարգի $A = (-1)^n \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$ սովորական դիֆերենցիալ օպերատորի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱՇԱԿՆԻՄՈՒՄ

- ¹ P. M. Мартиросян, Известия АН АрмССР, физико-математ. науки, т. XIV, № 5 (1961). ² P. M. Мартиросян, Известия АН СССР, серия матем., т. 27, № 3 (1963). ³ P. M. Мартиросян, Известия АН СССР, серия матем., т. 28, № 1 (1964).

Ф. Г. Арутюнян

О сходимости почти всюду рядов по базисам
 пространства $L_p [0, 1]$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Талаляном 29/V 1965)

§ 1. Введение. В 1927 г. А. Н. Колмогоровым в работе ⁽¹⁾ без доказательства была сформулирована следующая

Теорема. Существует функция $f(x) \in L_2 [0, 2\pi]$, ряд Фурье которой

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

В 1960 г. появилась работа З. Загорского ⁽²⁾, содержащая схему доказательства этой теоремы. Отправляясь от метода Загорского, П. Л. Ульянов ⁽³⁾ распространил эту теорему на ряды по системам Хаара и Уолша. Исходя из указанного результата, П. Л. Ульянов ⁽³⁾ и А. М. Олевский ⁽⁴⁾ доказали, что аналогичная теорема верна для любых полных ортонормированных систем и даже, как показал П. Л. Ульянов ⁽³⁾, для любых базисов пространства $L_2 [0, 1]$. Теорема П. Л. Ульянова формулируется следующим образом.

Теорема Ульянова. Пусть $\{f_n(x)\}$ базис пространства $L_2 [0, 1]$. Существует функция $f(x) \in L_2 [0, 1]$, разложение которой по базису

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (2)$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Оказывается, что эта теорема П. Л. Ульянова верна для любых базисов пространства $L_p [0, 1]$, $p > 1$. А именно, в настоящей заметке доказывается

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}$ — базис пространства $L_p [0, 1]$.

$p > 1$. Существует функция $f(x) \in L_p [0, 1]$, разложение которой по базису

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (3)$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

В доказательстве теоремы 1 используется конструкция работы (4) Олевского, но при этом приходится применять метод, отличный от методов П. Л. Ульянова и А. М. Олевского, использованных ими при доказательстве соответствующих теорем для полных ортонормированных систем и для базисов пространства $L_2 [0, 1]$.

Кроме того, указанным методом доказывается также следующая

Теорема 2. Пусть последовательность нормированных функций $\{f_n(x)\}$ из $L_p [0, 1]$, $p > 1$ слабо сходится к нулю в $L_p [0, 1]$, тогда можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ такую, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(x) \quad (4)$$

сходится в метрике $L_p [0, 1]$, то он сходится и почти всюду на $[0, 1]$.

Отметим, что теорема 2 является обобщением теоремы Д. Е. Меньшова (5) о том, что из всякой последовательности ортонормированных функций можно выделить подпоследовательность сходимости. Более того, учитывая, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$, образующих нормированный базис в пространстве $L_p [0, 1]$, $p > 1$, слабо сходится к нулю в $L_p [0, 1]$ (это следует из (6) теоремы 6.2.5), из теоремы 2 вытекает

Следствие. Если $\{f_n(x)\}$ — нормированный базис в $L_p [0, 1]$, $p > 1$, то из любой подпоследовательности $\{f_{n_k}(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_{k_l}}(x)\}$ такую, что если ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l f_{n_{k_l}}(x) \quad (5)$$

сходится в метрике $L_p [0, 1]$, то он сходится и почти всюду на $[0, 1]$.

§ 2. Доказательство теоремы 1. Прежде всего напомним определение системы Хаара. Положим

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1, \quad \text{при } x \in [0, 1] \quad (6)$$

далее, для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}} \right) \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}} \right) \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (7)$$

где для каждого m индекс k пробегает значения $k = 1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\chi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; обозначим систему Хаара, упорядоченную в порядке

$$\chi_0^{(2)}(x), \chi_0^{(1)}(x), \dots, \chi_m^{(1)}(x), \dots, \chi_m^{(2^m)}(x), \dots \quad (8)$$

В дальнейшем мы будем применять также некоторый класс ортонормированных систем, построение которых аналогично построению системы Хаара, но при этом отрезок $[0, 1]$ делится не на интервалы равной длины, а на произвольные множества равной меры.

Для построения этих ортонормированных систем определим систему множеств $\{E_0^{(0)}, E_m^{(k)}, \bar{E}_m^{(k)}\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $1 < k \leq 2^m$ следующим образом.

Положим

$$E_0^{(0)} = [0, 1]. \quad (9)$$

Разделим $E_0^{(0)}$ на два множества $E_0^{(1)}, \bar{E}_0^{(1)}$ равной меры

$$E_0^{(1)} \cup \bar{E}_0^{(1)} = E_0^{(0)}, \quad \mu E_0^{(1)} = \mu \bar{E}_0^{(1)}. \quad (10)$$

Если уже определены множества

$$E_0^{(0)}, E_0^{(1)}, \bar{E}_0^{(1)}, \dots, E_{m-1}^{(1)}, \bar{E}_{m-1}^{(1)}, \dots, E_{m-1}^{(2^{m-1})}, \bar{E}_{m-1}^{(2^{m-1})}, \quad (11)$$

то множества

$$E_m^{(2k-1)}, \bar{E}_m^{(2k-1)}, E_m^{(2k)}, \bar{E}_m^{(2k)}, \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (12)$$

определяются следующим образом

$$\begin{aligned} E_m^{(2k-1)} \cup \bar{E}_m^{(2k-1)} &= E_{m-1}^{(k)}, \quad \mu E_m^{(2k-1)} = \mu \bar{E}_m^{(2k-1)}, \quad E_m^{(2k-1)} \cap \bar{E}_m^{(2k-1)} = 0 \\ E_m^{(2k)} \cup \bar{E}_m^{(2k)} &= E_{m-1}^{(k)}, \quad \mu E_m^{(2k)} = \mu \bar{E}_m^{(2k)}, \quad E_m^{(2k)} \cap \bar{E}_m^{(2k)} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Положим

$$\varphi_0^{(0)}(x) = 1, \quad \text{при } x \in E_0^{(0)}, \quad (14)$$

а для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$\varphi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in E_m^{(k)} \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \bar{E}_m^{(k)} \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (15)$$

где для всякого m , k принимает значения $k = 1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обозначим систему $\{\varphi_0^{(0)}(x), \varphi_m^{(k)}(x)\}$, расположенную в порядке

$$\varphi_0^{(0)}(x), \varphi_0^{(1)}(x), \dots, \varphi_m^{(1)}(x), \dots, \varphi_m^{(2^m)}(x), \dots \quad (16)$$

Систему $\{\varphi_n(x)\}$ назовем обобщенной системой Хаара.

Теорема 1 доказывается при помощи следующих двух лемм.

Лемма 1. Для любой обобщенной системы Хаара $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (17)$$

который после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду и

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n \varphi_n(x) \right| < 1, \quad \text{при } x \in E, \mu E = 1, m = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Лемма 2. Пусть заданы функции $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$, принадлежащие пространству $L_q(\bar{G})$, $q > 1$, $\mu G > 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать множества G_1 и G_2 и функцию $\psi(x)$, такие, что

$$1) \quad G_1 + G_2 = G, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

$$2) \quad \mu G_1 = \mu G_2,$$

$$3) \quad \left| \int_{G_k} \psi_k(x) \psi(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (19)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где

$$4) \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu G_1}}, & \text{при } x \in G_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu G_2}}, & \text{при } x \in G_2 \end{cases} \quad (20)$$

Аналог леммы 1, в том частном случае, когда вместо обобщенных систем Хаара $\{\varphi_n(x)\}$ берется обычная система Хаара $\{\chi_n(x)\}$, был доказан Олевским (см. (1), лемма 2). Доказательство же леммы 1 опирается на указанную лемму Олевского. Оказывается, что если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (21)$$

в системе Хаара обладает тем свойством, что его частные суммы ограничены и он расходится почти всюду после некоторой перестановки членов, то ряд (17) с теми же коэффициентами также обла-

дает этими свойствами. При этом ряд (17) расходится после той же перестановки, что и ряд (21).

Лемма 2 доказывается очень просто. Положим $P(x) = \mu |0, x| \cap G$, $x \in G$ и рассмотрим функции

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu G}} r_n \left(\frac{P(x)}{\mu G} \right), \quad (22)$$

где $\{r_n(x)\}$ — система Радемахера. $\{\varphi_n(x)\}$ будет ограниченной ортонормированной системой на множестве G и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_G F(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (23)$$

для любого $F(x) \in L_2(G)$. Возьмем m настолько большим, чтобы

$$\left| \int_G \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx \right| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

Из (22) непосредственно видно, что множество G можно разделить на два множества G_1 и G_2 равной меры так, чтобы функция

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при } x \in G_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при } x \in G_2 \end{cases} \quad (24')$$

почти всюду на G совпадала с $\varphi_m(x)$. Эта функция $\psi(x)$ будет удовлетворять условиям леммы 2.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ сопряженная к базису $\{f_n(x)\}$ система в $L_2[0, 1]$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $a_i^{(0)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, коэффициенты разложения функции $\tau_0(x) \equiv 1$, $x \in [0, 1]$ по базису $\{f_i(x)\}$. Имеем

$$a_i^{(0)} = \int_0^1 \psi_i(x) \tau_0(x) dx. \quad (25)$$

Возьмем число n_1 настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{i=0}^{n_1-1} a_i^{(0)} f_i(x) - \tau_0(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \varepsilon, \quad n_0 = 0. \quad (26)$$

Предположим, что уже определены числа $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{k-1}$ и функции $\varphi_0(x), \dots, \varphi_k(x)$, представляющие первые $k-1$ функций некоторой обобщенной системы Хаара так, что

$$\left\| \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(j)} f_i(x) - \varphi_j(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (27)$$

Легко заметить, что в силу леммы 2 можно определить $\varphi_{k+1}(x)$ таким образом, чтобы функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \varphi_{k+1}(x)$ представляли первые $k+2$ функции некоторой обобщенной системы Хаара и чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k+1)} f_i(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^{k+2}}, \quad (28)$$

где

$$a_i^{(k+1)} = \int_0^1 \psi_i(x) \varphi_{k+1}(x) dx.$$

После этого выберем $n_{k+2} > n_{k+1}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+2}-1} a_i^{(k+1)} f_i(x) - \varphi_{k+1}(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^{k+2}}. \quad (29)$$

Таким образом определяются обобщенная система Хаара $\{\varphi_k(x)\}$ и натуральные числа $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$, для которых в силу (26) — (29) имеем

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^k} \quad (30)$$

для любого $k = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (31)$$

по построенной нами обобщенной системе Хаара удовлетворяет условиям леммы 1. Непосредственно видно, что этот ряд сходится в метрике $L_p[0,1]$, $p > 1$. Очевидно, можно считать, что $|a_k| < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и следовательно

$$\left\| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^k}. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x). \quad (33)$$

Прежде всего заметим, что этот ряд сходится в метрике $L_p[0, 1]$. В самом деле, положим

$$S_j(x) = \sum_{k=0}^j a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

Тогда для любых p' и q' , $q' > p'$ в силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \left\| S_{q'}(x) - S_{p'}(x) \right\|_{L_p[0, 1]} &= \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) \right\|_{L_p[0, 1]} < \\ &< \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0, 1]} + \\ &+ \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0, 1]} < \frac{1}{2^{p'}} + \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0, 1]} \end{aligned} \quad (35)$$

Из полученного неравенства (35) и из того, что ряд (31) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, следует, что $\|S_{q'}(x) - S_{p'}(x)\|_{L_p[0, 1]}$ стремится к нулю, когда p' и q' стремятся к ∞ . И, следовательно, раскрытый ряд (33) по внутренней сумме является разложением по базису $f_i(x)$ некоторой функции $f(x)$ из $L_p[0, 1]$. Для доказательства теоремы I достаточно проверить, что ряд (33) неограниченно расходится после некоторой перестановки его членов. Покажем, что разность рядов (31) и (33) абсолютно сходится почти всюду. Это вытекает из того, что в силу неравенства (32) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right| dx < \\ < \sum_{k=0}^{\infty} \left\| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0, 1]} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда, так как ряд (31) неограниченно расходится почти всюду после некоторой перестановки членов, ясно, что ряд (33) тоже неограниченно расходится почти всюду после той же перестановки членов, что и ряд (31).

Таким образом, теорема I доказана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Յ. Չ. ՀԱՐՄԻՔՅՈՒՆՅԱՆ

$L_p[0, 1]$, ապառժուրյան բազիսներով օւղեկերի գուգամիւրյան մասին

Ապացուցված է՝ հեռույալ թերթի մէջըր

Թերթի I. Քաղ $\{f_n(x)\}$ ինի բազիս $L_p[0, 1]$, $p > 1$ ապառժուրյան մասին

Այդ գեղարվեստ գոյութիւն ունի $f(x) \in L_p[0,1]$ ֆունկցիոն, որի $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ գեր-
 լիմիտիւնը ըստ բազիսի չորսի աւելանիւրի որոշ աւելանիւրի գոյութիւնը հետո համարյա-
 սինուսիդալ տարամիտում է:

Քեորեմ 2. Եթէ $\{f_n(x)\}$ թույլ գույամիտում է գերոյի $L_p[0,1]$ -ում, ապա նրանից
 կարելի է աւելանիւրի $\{f_{n_k}(x)\}$ հնթադիտում աւելանիւր, որ աւելն ձի $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(x)$ չորսի
 $L_p[0,1]$ -ում գույամիտումը հետո նրա համարյա սինուսիդալ գույամիտումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ Ո Ւ Ն

¹ А. Колмогоров, Д. Меньшов, Sur la convergence des series de fonctions ortho-
 gonales, Math. Zeitschr, 26 (1927), 432 — 441. ² З. Эзгорский, Une serie Fourier permu-
 tee d'une Sonction de classe L^1 divergente presque partout, Compt. Rend. Acad. Sci.,
 251 (1960), 501 — 503. ³ П. Л. Удьянов, Успехи матем. наук, XVI, № 3 (1961), 61 — 142.
⁴ А. М. Олевский, Известия АН СССР, серия матем, т. 27 (1963), 343 — 366. ⁵ Д. Е.
 Меньшов, Sur la convergence et la sommation das series de fonctions orthogonales, Bull.
 Soc. math. France, 64 (1936), 147 — 170. ⁶ С. Кичмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортого-
 нальных рядов, М., 1958

Յու Նուան և Մ. Վ. Օստրովսկի

Օ լոգարիֆմիկական արտաբերական մերոմորֆային ֆունկցիայի

(Ստորագրուած ակադեմիկոս ԱՄ Արմանկոյ ՍՏՐ Մ. Մ. Ժրբանյանոս 3/VII 1965)

Բ. Ք. Նեվանլիննա արտաբերական սույնիկոյ րեզուլտատ ((¹), ստր. 61).

Սույնիկոյ ֆունկցիայի $f(z)$ մերոմորֆային արտաբերական $|z| < \Omega$, $\Omega \leq \infty$, և $f(0) = 1$.
 Տոգա արտաբերական սույնիկոյ r և R , $0 < r < R < \Omega$ սարտաբերական արտաբերական

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 4 \ln^+ T(R) + 3 \ln \frac{1}{R-r} + 4 \ln R + 2 \ln \frac{1}{r} + 24.$$

Վ սույնիկոյ շարտաբերական արտաբերական տեորեմա.

Տեորեմա. Սույնիկոյ ֆունկցիայի $f(z)$ մերոմորֆային արտաբերական $|z| < \Omega$,
 $\Omega < \infty$, և $f(0) = 1$. Տոգա արտաբերական սույնիկոյ α , $0 < \alpha < 1$, և սույնիկոյ r և R , $0 < r < R < \Omega$,
 սարտաբերական արտաբերական

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{32}{1-\alpha} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^\alpha \dot{T}(R) \right\} + \frac{1}{\alpha} \ln 2, \quad (1)$$

տա $\dot{T}(R) = \max(T(R), 1)$.

Ժր սարտաբերական սույնիկոյ րեզուլտատ Ք. Նեվանլիննա շարտաբերական, շոտա սույնիկոյ (1)
 սարտաբերական արտաբերական սույնիկոյ սույնիկոյ

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \ln^+ T(R) + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \ln^+ \frac{1}{R-r} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \ln R +$$

$$+ \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{64}{1-\alpha}.$$

Սոսկոյնիկոյ α մոյնիկոյ արտաբերական սույնիկոյ սույնիկոյ արտաբերական, տո
 սույնիկոյ սույնիկոյ կոյնիկոյ սույնիկոյ $\ln^+ T(R)$, $\ln^+ \frac{1}{R-r}$ և $\ln R$
 մոյնիկոյ սույնիկոյ սույնիկոյ արտաբերական սույնիկոյ արտաբերական կ 1, 2 և 2.

Սույնիկոյ սույնիկոյ մոյնիկոյ սույնիկոյ, շոտա սույնիկոյ մերոմորֆային
 սույնիկոյ սույնիկոյ ֆունկցիայի $f(z)$, սույնիկոյ սույնիկոյ ρ , սարտաբերական
 սույնիկոյ սույնիկոյ

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \max(\rho - 1, 0). \quad (2)$$

Легко проверить, что для функции $f(z) = E_\rho(z)$, где $E_\rho(z)$ — функция Миттаг-Леффлера,

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n\rho^{-1})}$$

(2) имеет место знак равенства (при целом ρ можно рассмотреть также функцию $\exp(z^\rho)$).

2. Доказательство теоремы. Будем исходить из формулы Шварца-Неванлинна ((1), стр. 4):

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(se^{i\theta})| \frac{se^{i\theta} + z}{se^{i\theta} - z} d\theta + \sum_{|a_k| < s} \ln \frac{s(z - a_k)}{s^2 - \bar{a}_k z} - \\ &- \sum_{|b_l| < s} \ln \frac{s(z - b_l)}{s^2 - \bar{b}_l z} + \text{const}, \end{aligned}$$

где $|z| < s < \Omega$, a_k — нули функции $f(z)$, b_l — ее полюсы. Дифференцируя по z , получим

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(se^{i\theta})| \frac{2se^{i\theta}}{(se^{i\theta} - z)^2} d\theta + \sum_{|a_k| < s} \frac{s^2 - |a_k|^2}{(s^2 - \bar{a}_k z)(z - a_k)} - \\ &- \sum_{|b_l| < s} \frac{s^2 - |b_l|^2}{(s^2 - \bar{b}_l z)(z - b_l)}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\{c_m\}$ теоретико-множественную сумму последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_l\}$. Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln |f(se^{i\theta})|| d\theta = m(s, 0) + m(s, \infty) \leq 2T(s).$$

$$\left| \frac{s^2 - |c_m|^2}{(s^2 - \bar{c}_m z)(z - c_m)} \right| \leq \frac{s}{s - |z|} \cdot \frac{1}{|z - c_m|}, \quad |c_m| < s.$$

Будем иметь

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{4sT(s)}{(s - |z|)^2} + \frac{s}{s - |z|} \sum_{|c_m| < s} \frac{1}{|z - c_m|}, \quad |z| < s < \Omega.$$

Из этого неравенства следует, что $(0 < r < s < \Omega, 0 < \alpha < 1)$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{4sT(s)}{(s-r)^2} + \frac{s}{s-r} \sum_{|c_m| < s} \frac{1}{|re^{i\varphi} - c_m|} \right\}^\alpha d\varphi <$$



$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{4^{\alpha} s^{\alpha} T^{\alpha}(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{s^{\alpha}}{(s-r)^{\alpha}} \sum_{|c_m| < s} \frac{1}{|re^{i\varphi} - c_m|^{\alpha}} \right\} d\varphi = \\ & = 2\pi \frac{4^{\alpha} s^{\alpha} T^{\alpha}(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{s^{\alpha}}{(s-r)^{\alpha}} \sum_{|c_m| < s} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - c_m|^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - c_m|^{\alpha}} & \leq \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - |c_m||^{\alpha}} \leq \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|r \sin \varphi|^{\alpha}} = \\ & = \frac{4}{r^{\alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^{\alpha} \varphi} \leq \frac{4}{r^{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\varphi^{\alpha}} = \frac{2\pi}{r^{\alpha}(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

то мы имеем

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^{\alpha} d\varphi \leq 2\pi \frac{4^{\alpha} s^{\alpha} T^{\alpha}(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{2\pi s^{\alpha} |n(s, 0) + n(s, \infty)|}{(1-\alpha)(s-r)^{\alpha} r^{\alpha}}.$$

В этом неравенстве s — произвольное число, такое что $r < s < \Omega$. Положим $s = \frac{1}{2}(R+r)$, $r < R < \Omega$. Замечая, что

$$s-r = R-s = \frac{1}{2}(R-r), \quad T(s) < T(R),$$

$$\begin{aligned} n(s, 0) + n(s, \infty) & \leq \frac{s}{R-s} \int_r^R \frac{n(t, 0) + n(t, \infty)}{t} dt \leq \\ & \leq \frac{s}{R-s} (N(R, 0) + N(R, \infty)) \leq \frac{s}{R-s} \cdot 2T(R) < \frac{4R}{R-r} T(R), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^{\alpha} d\varphi & \leq \frac{2^{2\alpha+1} \pi R^{\alpha} T^{\alpha}(R)}{(R-r)^{2\alpha}} + \frac{2^{2\alpha} \pi R^{1+\alpha} T(R)}{(1-\alpha)(R-r)^{1+\alpha} r^{\alpha}} \leq \\ & \leq \frac{32\pi}{1-\alpha} \dot{T}(R) \left\{ \frac{1}{R^{\alpha}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-2\alpha} + \frac{1}{r^{\alpha}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} \right\} \leq \\ & \leq \frac{32\pi}{1-\alpha} \dot{T}(R) \left\{ \frac{1}{r^{\alpha}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} + \frac{1}{r^{\alpha}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} \right\} = \\ & = \frac{64\pi}{1-\alpha} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha} \dot{T}(R). \end{aligned}$$

Так как

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \right\} < \\ < \frac{1}{2} \left\{ \ln^+ \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^2 d\varphi \right] + \ln 2 \right\},$$

то теорема доказана.

Замечание. Попутно доказано, что для мероморфной при $|z| < \infty$, $\infty \leq \infty$, функции $f(z)$ с $f(0) = 1$ и любых α, r и R , $0 < \alpha < 1$, $0 < r < R < \infty$, справедливо неравенство:

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^2 d\varphi < \frac{64\pi}{1-\alpha} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha} T(R). \quad (3)$$

Этот результат, как нам кажется, представляет самостоятельный интерес, поскольку он примыкает к следующей важной теореме У. Дж. Фукса⁽²⁾: если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция конечного нижнего порядка λ , то существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что при $r = r_n$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi < K(\lambda) \frac{T(r)}{r}, \quad (4)$$

где $K(\lambda)$ — положительная конечная величина, зависящая лишь от λ (полученная Фуксом оценка для $K(\lambda)$ была позднее усилена В. П. Петренко^(3,4)). Величина, стоящая слева в (4), обращается в ∞ при $r = |c_n|$, поэтому для нее невозможна оценка для всех r , аналогичная (3).

Так как

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi < \ln^+ \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^2 d\varphi \right\} + \ln 2.$$

то из теоремы Фукса следует дополняющее нашу теорему утверждение, что для всякой мероморфной во всей плоскости функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ можно указать последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такую, что при $r = r_n$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \ln^+ \left\{ \frac{K(\lambda)}{2\pi} \cdot \frac{T(r)}{r} \right\} + \ln 2. \quad (5)$$

3°. Докажем теперь соотношение (2). Легко видеть, что общность не уменьшится, если мы будем считать, что $f(0) = 1$. Полагая в (1) $R = 2r$, получим

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{128}{1-\alpha} \cdot \frac{T(2r)}{r^2} \right| + \frac{\ln 2}{\alpha} \\ \leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T(2r)+1}{r^2} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{256}{1-\alpha}. \quad (6)$$

Так как при любом $\varepsilon > 0$ справедливо $T(2r) = O((2r)^{\rho+\varepsilon}) = O(r^{\rho+\varepsilon})$, $r \rightarrow \infty$, то

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \max(\rho + \varepsilon - 2, 0) \ln r + O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \max(\rho + \varepsilon - 2, 0).$$

Устремляя ε к 0, а α к 1, получаем (2).

Замечание 1. Если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция нижнего порядка λ , то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \max(\lambda - 1, 0). \quad (7)$$

Для доказательства этого соотношения нужно воспользоваться (6) и тем обстоятельством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $r_n \rightarrow \infty$, для которой $T(2r_n) = O(r_n^{\lambda+\varepsilon})$, $n \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \max(\rho - 1, 0),$$

которое слабее и (2), и (7), легко следует из (5).

Замечание 3. Одним из авторов было доказано ((³), стр. 286 — 287), что если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция рода ρ , то

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \rho \ln r + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Как известно, всегда $\rho \leq \rho \leq \rho + 1$. Если мы имеем $\rho \leq \rho < \rho + 1$ и $\rho > 1$, то из (2) следует (8). Если же $\rho = \rho + 1$ или $\rho = 0$, то (8) из (2) не следует. Мы можем все же сейчас получить (8) при $0 \leq \rho < 1$ (тогда $\rho = 0$). Для этого заметим, что

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi$$

и поэтому из (3) с $R = 2r$, $\rho < \alpha < 1$ вытекает

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{256}{1-\alpha} \cdot \frac{T(2r)+1}{r^\alpha} = o(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Մերոմորֆ ֆունկցիայի լուգարիթմական ածանցյալի մասին

Հարժանում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Ծնթադրենք $f(z)$ ֆունկցիան մերոմորֆ է $|z| < \infty$, $\infty < \infty$ շրջանում և $f(0) = 1$: Այդ ֆունկցիան բոլոր α -ների, $0 < \alpha < 1$ և բոլոր r և R , $0 < r < R < \infty$ արժեքների համար իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{32}{1-\alpha} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha} \hat{T}(R) \right\} + \frac{1}{\alpha} \ln 2,$$

որտեղ $\hat{T}(R) = \max(T(R), 1)$:

Այս թեորեմը $m(r, f'/f)$ -ի համար տալիս է ավելի ճշգրիտ գնահատական, քան Ռ. Նևանլինային պատկանող թեորեմը [1], էջ 61:

Իերված թեորեմի ոգնությունը ապացուցվում է, որ ամբողջ հարթության մեջ մերոմորֆ և կարգի $f(z)$ ֆունկցիայի համար իրավացի է

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \max(\alpha - 1, 0)$$

անհավասարությունը, որտեղ α նարմոֆ և նաև հավասարության նշանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ R. Nevanlinna, Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929. ² У. Дж. Фукс, Ann. of Math., 68, № 2 (1958), 203—209. ³ В. П. Петренко, Известия АН Армянской ССР, серия физ.-матем., т. 17, № 1 (1964), 23—36. ⁴ В. П. Петренко, ДАН СССР, т. 158, № 5 (1964), 1030—1033. ⁵ Г. Виттман, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., Физматгиз, 1960.

Г. Е. Багдасарян и В. Ц. Гнуин

Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки

(Представлено Академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 14/V 1965)

1. Рассмотрим задачу динамической устойчивости анизотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки, сжатой продольной силой $P_0 + P_1 \cos ht$.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки, которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 — вдоль образующей, α_2 — по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Принимается, что материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхностью.

В отношении тонкой полой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений уравнение равновесия оболочки имеет вид (1)

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \times \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\sigma^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} - Z = 0, \quad (1.1)$$

Здесь Φ — функция перемещений, Z — нормально приложенное внешнее давление.

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66} \Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66} \Omega}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66} \Omega},$$

$$a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66} \Omega}, \quad a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66} \Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66} \Omega}, \quad (1.2)$$

$$\Omega = \frac{1}{c_{66}} \{ (c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2 \},$$

$$c_{16} = B_{16}h, \quad D_{16} = B_{16} \frac{h^3}{12}.$$

h — толщина, B_{ik} — коэффициенты упругости материала оболочки (1).

В случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями, для коэффициентов B_{ik} имеем (2)

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11} \cos^4 \varphi + 2 (B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \sin^4 \varphi, \\ B_{22} &= B_{11} \sin^4 \varphi + 2 (B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \cos^4 \varphi, \\ B_{12} &= B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2 (B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{66} &= B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2 (B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{16} &= \frac{1}{2} [B_{12} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi, \\ B_{26} &= \frac{1}{2} [B_{12} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями, B_{ik} — коэффициенты упругости при $\varphi = 0$.

В (1.1) заменив Z выражением (3)

$$\left[-\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi R} (P_0 + P_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right] a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} +$$

$$- 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \Big| \varphi. \quad (1.4)$$

получим уравнения динамической устойчивости рассматриваемой оболочки.

Здесь ρ — плотность материала оболочки, ε — коэффициент линейного затухания.

2. Предполагая, что оболочка достаточно длинная, представим решение уравнения (1.1) в виде (3)

$$\varphi = f(t) e^{-i \left(k \alpha_1 + \frac{n}{R} \alpha_2 \right)}. \quad (2.1)$$

где $f(t)$ — искомая функция времени t , $k = \frac{\pi}{\lambda}$ — волновое число, n — число волн по окружности, λ — длина полуволны в направлении образующих.

Подставляя (2.1) в (1.1) с учетом (1.4), получим

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 \left(1 - 2\mu \cos \theta t \right) f = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{K}{\rho h} \left(1 - \frac{P_0}{P^*} \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{P_1}{P^* - P_0}, \quad P^* = \frac{2\pi R K}{k^2}. \quad (2.3)$$

$$K = D_{11} k^4 + 4D_{16} \frac{k^3 n}{R} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{k^2 n^2}{R^2} + 4D_{26} \frac{k n^3}{R^3} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} -$$

$$+ \frac{k^4}{R^2} \left[a_{21} k^4 + 2a_{16} \frac{k^2 n}{R} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{k^2 n^2}{R^2} + 2a_{76} \frac{k n^2}{R^2} + a_{33} \frac{n^4}{R^4} \right]^{-1}$$

Здесь ω — собственная частота, μ — коэффициент возбуждения оболочки, нагруженной постоянным составляющим осевой силы. P_0 — верхнее критическое значение сжимающей силы при ее статическом действии.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи приводится к известному уравнению Матье (2.2). Для главной (наиболее опасной) области динамической неустойчивости имеем (2)

$$\theta_{i,1}^2 = 4 \omega^2 \left[1 + (-1)^i \sqrt{\lambda^2 - \frac{4\epsilon^2}{\omega^2}} \right], \quad i=1, 2. \quad (2.4)$$

В случае ортотропной оболочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями критические частоты главного параметрического резонанса $\theta_{i,1}$ существенно зависят от ориентации главных направлений упругости и являются периодическими функциями угла φ с периодом π . Таким образом появляется возможность регулирования значений критических частот в зависимости от условий работы оболочки.

Наибольший интерес представляют те значения параметров k и n , вблизи которых критическая частота $\theta_{i,1}$ принимает минимальное значение.

Если имеет место симметричная форма потери устойчивости, то $n=0$ и критическая частота $\theta_{i,1}$ принимает минимальное значение при*

$$k^2 = \frac{P_1 + 2P_0}{8\pi R D_{11}}. \quad (2.5)$$

Для границ главной области параметрического резонанса получим формулы

$$\theta_{1,1}^2 = \frac{4}{\rho h R^2} \left[\frac{1}{a_{11}} - \frac{(P_1 + 2P_0)^2}{64 \pi^2 D_{11}} \right], \quad (2.6)$$

$$\theta_{2,1}^2 = \frac{4}{\rho h R^2} \left[\frac{1}{a_{11}} - \frac{3(P_1 + 2P_0)^2}{64 \pi^2 D_{11}} \right]. \quad (2.7)$$

Рассматривая формулы (2.5), (2.6), легко заметить, что минимальное значение критической частоты $\theta_{i,1}$ и значение длины полуволны в направлениях образующих зависят от ориентации главных направлений упругости материала оболочки.

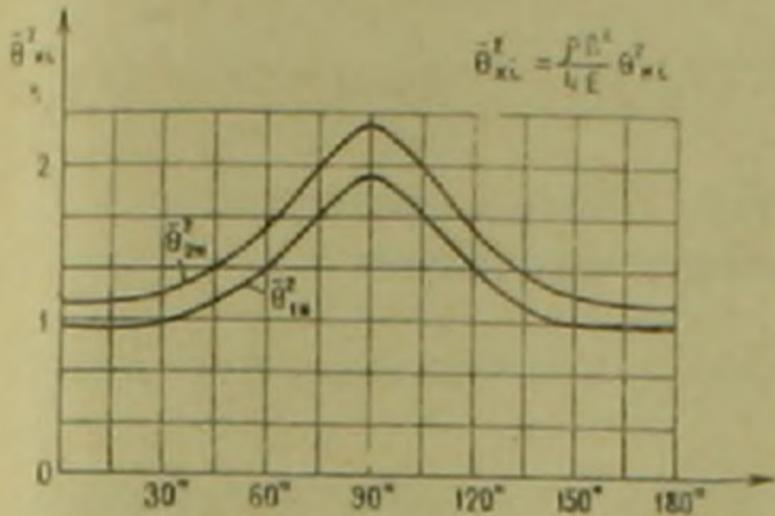
3. Для иллюстрации приводим два примера решения осесимметричной задачи динамической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями при $B_{11}=2E$, $B_{22}=E$, $B_{66}=0,5E$, $P_0=0$, $P_1=2Eh^2$ и при $B_{11}=10E$, $B_{22}=E$, $B_{66}=0,5E$, $P_0=0$, $P_1=5Eh^2$.

* Здесь для простоты выкладок рассматривается консервативная задача.

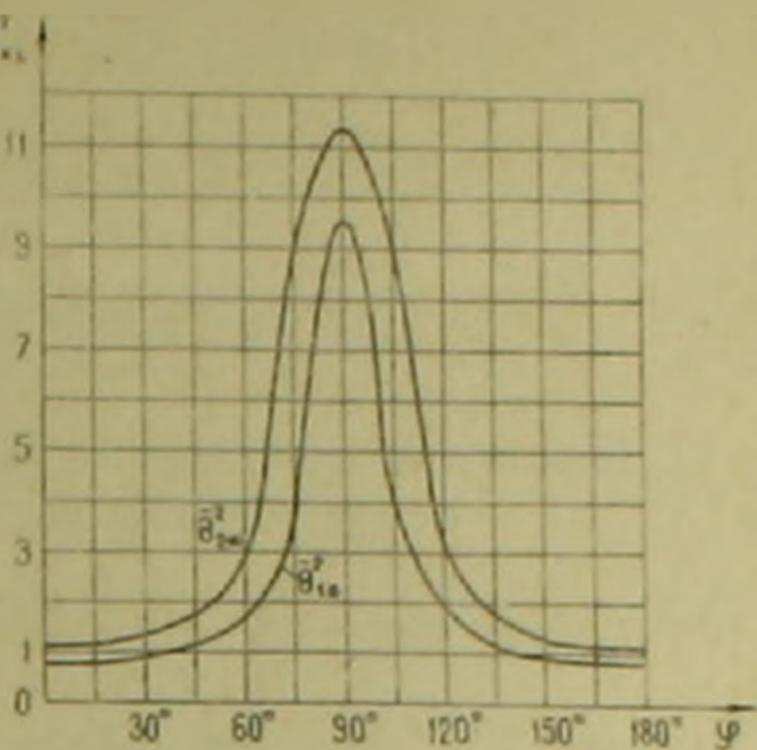
При этих исходных данных на фиг. 1, 2 приведены графики зависимостей $\min \theta_{1*}^2(\varphi)$ и $\theta_{2*}^2(\varphi)$.

Рассматривая фиг. 1, 2, замечаем:

- а) $\min_{(\varphi)} \left[\min_{(k)} \theta_{1*}^2 \right]$ достигает при $\varphi = 0$, а $\max_{(\varphi)} \left[\min_{(k)} \theta_{1*}^2 \right]$ — при $\varphi = \frac{\pi}{2}$;



Фиг. 1.



Фиг. 2.

б) минимальное значение ширины области главного параметрического резонанса достигается при $\varphi = 0$, а максимальное значение — при $\varphi = \pi/2$;

в) вблизи $\varphi = \pi/2$ наблюдается бурное возрастание критических частот, а вблизи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, в достаточно большом интервале изменения φ , критические частоты изменяются незначительно. Ширина области незначительного изменения критических частот увеличивается с увеличением отношения B_{11}/B_{22} .

Таким образом, варьируя расположением главных направлений упругости, можно избежать возможности появления параметрического резонанса оболочки.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Խ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ ԵՎ Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Անիզոտրոպ փակ զլանային թաղանթի դինամիկ կայունությունը

Դիտարկված է անիզոտրոպ փակ զլանային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը ըստ ժամանակի պարբերական օրենքով փոփոխվող երկայնական ուժերի ազդեցության տակ:

Աշխատանքի հիմքում դրված է մեկ առաձգական սիմետրիայի հարթություն ունեցող ելույթից պատրաստված թաղանթների տեխնիկական տեսությունը ⁽¹⁾:

Խնդիրը բերվում է Մատերի հայտնի հավասարման ուսումնասիրմանը: Ստացված է բանաձևեր կրիտիկական հաճախականությունների որոշման համար:

Որպես մասնավոր դեպք ուսումնասիրված է օրթոտրոպ զլանային թաղանթ, որի զլանվոր ֆիզիկական և երկրաչափական ուղղությունները կազմում են որոշակի φ -անկյուն:

Ցույց է տրված, որ փոփոխելով առաձգականության զլանվոր ուղղությունների դիրքը, կարելի է խուսափել թաղանթում պարամետրական ուղղանկյուն առաջանալուց:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961. * В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956. * Г. Е. Багдасарян. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XV, № 6 (1962).

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Карапетян

Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости
 от возраста бетона к моменту загрузки

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 12/VII 1965)

В работах (1-6) автором было показано, что анизотропия оказывает большое влияние на прочность, деформативность и ползучесть бетона и зависит от многочисленных факторов

В данной работе приводятся результаты исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от одного весьма важного фактора — возраста бетона к моменту загрузки.

Опыты были поставлены над шлакобетоном. Песок и щебень были получены путем дробления вулканического шлака Лванского месторождения (г. Ереван). В качестве вяжущего был применен портландцемент Араратского завода активностью 560 кг/см^2 . Состав бетона по весу 1 : 2,38 : 3,14, В/Ц = 1,18.

Испытывались призматические образцы и восьмерки сечением 10x10 см, высотой 60 см. Образцы бетонировались в металлических горизонтальных и вертикальных формах. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на виброплощадке, при продолжительности вибрации 30 секунд.

Образцы в количестве 40 шт., из коих 20 призм и 20 восьмерок, были загружены длительной нагрузкой в возрастах 7, 14, 28 и 92 дней. В каждом случае из 20 образцов 8 загружались перпендикулярно (образцы, изготовленные в вертикальных формах), а 12 параллельно (образцы, изготовленные в горизонтальных формах) слоям укладки бетона. Одновременно на соответствующих образцах-близнецах определялись усадочные деформации.

Все образцы с момента распалубки хранились в помещении, где температура составляла $18 \pm 4^\circ\text{C}$, а относительная влажность — $68 \pm 10\%$.

В таблице приведены прочностные показатели бетона на сжатие.

Как видно из табл. 1, кубиковые прочности по испытаниям образцов перпендикулярно и параллельно слоям, как всегда, мало отличаются

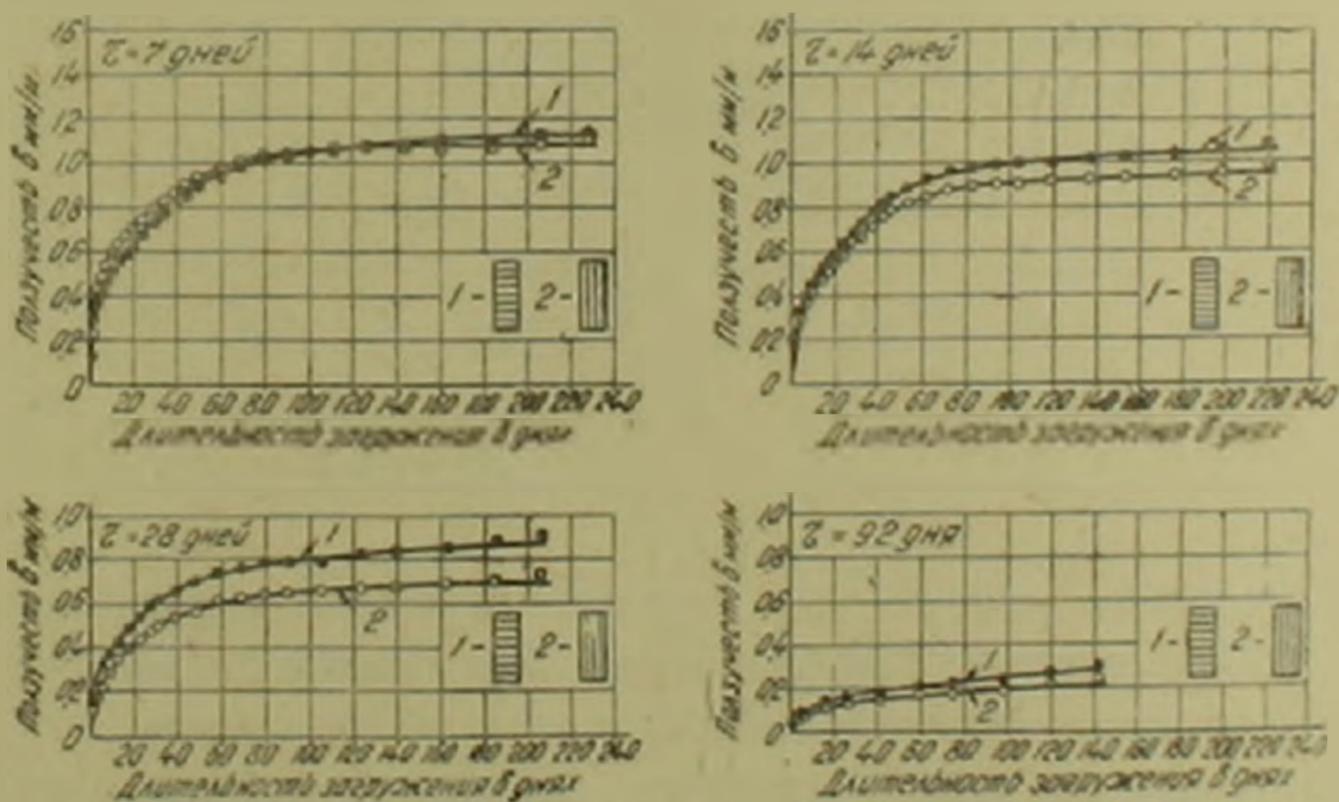
ся ($\epsilon = 0$). С другой стороны, нарастание прочности бетона во времени после месячного возраста практически отсутствует.

Таблица 1

Влияние анизотропии на кубиковую прочность бетона

| Возраст бетона в днях | Кубиковая прочность в кг/см ² , когда при испытании направление сжимающей силы по отношению к слоям бетона | | $\frac{R}{R'}$ |
|-----------------------|---|-------------|----------------|
| | перпенд. (R) | парал. (R') | |
| 7 | 102 | 97 | 0,95 |
| 28 | 150 | 151 | 0,99 |
| 92 | 162 | 151 | 0,93 |

На фиг. 1 приведены экспериментальные кривые ползучести бетона для различных возрастов (τ) загрузки. Как видно, при $\tau = 7$ дней в начальный период кривая ползучести призм, загруженных параллельно слоям, занимает положение несколько выше кривой ползучести призм, загруженных перпендикулярно слоям, а в дальнейшем, после длительности загрузки 110 дней, наоборот—ниже. Во всех остальных случаях кривые ползучести призм, загруженных перпендикулярно слоям, расположились выше. Причем с увеличением возраста бетона к моменту загрузки расходимость кривых ползучести призм, загруженных перпендикулярно и параллельно слоям, относительно увеличивается.



Фиг. 1.

На основании этих опытов можно заключить, что с увеличением возраста бетона к моменту длительного нагружения влияние анизотропии на ползучесть бетона увеличивается.

Более наглядно изменение влияния анизотропии в зависимости от возраста бетона видно из данных табл. 2.

Таблица 2

Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии в зависимости от возраста бетона к моменту длительного нагружения (τ)

| в днях | Ползучесть (при $t=14$ дней), когда направление сжимающей силы по отношению к слоям бетона | | $\frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}}$ |
|--------|---|--|---|
| | перпенд. ($\epsilon_{\perp} \times 10^3$) | парал. ($\epsilon_{\parallel} \times 10^3$) | |
| 7 | 110 | 108 | 1,02 |
| 14 | 102 | 93 | 1,10 |
| 28 | 84 | 68 | 1,23 |
| 92 | 30 | 22 | 1,36 |

В табл. 3 приведены прочностные показатели бетона при растяжении в различных возрастах.

Таблица 3

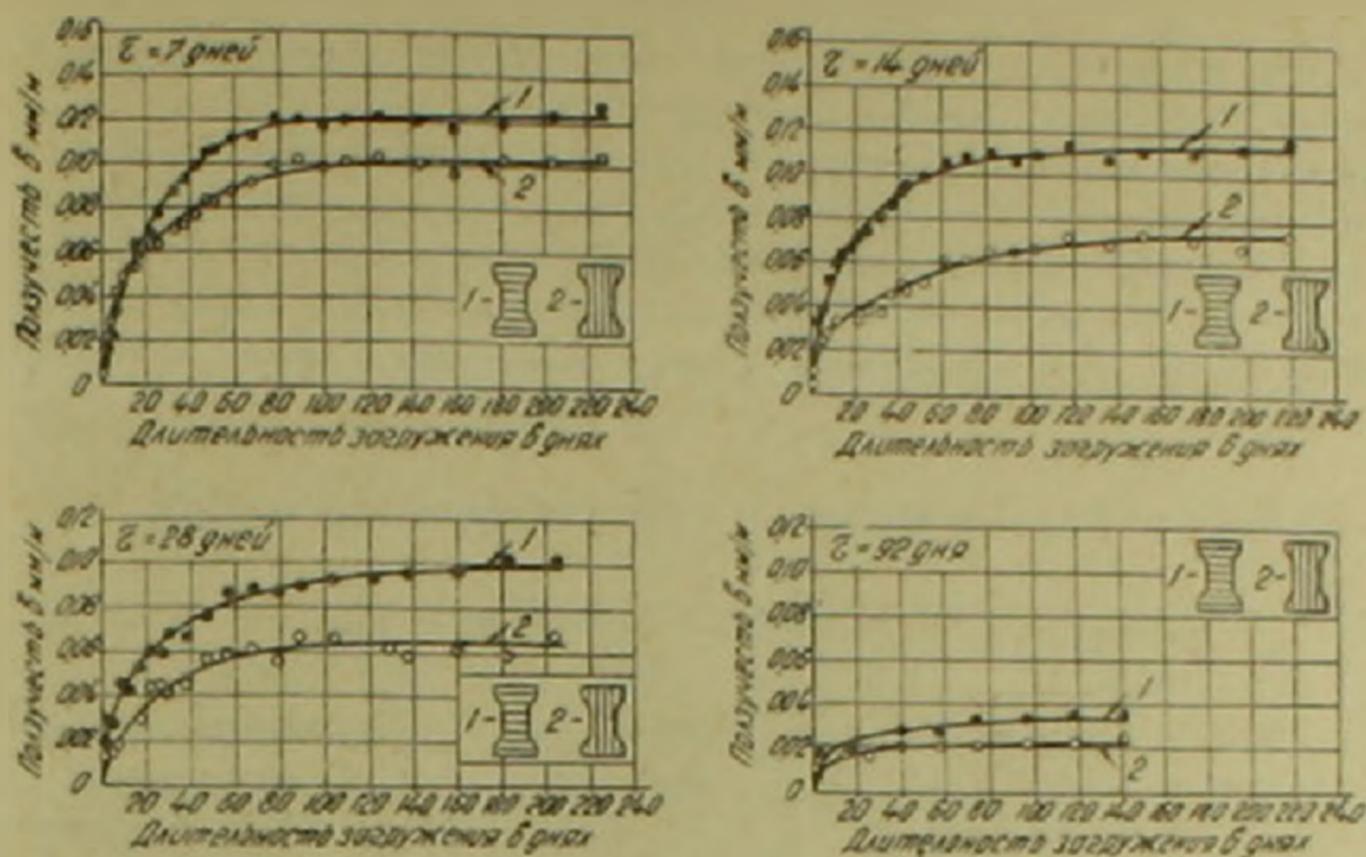
Влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении в зависимости от возраста бетона

| Возраст бетона в днях | Прочность бетона на растяже- ние в кг/см^2 , когда направле- ние растягивающей силы при испытании по отношению к слоям бетона | | $\frac{R_{\parallel}}{R_{\perp}}$ |
|-----------------------------|--|----------------------------|-----------------------------------|
| | перпенд. (R_{\perp}) | парал. (R_{\parallel}) | |
| 7 | 6,3 | 8,0 | 1,27 |
| 28 | 9,5 | 10,7 | 1,11 |
| 92 | — | 13,3 | — |

На основании данных табл. 3 прочность бетона на растяжение, как обычно, по испытаниям образцов параллельно слоям больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям ($3-4$). Однако эти данные недостаточны, чтобы судить о том, как изменяется влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении в зависимости от возраста. Ранее было установлено, что с увеличением возраста влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении увеличивается ($3-6$).

На фиг. 2 представлены кривые ползучести бетона при растяжении для различных возрастов нагружения, где при всех возрастах кривые

ползучести образцов, нагруженных перпендикулярно слоям, расположенных выше кривых ползучести образцов, нагруженных параллельно слоям.



Фиг. 2.

На основании фиг. 2 и данных табл. 4 можно сделать вывод, что с увеличением возраста бетона к моменту нагружения влияние анизотропии на ползучесть при растяжении также увеличивается.

Таблица 4

Влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении в зависимости от возраста бетона к моменту длительного нагружения (τ)

| τ в днях | Ползучесть (при $t = 140$ дней), когда направление растягивающей силы по отношению к слоям бетона | | $\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}}$ |
|------------------|--|--|---|
| | перпенд. ($\epsilon_{\perp} \times 10^3$) | парал. ($\epsilon_{\parallel} \times 10^3$) | |
| 7 | 12,2 | 10,2 | 1,19 |
| 14 | 11,2 | 7,1 | 1,57 |
| 28 | 9,7 | 6,4 | 1,52 |
| 92 | 3,3 | 2,2 | 1,50 |

Таким образом, на основании проведенных исследований можно заключить, что влияние анизотропии на ползучесть бетона как при сжатии, так и при растяжении в большей мере зависит от фактора старения бетона. С увеличением возраста бетона к моменту нагружения влияние анизотропии на ползучесть увеличивается.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

**Անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բեռնի սողի վրա՝ կախված բեռնավորումից
մոմենտում բեռնի հասակից**

Հոդվածը նվիրված է անիզոտրոպիայի ազդեցությունը բեռնի սողի վրա՝ կախված բեռնավորման մոմենտում բեռնի հասակից:

Ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ անիզոտրոպիան էապես ազդում է բեռնի ամրության, զեֆորմատիվ իատկությունների և սողի վրա ձգման և սեղմման ժամանակ: Այդ ազդեցությունը մեծապես կախված է բեռնավորման մոմենտում բեռնի հասակից: Բեռնի ծեփացման հետ մեծանում է անիզոտրոպիայի ազդեցությունը ամրության, զեֆորմատիվ իատկությունների և սողի վրա ձգման և սեղմման ժամանակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

1. К. С. Карапетян, ДАН АрмССР, т. XXIV, № 4 (1957). 2. К. С. Карапетян, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. 10, № 6 (1957). 3. К. С. Карапетян, ДАН АрмССР, т. XXXIV, № 1 (1964). 4. К. С. Карапетян, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. 17, № 4 (1964). 5. К. С. Карапетян, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), т. 18, № 2 (1965). 6. К. С. Карапетян, ДАН АрмССР, т. XI, № 4 (1965).

АСТРОНОМИЯ

Г. А. Гурзаян, чл.-корр. АН Армянской ССР

Интерпретация одной ультрафиолетовой вспышки

(Представлено 27/IV 1965)

Недавно появилось интересное сообщение Кюи (1) о том, что во время электрофотометрических наблюдений известной затменной переменной WUMaJ им была зафиксирована вспышка одной из компонент этой системы на $\lambda = 3300 \text{ \AA}$. Повышение яркости (амплитуда) при этом составляло около 10^{-5} в области спектра шириною 50 \AA (на 3300 \AA), «без соответствующего повышения яркости в интегральном визуальном свете». Последнее утверждение означает, что амплитуда яркости в фотовизуальных лучах, по-видимому, была достаточно малая и, во всяком случае, порядка 0^m1 . Максимальная яркость была достигнута примерно через две минуты с момента появления вспышки, после чего наступает сравнительно медленный спад. Общая продолжительность вспышки составляет около семи минут.

Особенность этой вспышки заключается в том, что компоненты системы WUMaJ являются звездами типа F8. Между тем обычно принято думать, что явление вспышки присуще звездам позднего типа — K, M, изредка G. Поэтому нахождение тех условий, при которых возможна ультрафиолетовая вспышка у звезд, раннее типа G, должно представлять интерес.

Согласно развитым в (2) представлениям, вспышка, или выделение непрерывной эмиссии у звезд поздних типов вызваны трансформацией инфракрасных квантов собственного фотосферического излучения звезды в кванты коротковолновой области спектра. Сама трансформация происходит в силу обратного комптон-эффекта — рассеяния инфракрасных квантов на так называемых быстрых электронах ($E \sim 10^6 \text{ эв}$), которые в свою очередь появляются над фотосферой в результате выброса внутризвездного вещества наружу. Спектр возникшей при этом непрерывной эмиссии нетепловой природы зависит от энергетического спектра быстрых электронов и теплового спектра излучения фотосферы.

В случае монохроматического потока электронов, когда все электроны имеют одинаковую энергию E , распределение энергии в непре-

рывном спектре излучения вспышки представляется следующей формулой (2):

$$I_*(\tau, \mu) = B_*(T) e^{-\tau} + \frac{\mu^2}{4\pi} \tau e^{-\tau} B_{\nu'}(T), \quad (1)$$

где $\mu = \frac{E}{mc^2}$; τ — эффективная оптическая толщина слоя, состоящего из быстрых электронов, на процессы томсоновского рассеяния, ($\tau = \tau_e N$, где $\tau_e = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, N — эффективное количество быстрых электронов, т. е. их количество в столбе с основанием 1 см^2); $B_*(T)$ и $B_{\nu'}(T)$ — планковские функции при данной эффективной температуре излучения звезды T и на частотах ν и ν' , причем во втором случае следует подставить $\nu' = \frac{\nu}{\mu^2}$.

Выражение (1) удобно написать в виде

$$I_*(\tau, \mu) = B_*(T) C_*(\tau, \mu), \quad (2)$$

где

$$C_*(\tau, \mu) = e^{-\tau} + \frac{\mu^2}{4\pi} \tau e^{-\tau} \frac{B_{\nu'}}{B_*}, \quad (3)$$

Если же дифференциальный спектр электронов представлен в виде $N_e = KE^{-\gamma}$, то в этом случае имеем, взамен (1),

$$I_x(\tau, \gamma) = B_x(T) A_x(\tau, \gamma), \quad (4)$$

где

$$A_x(\tau, \gamma) = e^{-\tau} + \delta \tau e^{-\tau} (e^x - 1) x^{-\frac{\gamma-3}{2}} \int_0^x \frac{u^{\frac{\gamma-1}{2}} du}{e^u - 1}, \quad (5)$$

В этих выражениях введены обозначения

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad (6)$$

$$\delta = \frac{\gamma-1}{8\pi} \frac{1}{\mu_m^{\gamma-1}}, \quad (7)$$

где μ_m — минимальное значение энергии электронов.

Безразмерные величины $C_*(\tau, \mu)$ и $A_x(\tau, \gamma)$ показывают во сколько раз интенсивность выходящего из среды быстрых электронов излучения, $I_*(\tau, \mu)$ или $I_x(\tau, \gamma)$, больше или меньше по сравнению с $B_*(T)$, т. е. с интенсивностью планковского излучения невозмущенной звезды на внешней границе фотосферы ($\tau = 0$) и на той же частоте.

Рост интенсивности во время максимума вспышки WUMaj составлял ~ 1.5 на $\lambda = 3300 \text{ \AA}$, т. е. около четырех раз. Это значит, что $C(\tau, \mu) = 4$ — в случае монохроматических электронов, или $A(\tau, \gamma) =$

$= 4$ — в случае немонахроматических электронов (в обоих случаях на $\lambda = 3300 \text{ \AA}$).

Как показывают конкретные вычисления, при эффективной температуре звезды типа F8, равной $T = 6200^\circ \text{K}$, не существует реальных значений μ и τ , при которых $C(\tau, \mu)$ становится равной 4. Отсюда приходится сделать вывод, что в рассматриваемом случае вспышка по крайней мере не вызвана монохроматическими электронами.

Перейдем к случаю немонахроматических электронов. Рассмотрим сперва случай $\gamma = 3$. При $T = 6200^\circ \text{K}$ и $\lambda = 3300 \text{ \AA}$ имеем из (6): $x = 7.05$. Тогда числовое значение интеграла в (5) при $\gamma = 3$ будет 2.35 (см. (2) стр. 117). Подставляя эти величины в (5), получим следующее уравнение, где неизвестными являются δ и τ :

$$e^{-\tau} + \delta \tau e^{-\tau} \cdot 2710 = 4. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $\tau \ll 1$. Поэтому найдем из (8) непосредственно $\tau \delta = 1.1 \cdot 10^{-3}$. Далее, формулы (4) и (5) тем точнее, чем μ_m ближе к единице (2). Тогда будем иметь из (7): $\delta = 0.1$ при $\gamma = 3$. Отсюда найдем для эффективной оптической толщи слоя, состоящего из быстрых электронов:

$$\tau = 0.01.$$

Таким образом, мы нашли тот спектр (γ, δ) и то эффективное количество быстрых электронов ($N = \frac{\tau}{\sigma_T} = 1.5 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2}$), при котором можно будет объяснить наблюдаемую амплитуду вспышки WUMaJ на $\lambda = 3300 \text{ \AA}$. Возникает вопрос, какова будет расчетная амплитуда этой же вспышки в фотовизуальных лучах?

Чтобы ответить на этот вопрос, сперва были вычислены с помощью (4) и (5) интенсивности излучения при вспышке, соответствующей значениям параметров $\gamma = 3$, $\delta = 0.1$ и $\tau = 0.01$, и для ряда значений длин волн. Результаты этих вычислений приведены в табл. 1 (интенсивности $B_\lambda(T)$ и $I_\lambda(\tau, \gamma)$ приведены в произвольных единицах). Затем обычными способами определены числовые значения амплитуд и показатели цвета в U, B, V системе; в последнем случае кривые относительных чувствительностей в U, B, V лучах взяты из (4) (подробности см. (2)). Таким путем была найдена, в частности, величина амплитуды вспышки в фотовизуальных лучах: она оказалась равной $\Delta m_v = 0.14$, т. е. значительно меньше, чем амплитуда на $\lambda = 3300 \text{ \AA}$, что находится в хорошем согласии с наблюдениями. При $\gamma = 5$ фотовизуальная амплитуда получается несколько больше, а при $\gamma = 2$ — меньше приведенной величины. Следует полагать, поэтому, что значение $\gamma = 3$ недалеко от истины.

Таким образом, в данном случае мы получили совпадение теоретического спектра вспышки с ее наблюдательным спектром. Очевидно, это обстоятельство может служить убедительным доказательством того, что

Таблица 1

Теоретический спектр $I_{\lambda}(\tau, \gamma)$ вспышки звезды типа F B ($T = 1200^{\circ}\text{K}$) при $\gamma = 3$, $\delta = 0.1$ и $\tau = 0.01$ (B_{λ} есть невозмущенный спектр звезды)

| λ , Å | B_{λ} | $A_{\lambda}(\tau, \gamma)$ | $I_{\lambda}(\tau, \gamma)$ |
|---------------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 3000 | 2.21 | 7.12 | 15.5 |
| 3300 | 2.81 | 4.00 | 11.2 |
| 4000 | 3.67 | 1.82 | 6.70 |
| 5000 | 3.84 | 1.25 | 4.81 |
| 6000 | 3.41 | 1.098 | 3.75 |
| 7000 | 2.83 | 1.046 | 2.98 |

концепция трансформации инфракрасных квантов с помощью быстрых электронов верна, и она может объяснить явление вспышки или выделения непрерывной эмиссии у поздних типов звезд.

Проведенный выше анализ вспышки WUMaJ показывает, вместе с тем, что даже при достаточно малых значениях оптической толщи среды ($\tau \ll 1$), состоящей из быстрых электронов, ультрафиолетовая амплитуда достигает значительных величин, в то время как в фотовизуальных лучах вспышка может оказаться почти незаметной. Еще сильнее выступает этот контраст у звезд поздних типов. В качестве примера в табл. 2 приведены результаты аналогичных расчетов для звезды типа M5 ($T = 2800^{\circ}\text{K}$), когда трансформация инфракрасных квантов осуществляется монохроматическими электронами, а эффективная оптическая толщина слоя, состоящая из таких электронов, равна $\tau = 0.01$. На фиг. 1 приведены кривые распределения интенсивности в спектре вспышки (тонкие линии) для ряда значений μ^2 .

Таблица 2

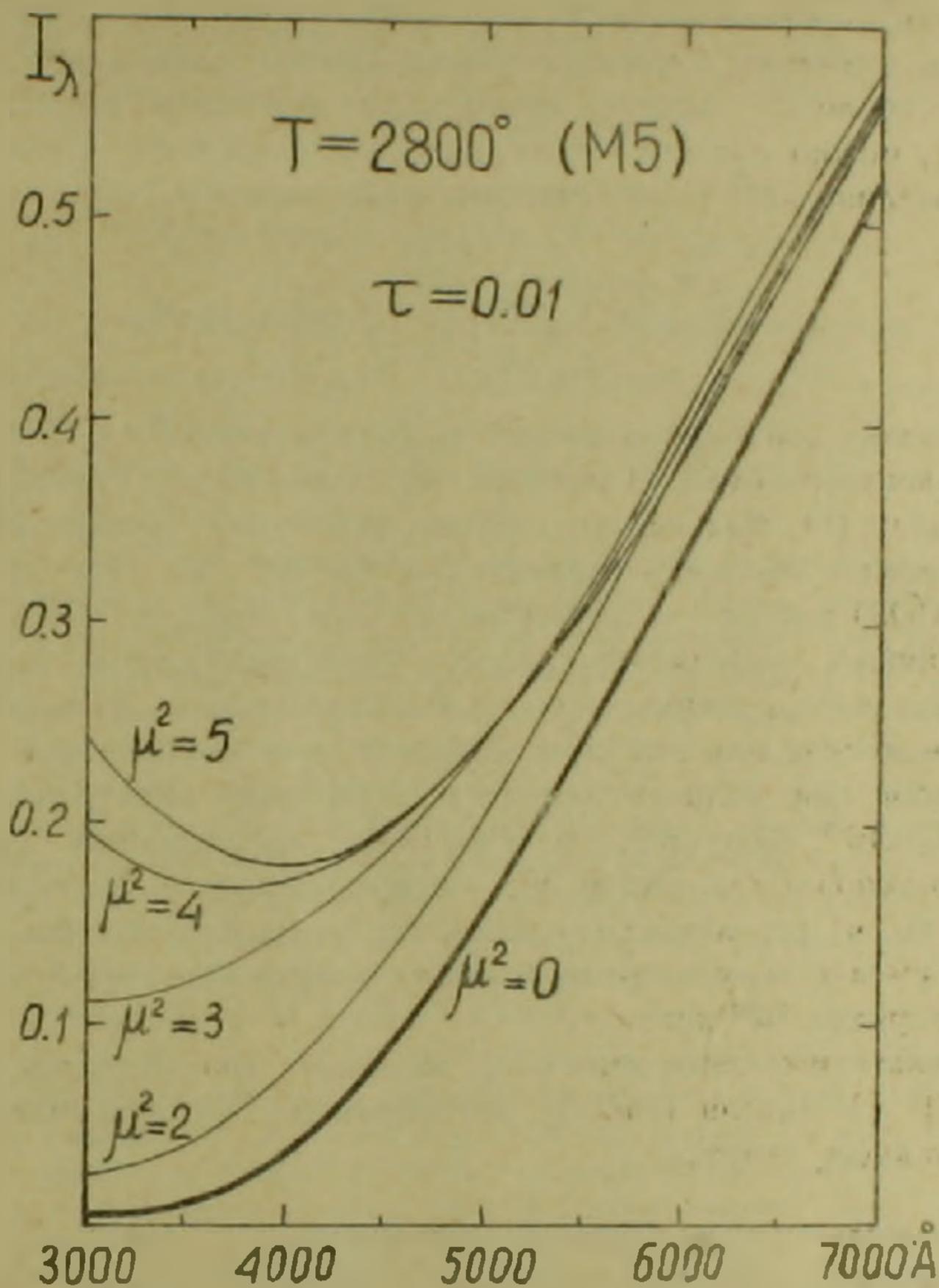
Теоретические показатели цвета и амплитуды при вспышке звезды M5 ($T = 2800^{\circ}\text{K}$), когда $\tau = 0.01$

| μ^2 | $B - V$ | $U - B$ | Δm_V | Δm_B | Δm_U |
|---------|---------|---------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | +1.80 | +1.14 | — | — | — |
| 2 | +1.48 | +0.29 | 0.27 | 0.50 | 1.36 |
| 3 | +1.20 | -0.45 | 0.28 | 0.89 | 2.50 |
| 4 | +1.09 | -0.74 | 0.28 | 1.00 | 2.85 |
| 5 | +1.06 | -0.86 | 0.25 | 0.98 | 3.00 |
| 10 | +1.50 | -0.27 | 0.07 | 0.38 | 1.78 |
| 20 | +1.44 | -0.08 | 0.05 | 0.30 | 1.50 |

Из данных табл. 2 следует также, что при некоторых сильных вспышках в ультрафиолете они могут оказаться почти незаметными в фотови-

зуальных лучах. Поэтому наблюдения, целью которых является обнаружение вспышек, следует вести прежде всего в ультрафиолетовых лучах; в этом случае резко увеличится вероятность обнаружения вспышек.

В (2) было констатировано два типа вспышек у звезд. В первом случае все быстрые электроны задерживаются над фотосферой, а процесс



Фиг. 1. Теоретические спектры вспышки (тонкие линии) звезды типа М5 ($T = 2800^\circ \text{K}$) при $\tau = 0.01$. Сплошной линией приведено планковское распределение энергии в спектре невозмущенной звезды М5 (т. е. при $\mu = 0$ и $\tau = 0$).

выделения непрерывной эмиссии продолжается очень долго—несколько месяцев. Такие вспышки наблюдаются у звезд типа Т Тельца.

Второй тип вспышек связан с немедленным уходом быстрых электронов из атмосферы звезды; в этом случае имеет место быстрое расширение или разлет оболочки, состоящей из быстрых электронов. Этот тип вспышек, по-видимому, имеет место у звезд типа UV Кита—продолжительность вспышки в этом случае измеряется минутами.

Описанная выше вспышка WUMa), которая имела место 26 апреля 1964 г., безусловно принадлежит ко второму типу. Воспользуясь приведенной в (1) кривой изменения яркости вспышки по времени, можно попытаться оценить скорость расширения электронной оболочки. В самом деле, имеем из (4) и (5) $I_1(t) \sim (1 - e^{-\tau}) \sim \tau(t) \sim v(t) \cdot t \cdot n(t)$, где $v(t)$ и $n(t)$ — средняя скорость расширения и средняя концентрация электронов в момент t соответственно. Имея в виду, что на $t_0 \approx \approx 120$ сек оболочка достигла наибольшей оптической толщи, равной $\tau_{\max} = 0.01$, можно вывести следующее приблизительное соотношение для определения $\tau(t)$ в послемаксимумный период $t > t_0$:

$$\tau(t) = \frac{\tau_{\max}}{\frac{1}{3} \left(\frac{vt}{R} \right)^2 + \frac{vt}{R} + 1} \quad (9)$$

где R — радиус оболочки в момент t_0 (для моментов $t < t_0$ это соотношение неприменимо). Пользуясь наблюдательной кривой $I_1(t)$ и соотношением (9), был оценен порядок величины скорости расширения электронной оболочки (приняв $R \approx 8.5 \cdot 10^{10}$ см): она оказалась порядка 15000 км/сек — в начале вспышки и порядка 6000 км/сек — в конце, причем уменьшение скорости происходит неравномерно.

Оценим массу, выброшенную звездой во время этой вспышки. В предположении, что вспышка охватила всю поверхность звезды, будем иметь для полного количества быстрых электронов $N_0 = 4\pi R^2 \cdot N \approx 10^{46}$. Допустив, что вспышка сопровождается также выбросом протонов в количестве N_0 , найдем для полной массы, потерянной звездой в результате вспышки, около $10^{-14} \odot$. Полная энергия вспышки, имея в виду энергию быстрых электронов ($\sim 10^8$ эв), оценивается порядка 10^{39} эрг.

В заключение приводим сводку основных характеристик вспышки WUMa) (26 апреля 1964 г.), интерпретации которой была посвящена настоящая заметка.

| | |
|---|------------------------------------|
| Показатель спектра быстрых электронов | $\gamma = 3$ |
| Параметр | $\delta = 0.1$ |
| Эффективная оптическая толщина слоя из быстрых электронов | $\tau = 0.01$ |
| Эффективное количество быстрых электронов | $N = 1.5 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$ |
| Амплитуда вспышки: | |
| в фотовизуальных лучах | $\Delta m_V = 0.14$ |
| в фотографических лучах | $\Delta m_B = 0.45$ |
| в ультрафиолетовых лучах | $\Delta m_U = 1.27$ |
| на λ 3300 Å | $\Delta m_{3300} = 1.5$ |
| Показатель цвета в U, B, V системе: | |
| | $B - V = + 0^m 18$ |
| | $U - B = - 1^m 40$ |

| | |
|---|------------------------|
| Скорость расширения электронной оболочки: | |
| в начале вспышки | ~ 15000 км/сек |
| в конце вспышки | ~ 6000 км/сек |
| Масса, выброшенная при вспышке | ~ $10^{-14} M_{\odot}$ |
| Полная энергия вспышки (энергия выброшенных электронов) | ~ 10^{20} эрг |

Филиал Бюраканской астрофизической обсерватории
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԳՈՒՐԶԱԴՅԱՆ, Հայկական ՍՍԻՒ ԳԱ քղրակիր-տեղում

Կարճալի՜ բոնկման մի գեղեցի մեկնաբանություն

Վերջերս երևաց մի հետաքրքիր հաղորդում՝ WUMaj հայանի ստազայությունի բռնկման մասին՝ մոտ $1^{m}5$ ամպլիտուդայով, որն արձանագրվել է 3300 λ ալիքի մի նեղ համաժողովում⁽¹⁾: Սպեկտրի տեսանելի մասում բռնկման մեծությունը եղել է աննշան, համաձայնորեն 0^m 1:

Նիշյալ գեղեցի արտառոցությունը կայանում է նրանում, որ WUMaj գույզի անգամները իրենցից ներկայացնում են FX տիպի ստազեր, մինչդեռ ընդունված է կարծել, որ բռնկման երևույթը հատուկ է միայն հետին տիպի ստազերին (K-M, երբեմն G):

Ներկա աշխատանքը նվիրված է այս բռնկման մեկնաբանությունը ծլակետ է ընդունված հեղինակի կողմից մշակված տեսությունը⁽²⁾, որի համաձայն ստազերի բռնկումները կամ նրանցում անընդհատ էներգիայի առաքման երևույթը հարուցվում է այդ ստազերի յուսույորդային երկարալիք հոսազայթման անգաչարժով գեղի սպեկտրի կարճալիք մասը: Տեղաչարժումը կատարվում է հակասակ-Պոմսոնյան էֆեկտի շնորհիվ, այսինքն երբ ինֆրակարմիր թվանունները ցվրվում են այսպես կոչված արագ էլեկտրոնների միջոցով ($E \sim 10^6$ էվ), ապա էլեկտրոնի էներգիան, հաղորդվելով երկարալիք թվանուն, մեծացնում է վերջինիս էներգիան, գարձնելով նրան կարճալիք: Իրենք՝ էլեկտրոնները հայանվում են վերլուսույորդային շերտերում ներաստազային նյութի արտավիժման հետևանքով:

Հաշվումների էությունը կայանում է հետևյալում: Ծլնելով գիտված բռնկման ամպլիտուդայի մեծությունից՝ $m(3300) \approx 1^{m}5$ և ստազի ստազայթման ջերմաստիճանից՝ $T = 6200^\circ$, խնդիր է դրվում որոշել էլեկտրոնների սպեկտրը և նրանց էֆեկտիվ թանկությունը: Ստացվել է $\gamma = 3$, $\delta = 0,1$ և $\epsilon = 0,01$ (տես բանաձև (4) և (5)):

Այս սվյալներով որոշվում է բռնկման հաշվային ամպլիտուդան՝ սպեկտրի տեսանելի մասի համար, այն ստացվել է $\Delta m_V \approx 0,16$ ՝ մոտ այնքան, որքան եղել է իրականում:

Վերջում բերվում են WUMaj բռնկման հիմնական ֆիզիկական մեծությունները, որոնք որոշվել են տեսականորեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. В. Кюи, PASP, 76, 430, 1964. ² Г. А. Гурзоян, Астрофизика, 3, 1965.
³ Г. А. Гурзоян, Планетарные туманности, М., 1962. ⁴ Х. Л. Джонсон, В. В. Морган, Ap. J., 117, 313, 1953.

С. Н. Авакян и Р. А. Карапетян

Комплексные соединения сульфатов марганца и меди
 с 2-хлорбутеном-2

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. М. Тараян 26/V 1965)

Исследование комплексных соединений переходных элементов с насыщенными лигандами все еще не получило достаточно широкого распространения, хотя первые работы (1-3), проведенные в этом направлении, показали, что они могут иметь как теоретическое, так и практическое значение.

Ранее нами был синтезирован ряд комплексных соединений переходных элементов с полидентатными, диеновыми (4), аминоацетиленовыми (5) и аминокалленовыми (6-7) лигандами. Было установлено, что в случае диенов координация происходит за счет двух двойных связей, а в остальных случаях — кратной и аминной связи органического лиганда.

Большой интерес представляют также и смешанные амьно-олефиновые соединения сульфатов переходных элементов, так как при получении смешанных соединений устойчивость связи олефина с центральным элементом по сравнению с однородными соединениями сильно изменяется.

До настоящего времени не были получены комплексные соединения сульфатов переходных элементов с 2-хлорбутеном-2.

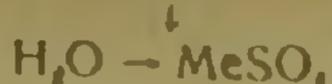
Поэтому целью настоящей работы являлось получение и исследование координационных соединений сульфатов двухвалентных марганца и меди, в состав которых входят олефиновые и олефин-аминовые лиганды.

Оказалось, что при взаимодействии безводных сульфатов марганца и меди с 2-хлорбутеном-2 получаются:



(I) Me = Mn; (II) Me = Cu.

После высушивания на воздухе I и II вещества поглощают воду и превращаются в



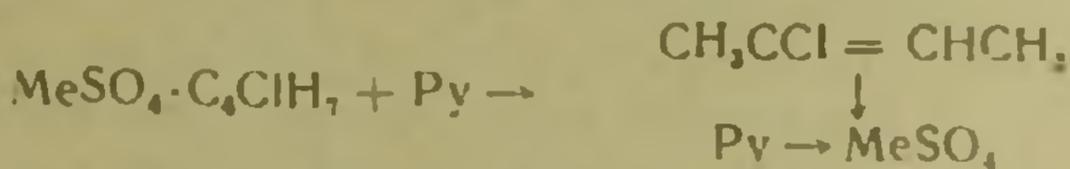
(III) Me = Mn, (IV) Me = Cu.

Полученные соединения в обычных условиях достаточно устойчивы. Плохо растворимы в бензоле, ацетоне, CCl_4 , практически нерастворимы в н-гептане. В воде растворяются с разложением, поэтому I и II получают при взаимодействии олефина с безводными солями. Из состава полученных соединений видно, что каждый центральный атом присоединяет не более одной молекулы олефина.

При нагревании комплексные соединения разлагаются, не доходя до точки плавления.

Синтезированные таким образом соединения являлись исходными веществами для получения смешанных амино-олефиновых соединений.

Реакцию образования смешанных соединений можно выразить следующим уравнением:



(V) Me = Mn, (VI) Me = Cu.

Анализы и физические константы полученных соединений приведены в табл. 1.

V и VI — соединения в обычных условиях устойчивые. Они плохо растворимы в эфире, ацетоне, CCl_4 , практически не растворимы в н-гептане.

При нагревании на воздухе V и VI разлагаются на исходные компоненты в твердом состоянии, причем сначала отщепляются и уда-

Таблица 1

| Соединение | Уд. вес. в г/см ³ | Мол. объем в см ³ | Найдено % | | | | Вычислено % | | | |
|--|------------------------------|------------------------------|-----------|-----------------|-------|-------|-------------|-----------------|-------|---|
| | | | Me | SO ₄ | C | N | Me | SO ₄ | C | N |
| MnSO ₄ · C ₄ H ₇ | 1,79 | 134,91 | 23,05 | 39,67 | 19,48 | 22,74 | 39,79 | 19,90 | | |
| CuSO ₄ · C ₄ H ₇ | 2,02 | 123,84 | 25,16 | 38,13 | 19,05 | 25,40 | 38,42 | 19,20 | | |
| H ₂ O · MnSO ₄ · C ₄ H ₇ | 1,63 | 159,24 | 21,43 | 37,42 | 18,68 | 21,20 | 37,01 | 18,51 | | |
| H ₂ O · CuSO ₄ · C ₄ H ₇ | 1,82 | 147,31 | 23,48 | 35,97 | 17,68 | 23,69 | 35,82 | 17,91 | | |
| Py · MnSO ₄ · C ₄ H ₇ | 1,44 | 222,69 | 17,36 | 30,33 | 33,27 | 3,95 | 17,08 | 30,00 | 33,71 | |
| Py · CuSO ₄ · C ₄ H ₇ | 1,48 | 222,43 | 19,02 | 29,42 | 32,07 | 4,02 | 19,29 | 29,18 | 32,81 | |

ляется пиридин, а затем олефин. Следовательно, в соединениях V и VI связь олефина с центральными атомами прочнее, чем в пиридине.

Из состава полученного смешанного пиридинового соединения видно, что каждая молекула I, II, III, IV присоединяет еще одну молекулу пиридина, причем пиридин из комплексных соединений III, IV вытесняет молекулы воды. Однако, несмотря на то, что при получении смешанных соединений пиридин всегда добавляется с большим избытком, вытеснение олефина пиридином не наблюдалось.

Исследования свойств полученных соединений приводят к выводу, что смешанные комплексы обладают повышенной устойчивостью по сравнению с исходными однородными соединениями.

Ереванский государственный
университет

Ու. Ն. ԱՎԱԿՅԱՆ, ԵՎ Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Միանգամի և պղինձի սուլֆատների կոմպլեքսային միացությունները
2-հյուրուհին-2-ի հետ

Ինչպես հայտնի է գրականությունից դեռևս չեն նկարագրված մանգանի և պղնձի սուլֆատների պիրիդին-ուիմիդատային կոմպլեքսային միացությունները: Մենք սինթեզել ենք $MnSO_4 \cdot C_4ClH_7$, $CuSO_4 \cdot C_4ClH_7$, $H_2O \cdot MnSO_4 \cdot C_4ClH_7$, $H_2O \cdot CuSO_4 \cdot C_4ClH_7$, $Pu \cdot MnSO_4 \cdot C_4ClH_7$, $Pu \cdot CuSO_4 \cdot C_4ClH_7$:

Որոշված սինթեզված նյութերի բյուրեղների խառնուրդը, հաշված է նրանց մոլյար ծավալը: Բերմիկ ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ բոլոր միացություններն էլ ցայտայվում են առանց հալվելու, խառը միացություններից սկզբում պոկվում է պիրիդինի մոլեկուլան ապա օրգանական իզոանիդը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Վ Ա Ն Ա Ր Ի Յ ՈՒ Ն

- ¹ А. Д. Гельман. Комплексные соединения платины с ненасыщенными молекулами, М., 1945. ² U. Ramm, J Chem Soc., (1949) 3340. ³ P. Keller, Chem. Rev., 28, 229 (1941). ⁴ С. Н. Авакян, Р. А. Карпетян, «Известия АН АрмССР», ХН, 1-18, № 2, 112 (1965). ⁵ С. Н. Авакян, Р. А. Захарян, ЖОХ, 33, 10, 3366 (1963). ⁶ С. Н. Авакян, Р. С. Агабекян, А. В. Мушегян, ДАН АрмССР, 40, 107 (1965). ⁷ С. Н. Авакян, Р. А. Карпетян, Журнал неорганич. химии, 9, 1803 (1964).

А. К. Искандарян

Идентификация зеленых железосодержащих гемовых пигментов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 25/III 1965)

В предыдущей работе (1) было установлено, что раствор зеленого пигмента, содержащий 6,3% окисленных ионов двухвалентного железа восстановленного гема (или обесцвеченного гема), имеет резко выраженный максимум поглощения при 625 мк, а при содержании 10,5% этих ионов — при 640 мк. Данные спектрального анализа показали, что в этих пигментах железо связано с их порфириновым кольцом. Эти данные, а также данные по содержанию в них окисного железа, в свою очередь, позволяют предположить, что при малом количестве трехвалентного железа в зеленых пигментах их максимумы поглощения в красной части видимой области спектра смещаются в сторону коротких волн, а при большом количестве — в сторону длинных волн. Это предположение, по-видимому, в одинаковой мере относится и к другим (2-13) железосодержащим зеленым гемовым пигментам, имеющим резко выраженные максимумы поглощения в интервале волн 610—650 мк.

Если это так, то приведенные данные показывают, что эти пигменты отличаются друг от друга по содержанию в них трехвалентного железа. В табл. 1 даются перечень и способы получения этих пигментов с указанием их максимумов поглощения в области соответствующих длин волн.

Как видно из таблицы, для получения зеленых пигментов все авторы (1,5-13) применяли обычные восстановители окисного железа.

Однако одни называли получаемые пигменты «вердоглобином», другие — «сульфгемоглобином», а третьи — «холеглобином». Тем самым они старались подчеркнуть, что в каждом отдельном случае получают пигменты, якобы существенно отличающиеся друг от друга. Между тем, зеленый пигмент, имеющий максимум поглощения при 625 мк, получали (1, 6, 12) при действии на гемовый пигмент гидроксилламином, сероводородом и селеноводородом; пигмент (5, 7, 10, 13) с максимумом поглощения при 620—618 мк при воздействии сероводородом, гидросульфитом и мышьяковистым водородом; зеленый пигмент (15) с максимумом поглощения при 640 мк под действием гидроксилламина, гипосуль-

фита и аскорбиновой кислоты. В остальных случаях (в. у. ¹¹) максимумы поглощения зеленых пигментов очень близки к перечисленным.

Все это показывает, что приведенные в табл. I зеленые пигменты, хотя они и носят различные названия, по существу представляют одни и те же продукты. Для подтверждения этого в настоящей работе была поставлена задача выяснить влияние концентрации трехвалентных ионов железа в зеленых гемовых пигментах на смещение их максимумов поглощения в интервале воли 610—650 мк, что представляет интерес для составления рекомендаций по предупреждению зеленой пигментации просаливаемого мяса и предотвращения необратимых окислительных

Таблица I

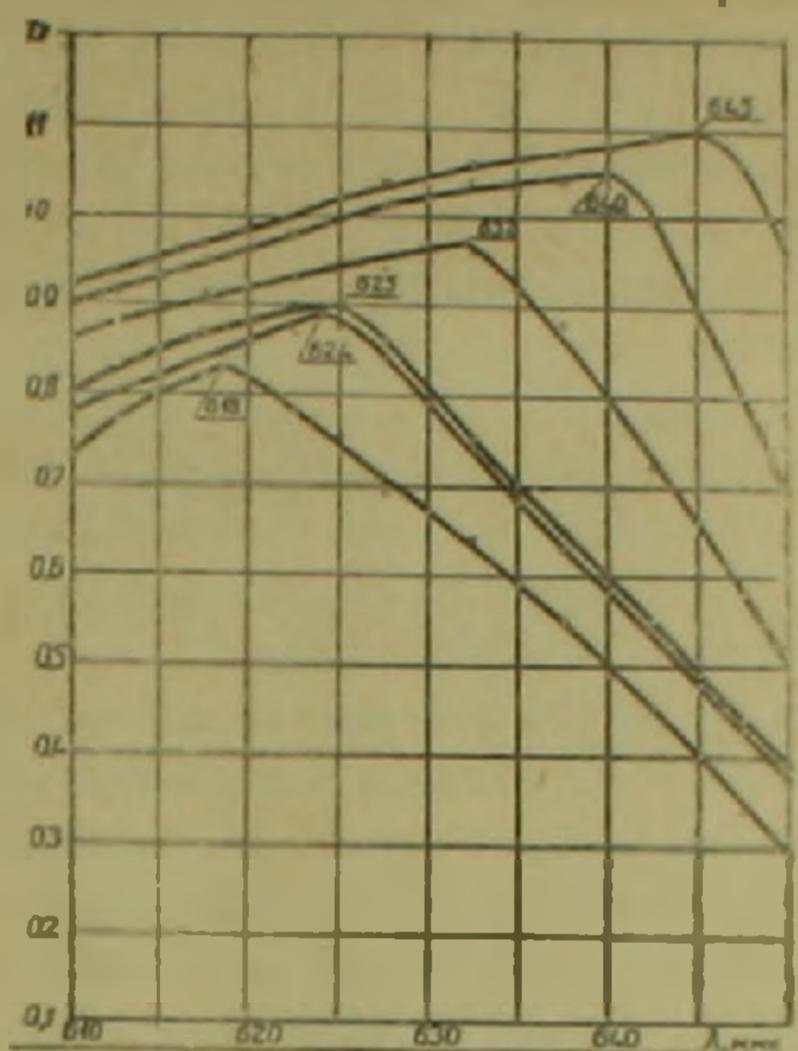
Образование зеленых гемовых пигментов *in vitro*

| Реактив (избыток) + кислород | Объект исследования | Максимум поглощения в области длин волн 610—650 мк | Название пигмента | Авторы |
|------------------------------------|---------------------|--|-------------------|--|
| Гидроксиламин | Метмиоглобин | 625 | — | А. Искандарян (собств. исслед.) (¹) |
| Гипосульфит | · | 640 | — | · |
| Аскорбиновая к-та | · | 640 | Вердоглобин | М. Кизе, Х. Каяске (обзор) (²) |
| Сероводород | · | 620 | · | · |
| Гидросульфит | · | 618 | · | Н. Глиден и др. (собств. исследов.) (³) |
| Сероводород | · | 618 | Сульфгемоглобин | · |
| · | · | 625 | · | · |
| · | Гемоглобин | 618 | · | Д. Кейлин (собств. исслед.) (⁷) |
| · | · | 617 | · | Ф. Гауровиц (собств. исслед.) (⁸) |
| · | · | 624 | · | Г. Баркан, О. Щалыц (собств. исслед.) (⁹) |
| · | · | 632 | · | · |
| · | Нитрогемоглобин | 620 | · | В. Соловьев, Н. Шинкина (обзор) (¹⁰) |
| · | Гемоглобин | 617—623 | · | Р. Лемберг, Ю. Легге (обзор) (¹¹) |
| Аскорбиновая к-та | · | 629 | Холеглобин | Р. Лемберг, Ю. Легге (собств. исслед.) (¹¹) |
| Селеноводород | Метгемоглобин | 625 | Вердоглобин | Г. Бакашак, Ф. Юнг (собств. исслед.) (¹²) |
| Мышьяковистый водород | · | 620 | · | М. Кизе (собств. исслед.) (¹³) |

превращений порфиринового кольца пигментов мышечной ткани и крови.

Опыты для получения зеленых пигментов из метмиоглобина (под действием гидроксиламина) проводили на шестые, девятые и двенадцатые сутки (¹⁴). Метмиоглобин получали из сердечных мышц быка ранее описанным методом (¹⁵). После трехкратной перекристаллизации серно-кислым аммонием его сушили (¹⁶).

Наряду с указанными опытами поставили также опыты получения зеленых пигментов из этого же метмиоглобина с применением сероводорода и кислорода (9). Приготовление растворов метмиоглобина для этих анализов производили по ранее принятому способу (14). Но в этом случае вместо гидроксиламина добавляли дистиллированную воду. Затем



Фиг. 1. Спектральные кривые зеленых железосодержащих гемовых пигментов (D — оптическая плотность; λ — длина волны).

для обесцвечивания растворов через них пропускали поток сероводорода, а далее — кислород с такой продолжительностью, чтобы образовались зеленоватые, зеленые и темно-зеленые пигменты. Все растворы осветляли центрифугированием. Концентрации ионов трехвалентного железа в зеленых пигментах определяли по разработанному нами методу (14). Спектрофотометрирование полученных зеленых растворов производили на СФ-4 (фиг. 1). Длина кюветы 10 мм. Данные анализов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Влияние концентрации трехвалентного железа в зеленых гемовых пигментах на смещение их максимумов поглощения при длине волн 610—650 м.мк

| Реактив (избыток) | Объект исследования | Максимум поглощения в м.мк | Fe ³⁺ п. % | Окраска пигмента |
|-------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------|------------------|
| Сероводород | Метмиоглобин | 625 | 6,3 | Зеленая |
| | | 632 | 8,1 | Темно-зеленая |
| | | 640 | 10,3 | Зеленоватая |
| | | 618 | 4,7 | Зеленая |
| | | 645 | 11,6 | Темно-зеленая |

Как видно из таблицы, с увеличением концентрации трехвалентного железа в зеленых гемовых пигментах их максимумы поглощения смещаются в сторону длинных волн и, наоборот, с уменьшением количества этих ионов — в сторону коротких волн. Из фиг. 1 и табл. 2 видно, что эти смещения происходят при длине волны 618—645 мк. Данные табл. 1 указывают на то, что эти интервалы охватывают максимумы поглощения почти всех известных (1-15) зеленых железосодержащих гемовых пигментов, полученных из мышечной ткани и крови. Эти данные, а также данные табл. 2 показывают, что эти пигменты отличаются друг от друга по содержанию в них трехвалентного железа. Другими словами, зеленые железосодержащие гемовые пигменты отличаются друг от друга степенью окисления двухвалентного железа восстановленного гема.

Выводы 1. С увеличением концентрации трехвалентного железа в зеленых гемовых пигментах их максимумы поглощения смещаются в сторону длинных волн, и, наоборот, с уменьшением количества этих ионов они смещаются в сторону коротких волн.

2. Зеленые железосодержащие гемовые пигменты, полученные из мышечной ткани и крови, по существу представляют одни и те же продукты. При этом они отличаются друг от друга степенью окисления двухвалентного железа восстановленного гема.

Выражаю глубокую благодарность за ценные указания заведующему кафедрой аналитической химии Московского института стали и сплавов А. М. Дымову.

Всесоюзный научно-исследовательский институт мясной промышленности

И. Ч. БОЧАНЦЕВИЧ

Երկաթ պարունակող կանաչ հեմային պիգմենտների լոգեոֆթիկացրան

Երկաթ պարունակող կանաչ հեմային պիգմենտները ստացվում են երանց եռվային երկաթի վերականգնման միջոցով: Իր կանաչ պիգմենտը կոչվում է «Վերդոզուրին», մյուսը՝ «Սուֆգեմոզուրին», իսկ երրորդը՝ «նուկզուրին»: Այսպիսով բնորոշվում է, որ այդ պիգմենտները հիմնովին տարբերվում են միմյանցից:

Այս աշխատանքում ցույց է տրված, որ երկաթ պարունակող հեմային պիգմենտները, որոնք ստացվել են մկանային հյուսվածքից և արյունից, ըստ էության հանդիսանում են նույն միացությունները: Երանք իրարից տարբերվում են վերականգնված հեմում օքսիդացած երկաթի բանակությամբ:

ЛИТЕРАТУРА Ф Р Ц Ч Ц Ы П Ъ Р Ѕ П Ъ Ы

1. А. К. Исхандарян, Тезисы докл. I Всесоюзный биохимический съезд (симпозиумы I—XV), вып. I, 199, Изд. АН СССР, М.—Л., 1963. 2. Ф. Гауровиц, Химия и биология белков, 228, Изд. ин. лит., М., 1953. 3. Б. Вомтс, Advances Food Res., 5, 1, 1954. 4. С. Заточил, Fleischwirt., 15, 798, 1963. 5. М. Кизе и Х. Каяске, Biochem. Z., 312, 9, 1942. 6. М. Глиден, М. Мэнгл, К. Сингелтон и М. Стоун, Food Res., 25, 127, 1960. 7. Д. Кейлин, Proc. Roy. Soc., 113, 393, 1933. 8. Ф. Гауровиц, Z. Physiol. Chem., Bd. 151, s. 130, 1926. 9. Г. Баркан, О. Шальц, Z. Physiol. Chem. 254, 241, 1938. 10. В. И. Соловьев и Н. Н. Шишкина, Пигменты мяса, 32, Рефераты и обзоры иностранной технической литературы, вып. 7, М., 1957. 11. R. Lemberg a J. Legge, Hematin Compounds and Bile Pigments, 490, New York, 1949. 12. Г. Бакашак, Ф. Юнг, Biochem. z., 327, 515, 1956. 13. М. Кизе, Archiv. Exper. Path. u. Phar., 204, 385, 1947. 14. А. К. Исхандарян, Пищевая промышленность (мясная и птицеперерабатывающая), № 6, 10, 1964. 15. К. Кендрю и Р. Перриш, Proc. Roy. Soc. (London) A., 238, 306, 1957. 16. А. К. Исхандарян, Тр. ВНИИМПа, вып. 11, 139, 1962.

БИОХИМИЯ РАСТЕНИИ

С. Я. Золотницкая, Г. О. Акопян и В. Д. Райсин

Витамин Е из герани

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. О. Казаряном 10 IV 1965)

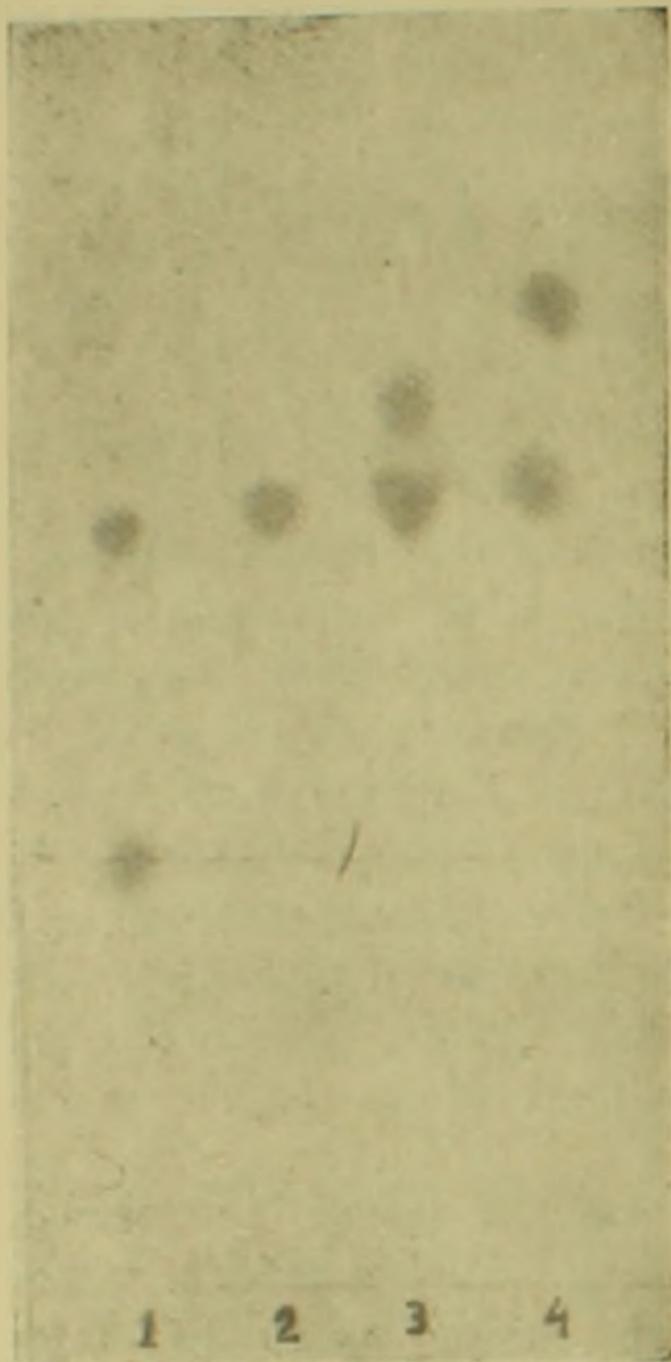
При выяснении возможностей комплексного использования герани, в отходах после отгона эфирного масла были обнаружены липиды, предположительно токоферолы (1). Содержание липидов, установленное железо-дипиридиловым методом, колебалось от 80 до 60 мг% на воздушно-сухой вес материала. Группа так называемых «не- α -токоферолов», определенная по Скуди и Бушу (2), составляла от 50 до 30% суммы, причем отмечалось повышение удельного веса фракции в процессе хранения материала до переработки (в течение 3—4 месяцев). Таким образом, на долю наиболее ценной фракции α -токоферола приходится около 70—50% соответственно, т. е. от 50 до 30 мг%.

Содержание и превалирование в сумме вещества, аналогичного по свойствам α -токоферолу, подтверждается хроматографией липида. Значение R_f наиболее крупного по размеру «пятна» в системе ацетон—вода (80:20) на бумаге, обработанной вазелиновым маслом, равно 0,30, что совпадает с величиной «пятен» α -токоферола из препарата «Токофарм», выпускаемого предприятием «Фармазан» (ГДР, Галле (3), отечественного препарата витамина Е Одесского химфармзавода и синтетического α -токоферола (фиг. 1). Все четыре пятна α -токоферола не окрашиваются диазотированным о-дианизидином.

При тонкослойной хроматографии на закрепленной гилсом окиси алюминия с растворителем бензолом также обнаруживается (при проявлении фосфорномолибденовой кислотой с последующим подогреванием в течение нескольких минут при $T=100^\circ$) наличие синего пятна со значением R_f 0,56, что совпадает с величиной R_f свидетеля. Отчетливо отделяются «пятна» и не- α -токоферолов.

Наличие α -токоферола в отходах переработки герани подтверждается также биологическим методом. В эксперименте был использован способ Кристенсена, который широко применяется в последние годы для оценки токоферолов и успешно заменяет тест на стерильность (3—6).

Метод основан на специфической способности α -токоферола, введенного внутрь или „in vitro“, предотвращать вызываемый самоокисляющимися веществами гемолиз крови животных, недостаточных по витамину Е. Определение биологической активности липида проводилось на белых крысах-самках со средним весом 120—140 г содержащихся на Е-авитаминозной диете в течение 15 дней. В состав рациона входили: сахар (70 единиц), обезжиренный творог (20 единиц), топленое сало (6 единиц) и смесь солей (3 единицы), а также витамины А, В₁, В₂, В₆, РР, кальций пантотенат и аскорбиновая кислота. Компоненты диеты предварительно были исследованы и дали отрицательную реакцию на витамин Е.



Фиг. 1. Хроматограмма α -токоферолов (на бумаге). 1—синтетический α -токоферол; 2—липид из отходов герани; 3—витамин Е (Одесса); 4—витамин Е (ГДР).

Липиды извлекались из отходов переработки герани бензолом и очищались от пигментов на колонках с диатомитом, по Б. Г. Савинову и Г. М. Лушевской (7). После отгона растворителя под вакуумом липид растворялся в спирте. По вымораживанию стеринов при $T = -15^\circ$ растворитель отгонялся, липиды растворялись в бензине (T кипения $60-80^\circ C$) и фракционировались на колонке с окисью алюминия согласно Кофлеру (8). Фракция „ α -токоферола“ по удалении бензина растворялась в оливковом масле с содержанием 1,5 мг в 1 мл. Другая партия была лишь очищена от ос-

новной массы стеринов и после отгона спирта переведена в оливковое масло с содержанием 5 мг токоферолов в 1 мл.

В качестве реагентов, вызывающих гемолиз, использовались диалуровая кислота, цистеин и витамин С₂ (аскорбиновая кислота). Диалуровая кислота приготавливалась нами по прописи Байера (9). Ввиду нестойкости препарата использовался свежеприготовленный реактив. Опыт показал, что применение без перекристаллизации препарата 5—6-дневной давности резко снижает % гемолиза. Гемолитическая активность 0,1% раствора диалуровой кислоты, при внесении в пробирки 0,1 мл, по повторностям составляла 92%, 71%, 52%, 45% и 27%, т. е. в среднем 57% от полного гемолиза. Аскорбиновая кислота и цистеин были еще менее активны (9), что вполне согласуется с литера-

турными данными (5). Процент гемолиза для последних составлял при внесении в пробирки 0,1 мл 5% раствора витамина С 51—24% и цистина 27% соответственно от полного гемолиза.

Уже первые опыты „in vitro“ в пробирках со взвесью эритроцитов, диалуровой кислотой и липидом показали его защитную роль при гемолизе. В дальнейшем липид в оливковом масле принудительно вводился при помощи шприца в желудок животных.

Партия из 30 крыс, дефицитных по витамину Е, была разделена на семь групп, из которых I, II и III получили соответственно 1,5 мг, 2,5 мг и 6,0 мг липида; крысам IV группы было введено по 5,0 мг витамина Е. Животные V и VI группы (по 2 крысы) в опыте с аскорбиновой кислотой и цистеином получили защитную дозу липида в количестве 1,5 мг; крысы VII группы защитных веществ не получали.

Пробы на гемолиз были поставлены 24—26 часов спустя после введения липида. Кровь из надреза кончика хвоста крыс собиралась в центрифужные пробирки со смесью в равных объемах 0,9% раствора поваренной соли и 3% раствора лимоннокислого натрия. После центрифугирования (в течение 15 минут при 2000 об.) и удаления надосадочной жидкости, эритроциты взвешивались в фосфатном буфере рН 7,4, который разливался в пробирки по 0,25 мл. В пробирки в равном объеме добавлялся фосфатный буфер с реагентами. Пробирки взбалтывались и выдерживались в термостате при $T^{\circ} - 37^{\circ}$ в течение 20 минут, а затем при комнатной температуре в продолжение 3,5 часов.

После инкубации для получения полного гемолиза в несколько пробирок с реагентами добавлялась дистиллированная вода, а во все остальные — буфер (по 5 мл). Пробирки повторно центрифугировались в течение 15 минут при 2000 оборотов. Оптическая плотность жидкости определялась на спектрофотометре СФ-4 при длине волны 5450 Å. Процент гемолиза рассчитан по формуле, приведенной в работе Фридмана с соавторами (5).

Результаты экспериментальных определений собраны в табл. 1. Из таблицы видна прогрессивно возрастающая активность липида с увеличением дозы. Исследования ряда авторов показали, что для устранения гемолиза достаточна доза 1,5 мг (5,6), но они работали со специально подобранными по чувствительности к тесту животными и α -токоферолом высокой (94%) чистоты, тогда как последняя для наших препаратов не превышала 50%. При дозе 2,6 мг гемолиз составлял 2,5—3,2%, что близко (учитывая содержание α -токоферола в препарате) подходит к литературным данным, при дозе 5 мг гемолиз в опытных образцах полностью отсутствовал. На фиг. 2 представлены образцы с липидом, витамином Е и контролем после гемолиза.

Защитное влияние наблюдается и в последующий период при спонтанном гемолизе, причем действие липида весьма близко к действию витамина Е (табл. 2).

Из данных таблицы видно, что липид почти в 2—3 раза снижает гемолиз, имеющий место у контроля, аналогично витамину Е, и по продолжительности действия не уступает ему.

Таблица 1

Снижение липидом процента гемолиза под влиянием реагентов

| Диалуровая кислота | | | | | | | | | | | | Аскорбиновая кислота | | | | Цистеин | | | | | | | |
|--------------------------------|------------|---------------|------------|------------------|------------|---------------|------------|------------------|------------|---------------|------------|----------------------|------------|---------------|------------|------------------|------------|---------------|------------|------------------|------------|---------------|------------|
| Группы криси защитные вещества | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I—1,5 мг липида | | | | II—2,5 мг липида | | | | III—5 мг липида | | | | IV—5 мг вит. E | | | | V—1,5 мг липида | | | | VI—1,5 мг липида | | | |
| Оптич. плотность | | | % гемолиза | Оптич. плотность | | | % гемолиза | Оптич. плотность | | | % гемолиза | Оптич. плотность | | | % гемолиза | Оптич. плотность | | | % гемолиза | Оптич. плотность | | | % гемолиза |
| буфер | полн. гем. | опытн. образ. | | буфер | полн. гем. | опытн. образ. | | буфер | полн. гем. | опытн. образ. | | буфер | полн. гем. | опытн. образ. | | буфер | полн. гем. | опытн. образ. | | буфер | полн. гем. | опытн. образ. | |
| 0,085 | 0,375 | 0,120 | 12 | 0,085 | 0,700 | 0,100 | 2,4 | 0,060 | 0,690 | 0,050 | 0 | 0,055 | 0,890 | 0,050 | 0 | 0,085 | 0,560 | 0,165 | 16,0 | 0,085 | 0,465 | 0,100 | 3,9 |
| 0,085 | 0,365 | 0,180 | 33 | 0,085 | 0,700 | 0,100 | 3,2 | 0,060 | 0,690 | 0,054 | 0 | 0,055 | 0,890 | 0,052 | 0 | 0,085 | 0,870 | 0,125 | 4,4 | — | — | — | — |

Снижение процента спонтанного гемолиза липидом

| Г р у п п а ж и в о т н ы х | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|--------|---------------|--------|---------------------|--------|---------------|--------|----------------------|--------|---------------|--------|-------------------------|--------|---------------|--------|
| I — контрольная | | | | II — липид — 2,5 мг | | | | III — липид — 5,0 мг | | | | IV — витамин E — 5,0 мг | | | |
| поли. гемолиз | | кровь + буфер | | поли. гемолиз | | кровь + буфер | | поли. гемолиз | | кровь + буфер | | поли. гемолиз | | кровь + буфер | |
| опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. | опт. плот. | % гем. |

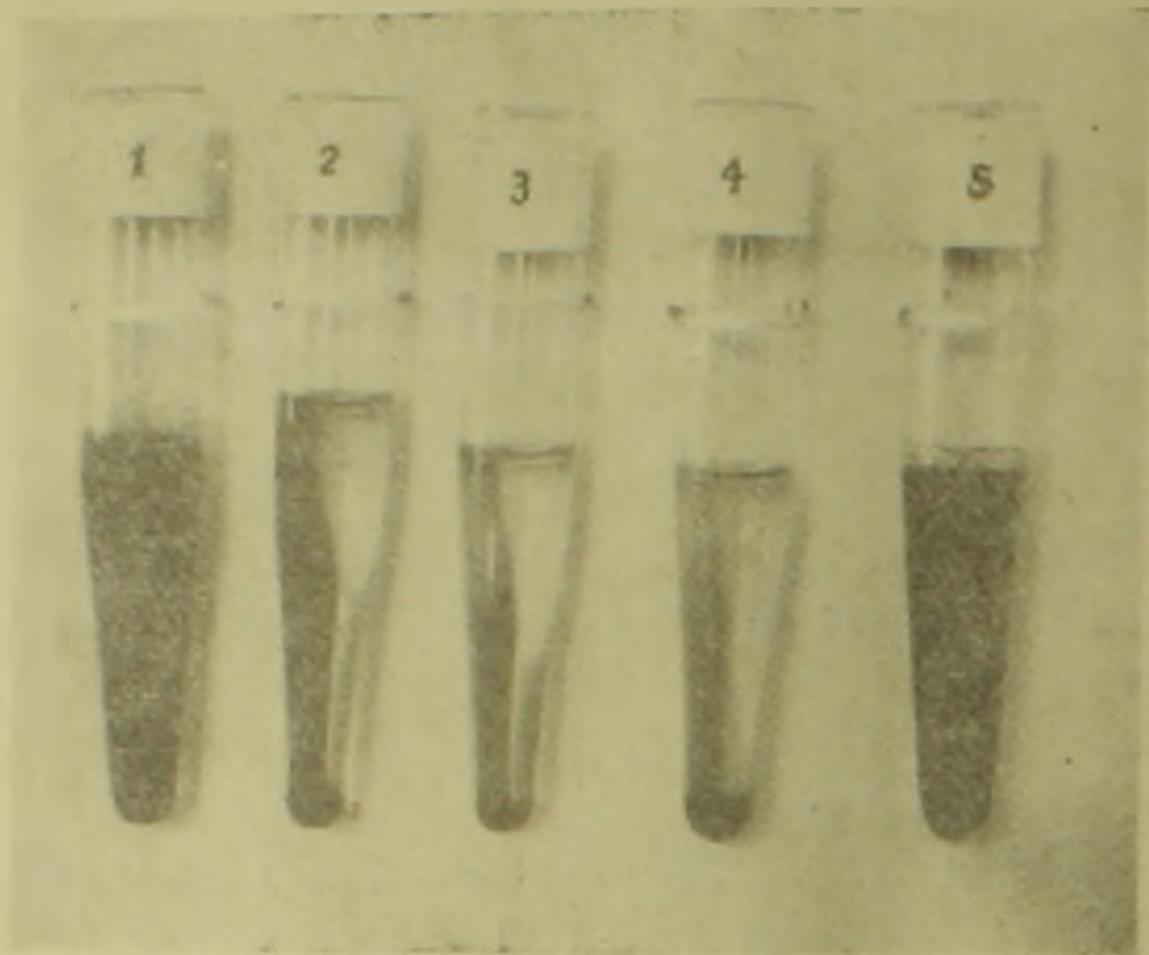
Через 6—8 часов

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|---|-------|-----|-------|---|
| 0,710 | 100 | 0,155 | 22 | 0,700 | 100 | 0,085 | 12 | 0,690 | 100 | 0,060 | 8 | 0,700 | 100 | 0,055 | 8 |
|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|---|-------|-----|-------|---|

Через 16—18 часов

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|---|-------|-----|-------|----|
| 1,200 | 100 | 0,240 | 20 | 1,500 | 100 | 0,225 | 15 | 1,600 | 100 | 0,243 | 9 | 0,890 | 100 | 0,095 | 10 |
|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|----|-------|-----|-------|---|-------|-----|-------|----|

Суммируя данные хроматографического анализа в двух системах и теста на биологическую активность, мы считаем возможным заключить, что в липидах, из отходов переработки герани содержится α -токоферол (или весьма близкое к нему вещество, обладающее E-витаминовой активностью).



Фиг. 2. Снижение гемолиза крови липидом из герани.
1—полный гемолиз, 2—липид в дозе 2,5 мг; 3—липид—5 мг.
4—витамин E—5 мг, 5—диалуровая кислота (без защитных веществ).

Принимая во внимание все возрастающие требования на дефицитный в настоящее время препарат, витамина E, перспективы быстрого роста площадей под геранью в республике, экономический эффект при комплексном использовании растений*, а также тот факт, что природный α -токоферол отличается от синтетического большой биологической активностью, следует проверить возможность и экономическую целесообразность получения витамина E (а также хлорофиллокаротино-витаминного препарата для нужд животноводства) из отходов переработки герани в крупно-лабораторном масштабе.

Ботанический институт Академии наук
Армянской ССР

* Как показали анализы, проведенные нами в 1953 г., в отходах от переработки герани из Октемберянского района содержится 9,8% дубильных веществ при доброкачественности 34,29, а в погонных водах 1,84%, при доброкачественности 25,11. Кроме того, в процессе извлечения витамина E из растения в значительном количестве может быть получен хлорофилл.

Է — վիտամինի խորհեց

երոմատոգրաֆիայի կեթոդով և կրիստենսենի կենսարանական տեսող ջրային է տրված առկոֆերոյի առկայությունը խորհեցու թափթփուկներում (մինչև 50 մգ¹⁰):

Հաշվի առնելով վիտամինի պրեպարատների արագ աճող պահանջները, ինչպես նաև ուսուցիչական խորհեցու ջանքատարածությունների աճման հետևանքները և բույսերի կամ պլանտային ոգտագործման ժամանակ ստացվող տնտեսական էֆեկտը, անհրաժեշտ է ստուգել խորհեցու թափթփուկներից լաբորատոր մեծ մասշտաբներով վիտամինի ստացման տնտեսական նպատակահարմարությունը:

Հատկապես նկատի ունենալով, որ բնական ա-առկոֆերոյի կենսարանական ակտիվությունը դերագանցում է արհեստական ճանապարհով ստացվածից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Я. Золотницкая, Г. О. Аюлян, „Природа Армении“, № 1, 1962. ² М. Скуби и Р. Буш, J. Biol. Chem., 146, 1—6, 1942. ³ Ф. Кристенсен с соавт. Acta physiol. Scand., 35, 215, 1956. ⁴ Б. Каулишюу, И. Пранге, Biochem. et Biophys. Acta, v. 23, № 3, 1957. ⁵ Э. Фридман с соавт. J. of Nutrition, v. 65, № 1, 1958. ⁶ С. Розе и П. Георги, Am. J. of Physiology, v. 168, № 2, 1952. ⁷ Методы определения витаминов, Пищепромиздат, 1954. ⁸ М. Кофлер, Helv. Chim. Acta, 15, 1169, 1949. ⁹ А. Байер, Untersuchungen über die Harnsäuregruppe, BC XXVII, H-1, 1863.

В. О. Пароникян

**О функции распределения содержаний рудообразующих элементов
 в теле полезного ископаемого**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магакьяном 18/V 1965)

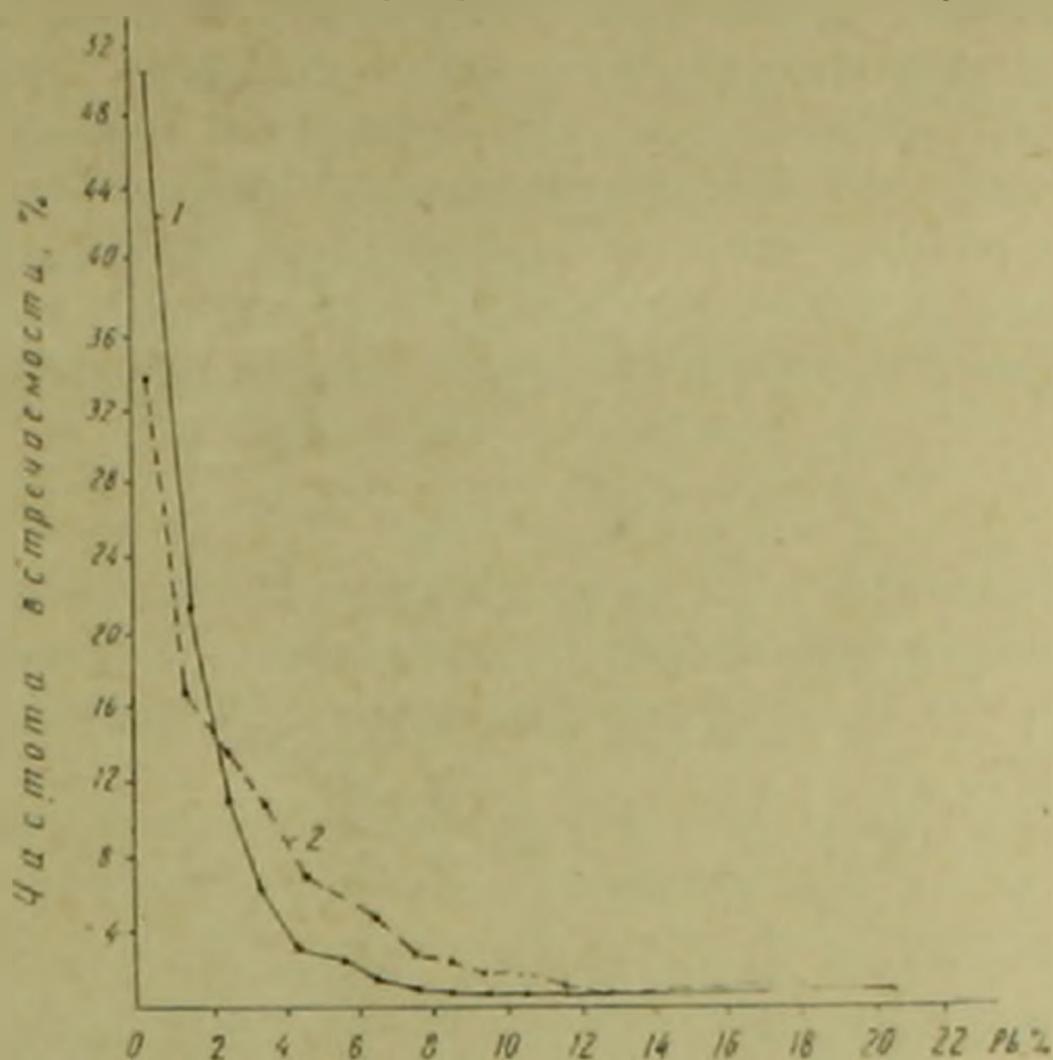
Исследования по определению функции распределения содержания компонентов в теле полезного ископаемого в настоящее время являются актуальной задачей, поскольку применение тех или иных законов математической статистики зависит от функции распределения случайной величины. Следует отметить, что характер распределения элементов в рудах и горных породах обусловлен большим числом неравноценных факторов и в соответствии с этим следует ожидать различных законов распределения.

Н. К. Разумовский⁽¹⁾ указывает на широкое распространение логарифмически-нормального закона в рудных месторождениях. К такому же выводу приходит Аренс⁽²⁾ в отношении распределения элементов в породах. Д. А. Родионовым⁽³⁾ установлено, что наиболее распространенной функцией, непротиворечащей эмпирическим данным, является логнормальная функция. К. В. Обрей⁽⁴⁾ и Л. И. Четвериков⁽⁵⁾ ставят под сомнение логнормальный закон распределения элементов в породах и рудах и указывают на то, что этот закон неприемлем при крайне низких, а также высоких содержаниях элементов. Из вышеприведенного следует, что вопрос о функции распределения содержаний компонентов в различных геологических образованиях в настоящее время разрешен далеко недостаточно.

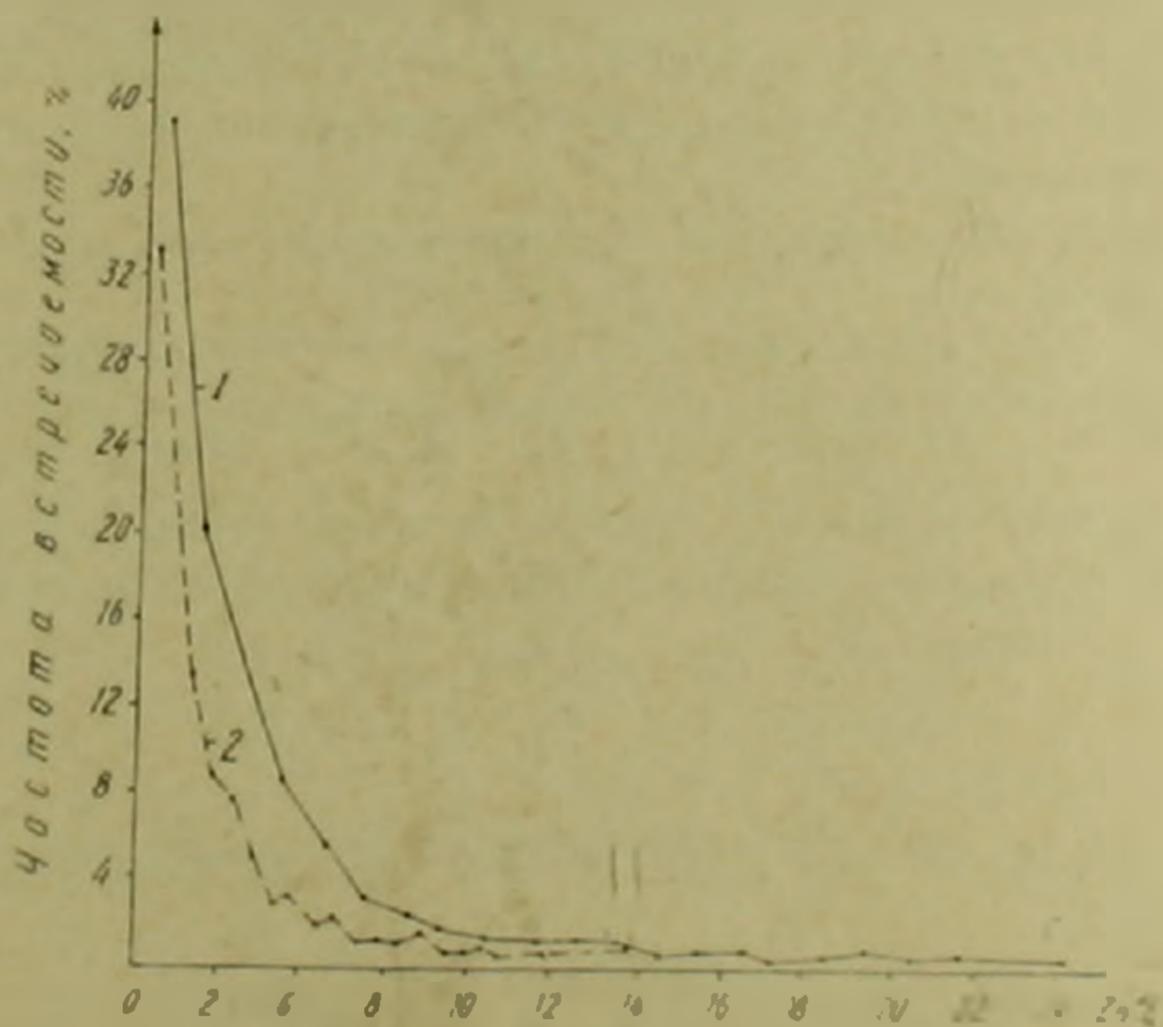
Исследования по определению законов распределения частот содержаний элементов в некоторых рудных месторождениях республики привели нас к выводу, что эмпирические данные здесь также не укладываются в рамки нормального или логнормального распределения.

Содержание компонента в теле полезного ископаемого можно рассматривать как непрерывную случайную величину, а данные опробования как случайную выборку из неограниченной совокупности возможностей, так как оно производится при определенных условиях и ограничениях. С целью установления законов распределения частот содержаний компонентов в теле полезного ископаемого произведена статистическая обработка большого числа химических анализов на

свинец, цинк и медь, полученных в результате геолого-разведочных и эксплуатационных работ по полиметаллическим месторождениям Ахтала и Газма. Вычислены частоты нахождения содержаний компонентов в равностоящих интервалах и по полученным данным построены гистограммы (фиг. 1, 2). В результате таких построений выявлено,



Фиг. 1. Гистограммы распределения частот содержания свинца в рудах месторождений: 1—Ахтала, 2—Газма.



Фиг. 2. Гистограммы распределения частот содержаний цинка в рудах месторождений: 1—Ахтала; 2—Газма.

что гистограммы этих элементов в рудах довольно сходны по форме и их можно представить одной функцией распределения. Полу-

ченные результаты во всех случаях проверялись на логнормальное распределение, однако оказалось, что, за исключением распределения меди на Ахтальяском месторождении, этот закон неприемлем.

Задача заключается в том, чтобы выбрать такую формулу $y = f(x; k, a)$, которая, устанавливая связь между частотой встречаемости и содержанием элементов, и то же время возможно точно характеризовала бы эмпирические данные. Исследования с применением аналитических критериев по нахождению наиболее рациональной модели (2) привели нас к выводу, что в рассматриваемом случае распределение частот компонентов достаточно точно можно выразить следующей показательной функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = k e^{-\frac{x}{a}}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1)$$

где k и a — постоянные. Эта функция, как видно, отлична от функции логнормального или нормального распределения. В последнем случае функция плотности вероятностей выражалась бы формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

где a — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия.

Таким образом, задача состоит в определении параметров k и a функции (1). Во избежание излишнего повторения здесь определяются параметры лишь для функции распределения свинца в рудах Газминского месторождения. Общее решение задачи позволяет произвести тождественные расчеты и для остальных компонентов, характеризующихся аналогичной функцией распределения, но разными значениями коэффициентов.

По функции (1) определим математическое ожидание — $E(X)$ и дисперсию — $D(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx = k \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{a}} dx = -ka x e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ ka \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} dx = -ka e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} = ka^2; \\ D(X) &= \int_0^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx = k \int_0^{\infty} (x - ka^2)^2 e^{-\frac{x}{a}} dx = \\ &= -ka (x - ka^2)^2 e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} + 2ka \int_0^{\infty} (x - ka^2) e^{-\frac{x}{a}} dx = k^2 a^5 - \\ &- 2ka^2 (x - ka^2) e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} + 2ka^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} dx = k^3 a^5 - 2k^2 a^4 - \end{aligned}$$

$$- 2ka^3 e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} = k^3 a^3 - 2k^3 a^4 + 2ka^3.$$

Но из условия

$$F(+\infty) = k \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} dx = -ka e^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} = ka = 1$$

вытекает, что $k = \frac{1}{a}$, следовательно

$$E(X) = ka^2 = \frac{1}{a} a^2 = a \quad \text{и}$$

$$D(X) = \frac{a^3}{a^3} - \frac{2a^4}{a^2} + \frac{2a^3}{a} = a^2,$$

т. е.

$$E(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma = a. \quad (3)$$

Равенство (3) можно рассматривать как необходимое условие, при котором эмпирические данные согласуются с указанной функцией распределения, т. е. если взамен математического ожидания и дисперсии применять их статистические оценки—эмпирическое среднее (\bar{x}) и дисперсию (s^2), то должно иметь место равенство

$$\bar{x} = s.$$

Эти стандарты определяются формулами:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i m_i}{N}, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 m_i}{N-1},$$

где x_i —среднеарифметическое содержание компонента в классовых интервалах, m_i —число проб в них, N —общее число проб, r —число классов.

Введя в формулу (1) статистическую оценку математического ожидания, получим следующую простую функцию плотности вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\bar{x}} e^{-\frac{x}{\bar{x}}}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (4)$$

и функцию распределения вероятностей

$$F(x) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^x e^{-\frac{x}{\bar{x}}} dx, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (5)$$

В частности для свинца эта функция имеет вид

$$F(x) = 0,333 \int_0^x e^{-\frac{x}{3}} dx, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (6)$$

Пользуясь функцией (6), можно определить вероятность попадания случайной величины в классовых промежутках по формуле:

$$P \{x_i \leq x < x_{i+1}\} = 0,333 \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{x}{3}} dx,$$

где x_i и x_{i+1} являются нижней и верхней границами интервала. На основании полученных данных составлены эмпирическая — $F_n(x)$ и теоретическая — $F(x)$ функции распределения (табл. 1). Проверка гипотезы о равенстве этих двух функций произведена по критерию А. Н. Колмогорова:

$$P \{ \sqrt{N} D_n < \lambda \} \rightarrow K(\lambda),$$

где N — число анализов, D_n — максимум отклонений между эмпирической и теоретической функциями распределения:

$$D_n = \text{Max}_{0 < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|,$$

$$K(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k\lambda}, \lambda > 0.$$

Таблица 1

| Границы интервалов | Число проб (m_i) | Частота встречаемости $\left(\frac{m_i}{N}\right)$ | Теоретические частоты (P_i) | Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ | Теоретическая функция распределения $F(x)$ |
|--------------------|----------------------|---|------------------------------------|--|---|
| 0—1 | 205 | 0,3376 | 0,2839 | 0,3376 | 0,2839 |
| 1—2 | 96 | 0,1581 | 0,2028 | 0,4957 | 0,4867 |
| 2—3 | 83 | 0,1361 | 0,1458 | 0,6318 | 0,6325 |
| 3—4 | 65 | 0,1070 | 0,1042 | 0,7388 | 0,7358 |
| 4—5 | 42 | 0,0692 | 0,0749 | 0,8080 | 0,8116 |
| 5—6 | 19 | 0,0313 | 0,0536 | 0,8392 | 0,8652 |
| 6—7 | 29 | 0,0478 | 0,0382 | 0,8870 | 0,9034 |
| 7—8 | 16 | 0,0263 | 0,0275 | 0,9133 | 0,9309 |
| 8—9 | 14 | 0,0214 | 0,0197 | 0,9347 | 0,9506 |
| 9—10 | 9 | 0,0148 | 0,0141 | 0,9495 | 0,9647 |
| 10—11 | 10 | 0,0165 | 0,0102 | 0,9660 | 0,9749 |
| 11—12 | 6 | 0,0099 | 0,0072 | 0,9759 | 0,9821 |
| 12—13 | 3 | 0,0049 | 0,0052 | 0,9800 | 0,9873 |
| >13 | 9 | 0,0048 | 0,0142 | 1,0 | 1,0 |

$$N = 608, \bar{x} = 3,0, S^2 = 8,5$$

Принимая $\alpha = 0,01$, при которой событие практически неосуществимо, по соответствующей таблице (*) определяем $\lambda_{\alpha} = 1,63$. Но поскольку

$$\sqrt{N} D_n = 24,5 \cdot 0,0537 = 1,31 < \lambda_{\alpha} = 1,63,$$

то, следовательно, нет основания отрицать принятую гипотезу.

Подобным способом и получены аналогичные функции распределения для свинца, цинка и меди месторождений Ахтала и Газма, что указывает на большую универсальность показательной функции распределения.

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{x}{x}} dx, \quad 0 < x < \infty.$$

В заключение отметим, что распределение частот содержаний указанных металлов довольно близко также к логнормальному закону, хотя отклонения могут быть значительными. Указанная функция распределения установлена при среднем содержании элементов до 5—6%; ожидается переход к нормальному закону при более высоких содержаниях.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱՐՈՆՅԱՆԻԱՆ

Օգտակար հանածույի հանեամաճճում էլեմենտների պարունակությունների բաշխման ֆունկցիայի հարցի շարքը

Հողվածում բերված են հեղինակի ուսումնասիրությունների արդյունքները մի շարք հանածույի տարածքներում էլեմենտների՝ Pb, Zn և Cu բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ շահման և կախումները հանրաձայնություն: Աղած փաստական նյութի ստատիստիկական մշակումը հնարավորություն է տալիս առաջին անգամ հաստատելու, որ էլեմենտների պարունակությունների հանածույի տարածքները կարելի է արտահայտել հետևյալ բաշխման ֆունկցիայով՝

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{x}{x}} dx, \quad 0 < x < \infty$$

որտեղ \bar{x} -ը էլեմենտի պարունակության էմպիրիական միջինն է:

Վերահիշյալ բաշխման ֆունկցիան որոշակիորեն սարքերվում է հանածույի տարածքների բաշխման նորմալ կամ լոգնորմալ ֆունկցիաներից և կիրառելի է ոչ շատ մեծ միջին պարունակությունների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. К. Разумовский, ДАН СССР, № 9, 1940. ² Л. Г. Аркс, Geoch. Cosmoch. Acta, vol. 5, № 2, vol. 6, № 2—3, 1954. ³ Д. А. Родионов, Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. Изд. «Наука», М., 1964. ⁴ К. В. Обрей, Geoch., Cosmoch. Acta, vol. 9, № 1—2, 1956. ⁵ Л. И. Четвериков, Советск. геология, № 7, 1964. ⁶ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова, Численные методы анализа, М., 1963. ⁷ Վ. Ն. Հարոնյանյան, Հանածույի տարածքների տեսության համառոտ դասընթաց, Հայպետուսման կհրատ, 1961.

Թարեմափակա

29

Բ. Յու. Լեվին և Բ. Ն. Խաչատրյան — Վիճերի և Գեղի մի թևերի ընդհանրացումը կիսաշարժություն կամայական ամբողջ կարգի և նորմալ տիպի ֆունկցիաների համար 3

Ս. Մ. Խարզյան — Քառակուսային աջ մասերով կոշու — Ռիմանի սխեմա լուծումների հատկությունները 10

Վ. Ա. Եսախյան — Շտուրմ — Կուրվիյի օպերատորների համար հեղանակի մասին 13

Վ. Ա. Չարսրյան և Է. Ն. Կազարյան — Հարմոնիկ ֆունկցիաների մի դասի շառավղային լրիվ վարիացիայի մասին 51

Ս. Վ. Համբարձումյան — Կույտերի պուստոնյան վերադրման առթիվ 71

Ն. Ե. Չաղկաչյու — Բազմանդամներով և նրանց ածանցյալներով որոշ ֆունկցիաների միաժամանակյա մոտարկման մասին 129

Ա. Ն. Կոչիտցով — Ոչ սիմետրիկ յուրացողիչ պայմաններով էքստրեմալ խնդիրներ 133

Ա. Մ. Բուդայան — Շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասի պարամետրական ներկայացում 140

Ե. Ն. Սահակյան — Անվերջ գեֆեկտի թվեր ունեցող սիմետրիկ օպերատորների ռեզոլվենտների տեսություն վերաբերյալ 193

Ն. Մ. Խարտիրոսյան — Ինքնահամալուծ օպերատորների ոչ-ինքնահամալուծ գրգռումների օպերատորի հետազոտության մի եղանակի մասին 257

Ֆ. Կ. Հարությունյան — $L_p [0,1]$ տարածության բաղիսներով շարժերի զուգամիտություն մասին 261

Վու. Եզոան և Բ. Վ. Սասրովսկի — Մերոմորֆ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալի մասին 272

Մեխանիկա

Լ. Ա. Մովսեսյան — Գերիտիկ փոփոխվող երկարություն հեծանի տատանումները 22

Դ. Ե. Բաղդասարյան և Վ. Յ. Կնունի — Փոփոխական խորություն հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումները 199

Դ. Ն. Բաղդասարյան և Վ. Յ. Կնունի — Անիզոտրոպ փակ գլանային թաղանթի զինամիկ կայունությունը 275

Թեումոլոգիանամիկա

Պ. Ն. Մանվելյան — Այլու միներումի էլեկտրոլիզորի ածաղային մասում ընթացող տեսականորեն համաձայն առկայությունների մասին 201

Առաձգականություն և հոսքում

Ս. Ս. Սահակյան — Սեղանկյուն պրիզմայի առաձգական համաստեղանկություն մեկ խոր խնդրի մասին 81

Մոդի և հոսքում

Կ. Ա. Կարապետյան — Անիզոտրոպիայի ազդեցությանը բեռների սոդրի վրա կախված բեռնաձորման մոմենտում բեռների հասակից 282

Ֆիզիկա

Ա. Գ. Իսախանյան և Վ. Ն. Չալքիլյան — Ջրածնի ատոմի իոնիզացիան ինտենսիվ էլեկտրամագնիսական հաճախային ճառագայթումներով խորտակմամբ 27

Վ. Ա. Աղամով, Լ. Տ. Ղանբարյան, Է. Ա. Օղանով և Ս. Ս. Զիրքինյան — Վերականգնման ազդեցությունը բորային ֆոսֆորների ֆոսֆորեցնեցիայի մարման

| | |
|---|-----|
| վրա իմպուլսային լույսով գրգռելու ղեկավարում | 88 |
| Ն. Ա. Արխամուզյուն — Լիցքափոխման արագ մասնիկների անցումային հաստատվածություն անընդհատ անհամասեռ թիթեղներում | 210 |

Պոլիմերների Ֆիզիկա

| | |
|--|----|
| Լ. Գ. Մելքոնյան, Խ. Վ. Բաղդասարյան և Ա. Վ. Ինարյան — Մասնաշաղկապային խնդիրը և պոլիբյուրոպրենային կաուչուկի մակրոմոլեկուլի թերմոդինամիկական ձեռնարկությունը | 34 |
|--|----|

| | |
|---|-----|
| Ն. Ս. Քոչարյան Հայկական ՍՍՄ ԳԱ թղթակից-անդամ, Բու. Ա. Մալոյան և Պ. Հ. Մեղիրզանյան — Ռենտգենյան դիֆրակցիոն պատկերի կախումը բարձր մոլեկուլյար միացությունների նմուշների հաստությունից | 216 |
|---|-----|

Քիմիական Ֆիզիկա

| | |
|---|-----|
| Ա. Հ. Մանուշյան և Վ. Կ. Սարգսյան — Մեթանից ացետիլենի սինթեզի ներառված ուղիների մասին, ոչ իզոթերմիկ պայմաններում | 146 |
|---|-----|

Մասդադիսոբյուն

| | |
|---|-----|
| Գ. Ա. Ինարյանյան, Հայկական ՍՍՄ ԳԱ թղթակից-անդամ — Կարճալիք բոլորական մի ղեկարի մեկնարանությունը | 287 |
|---|-----|

Անօրգանական Բիմիա

| | |
|---|-----|
| Ս. Ն. Ավագյան և Խ. Ա. Կարապետյան — Մանգանի և տղանձի սուլֆատների կոմպլեքսային միացությունները 2-քլորրուտեն-2-ի հետ | 294 |
|---|-----|

Օրգանական Բիմիա

| | |
|--|-----|
| Վ. Բ. Բաղդուկյանց, Հայկական ՍՍՄ ԳԱ ակադեմիկոս, և Է. Լ. Մարկոսյան — Նիտրոպրոպանի միացման ուղեգիծը 1, 2, 3-հապեցած Հսթերների հետ անխոնիտ AB-17-ի ներկայությամբ | 227 |
|--|-----|

| | |
|---|-----|
| Ի. Ս. Պանիդի և Բու. Ս. Պանոշկին — Բիս(գիդրոլիզմալի)բորբորիդի ստացման պարզ եղանակ և սինթեզներ նրա բազայի վրա | 226 |
|---|-----|

Բիմիա

| | |
|---|----|
| Ա. Շ. Գալստյան — Ազոտ-ալկալի ռոզերի ղեկորագների ակտիվությունը | 41 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| Գ. Վ. Բարսեղյան — Գենդանական շուսվածքներում ազատ էթանոլամիների որոշումը պարա-բենզոֆենոնով | 93 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| Հ. Խ. Բունյարյան, Հայկական ՍՍՄ ԳԱ ակադեմիկոս, և Ա. Ա. Սիմոնյան — Արսիդացիոն ֆոսֆորիլացումը հափի սազմի ուղեղի միտոքոնդրիաններում նրա դարձացման ընթացքում | 97 |
|---|----|

| | |
|---|-----|
| Ա. Ա. Տեր-Կարապետյան — Հայկական ՍՍՄ ԳԱ ակադեմիկոս, և Է. Ա. Մանրաշյան — Գրոյինի սինթեզը իսպոդի բազցուի խմորման ընթացքում | 133 |
|---|-----|

| | |
|---|-----|
| Ս. Գ. Մոսխոսյան և Հ. Խ. Բունյարյան, Հայկական ՍՍՄ ԳԱ ակադեմիկոս — Իրկատինամիդատենին-գինուկլեոտիդների դերը ամոնիակի ասսիլացման պրոպեկտում ուղեղային շուսվածքում | 139 |
|---|-----|

| | |
|---|-----|
| Ա. Կ. Իսկանդարյան — Երկաթ պարունակող կանաչ հեմային պիգմենտների իզոնտիֆիկացիան | 297 |
|---|-----|

Ֆուլսերի Բիմիա

| | |
|--|-----|
| Ս. Բա. Չալոտնիցկայա, Գ. Հ. Հակոբյան, Ի. Ս. Մելքոնյան և Ա. Հ. Մարադյան — Նոր բույսեր Հայաստանի ֆլորայից որպես տրոպոլոնային ողակով ալկալոիդների պրոպոցենտներ | 164 |
|--|-----|

| | |
|---|-----|
| Ս. Բա. Չալոտնիցկայա, Գ. Հ. Հակոբյան և Վ. Գ. Գ. Մալոյան — E-գիսամինի խորհրդանշան | 301 |
|---|-----|

Գեոգրաֆիա

Վ. Ն. Պարոնիկյան — Օգտակար հանածոյի հանրամարմնում էլեմենտների պարունակութիւնների բաշխման ֆունկցիայի հարցի շուրջը 305

Երկրաբանութիւն

Ս. Վ. Էտարյան — Բազալտների հազվագյուտ անջատումներ Լոռու պրովինցիայում 47
Գ. Լ. Խիրեմյան — Մերձսեանյան զկզարտարային անտիկլինալին դռնան . . . 230
Լ. Գ. Իսաչիլի — Հայկական ՍՍՏ-ի մանգանի հանքայնադժան ծագման և հետազոտման մասին 235

Հանքաբանութիւն

Ս. Ա. Զոհրաբյան — Արթուրայի բազմամետաղային հանքաքայքի բարխտային հանքայնացման մասին 104
Ս. Ա. Ավագյան և Վ. Ս. Մկրտչյան — Մժժրի կոլչեզանի տարրեր մորֆոլոգիայի բյուրեղների խառնուրդների պարունակութեան մասին 112
Վ. Ս. Մեծկուսյան — Ազաֆեսաձորի հանքաքայքի մագնետիտային հանքանյութերում ապատիտի հայտնաբերման մասին 118
Ռ. Ա. Մանուկյան, Ի. Ն. Գեորգուով և Գ. Գ. Մամբրյան — Վեհուսային կաշին Հայկական ՍՍՏ-ի հյուսիս-արևելյան մասի վերին յուրայի հասակի դոլոմիտային նստվածքներում 171
Հ. Հ. Սարգսյան — Գրենիտի և պրենիտիզացիայի պրոցեսների մասին Հայկական ՍՍՏ սակերի հանքաշերտերից մեկում 177
Վ. Ն. Պարոնիկյան և Ա. Ն. Սարեվոսյան — Բնածին մկնդեզը Հայկական ՍՍՏ-ի Ամասիա հանքաքայքի հանքանյութերից 210

Ցեկոնիկա

Ս. Ա. Փիրուզյան — Նոր տվյալներ Մեծ Արևանյան ջրմանի սեյսմոտեկտոնիկայի վերաբերյալ 244

Ռազիոքիմիա

Ռ. Ս. Բարսյան — Ջերմային ազդեցութիւնը պորենի սերմերի ռենտգենյան ճառագայթման մամանակ 51

Միկրոբիոլոգիա

Ա. Ի. Սինասյան և Ա. Ի. Նալբանդյան — Պաղոզի կտրոնների արմատակալման և անձան վրա ազդող ազդեցությունների ազդեցութեան մասին 231

Բույսերի Ֆիզիոլոգիա

Ի. Ա. Դուրզյան — Աշնանային պորենի սերմի ամինոթթուների և յուսի շարտերների փոփոխութիւնը յարմարացիայի ընթացքում 39
Վ. Հ. Էտարյան — Բարձրակարգ բույսերի ծերացման բնույթի մասին 122
Ա. Ա. Լեյրոնյան և Ա. Ա. Սարգիսովա — Գիրերկլինի ազդեցութիւնը խաղողի կանաչ արմատակալների ամեյոզոլի մասին 184

Ֆիզիոլոգիա

Ն. Ի. Սիրայեկյան — Հանադատրոպ և էտրոպեն հորմոնների ազդեցութիւնը աստղային ուղեղի մեծ կիսագնդերը ինտեգրած թռչունների սփոզեն ֆունկցիայի վրա 189

Математика

- Б. Я. Левин и И. О. Хачатрян* — Об обобщении одной теоремы Винера — Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полуплоскости 3
- С. Ц. Саркисян* — Свойства решений систем Коши — Римана с квадратными добавками 10
- В. А. Яврян* — О формуле следов для операторов Штурма — Лиувилля 14
- В. С. Захарян и Э. О. Назарян* — О полной радиальной вариации одного класса гармонических функций 65
- Р. В. Амбарцумян* — (*) пуассоновских наложениях скопления 73
- Е. Ш. Чацкая* — Об одновременной аппроксимации некоторых функций полиномами и их производными 129
- А. И. Кочетков* — Экстремальные задачи с несимметричными дополнительными условиями в некоторых классах аналитических функций 135
- А. М. Бадалян* — Параметрическое представление классов мероморфных в круге функций 140
- Ш. И. Саакян* — К теории резольвент симметрического оператора с бесконечными дефектными числами 193
- Р. М. Мартиросян* — Об одном методе исследования спектра возмущения самосопряженных дифференциальных операторов 257
- Ф. Г. Арутюнян* — О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства $L_p [0,1]$ 264
- Бу Нгоан и И. В. Острожский* — О логарифмической производной мероморфной функции 272

Механика

- Л. А. Мясисян* — Колебания балки с периодически изменяющейся длиной 22
- Г. Е. Багдасарян и В. Ц. Гнуни* — Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины 199
- Г. Е. Багдасарян и В. Ц. Гнуни* — Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки 278

Термодинамика

- П. Г. Махвелян* — О теоретически вероятных реакциях, протекающих у анода алюминиевого электролизера 204

Теория упругости

- С. М. Саакян* — Об одной смешанной задаче упругого равновесия прямоугольной призмы 81

Теория ползучести

- К. С. Каралетян* — Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от возраста бетона к моменту нагружения 282

Физика

- А. Д. Газазян и В. О. Чалтыкян* — Ионизация атома водорода под действием электромагнитного излучения 27

В. С. Адамов, Л. Т. Кантарджян, Э. А. Оганов и С. С. Чиркинян — Влияние перепоглощения на затухание фосфоресценции борных фосфоров при

| | |
|---|-----|
| импульсном световом возбуждении | 210 |
| <i>Н. А. Корхмазян</i> — Переходное излучение быстрых заряженных частиц в непрерывно-неоднородных пластинках | 210 |
| Физика полимеров | |
| <i>Л. Г. Мелконян, Р. В. Багдасарян и А. В. Геворкян</i> — К вопросу оценки энтальпийной и термодинамической гибкости макромолекул полихлоропренового каучука | 31 |
| <i>Н. М. Кочарян, чл.-корр. АН Армянской ССР, Ю. А. Рапаян и П. А. Безарганян</i> — Зависимость рентгеновской дифракционной картины от толщины образцов высокомолекулярных соединений | 216 |
| Химическая физика | |
| <i>А. А. Манташян и В. К. Саркисян</i> — О возможных путях синтеза ацетилена из метана в неизотермических условиях | 147 |
| Астрономия | |
| <i>Г. А. Гурзадян, чл.-корр. АН Армянской ССР</i> — Интерпретация одной ультрафиолетовой вспышки | 287 |
| Неорганическая химия | |
| <i>С. Н. Авакян и Р. А. Карапетян</i> — Комплексные соединения сульфатов марганца и меди с 2-хлорбутеном-2 | 204 |
| Органическая химия | |
| <i>В. И. Исагулянец, академик АН Армянской ССР, и Э. Л. Маркосян</i> — Реакция присоединения нитропропана-2 к различным α, β -ненасыщенным эфирам в присутствии анионита АВ-17 | 221 |
| <i>И. С. Пакиди и Я. М. Паушкин</i> — Простой метод получения бис(диэтиламино)борхлорида и синтеза на его основе | 226 |
| Биохимия | |
| <i>А. Ш. Галстян</i> — Активность дегидрогеназ засоленно-соленцеватых почв | 41 |
| <i>Г. В. Барсегян</i> — Количественное определение свободного этаноламина в животных тканях пара-бензохиноном | 93 |
| <i>Г. Х. Бунятыян, академик АН Армянской ССР, и А. А. Симонян</i> — Окислительное фосфорилирование в митохондриях мозга куриного эмбриона в течение его развития | 97 |
| <i>М. А. Тер-Карапетян, академик АН Армянской ССР, и Э. А. Манташян</i> — Синтез пролина при брожении виноградного сусла | 153 |
| <i>С. Г. Мовсесян и Г. Х. Бунятыян, академик АН Армянской ССР</i> — О роли никотинамидаденин-динуклеотидов в образовании аммиака в мозгу | 159 |
| <i>А. К. Исхандарян</i> — Идентификация зеленых железосодержащих гемовых пигментов | 297 |
| Биохимия растений | |
| <i>С. Я. Золотницкая, Г. О. Акопян, И. С. Мелкумян и А. А. Мурадян</i> — Новые растения продуценты алкалоидов с трополоновым кольцом из флоры Армении | 164 |
| <i>С. Я. Золотницкая, Г. О. Акопян и В. Д. Райсян</i> — Витамин Е из герани | 301 |

