

ԱՍՏՐՈՓԻԶԻԿԱ

ТОМ 66

ФЕВРАЛЬ, 2023

ВЫПУСК 1

РАССТОЯНИЯ ДО 10 БЛИЗКИХ ГАЛАКТИК, НАБЛЮДАВШИХСЯ НА КОСМИЧЕСКОМ ТЕЛЕСКОПЕ ХАББЛ	<i>И.Д.Караченцев, Н.А.Тихонов</i>	5
ОПТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ VZG ОБЪЕКТОВ ИЗ КАТАЛОГА БЛАЗАРОВ VZCAT	<i>А.В.Абрамян, А.М.Микаелян, Г.М.Паронян, Г.А.Микаелян, А.Г.Сукиасян</i>	17
ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОРБИТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕДАВНО ОТКРЫТЫХ ЗАТМЕННО-ДВОЙНЫХ СИСТЕМ	<i>М.С.Аленази, М.М.Эльхатиб</i>	31
СВЕРХБЫСТРАЯ ПЕРЕМЕННОСТЬ ПРОФИЛЕЙ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ γ Ori	<i>А.Ф.Холтыгин, В.Б.Пузин, И.В.Соколов, М.С.Курдюкова</i>	45
ПОТОКИ ХЕРБИГА-АРО И МОЛОДЫЕ ЗВЕЗДЫ В ТЕМНОМ ОБЛАКЕ DOBASHI 5006	<i>Т.А.Мовсесян, Т.Ю.Магакян, А.С.Расторгуев, А.Р.Андреасян</i>	61
ИССЛЕДОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КАНТОВСКОГО-САКСА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ	<i>Т.Винута, К.Нихарика, К.Ш.Кавья</i>	75

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

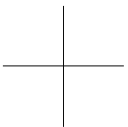
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

66

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2023



Выходит с 1965г.
на русском и английском языках

Խմբագրական կոլեգիա

Գլխավոր խմբագիր՝ Ա.Գ.Նիկողոսյան (Հայաստան)
Գլխավոր խմբագրի տեղակալներ՝ Վ.Պ.Գրինին (Ռուսաստան), Հ.Ա.Հարությունյան (Հայաստան)
Պատասխանատու քարտուղար՝ Ա.Ա.Հակոբյան (Հայաստան)
Ժ.Ալեյան (Ֆրանսիա), Գ.Ս.Բխնովատի-Կոզան (Ռուսաստան), Ի.Դ.Կարաչենցև (Ռուսաստան),
Տ.Յու.Մադաքյան (Հայաստան), Ա.Մ.Միրայելյան (Հայաստան), Բ.Մ.Շուստով (Ռուսաստան),
Յու.Ա.Շչեկինով (Ռուսաստան), Ա.Մ.Չերեպաշչով (Ռուսաստան), Ե.Պ.Պավլենկո (Ռուսաստան),
Է.Ս.Պարսամյան (Հայաստան), Վ.Պ.Ռեշետնիկով (Ռուսաստան), Գ.Ն.Սալուկվաձե (Վրաստան),
Ա.Ա.Սահարյան (Հայաստան), Գ.Տ.Տեր-Ղազարյան (Հայաստան), Մ.Տուրատտո (Իտալիա),
Ս.Դ.Օդինցով (Իսպանիա)

Редакционная коллегия

Главный редактор: А.Г.Никогосян (Армения)
Заместители главного редактора: Г.А.Арутюнян (Армения), В.П.Гринин (Россия)
Ответственный секретарь: А.А.Акопян (Армения)

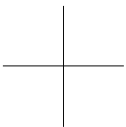
Ж.Алесян (Франция), Г.С.Бисноватый-Коган (Россия), И.Д.Караченцев (Россия),
Т.Ю.Магакян (Армения), А.М.Микаелян (Армения), С.Д.Одинцов (Испания),
Е.П.Павленко (Россия), Э.С.Парсмян (Армения), В.П.Решетников (Россия),
А.А.Саарян (Армения), Г.Н.Салуквадзе (Грузия), Г.Т.Тер-Казарян (Армения),
М.Туратто (Италия), А.М.Черепашук (Россия), Б.М.Шустов (Россия), Ю.А.Щекинов (Россия)

"АСТРОФИЗИКА" - научный журнал, издаваемый Национальной академией наук Республики Армения. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой. Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

"ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ"-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակում է Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային Ակադեմիան: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների և միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով: Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Адрес редакции: Республика Армения, Ереван 19, пр. Маршала Баграмяна 24^е
Редакция ж. "Астрофизика", тел. 56 81 38
e—mail: astrofiz@sci.am

© Издательство "Гитутюн" НАН Республики Армения, Астрофизика, 2023



DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-5

РАССТОЯНИЯ ДО 10 БЛИЗКИХ ГАЛАКТИК, НАБЛЮДАВШИХСЯ НА КОСМИЧЕСКОМ ТЕЛЕСКОПЕ ХАББЛ

И.Д.КАРАЧЕНЦЕВ, Н.А.ТИХОНОВ

Поступила 21 ноября 2022

Изображения 10 галактик в фильтрах F814W и F606W, полученные с ACS камерой на космическом телескопе Хаббл, использованы для построения диаграммы цвет-величина звездного населения этих галактик. Расстояния до галактик оценены по светимости вершины ветви красных гигантов. Рассмотренные галактики имеют лучевые скорости от 250 км с^{-1} до 760 км с^{-1} относительно центроида Местной группы и расстояния в диапазоне от 3.7 Мпк до 13.0 Мпк. Отмечены также несколько других наблюдавшихся галактик с малыми лучевыми скоростями, расстояния которых оказались за пределом 13 Мпк.

Ключевые слова: *галактики - карликовые галактики; расстояния - галактики*

1. *Введение.* Большим достижением в изучении кинематики и динамики Местной вселенной за последние два десятилетия явилось массовое определение высокоточных расстояний до близких галактик с помощью космического телескопа Хаббл (HST). Используя метод светимости вершины ветви красных гигантов (TRGB) [1], стало возможным измерить расстояния с погрешностью $\sim 5\%$ для более 400 галактик Местного объема (МО) в пределах расстояния $D \approx 11$ Мпк вокруг нас. Для многих галактик было установлено их членство в близких группах, и по вириальным скоростям спутников были определены массы темного гало вокруг ярких центральных галактик [2]. Средняя плотность темной материи, сосредоточенной в гало местных галактик, оказалась равной 0.08 в единицах критической плотности [3], что составляет всего одну четверть от глобальной космической плотности материи $\Omega_m \approx 0.31$. Этот результат выглядит парадоксальным, поскольку средняя плотность звездной материи в Местном объеме практически неотличима от средней глобальной звездной плотности. Отклонение лучевых скоростей галактик от идеального хаббловского потока $V = H_0 D$, где $H_0 = 73 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$ - параметр Хаббла, дало также четкое свидетельство наличия коллективного движения местных галактик в сторону ближайшего богатого скопления в созвездии Девы, а также участия их в систематическом расширении окрестностей Местного войда. Наблюдательные данные о расстояниях галактик МО, представленные в Updated Nearby Galaxy Catalog (UNGC, [4]) и Extragalactic Distance Database (EDD,

[5]), являются фундаментом для проверки космологических моделей на малых масштабах.

Последним значительным пополнением данных о расстояниях близких галактик явились наблюдения на HST с камерой ACS по программе SNAP 15922 (PI R.B.Tully). Из 153 мишеней программы наблюдения были выполнены для 80 галактик. Аккуратные TRGB-расстояния были получены для 53 галактик [5-11] и документированы в базе данных EDD (edd.ifa.hawaii.edu). Независимые измерения TRGB-расстояний для 24-х карликовых галактик из обзора SNAP15922 были проведены Тихоновым и Галазутдиновой [12], у половины этих галактик расстояния были определены впервые. Среди наблюдавшихся объектов остались случаи, когда гидирование телескопа оказалось неидеальным, а также галактики с положением TRGB вблизи предела обнаружения и некоторые голубые компактные галактики с высокой звездной концентрацией. Рассмотрение этих сложных случаев является предметом данной работы.

2. Наблюдения и обработка данных. Снимки рассматриваемых галактик были получены с камерой ACS HST с экспозициями 760с в каждом фильтре F814W и F606W. Выбор экспозиций определялся возможностью

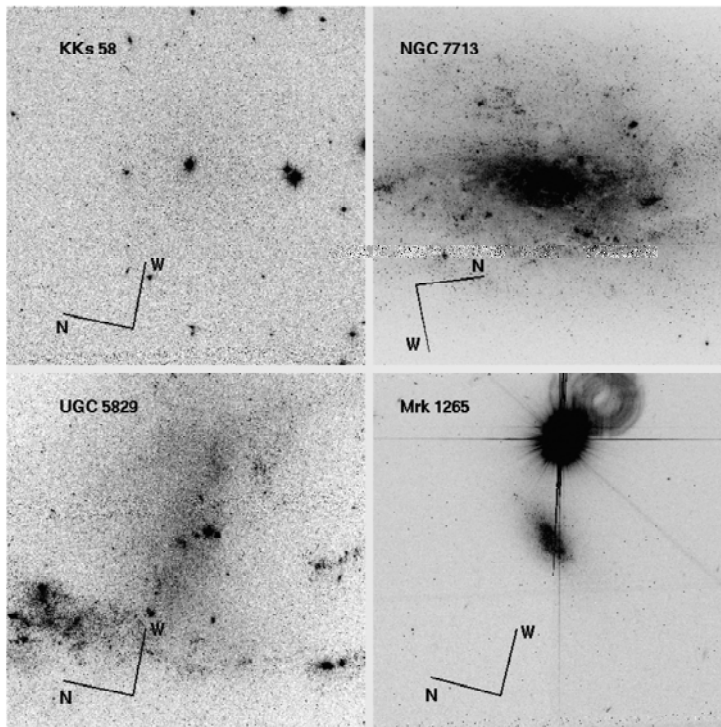


Рис.1. Изображения галактик в фильтре F606W, полученные на ACS-камере космического телескопа Хаббл. Размер снимков 1'.67 x 1'.67, север и запад отмечены стрелками.

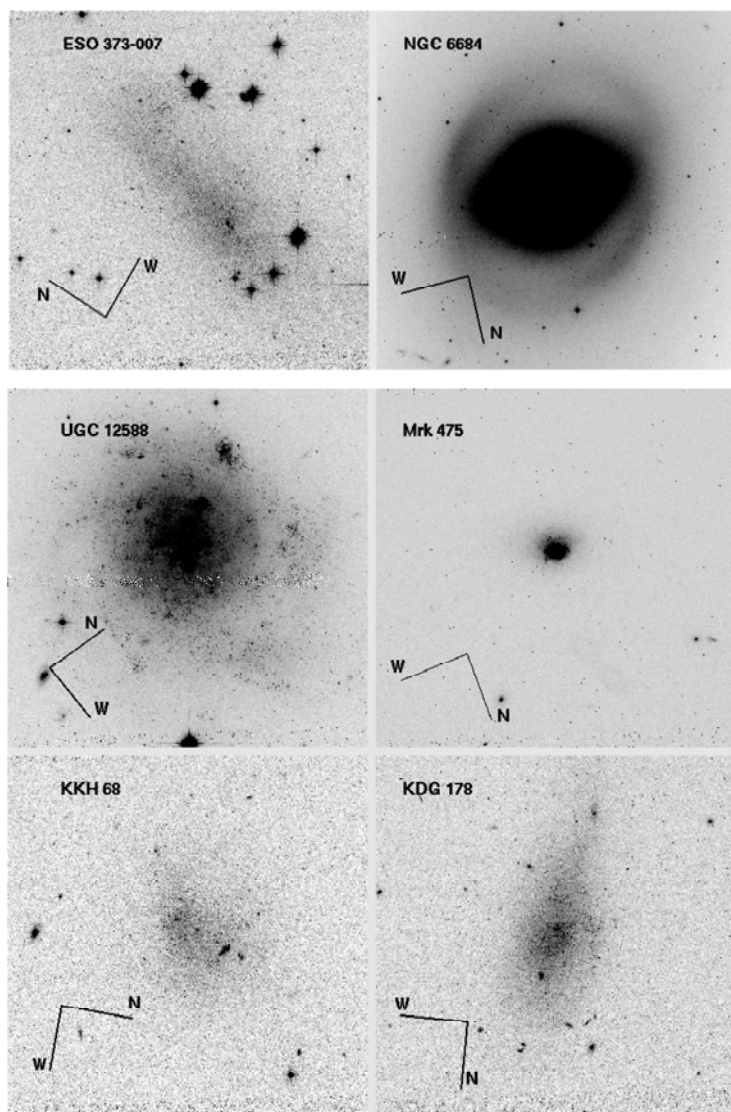


Рис.1. (Окончание).

проведения цикла наблюдений в течение одного орбитального периода HST в SNAP-режиме.

Для звездной фотометрии были использованы стандартные пакеты программ DAOPHOT II [13,14] и DOLPHOT 2.0 [15]. Результаты фотометрии звезд проходили обычную проверку по критериям "CHI" и "SHARP", чтобы исключить диффузные объекты. Методические детали изложены в работе [16].

Изображения 10-ти изученных нами галактик представлены в виде мозаики

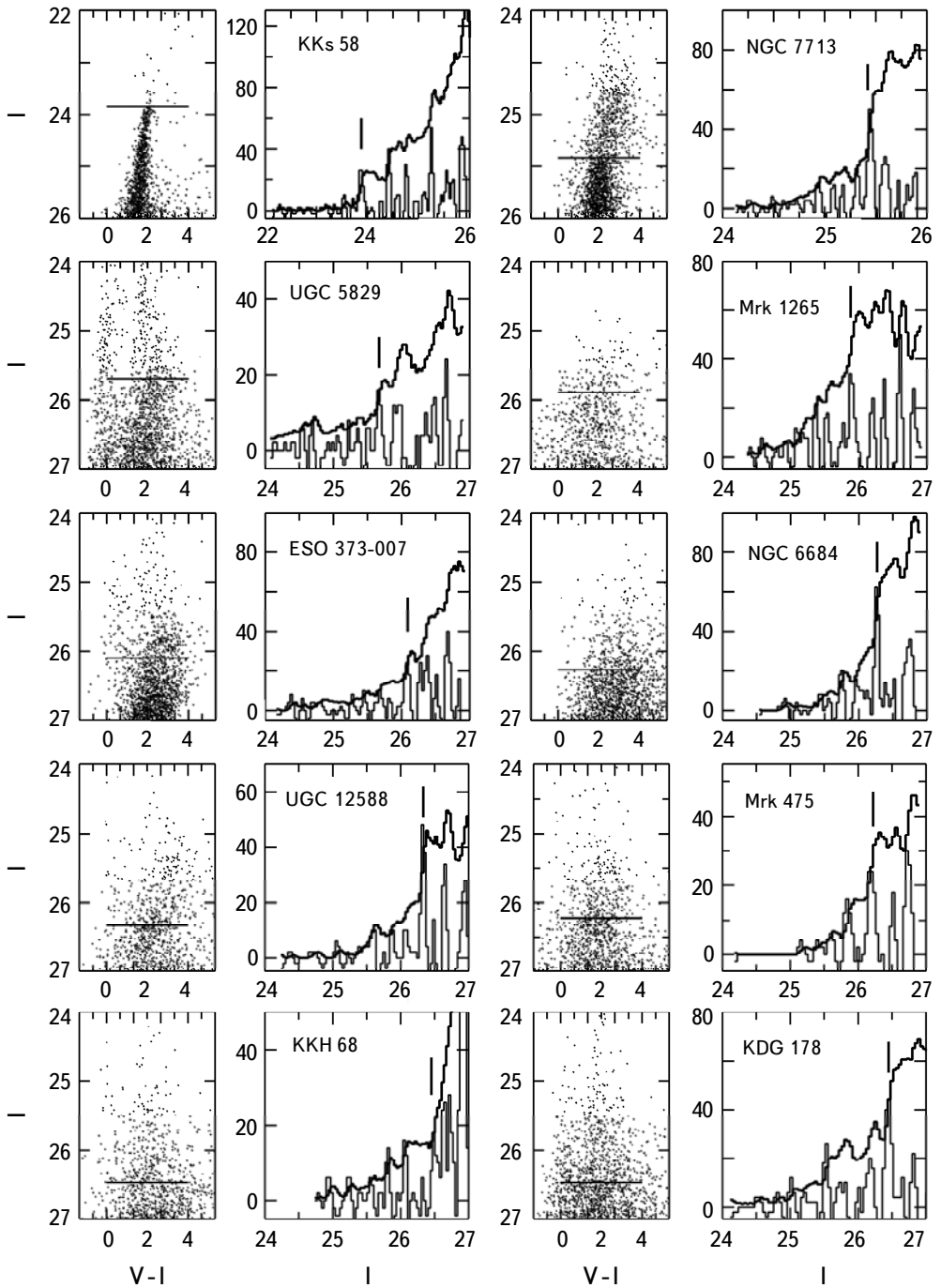


Рис.2. CM-диаграммы для рассматриваемых галактик (левые панели). Горизонтальные линии отмечают положение TRGB. На правых панелях представлены функции светимости красных звезд в линейной шкале.

на рис.1. Размер каждого изображения в фильтре F606W составляет 1'.67. Некоторые крупные галактики попадают в этот формат лишь частично.

Полученные диаграммы цвет-величина (CMD) для каждой из 10-ти галактик показаны на левых панелях рис.2. Правые панели рисунка воспроизводят построенную функцию светимости галактик в линейной шкале. Для построения функции светимости использованы звезды с показателем цвета в интервале $1.0 < (V - I) < 1.7$, соответствующем диапазону цвета звезд ветви красных гигантов. Положение TRGB у галактик отмечено горизонтальной линией. Оно определялось по скачку на функции светимости звезд, для чего была использована функция Собеля [17], максимумы которой соответствуют резким изменениям в числе звезд. Этот метод имеет известные трудности, неоднократно обсуждавшиеся в литературе. Особенно эти трудности проявляются, когда TRGB-галактики располагаются вблизи фотометрического предела (в нашем случае $I_{\text{lim}} \approx 27^{\text{m}}.0$), или если число измеренных звезд в карликовой галактике невелико.

Еще одним фактором, затрудняющим определение положения TRGB, является наличие у галактики подсистемы AGB-звезд, светимости которых лишь немного ярче светимости вершины ветви красных гигантов. Чтобы ослабить роль этого эффекта, мы выбирали для фотометрии звезды на окраине галактики, где относительный вклад AGB-звезд меньше, чем вклад RGB-населения.

Результаты определения расстояний у рассмотренных галактик приведены в табл.1, где (1) - имя галактики в базе данных sa0.ru/lv/lvgdb; (2) - номер галактики в каталоге HyperLEDA [18]; (3) - экваториальные координаты на эпоху J2000.0; (4) - лучевая скорость в км с^{-1} относительно центроида Местной группы; (5) - положение вершины ветви красных гигантов (зв. вел.); (6) -

Таблица 1

TRGB-ПАРАМЕТРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ ГАЛАКТИК

Имя галактики	PGC-номер	RA Dec (2000.0)	V_{LG}	I_{TRGB}	A_1	M_I	DM	D
[KK2000]58	2815824	134600.8-361944	+255	23.85	0.09	-4.11	27.87	3.75
NGC 7713	71866	233615.0-375620	+696	25.45	0.02	-4.10	29.53	8.05
UGC 5829	31923	104241.9+342656	+592	25.69	0.04	-4.11	29.76	8.95
Mrk 1265	32413	104940.4+225019	+534	25.89	0.04	-4.05	29.90	9.55
ESO 373-007	27104	093245.4-331444	+556	26.10	0.20	-4.05	29.95	9.77
NGC 6684	62453	184857.9-651024	+720	26.27	0.10	-3.88	30.05	10.23
UGC 12588	71368	232442.4+412053	+723	26.33	0.22	-4.11	30.22	11.07
Mrk 475	52358	143905.4+364822	+677	26.22	0.02	-4.11	30.31	11.53
KKH 68	2807141	113053.3+140846	+753	26.47	0.06	-4.07	30.48	12.47
KDG 178	42413	124010.0+323931	+763	26.47	0.02	-4.12	30.57	13.00

межзвездное поглощение в направлении галактики (зв. вел.), согласно Шлафли и Финкбейнеру [19]; (7) - положение TRGB (зв. вел.), которое слабо зависит от среднего показателя цвета ($F814W - F606W$) у населения RGB [20]; (8,9) - модуль расстояния галактики (зв. вел.) и линейное расстояние в Мпк. Галактики в таблице ранжированы по величине оценки их расстояния.

Как показывает сравнение оценок расстояния этим методом, сделанных разными авторами, характерная погрешность измерения D составляет $\sim 5\%$. Эта погрешность возрастает до 7-10% с приближением TRGB-галактики к фотометрическому пределу. При этом иногда возникает и систематическая ошибка из-за путаницы в положении вершины ветвей RGB- и AGB-звезд.

Очевидно, что полученные данные об оценках расстояния галактик нуждаются в более детальных комментариях.

3. Индивидуальные случаи.

[KK2000]58. Эта карликовая сфероидальная галактика была впервые разрешена на звезды на снимках с наземным 8-м телескопом LVT [21]. Авторы определили расстояние до галактики, равное 3.36 ± 0.11 Мпк, что ставило эту галактику на переднюю границу группы вокруг Cen A (NGC 5128). Наша оценка расстояния, 3.75 ± 0.18 , лучше соответствует среднему расстоянию группы Cen A (3.68 Мпк). Вблизи центра dSph-галактики находится шаровое звездное скопление, лучевая скорость которого была измерена Фарионом и др. [22]. На

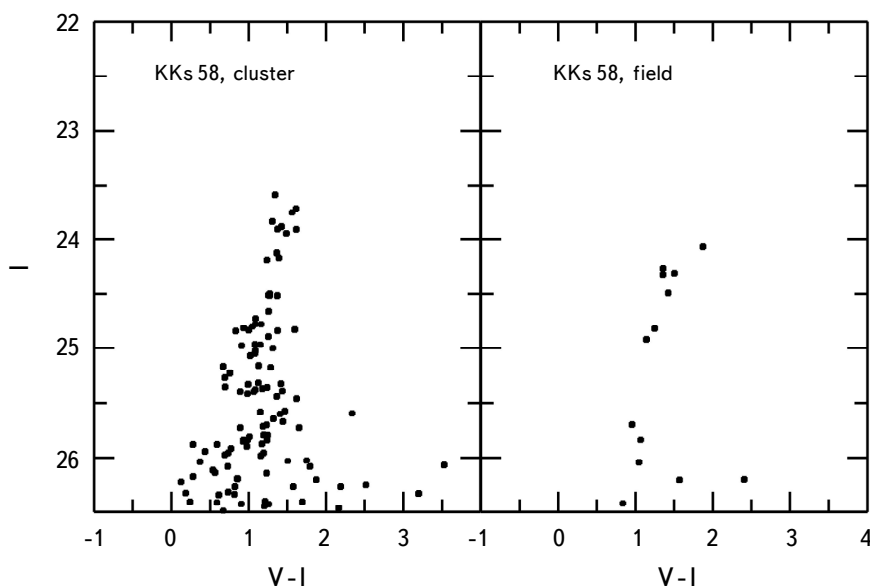


Рис.3. Слева - CM-диаграмма для звезд шарового скопления вблизи центра dSph-галактики [KK2000]58 в апертуре радиусом 2". Справа - CM-диаграмма для звезд соседней площадки с той же апертурой.

снимках, полученных с ACS HST, шаровое скопление хорошо разрешается на звезды ветви красных гигантов (рис.3). Положение TRGB у скопления согласуется с оценкой TRGB по всему телу карликовой галактики.

NGC 7713. Согласно NASA Extragalactic Database (NED; ned.ipac.caltech.edu), эта спиральная галактика позднего типа имеет 23 оценки расстояния по методу Талли-Фишера [23], связывающего светимость галактики с амплитудой ее вращения. Среднее значение расстояния по ним составляет 9.05 ± 1.38 Мпк, согласуясь в пределах стандартной ошибки с нашей оценкой 8.05 ± 0.40 Мпк. На проекционном расстоянии $1^\circ.9$ от нее (или 270 кпк) находится другая спиральная галактика позднего типа, IC 5332, лучевая скорость которой, $V_{LG} = 716 \text{ км с}^{-1}$, и расстояние $D = 9.01$ Мпк [5] указывают на возможное физическое ассоциирование этих галактик.

UGC 5829 = DDO 84 = VV 794. Иррегулярная (Im) галактика с сильно выраженной пекулярной структурой, получившая название "spider" (рис.4). Более половины барионной массы галактики приходится на газовую компоненту, которая, очевидно, подпитывает в ней многочисленные очаги звездообразования. UGC 5829 = KIG 434 входит в Каталог изолированных галактик [24]. Ближайшая относительно массивная галактика NGC 3432 с $V_{LG} = 578 \text{ км с}^{-1}$ и $D = 9.14$ Мпк [5] находится на проекционном расстоянии $3^\circ.0$ или 470 кпк. UGC 5829 является выразительным примером того, что искаженная пекулярная структура галактики может быть вызвана не внешним возмущением, а сугубо внутренними свойствами галактики.



Рис.4. Изображение пекулярной галактики UGC 5829 (VV 794, "Паук"), взято из цифрового обзора неба DECaLS. Размер поля $6' \times 6'$, север - вверх, восток - слева.

Mrk 1265. Эта компактная голубая карликовая галактика находится в ореоле яркой звезды Млечного Пути. Компактность структуры, обилие голубых звезд и наличие ореола проектирующейся звезды понижают точность фотометрии. По нашей оценке расстояние до галактики составляет $D = 9.55 \pm 0.96$ Мпк, что несколько больше оценки ее расстояния $D_{\text{NAM}} = 7.8$ Мпк по лучевой скорости с учетом местного поля скоростей в модели Numerical Action Method [25].

ESO 373-007 = AM 0930-330 = [KK2000]31. Две оценки расстояния этой dIrr-галактики: 8.32 Мпк по соотношению Талли-Фишера и 9.65 Мпк в модели NAM хорошо согласуются с нашей оценкой $D = 9.77 \pm 0.98$ Мпк по TRGB. Рядом, на проекционном расстоянии 15' или 40 кпк расположена более яркая Sd-галактика ESO 373-008 с лучевой скоростью $V_{\text{LG}} = 620 \text{ км с}^{-1}$ и TF-расстоянием 9.68 Мпк. Обе галактики, очевидно, образуют изолированную пару.

NGC 6684. Это галактика раннего типа S0a, в структуре которой видна перемилька и кольцо. На периферии галактики заметна звездная петля и радиальная струя. В NED для нее представлено 14 грубых оценок расстояния разными приближенными методами в диапазоне от 5.5 Мпк до 15.5 Мпк. Измеренное нами TRGB-расстояние, 10.23 ± 1.9 Мпк, приходится как раз на середину этого интервала. На расстоянии $2^\circ.6$ от NGC 6684 находится спиральная галактика NGC 6744 с несколькими спутниками. Ее TRGB-расстояние, 9.51 Мпк, [5] и лучевая скорость $V_{\text{LG}} = 720 \text{ км с}^{-1}$, показывают, что эти галактики, вероятно, являются членами единой диффузной ассоциации.

UGC 12588. Эта dIrr-галактика, видимая анфас, находится в зоне значительного галактического поглощения. Вблизи нее на проекционном расстоянии 42' имеется более яркая спиральная галактика NGC 7640 с $V_{\text{LG}} = 668 \text{ км с}^{-1}$ и TRGB-расстоянием 8.43 Мпк [5]. По нашей оценке TRGB-расстояние UGC 12588, 11.07 ± 1.1 Мпк, заметно превосходит расстояние соседней галактики. Для проверки возможной физической связи обеих галактик необходимы более глубокие наблюдения UGC 12588.

Mrk 475. Голубая компактная галактика, расположенная вдали от других галактик с близкими лучевыми скоростями. Густое звездное поле в основном теле галактики снижает точность проведенной фотометрии. Полученная нами оценка TRGB-расстояния, 11.53 ± 1.15 Мпк, оказалась значительно больше кинематической оценки, 9.18 Мпк (NAM).

KKH 68 = AGC 212837. Положение TRGB у этой dIrr-галактики выше фотометрического предела всего на $\sim 0^{\text{m}}.5$, что делает нашу оценку расстояния, $D_{\text{TRBG}} = 12.47 \pm 1.25$ Мпк, неуверенной. Галактика находится на угловом расстоянии $2^\circ.9$ от спиральной Sb-галактики NGC 3627 (M 66) с TRGB-расстоянием $D_{\text{TRBG}} = 11.12 \pm 0.56$ Мпк [26], которая является самым ярким членом группы в созвездии Льва. Вероятно, KKH 68 принадлежит к

периферийным членам этой группы.

KDG 178 = BTS 147. Эта богатая газом карликовая галактика расположена всего в 26' от яркой спиральной галактики NGC 4631, у которой $V_{LG} = 581 \text{ км с}^{-1}$ и $D_{TRBG} = 7.35 \pm 0.10 \text{ Мпк}$ (EDD). Судя по полученному нами расстоянию, $13.0 \pm 1.3 \text{ Мпк}$, KDG 178 находится позади группы карликов вокруг NGC 4631. Радиальная удаленность этого объекта от группы NGC 4631 косвенно подтверждается относительно большой шириной линии 21-см, $W_{50} = 52 \text{ км с}^{-1}$, которой соответствует TF-расстояние $\geq 11 \text{ Мпк}$.

Помимо перечисленных выше случаев, отметим еще несколько галактик, наблюдавшихся по программе SNAP 15922, но оказавшихся определенно далекими. Ейен и др. [27] оценили для галактики ESO 219-010 (PGC 44110) расстояние 4.29 Мпк методом флуктуаций поверхностной яркости. Эта галактика практически не разрешается на звезды на снимках, полученных с ACS. По фактуре этой галактики можно грубо оценить ее расстояние как $D \approx 15 \text{ Мпк}$.

Две карликовые галактики в контуре скопления Virgo: EVCC 67 и UGC 7983 с лучевыми скоростями, соответственно, 458 км с^{-1} и 565 км с^{-1} , оказались неразрешенными на снимках, полученных с ACS. Очевидно, они являются членами скопления Virgo на расстоянии 16.5 Мпк.

Изолированная dIrr-галактика ККН 46 (PGC 2807128) имеет лучевую скорость $V_{LG} = 409 \text{ км с}^{-1}$ и ширину линии 21-см $W_{50} = 25 \text{ км с}^{-1}$. Она находится в так называемой "Зоне Аномальных Скоростей" [28], где галактики с расстояниями $D = 16 \text{ Мпк}$ имеют большие отрицательные пекулярные скорости около -700 км с^{-1} .

4. Заключительные замечания. Используя снимки, полученные с ACS-камерой на космическом телескопе Хаббла в фильтрах F814W и F606W, мы выполнили PSF-фотометрию и построили диаграммы цвет-величина для звездного населения 10 близких галактик. По скачку на функции светимости красных звезд определены положения вершины ветви красных гигантов и по ним оценены расстояния до галактик. Помимо спиральных галактик NGC 6684 и NGC 7713, остальные объекты относятся к карликовым галактикам dIrr, dIm, BCD, dSph. Лучевые скорости галактик относительно центроида Местной группы заключены в интервале от 250 км с^{-1} до 770 км с^{-1} , а определенные нами расстояния лежат в диапазоне от 3.7 Мпк до 13.0 Мпк с медианой 10.0 Мпк. Нами отмечено еще несколько галактик с лучевыми скоростями $V_{LG} \approx 600 \text{ км с}^{-1}$, которые едва разрешаются на звезды и находятся на расстояниях более 13 Мпк. Эти галактики являются или членами скопления Virgo, или же расположены в зоне аномально больших отрицательных пекулярных скоростей. Полученные данные дополняют картину поля пекулярных скоростей у галактик Местного объема, которая обусловлена

расположением локальных аттракторов с различными массами темного гало.

Работа основана на наблюдениях, выполненных на космическом телескопе Хаббл NASA/ESA по контракту NAS5-26555. В работе использованы базы данных HyperLEDA, NED и EDD. Работа поддержана грантом Министерства науки и высшего образования РФ №075-15-2022-262 (13.МНПМУ.21.0003).

Специальная астрофизическая обсерватория РАН,
e-mail: idkarach@gmail.com ntik@sao.ru

DISTANCES TO TEN NEARBY GALAXIES OBSERVED WITH THE HUBBLE SPACE TELESCOPE

I.D.KARACHENYSEV, N.A.TIKHONOV

Images of 10 galaxies in the F814W and F606W filters, obtained with the ACS camera on the Hubble Space Telescope, were used to construct color-magnitude diagrams for the stellar population of these galaxies. The distances to the galaxies are estimated from the luminosity of the tip of the red giant branch. The considered galaxies have radial velocities from 250 km s^{-1} to 760 km s^{-1} relative to the Local Group centroid and distances in the range from 3.7 Mpc to 13.0 Mpc. Several other observed galaxies with low radial velocities were also noted, the distances of which turned out to be beyond the limit of 13 Mpc.

Keywords: *galaxies - dwarf galaxies: distances - galaxies*

ЛИТЕРАТУРА

1. M.G.Lee, W.L.Freedman, B.F.Madore, *Astrophys. J.*, **417**, 553, 1993.
2. I.D.Karachentsev, O.G.Kashibadze, *Astron. Nachr.*, **342**, 999, 2021.
3. I.D.Karachentsev, K.N.Telikova, *Astron. Nachr.*, **339**, 615, 2018.
4. I.D.,Karachentsev, D.I.Makarov, E.I.Kaisina, *Astron. J.*, **145**, 101, 2013.
5. G.S.Anand, L.Rizzi, R.B.Tully *et al.*, *Astron. J.*, **162**, 80, 2021.
6. I.D.Karachentsev, L.N.Makarova, R.B.Tully *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **638**, 111, 2020.

7. *I.D.Karachentsev, L.N.Makarova, R.B.Tully et al.*, *Astron. Astrophys.*, **643**, 124, 2020.
8. *I.D.Karachentsev, R.B.Tully, G.S.Anand et al.*, *Astron. J.*, **161**, 205, 2021.
9. *I.D.Karachentsev, J.M.Cannon, J.Fuson et al.*, *Astron. J.*, **163**, 51, 2022.
10. *I.D.Karachentsev, L.N.Makarova, G.S.Anand et al.*, *Astron. J.*, **163**, 234, 2022.
11. *I.D.Karachentsev, L.N.Makarova, B.S.Koribalski et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **518**, 5823, 2023.
12. *N.A.Tikhonov, O.A.Galazutdinova*, *Astrophys. Bull.*, **77**, 430, 2022.
13. *P.B.Stetson*, *Publ. Astron. Soc. Pacif.*, **99**, 191, 1987.
14. *P.B.Stetson*, *Publ. Astron. Soc. Pacif.*, **106**, 250, 1994.
15. *A.Dolphin*, DOLPHOT: Stellar photometry, Astrophysics Source Code Library, record ascl:1608.013, 2016.
16. *N.A.Tikhonov, O.A.Galazutdinova, G.M.Karataeva*, *Astrophys. Bull.*, **74**, 257, 2019.
17. *B.F.Madore, W.L.Freedman*, *Astron. J.*, **109**, 1645, 1995.
18. *D.Makarov, P.Prugniel, N.Terekhova et al.*, *Astron. Astrophys.*, **570A**, 13, 2014.
19. *E.F.Schlafly, D.P.Finkbeiner*, *Astrophys. J.*, **737**, 103, 2011.
20. *L.Rizzi, R.B.Tully, D.I.Makarov et al.*, *Astrophys. J.*, **661**, 815, 2007.
21. *O.Müller, M.Rejkuba, M.Pawlowski et al.*, *Astron. Astrophys.*, **629A**, 18, 2019.
22. *K.Fahrion, O.Müller, M.Rejkuba et al.*, *Astron. Astrophys.*, **634A**, 53, 2020.
23. *R.B.Tully, J.R.Fisher*, *Astron. Astrophys.*, **54**, 661, 1977.
24. *V.E.Karachentseva*, *Soobschenia SAO*, **8**, 3, 1973.
25. *E.J.Shaya, R.B.Tully, Yu.Hoffman et al.*, *Astrophys. J.*, **850**, 207, 2017.
26. *T.J.Hoyt, W.L.Freedman, B.F.Madore et al.*, *Astrophys. J.*, **882**, 150, 2019.
27. *H.Jerjen, K.C.Freeman, B.Binggeli*, *Astron. J.*, **119**, 166, 2000.
28. *R.B.Tully*, in "Large-Scale Motions in the Universe" (Princeton: Princeton Univ. Press), 169, 1988.

ОПТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ BZG ОБЪЕКТОВ ИЗ КАТАЛОГА БЛАЗАРОВ BZCAT

А.В.АБРАМЯН, А.М.МИКАЕЛЯН, Г.М.ПАРОНЫАН,
Г.А.МИКАЕЛЯН, А.Г.СУКИАСЯН

Поступила 7 декабря 2022

Принята к печати 3 февраля 2023

В каталоге блазаров BZCAT объекты разделены на 4 типа: BZB, BZQ, BZG и BZU. В данной работе исследуются объекты BZG с целью определения их физической природы. Из 274 BZG объектов 150 имеют оптические спектры в спектроскопическом каталоге SDSS, для которых была проведена детальная спектральная классификация. Радио исследование показало, что эти объекты в основном (69%) имеют плоский радио спектр со спектральным индексом меньше, чем ± 0.5 . С такими радио спектрами доминируют квазары. Но, с увеличением расстояния, в среднем радио спектр становится более крутым.

Ключевые слова: *блазар: квазар: оптическая спектральная классификация: радио спектральный индекс*

1. Введение. Среди активных галактических ядер (АЯГ) наиболее интересны блазары с комбинациями двух подтипов: а) объекты BL Lac (BLL) и особые типы квазаров (QSO) - оптически сильные переменные (OVV) и б) высокополяризованные квазары (HPQ). Блазар характеризуется как очень компактный квазар, связанный с предполагаемой сверхмассивной черной дырой (Super Massive Black Hole) в центре активной гигантской эллиптической галактики. Блазары являются самыми энергетическими объектами во Вселенной [1]. Первоначально объект BL Lac был обнаружен Хоффмейстером [2] как переменная звезда, а позже он был идентифицирован Шмиттом [3] с внегалактическим источником.

Массаро и др. [1] представили каталог блазаров BZCAT v.5, в котором они распределены на 4 типа: BZB (Лацертиды, BL Lac или BLL), BZQ (Квазары), BZG (Галактики) и BZU (Неопределенный класс). В табл.1 дано распределение типов блазаров из каталога BZCAT.

В одной из наших предыдущих работ мы исследовали и классифицировали объекты BZU. Данная работа посвящена детальной спектральной классификации блазаров типа BZG из каталога BZCAT.

2. Выборка объектов. Для исследования были отобраны объекты BZG из каталога BZCAT. Из табл.1 видно, что мы имеем 274 галактики. Для 150

Таблица 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВ БЛАЗАРОВ ИЗ КАТАЛОГА BZCAT

N	Тип блазара	Число	
1	BZB	1151	32.3 %
2	BZG	274	7.7 %
3	BZQ	1909	53.6 %
4	BZU	227	6.4 %
Всего		3561	100 %

из 274 BZG объектов имеются оптические спектры в спектроскопическом каталоге SDSS DR16 [4]. Для этих объектов мы провели детальную классификацию, используя спектры SDSS.

Используя данные разных каталогов и баз данных VCV-13 [5], NASA/IPAC Extragalactic Database (NED) и SDSS [4], мы выяснили какую оптическую классификацию имели эти источники до нашей классификации. В табл.2 представлены эти данные.

Как видно из табл.2, эти объекты не имеют детальную оптическую классификацию. Они были классифицированы как галактики, потому что в оптическом диапазоне (на оптических изображениях) имеют протяженный вид. На рис.1 представлены оптические изображения двух таких протяженных блазаров.

Очень часто измерения спектров SDSS основаны на линиях на уровне шума и низкого качества. В результате автоматические измерения приводят к некоторым неправдоподобным результатам. Таким образом, необходимо

Таблица 2

КЛАССИФИКАЦИЯ BZG ОБЪЕКТОВ ИЗ VCV-13, NED И SDSS

Классификация	SDSS спектры	VCV-13	NASA/IPAC
S1	-	8	5
S2	-	4	1
S3 (LINER)	-	2	-
S?	-	1	-
BL	-	54	49
BL?	-	33	6
QSO	7	2	-
AGN	-	2	-
Galaxy	143	-	-
Flat-Spectrum radio source (FSS)	-	-	21
Всего	150	106	82

тщательно проверить спектры на всех длинах волны и решить, какие измерения следует использовать для дальнейших исследований. Особенно важны те линии, которые используются в диагностических диаграммах ($H\beta$, $[OIII]$ 5007 Å, $[OI]$ 6300 Å, $H\alpha$, $[NII]$ 6583 Å, и $[SII]$ 6716+6731 Å) [6].

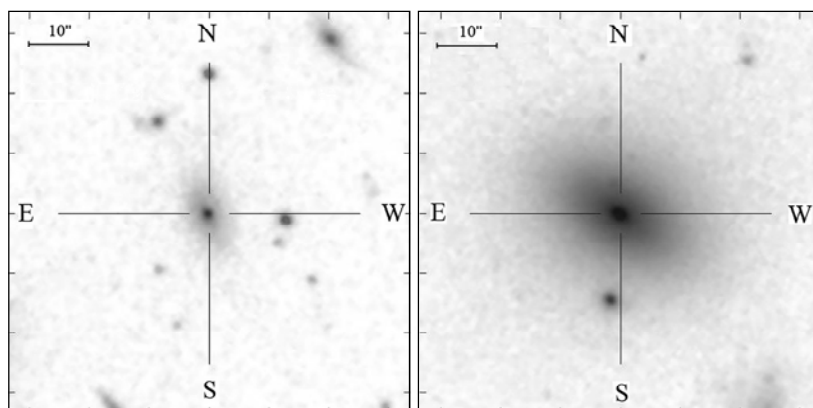


Рис.1. Оптические изображения протяженных блазаров 5BZG J0850+4036 и 5BZG J0906+4124 из SDSS.

3. Спектральная классификация. В этой работе было использовано несколько методов для классификации исследуемых спектров [7,8]:

1. Визуальный метод (с учетом всех тонкостей и эффектов, в т.ч. возможных широких линий, не выявляющихся на диагностических диаграммах).
2. Диагностические диаграммы с использованием отношений интенсивностей линий $[OIII]/H\beta$ и $[OI]/H\alpha$ [9].
3. Диагностические диаграммы с использованием отношений интенсивностей линий $[OIII]/H\beta$ и $[NII]/H\alpha$ [9].
4. Диагностические диаграммы с использованием отношений интенсивностей линий $[OIII]/H\beta$ и $[SII]/H\alpha$ [9].

Для этих объектов в спектрах, в основном, линии $H\alpha$ и $H\beta$ отсутствовали, поэтому мы выполнили классификации только с визуальным методом.

В табл.3 и на рис.2 приведена наша спектральная классификация для 150 BZG объектов с использованием SDSS спектров.

Из табл.3 и рис.2 видно, что эти объекты в основном являются Em и Abs (около 80%) галактиками и до нас не были классифицированы. 30 (20%) объектов (S, LINER и Composite) не имели оптической классификации или изменили класс, только 5BZG J1532+3020 блазар был классифицирован как LINER и остался как LINER. Итак, можно заключить, что мы даем детальную оптическую классификацию практически для всех 150 объектов.

Таблица 3

КЛАССИФИКАЦИЯ BZG ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SDSS СПЕКТРОВ

S1.2	1 (0.7%)
S1.5	1 (0.7%)
S1.8	1 (0.7%)
LINER	18 (12%)
S1.8/LINER	8 (5.2%)
S2.0/LINER	1 (0.7%)
Em	42 (28%)
Abs	78 (52%)
Всего	150 (100%)

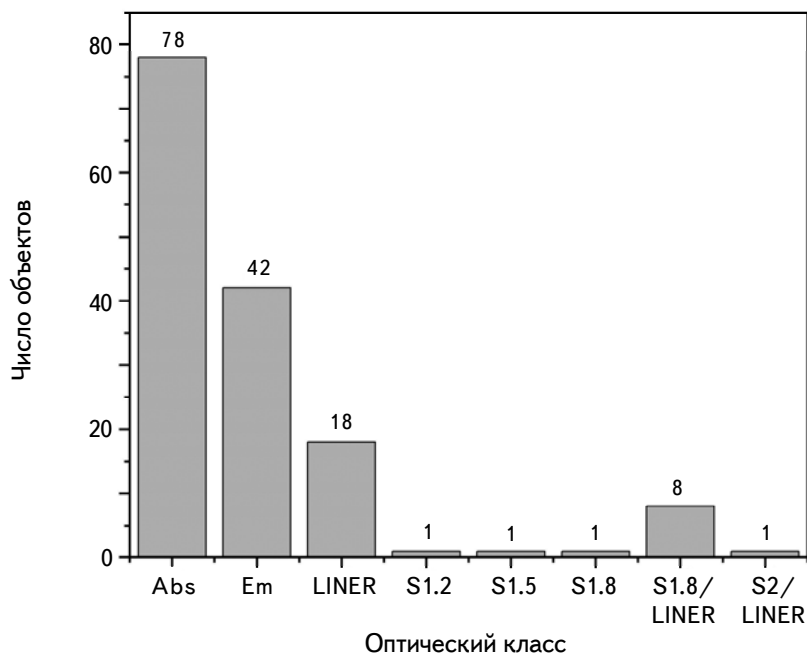


Рис.2. Новая классификация BZG объектов с использованием SDSS спектров.

В табл.4 представлена наша детальная классификация 150 BZG объектов с использованием SDSS спектров.

На рис.3, 4 и 5 представлены типичные спектры BZG объектов типа S, LINER и Composite.

Таблица 4

СПИСОК 150 VZG ОБЪЕКТОВ, КЛАССИФИЦИРОВАННЫХ С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРОВ SDSS

Название объекта (5BZG)	SDSS			Радио спект- ральный индекс	Прежняя оптическая классификация			Новая оптическая классифи- кация
	г	Абсолютная звездная величина	Красное смещение		SDSS	VCV	NED	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
J0001-1031	17.846	-21.72	0.2516	-0.2	GAL	BL	-	Abs
J0014+0854	17.191	-21.84	0.1633	-0.6	GAL	BL	FSS	Em
J0022+0006	18.557	-21.25	0.3057	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0027+2607	18.26	-21.81	0.3645	-0.22	GAL	BL	-	LINER
J0056-0936	15.193	-21.38	0.1031	-0.33	GAL	-	-	Em
J0059-0150	17.135	-21.95	0.1439	-0.18	GAL	-	-	Abs
J0103+1526	17.213	-22.02	0.2461	-0.32	GAL	BL	FSS	Em
J0106+2539	17.41	-21.4	0.1975	0.18	GAL	BL	FSS	LINER
J0146-0551	19.816	-20.99	0.4992	-0.44	GAL	BL	BL Lac	Em
J0153-0118	17.681	-21.96	0.2445	-0.84	GAL	BL?	-	Abs
J0202-0559	17.592	-21.89	0.1895	-0.4	GAL	-	FSS	LINER
J0737+3517	16.665	-22.6	0.2104	-0.97	GAL	?	-	Em
J0741+3205	16.649	-21.9	0.1792	-0.37	GAL	BL	-	Em
J0745+3312	17.329	-22.27	0.2197	-0.85	GAL	-	-	Abs
J0748+2115	17.297	-22.51	0.2631	-	GAL	-	-	Em
J0749+2313	17.026	-22.14	0.1741	-0.43	GAL	BL?	BL Lac?	Em
J0751+2913	17.847	-21.46	0.1944	-	GAL	-	-	Abs
J0751+1730	16.805	-22.51	0.1865	-	GAL	BL	-	LINER
J0753+2921	17.196	-22.17	0.161	-	GAL	BL	-	Abs
J0754+4202	18.998	-21.38	0.3692	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0754+4546	19.327	-21.37	0.4558	-0.88	GAL	-	-	Abs
J0756+3834	16.968	-22.3	0.2156	-0.65	GAL	-	-	S1.8/LINER
J0758+2705	17.224	-21.56	0.0987	-0.01	GAL	BL	BL Lac	LINER
J0809+3122	18.848	-21.02	0.2956	-0.57	GAL	BL	BL Lac	Em
J0809+3455	15.841	-21.75	0.0825	-0.32	GAL	BL	BL Lac	Em
J0810+4911	15.644	-22.69	0.1147	-	GAL	BL	-	Abs
J0810+2846	19.044	-21.11	0.2717	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0814+0857	19.457	-20.94	0.24	-	GAL	BL	-	Abs
J0823+1524	17.121	-22.12	0.1667	-	GAL	-	-	Em
J0828+4153	17.484	-21.96	0.226	-0.58	GAL	?	BL Lac	Abs
J0829+1754	15.622	-21.96	0.0895	-0.37	GAL	BL?	-	Em
J0831+5400	15.301	-21.91	0.0617	0.51	GAL	-	-	LINER
J0834+5534	17.186	-21.62	0.2415	-0.15	QSO	S2	-	LINER
J0835+1517	16.71	-22.06	0.1684	0.05	GAL	-	FSS	Em
J0839+4015	16.854	-22.01	0.1941	-0.53	GAL	-	-	Abs
J0850+4036	17.43	-22.11	0.2666	0.03	GAL	-	FSS	Em
J0850+3455	16.194	-22.12	0.145	-0.1	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0852+2433	18.305	-21.5	0.3576	-0.48	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0856+5418	16.708	-22.75	0.2593	-0.7	GAL	-	-	Abs

Таблица 4 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
J0857+0627	19.289	-20.89	0.3379	-	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J0903+4055	17.128	-22.19	0.1882	-0.37	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J0905+4705	16.794	-22.33	0.1736	-0.23	GAL	-	FSS	Em
J0906+4124	13.663	-21.52	0.0274	0.25	GAL	-	FSS	Em
J0912+5320	15.937	-22.13	0.1017	-0.43	GAL	S2	Sy 2	LINER
J0912+4235	17.689	-22.19	0.2662	-0.88	GAL	-	-	Abs
J0916+5238	16.859	-22.33	0.1904	-0.61	GAL	BL	-	Em
J0927+5545	17.425	-21.97	0.221	-0.54	GAL	-	-	Abs
J0932+3630	16.702	-22.19	0.1538	-0.53	GAL	BL?	-	Em
J0940+6148	17.653	-21.88	0.2105	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J0946+5819	16.053	-22.59	0.1469	-0.42	GAL	-	-	Em
J0948+5535	15.82	-22.66	0.1176	-0.2	GAL	-	-	Em
J0950+1804	17.705	-21.37	0.1544	0.14	GAL	-	FSS	LINER
J1012+3932	17.343	-22.02	0.1709	-0.07	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1018+3128	16.891	-22.1	0.1614	-	GAL	BL?	BL Lac?	Abs
J1020+6250	17.759	-22.01	0.2496	-0.28	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1022+5124	17.574	-21.57	0.1416	-	GAL	-	-	LINER
J1028+0555	18.584	-21.2	0.2336	-	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1028+1702	16.763	-22.18	0.1691	-0.58	GAL	-	-	Abs
J1033+4222	17.337	-22.33	0.211	-0.45	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1041+1324	18.47	-21.47	0.3748	-0.48	GAL	BL	-	Abs
J1041+3901	17.179	-22.26	0.2084	-0.43	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1048+5009	19.121	-20.87	0.4025	-	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1052+4241	16.749	-21.92	0.1362	-0.2	GAL	-	FSS	LINER
J1053+4929	16.014	-21.93	0.1405	-0.29	GAL	BL	BL Lac	Em
J1056+0252	18.026	-21.61	0.236	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1059+4343	18.728	-21.75	0.4587	-0.46	GAL	BL?	-	Abs
J1100+4210	18.139	-21.61	0.3229	-	GAL	BL?	BL Lac?	Abs
J1103+0022	18.045	-21.53	0.2745	-0.37	GAL	BL	BL Lac	Em
J1105+4653	17.259	-21.26	0.1125	-0.25	GAL	-	-	LINER
J1108+0202	16.621	-22.29	0.1576	-0.36	QSO	S1	-	S2.0/LINER
J1119+0900	17.504	-22.8	0.3315	-0.72	GAL	-	-	Em
J1121+4314	17.023	-22.03	0.1854	0.05	GAL	-	-	LINER
J1124+5133	16.79	-22.56	0.235	-0.25	GAL	BL	-	Em
J1132+0515	16.181	-21.76	0.1008	0.11	GAL	S2	-	LINER
J1136+2550	16.779	-21.94	0.1544	-	GAL	BL	BL Lac	Em
J1145-0340	17.11	-22.07	0.1678	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1147+3501	14.581	-22.2	0.0629	0.17	GAL	S2	FSS	S1.8
J1154+0238	17.841	-21.66	0.2107	-0.3	GAL	S1	FSS	S1.8/LINER
J1154+1225	15.825	-21.3	0.0811	0.55	GAL	-	FSS	LINER
J1156+4238	17.155	-21.95	0.1716	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1157+2822	17.882	-21.91	0.3	-	GAL	-	-	Abs
J1158+2450	17.684	-21.83	0.2026	0.06	QSO	-	FSS	S1.8/LINER
J1200+4758	17.811	-22.02	0.2695	-0.87	GAL	-	-	Em
J1201-0007	16.868	-22.13	0.1651	-0.72	GAL	BL?	-	Abs
J1201-0011	18.607	-20.4	0.1637	-	GAL	-	-	Abs
J1210+0223	18.044	-22.38	0.3832	-0.89	GAL	-	-	Abs

Таблица 4 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
J1221+4742	17.504	-21.99	0.2098	-0.58	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1221+0821	17.106	-21.86	0.1318	-0.48	GAL	BL?	BL Lac?	Em
J1223+4650	17.706	-22.03	0.2605	-	GAL	BL?	-	Abs
J1226+2604	17.461	-22.09	0.1761	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1233+5026	17.529	-21.86	0.2068	-0.51	GAL	-	FSS	Em
J1235+1700	18.767	-21.36	0.3806	-0.49	GAL	-	-	Abs
J1238+5406	17.338	-22.18	0.2237	-0.34	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1243+5212	17.301	-22	0.1998	-0.26	GAL	-	-	Abs
J1253+0326	14.789	-20.8	0.0657	-0.25	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1322+1344	18.724	-21.5	0.3763	-	GAL	-	-	Abs
J1323+0439	17.9	-20.82	0.2244	-0.36	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1324+5739	15.811	-22.55	0.1151	-0.06	GAL	BL	-	Em
J1326+1229	17.395	-21.99	0.2042	-	GAL	BL	BL Lac	Em
J1331+5655	18.444	-21.25	0.2701	-	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1341+3959	17.492	-21.98	0.1714	-0.56	GAL	BL	BL Lac	Em
J1341+3716	16.735	-22.21	0.1745	-0.35	GAL	-	FSS	Abs
J1346+2440	17.316	-21.77	0.1675	-0.05	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1348+0756	17.07	-22.28	0.2496	-0.46	GAL	-	-	Abs
J1353+3741	16.769	-22.17	0.2159	-0.09	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1424+3705	17.579	-22.12	0.2896	-0.64	GAL	BL?	-	Abs
J1427+3908	18.277	-21.06	0.1649	-	GAL	BL?	BL Lac	Em
J1428+3912	17.668	-21.98	0.2583	-0.48	GAL	S1	FSS	LINER
J1435-0055	18.17	-21.53	0.2851	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1435+5815	18.339	-21.43	0.3027	-0.31	GAL	BL	-	Abs
J1436+4129	19.92	-20.27	0.4035	-0.26	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1444+6336	18.497	-21.43	0.2979	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1445+0039	17.927	-21.86	0.3062	-	GAL	-	-	Em
J1449+2746	18.162	-21.58	0.2272	-0.65	GAL	BL	FSS	Em
J1451+5800	18.821	-21.54	0.4052	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1504-0248	16.591	-21.65	0.2169	-0.84	GAL	S1	Sy 1	LINER
J1506+0219	17.93	-21.46	0.2202	-	GAL	-	-	Abs
J1512+0203	17.648	-21.54	0.2199	-0.65	GAL	S1	Sy 1	S1.8/LINER
J1516+0015	14.802	-22.11	0.0526	-0.41	QSO	S3	FSS	S1.8/LINER
J1516+2918	16.323	-22.15	0.1299	-0.48	GAL	BL?	-	Abs
J1518+4045	15.075	-21.83	0.0652	-0.36	GAL	S1	Sy 1	S1.8/LINER
J1531+0852	16.883	-22.11	0.1584	-	GAL	-	-	Abs
J1531+4659	18.086	-21.66	0.316	-0.14	GAL	BL?	BL Lac	Abs
J1532+3016	15.435	-21.78	0.0653	-0.05	GAL	BL?	BL Lac?	Em
J1532+3020	17.421	-21.72	0.3621	-0.28	GAL	S3	-	LINER
J1539+4143	15.287	-22.89	0.1194	-0.11	GAL	BL?	-	Em
J1544+0458	18.372	-21.46	0.3262	0.08	GAL	?	BL Lac?	Abs
J1544+5017	19.841	-21	0.494	0.24	GAL	-	-	Em
J1552+3159	20.799	-20.46	0.5843	-	GAL	-	-	Abs
J1604+3345	17.229	-21.64	0.1772	-	GAL	-	-	Abs
J1616+3756	18.038	-21.71	0.202	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J1624+3726	17.363	-21.81	0.1992	-0.63	GAL	BL	-	Abs
J1628+2527	17.28	-22.18	0.2199	-0.6	GAL	BL?	-	Abs

Таблица 4 (Окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
J1637+4547	17.211	-22.12	0.1922	-0.69	GAL	BL	BL Lac	Em
J1643+2131	18.881	-20.52	0.1544	-	GAL	-	-	Abs
J1644+4546	17.224	-22.25	0.2246	-0.41	GAL	BL	BL Lac	Em
J1647+2909	16.102	-22.25	0.133	-0.66	GAL	-	-	Em
J1717+2931	18.061	-21.3	0.278	-	GAL	-	-	S1.8/LINER
J1727+5510	17.203	-22.09	0.2475	0.15	QSO	S?	FSS	S1.8/LINER
J2054+0015	17.099	-21.92	0.1508	-0.02	GAL	BL	FSS	Em
J2055-0506	18.385	-21.28	0.3425	-0.07	GAL	BL	BL Lac	Em
J2059-0037	18.802	-21.23	0.3354	-	GAL	BL	-	Abs
J2116-0628	18.495	-21.42	0.2915	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J2211-0023	19.313	-20.85	0.4479	-	GAL	BL	BL Lac	Abs
J2248-0036	17.337	-22.12	0.2123	-0.37	GAL	BL	BL Lac	Abs
J2256+2618	17.139	-21.64	0.1203	0.01	QSO	S1	Sy 1	S1.5
J2311-0946	19.844	-21.07	0.4901	-	GAL	BL?	-	Abs

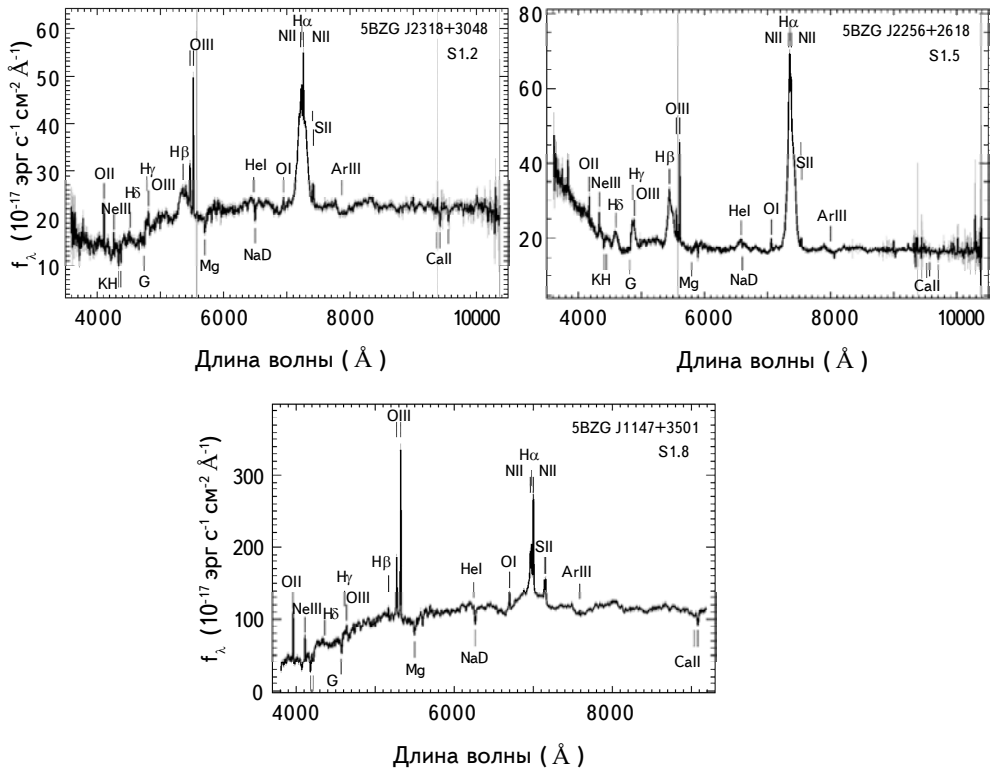


Рис.3. Сейферты.

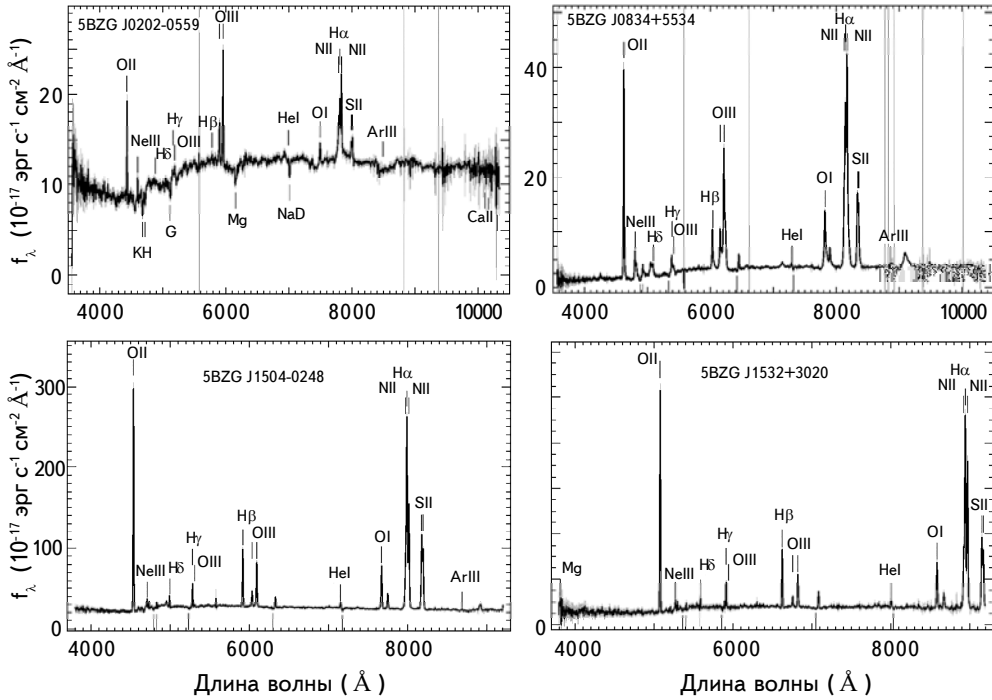


Рис.4. Лайнеры (LINERs).

4. *Радио/оптические свойства BZG.* Для наших объектов была рассчитана абсолютная звездная величина (для SDSS_g диапазона), используя формулу:

$$M = m + 5 - 5\log(D) - k + \Delta m(z), \quad (1)$$

где D - расстояние до объекта [10]. Параметры k и $\Delta m(z)$ были взяты из работы Верон-Сетти и Верона [5]. Расстояния до объектов были рассчитаны, используя эти космологические параметры: $H_0 = 71 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}$, $\Omega_M = 0.29$, $\Omega_\Lambda = 0.71$ и оптический спектральный индекс $\alpha = -0.3$ ($S \sim 9^{-\alpha}$) [5].

Таблица 5

АБСОЛЮТНАЯ ЗВЕЗДНАЯ ВЕЛИЧИНА, РАДИОСПЕКТРАЛЬНЫЙ ИНДЕКС И КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ ДЛЯ BZG ОБЪЕКТОВ

Параметры объектов	Диапазон	Среднее значение
Абсолютная звездная величина (SDSS_g)	$-20.27 \div -22.89$	-21.79
Радио спектральный индекс	$-0.97 \div 0.55$	-0.34
Красное смещение	$0.0274 \div 0.5843$	0.2235

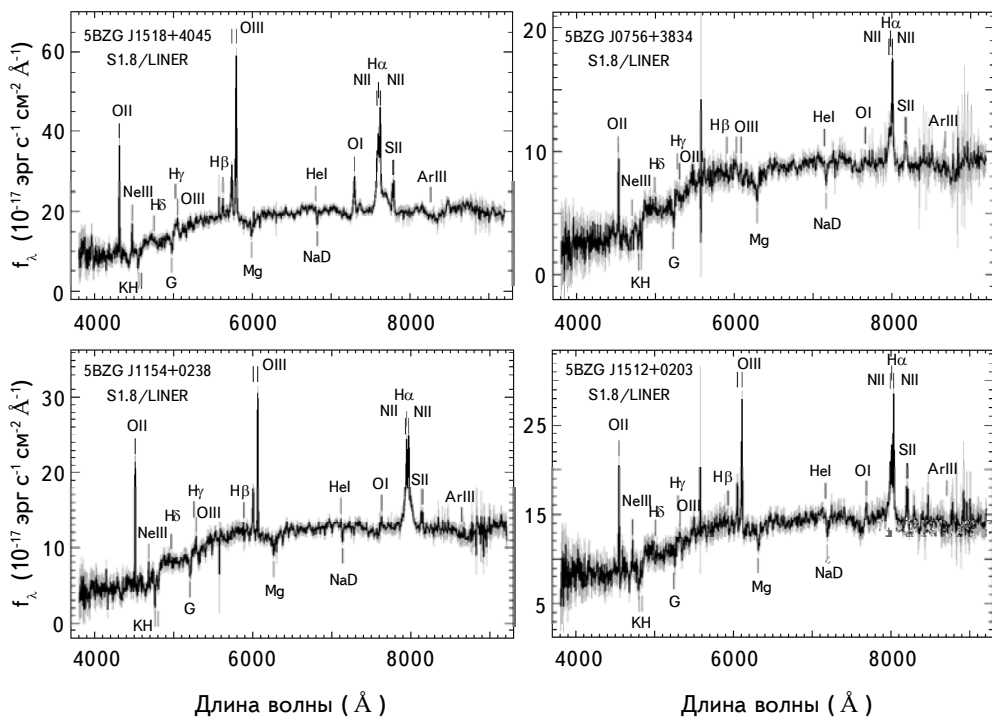


Рис.5. Объекты с составными спектрами (Composite spectrum objects).

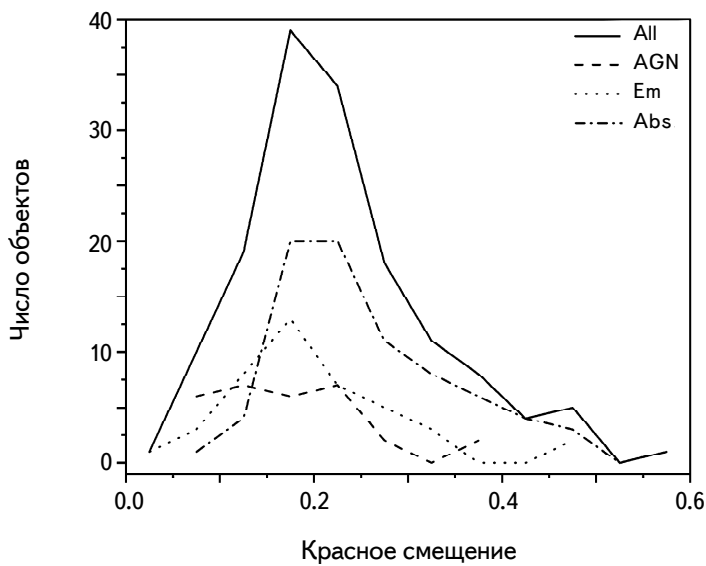


Рис.6. Распределение по красному смещению для 150 исследуемых объектов.

$$D = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \left[\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right]^{0.5} dz, \quad (2)$$

где z - красное смещение, $k = -2.5 \log(1+z)^{1-\alpha}$ а $\Delta m(z)$ поправка k , которая зависит от z [5].

В табл.5 даны наши расчеты по абсолютным звездным величинам. А также есть информация о радиоспектральных индексах, которые были взяты из каталога SPECFIND [11].

На рис.6 дано распределение по красному смещению для 150 исследуемых объектов.

Из табл.5 и рис.6 видно, что исследуемые объекты имеют красные смещения до 0.6. На рис.6, в класс AGN входят Лайнеры (LINER), Сейферты (S) и составные (Composite).

На рис.7 мы построили диаграмму зависимости звездной величины от цвета. Как и на рис.6, здесь (на рис.7) тоже в класс AGN входят Лайнеры

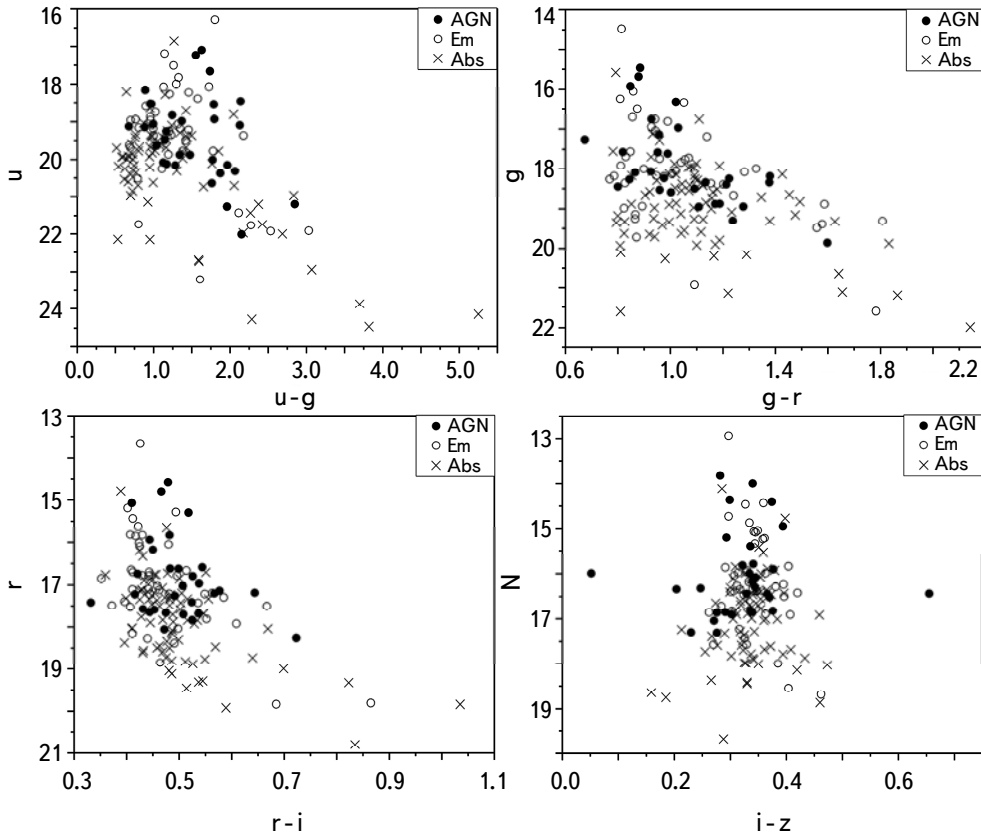


Рис.7. Зависимость звездной величины от цвета,

(LINER), Сейферты (S) и составные (Composite). На рисунке видно, что объекты, которые имеют абсорбционные спектры, в среднем отличаются от объектов, у которых спектры классифицированы как Em и AGN.

5. *Результаты.* Для выяснения оптической природы протяженных блазаров, были выбрали объекты BZG из каталога BZCAT. Из каталога SDSS для 150 из 274 BZG объектов имеются оптические спектры, для которых была проведена детальная спектральная классификация. На рис.3, 4 и 5 видно, что из 150 объектов 30 (20%) имеют качественные оптические спектры. Мы дали новую детальную спектральную классификацию для 149 объектов и лишь один объект остался с прежней классификацией как LINER.

Радио исследование показало, что из 150 объектов 104 имеют радио спектры. Из табл.5 видно, что эти объекты в основном имеют плоский радио спектр (69%). У таких объектов, в радио спектрах, значение радиоспектрального индекса меньше, чем ± 0.5 . С такими радио спектрами доминируют квазары, т.е. исследуемые объекты должны быть родственными, скорее всего Сейфертовскими галактиками (объекты, классифицированные как Em) и скрытыми AGN (объекты, классифицированные как Abs).

Из табл.3 видно, что из 150 объектов 78 имеют Abs спектры, хотя они в каталоге BZCAT представлены как BZG объекты. Наше детальное радио и оптическое исследование этих объектов показало, что у них радио потоки (1400 МГц, FIRST) в среднем составляют 0.16 часть оптического потока (SDSS_r). А также из 78 объектов 66 являются источниками рентгеновского излучения. Это еще раз подтверждает наше предположение о том, что эти объекты могут являться скрытыми AGN.

Работа выполнена при поддержке Комитета по науке РА, в рамках исследовательского проекта No. 21AG-1C053 "Выявление ранних стадий эволюции галактик с помощью многоволнового изучения активных галактик (2021-2026) и гранта Национального фонда науки и образования Армении (ANSEF) PS-astroex-2597 "Поиск и исследование рентгеновских галактик высокой светимости (2022-2023).

НАН РА Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.Амбарцумяна (БАО), Армения, e-mail: abrahamyanhayk@gmail.com

OPTICAL CLASSIFICATION OF BZG OBJECTS FROM
BZCAT BLAZAR CATALOGH.V.ABRAHAMYAN, A.M.MICKAELIAN, G.M.PARONYAN,
G.A.MIKAYELIAN, A.G.SUKIASYAN

In the catalogue of blazars BZCAT, objects are divided into 4 types: BZB, BZQ, BZG and BZU. In this work we investigate BZG objects with a purpose of revelation of their physical nature. 150 out of 274 BZG objects have optical spectra in the SDSS spectroscopic catalog and a detailed spectral classification for these objects has been carried out. Radio study shows that these objects mainly (69%) have a flat radio spectrum. For such objects, in the radio spectra, the value for the radio spectral index is less than ± 0.5 . Objects with such radio spectra are dominated by quasars. However, with the increase of redshift, radio spectrum in average becomes steeper.

Keywords: *blazar: quasar: optical spectral classification: radio spectral index*

ЛИТЕРАТУРА

1. *E.Massaro, A.Maselli, C.Leto et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **357**, 1, 2015.
2. *C.Hoffmeister*, *Astron. Nachr.*, **236**, 233, 1929.
3. *J.L.Schmitt*, *Nature*, **218**(5142), 663, 1968.
4. *R.Ahumada, C.Prieto, A.Almeida et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **249**, 1, id.3, 2020.
5. *M.P.Véron-Cetty, P.Véron*, *Astron. Astrophys.*, **518**, A10, 2010.
6. *D.E.Osterbrock*, *Proc. Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, 9th, Munich, West Germany, Dec 14-19, 1978, New York, New York Academy of Sciences, 22, 1980.
7. *A.M.Mickaelian, H.V.Abrahamyan, G.M.Paronyan et al.*, *Front. Astron. Space Sci.*, **7**, article 505043, 1-8, 2021.
8. *A.M.Mickaelian, H.V.Abrahamyan, G.A.Mikayelian et al.*, *ComBAO*, **69**, 10, 2022.
9. *A.E.Reines, J.E.Greene, M.Geha*, *Astron. J.*, **755**, 2, 2013.
10. *A.G.Riess, L.-G.Strolger, J.Tonry et al.*, *Astrophys. J.*, **607**, 665, 2004.
11. *Y.Stein, B.Vollmer, T.Boch et al.*, *Astron. Astrophys.*, **655**, id.A17, 28, 2021.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-31

PHOTOMETRIC STUDY AND ORBITAL SOLUTION FOR SOME NEWLY DISCOVERED ECLIPSING BINARY SYSTEMS

M.S.ALENAZI¹, M.M.ELKHATEEB²

Received 16 February 2022

Accepted 3 February 2023

We present an orbital solution and light curve analysis for the three newly discovered W UMa systems: V0757 And, IK Lyn, and V0996 Per by means of first CCD observations. New times of minima were estimated and the observed light curves were analyzed using the most recent version of Wilson-Devinney modeling code (WD code) based on model atmospheres by Kurucz. The accepted models revealed some parameters describing the orbit of each system which showed that the primary components in all systems are massive and hotter than the secondary components. The spectral types of the systems' components were adopted and the locations of the systems on the theoretical mass-luminosity and mass-radius relations revealed a good fit for all the systems components except the secondary components of the systems V0996 Per and V0757 And are located above the TAMS track.

Keyword: *eclipsing binaries: orbital solution: evolutionary state*

1. *Introduction.* W UMa variables are known as low mass contact binaries of late type spectral type (F, G or K). They are termed contact binaries because the systems' components (primary and secondary) are in contact and transfer mass and energy through the connecting neck and share a common envelope. The systems are characterized by a short period range between 0.25 to around 1.0 days. Physical parameters of the W UMa systems can be estimated through orbital solution and light curve modelling of the systems' photometric and spectroscopic observations. The parameters can be used to establish and follow their evolutionary status.

The importance of light curve analysis in describing the orbits of newly discovered eclipsing binary systems and hence revealing their evolutionary status has caught the attention of many authors. In this paper we present the first orbital solutions and photometric investigations for three new discovered W UMa systems, V0757 And, IK Lyn, and V0996 Per to estimate their absolute parameters and follow their evolutionary status. The paper consists of five sections: Section 2 is devoted to the systems' observations and times of minima. In section 3, light curve analysis of the systems is performed. Section 4 deals with the evolutionary state of the systems' components. Summary of the results and conclusion are outlined in Section 5.

2. *Observations and times of minima.* The variability of the systems V0757 And, IK Lyn, and V0996 Per were detected for the first time during the observations of other eclipsing binaries. The system V0757 And ($P=0^d.4386$), was observed in the field of view of the known variable star CP And in 2011 by Liakos and Niachros [1], while the system IK Lyn ($P=0^d.258275$) was discovered in the field of view of the known variable star CL Lyn in 2011 by Liakos and Niachros [2]. The system V0996 Per ($P=0^d.38801$) was discovered in the field of view of the variable star V881 Per in 2012 by Liakos and Niachros [3]. Table 1 listed basic information about the studied systems together with the used

Table 1

BASIC INFORMATION OF THE VARIABLE, COMPARISON,
AND CHECK STARS

Star Name	α (2000.0)	δ (2000.0)	B	V	B-V
Variable (V0757 And)	02 ^h 12'13".79	+45°33'14".80	14.45	13.96	0.49
Comparison (GSC 03281-01868)	02 ^h 12'15".38	+45°32'40".42	13.96	-	-
Check (GSC 03281-01193)	02 ^h 12'30".46	+45°34'38".78	12.84	-	-
Variable (IK Lyn)	07 ^h 58'44".09	+54°25'13".80	14.76	14.08	0.68
Comparison (GSC 3787-00524)	07 ^h 58'47".28	+54°24'15".77	13.31	-	-
Check (GSC 3783-00027)	07 ^h 58'45".65	+54°20'40".34	13.92	-	-
Variable (V0996 Per)	03 ^h 00'31".00	+37°59'07".60	15.67	15.01	0.66
Comparison (USNO A2.0 1275-01924782)	03 ^h 00'27".84	+37°59'32".49	-	-	-
Check (USNO A2.0 1275-01922582)	03 ^h 00'25".19	+37°59'20".48	-	-	-

comparison and check stars for each system. All observations were carried out at the Gerostathopoulion observatory of Athens University during the period from Jul 2010 to Nov 2011, using a 40-cm Cassegrain telescope equipped with ST-8XMEi and ST-10XME CCD camera and the BVRI Bessell photometric filters.

The systems V0757 And, IK Lyn were observed in BI pass bands, while the system V0996 Per was observed in BR pass bands. The corresponding phases to each observed data were calculated for all systems observations according to the ephemeris in Table 2 adopted by Liakos and Niachros [1-3]. Fig.1a, b, c displays the observed light curves for the systems.

Table 2

EPHEMERIS EQUATIONS FOR STUDIED SYSTEMS

Star Name	Ephemeris
V0757 And	Min I = HJD 2455493.2680 + 0.438600 E
IK Lyn	Min I = HJD 2455576.5833 + 0.258275 E
V0996 Per	Min I = HJD 2455819.5027 + 0.388010 E

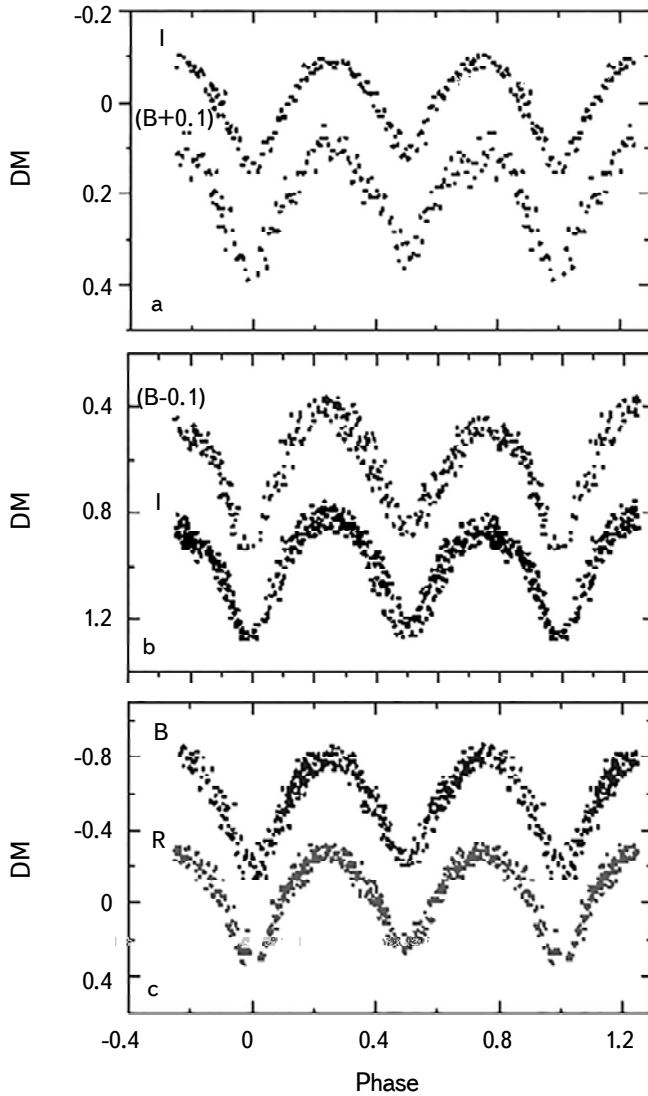


Fig.1. Observed light curves for the systems: a) V0757 And, b) IK Lyn, and c) V0996 Per.

A total of 18 new times of primary and secondary minima were derived for all studied systems using the method of Kwee and Van Worden [4] using the software Minima V2.3 (Nelson [5]) and are listed in Table 3. Since the studied systems are new discovered, the estimated minima can be use with additional estimated ones revealed from future observations to study the period behavior of the systems.

The light levels were measured at four characteristic phases (Max I, Min I, Max II, and Min II) for all the observed light curves of the systems. The bright

Table 3

LIGHT MINIMA OF V0757 And, IK Lyn AND V0996 Per

Star name	HJD	Error	Min	Filter
V0757 And	2455493.2663	0.0009	I	B
	2455493.2668	0.0013	I	I
	2455493.4875	0.0008	II	B
	2455493.4899	0.0022	II	I
IK Lyn	2455598.2754	0.0001	I	B
	2455598.5373	0.0007	I	B
	2455602.2830	0.0012	II	B
	2455598.2719	0.0005	I	I
	2455598.5329	0.0007	I	I
	2455602.2777	0.0007	II	I
V0996 Per	2455819.5099	0.0011	I	B
	2455833.4741	0.0005	I	B
	2455818.5314	0.0007	II	B
	2455835.5996	0.0037	II	B
	2455819.4917	0.0280	I	R
	2455833.4828	0.0013	I	R
	2455818.5274	0.0005	II	R
	2455835.6030	0.0008	II	R

difference between both maxima $D_{\max}$ (Max I - Max II) and minima $D_{\min}$ (Min I - Min II) has been measured together with the amplitude (depth) of the primary A_p (Min I - Max I) and the secondary A_s (Min II - Max I) minima for the observed light curves of the systems V0757 And, IK Lyn and V0996 Per. The calculated parameters are listed in Table 4.

Table 4

LIGHT CURVE LEVELS FOR THE SYSTEMS V0757 And,
IK Lyn AND V0996 Per

Star name	$D_{\max}$	$D_{\min}$	A_p	A_s	Filter
V0757 And	0.0050 ± 0.0002	0.0450 ± 0.0018	0.3100 ± 0.0127	0.2650 ± 0.0108	B
	0.0080 ± 0.0003	0.0100 ± 0.0004	0.2480 ± 0.0101	0.2380 ± 0.0097	I
IK Lyn	-0.0800 ± 0.0003	0.0500 ± 0.0020	0.5800 ± 0.0237	0.5300 ± 0.0216	B
	-0.0500 ± 0.0020	0.0200 ± 0.0008	0.5100 ± 0.0208	0.4900 ± 0.0200	I
V0996 Per	0.0300 ± 0.0012	0.0800 ± 0.0033	0.7050 ± 0.0288	0.6250 ± 0.0255	B
	-0.0100 ± 0.0004	0.0400 ± 0.0016	0.6250 ± 0.0255	0.5850 ± 0.0239	R

3. *Orbital solution.* A photometric analysis for the systems V0757 And, IK Lyn and V0996 Per was performed using the synthetic light curve and

differential corrections program of WD code (Wilson et al. [6]) based on model atmospheres by Kurucz [7]. Temperature of the primary star T_1 was estimated using the (B-V) color index for each system listed in AAVSO (<https://www.aavso.org/vsx/index.php?view=search.top>) by means of colour index temperature relation by Tokunaga [8]. The adopted primary stars temperatures were used as initial values in the light curve modelling. All individual observations of the observed light curves in each band were analyzed instead of normal points. Gravity darkening and bolometric albedo exponents were adopted for the convective envelopes ($T_{\text{eff}} < 7500$ K), therefore we adopted $A_1 = A_2 = 0.5$ (Rucinski [9]) and $g_1 = g_2 = 0.32$ (Lucy [10]). Tables of Van Hamme [11] were used to adopt the bolometric limb darkening using the logarithmic law for the extinction coefficients.

Because of the lack of spectroscopic measurements (radial velocity) for the studied systems, the initial value of mass ratio q was determined using a q -search method. The test solutions in this technique were done at a series of assumed mass-ratios q with the values ranging from 0.10 to 0.90 using mode 3 for over-

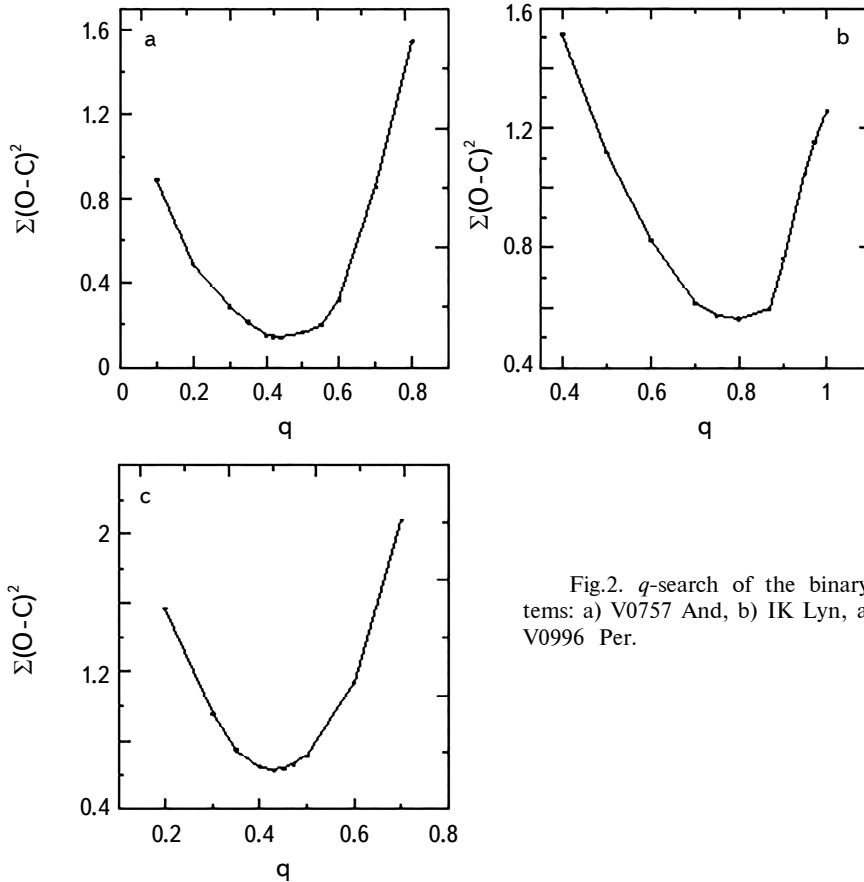


Fig.2. q -search of the binary systems: a) V0757 And, b) IK Lyn, and c) V0996 Per.

contact in WD code. A convergent solution was obtained for each assumed q , and the resulting sum of the squared deviations $\Sigma(O-C)^2$ for each value of q were plotted in Fig.2a, b, c for all studied systems. Initial values of q corresponding to the minima of $\Sigma(O-C)^2$ that obtained for each system are adopted as an initial value in the modeling. In computing the photometric solution, the employed commonly adjustable parameters are; the mass ratio q , the orbital inclination i , the temperature of the primary component T_1 and the temperature of the secondary component T_2 , the surface potential Ω (for Mode 3, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$) and the monochromatic luminosity of primary star L_1 . Relative brightness of secondary star was calculated by the stellar atmosphere model.

Table 5

PHOTOMETRIC SOLUTION FOR THE SYSTEMS V0757 And,
IK Lyn, AND V0996 Per

Parameter	V0757 And	IK Lyn	V0996 Per
i ($^\circ$)	60.44 ± 0.25	67.75 ± 0.29	78.32 ± 0.45
$g_1 = g_2$	0.32	0.32	0.32
$A_1 = A_2$	0.5	0.5	0.5
q (M_2/M_1)	0.4418 ± 0.0016	0.7844 ± 0.0035	0.4222 ± 0.0030
$\Omega_1 = \Omega_2$	2.7562 ± 0.0057	3.2396 ± 0.0091	2.5829 ± 0.0078
T_1 ($^\circ K$)	6333 ± 87	5275 ± 43	5503 ± 33
T_2 ($^\circ K$)	5718 ± 7	4943 ± 5	5373 ± 10
Ω_{in}	2.7621	3.3902	2.7193
Ω_{out}	2.4951	2.9474	2.4641
r_1 pole	0.4256 ± 0.0034	0.3983 ± 0.0075	0.4545 ± 0.0030
r_1 side	0.4534 ± 0.0046	0.4243 ± 0.0100	0.4917 ± 0.0042
r_1 back	0.4811 ± 0.0062	0.4662 ± 0.0162	0.5304 ± 0.0063
r_2 pole	0.2912 ± 0.0049	0.3582 ± 0.0083	0.3140 ± 0.0044
r_2 side	0.3039 ± 0.0059	0.3793 ± 0.0107	0.3321 ± 0.0057
r_2 back	0.3372 ± 0.0100	0.4256 ± 0.0194	0.3913 ± 0.0135
Spot A of star 2			
Latitude		120 ± 4.90	
Longitude		130 ± 5.31	
Spot radius		22 ± 0.90	
Tem. factor		1.30 ± 0.05	
$\Sigma(O-C)^2$	0.03693	0.31561	0.38067

The observed light curves of the studied systems undergo photometric solution analysis. Some trials were made to derive a set of parameters which marginally represent the observed light curves. Condition of Mode 3 (overcontact) in the WD code [6] was applied and the best photometric fitting was reached after several runs.

The accepted solution shows that the primary components in all systems are hotter than the secondary ones. Parameters of the accepted models are listed in

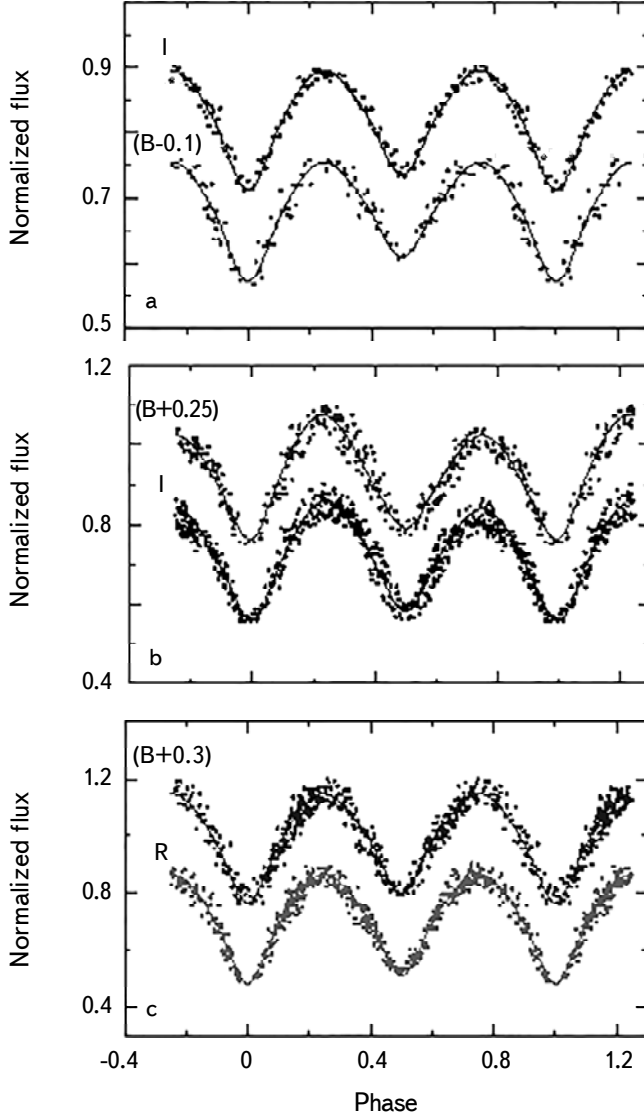


Fig.3. Synthetic (lines) and observed (dots) light curves for the systems: a) V0757 And, b) IK Lyn, and c) V0996 Per.

Table 5, while Fig.3 displays the observed light curves (dots) together with the synthetic light curves (lines). As can be seen in Fig.3b, the observed light curves of the system IK Lyn in BI pass bands show asymmetries, where the observed magnitude between phases 0.1 and 0.3 is brighter than that between 0.7 and 0.9, which could be attributed to O'Connell effect. We treated such change in the curves, by adopting the model solution with suitable spot position in parallel with a non-spot solution to achieve an acceptable matching to the reflected observed

points. As a result, a spotted model was adopted with a hot spot on the secondary star that shows a good agreement between the observed and synthetic light curves. The parameters of the accepted model for the system IK Lyn are listed in Table 5.

Absolute physical parameters for the components of the studied systems were calculated using the empirical T_{eff} -mass relation by Harmanec [12], All the calculated physical parameters for the systems were listed in Table 6. It's clear that the accepted photometric solution and the estimated physical parameters show that the primary components are hotter and massive than the secondary ones in all systems. The spectral types of the systems' components were adopted according to the parameters of the accepted orbital solutions (Popper [13]). Three-dimensional geometrical structure for the studied systems were constructed as shown in Fig.4 using the software Package Binary Maker 3.03 (Bradstreet and Steelman [14]) based on the calculated parameters resulted from the adopted models.

Table 6

**ABSOLUTE PHYSICAL PARAMETERS FOR THE SYSTEMS:
V0757 And, IK Lyn AND V0996 Per**

Parameter	Star name		
	V0757 And	IK Lyn	V0996 Per
$M_1 / M_{\odot}$	1.2937±0.0528	0.9390±0.0383	1.0175±0.0415
$M_2 / M_{\odot}$	0.5716±0.0233	0.7366±0.0301	0.4296±0.0175
$R_1 / R_{\odot}$	1.3797±0.0563	1.0372±0.0423	1.1159±0.0456
$R_2 / R_{\odot}$	1.1878±0.0485	0.9183±0.0375	1.0714±0.0437
$T_1 / T_{\odot}$	1.0961±0.0448	0.9130±0.0373	0.9524±0.0389
$T_2 / T_{\odot}$	0.9896±0.0404	0.8555±0.0349	0.9299±0.0380
$L_1 / L_{\odot}$	2.7434±0.1120	0.7463±0.0305	1.0232±0.0418
$L_2 / L_{\odot}$	1.3513±0.0552	0.4511±0.0184	0.8572±0.0350
M_{bol1}	3.6543±0.1492	5.0677±0.2069	4.7252±0.1929
M_{bol2}	4.4231±0.1806	5.6145±0.2292	4.9174±0.2008
Sp. Type	(F7) ¹ , (G3) ²	(G8) ¹ , (K1) ²	(G6) ¹ , (G7) ²

Note: The subscript/superscript 1 and 2 refers to the primary and secondary components, respectively.

4. Evolutionary state. Evolutionary state of the studied systems was investigated using their estimated physical parameters as listed in Table 6 by means of mass-luminosity (M - L) and mass-radius (M - R) relations and the evolutionary tracks computed by Girard et al. [15] for both zero age main sequence stars (ZAMS) and thermal age main sequence stars (TAMS) with metallicity $z=0.019$. Luminosity-effective temperature (L - T_{eff}) relation of non-rotated models and the empirical mass-effective temperature (M - T_{eff}) relation of the intermediate and low mass eclipsing binaries were also used in investigating the evolutionary states of

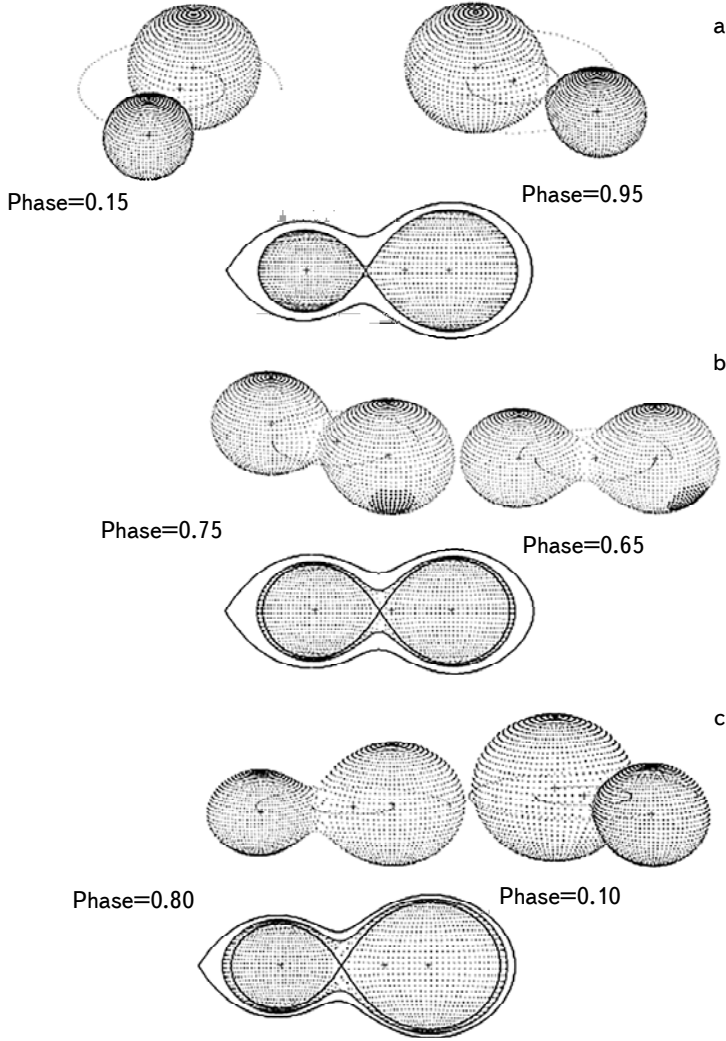


Fig.4. Three dimension structure of the binary systems: a) V0757 And, b) IK Lyn, and c) V0996 Per.

the systems. Fig.5a, b displays the locations of the studied systems' components (S_1 , S_2) on the mass-luminosity ($M-L$) and mass-radius ($M-R$) relations. As shown in Fig.5, the components of the systems are located near the ZAMS for ($M-R$) relation and ($M-L$) relation except for the secondary components of the systems V0996 Per and V0757 And where they lied above the TAMS track. Deviation of these secondary components can be ascribed to the energy transfer from the primary components to the secondary ones through the common convective envelope of these two systems, as suggested by Lucy [18]. Using the non-rotating evolutionary models of

Ekstrom et al [16] at solar metallicity $z=0.014$, we assigned the components of the studied systems to the T_{eff} -luminosity relation as shown in Fig.6 where all components of the studied systems lie on their expected positions.

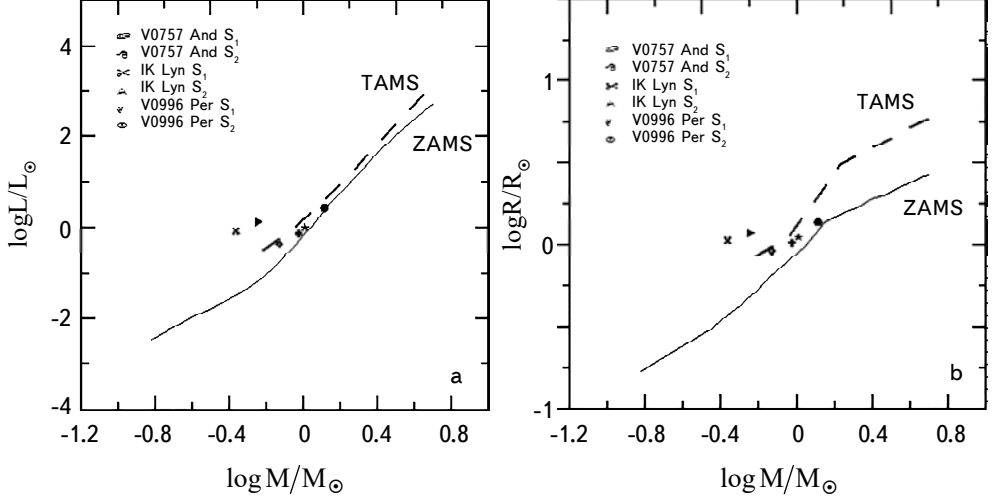


Fig.5. Positions of the components (S1, S2) of the systems V0757 And, IK Lyn and V0996 Per on the theoretical: a) mass-luminosity diagram and b) mass-radius diagram of Girardi et al. [15].

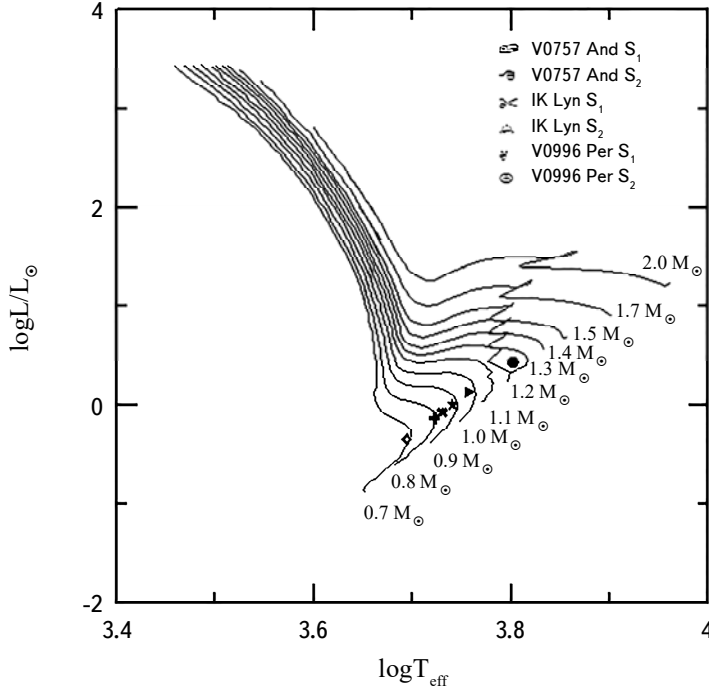


Fig.6. Positions of the components (S1, S2) of the systems V0757 And, IK Lyn and V0996 Per on the effective temperature-luminosity diagram of Ekstrom et al [16].

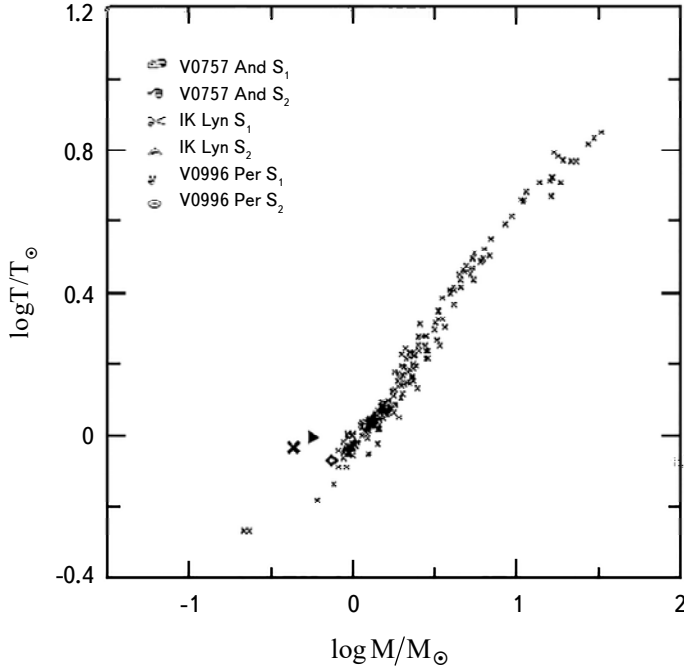


Fig.7. Positions of the components (S1, S2) of the systems V0757 And, IK Lyn, and V0996 Per on the empirical $M-T_{\text{eff}}$ relation for low-intermediate mass stars by Malkov [17].

Mass-effective temperature relation ($M-T_{\text{eff}}$) for the intermediate and low mass stars (Malkov [17]) is displayed in Fig.7 for all the studied systems. The locations of the studied systems on the ($M-T_{\text{eff}}$) diagram showed a good fit for the systems' components excepts for the secondary component (S2) of systems V0996 Per and V0757 And. The behaviour of the components on the $M-T_{\text{eff}}$ diagram is similar to their behaviour on the previously discussed $M-L$ and $M-R$ diagrams, shown in Fig.5a, b, and we ascribed the reason for such behaviour to the same previous argument, that is; energy transfer from the primary to the secondary component of these two systems through the common convective envelope, as suggested by Lucy [18].

5. Discussion and conclusion. The new overcontact systems V0757 And, IK Lyn were discovered in 2011, while the system V0996 Per is discovered in 2012, all by Liakos and Niachros [1-3]. A complete light curves were observed for the systems from July 2010 to Nov 2011 and new times of minima (primary and secondary) were calculated for all studied systems. Results of the first photometric analysis for the systems showed that the primary components in all systems are hotter and massive than the secondary components. The evolutionary state of the systems under study has been investigated to explore their behavior on $M-R$ and $M-L$ relations. Locations of the components of the systems on

$M-R$ and $M-L$ relations revealed a good fit to the ZAMS track except for the secondary components of the systems V0996 Per and V0757 And where they located above the TAMS track. In similar fashion, locations of the systems' components on the $M-T_{\text{eff}}$ diagram showed a good fit for the components of systems except for the secondary components of systems V0996 Per and V0757 And. We ascribed such behaviour, in both cases, to an energy transfer from the primary to the secondary component of the two systems through the common convective envelope, as suggested by Lucy [18].

Acknowledgements. The authors gratefully acknowledge the approval and support of this research study by the grant no. SCIA-2022-11-1678 from the Deanship of Scientific Research at Northern Border University, Arar, Saudi Arabia.

¹ Physics Dept., Faculty of Science, Northern Border University, Arar, Saudi Arabia, e-mail: m.alenazi@nbu.edu.sa

² Astronomy Dept., National Research Institute of Astronomy and Geophysics (NRIAG), Cairo, Egypt, e-mail: magdyelkhateeb55@gmail.com

ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОРБИТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕДАВНО ОТКРЫТЫХ ЗАТМЕННО-ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

М.С.АЛЕНАЗИ¹, М.М.ЭЛЬХАТИБ²

Представлено орбитальное решение и анализ кривых блеска для трех недавно открытых систем W UMa: V0757 And, IK Lyn и V0996 Per с помощью первых ПЗС-наблюдений. Были оценены новые времена минимумов и проанализированы наблюдаемые кривые блеска с использованием самой последней версии кода моделирования Уилсона-Девинни (код WD), основанного на моделях атмосфер Куруца. Принятые модели позволили выявить некоторые параметры, описывающие орбиту каждой системы, которые показали, что первичные компоненты во всех системах массивнее и горячее, чем вторичные компоненты. Спектральные классы компонентов систем и расположение систем по теоретическим соотношениям масса-светимость и масса-радиус показали хорошее соответствие для всех компонентов систем, кроме вторичных компонентов систем V0996 Per и V0757 And, расположенных выше последовательности TAMS.

Ключевые слова: *затменно-двойные системы; моделирование кривой блеска; эволюционное состояние*

REFERENCES

1. *A.Liakos, P.Niachros, J. Peremennye Zvezdy*, **11**, 2, 2011.
2. *A.Liakos, P.Niachros, J. Peremennye Zvezdy*, **11**, 26, 2011.
3. *A.Liakos, P.Niachros, J. Peremennye Zvezdy*, **12**, 2, 2012.
4. *K.Kwee, H.Van Worden, BAN*, **12**, 327, 1956.
5. *R.Nelson*, <http://members.shaw.ca/bob.nelson/software1.htm>, 2002.
6. *R.Wilson, E.Devinney, W. Van Hamme*, ascl.soft04004W, 2020.
7. *R.Kurucz*, In: E.Milon, (Ed.), *Light Curve Modeling of Eclipsing Binary Stars*. Springer-Verlag, New York, p.93, 1993.
8. *A.T.Tokunaga*, *Allen's Astrophysical Quantities*, fourth ed. AIP Press, Springer, New York, 2000.
9. *S.Rucinski*, *Acta Astronaut.*, **19**, 156, 1969.
10. *L.Lucy*, *Z. Astrophys.*, **65**, 89, 1967.
11. *W. Van Hamme*, *Astron. J.*, **106**, 2096, 1993.
12. *P.Harmanec*, *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **39**, 329, 1988.
13. *D.Popper*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **18**, 115, 1980.
14. *D.Bradstreet, D.Steelman*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **201**, 7502, 2004.
15. *L.Girardi, A.Bressan, G.Bertelli et al.*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **141**, 371, 2000.
16. *S.Ekstrom, C.Georgy, P.Eggenberger et al.*, *Astron. Astrophys.*, **537**, 146, 2012.
17. *O.Malkov*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **382**, 1073, 2007.
18. *L.Lucy*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **22**, 381, 1973.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-45

СВЕРХБЫСТРАЯ ПЕРЕМЕННОСТЬ ПРОФИЛЕЙ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ γ Ori

А.Ф.ХОЛТЫГИН¹, В.Б.ПУЗИН², И.В.СОКОЛОВ², М.С.КУРДОЯКОВА¹

Поступила 4 декабря 2022

Принята к печати 3 февраля 2023

Представлены результаты наблюдений высокого временного разрешения ($\Delta T \sim 2$ мин) BV звезды γ Ori на 2-м телескопе обсерватории Пик Терскол. Зарегистрированы регулярные компоненты вариаций профилей линий с периодами от ~ 57 мин до ~ 130 мин. Обсуждается природа таких вариаций.

Ключевые слова: *звезды: спектры - профили линий - переменность: индивидуальные: γ Ori*

1. *Введение.* Профили линий в спектрах OB звезд переменны на временных шкалах от дней до часов [1-3]. Вариации профилей линий традиционно интерпретируются как результат вращательной модуляции [4] или нерадиальных пульсаций (НРП) [5]. Для звезд спектрального класса A периоды вариаций профилей существенно возрастают. Так, согласно Kaufer et al. [6] период вариаций профилей линии в спектре A0 сверхгиганта HD 92207 в результате нерадиальных пульсаций составляет 26 дней.

Вариации профилей линий в спектрах OBA звезд на более коротких шкалах времени не ожидалось. Тем более удивительным было обнаружение быстрых изменений профилей в спектре HD 92207. Hubrig et al. [7] обнаружили изменения профилей линий Si II и Fe II в спектрах звезды на промежутках времени 1-2 мин с амплитудой 3-5% от потока в соседнем с линией континууме.

Эта работа стимулировала нашу программу исследования сверхбыстрой переменности на минутных шкалах в спектрах звезд ранних спектральных классов. Чтобы проверить, широко ли распространены подобные короткопериодические спектральные вариации среди OBA звезд, мы проанализировали вариации профилей линий в спектрах ярких OBA звезд, полученных с высоким (минута и меньше) временным разрешением при использовании редуктора светосилы 6-м телескопа БТА SCORPIO [8].

Наша программа поиска вариаций профилей линий на коротких временных шкалах была продолжена в 2019г. также на 6-м телескопе БТА, но уже с использованием спектрографа ОЗСП (Panchuk et al. [9]), оснащенного

анализатором круговой поляризации и резателем изображений [10].

В 2019-2021гг. спектральные наблюдения проводились также на 1.25-м телескопе Крымской астрономической станции ГАИШ МГУ [11] и на 1-м телескопе САО со спектрографом низкого разрешения UAGS [12], на котором было получено почти 1800 спектров трех ОВА звезд. И, наконец, с 2019 по 2021гг. были выполнены наблюдения на Многомодовом спектрографе MMCS фокуса Кассегрена телескопа Zeiss-2000 обсерватории Пик Терскол [13]. Было получено 424 спектра 17-ти ОВА звезд.

К настоящему времени по программе исследования сверхбыстрой переменности получено свыше 20-ти тысяч спектров 39-ти звезд OBAFGM звезд. В [14,15] представлены обзоры сделанных наблюдений.

Наиболее интересные результаты были получены Холтыгиным и др. [16] в результате анализа быстрых вариаций в спектрах В1а сверхгиганта ρ Leo. Были зарегистрированы регулярные вариации профилей линий H и He с периодами от 2 до 90 мин, а также нерегулярные вариации профилей линий на промежутке времени меньше 1 мин. Использование методов оконного Фурье-преобразования [17] позволило обнаружить транзистентные вариации профилей с временем жизни в несколько десятков минут и со слабопеременными периодами в области частот $0.1 - 0.5 \text{ мин}^{-1}$ (периоды 2-10 мин).

Наличие таких компонентов регулярных вариаций профилей линий было объяснено при предположении, что высокие моды нерадиальных пульсаций нестабильны и могут как затухать, так и генерироваться на коротких шкалах времени от 10 до 100 мин. Подобные транзистентные вариации профилей были также выявлены у быстровращающейся O9.5III звезды [14], что свидетельствует о возможности наличия такого типа спектральной переменности и у других ОВ звезд.

В настоящей работе исследуется переменность профилей линий в спектре В2III звезды γ Ori (Беллатрикс, 24 Ori, HR 1790, HD 35468, 2MASS J05250786+0620589) из анализа переменности профилей линий, полученных на 2-м телескопе обсерватории Пик Терскол в ночи 18/19 и 20/21 января 2019г. Звезда γ Ori известна как низко амплитудная нерегулярная переменная [18]. Быстрая спектральная переменность γ Ori до настоящего времени не изучена, что делает ее интересным объектом исследования.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 представлены основные сведения об изучаемом объекте. Выполненные наблюдения и процедура их обработки описаны в разделе 3. Вариации профилей линий в спектре γ Ori обсуждаются в разделе 4. Результаты Фурье-анализа вариаций профилей линий представлены в разделе 5, вейвлет анализа - в 6, в 7 - обсуждаются результаты исследования и выводы к статье.

2. *Основные сведения о звезде.* Звезда γ Ori является относительно медленно вращающейся звездой спектрального класса B2 II-III [19]. На диаграмме ГР звезда γ Ori находится в области переменных звезд типа β Сер ранних подклассов спектрального класса B [5,20].

Параметры звезды представлены в табл.1, где T_{eff} - эффективная температура звезды, g - ускорение силы тяжести, M - масса звезды, R - ее радиус, $\dot{M}$ - темп потери массы звездой, L - болометрическая светимость, $V \sin i$ - скорость вращения звезды, P_{rot} - период вращения, Age - возраст звезды. Содержание элементов в логарифмической шкале дано в фигурных скобках.

Эффективная температура звезды T_{eff} определяется не вполне надежно. Согласно Simon-Diaz et al. [21] $T_{\text{eff}} = 19500$ К, тогда как Gies et al. [22] (1992) приводят значение $T_{\text{eff}} = 22570$ К. Звезда γ Ori является ярким рентгеновским источником, что косвенно свидетельствует о наличии у нее магнитного поля. Рентгеновская светимость $L_x = 5.5 \cdot 10^{29}$ эрг/с с отношением рентгеновской светимости к болометрической $L_x/L_{\text{Bol}} = 2.2 \cdot 10^{-8}$ [23].

В то же время магнитное поле звезды до настоящего времени не обнаружено. Измерения Butkovskaya, Plachinda [24] дали 4 значения продольной компоненты магнитного поля B_l в интервале от -28.3 до 80.3 Гс. К сожалению, ни одно из этих значений не определено на уровне трех стандартных отклонений, поэтому вопрос о магнитном поле γ Ori остается открытым.

Возраст γ Ori определен нами по ее светимости и температуре, приведенных в табл.1 и положению (см. рис.1) относительно изохрон вращающихся массивных звезд [25]. Полученный возраст близок к возрасту звезд голубого потока Ориона (Orion blue stream), согласно Bouy, Alves [29] (рис.5),

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ γ Ori

Параметр	Значение	Ссылка
T_{eff} , К	22000	[19]
$\log g$	3.60	[19]
$M / M_{\odot}$	8.6 ± 0.3	[26]
$R / R_{\odot}$	5.75	[27]
$\log(\dot{M} / M_{\odot})$	-8.33 ± 0.09	[28]
$\log(L / L_{\odot})$	3.87	[28]
-	3.96	[27]
$V \sin i$ (км/с)	53	[21]
{He}	11.0	[19]
{C}	8.20 ± 0.16	[22]
{N}	7.81 ± 0.22	[22]
{O}	8.68 ± 0.14	[22]
Age (10^6 лет)	19.5 ± 2.5	Настоящая работа

что подтверждает эволюционную близость звезд голубого потока и γ Ori. Значение возраста γ Ori, согласно Tetzlaff et al. [26], равно $(25.2 \pm 2.7) \cdot 10^6$ лет, что представляется завышенным.

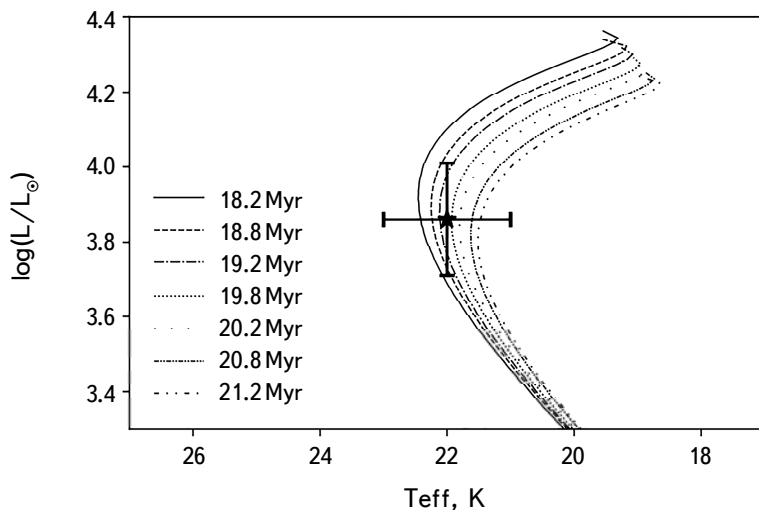


Рис.1. γ Ori на диаграмме Герцшпрунга-Рассела. Приведены изохроны для возрастов τ от 18.2 до 21.2 (в единицах 10^6 лет) согласно Brott et al. [25] для скорости вращения звезды 50 км/с.

3. *Наблюдения.* Наблюдения γ Ori были выполнены на 2-м телескопе обсерватории Пик Терскол ТФ ИНАСАН в ночи 18/19 и 20/21 января 2019г. с использованием эшелле спектрометра MMCS в фокусе Кассегрена.

В табл.2 представлен журнал наблюдений γ Ori. Спектры с номерами 44136-44156, получены в ночь 18/19 января 2019г. с экспозицией 60 с, а для спектров, полученных в ночь 20/21 января 2019г., использовалась экспозиция 50 с.

Спектры были получены в области $\lambda\lambda 3598-7447 \text{ \AA}$ со спектральным разрешением ~ 15000 . Калибровка спектров была выполнена отдельно для каждого из 27 эшелле порядков. Чувствительность матрицы существенно падает к ее краям, поэтому для анализа переменности профилей выбирались линии ближе к середине порядка.

Полученные спектры нормировались на континуум. Для иллюстрации корректности процедуры нормировки усредненные за две наблюдательные ночи, нормированные спектры в области длин волн $\lambda\lambda 4588-4665 \text{ \AA}$ представлены на рис.2. Отличие нормированных спектров, усредненных за разные ночи, не превышает 1%.

4. *Вариации профилей линий.* Профили линий, пригодные для анализа

Таблица 2

ЖУРНАЛ НАБЛЮДЕНИЙ γ Ori

No. спектра	MJD	No. спектра	MJD	No. спектра	MJD
44136	58501.93611	44150	58501.95972	44351	58503.85417
44137	58501.93750	44151	58501.96111	44352	58503.85556
44138	58501.93819	44152	58501.96319	44353	58503.85764
44139	58501.93958	44153	58501.96458	44354	58503.85972
44140	58501.94167	44154	58501.96667	44355	58503.86111
44141	58501.94375	44155	58501.96875	44356	58503.86319
44142	58501.94514	44156	58501.97014	44357	58503.86458
44143	58501.94722	44344	58503.83681	44358	58503.86667
44144	58501.94861	44345	58503.84167	44359	58503.86875
44145	58501.95069	44346	58503.84514	44360	58503.87153
44146	58501.95208	44347	58503.84653	44361	58503.87292
44147	58501.95417	44348	58503.84861	44362	58503.87500
44148	58501.95556	44349	58503.85069	44363	58503.87639
44149	58501.95764	44350	58503.85208	44364	58503.87847

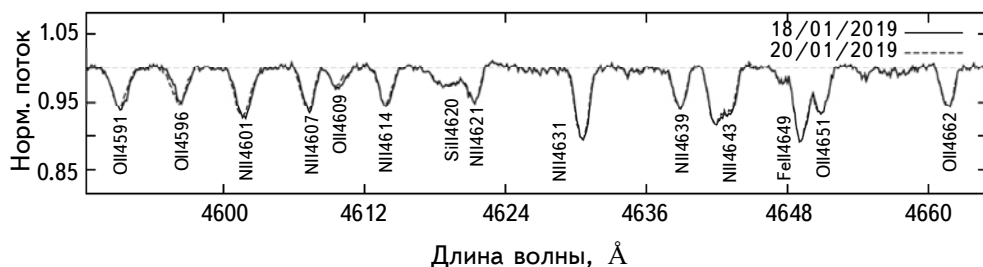


Рис.2. Нормированные спектры γ Ori в области $\lambda\lambda$ 4588 - 4665 Å, усредненные по всем индивидуальным спектрам, полученным в ночи 18 и 20 января 2019г.

их переменности, были нормированы на локальный континуум. Средние нормированные профили линии H β и HeI 4922, полученные в разные ночи наблюдений, показаны на рис.3. Видно, что профили линий меняются от ночи к ночи не более, чем на 1-2% в единицах интенсивности соседнего с линией континуума. В крыльях профиля линии HeI 4922 в спектре γ Ori видны слабые линии OII, SII и FeII.

Характер переменности виден на рис.4, на котором приведены разностные профили $d(V, t_i)$ линий HeI 4922 и HeI 5876, где:

$$d(V, t_i) = F(V, t_i) - \overline{F(V)}. \quad (1)$$

Здесь $F(V, t_i)$ - профиль линии в момент времени $t = t_i$, $V = (\lambda - \lambda_0)/c$ - доплеровское смещение от центральной длины волны линии λ_0 , c - скорость света, а $\overline{F(V)}$ - профиль линии, усредненный по всем анализируемым спектрам.

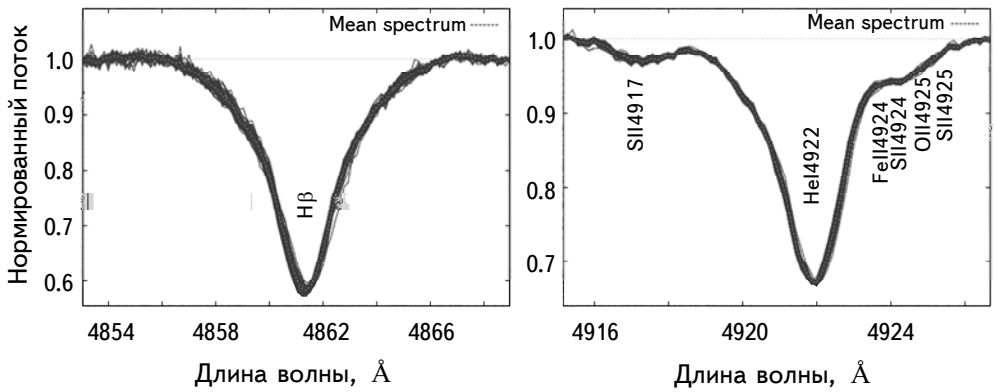


Рис.3. Средние нормированные профили линий H β (слева) и HeI 4922 (справа). Пунктирная линия - средний спектр по всем 42 наблюдениям.

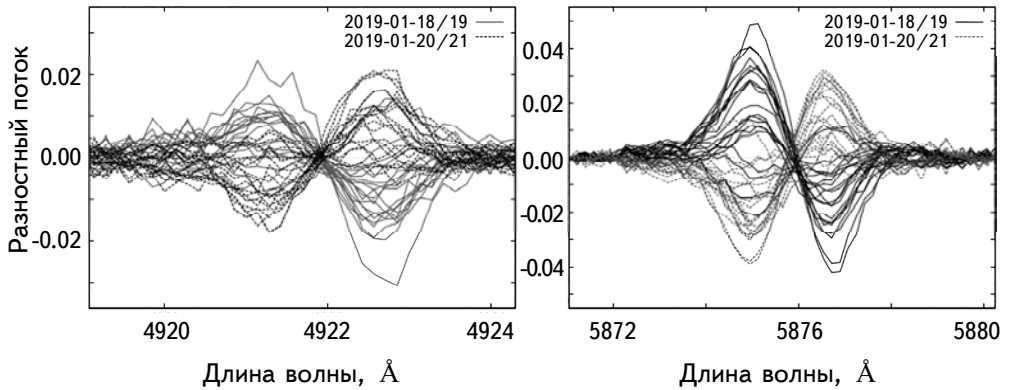


Рис.4. Разностные спектры вариаций профилей линии HeI 4922 (слева) и HeI 5876 (справа) в ночи наблюдений 18/19 января 2019г. (сплошные линии) и 20/21 января 2019г. (пунктир).

Динамические спектры вариаций профилей линий H β в ночи наблюдений 18/19 и 20/21 января 2019г. показаны на рис.5. Для большей наглядности все спектры представлены в единой шкале времени. Начало отсчета ($T=0$) соответствует дате MJD=58501.93611, конец - дате MJD=58503.87847 получения последнего спектра. Полная длительность наблюдений $\Delta T_{max} = 1.94236$ дня (см. табл.2). Как видно из анализа рисунков, характер переменности профилей подобен для разных дат наблюдений.

5. Фурье-анализ профилей линий. Для поиска периодических компонентов в вариациях профилей линий был выполнен Фурье-анализ разностных профилей линий в спектре γ Ori. Для каждой точки на профиле линии, характеризуемой каким-либо значением доплеровского смещения $V = V_k$,

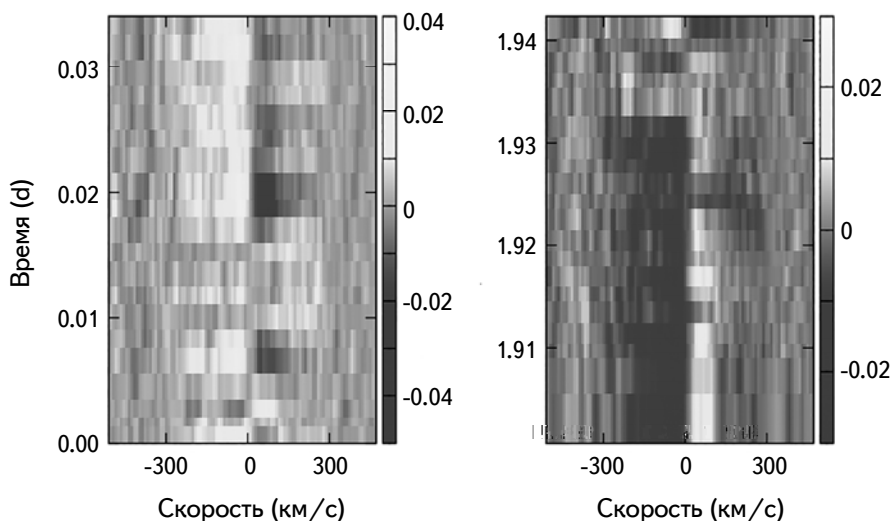


Рис.5. Динамические спектры вариаций профилей линий Н β в ночи наблюдений 18/19 января 2019г. (слева) и 20/21 января 2019г. (справа).

совокупность значений $\{d(V_k, t_i)\}$, $i = 1, \dots, N$, где N - число анализируемых профилей, представляет собой анализируемый временной ряд.

Для поиска регулярных компонентов каждого из таких рядов для всех значений V_k в пределах профиля линии был использован метод CLEAN [30]. В Фурье-спектре присутствуют регулярные компоненты с частотами, соответствующими максимумам амплитуды Фурье-спектра, которые превышают значение, соответствующее выбранному уровню значимости. В табл.3 представлены найденные частоты (колонка 2) и периоды возможных гармонических компонентов вариаций профилей анализируемых линий в часах (колонка 3) и минутах (колонка 4). Уровень значимости, соответствующий найденным компонентам, приведен в 5 колонке таблицы.

В колонках 6-8 табл.3 знак плюс указывает, что соответствующий компонент присутствует в Фурье-спектре, а знак минус -, что на данном уровне значимости он не обнаружен, хотя при большем уровне значимости он может быть зарегистрирован. В последней колонке указано число линий, в вариациях которых обнаружен данный компонент.

Из числа найденных гармонических компонентов вариаций профилей линий были удалены компоненты с частотой, большей частоты Найквиста ν^{Nq} . В силу наличия большого пропуска в рассматриваемом нами временном ряде вариаций профилей линий определим величину ν^{Nq} как наименьшее из значений ν_{18}^{Nq} и ν_{20}^{Nq} , где частота Найквиста для первой ночи наблюдений $\nu_{18}^{Nq} = 0.5/\Delta T^{mean}$, а средний промежуток времени между отсчетами первой

Таблица 3

**ЧАСТОТЫ И ПЕРИОДЫ РЕГУЛЯРНЫХ КОМПОНЕНТОВ
ВАРИАЦИЙ ПРОФИЛЕЙ В СПЕКТРЕ γ Ori**

№.	ν , 1/день	P , час	P , мин	α	H	He	СII+SiII	N_{lines}
1	25.347	0.947 ± 0.019	56.8 ± 1.1	10^{-2}	+	+	+	5
2	17.556	1.367 ± 0.040	82.0 ± 2.4	10^{-4}	-	+	+	4
3	16.547	1.450 ± 0.045	87.0 ± 2.7	10^{-4}	-	+	-	7
4	15.480	1.550 ± 0.052	93.0 ± 3.1	10^{-3}	-	+	+	3
5	14.313	1.677 ± 0.060	100.6 ± 3.6	10^{-5}	-	+	-	4
6	13.515	1.776 ± 0.068	106.6 ± 4.2	10^{-5}	-	+	+	2
7	10.863	2.209 ± 0.105	132.5 ± 6.3	10^{-3}	-	+	+	3

ночи наблюдений $\Delta T^{mean} = T/(N-1)$. Здесь $T=0.0356$ дня - продолжительность наблюдений в ночь 18/19 января 2019г., а $N=21$ - число спектров, полученных за ночь. Аналогичным образом определяется величина ν_{20}^{Nq} . Полученное нами значение $\nu^{Nq} = 247$ день⁻¹.

Верхние пределы ошибок частот компонентов Фурье спектра в табл.3 оценены из соотношения $\Delta\nu \leq 1/T$ (см., например, [31]). Здесь $T=1.9424$ дня - полное время наблюдений γ Ori.

Кроме указанных в табл.3 регулярных компонентов в Фурье-спектре вариаций профилей были обнаружены компоненты с периодами 2.7, 6.7 и 13.0 часа, которые были исключены из таблицы, так как эти периоды превышают суммарную длительность двух рядов наблюдений 149 мин (2.5 часа). Найденные периоды $P_1 - P_7$ для γ Ori ранее не были обнаружены. В то же время подобные периоды были найдены нами для ρ Leo, α^2 CVn, ζ Ori и других звезд (см., например, [14,15]).

На рис.6 найденные частоты вариаций профилей в спектре γ Ori сравниваются с периодограммой кривой блеска γ Ori, полученной по наблюдениям звезды на мини-спутниках BRITe. Компоненты 2-6 табл.3 соответствуют пикам периодограммы. Компонент ν_1 находится вне области частот, представленных на рис.6. Компонент с номером 7 не соответствует никаким пикам периодограммы, что позволяет усомниться в его реальности.

В статье [32] звезда γ Ori с малой амплитудой вариаций блеска в 0.025 mmag рассматривается как опорная звезда для анализа фотометрической переменности ν Eri, однако совпадение пиков периодограммы б с положениями гармонических компонентов вариаций профилей линий противоречит предположению о постоянстве блеска γ Ori. Можно сделать предварительный вывод о принадлежности γ Ori к группе переменных тип β Ser малой амплитуды.

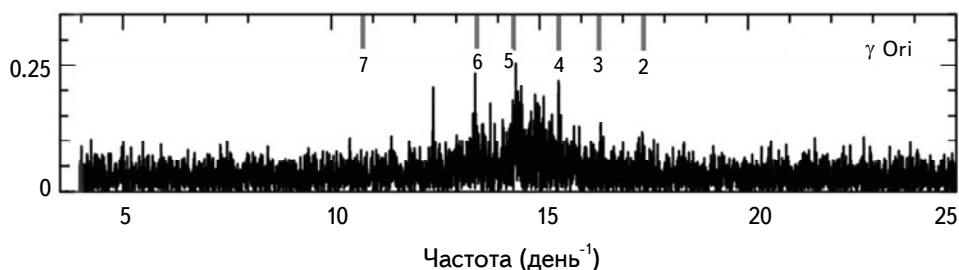


Рис.6. Сравнение найденных частот вариаций профилей в спектре γ Ori с полученными из анализа кривых блеска звезды согласно наблюдениям на спутниках BRITE [32], (рис.3). Цифры на рисунке соответствуют номерам компонентов в табл.3.

6. Вейвлет-анализ профилей линий. Анализ разностных профилей линий в спектрах γ Ori (рис.4) показывает присутствие в них дискретных компонентов. Мелкомасштабные детали профилей вероятно связаны с шумовым компонентом профилей, а детали больших масштабов могут относиться как к регулярному, так и нерегулярному компонентам вариаций профилей. Наиболее подходящим математическим аппаратом для исследования образования и эволюции деталей профилей разных масштабов является вейвлет-анализ с анализирующим МНАТ-вейвлетом:

$$\psi(x) = (1 - x^2) \exp(-x^2/2), \quad (2)$$

с узким энергетическим спектром и равными нулю первым и нулевым моментами.

Используя этот вейвлет, интегральное вейвлет-преобразование разностного профиля линии можно записать в следующем виде [33,34]:

$$W(S, V, t) = \frac{1}{S^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d(V', t) \psi\left(\frac{V - V'}{S}\right) dV', \quad (3)$$

где $d(V, t)$ - исследуемая функция (разностный профиль линии), полученная в момент времени t в пространстве скоростей V . В оригинальном представлении вейвлет-преобразования принимается значение $\beta = 1/2$. В то же время вариация этого параметра позволяет изменять амплитуды функции $W(S, V, t)$ в зависимости от масштаба. При значениях $\beta > 1/2$ увеличивается амплитуда вейвлет-преобразования на малых масштабах, а при $\beta < 1/2$ - на больших масштабах.

Плотность энергии сигнала $E(S, V, t) = W^2(S, V, t)$ характеризует распределение энергии исследуемого сигнала в пространстве $(S, V) = (\text{масштаб}, \text{координата})$ в момент времени t . В этом случае масштабная переменная S выражается в км/с.

Для изучения эволюции деталей разностных профилей нами были

рассчитаны величины $E(S, V, t) = W^2(S, V, t)$ для бальмеровских линий и линий нейтрального гелия для всех моментов времени t , в которые получены спектры звезды в наблюдательные ночи 18/19.01.2019 и 20/21.01.2019. Совокупность функций $E(S, V, t)$ для фиксированных масштабов S назовем *динамическим вейвлет-спектром* вариаций профиля рассматриваемой линии в спектре звезды.

На рис.7 представлены динамические вейвлет-спектры линии $\text{H}\alpha$ в спектре γ Ori, полученные 18/19.01.2019, и 20/21.01.2019. Из анализа рисунка видно, что характер вариаций для спектров, полученных в разные ночи, подобен. На относительно малых масштабах $S \leq 20$ км/с, меньших спектрального разрешения, в вейвлет вариациях профилей виден главным образом вклад шумового компонента профиля. На больших масштабах $S = 120$ км/с детали профилей размываются, а в то же время на масштабах $S = 40 - 80$ км/с детали вариаций профилей хорошо видны.

Для определения характерных масштабов деталей вариаций профилей линий в спектре γ Ori будем использовать усредненный по профилю линии

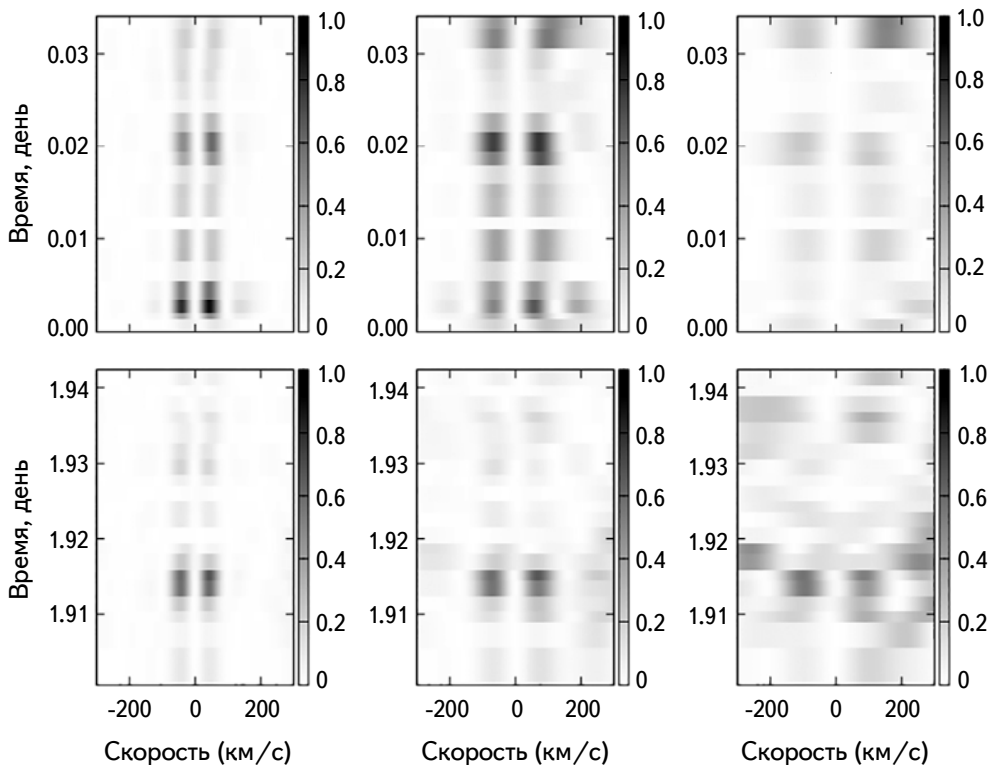


Рис.7. Динамический вейвлет-спектр вариации профилей линии $\text{H}\alpha$ с МНАТ материнским вейвлетом масштабом $S = 40$ км/с (слева), $S = 80$ км/с (посередине) и $S = 120$ км/с (справа) для спектров, полученных 18/19 января 2019г. (вверху) и 20/21 января 2019г. (внизу).

спектр энергии вейвлет-преобразования для спектра, полученного в момент времени t :

$$E_W(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(S, V, t) dV. \quad (4)$$

Индивидуальные спектры энергии вейвлет-преобразования сильно меняются со временем, поэтому определим глобальный спектр энергии:

$$E_W(S) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} E(S, V, t) \right), \quad (5)$$

где N - полное число анализируемых спектров.

Глобальный спектр энергии вейвлет-преобразования для линий $H\alpha$, $H\beta$ и HeI 4471 показан на рис.8. Для выявления размеров деталей разностных спектров было выбрано значение $\beta = 1.1$. На рис.8 видны 3 характерных масштаба: 11-12, 70-90 и 600-700 км/с. Последний масштаб соответствует характерной ширине профилей линий в спектре γ Ori.

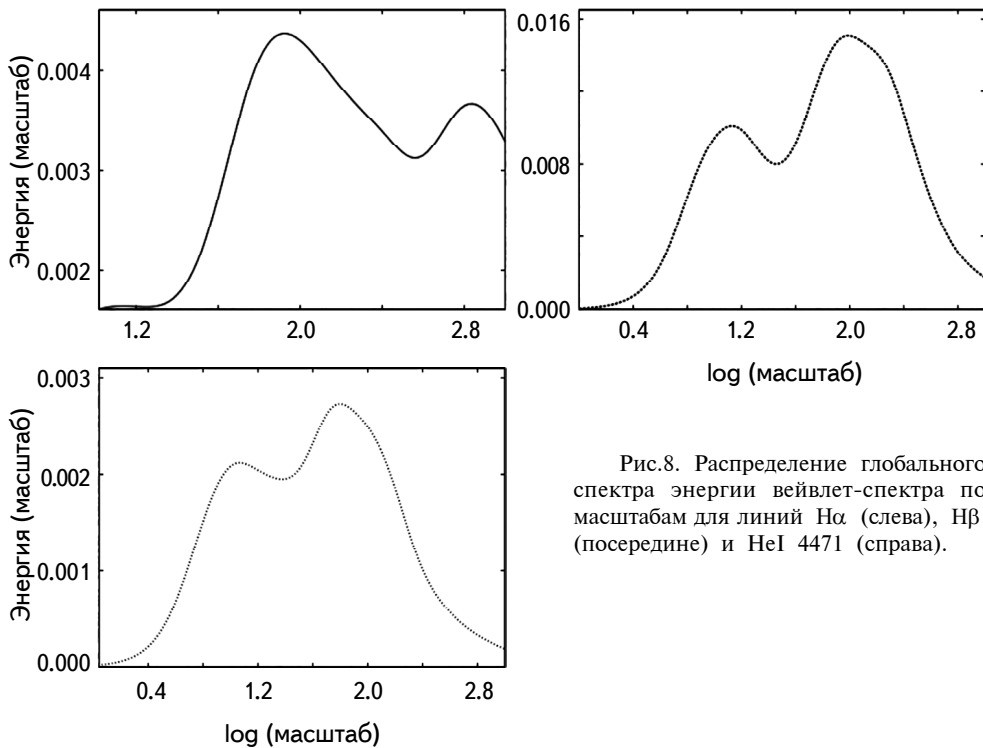


Рис.8. Распределение глобального спектра энергии вейвлет-спектра по масштабам для линий $H\alpha$ (слева), $H\beta$ (посередине) и HeI 4471 (справа).

Согласно оценкам в статье [35], дисперсия скоростей ~ 12 км/с соответствует размеру неоднородностей $\Delta R \sim 0.07 R_{\odot}$, что составляет $0.01 R_*$, где R_* - радиус γ Ori. Для компонента $S = 70 - 90$ км/с размер неоднородностей

$\Delta R \sim 0.4 R_{\odot}$ ($0.07 R_*$). Формирование неоднородностей такого размера в фотосфере или в ветре γ Ori вполне реально.

7. Обсуждение результатов и выводы. К настоящему времени по программе поиска сверхбыстрой переменности профилей линий нами проанализированы спектры 10 звезд: ζ Ori A (O9.2I), HD 93521 (O9Vp), γ Cas (B0.5IVpe), ρ Leo (B1Iab), π Aqr (B1III-IVe), ε Per (B1.5III), λ Eri (B2III), α And (B8IV-V), α^2 CVn (A0Vp) и γ UMi (A2III) [14-16,36]. Также могут быть использованы результаты анализа профилей линий в спектрах HD 92207 (A0Ia), полученных Hubrig et al. [7] со спектрографом FORS 2. Наиболее быстрые регулярные вариации профилей с периодом до 2 мин зарегистрированы в спектре ρ Leo. У этих же звезд найдены вариации профилей линий с периодами 3-5 часов, соответствующим типичным периодам нерадиальных пульсаций низких мод.

Исходя из выполненного анализа, можно сделать выводы о характере переменности профилей линий в спектрах звезд разных спектральных классов. В первую очередь следует отметить уменьшение периодов быстрых вариаций профилей линий в спектрах звезд при переходе от O и ранних B звезд к звездам спектрального класса A. В то время, как самые быстрые изменения профилей линий с периодами 3-5 мин обнаружены у O сверхгиганта HD 93521 и у B0.5IVpe звезды γ Cas, найденные периоды быстрых вариаций профилей у A звезд составляют $\sim 30 - 120$ мин.

Периоды вариаций профилей в спектрах B звезд являются промежуточными по сравнению с найденными для O и A звезд. Обнаружение Холтыгиным и др. [16] вариации профилей линий в спектре ρ Leo с периодом $\sim 18 - 19$ мин подтверждает этот вывод. В то же время выполненных до настоящего времени исследований пока недостаточно для анализа характера переменности профилей в зависимости от класса светимости звезды.

Обращаясь к анализу выполненного нами исследования вариаций профилей линий в спектре γ Ori отметим, что согласно работе [37], γ Ori исключена из списка переменных звезд типа β Сер. Авторы указанной статьи основываются на V-фотометрии γ Ori, представленной в работе Krisciunas, Fisher [38], Krisciunas [39] и Krisciunas & Luedeke [40], где говорится о низкоамплитудной и, возможно, нерегулярной переменности звезды и о малом числе измерений блеска для поиска регулярных компонентов их вариаций. Строго говоря, Stankov, Hundler [37] говорят лишь о недостаточности исследования переменности γ Ori. Настоящая статья дополняет анализ переменности γ Ori, выполненный в статьях [38-40], исследованиями спектральной переменности.

Важно отметить, что определенный вклад в переменность профилей линий могут вносить инструментальные эффекты, связанные с перемещением

изображения звезды внутри щели спектрометра в силу неточностей гидирования, эффектов гнута в системе телескоп-спектрометр, погодных условий и т.д. Не отрицая важность этих эффектов, следует отметить, что возможные случайные сдвиги за счет инструментальных эффектов в значительной степени компенсируются при анализе всех рассмотренных 42-х спектров звезды. Для тестирования гипотезы об инструментальном происхождении обнаруженной регулярной переменности профилей нами был выполнен статистический эксперимент.

Было предположено, что вся имеющаяся переменность профилей линий связана с их инструментальными сдвигами. В этом случае профили конкретной линии, полученные за все время наблюдений, являются одним и тем же профилем, случайно сдвинутым на величину порядка 1 пикселя с добавлением шумового компонента с отношением сигнал/шум таким же, как и реальных спектров. То есть предполагается, что реально профили линий не переменны, а все их вариации - это следствие вклада шумового компонента и инструментальных сдвигов.

При этом оказалось, что для всех рассмотренных линий такая процедура не привела к появлению каких-либо регулярных компонентов вариаций профилей. То есть существуют основания утверждать, что в вариациях профилей в спектре γ Ori присутствуют реальные регулярные компоненты.

Дополнительно была сделана проверка сдвига теллурических линий в спектрах относительно усредненного спектра. Сдвиг теллурических линий единичных спектров составил от $0.02 \text{ \AA}$ до $0.05 \text{ \AA}$, в среднем сдвиг определен на уровне $0.03 \text{ \AA}$. В отдельно взятых спектрах сдвиг исследуемых линий был разнонаправлен со сдвигом теллурических линий, что дополнительно указывает на то, что обнаруженная переменность не связана с инструментальными погрешностями. Результаты численного эксперимента показали, что добавление инструментального сдвига профилей линий в указанном интервале не меняет частот гармонических компонентов вариаций профилей линий.

Исходя из выполненного нами анализа вариаций профилей линий в спектре γ Ori, полученных на 2-м телескопе Цейс-2000 Терскольской обсерватории в январе 2019г., можно сделать следующие выводы:

- Обнаружены изменения профилей бальмеровских линий и линий HeI в спектре γ Ori на минутных шкалах времени на уровне 1-2% от потока в соседнем с линией континууме.
- В вариациях профилей линий H β , H γ , HeI 4471 и HeI 4922 в спектре γ Ori возможно присутствуют регулярные компоненты с периодами от ~ 57 до ~ 130 мин.
- Найденные в настоящей работе периоды регулярных вариаций профилей линий в спектре γ Ori на минутных шкалах времени не были ранее обнаружены.

- Можно предположить, что γ Ori относится к группе переменных звезд типа β Сер малой амплитуды.
- Проведенные спектральные наблюдения γ Ori и их анализ показывают возможность изучения быстрых вариаций профилей широких линий в спектрах ОВА звезд при использовании телескопов класса 1-2 м и, в частности, эшелле-спектрографа 2-м телескопа Цейс-2000.

Настоящее исследование поддержано грантом РФФИ № 19-02-00311 А.

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия, e-mail: afkholtygin@gmail.com

² Институт Астрономии РАН, Россия

SUPERFAST LINE PROFILE VARIABILITY IN SPECTRA OF γ Ori

A.F.KHOLTYGIN¹, V.B.PUZIN², I.V.SOKOLOV², M.S.KURDOYAKOVA¹

Results of observations of high temporal resolution ($\Delta T \sim 2$ min) of the B2V star γ Ori at the 2-m telescope of the at Terskol Peak observatory are presented. Regular components of line profile variations with periods from ~ 57 to ~ 130 minutes were registered. The nature of such variations is discussed.

Keywords: *stars: spectra - line profiles: variability - individual: γ Ori*

ЛИТЕРАТУРА

1. *L.Kaper, H.F.Henrichs, A.W.Fullerton et al.*, Astron. Astrophys., **327**, 281, 1997.
2. *S.Simón-Díaz, C.Aerts, M.A.Urbaneja et al.*, Astron. Astrophys., **612**, A40, 2018.
3. *Y.Nazé, A.Pigulski, G.Rauw et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **494**, 958, 2020.
4. *S.Hubrig, Z.Mikulášek, A.F.Kholtygin et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **472**, 400, 2017.
5. *C.Aerts*, Reviews of Modern Physics, **93**, id. 015001, 2021
6. *A.Kaufer, O.Stahl, B.Wolf et al.*, Astron. Astrophys., **320**, 273, 1997.
7. *S.Hubrig, M.Schoeller, A.F.Kholtygin*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **440**, 1779, 2014.

8. *V.L.Afanasiev, A.V.Moiseev*, *Astron. Lett.*, **31**, 2005.
9. *V.E.Panchuk, G.A.Chuntunov, I.D.Naidenov*, *Astrophys. Bull.*, **69**, 339, 2014.
10. *G.A.Chountunov*, *Astrophys. Bull.*, **71**, 489, 2016.
11. *N.P.Ikonnikova, I.A.Shaposhnikov, V.F.Esipov et al.*, *Astron. Lett.*, **47**, 460, 2021.
12. *V.V.Komarov, A.S.Moskvitin, V.D.Bychkov et al.*, *Astrophys. Bull.*, **75**, 486, 2020.
13. *F.A.Musaev, S.I.Barabanov, A.V.Sergeev*, *INASAN Science Rep.*, **4**, 158, 2019.
14. *A.F.Kholtygin, A.V.Moiseeva, I.A.Yakunin et al.*, *Geomagnetism and Aeronomy*, **61**, 923, 2021.
15. *A.F.Kholtygin, A.V.Moiseeva, I.A.Yakunin et al.*, *Geomagnetism and Aeronomy*, **62**, 1136, 2022.
16. *A.F.Kholtygin, A.A.Batrakov, S.N.Fabrika et al.*, *Astrophys. Bull.*, **73**, 471, 2018.
17. *F.J.Harris*, *Proc. IEEE*, **66**, 51, 1978.
18. *S.Burssens, S.Simón-Díaz, D.M.Bowman et al.*, *Astron. Astrophys.*, **639**, A81, 2020.
19. *K.Lefever, J.Puls, T.Morel et al.*, *Astron. Astrophys.*, **515**, A74, 2010.
20. *A.A.Pamyatnykh*, *Acta. Astron.*, **49**, 189, 1999.
21. *S.Simón-Díaz, A.Herrero*, *Astron. Astrophys.*, **562**, A135, 2014.
22. *D.R.Gies, D.L.Lambert*, *Astrophys. J.*, **387**, 673, 1992.
23. *T.W.Berghoefer, J.H.M.M.Schmitt, J.P.Cassinelli*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **118**, 481, 1996.
24. *V.V.Butkovskaya, S.I.Plachinda*, *JQSTR*, **88**, 17, 2004.
25. *I.Brott, E. de Mink, M.Cantiello et al.*, *Astron. Astrophys.*, **530**, A115, 2011.
26. *N.Tetzlaff, R.Neuhäuser, M.M.Hohle*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **410**, 190, 2011.
27. *M.Challouf, N.Nardetto, D.Mourard et al.*, *Astron. Astrophys.*, **570**, A104, 2014.
28. *C.Cazorla, Y.Naze*, *Astron. Astrophys.*, **608**, A54, 2017.
29. *Y.Bouy, J.Alves*, *Astron. Astrophys.*, **584**, A26, 2015.
30. *D.H.Roberts, J.Lehar, J.W.Dreher*, *Astron. J.*, **93**, 968, 1987.
31. *B.B.Вутязев*, *Анализ неравномерных временных рядов*, СПб.: Изд. СПбГУ, 2001.
32. *G.Handler, M.Rybicka, A.Popowicz et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **464**, 2249, 2017.
33. *N.M.Astaf'eva*, *Physics Uspekhi*, **39**, 1085, 1996.
34. *A.A.Koronovskii, A.E.Khramov*, *Continuous wavelet analysis and its applications*, М., Fizmatlit (in russian), 2003.
35. *N.A.Kudryashova, A.F.Kholtygin*, *Astron. Rep.*, **45**, 287, 2001
36. *A.F.Kholtygin, M.A.Burlak, Yu.V.Milanova et al.*, *Astron. Tsirk.*, **1652**, 2022.
37. *A.Stankov, G.Hundler*, *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, **158**, 193, 2005.
38. *K.Krisciunas, D.Fisher*, *IBVS*, No. 3227, 1988.
39. *K.Krisciunas*, *IBVS*, No. 4028, 1994.
40. *K.Krisciunas, K.U.Luedeke*, *IBVS*, No. 4355, 1996.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-61

ПОТОКИ ХЕРБИГА-АРО И МОЛОДЫЕ ЗВЕЗДЫ В ТЕМНОМ ОБЛАКЕ DOBASHI 5006

Т.А.МОВСЕСЯН¹, Т.Ю.МАГАКЯН¹, А.С.РАСТОРГУЕВ²,
А.Р.АНДРЕАСЯН¹

Поступила 15 января 2023

При изучении изолированного темного облака Dobashi 5006 ($l = 216^\circ.7$, $b = -13^\circ.9$) были обнаружены два новых потока Хербига-Аро: один несомненный (HH 1179) и один предположительный, связанные с инфракрасными источниками 2MASS 06082284-0936139 и 2MASS 06081525-0933490. Судя по их спектральным распределениям энергии, оба источника могут быть объектами Class I со светимостями порядка $23 L_\odot$ и $3.6 L_\odot$, соответственно. Эти источники входят в находящееся внутри темного облака небогатое звездное скопление MWSC 0739, исследование которого по данным обзора Gaia DR3 позволило обнаружить 17 звезд, являющихся его вероятными членами. Приведен их список и основные параметры. Расстояние скопления оценено в 820 пк, избыток цвета на пути до скопления $E(BP - RP) \approx 1.05$ mag. Все эти звезды являются PMS-объектами, большая их часть - оптически переменные. Сделан вывод, что обнаруженная компактная зона звездообразования в облаке Dobashi 5006 имеет возраст не более нескольких млн лет, и этот процесс продолжается до настоящего времени.

Ключевые слова: *объекты Хербига-Аро: молодые звезды: Dobashi 5006*

1. Введение. Одним из основных признаков активного процесса звездообразования в темных облаках является присутствие объектов Хербига-Аро. С другой стороны, подобными же индикаторами можно считать наличие глубоко погруженных в облако инфракрасных (ИК) источников с характерным для молодых звездных объектов непрерывным спектром, а также звезд, связанных с компактными отражательными туманностями.

Поиски и исследования объектов Хербига-Аро проводятся в Бюраканской обсерватории уже несколько десятилетий. В последние годы был инициирован новый узкополосный обзор темных облаков с помощью 1-м телескопа Шмидта и узкополосных светофильтров: Byurakan Narrow Band Imaging Survey (BNBIS). Вначале поиски велись в основном в тех темных облаках, где присутствовали звезды, связанные с так называемыми кометарными отражательными туманностями. Впоследствии к списку целей для обзора добавились темные облака с погруженными в них яркими инфракрасными источниками. Первые результаты данного обзора, относящиеся к областям звездообразования Mon R1 и LDN 1652, ранее были опубликованы в [1,2].

В данной статье представлены результаты изучения объектов внутри темного облака Dobashi 5006 [3]. Данное темное облако вместе с соседним Dobashi 5007 составляет небольшую изолированную группу с галактическими координатами $l = 216^{\circ}.7$, $b = -13^{\circ}.9$.

Внутри облака Dobashi 5006 находится группа туманных звезд, которая была включена в каталог звездных скоплений Млечного Пути как MWSC 0739 [4] (см. рис.1). Вероятно, впервые внимание на это поле было обращено в работе Гюльбудагына и др. [5], где был отмечен туманный объект NHL 35a. Из-за отсутствия в этой статье описания и идентификационной карты, невозможно точно указать, какой именно из туманных объектов, которыми богата данная область, соответствует предположительному объекту Хербига-Аро, обозначенному авторами [5] как NHL 35a. На картах обзора WISE в данной области наблюдаются яркие ИК-источники, и это тоже может быть указанием на процесс активного звездообразования. Вся эта группа представляла достаточный интерес, чтобы быть включенной в нашу программу наблюдений.

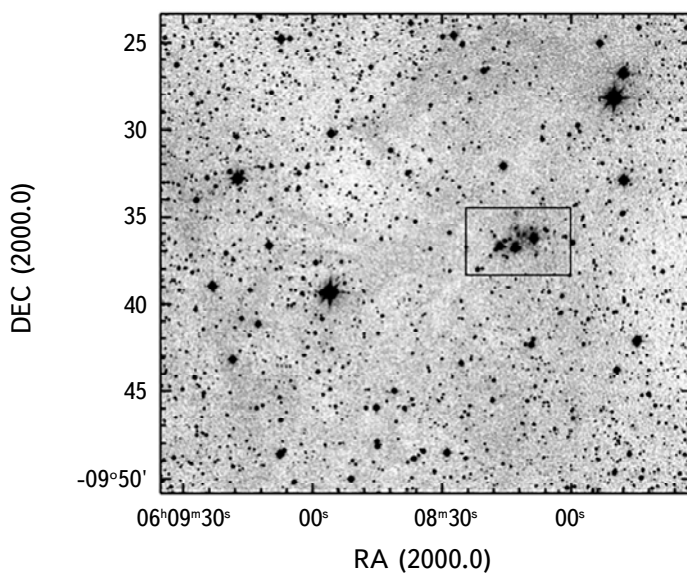


Рис.1. Изображение области Dobashi 5006, полученное с помощью телескопа Шмидта в линии Na . Прямоугольником отмечено скопление MWSC 0739.

2. Наблюдения. Наблюдения проводились на 1-м телескопе Шмидта Бюраканской обсерватории в декабре 2020г. и феврале 2021г. В результате полной модернизации телескоп был, в частности, оснащен ПЗС-приемником Arcee Alta 16M, который обеспечивает поле зрения около одного градуса с размером пиксела $0''.8683$ [6].

При наблюдениях применялись узкополосные светофильтры с полосой пропускания $100 \text{ \AA}$ и с центральной длиной волны $6560 \text{ \AA}$ и $6760 \text{ \AA}$, которые были использованы для получения изображений в эмиссионных линиях $\text{H}\alpha$ и $[\text{SII}]$, соответственно. Среднеполосный светофильтр на $7500 \text{ \AA}$ с полосой пропускания $250 \text{ \AA}$ был использован для получения изображений в непрерывном спектре.

В ходе наблюдений в каждом светофильтре делались пятиминутные экспозиции со смещением изображений для сглаживания вариаций в чувствительности отдельных пикселей. Суммарные эффективные экспозиции в светофильтре $\text{H}\alpha$ составляли 5400 с, в $[\text{SII}]$ - 8400 с и в непрерывном спектре - 1800 с. Изображения обрабатывались по стандартной методике с помощью специально разработанного программного пакета на языке IDL, включающей вычитание байеса (bias) и темнового изображения, удаление следов космических частиц и исправление виньетирования.

Собственно поиски объектов Хербига-Аро проводились по классическому методу, разработанному Ван ден Бергом [7], путем сравнения изображений в эмиссиях $\text{H}\alpha$ и $[\text{SII}]$ с изображениями, полученными в непрерывном спектре. Как показывает опыт, в подавляющем большинстве случаев этот метод достаточно эффективен для отождествления объектов Хербига-Аро.

3. Результаты.

3.1. *Потоки Хербига-Аро.* Изучение полученных нами изображений выявило в районе группы MWSC 0739 несколько эмиссионных объектов. Так, к югу от центра была обнаружена группа из трех сгустков, которые хорошо видны в линиях $\text{H}\alpha$ и дублета серы, но отсутствуют на изображении, полученном в непрерывном спектре (рис.2). Эти сгустки, безусловно, являются объектами Хербига-Аро. Отношение интенсивностей эмиссионных линий в сгустках различное, что указывает на разные уровни возбуждения. Самый слабый в целом сгусток А более яркий в линии $\text{H}\alpha$, в то время как В ярче в $[\text{SII}]$, а в сгустке С их отношение равно единице. Эта группа слабо заметна на изображениях атласа DSS2; вероятно, именно она и была обозначена в [5] как NHL 35a.

Анализ изображений области в инфракрасных обзорах 2MASS и WISE показывает, что эти сгустки расположены на одной линии с близлежащим источником 2MASS 06082284-0936139, который полностью невидим в оптическом диапазоне. Весьма вероятно, что он и является источником данного потока Хербига-Аро.

К северу от скопления MWSC 0739, на расстоянии 1.5 угл. мин от центра находится отражательная туманность кометообразной формы, которая очень хорошо видна в полосе z обзора PanSTARRS. Непосредственно внутри этой

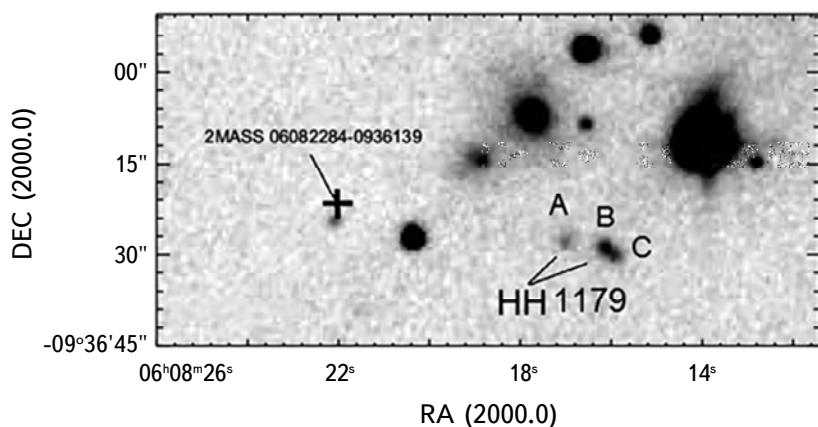


Рис.2. Изображение потока HH 1179, полученное с помощью телескопа Шмидта в линии $H\alpha$. Отдельные сгустки отмечены буквами. Крестиком показано положение ИК-источника 2MASS 06082284-0936139.

туманности, на ее оси, был обнаружен эмиссионный сгусток, видимый только в линии $H\alpha$ (рис.3). Вероятно, он также является объектом Хербига-Аро, но для окончательного вывода необходимо будет получить изображение этой области в линии $[SII]$ с большим пределом. Принимая во внимание характерную связь кометарных туманностей и объектов Хербига-Аро, можно предположить, что он должен возбуждаться центральным источником, который также освещает отражательную туманность. Сравнение наших изображений с данными обзоров PanSTARRS, 2MASS и WISE показывает, что возбуждающая звезда (2MASS 06081525-0933490) не видна в оптическом диапазоне

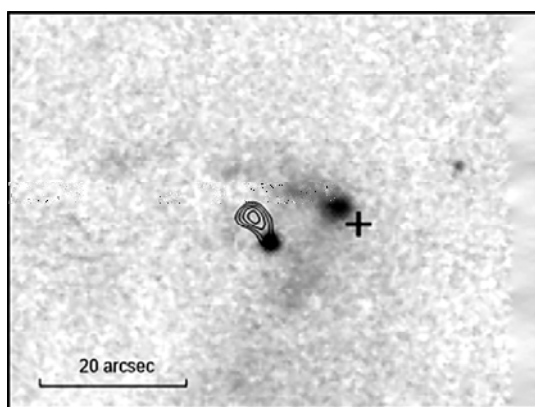


Рис.3. Кометарная туманность и предполагаемый объект Хербига-Аро. Полутонами показано изображение в континууме, взятое из обзора PanSTARRS (полоса z), с наложением полученного нами $H\alpha$ -изображения после вычитания непрерывного спектра (изолинии). Крестиком указано положение источника 2MASS 06081525-0933490.

Таблица 1

КООРДИНАТЫ СГУСТКОВ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

Объект	RA (2000)	Dec (2000)	Источник	r''	P.A.°	Расст. (пк)
Сгусток в туманности	06 ^h 06 ^m 16 ^s .15	-09°33'47".8	2MASS 06081525-0933490	14	87	0.06
НН 1179 А	06 ^h 08 ^m 18 ^s .43	-09°36'21".8	2MASS 06082284-0936139	66	263	0.27
НН 1179 В	06 ^h 08 ^m 17 ^s .65	-09°36'22".23	06082284-0936139	78		0.32
НН 1179 С	06 ^h 08 ^m 17 ^s .44	-09°36'24".63	06082284-0936139	82		0.34

и смещена на 1-2" к западу от яркой вершины отражательной туманности. Такой эффект, вызванный поглощением в околозвездном пылевом диске, часто наблюдается в подобных случаях (например, НН 83).

Координаты сгустков, их видимые расстояния и позиционные углы по направлению на предполагаемые источники приведены в табл.1. Также приведены удаления от источников, рассчитанные при расстоянии до облака 820 пк (обоснование этой оценки дано ниже).

3.2. Источники. С целью дальнейшего изучения характеристик ИК-источников, предположительно возбуждающих вышеописанные потоки Хербига-Аро, мы проанализировали их спектральные распределения энергии (SED).

Источник 2MASS 06082284-0936139 совпадает с WISE J060822.89-093614.2. Кроме того, на 8" к северу от него находится весьма заметный в дальнем ИК диапазоне источник AKARI/FIS 0608229-093607. С учетом углового разрешения и точности координат в среднем и дальнем ИК диапазоне совершенно очевидно, что это один и тот же объект. Таким образом, для построения SED были использованы обзоры 2MASS, WISE и AKARI. Отметим, что этот объект кажется незарегистрированным в каталогах IRAS: ближайший к нему по координатам источник IRAS 06059-0935 находится на расстоянии 34". Впрочем, анализ с повышением углового разрешения, проведенный в работе [8], показывает, что на деле IRAS 06059-0935 все же совпадает с 2MASS 06082284-0936139, но распадается на группу из трех или более объектов. Поэтому мы приняли решение не использовать для SED данные обзора IRAS.

Источник 2MASS 06081525-0933490, как уже упоминалось выше, также не виден в оптическом диапазоне и становится хорошо заметным только в полосе K обзора 2MASS. При этом в среднем ИК диапазоне обзора WISE к западу и востоку от него наблюдаются еще две звезды, сравнимые с ним

по яркости. Анализ координат показывает, что 2MASS 06081525-0933490 был зарегистрирован в обзоре AKARI/FIS как источник 0608149-093356. С учетом неточности координат эта звезда, вероятно, может быть идентифицирована также с источником IRAS F06058-0933. Однако при построении SED выяснилось, что данные обзора IRAS плохо согласуются с прочими, по-видимому, из-за влияния других звезд в поле на измерения. Поэтому и в этом случае мы отказались от данных IRAS, построив SED по результатам обзоров 2MASS, WISE и AKARI. Итоговые распределения энергии показаны на рис.4.

Как можно видеть из рис.4, SED у обоих источников монотонно возрастает от ближней до дальней инфракрасной области спектра, а в оптическом диапазоне источники совершенно не наблюдаются. Все это позволяет предположить их принадлежность к ИК-источникам Class I и тем самым на значительную молодость. Об этом говорит и их заметная болометрическая светимость, рассчитанная нами для расстояния 820 пк (об этой оценке см далее). Для 2MASS 06081525-0933490 ее нижний предел (без учета межзвездного поглощения) составляет $\approx 3.6 L_{\odot}$, а для 2MASS 06082284-0936139 - $\approx 23 L_{\odot}$.

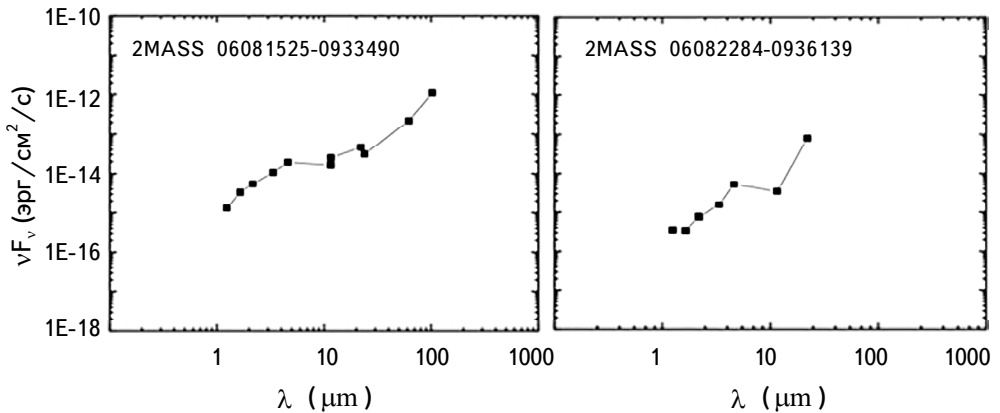


Рис.4. Спектральные распределения энергии ИК-источников, предположительно связанных с объектами Хербига-Аро.

3.3. Скопление MWSC 0739. Данная группа звезд впервые была отмечена как возможное небогатое рассеянное звездное скопление в работе [9] под номером FSR 1115. Затем она была включена в общий каталог звездных скоплений в Млечном Пути (MWSC) ([4], см также [10]) как объект MWSC 0739. По оценкам, приведенным в этих каталогах (которые в основном получены путем конвейерной обработки данных каталогов PPMXL и 2MASS), оно находится на расстоянии 1068 пк, имеет радиус центральной части 5'.4, а общий - 9' и должно содержать 60-70 звезд. Было также оценено

его собственное движение ($\mu_{\text{RA}} = 0.55$ мс/год, $\mu_{\text{DE}} = 3.41$ мс/год) и избыток цвета $E_{\text{B-V}} = 2.353$. С тех пор это скопление детальным исследованиям не подвергалось.

Наше внимание привлекла необычная морфология MWSC 0739, основную часть которой составляет цепочка из десяти или более звезд, в основном имеющих примерно одинаковую яркость, хорошо видимая также и в ближнем и среднем ИК диапазонах (на картах 2MASS и WISE). Более 5-ти звезд в этой цепочке связаны с маленькими отражательными туманностями, подсвечивая участки темного облака Dobashi 5006, в которое погружено скопление. Эти туманности заметны и в ближнем ИК-диапазоне на изображениях обзора 2MASS. Мы приняли решение провести более детальное изучение скопления MWSC 0739 с помощью данных новейшего обзора Gaia DR3.

Из архива наблюдательных данных были извлечены измерения всех звезд в области радиусом $6'$ вокруг центра MWSC 0739; их общее число составило 336. Отбор возможных членов скопления велся, во-первых, по критерию RUWE (Renormalized Unit Weight Error) < 1.4 , а также на основе требования близости гелиоцентрических расстояний и компонентов собственных движений звезд. Подобный подход был, например, использован в работе [11] и показал свою эффективность, в которой по данным GAIA DR2 было проведено исследование

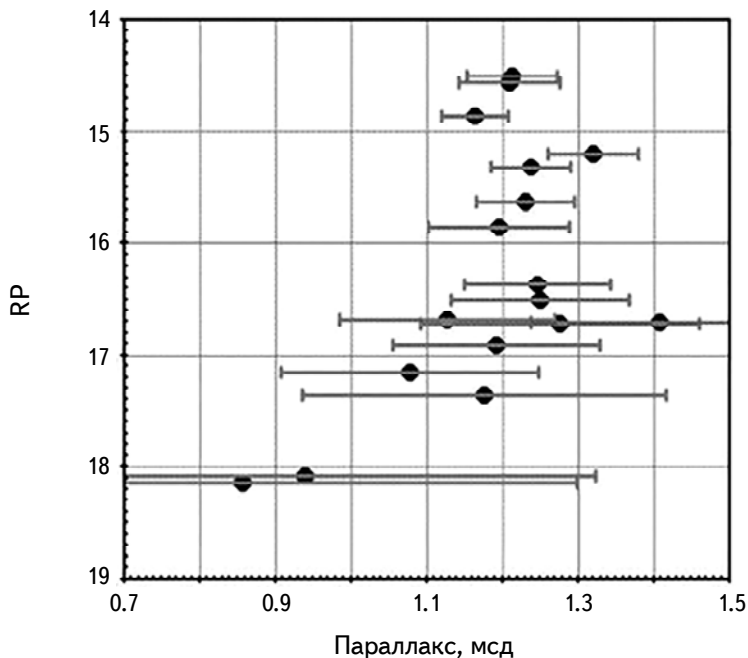


Рис.5. Диаграмма "параллкс (мсд) - видимая звездная величина RP" для звезд, отобранных как возможные члены скопления MWSC 0739.

молодого погруженного рассеянного скопления vdB 130, входящего в звездную ассоциацию Cyg OB1.

Критериям близости расстояний и собственных движений удовлетворяют 17 звезд выборки. Они показаны на диаграмме "параллакс-звездная величина RP" (рис.5), где довольно четко выражена концентрация звезд в интервале расстояний от 800 до 850 пк, а также на диаграмме собственных движений (pmRA-pmDE) (рис.6). Заметная концентрация звезд с близкими собственными движениями (т.е. тангенциальными скоростями) в ограниченной области пространства является серьезным аргументом в пользу реальности гравитационно-связанной группы звезд (скопления). Данные о лучевых скоростях этих звезд отсутствуют. Средние значения компонентов собственного движения скопления MWSC 0739 составляют $\text{pmRA} = -2.50 \pm 0.06$ мсд/год, $\text{pmDE} = +0.79 \pm 0.07$ мсд/год, а дисперсии собственных движений составляют, соответственно 0.25 и 0.29 мсд/год по двум координатам, что на расстоянии порядка 800 пк соответствует дисперсии тангенциальной скорости около 1.5 км/с. С учетом всех неопределенностей, неизбежно увеличивающих оценку дисперсии скоростей, эта величина соответствует тому, что можно ожидать в молодых звездных скоплениях.

В табл.2 приведен список из 17 звезд, которые мы считаем вероятными членами скопления MWSC 0739, с их астрометрическими и фотометрическими

Таблица 2

СПИСОК ЗВЕЗД ВЕРОЯТНЫХ ЧЛЕНОВ СКОПЛЕНИЯ MWSC 0379 И ИХ ПАРАМЕТРЫ

N	Gaia DR3 30052...	Plx (мсд)	pmRA (мсд/г)	pmDE (мсд/г)	RUWE	G, mag	BP-RP, mag	Var	Bin	Neb	[Fe/H]
1	49605548347776	1.2289±0.1174	-2.372±0.114	0.879±0.129	0.999	17.85	3.15	+			0.13
2	49644203766272	1.2554±0.1839	-2.254±0.223	0.991±0.217	0.963	18.61	3.31		+	+	
3	49708626938112	1.0562±0.1696	-2.385±0.178	0.904±0.186	1.092	18.44	3.17	+			-0.32
4	49712921384320	1.1882±0.0662	-2.394±0.072	0.645±0.074	0.976	16.21	2.86		+	+	
5	49712922990336	1.1424±0.0444	-2.661±0.048	1.153±0.050	1.088	16.05	2.48	+		+	-2.07
6	49747282725376	1.1704±0.1370	-1.935±0.144	0.876±0.141	0.981	18.25	3.19	+			0.48
7	49781642475264	1.2099±0.0641	-2.517±0.067	0.554±0.071	1.077	16.84	2.36	+	+		
8	49811707389952	0.8363±0.4418	-2.972±0.372	0.397±0.394	1.034	19.65	3.36				
9	49914785387392	1.3869±0.1708	-2.416±0.172	0.562±0.173	1.041	18.23	4.13			+	
10	49914785398784	1.1068±0.1421	-2.794±0.153	0.679±0.153	0.950	18.18	4.02			+	
11	49919081421312	1.2996±0.0591	-2.368±0.062	0.789±0.066	1.135	16.49	3.05	+		+	
12	49919081421696	1.1748±0.0937	-2.819±0.095	0.958±0.105	1.081	17.25	3.46	+		+	
13	50606276197376	1.2175±0.0519	-2.756±0.052	1.021±0.058	1.074	16.47	2.49	+			-0.78
14	50640635930880	1.1923±0.0594	-2.215±0.061	0.552±0.066	1.830	15.58	2.28				-1.23
15	50842498376064	1.1549±0.2409	-2.451±0.221	1.109±0.245	1.021	18.83	2.97				0.46
16	74314495656832	1.2253±0.0962	-2.628±0.096	1.245±0.103	0.932	17.64	3.00	+			-0.26
17	74623733931520	0.9177±0.3838	-2.625±0.381	0.072±0.407	0.991	19.50	3.17				

параметрами, взятыми из каталога GAIA (DR3). Отмечены переменные, двойные и туманные звезды. На рис.7 показана карта области скопления с выделенными звездами. Среди этих звезд присутствуют три оптически двойные звезды (см. табл.2 в колонке Bin) с расстояниями компонентов $\leq 2''$. Звезда 3005250640635930880 имеет $\text{RUWE} = 1.83$, но по прочим параметрам, включая следы отражательной туманности в окрестностях (что и может объяснить повышенное значение RUWE), явно тоже принадлежит скоплению.

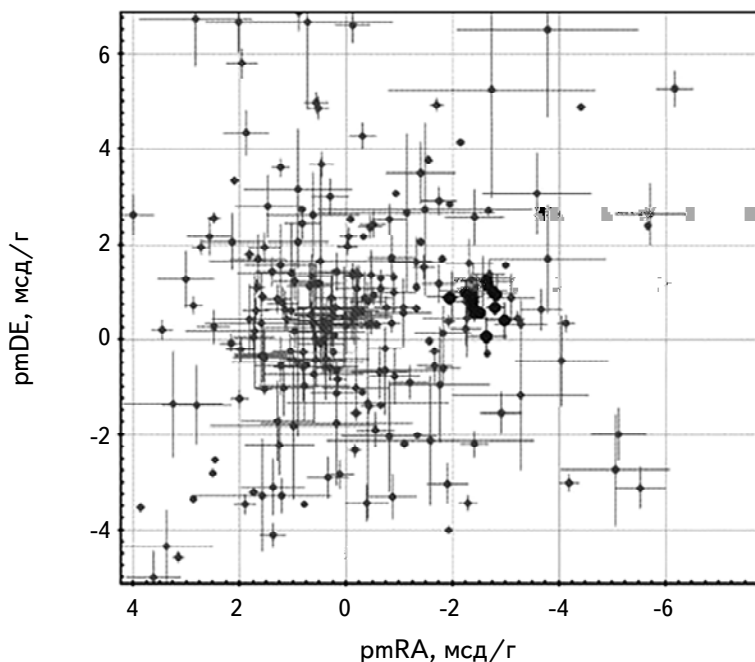


Рис.6. Двумерная диаграмма (pmRA-pmDE) собственных движений для всех звезд в области MWSC 0739. Хорошо заметна компактная группировка звезд с расстояниями около 800-850 пк, входящих в скопление (большие кружки).

После исключения двух слабых звезд (>18 mag) с большими ошибками параллаксов, средний параллакс оставшихся 15 звезд равен 1.222 ± 0.020 мсд. Практически такое же значение (1.222 ± 0.09 мсд) можно получить, если использовать для усреднения параллакса только 7 звезд, подсвечивающих малые отражательные туманности, т.е. объекты, априорно связанные с темным облаком Dobashi 5006. Среднее расстояние, соответствующее этому параллаксу, можно оценить как $\langle D \rangle \approx 818 \pm 14$ пк. Среднее фотогеометрическое расстояние, подсчитанное для тех же объектов по каталогу [12] $\langle R_{pgeo} \rangle \approx 807 \pm 21$ пк. Однако по нашему мнению, когда речь идет о расстояниях до звездных скоплений, методически правильнее напрямую использовать каталожные тригонометрические параллаксы звезд, поскольку в Байесовские оценки

геометрического и фото-геометрического (R_{geo} и R_{pgeo} [12]) расстояний заложена априорная информация об экспоненциальном падении звездной концентрации по лучу зрения, что пригодно для звезд поля, но совершенно не соответствует распределению лучевой концентрации в скоплении, которое лучше описывается нормальным законом. Поэтому мы приняли за расстояние до MWSC 0739 значение 820 пк, оцененное по тригонометрическим параллаксам. Тем не менее, мы для некоторых оценок в работе использовали и расстояния R_{pgeo} .

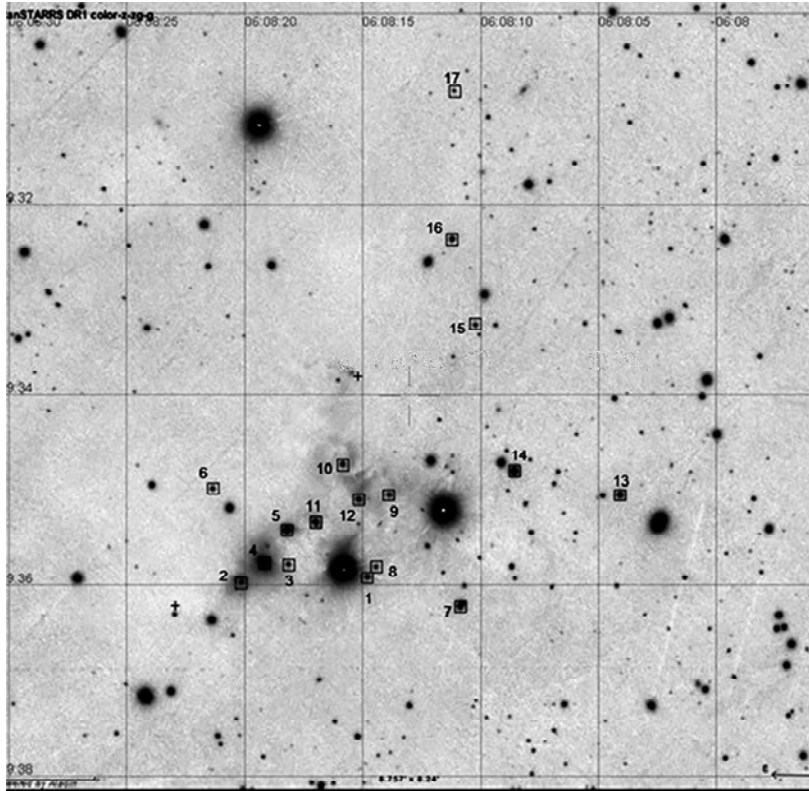


Рис.7. Карта отождествления звезд, входящих в группу MWSC 0739 (обозначены квадратиками) на изображении из обзора PanSTARRS. Номера соответствуют позициям в табл.2. Также знаками "+" показаны положения ИК-источников 2MASS 06082284-0936139 и 2MASS 06081525-0933490.

Для анализа межзвездного поглощения в области MWSC 0739 были использованы данные из новейшего каталога StarHorse-2 [13], основанного на совокупности многоцветных фотометрических наблюдений Pan-STARRS1, SkyMapper, 2MASS, and AllWISE и данных каталога GAIA eDR3. Приведенные в нем оценки поглощения A_V были пересчитаны в A_{RP} , соответствующие

фотометрической системе GAIA, по соотношениям избытков цвета, взятым из работы [14]. Судя по диаграмме $R_{\text{geo}} - A_{\text{RP}}$, поглощение на пути до скопления ($D \approx 800$ пк) составляет примерно $A_{\text{RP}} \approx 1.5$ mag, а соответствующий ему избыток цвета $E(\text{BP} - \text{RP}) \approx 1.05$ mag. Как мы видим, все эти значения (расстояние, собственное движение и общий избыток цвета для скопления) весьма сильно отличаются от оценок в каталоге MWSC. Однако в любом случае следует учесть, что внутри самого скопления может наблюдаться заметное дифференциальное поглощение, в основном создаваемое пылевыми оболочками вокруг молодых звезд.

Диаграмма "нормальный цвет $(\text{BP} - \text{RP})_0$ - абсолютная величина M_{RP} " для расстояния 820 пк и общего избытка цвета $E(\text{BP} - \text{RP}) \approx 1.05$ mag (см. выше) показана на рис.8а. Как хорошо видно, в отличие от хаотичного распределения звезд поля (точки), которые явно относятся к дальнему фону, 17 выделенных звезд скопления (кружки) расположены над главной последовательностью (изохроны соответствуют солнечному химсоставу и возрасту $\log t = 6.8$ и 7.4), что еще раз подчеркивает их PMS природу. Если же учесть возможное дополнительное покраснение в околозвездных оболочках, используя индивидуальные оценки A_{RP} из базы данных GAIA DR3, то 8 членов скопления, для которых такие данные имеются, показывают существенно меньшее рассеяние показателей цвета и сильнее концентрируются к изохроне $\log t = 6.8$ (см. рис.8б).

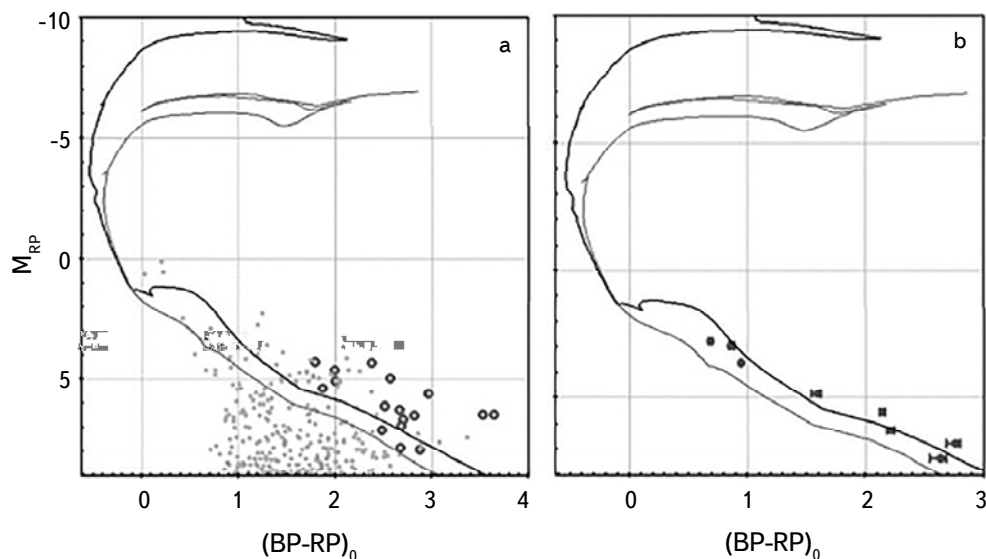


Рис.8. Диаграмма Г-Р для звезд в области MWSC 0739 с учетом единого значения избытка цвета (а), и по индивидуальным оценкам покраснения для 8 звезд (б) из каталога [14]. Показаны изохроны, соответствующие возрасту $\log t = 6.8$ (черная линия) и 7.4 (серая линия).

Весьма важным обстоятельством является также обнаруженная наблюдениями GAIA фотометрическая переменность 9 из 17 звезд (см. табл.2 колонка Var), входящих в данную группу, которая является еще одним признаком их небольшого возраста.

4. *Обсуждение и выводы.* Полученные нами результаты однозначно указывают, что небогатое рассеянное скопление MWSC 0739 на деле представляет собой небольшую группу весьма молодых звезд малой и средней массы, большая часть которых действительно расположена в виде цепочки. Помимо оптически наблюдаемых звезд, эта группа содержит несколько ИК-источников, включая описанные выше предполагаемые источники потоков Хербига-Аро. Возраст подобных объектов, все еще имеющих плотные пылевые оболочки, должен быть еще меньше. Это однозначно указывает, что после "вспышки" звездообразования в изолированном темном облаке Dobashi 5006, произошедшей несколько миллионов лет назад, процесс формирования новых звезд все еще продолжается.

Причина начала активного звездообразования в данном, практически изолированном облаке неясна. Возможно, в связи с этим вопросом имеет смысл обратить внимание на то, что из 8 звезд группы MWSC 0739, для которых каталог Gaia DR3 содержит оценки астрофизических параметров, у двух уровень металличности ниже солнечного, а у трех - намного ниже ($[Fe/H] < -0.7$, < -1 и даже < -2). Подобное различие выглядит странным для звезд, которые по пространственному положению и кинематике могут считаться членами рассеянного скопления. Возможно, оно объясняется неприменимостью использованной в GAIA методики определения металличности к молодым объектам с пылевыми оболочками. Для решения этого вопроса крайне желательны спектральные наблюдения звезд, которые дополнительно позволят определить и их лучевые скорости.

Таким образом, основные итоги настоящего исследования можно суммировать следующим образом:

1. В области темного облака Dobashi 5006 обнаружены два новых потока Хербига-Аро, связанных с ИК-источниками, относящимися предположительно к объектам Class I.

2. Заново оценены основные звездно-астрономические параметры (расстояние, собственное движение, межзвездное поглощение) находящегося внутри облака скопления MWSC 0739.

3. Данное скопление представляет собой фактически небольшую область активного звездообразования, включающую в себя группу, состоящую из, по крайней мере, 17 оптически наблюдаемых PMS-звезд и нескольких ИК-источников.

Настоящая работа выполнена в рамках тематического гранта 21Т-1С031 Гос. комитета по науке РА. В данном исследовании использовались данные, полученные в ходе обзора Gaia Европейского Космического Агентства, обработанные консорциумом DPAC, финансируемого институтами, участвующими в многостороннем сотрудничестве Gaia.

В данной работе активно использовались базы данных SIMBAD, VIZIER и виртуальная обсерватория Aladin, разработанные Страсбургским центром звездных данных. Атлас AKARI является проектом Японского агентства аэрокосмических исследований, при участии Европейского космического агентства. Проект PanSTARRS является результатом сотрудничества Института астрономии (Гавайи), Лаборатории Линкольна Массачусетского технологического института, Центра высокопроизводительных вычислений Мауи и Международной корпорации прикладной науки.

¹ Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна
НАН РА, e-mail tigmag@sci.am

² Физический факультет МГУ им. Ломоносова, Москва, Россия

HERBIG-HARO FLOWS AND YOUNG STARS IN THE DOBASHI 5006 DARK CLOUD

T.A.MOVSESSIAN¹, T.Yu.MAGAKIAN¹, A.S.RASTORGUEV²,
H.R.ANDREASYAN¹

Two new Herbig-Haro flows in the Dobashi 5006 isolated dark cloud ($l = 216^\circ.7$, $b = -13^\circ.9$) were found. One of them is numbered HH 1179, another needs further confirmation. Both are related to IR sources: 2MASS 06082284-0936139 and 2MASS 06081525-0933490 respectively. Judging by their spectral energy distributions, both sources can be Class I objects with luminosities of the order of $23 L_\odot$ and $3.6 L_\odot$. These sources are the part of the poor star cluster MWSC 0739 located inside this dark cloud, the study of which with the aid of Gaia DR3 survey made it possible to detect 17 stars that are its probable members. Their list and main parameters are given. The cluster distance is estimated at 820 pc, and the color excess on the way to the cluster is $E(BP - RP) \approx 1.05$ mag. All these stars are PMS objects; most of them are optically variable. It is concluded that the newly discovered compact star formation zone in the Dobashi 5006 cloud has an age of no more than a few million years, and this process continues to the present.

Keywords: *Herbig-Haro objects: young stars: Dobashi 5006*

ЛИТЕРАТУРА

1. *T.A.Movsessian, T.Yu.Magakian, S.V.Dodonov*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **500**, 2440, 2021.
2. *Т.А.Мовсесян, Т.Ю.Магакян, А.Р.Андреасян*, Астрофизика, **65**, 215, 2022, (Astrophysics, **65**, 193, 2022).
3. *K.Dobashi*, PASJ, **63**, S1, 2011
4. *N.V.Kharchenko, A.E.Piskunov, E.Schilbach et al.*, Astron. Astrophys., **558**, A53, 2013.
5. *А.Л.Гюльбудагян, Р.Шварц, Ф.С.Назаретян*, Сообщ. БАО, **63**, 3, 1990.
6. *S.N.Dodonov, S.S.Kotov, T.A.Movsesyan et al.*, Astrophys. Bull., **72**, 473, 2017.
7. *S. van den Bergh*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **87**, 405, 1975.
8. *E.A.Magnier, A.W.Volp, K.Laan et al.*, Astron. Astrophys., **352**, 228, 1999.
9. *D.Froebrich, A.Scholz, C.L.Raftery*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **374**, 399, 2007.
10. *N.V.Kharchenko, A.E.Piskunov, E.Schilbach et al.*, Astron. Astrophys., **585**, A101, 2013.
11. *T.G.Sitnik, A.S.Rastorguev, A.A.Tatarnikova et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **498**, 5437, 2020.
12. *C.A.L.Bailer-Jones, J.Rybizki, M.Fouesneau et al.*, Astron. J., **161**, 147, 2021.
13. *F.Anders, A.Khalatyan, A.B.A.Queiroz et al.*, Astron. Astrophys., **658**, A91, 2022.
14. *S.Wang, X.Chen*, Astrophys. J., **877**, id.116, 2019.

THE STUDY OF KANTOWSKI-SACHS PERFECT FLUID COSMOLOGICAL MODEL IN MODIFIED GRAVITY

T.VINUTHA¹, K.NIHARIKA¹, K.S.KAVYA²

Received 19 March 2022

Accepted 3 February 2023

Kantowski-Sachs perfect fluid cosmological model is explored in modified gravity with functional form $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$ where R is Ricci scalar and T is the trace of energy-momentum tensor. With this functional form, three different cases have been formulated, namely negative and positive powers of curvature, logarithmic curvature and exponential curvature given by $f_1(R) = R + \gamma R^2 - \mu^4/R$, $f_1(R) = R + \nu \ln(\tau R)$ and $f_1(R) = R + \kappa e^{-\iota R}$ respectively, and for all these three cases, $f_2(T) = \lambda T$, here $\gamma, \lambda, \mu, \nu, \tau, \kappa$ and ι are constants. While solving the field equations, two constraints i) Expansion scalar is proportional to shear scalar ii) Hyperbolic scale factor are used. By using these conditions the required optimum solutions are obtained. The physical parameters are calculated and geometrical parameters of three cases are analysed against redshift z with the help of pictorial representation. In the context of $f(R, T)$ gravity energy conditions are discussed with the help of pressure and energy density. If strong energy condition is positive the gravity should be attractive but in our model it is negative. It means that cosmic acceleration is due to antigravity, whereas NEC and DEC are fulfilled. The perturbation technique is used to test the stability of the background solutions of the obtained models. The inferences obtained from this paper are in persistent with the present cosmological observations and the model represents an accelerating universe.

Keywords: *Kantowski-Sachs spacetime: $f(R, T)$ theory: perfect fluid*

1. Introduction. Einstein's theory of general relativity is the foundation of modern physics and it describes black holes and gravitational phenomena but it break down to give an explanation of cosmic acceleration. In recent scenario it is well known that our universe is accelerating [1,2] and it is one of the trending topics in cosmology. To understand this mysterious concept, we focused on dark energy and modified theories of gravity. The universe is going through an accelerated period of expansion and it is revealed by the experiments such as CMBR and SNIa. Dark energy can be inspected in many ways and reforming the geometric part of the Einstein-Hilbert action is regarded as the most efficient possible way and these changes lead to so many alternative theories of gravity. There are different classes of modified gravity such as $f(R)$ gravity, $f(T)$ gravity, $f(G)$ gravity, $f(R, G)$ gravity. Among them $f(R)$ gravity has attracted many researchers because it provides a natural gravitation alternative to dark energy. During the universe expansion $f(R)$ theory elucidate the change from deceleration phase to acceleration phase. $f(R)$ theory is presumed to be beneficial for

resolution of the hierarchy problem or unification of grand unified theories with gravity in high energy physics. Nojiri and Odintsov [3], Nojiri et al. [4], Chatterjee and Jaryal [5], Sotiriou and Faraoni [6], De Felice and Tsujikawa [7] are some of the authors who worked on various cosmological models in $f(R)$ theories of gravity. A new class of $f(R, T)$ gravity presented by Harko et al. [8], by including trace T in $f(R)$ theory. The T -dependence in $f(R, T)$ gravity may appear from the presence of imperfect fluids or quantum effects. Among all the modified theories of gravitation, the $f(R, T)$ theory is a generalized theory because there is an energy transfer relation between matter and geometry. The existence of this relationship is the cause of the rapid expansion of the universe. The authors who worked on $f(R, T)$ gravity are included in references [9-16].

In this paper, we examine three specific cases one of them is combination of $1/R^x$ and R^y i.e. $f(R) = R + \gamma R^y - \mu^4/R^x$ where γ and μ are constants. In this functional form, it has both positive and negative curvature powers. At low curvature it leads to gravitational alternative for dark energy which helps in speed up of cosmic expansion where as high curvature describes the inflationary stage of early universe [17]. By considering R^y term for $1 < y < 2$ power law inflation happen at early stage. If $y = 2$, Starobinsky inflation takes place [18], the term R^2 indicates natural correction to general relativity. According to Nojiri and Odintsov [19] R^2 term is necessary to get rid of instabilities, linear growth of the gravitational force, produce early time inflation and appear to pass the solar system tests. The state of no linear growth for gravitational force makes it very much fascinating. Higher derivative terms like R^2 , R^3 can be used to put down the instabilities significantly. For equivalent scalar tensor theory the solar system test may be passed as scalar has large mass originated again by higher derivative terms. The standard Einstein's gravity may be modified by considering a $1/R$ term in the Einstein-Hilbert action [20] which represents the present acceleration of the universe. But the insertion of $1/R$ term generates instabilities which can be overcome by addition of R^2 term to the Einstein's gravitational action. Besides the advantages of this functional form, have well acceptable Newtonian limit, no instabilities and no Brans-Dicke problem in scalar tensor version. When we put $y = 2$ and $x = 1$ in the above functional form $f(R) = R + \gamma R^y - \mu^4/R^x$ it reduces to $f(R) = R + \gamma R^2 - \mu^4/R$ and the obtained results are very efficient. In addition to this functional form by using the linear function of $f(T) = \lambda T$, we get the final form of $f(R, T) = R + \gamma R^2 - \mu^4/R + \lambda T$ where γ , μ and λ are constants. Vinutha et al. [21] have worked on Kantowski-Sachs perfect fluid cosmological model in R^2 -gravity. Vinutha and Sri Kavya [22] have studied Bianchi type cosmological models in $f(R, T)$ theory with quadratic functional form. Brookfield [23] have worked on viability of $f(R)$ theories with additional powers of curvature. Godani and Samanta [24] have studied traversable wormholes on $f(R)$ gravity

where $f(R) = R + \alpha R^n$. Banik et al. [25] have discussed Bianchi-I cosmological model in $(R) = R - \beta/R^n$ gravity.

Next, we consider logarithmic curvature i.e. $f(R, T) = R + \nu \ln(\tau R) + \lambda T$ where τ , ν and λ are constants. As this modified gravity has put forward a gravitational alternative for dark energy, it is quite interesting to work on this particular functional form. In this model logarithmic terms are produced by quantum effects in curved space time. The need for dark energy may be eradicated by this modified gravity and may aid for the fusion of the early time inflation and cosmic acceleration. Nojiri and Odinstov have studied about modified gravity and proposed some functional forms such as $\ln(R)$ or $R^{-n}(\ln R)^m$ and $R + \gamma R^{-n}(\ln R/\mu^2)^m$ [26,27]. Fayyaz and Shamir [28] have analysed wormhole structures in logarithmic-corrected R^2 gravity. Kourosh and Tahereh [29] have discussed phantom-like behavior in $f(R) = R + \beta \log(R/\mu^2)^m + \gamma R^m$ gravity.

By appending the torsion scalar component to the exponential $f(R)$ theory [30-34], the functional form is $f(R, T) = R + \kappa e^{-\iota R} + \lambda T$ where κ , ι and λ are constants. The reason behind choosing this functional form it comes up with the best way of exploring cosmic acceleration. In contrast to the Λ CDM model the exponential gravity model has one more parameter included in it and it also permits the relaxation of fine tuning. Vinutha et al. [35] have studied on Bianchi type cosmological models in modified theory with exponential functional form. Paul et al. [36] have worked on accelerating universe in modified theories of gravity. Sahoo et al. [37] have studied on $f(R, T) = f(R) + \lambda T$ gravity models as alternatives to cosmic acceleration. Moreas and Sahoo [38] have discussed traversable wormholes by using functional form $f(R, T) = R + \gamma e^{\chi T}$ and also with this functional form Moreas et al. [39] studied FRW cosmological model.

When compared to other anisotropic metrics, Kantowski-Sachs model is very simple and easy to analyze. The cosmologies of Kantowski-Sachs metric possess two properties of symmetry such as spherical symmetry and invariance under spatial translation. It describes spatially homogeneous, anisotropic universe and interior of black holes that does not allow a simply transitive group of motions. It is also used to analyze the behavior of the added degrees of freedom in quantum cosmological model. This metric represents three different anisotropic $3+1$ dimensional space time and positive curvature models. The study of anisotropic models were nourished by the theoretical studies and observations of CMB which also been extended to modified theories of gravity. Thus this model with an anisotropic nature appeared most appropriate in describing the early stage of the cosmos. Some of the authors who worked on Kantowski Sachs model are [40-46].

This article is organized as follows: In section 2, $f(R, T)$ gravity field equations are obtained and in section 3 the field equations of power-law, logarithmic and exponential functional forms are solved. Section 4 discusses the physical and

geometrical properties of three cases using graphs and section 5 concludes our results.

2. *A brief review of $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$ model.* The final action principle of $f(R, T)$ gravity which is a function of matter Lagrangian L_m is read as

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi} f(R, T) + L_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

where g is the metric determinant of the fundamental tensor g_{ij} , $f(R, T)$ is an arbitrary function of R and T which is mentioned in the abstract, L_m is the usual matter Lagrangian density and we consider $G = c = 1$.

By varying the above equation (1) with respect to g_{ij} , we obtain the field equations of $f(R, T)$ gravity in covariant tensor form as

$$\begin{aligned} f_R(R, T)R_{ij} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{ij} + (g_{ij}\square - \nabla_i\nabla_j)f_R(R, T) = \\ = 8\pi T_{ij} - f_T(R, T)\theta_{ij} - f_T(R, T)T_{ij}, \end{aligned} \quad (2)$$

here, ∇_i is the covariant derivative and $\square = \nabla_i\nabla_j$ is the D'Alemberts operator. $f_R = \partial f(R, T)/\partial R$, $f_T = \partial f(R, T)/\partial T$ and R_{ij} is the Ricci tensor, where

$$\theta_{ij} = -2T_{ij} + g_{ij}L_m - 2g^{lk}\frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{ij}\partial g^{lk}}. \quad (3)$$

Here the energy-momentum tensor is considered to be a perfect fluid which is defined as

$$T_{ij} = (p + \rho)u_i u_j - pg_{ij}, \quad (4)$$

where u_i denotes four velocity vector in co-moving coordinates i.e. $u_i = (1, 0, 0, 0)$ and $u_i u^i = 1$. Hence, the components of energy-momentum tensor become $T_{ij} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, where p is the pressure and ρ is the energy density of perfect fluid. Several authors have studied by choosing energy-momentum tensor as perfect fluid which are included in the references [47-54]. It takes the form by replacing matter Lagrangian as $L_m = -p$ [55-57] in equation (3).

$$\theta_{ij} = -2T_{ij} - pg_{ij}. \quad (5)$$

Consequently the field equations for $f(R, T)$ gravity are procured with the aid of $T = \rho - 3p$ in equation (2) as

$$\begin{aligned} G_{ij} = \frac{1}{f_R(R, T)} \left[[8\pi + f_T(R, T)]T_{ij} + pf_T(R, T)g_{ij} + \frac{1}{2}[f(R, T) - Rf_R(R, T)]g_{ij} \right. \\ \left. - (g_{ij}\square - \nabla_i\nabla_j)f_R(R, T) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where G_{ij} is the Einstein tensor which is expressed as $R_{ij} - Rg_{ij}/2$.

Here, we consider the functional form $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$ i.e.

$$f(R, T) = R + \gamma R^2 - \frac{\mu^4}{R} + \lambda T \quad (7)$$

$$f(R, T) = R + v \ln(\tau R) + \lambda T \quad (8)$$

$$f(R, T) = R + \kappa e^{-1R} + \lambda T \quad (9)$$

as case I, II and III respectively.

3. *Metric and solutions of the field equations.* Now the metric takes the form,

$$ds^2 = dt^2 - M^2(t)dr^2 - N^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2), \quad (10)$$

where M and N are metric potentials and functions of cosmic time t only and co-moving coordinates are (r, θ, ψ) .

3.1. *Case I - (negative and positive powers of curvature).* The functional form $f(R, T) = R + \gamma R^2 - \mu^4/R + \lambda T$ field equations are as follows

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} + \frac{2\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} + \frac{\lambda\rho}{2(1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2)} - \frac{\gamma R^2/2 + \mu^4/R}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \\ & - \frac{2\gamma - 2\mu^4/R^3}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \left[\frac{2\dot{N}}{N} \dot{R} + \ddot{R} \right] - \frac{6\mu^4 \dot{R}^2/R^4}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{M}}{M} + \frac{\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} + \frac{\lambda\rho}{2(1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2)} - \frac{\gamma R^2/2 + \mu^4/R}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \\ & - \frac{2\gamma - 2\mu^4/R^3}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \left[\left(\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{N}}{N} \right) \dot{R} + \ddot{R} \right] - \frac{6\mu^4 \dot{R}^2/R^4}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} = & \frac{(8\pi + 3\lambda/2)\rho}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} - \frac{\lambda p}{2(1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2)} - \frac{\gamma R^2/2 + \mu^4/R}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \\ & - \frac{2\gamma - 2\mu^4/R^3}{1 + 2R\gamma + \mu^4/R^2} \left[\frac{\dot{M}}{M} + \frac{2\dot{N}}{N} \right] \dot{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

here dot denotes derivate with respect to t .

3.2. *Case - II (logarithmic curvature).* Field equations corresponding to the $f(R, T) = R + v \ln(\tau R) + \lambda T$ are

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} + \frac{2\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 + v/R} + \frac{\lambda\rho}{2(1 + v/R)} - \frac{v(1 - \ln(\tau R))}{2(1 + v/R)} \\ & + \left[\frac{2\dot{N}}{N} \dot{R} + \ddot{R} \right] \frac{v/R^2}{1 + v/R} - \frac{2v \dot{R}^2/R^3}{1 + v/R}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{M}}{M} + \frac{\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 + v/R} + \frac{\lambda\rho}{2(1 + v/R)} - \frac{v(1 - \ln(\tau R))}{2(1 + v/R)} \\ & + \frac{v/R^2}{1 + v/R} \left[\left(\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{N}}{N} \right) \dot{R} + \ddot{R} \right] - \frac{2v\dot{R}^2/R^3}{1 + v/R}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} = & \frac{(8\pi + 3\lambda/2)\rho}{1 + v/R} - \frac{\lambda p}{2(1 + v/R)} - \frac{v(1 - \ln(\tau R))}{2(1 + v/R)} \\ & + \frac{v/R^2}{1 + v/R} \left[\frac{\dot{M}}{M} + \frac{2\dot{N}}{N} \right] \dot{R}. \end{aligned} \quad (16)$$

3.3. *Case - III (exponential curvature)*. Field equations corresponding to the $f(R, T) = R + \kappa e^{-\iota R} + \lambda T$ are given as follows:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} + \frac{2\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 - \kappa e^{-\iota R}} + \frac{\lambda\rho}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} + \frac{\kappa e^{-\iota R}(1 + \iota R)}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} \\ & - \frac{\kappa \iota^2 e^{-\iota R}}{1 - \kappa e^{-\iota R}} \left[\frac{2\dot{N}}{N} \dot{R} + \ddot{R} \right] + \frac{\kappa \iota^3 e^{-\iota R} \dot{R}^2}{1 - \kappa e^{-\iota R}}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{M}}{M} + \frac{\ddot{N}}{N} + \frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} = & -\frac{(8\pi + 3\lambda/2)p}{1 - \kappa e^{-\iota R}} + \frac{\lambda\rho}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} + \frac{\kappa e^{-\iota R}(1 + \iota R)}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} \\ & - \frac{\kappa \iota^2 e^{-\iota R}}{1 - \kappa e^{-\iota R}} \left[\left(\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{N}}{N} \right) \dot{R} + \ddot{R} \right] + \frac{\kappa \iota^3 e^{-\iota R} \dot{R}^2}{1 - \kappa e^{-\iota R}}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{\dot{M}\dot{N}}{MN} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} = & \frac{(8\pi + 3\lambda/2)\rho}{1 - \kappa e^{-\iota R}} - \frac{\lambda p}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} + \frac{\kappa e^{-\iota R}(1 + \iota R)}{2(1 - \kappa e^{-\iota R})} \\ & - \frac{\kappa \iota^2 e^{-\iota R} \dot{R}}{1 - \kappa e^{-\iota R}} \left[\frac{\dot{M}}{M} + \frac{2\dot{N}}{N} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

To obtain solutions for highly non-linear equations is very strenuous and in order to remove such complications we require some constraints.

(i) We consider σ is proportional to θ (where σ is the shear scalar and θ is the expansion scalar) and it generate linear relationship between two metric potentials in terms of M and N as

$$M = N^n \quad (20)$$

$n \neq 0, 1$ is constant. The physical motivation for assuming this condition is that Hubble expansion of the universe may attain isotropy by the observations of the velocity redshift relation for extra galactic sources if the value of σ/θ is constant [58].

(ii) The average scale factor is assumed as a hyperbolic expansion

$$a(t) = \sinh(\alpha t)^{1/\beta} \quad (21)$$

where $\alpha > 0$, $\beta > 0$ are constants. The consequence of using this scale factor is time dependent deceleration parameter q [59]. This average scale factor tends to zero if $t \rightarrow 0$ and if $t \rightarrow \infty$ then $a(t)$ becomes infinity.

The directional Hubble parameters are

$$H_1 = \frac{\dot{M}}{M} \quad H_2 = H_3 = \frac{\dot{N}}{N}. \quad (22)$$

The average Hubble parameter is,

$$H = \frac{1}{3}(H_1 + 2H_2). \quad (23)$$

By substituting equation (23) in equation (22), we get

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{N}}{N} \right). \quad (24)$$

From equations (20)-(24), we obtain metric potentials of M and N as

$$M = (\sinh(\alpha t))^{3n/\beta(n+2)}, \quad (25)$$

$$N = (\sinh(\alpha t))^{3/\beta(n+2)}. \quad (26)$$

If $t \rightarrow \infty$ then M and N are nonzero, hence, our model is free from singularity.

Using equations (25) and (26), the Kantowski-Sachs metric obtained as

$$ds^2 = dt^2 - (\sinh(\alpha t))^{6n/\beta(n+2)} dr^2 - (\sinh(\alpha t))^{6/\beta(n+2)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \quad (27)$$

The above metric represents a perfect fluid Kantowski-Sachs universe in $f(R, T)$ theory of gravity.

3.4. Pressure and density for case I. By solving the equations of (11), (12) and (13) we get the pressure of the model as

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi - 2\eta - \phi_4 + 2\phi_5 + 2\phi_6 - \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} - \frac{\chi + \xi + 2\eta + 4\phi_3 + 7\phi_4 + 2\phi_5 + 2\phi_6 + 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} \right), \quad (28)$$

and the density of the model is obtained as

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi + 2\eta + 4\phi_3 + 7\phi_4 + 2\phi_5 + 2\phi_6 + 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} + \frac{\chi + \xi - 2\eta - \phi_4 + 2\phi_5 + 2\phi_6 - \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} \right), \quad (29)$$

The values of χ , ξ , η (same for all three cases) and ϕ_i ($i = 1, \dots, 7$) for all cases are given in the Appendix of the archived version (<http://arxiv.org/abs/2301.01163>).

3.5. Pressure and density for case II. By solving the equations (14), (15) and (16) we get the expression for pressure is

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi - 2\eta + \phi_4 - 2\phi_5 + 4\phi_6 + \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} - \frac{\chi + \xi + 2\eta + 4\phi_3 - 7\phi_4 - 2\phi_5 + 4\phi_6 - 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} \right), \quad (30)$$

and the density of the model is obtained as

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi + 2\eta + 4\phi_3 - 7\phi_4 - 2\phi_5 + 4\phi_6 - 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} + \frac{\chi + \xi - 2\eta + \phi_4 - 2\phi_5 + 4\phi_6 + \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} \right), \quad (31)$$

3.6. Pressure and density for case III. By solving the equations (17), (18) and (19) we get the pressure of the model as

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi - 2\eta - \phi_4 + 2\phi_5 - 2\phi_6 - \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} - \frac{\chi + \xi + 2\eta - 4\phi_3 + 7\phi_4 + 2\phi_5 - 2\phi_6 + 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} \right), \quad (32)$$

and the density of the model is obtained as

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{\chi + \xi + 2\eta - 4\phi_3 + 7\phi_4 + 2\phi_5 - 2\phi_6 + 3\phi_7}{\phi_1 + \phi_2} + \frac{\chi + \xi - 2\eta - \phi_4 + 2\phi_5 - 2\phi_6 - \phi_7}{\phi_2 - \phi_1} \right), \quad (33)$$

4. Physical and geometrical properties. The average Hubble parameter is

$$H = \frac{\alpha}{\beta} \coth(\alpha t). \quad (34)$$

From Fig.1 the Hubble parameter decreases with the decrease of redshift i.e. decreases as time increases. By choosing the values of $\alpha = 0.21$ and $\beta = 3.10$ in the scale factor the Hubble parameter is obtained as 0.07 Gyr s^{-1} which is nearly equal to the present observational value [60]. For this quantity the dimension is $1/\text{time}$. By using this formula, we can also measure the age of the cosmos.

(ii) The volume of the model is given by

$$V = a^3 = (\sinh(\alpha t))^{3/\beta}. \quad (35)$$

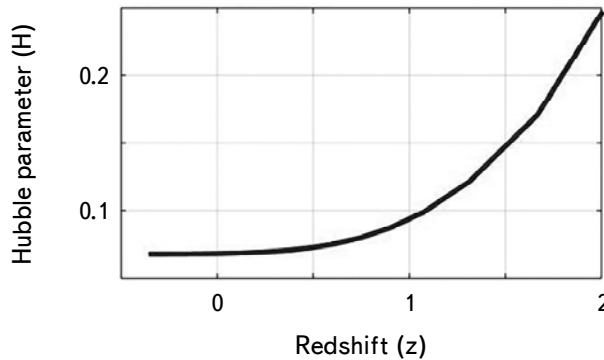


Fig.1. Plot of Hubble parameter H versus redshift z .

In Fig.2, it is clear that the spatial volume increases with the decrease of redshift i.e. it increases as the time increases and is finite at final epoch.

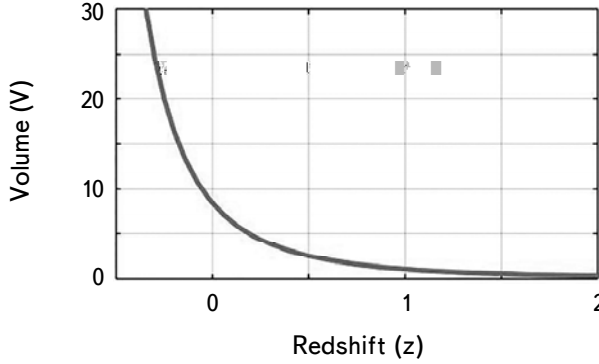


Fig.2. Plot of volume V versus redshift z

(iii) The expansion scalar θ is

$$\theta = u^i_{;i} = 3H = \frac{3\alpha \coth(\alpha t)}{\beta}. \quad (36)$$

From Fig.3, it is observed that expansion scalar decreases with the decrease of redshift i.e. it decreases as time increases. Here we noticed that for $t=0$ the expansion scalar is infinite.

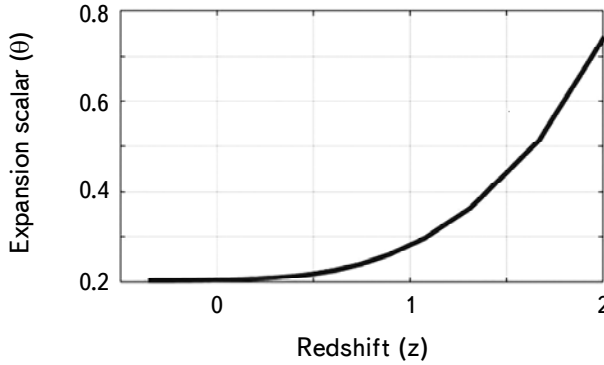


Fig.3. Plot of expansion scalar θ versus redshift z

(iv) We get the shear scalar as

$$\sigma^2 = \frac{3\alpha^2(n-1)^2 \coth^2(\alpha t)}{\beta^2(n+2)^2}, \quad (37)$$

when $t=0$, σ^2 (shear scalar) tends to infinity.

(v) The mean anisotropy parameter A_h is obtained as

$$A_h = \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2 \right], \quad (38)$$

where $i=1, 2, 3$ indicate the directional Hubble parameters for the coordinates of r , θ and ψ .

The mean anisotropy parameter is defined on the basis of directional Hubble parameter and mean Hubble parameter.

$$A_h = \frac{2(n-1)^2}{(n+2)^2}; \quad n \neq -2. \quad (39)$$

The mean anisotropy parameter A_h is useful for checking if the model is anisotropic or not. In the present model $A_h = 0$ for $n=1$ and $A_h \neq 0$ for $n \neq 1$



Fig.4. Pressure p in case I.

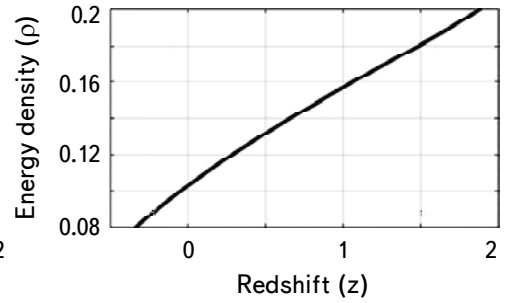


Fig.7. Energy density ρ in case I.

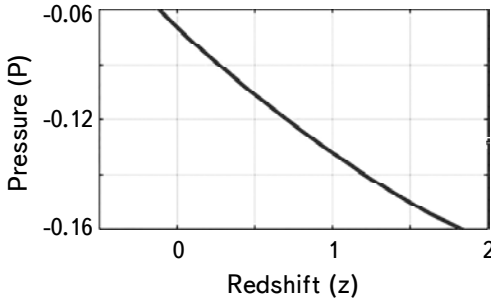


Fig.5. Pressure p in case II.

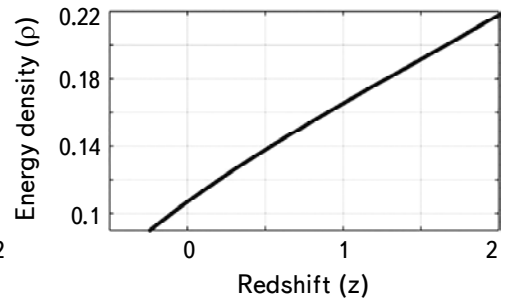


Fig.8. Energy density ρ in case II.

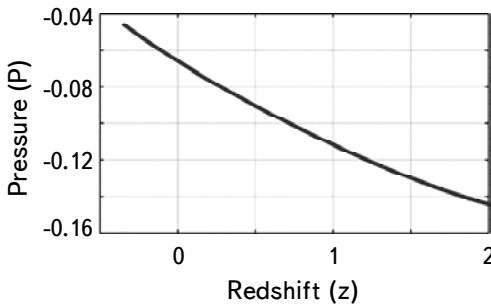


Fig.6. Pressure p in case III.

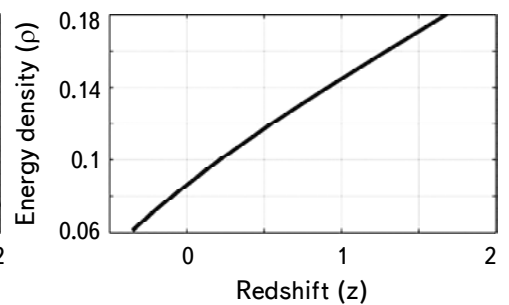


Fig.9. Energy density ρ in case III.

that is the model is anisotropic for $n \neq 1$ and isotropic for $n = 1$.

In all the discussions and graphical representation of physical parameters we constraint the constants for case I as $\alpha = 0.21$, $\beta = 3.10$, $n = 7.38$, $\lambda = -10.02$, $\mu = 0.2$, $\gamma = 0.03$, case II as $\nu = 0.001$, $\tau = 0.002$ and case III as $\kappa = 0.2$, $\iota = 0.009$. The values of parameters α , β , n , λ in cases II and III are same as that of Case I.

(iv) The deceleration parameter is

$$q = -1 + \frac{d}{dt} \frac{1}{H}. \quad (40)$$

In this model by using hyperbolic function we obtained deceleration parameter as

$$q = -1 + \beta(1 - \tanh^2(\alpha t)). \quad (41)$$

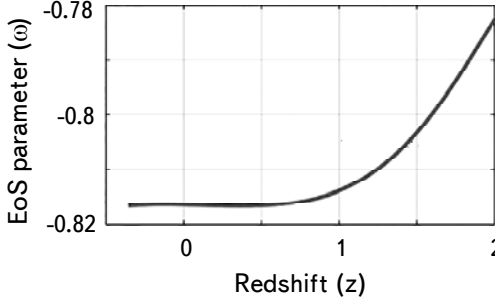
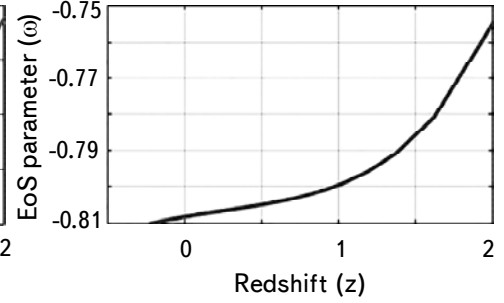
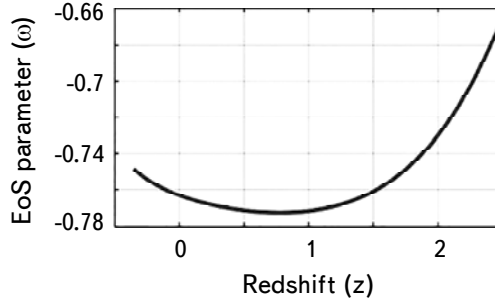
When $t < \frac{1}{\alpha} \tanh^{-1}(1 - 1/\beta)^{1/2}$, q has negative value which represents that the universe is accelerating whereas if $t > \frac{1}{\alpha} \tanh^{-1}(1 - 1/\beta)^{1/2}$, q has positive value which represents that the universe is decelerating. The quantities such as q and H specifies the geometric properties of the cosmos.

v) Fig.4, 5 and 6 illustrate the variation of pressure against redshift in cases I, II and III respectively. The figures shows that in three cases pressure is negative and it is known that a negative pressure fluid is the correct mechanism which is capable of explaining cosmic acceleration within the standard cosmologies, despite the fact that in the latter it is necessary to bring the cosmological constant to get this exotic characteristic. In Fig.4, 5 and 6 the pressure increases with the decrease of redshift, i.e. it increases as time increases which represents cosmic acceleration.

vi) Fig.7, 8 and 9 shows the evolution of energy density for cases I, II and III respectively. In all the cases the density decreases with the decrease of redshift, i.e. it decreases as time increases.

vii) With great efforts the equation of state(EoS) parameter in cosmology of different dark energy models are examined. The parameter relating to the equation of state is a dimensionless term that represents the matter state under some particular physical grounds. In the terminology of p and ρ the EoS can be interpret in the from of $\omega = p/\rho$. The EoS parameter is distinguished in three regions namely quintessence, phantom, and quintom according to its range. In quintessence region the EoS paramter lies in the range of $-1 < \omega < -1/3$, in phantom phase the EoS parameter is in the range of less than -1 (i.e. $\omega < -1$) and in quintom $\omega = -1$. Fig.10, 11 and 12 of the EoS parameter are drawn against redshift and observed that it decreases with the decrease of redshift that is decreases

as time increases. From the graphs we noticed that our model lies in quintessence region in three cases. According to Planck+nine years WMAP the current value of EoS parameter is approximately as $\omega = -1.13^{+0.24}_{-0.25}$ [61], and from SNe Ia data with galaxy clustering, CMBR anisotropy statistics the EoS parameter lies in the range $-1.33 < \omega < -0.79$, $-1.67 < \omega < -0.62$ [62] respectively. From the figures of EoS parameters, it is seen that three cases are approximately coincide with observational data which is a good result.

Fig.10. EoS parameter ω in case I.Fig.11. EoS parameter ω in case II.Fig.12. EoS parameter ω in case III.

viii) In modified theories of gravity, energy conditions [63-65] plays a crucial role in studying the behaviour of spacelike and timelike geodesics and these conditions are came from Raychaudhuri equations [66]. Energy conditions can be defined in many ways, such as geometric way and physical way. Moreover energy conditions are significant in the black hole physics, as they lay foundations of the singularity theorems. Another advantage of energy condition is that it allows basic tools to consider certain ideas about black holes and wormholes. There are four most commonly used fundamental energy conditions. The general expressions for energy conditions in regard of pressure and energy density are given below:

(i) SEC (Strong Energy condition): Gravity always has to be attractive, and in cosmology $\rho + 3p \geq 0$, $\rho + p \geq 0$ should be observed.

(ii) DEC (Dominant Energy Condition): The energy density should always be positive when measured by any observer that is $\rho \geq 0$, $\rho \pm p \geq 0$, must be obeyed.

(iii) WEC (Weak Energy Condition): The energy density must always be positive when measured by any observer that is $\rho \geq 0$, $\rho + p \geq 0$.

(iv) NEC (Null Energy Condition): NEC is expressed in the form of $\rho + p \geq 0$ and it ensures the validity of second law of black hole thermodynamics.

Where NEC, WEC, DEC and SEC represents null, weak, dominant and strong energy conditions. According to present cosmological data to represent the universe with cosmic expansion the SEC of that model should be violated $\rho + 3p \geq 0$. For the obtained models the same scenario can be clearly observed from Fig.13 to 15. When compared to strong energy condition null energy condition is more beneficial, as it can be used algebraically due to its weakest pointwise energy condition which results in the strongest theorems and all these

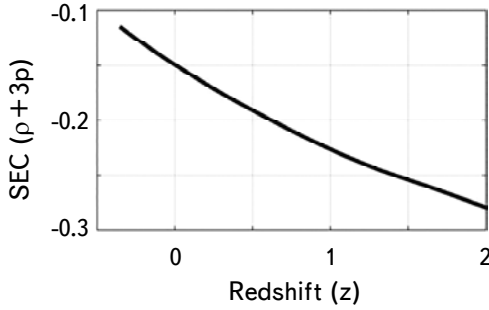


Fig.13. SEC in case I.

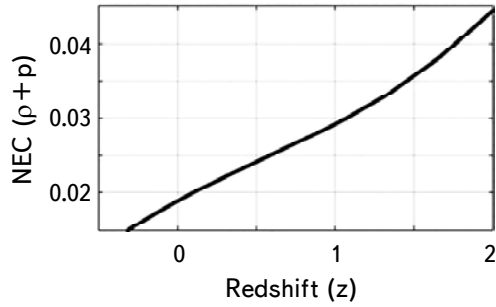


Fig.16. NEC in case I.

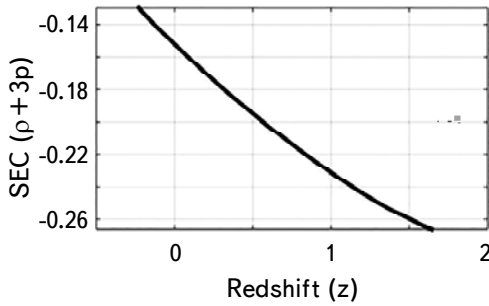


Fig.14. SEC in case II.

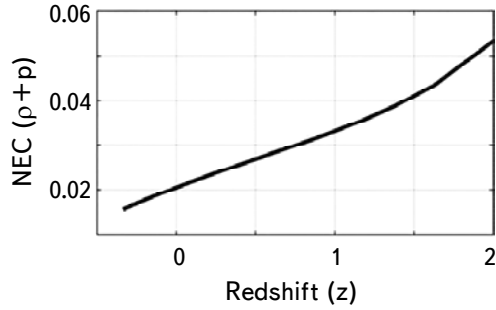


Fig.17. NEC in case II.

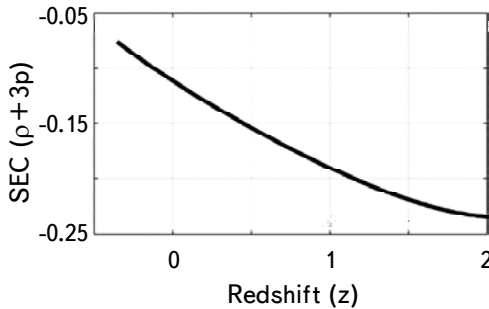


Fig.15. SEC in case III.

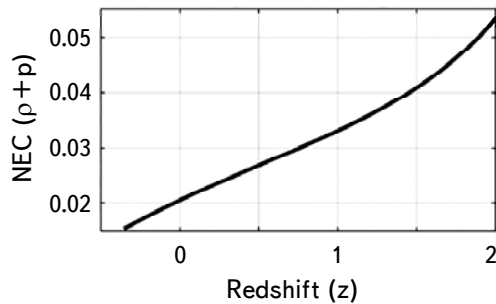


Fig.18. NEC in case III.

energy conditions, are met by electromagnetic field. From Fig.16 to 18 it is clear that NEC ($\rho + p \geq 0$) is satisfied in all the three cases for the obtained model. If NEC satisfies then the parameter EoS occurs in quintessence region. Also from Fig.19 to 21 it is clear that DEC ($\rho + p \geq 0$) is fulfilled in all the three cases for the obtained model.

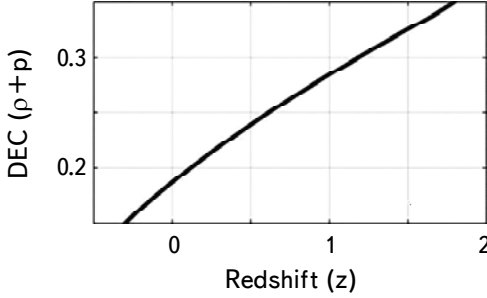


Fig.19. DEC in case I.

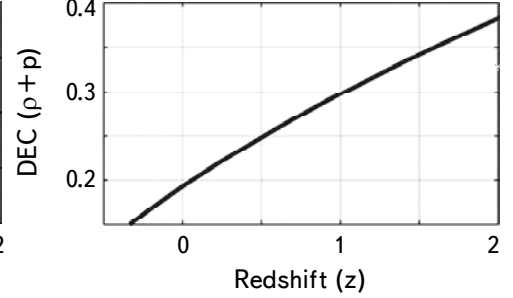


Fig.20. DEC in case II.

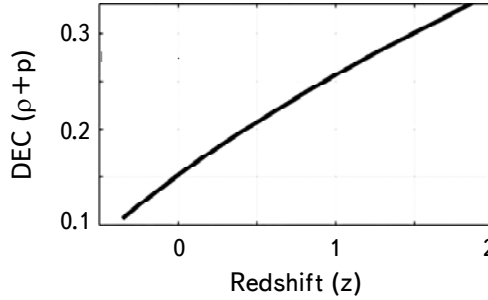


Fig.21. DEC in case III.

4.1. Stability analysis. Perturbations are essential to simplify complex mathematical problems. There are several types of perturbations such as isotropic, anisotropic, homogeneous/inhomogeneous scalar, vector and tensor perturbations. The technique of perturbation is studied as a tool for finding approximate solutions and comparing them to the obtained exact solutions. Some of the researchers who have studied stability analysis are [67-69]. Here, the stability of solutions in terms of metric perturbation is as follows:

$$a_i \rightarrow a_{Bi} + \delta a_i = a_{Bi}(1 + \delta b_i). \quad (42)$$

The perturbation of volume scale factor, directional Hubble factors and mean Hubble factors are

$$V \rightarrow V_B + V_B \sum_i \delta b_i, \quad \theta_i \rightarrow \theta_{Bi} + \sum_i \delta b_i, \quad \theta \rightarrow \theta_B + \frac{1}{3} \sum_i \delta b_i. \quad (43)$$

The following equations are satisfied by the metric perturbation δb_i

$$\sum_i \delta \ddot{b}_i + 2 \sum_i \theta_{Bi} \delta \dot{b}_i = 0, \quad (44)$$

$$\delta \ddot{b}_i + \frac{\dot{V}_B}{V_B} \delta \dot{b}_i + \sum_j \delta \dot{b}_j \theta_{Bi} = 0, \quad (45)$$

$$\sum_i \delta b_i = 0. \quad (46)$$

From equations (44)-(46), we attain

$$\delta \ddot{b}_i + \frac{\dot{V}_B}{V_B} \delta \dot{b}_i = 0, \quad (47)$$

where V_B is the background spatial volume and for our case V_B is

$$V_B = (\sinh(\alpha t))^{\beta/3}. \quad (48)$$

From above two equations, δb_i is procured as

$$\delta b_i = c_1 - c \frac{\beta \sqrt{\cosh^2(\alpha t)} \operatorname{sech}(\alpha t) \sinh^{(\beta-3)/\beta}(\alpha t) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta-3}{2\beta}; \frac{3(\beta-1)}{2\beta}; -\sinh^2(\alpha t)\right)}{\alpha(\beta-3)}, \quad (49)$$

where c_1 and c are integrating constants.

Consequently, the actual fluctuations $\delta a_i = a_{Bi} \delta b_i$ is

$$\delta a_i = \left[c_1 - c \frac{\beta \sqrt{\cosh^2(\alpha t)} \operatorname{sech}(\alpha t) \sinh^{\beta-3/\beta}(\alpha t) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta-3}{2\beta}; \frac{3(\beta-1)}{2\beta}; -\sinh^2(\alpha t)\right)}{\alpha(\beta-3)} \right] \times \sinh(\alpha t)^{-3/\beta}. \quad (50)$$

Fig.22 shows the behaviour of actual fluctuations versus redshift and it is noticed that it is a decreasing function with the decrease of redshift that is actual

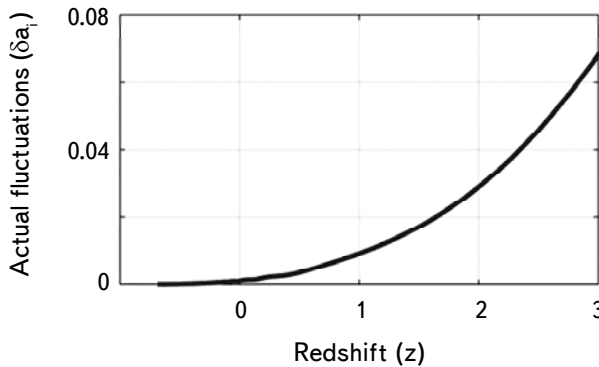


Fig.22. Plot of actual fluctuations δa_i versus redshift z .

fluctuations decrease as time increases. It is clear that $\delta a_i \rightarrow 0$ as $z \rightarrow -\infty$ and hence the background solution is shown to be stable against perturbation of gravitational field.

5. *Conclusions.* A cosmological model in $f(R, T)$ theory with three cases namely power law, logarithmic and exponential curvature is obtained. Hyperbolic scale factor is used to solve the field equations to get the solution in each case. The solutions of these field equations represent accelerating model of the universe. The graph of all parameters are drawn against redshift. In graphs the negative region of z represents future epoch, positive region of z represents past and $z=0$ indicates present. Obtained models are anisotropic and free from singularity all the way through the universe's evolution. By analyzing all the parameters the conclusions are as follows:

- From Fig.1 and 3 and from the equations (34) and (36) it can be seen that Hubble parameter and expansion scalar decreases with the decrease of redshift, and also it is clear that the Hubble parameter and expansion scalar are close to zero when $t \rightarrow \infty$.

- From Fig.2 it is clear that the volume increases with the decrease of redshift which indicates volume of the expanding universe. From equation (37), it is noticed that the shear scalar is a function of time and tends to zero when $t \rightarrow \infty$.

- From equation (39), the anisotropic parameter is independent of time and $A_h \neq 0$ for $n \neq 1$, $A_h = 0$ for $n = 1$. But in this paper due to power law n is different from one. Hence the models are anisotropic throughout.

- From the graphs of pressure and energy density of all the three cases, it is clear that the pressure and energy density are negative and positive respectively. Due to the negative pressure and positive energy density the universe is going through accelerating expansion.

- The behavior of EoS parameter against redshift is represented in plots 11 to 13. From these graphs it is obvious that the model is in the quintessence region in three cases that is $-1 < \omega < -1/3$ which matches with present observational data.

- In three cases, SEC is violated whereas NEC and DEC are fulfilled. The violation of SEC leads to cosmic acceleration which is in good agreement with the expansion of the cosmos.

- As seen in the graph of stability analysis, the actual fluctuations begin with a small positive value and decreases to zero. As a result, the background solution is stable when the gravitational field is perturbed.

A detailed discussion is provided through the obtained models for describing cosmic acceleration. Finally, through the detailed study of the models in three cases namely power law curvature $f(R, T) = R + \gamma R^2 - \mu^4 / R + \lambda T$, logarithmic curvature $f(R, T) = R + \nu \ln(\tau R) + \lambda T$ and exponential curvature $f(R, T) = R + \kappa e^{-1R} + \lambda T$ very

good results which represents the universe accelerating expansion are observed. Moreover all the parameters discussed here matches with the recent observational data. At last, without existence of any exotic fluid, the current universe is accelerating is perceived in this paper which is a great outcome. As a future work, this work can be extended to other anisotropic models and can study the similarities and differences between them.

Acknowledgements. The authors are much delighted to thank the honourable editor and anonymous reviewers for their valuable suggestions and useful comments which helped us a lot to improve this paper in terms of quality as well as presentation. We would like to thank Prof. P.K.Sahoo, BITS-Hyderabad for his valuable help rendered during this work. The author Vinutha Tummala would like to thank the authorities of the IUCAA, Pune, India for providing the facilities under visiting associateship programme.

¹ Dept. of Applied Mathematics, AUCST, Andhra University, Visakhapatnam, India, e-mail: vinuthatummala@gmail.com

² Dept. of Mathematics, Maharaj Vijayaram Gajapathi Raj College of Engineering, India

ИССЛЕДОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КАНТОВСКОГО-САКСА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Т.ВИНУТА¹, К.НИХАРИКА¹, К.Ш.КАВЬЯ²

Космологическая модель идеальной жидкости Кантовского-Сакса исследуется в модифицированной гравитации с функциональной формой $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$, где R - скаляр Риччи, а T - след тензора энергии-импульса. С помощью этой функциональной формы были сформулированы три различных случая, а именно, отрицательная и положительная степени кривизны, логарифмическая кривизна и экспоненциальная кривизна, определяемые формулами $f_1(R) = R + \gamma R^2 - \mu^4/R$, $f_1(R) = R + \nu \ln(\tau R)$ и $f_1(R) = R + \kappa e^{-1R}$, соответственно, и для всех этих трех случаев $f_2(T) = \lambda T$, где $\gamma, \lambda, \mu, \nu, \tau, \kappa$ и 1 - константы. При решении уравнений поля используются два ограничения: i) скаляр расширения пропорционален скаляру сдвига, ii) используется гиперболический масштабный коэффициент. Используя эти условия, получены требуемые оптимальные решения. Рассчитаны физические параметры и

проанализированы геометрические параметры трех случаев в зависимости от красного смещения z с помощью графического представления. В контексте $f(R, T)$ энергетические условия гравитации обсуждаются с помощью давления и плотности энергии. Если сильное энергетическое состояние положительное, гравитация должна быть притягательной, но в нашей модели оно отрицательное. Это означает, что космическое ускорение происходит за счет антигравитации, в то время как выполняются NEC и DEC. Метод возмущений используется для проверки устойчивости фоновых решений полученных моделей. Выводы, полученные в этой статье, согласуются с нынешними космологическими наблюдениями, и модель представляет собой ускоряющуюся Вселенную.

Ключевые слова: *пространство-время Кантовского-Сакса: $f(R, T)$ -теория: идеальная жидкость*

REFERENCES

1. *A.G.Riess et al.*, Astron. J., **116**, 1009, 1998, [arXiv:astro-ph/9805201].
2. *S.Perlmutter et al.*, Astrophys. J., **517**, 565, 1999, [arXiv:astro-ph/9812133].
3. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rep., **505**, 59, 2014, doi:10.1016/j.physrep.2011.04.001, [arXiv:1011.0544 [gr-qc]].
4. *S.Nojiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou*, Phys. Rep., **692**, 2017, doi:10.1016/j.physrep.2017.06.001 [arXiv:1705.11098 [gr-qc]].
5. *A.Chatterjee, S.C.Jaryal*, Eur. Phys. J. C, **81**, 273, 2021, doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09079-8 [arXiv:2102.08717 [gr-qc]].
6. *T.P.Sotiriou, V.Faraoni*, Rev. Mod. Phys., **82**, 451, 2010, [arXiv:0805.1726].
7. *A. De Felice, S.Tsujikawa*, Living Rev. Relativ., **13**, 3, 2010, [arXiv:1002.4928].
8. *T.Harko, F.S.N.Lobo, S.Nojiri et al.*, Phys. Rev. D, **84**, 024020, 2011.
9. *I.Noureen, M.Zubair*, Astrophys. Space Sci., **356**, 103, 2015, [arXiv:1411.5676].
10. *M.F.Shamir*, Eur. Phys. J. C, **75**, 354, 2015, [arXiv:1507.08175].
11. *C.P.Singh, P.Kumar*, Eur. Phys. J. C, **74**, 3070, 2014, [arXiv:1406.4258].
12. *M.Jamil, D.Momeni, M.Raza et al.*, Eur. Phys. J. C, **72**, 1999, 2012. [arXiv:1107.5807].
13. *R.A.C.Correa, P.H.R.S.Moraes*, Eur. Phys. J. C, **76**, 100, 2016, [arXiv:1509.00732].
14. *D.Momeni, P.H.R.S.Moraes, R.Myrzakulov*, Astrophys. Space Sci., **361**, 228, 2016, [arXiv:1512.04755].
15. *G.C.Samanta, S.N.Dhal*, Int. J. Theor. Phys., **52**, 1334, 2013.
16. *M.Sharif, M.Zubair*, J. Cosmol. Astropart. Phys., **03**, 028, 2012, [arXiv:1204.0848].
17. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rev. D, **68**, 123512, 2004, [arXiv:hep-th/0307288].
18. *A.A.Starobinsky*, Phys. Lett. B, **91**, 99, 1980.

19. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Gen. Rel. Grav., **36**, 1765, 2004, [arXiv:hep-th/0308176].
20. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Phys. Lett. B, **576**, 5, 2003, [arXiv:hep-th/0307071].
21. *T.Vinutha, K.V.Vasavi, K.Niharika et al.*, Indian J. Phys., 2022, DOI:10.1007/s12648-022-02470-5
22. *T.Vinutha, K.S.Kavya*, Eur. Phys. J. Plus., **135**, 306, 2020.
23. *A.W.Brookfield, C.V. de Bruck, L.M.H.Hall*, Phys. Rev. D, **74**, 064028, 2006, [arXiv:hep-th/0608015].
24. *N.Godani, G.C.Samanta*, Eur. Phys. J. C, **80**, 30, 2020, [arXiv:2001.00010].
25. *D.K.Banik, S.K.Banik, K.Bhuyan*, Indian J. Phys., **91**, 109, 2017.
26. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Gen. Rel. Grav., **36**, 1765, 2004, [arXiv:hep-th/0308176].
27. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **4**, 115, 2007, [arXiv:hep-th/0601213].
28. *I.Fayyaz, M.F.Shamir*, Eur. Phys. J. C, **80**, 430, 2020.
29. *K.Nožari, T.Aziz*, Phys. Lett. B, **680**, 205, 2009, [arXiv:0909.0351].
30. *G.Cognola, E.Elizalde, S.Nojiri et al.*, Phys. Rev. D, **77**, 046009, 2008, [arXiv:0712.4017].
31. *E.V.Linder*, Phys. Rev. D, **80**, 123528, 2009, [arXiv:0905.2962].
32. *K.Bamba, C.Q.Geng, C.C.Lee*, J. Cosmol. Astropart. Phys., **1008**, 021, 2010, [arXiv:1005.4574].
33. *L.Yang, C.C.Lee, L.W.Luo et al.*, Phys. Rev. D, **82**, 103515, 2010, [arXiv:1010.2058].
34. *Y.Chen, C.Q.Geng, C.C.Lee et al.*, Phys. Rev. D, **91**, 044019, 2015, [arXiv:1407.4303].
35. *T.Vinutha, K.S.Kavya, K.Niharika*, Phys. Dark Universe, **34**, 100896, 2021.
36. *B.C.Paul, P.S.Debnath, S.Ghose*, Phys. Rev. D, **79**, 083534, 2009, [arXiv:0904.0345].
37. *P.K.Sahoo, P.H.R.S.Moraes, P.Sahoo et al.*, Eur. Phys. J. C, **78**, 736, 2018, [arXiv:1809.03303].
38. *P.H.R.S.Moraes, P.K.Sahoo*, Eur. Phys. J. C, **79**, 677, 2019, [arXiv:1903.03421].
39. *P.H.R.S.Moraes, P.K.Sahoo, S.K.J.Pacif*, Gen. Relativ. Gravit., **52**, 32, 2020, [arXiv:1905.00417].
40. *C.B.Collins*, J. Math. Phys., **18**, 2116, 1977.
41. *D.R.K.Reddy, R.L.Naidu*, Astrophys. Space Sci., **301**, 185, 2006.
42. *T.Vinutha, V.U.M.Rao, B.Getaneh et al.*, Space Sci., **363**, 188, 2018.
43. *R.Chaubey*, Int. J. Theo. Phys., **51**, 3933, 2012.
44. *X.X.Wang*, Astrophys. Space Sci., **298**, 433, 2005.
45. *E.Weber*, J. Math. Phys., **25**, 3279, 1984.
46. *S.D.Katore, R.S.Rane*, Astrophys. Space Sci., **323**, 293, 2009.
47. *T.Vinutha, K.S.Kavya*, Results Phys., **23**, 103863, 2021.
48. *T.Vinutha, K.V.Vasavi*, New Astron., **89**, 101647, 2021.
49. *J.R.Ray*, Nuovo Cimento B, **71**, 19, 1982.
50. *V.U.M.Rao, T.Vinutha, M.V.Santhi*, Astrophys. Space Sci., **314**, 213, 2008.
51. *V.U.M.Rao, T.Vinutha, M.V.Santhi*, Astrophys. Space Sci., **317**, 27, 2008.
52. *V.U.M.Rao, T.Vinutha, M.V.Shanthi et al.*, Astrophys. Space Sci., **315**, 211, 2008.
53. *A.Pradhan, K.Jotania*, Indian J. Phys., **85**, 497, 2011.

54. *A.Pradhan, P.Pandey, S.K.Singh*, Int. J. Theor. Phys., **46**, 1584, 2007, [arXiv:gr-qc/0610125].
55. *O.Bertolami, C.G.Bohmer, T.Harko et al.*, Phys. Rev. D, **75**, 104016, 2007, [arXiv:0704.1733].
56. *Y.Bisabr*, Gen. Relativ. Gravit., **45**, 1559, 2013, [arXiv:1307.5535].
57. *T.P.Sotiriou, V.Faraoni*, Class. Quantum Gravity, **25**, 205002, 2008, [arXiv:0805.1249].
58. *R.Kantowski, R.K.Sachs*, J. Math. Phys., **7**, 443, 1966.
59. *C.Chawla, R.K.Mishra, A.Pradhan*, Rom. J. Phys., **58**, 1000, 2013, [arXiv:1203.4014].
60. *N.Godani*, Indian J. Phys., **93**, 951, 2019.
61. *P.A.R.Ade, N.Aghanim, M.Arnaud et al.*, Astron. Astrophys., **594**, A13, 2016.
62. *M.Tegmark, M.R.Blanton, M.A.Strauss et al.*, Astrophys. J., **606**, 702, 2004, [arXiv:astroph/0310725].
63. *S.Capozziello, F.S.N.Lobo, J.P.Mimoso*, Phys. Lett. B, **730**, 280, 2014, [arXiv:1312.0784].
64. *S.Capozziello, M. De Laurentis*, arXiv:1108.6266v2, [gr-qc] (2 Sep 2011).
65. *S.Capozziello, F.S.N.Lobo, J.P.Mimoso*, Phys. Rev. D, **91**, 124019, 2015, [arXiv:1407.7293].
66. *A.Raychaudhuri*, Phys. Rev., **98**, 1123, 1955.
67. *A.K.Yadav, P.K.Sahoo, V.Bhardwaj*, Mod. Phys. Lett. A, **34**, 1950145, 2019.
68. *Chiang-Mei Chen, W.F.Kao*, Phys. Rev. D, **64**, 124019, 2001, [arXiv:hep-th/0104101].
69. *B.Saha, H.Amirhashchi, A.Pradhan*, Astrophys. Space Sci., **342**, 257, 2012, [arXiv:1108.2133].

EFFECT OF THE INTERACTION BETWEEN HYPERONS ON THE MOMENT OF INERTIA OF THE PROTO NEUTRON STARS

XIAN-FENG ZHAO

Received 12 October 2022

Accepted 3 February 2023

Effect of the interaction between hyperons on the moment of inertia of proto neutron stars (PNSs) PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A is examined by means of relativistic mean field theory. Taking into account the interaction between hyperons, the mass M of the PNS decreases with respect to the same radius R , the energy density ε increases with respect to the same pressure p , and the moment of inertia I of the PNS decreases with respect to the same central energy density ε_c . Under the constraint of the mass of the PNS, considering the interaction between hyperons, the larger the mass of the PNS, the more the radius and moment of inertia of the PNS decrease, while the more energy density and pressure increase. For smaller PNSs, the effect can be negligible.

Keywords: *hyperon: relativistic mean field theory: neutron star*

1. Introduction. Neutron stars (NSs) are dense objects that have a $\lesssim 2$ solar mass and a very small radius [1-4]. When calculating its moment of inertia, general relativistic effects must be taken into account [5,6].

A binary NS system PSR J0737-3039 was observed in 2004 [7]. One of the NSs in the system, NS PSR J0737-3039A, has a typical mass $M = 1.34 M_\odot$ [7-9]. After that, its mass was determined to be $M = 1.337 M_\odot$ [10], or $M = 1.3381 \pm 0.0007 M_\odot$ [11].

In the last decade, great progress has also been made in the observation of massive NSs. NS PSR J1614-2230 was discovered in 2010 and its mass is $M = 1.97 \pm 0.04 M_\odot$ [12]. In 2016, its mass was precisely determined to be $M = 1.93 \pm 0.07 M_\odot$ [13]. NS PSR J0348+0432, whose mass is $M = 2.01 \pm 0.04 M_\odot$, was observed in 2013 [14]. In 2020, NS PSR J0740+6620 with the mass of $M = 2.14^{+0.10}_{-0.09} M_\odot$ was discovered [15] and it may be the most massive NS ever discovered.

NSs come from supernova explosions. A proto neutron star (PNS), formed by a supernova explosion, can reach temperatures as high as 30 MeV. Later, the PNS emits energy through neutrino radiation to form a NS [16]. PNS is a very important stage in the evolution of NS and the research of PNS is meaningful

for astrophysics.

The interactions between nucleons in NS matter are described by σ , ω and ρ mesons. But this is not complete, and the interactions between hyperons, which can be described in terms of f_0 (1020 MeV) (short for σ^*) and ϕ (975 MeV) (short for ϕ) mesons [17], need to be taken into account. It is of great interest to know how the interaction between hyperons affects the properties of the PNS, such as the moment of inertia.

In this paper, the effect of the interaction between hyperons on the moment of inertia of PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A is examined by using the relativistic mean field (RMF) theory [18] considering baryon octet.

2. The RMF theory for the PNS matter. The Lagrangian density of the PNS matter is as follows [19]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_B + g_{\sigma B} \sigma + g_{\sigma^* B} \sigma^* - g_{\omega B} \gamma^0 \omega_0 - g_{\phi B} \gamma^0 \phi_0 - g_{\rho B} \gamma^0 \tau_3 \rho_{03}) \psi_B \\ & - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 - \frac{1}{2} m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2 \\ & + \sum_{\lambda=e,\mu} \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

where ψ_B is the Dirac spinor of baryon B and the corresponding mass is m_B . σ and σ^* are field operators for mesons σ and σ^* , respectively. ω_0 , ρ_{03} and ϕ_0 are expected values for mesons ω , ρ and ϕ , respectively. $g_{\sigma B}$, $g_{\omega B}$, $g_{\rho B}$, $g_{\sigma^* B}$ and $g_{\phi B}$ represent the coupling constants between σ , ω , ρ , σ^* and ϕ mesons and baryon B, respectively. g_2 and g_3 are the self-interaction parameters of σ mesons. m_σ , m_ω , m_ρ , m_{σ^*} and m_ϕ are masses of mesons σ , ω , ρ , σ^* and ϕ , respectively. ψ_λ and m_λ are the Dirac spinor and mass of the free electron and μ , respectively.

Considering the neutrino binding, the baryonic partition function of the PNS matter is

$$\ln Z_B = \frac{V}{T} \langle \mathcal{L} \rangle + V \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \ln \left[1 + e^{-(\varepsilon_B(k) - \mu_B)/T} \right] \right\}. \quad (2)$$

Here, V stands for volume, T for temperature, J_B for spin of baryon B, k for Fermi momentum, $\varepsilon_B(k)$ for energy of baryon B, and μ_B for chemical potential of baryon B.

The total baryon number density [20,21] is

$$\rho = \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} b_B \int_0^\infty k^2 n_B(k) dk. \quad (3)$$

Here, b_B is the baryon number of baryon B. $n_B(k)$ is the Fermi-Dirac distribution function of baryon

$$n_B(k) = \frac{1}{1 + \exp[(\varepsilon_B(k) - \mu_B)/T]}, \quad (4)$$

and $\varepsilon_B(k)$ is defined as

$$\varepsilon_B(k) = \sqrt{(m_B - g_{\sigma B} \sigma - g_{\sigma^* B} \sigma^*)^2 + k^2} + g_{\omega B} \omega_0 + g_{\phi B} \phi_0 + g_{\rho B} \rho_{03} I_{3B}, \quad (5)$$

where the interaction terms between baryon and meson fields are properly taken into account [22]. I_{3B} is the isospin 3 component of baryon B.

The energy density and the pressure respectively are

$$\begin{aligned} \varepsilon_B = & \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \\ & + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 n_B(k) d\kappa \sqrt{k^2 + m_B^{*2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p_B = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \\ & + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\kappa^4}{\sqrt{\kappa^2 + m_B^{*2}}} n_B(k) d\kappa. \end{aligned} \quad (7)$$

Here, m_B^* is the effective mass of baryon B

$$m_B^* = m_B - g_{\sigma B} \sigma - g_{\sigma^* B} \sigma^*. \quad (8)$$

Regardless of the interaction between leptons at finite temperature, their partition function is

$$\ln Z_L = \frac{V}{T} \sum_i \frac{\mu_i^4}{24\pi^2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi T}{\mu_i} \right)^2 + \frac{7}{15} \left(\frac{\pi T}{\mu_i} \right)^4 \right] + V \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \ln \left[1 + e^{-(\varepsilon_\lambda(k) - \mu_\lambda)/T} \right] \right\}, \quad (9)$$

the first line represents the contribution of massless neutrinos and the second line the contribution of electrons and μ s. μ_i is the chemical potential of neutrinos. $\varepsilon_\lambda(k)$ and μ_λ are the energy and chemical potential of electrons and μ s, respectively.

The lepton number density is

$$\rho_l = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 n_l(k) dk, \quad (10)$$

$$\rho_v = \frac{\pi^2 T^2 \mu_v + \mu_v^3}{6\pi^2}. \quad (11)$$

where, ρ_l and $n_l(k)$ represent the number density and distribution function of

electron and μ , respectively. ρ_ν and μ_ν represent the number density and chemical potential of electron neutrinos and μ neutrinos, respectively.

The energy density and the pressure of leptons are

$$\varepsilon_L = \sum_l \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \kappa^2 n_l(k) d\kappa \sqrt{\kappa^2 + m_l^2} + \sum_\nu \left(\frac{7\pi^2 T^4}{120} + \frac{T^2 \mu_\nu^2}{4} + \frac{\mu_\nu^4}{8\pi^2} \right), \quad (12)$$

$$p_L = \frac{1}{3} \sum_l \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\kappa^4}{\sqrt{\kappa^2 + m_l^2}} n_l(k) d\kappa + \sum_\nu \frac{1}{360} \left(7\pi^2 T^4 + 30T^2 \mu_\nu^2 + \frac{15\mu_\nu^4}{\pi^2} \right). \quad (13)$$

The chemical potentials of baryon i are

$$\mu_i = \mu_n - q_i(\mu_e - \mu_{\nu e}). \quad (14)$$

where μ_n , μ_e and $\mu_{\nu e}$ denote the chemical potential of neutrons, the chemical potential of electrons and the chemical potential of electron neutrinos, respectively. q_i is the charge of baryon i .

The mass and the radius of a PNS can be calculated by the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation [23,24]

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\varepsilon)(M+4\pi r^3 p)}{r(r-2M)}, \quad (15)$$

$$M = 4\pi \int_0^R \varepsilon r^2 dr. \quad (16)$$

For a slowly rotating PNS, its moment of inertia is [5,6]

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R dr r^4 \frac{\varepsilon + p}{\sqrt{1-2M(r)/r}} \frac{[\Omega - \omega(r)]}{\Omega} e^{-\nu}. \quad (17)$$

Here, Ω and $\omega(r)$ represent the angular velocity measured at infinity and the angular velocity of the frame rotation, respectively. ν is given by

$$-\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{1}{\varepsilon + p} \frac{dp}{dr}, \quad (18)$$

and the angular velocity is given by

$$-\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} = 0. \quad (19)$$

The $j(r)$ is

$$j(r) = e^{-(\nu+\lambda)} = e^{-\nu} \sqrt{1-2M(r)/r}, \quad r < R. \quad (20)$$

The boundary condition are given by

$$\frac{d\bar{\omega}}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (21)$$

$$v(\infty)=0, \quad (22)$$

$$\bar{\omega}(R)=\Omega-\frac{R}{3}\frac{d\bar{\omega}}{dr}\Big|_{r=R}. \quad (23)$$

3. *The parameters.* Eight sets of nucleon coupling constants (DD-ME1 [25], FSU2H [26], FSU2R [26], FSUGold [27], GL85 [28], GL97 [19], GM1 [29], and TW99 [25]) are used to calculate the PNSs in this work.

The ratios of hyperon coupling constant to nucleon coupling constant can be defined as $x_{\sigma h} = g_{\sigma h}/g_{\sigma}$, $x_{\omega h} = g_{\omega h}/g_{\omega}$, $x_{\rho h} = g_{\rho h}/g_{\rho}$, with h denoting hyperons Λ , Σ and Ξ .

Through quark SU(6) symmetry we select the $x_{\rho h}$ s [30,31]. For the mass of the PNS increases as $x_{\sigma h}$ s and $x_{\omega h}$ s increase [32] and in order to obtain the large mass of the PNS PSR J0740+6620, we should select as large $x_{\omega h}$ s as possible, $x_{\omega h} = 0.9$, and $x_{\sigma h}$ s are obtained by [19]

$$U_h^{(N)} = m_n \left(\frac{m_n^*}{m_n} - 1 \right) x_{\sigma h} + \left(\frac{g_{\omega}}{m_{\omega}} \right)^2 \rho_0 x_{\omega h}. \quad (24)$$

Here, the hyperon-potentials are chosen as $U_{\Lambda}^{(N)} = -30$ MeV [31,33,34], $U_{\Sigma}^{(N)} = 30$ MeV [31,33-35] and $U_{\Xi}^{(N)} = -14$ MeV [36], respectively.

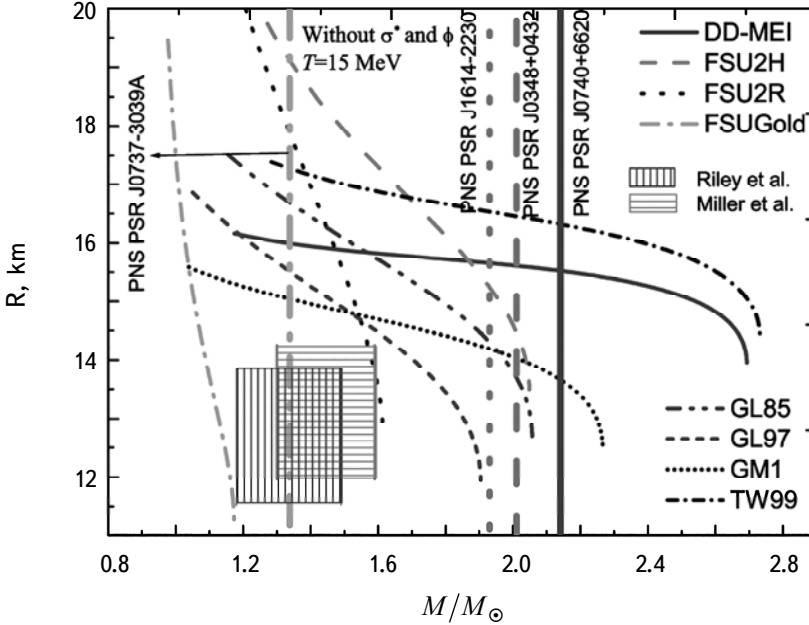


Fig.1. The radius of the PNS as a function of the mass. The four thick vertical lines represent the masses of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A, respectively.

The coupling parameters between the mesons σ^* and ϕ and the hyperons can be taken as [17]

$$g_{\phi\Xi} = 2g_{\phi\Lambda} = 2g_{\phi\Sigma} = -2\sqrt{2}g_{\omega}/3, \quad (25)$$

$$g_{\sigma^*\Lambda}/g_{\sigma} = g_{\sigma^*\Sigma}/g_{\sigma} = 0.69, \quad (26)$$

$$g_{\sigma^*\Xi}/g_{\sigma} = 1.25. \quad (27)$$

We choose the temperature of the PNSs as $T=15$ MeV [16].

As can be seen from Fig.1, TW99, DD-ME1 and GM1 can give the masses of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A. Riley et al. [37] and Miller et al. [38] made accurate measurements of the mass and radius of NS PSR J0030+0451. Results of Riley et al. [37] are $M = 1.34^{+0.15}_{-0.16} M_{\odot}$ and $R = 12.71^{+1.14}_{-1.19}$ km, and results of Miller et al. [38] are $M = 1.44^{+0.15}_{-0.14} M_{\odot}$ and $R = 13.02^{+1.24}_{-1.06}$ km. We see that GM1 gives masses and radii that are closest to the results of [37,38]. Therefore, we next use GM1 to study the effect of the interaction between hyperons on the moment of inertia of the PNSs.

4. *Effect of the interaction between hyperons on the radius of the PNSs.* The radius of the PNS as a function of the mass calculated by nucleon

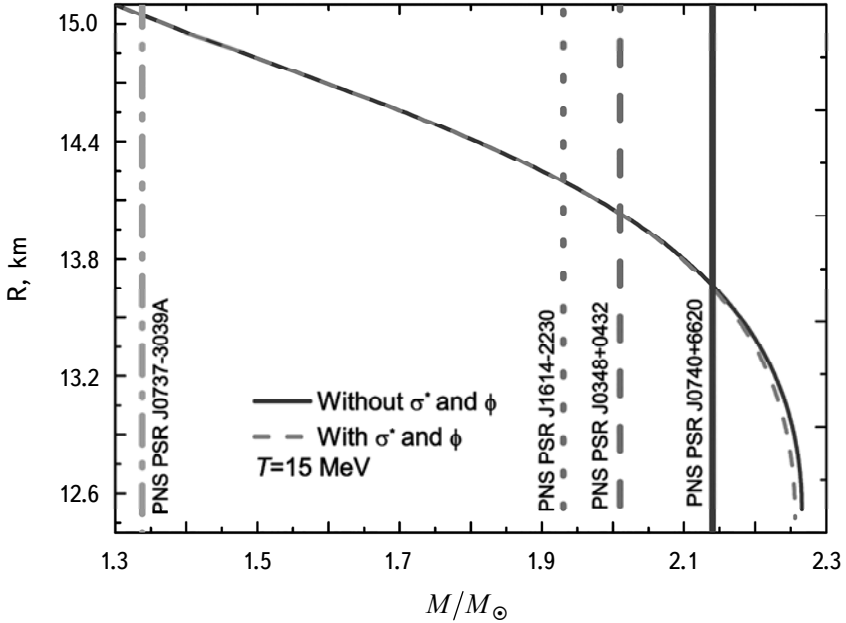


Fig.2. The radius of the PNS as a function of the mass calculated by nucleon coupling constant GM1. The four thick vertical lines represent the masses of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A, respectively.

coupling constant GM1 is shown in Fig.2. The nucleon coupling constant is chosen as GM1.

It can be seen that the radius R of the PNS decreases as the mass M increases. Given the interaction between hyperons, the mass M of the PNS decreases with respect to the same radius R .

Table 1

THE RESULTS OF THE CALCULATION OF THE RADIUS,
CENTRAL ENERGY DENSITY, CENTRAL PRESSURE,
AND MOMENT OF INERTIA

Parameter	R , km	ε_c , 10^{15} g cm $^{-3}$	p_c , 10^{35} dyne cm $^{-2}$	I , 10^{45} g cm 2
PNS6620 $M = 2.14 M_\odot$				
no σ^* and ϕ	13.663	1.124	2.577	2.347
with σ^* and ϕ	13.648	1.141	2.608	2.320
PNS0432 $M = 2.01 M_\odot$				
no σ^* and ϕ	14.035	0.931	1.820	2.443
with σ^* and ϕ	14.027	0.937	1.834	2.437
PNS2230 $M = 1.93 M_\odot$				
no σ^* and ϕ	14.199	0.856	1.533	2.425
with σ^* and ϕ	14.199	0.857	1.533	2.422
PNS3039A $M = 1.338 M_\odot$				
no σ^* and ϕ	15.05	0.563	0.553	1.671
with σ^* and ϕ	15.05	0.563	0.553	1.671

Under the constraints of the mass M of the corresponding PNS mentioned above, the radius of the PNS PSR J0740+6620 is reduced by about 0.1% from $R=13.663$ km to $R=13.648$ km considering the interaction between hyperons (see Table 1). The radius of the PNS PSR J0348+0432 decreases from $R=14.035$ km to $R=14.027$ km, which is about 0.06%. The radius of PNS PSR J1614-2230 is $R=14.199$ km, while the radius of PNS PSR J1614-2230 is $R=15.05$ km, both unchanged. We see that the larger the mass M of the PNS, the larger the reduction in the radius R of the PNS, taking into account the interaction between hyperons. For the less massive PNS, the hyperon interaction has little effect on the radius R . The influence of the interaction between hyperons on the radius of the PNS must lead to the influence on the moment of inertia.

5. Effects of hyperon interactions on the energy density and pressure of the PNSs. The energy density ε of the PNS as a function of the pressure p is shown in Fig.3.

We see that the energy density ε of the PNS increases as the pressure

increases. Given the interactions between the hyperons, the energy density ε increases with respect to the same pressure p . Of course, the energy density ε doesn't go up very much.

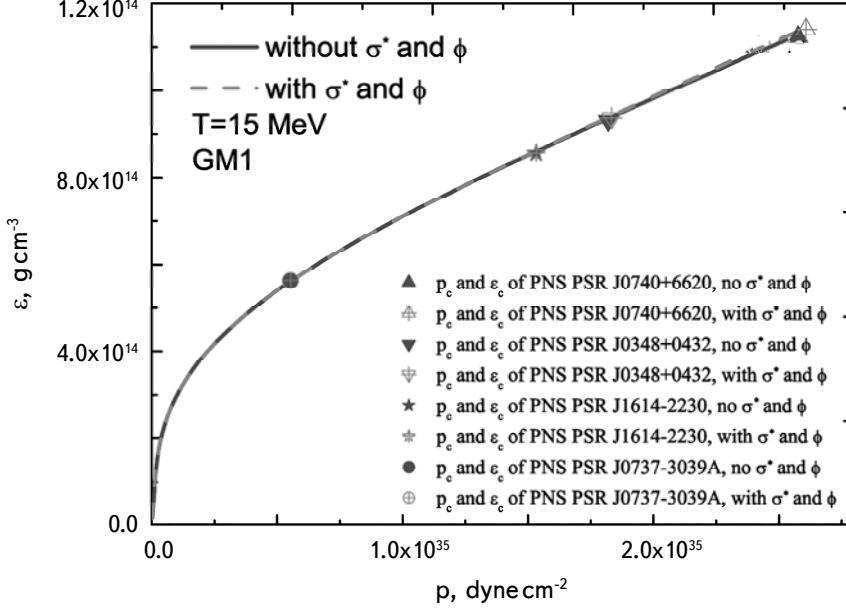


Fig.3. The energy density ε of the PNS as a function of the pressure p . The triangles, pentagons and dots in the figure represent the central energy density ε_c and central pressure p_c of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A, respectively. The solid symbols mean that the interaction between hyperons is not considered, and the hollow symbols mean that the interaction between hyperons is considered.

Under the constraint of the mass of the PNSs mentioned above, the central energy density of the PNS PSR J0740+6620 increases from $\varepsilon_c = 1.124 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ to $\varepsilon_c = 1.141 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ by about 1.5%, considering the interaction between hyperons. The central energy density of the PNS PSR J0348+0432 increases from $\varepsilon_c = 0.931 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ to $\varepsilon_c = 0.937 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, which is about 0.6%. The central energy density of the PNS PSR J1614-2230 increases from $\varepsilon_c = 0.856 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ to $\varepsilon_c = 0.857 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, increasing by about 0.1%. The central energy density of the PNS PSR J0777-3039A is $\varepsilon_c = 0.563 \cdot 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, which does not change. Similar results are found for the central pressure p_c of the PNSs. It can be seen that the larger the mass M of the PNS, the greater the influence of the interaction between hyperons on the central energy density ε_c and the central pressure p_c . When the mass M of the PNS is small, this effect can be ignored.

6. *The influence of the interaction between hyperons on the moment of inertia of the PNSs.* Fig.4 gives the moment of inertia I of the

PNS as a function of the central energy density ε_c .

As can be seen from Fig.4, the moment of inertia I of the PNS increases with the increase of the center energy density ε_c , and decreases with the increase of the center energy density ε_c after reaching a certain peak value. Taking into account the interaction between hyperons, the moment of inertia I of the PNS decreases with respect to the same central energy density ε_c .

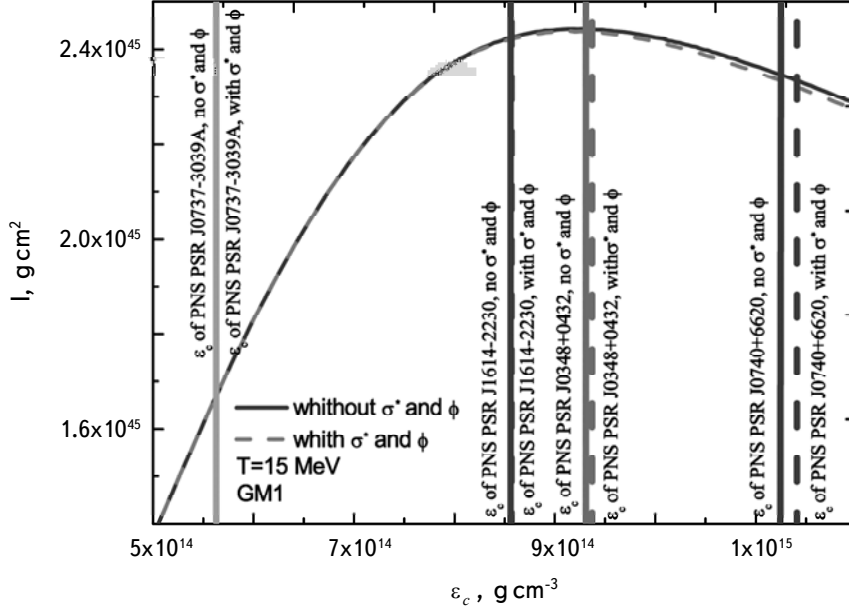


Fig.4. The moment of inertia I of the PNS as a function of the central energy density ε_c . The solid thick vertical lines represent the central energy density ε_c of the PNS when the interaction between hyperons is not considered, while the dashed thick vertical lines represent the central energy density ε_c of the PNS when the interaction between hyperons is considered.

We see from Table 1 and Fig.4, the moment of inertia I of the PNS PSR J0740+6620 is reduced from $I = 2.347 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ to $I = 2.320 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ by about 1.2% under the mass limit of the PNS mentioned above and considering the interaction between hyperons. The moment of inertia of the PNS PSR J0348+0432 decreases from $I = 2.443 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ to $I = 2.437 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$, which is about 0.2%. The moment of inertia of the PNS PSR J1614-2230 decreases from $I = 2.425 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ to $I = 2.422 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$, which is about 0.1%. The moment of inertia of the PNS PSR J0777-3039A is $I = 1.671 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ and does not change. So the larger the mass of the PNS, the larger the decrease in the moment of inertia considering the interaction between hyperons. When the mass of the PNS is small, the interaction between hyperons has little effect on the moment of inertia of the PNS.

The moment of inertia I of the PNS as a function of the radius R is shown

in Fig.5. We see that the moment of inertia of the PNS increases as the radius increases, and after reaching a certain peak, decreases as the radius increases. Considering the interaction between hyperons, the moment of inertia of the PNS with respect to the same radius decreases, and the smaller the radius, the greater the decrease in moment of inertia.

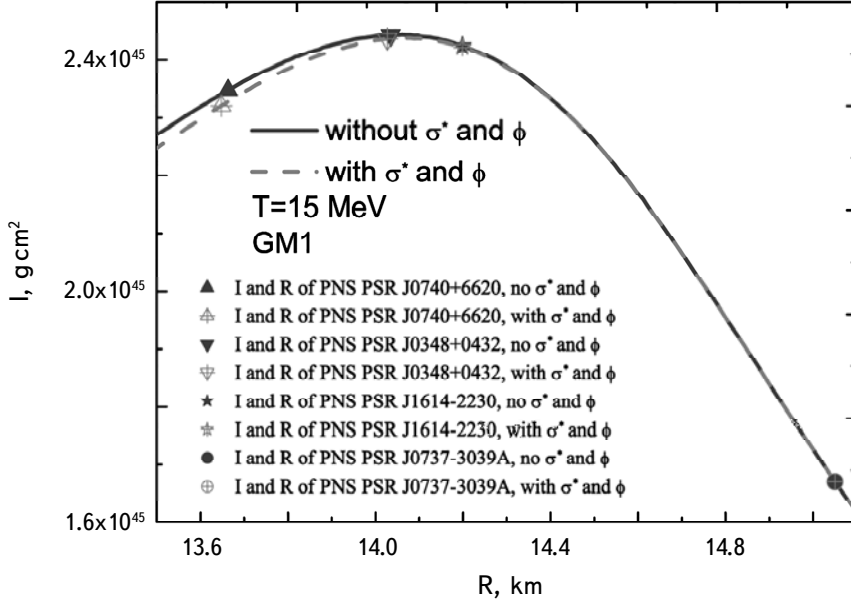


Fig.5. The moment of inertia I of the PNS as a function of the radius R . The triangles, pentagons and dots in the figure represent the moment of inertia I and radius R of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A, respectively. The solid symbols mean that the interaction between hyperons is not considered, and the hollow symbols mean that the interaction between hyperons is considered.

The moment of inertia I of the PNS as a function of the mass M is given in Fig.6. We see that the moment of inertia of the PNS increases with the increase of the mass, and after reaching a certain peak, decreases with increase of the mass. Taking into account the interaction between hyperons, the moment of inertia of the PNS with respect to the same mass decreases, and the greater the mass, the greater the decrease in the moment of inertia.

7. Summary. In this paper, the effects of the interaction between hyperons on the moment of inertia of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A are studied by means of RMF theory. The nucleon coupling parameter is chosen as GM1, and the temperature of the PNS is set as $T = 15$ MeV.

We see that the mass M of the PNS decreases with respect to the same radius

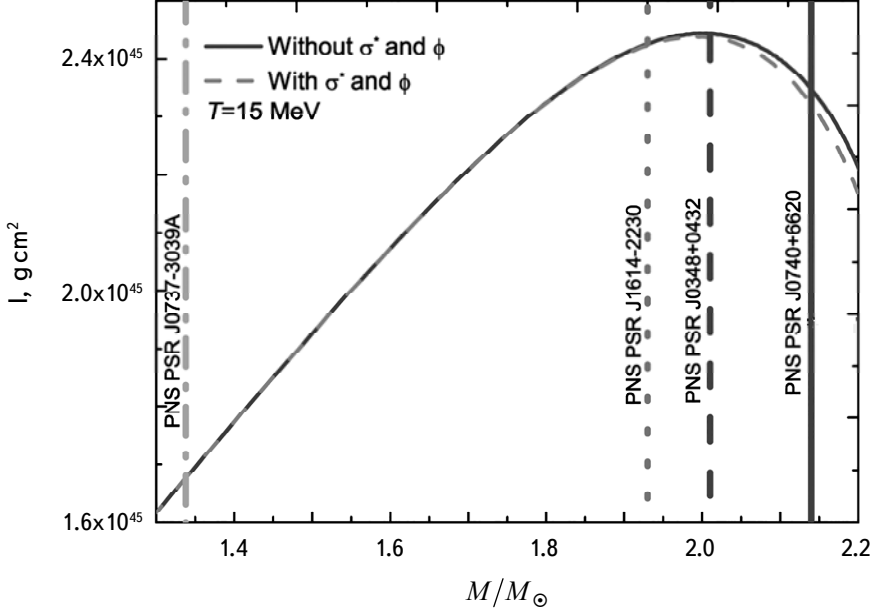


Fig.6. The moment of inertia I of the PNS as a function of the mass M . The four thick vertical lines represent the masses of the PNSs PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 and PSR J0737-3039A, respectively.

R as the interaction between hyperons is considered. Under the constraints of the mass M of the corresponding PNS, the larger the mass M of the PNS, the larger the reduction in the radius R of the PNS, taking into account the interaction between hyperons. For the less massive PNS, the hyperon interaction has little effect on the radius R .

Under the constraint of the mass of the PNSs, the larger the mass M of the PNS, the greater the influence of the interaction between hyperons on the central energy density ε_c and the central pressure p_c . When the mass M of the PNS is small, this effect can be ignored.

Taking into account the interaction between hyperons, the moment of inertia I of the PNS decreases with respect to the same central energy density ε_c . We also see that the larger the mass of the PNS, the larger the decrease in the moment of inertia considering the interaction between hyperons. When the mass of the PNS is small, the interaction between hyperons has little effect on the moment of inertia of the PNS.

Our results show that the interaction between hyperons has a strong influence on the properties of the larger mass PNS, but a small influence on the properties of the smaller mass PNS.

In our calculation, in addition to the mean-field approximation, we also use

the sea-free approximation, that is, we do not consider the effect of antiparticles. In fact, especially in finite temperature NS matter, antiparticles excited from the sea should be considered. This will be an area that we will continue to investigate in the future.

In addition, the simplest RMF model with constant baryon-meson couplings is used in our calculations and the so-called rearrangement self-energy is not taken into account. But it is necessary to include properly the "rearrangement" contributions to show that energy-momentum conservation [25]. Therefore, the influence of the rearrangement self-energy on the NS/PNS matter should be considered in the next calculations.

This work was supported by the Natural Science Foundation of China (Grant No. 11447003).

School of Sciences, Southwest Petroleum University, China,
e-mail: zhaopioneer.student@sina.com

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИПЕРОНОВ НА МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРОТОНЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

СИАНЬ-ФЭН ЧЖАО

В рамках релятивистской теории среднего поля исследовано влияние взаимодействия гиперонов на момент инерции протонейтронных звезд (ПНЗ) PSR J0740+6620, PSR J0348+0432, PSR J1614-2230 и PSR J0737-3039A. При учете взаимодействия между гиперонами: а) при одинаковом радиусе R масса ПНЗ уменьшается, б) при одинаковом давлении p плотность энергии увеличивается, в) при одинаковой центральной плотности ε_c момент инерции I ПНЗ уменьшается. При ограничении массы ПНЗ, в результате взаимодействия между гиперонами, чем больше масса ПНЗ, тем больше уменьшаются радиус и момент инерции ПНЗ, а плотность энергии и давление увеличиваются. Для менее массивных ПНЗ эффект может быть незначительным.

Ключевые слова: *гиперон; релятивистская теория среднего поля; нейтронная звезда*

REFERENCES

1. *X.L.Mu, H.Y.Jia, X.Zhou et al.*, *Astrophys. J.*, **846**, 140, 2017.
2. *Z.L.Deng, X.D.Li, Z.F.Gao et al.*, *Astrophys. J.*, **909**, 174, 2021.
3. *W.B.Ding, M.D.Cai, A.H.Chan et al.*, *Int. J. Mod. Phys. A*, **37**, 2250034, 2022.
4. *Y.X.Li, H.Y.Chen, D.H.Wen et al.*, *Eur. Phys. J. A*, **57**, 31, 2021.
5. *J.B.Hartle*, *Astrophys. J.*, **150**, 1005, 1967.
6. *J.B.Hartle, K.S.Thorne*, *Astrophys. J.*, **153**, 807, 1968.
7. *A.G.Lyne, M.Burgay, M.Kramer et al.*, *Science*, **303**, 1153, 2004.
8. *S.E.Thorsett, D.Chakrabarty*, *Astrophys. J.*, **512**, 288, 1999.
9. *M.Bailes, S.M.Ord, H.S.Knight et al.*, *Astrophys. J.*, **595**, L49, 2003.
10. *I.A.Morrison, T.W.Baumgarte, S.L.Shapiro et al.*, *Astrophys. J.*, **617**, L135, 2004.
11. *M.Kramer, I.H.Stairs, R.N.Manchester et al.*, *Science*, **314**, 97, 2006.
12. *P.B.Demorest, T.Pennucci, S.M.Ransom et al.*, *Nature*, **467**, 1081, 2010.
13. *E.Fonseca, T.T.Pennucci, J.A.Ellis et al.*, *Astrophys. J.*, **832**, 167, 2016.
14. *J.Antoniadis, P.C.C.Freire, N.Wex et al.*, *Science*, **340**, 448, 2013.
15. *H.T.Cromartie, E.Fonseca, S.M.Ransom et al.*, *Nature Astron.*, **4**, 72, 2020.
16. *A.Burrows, J.M.Lattier*, *Astrophys. J.*, **307**, 178, 1986.
17. *J.Schaffner, C.B.Dover, A.Gal*, *Ann. Phys.*, **235**, 35, 1994.
18. *S.G.Zhou*, *Phys. Scr.*, **91**, 063008, 2016.
19. *N.K.Glendenning*, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*, Springer-Verlag, New York, Inc, 1997.
20. *N.K.Glendenning*, *Phys. Lett. B*, **185**, 275, 1987.
21. *N.K.Glendenning*, *Nucl. Phys. A*, **469**, 600, 1987.
22. *A.Sedrakian, A.Harutyunyan*, *Universe*, **7**, 380, 2021, arXiv:2109.01919.
23. *R.C.Tolman*, *Phys. Rev.*, **55**, 364, 1939.
24. *J.R.Oppenheimer, G.M.Volkoff*, *Phys. Rev.*, **55**, 374, 1939.
25. *S.Typel, H.H.Wolter*, *Nucl. Phys. A*, **656**, 331, 1999.
26. *T.Laura, C.Mario, R.Angels*, *Publ. Astron. Soc. Aust.*, **34**, e065, 2017.
27. *B.G.Todd-Rutel, J.Piekarewicz*, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 122501, 2005.
28. *N.K.Glendenning*, *Astrophys. J.*, **293**, 470, 1985.
29. *N.K.Glendenning, S.A.Moszkowski*, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 2414, 1991.
30. *J.Schaffner, I.N.Mishustin*, *Phys. Rev. C*, **53**, 1416, 1996.
31. *J.Schaffner-Bielich, A.Gal*, *Phys. Rev. C*, **62**, 034311, 2000.
32. *X.F.Zhao*, *Int. J. Theor. Phys.*, **58**, 1060, 2019.
33. *S.Weissenborn, D.Chatterjee, J.Schaffner-Bielich*, *Nucl. Phys. A*, **881**, 62, 2012.
34. *A.Gal, E.V.Hungerford, D.J.Millener*, *Rev. Mod. Phys.*, **88**, 035004, 2016.
35. *C.J.Batty, E.Friedman, A.Gal*, *Phys. Rep.*, **287**, 385, 1997.
36. *T.Harada, Y.Hirabayashi, A.Umeya*, *Phys. Lett. B*, **690**, 363, 2010.
37. *T.E.Riley, A.L.Watts, S.Bogdanov et al.*, *Astrophys. J. Lett.*, **887**, L21, 2019.
38. *M.C.Miller, F.K.Lamb, A.J.Dittmann et al.*, *Astrophys. J. Lett.*, **887**, L24, 2019.

ACCELERATING KALUZA-KLEIN UNIVERSE IN MODIFIED THEORY OF GRAVITATION

S.D.KATORE¹, S.P.HATKAR², D.P.TADAS³

Received 5 November 2022

Accepted 3 February 2023

The purpose of this paper is to study the Kaluza-Klein universe in the context of the $f(R, T)$ gravity theory using magnetized strange quark matter (MSQM). To obtain exact solutions of field equations, we assume two types of volumetric expansion: power law and exponential law volumetric expansions. The violation of energy conditions has been studied. The physical and geometrical properties of the examined model have also been investigated thoroughly.

Keywords: *Kaluza-Klein metric: magnetized strange quark matter: power and exponential law: $f(R, T)$ gravity*

1. Introduction. The study of cosmic accelerated expansion, which has been validated by various observations over the last two decades, is one of the most important cosmological enigma among cosmologists. The concept of accelerated expansion of the universe was first proposed by cosmological studies such as type Ia supernovae [1-4], and subsequently, measurements of the cosmic microwave background (CMB) from the Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) [5,6] and large-scale structure [7] have confirmed this idea. There are several modified theories proposed that can be found in the literature to explain the accelerating and expanding nature of the universe. Some of them are $f(R)$ theory [8-10], $f(T)$ theory [11-13], $f(R, T)$ theory [14,15], $f(G)$ theory [16-18] and each theory has its own importance.

Among the several modified theories of gravitation, the $f(R, T)$ theory of gravity proposed by Harko et al. [14] is an intriguing extension of general relativity (GR) that has received a lot of attention in recent years. The late time cosmic accelerated expansion of the universe can be explained by the $f(R, T)$ gravity theory. Houndjo et al. [15] used an auxiliary scalar field with two known forms of scale factor to reconstruct $f(R, T) = f(R) + f(T)$ and obtained a transition from a matter-dominated phase to an accelerated phase. Sharif and Zubair [19] have studied the law of thermodynamics in $f(R, T)$ gravity theory. Using bulk viscous fluid, Chandel et al. [20] studied hypersurface homogeneous cosmological models with time-dependent cosmological terms. In the presence of the perfect fluid

source, Reddy and Santhi [21] investigated LRS Bianchi-II space-time. The LRS Bianchi-I bulk viscous cosmological models in $f(R, T)$ gravity have been investigated by Mahanta et al. [22]. Moreover, Harko and Lake [23] have investigated Kasner-type static, cylindrically symmetric interior string solutions using the $f(R, L_m)$ theory of gravity. Pawar and Solanke [24] have explored perfect fluid LRS Bianchi-I cosmological models in $f(R, T)$ theory of gravity. In the context of $f(R, T)$ gravity theory, Singh and Singh [25] discussed the behaviour of a flat FRW cosmological model with a scalar field. Mishra et al. [26] have studied perfect fluid Bianchi-VIh space-time in $f(R, T)$ theory of gravity.

The Kaluza-Klein theory is a unification of Einstein's theory of gravitation and Maxwell's theory of electromagnetism by introducing compactified extra dimensions. It is regarded as a crucial forerunner to string theory and has received a lot of interest in recent years. Kaluza and Klein explained the role of electromagnetic field in the framework of a five-dimensional space-time. Recently, Mishra et al. [27] compared the Kaluza-Klein dark energy in the Lyra manifold with general relativity using magnetic field. Aktas [28] explored the behaviour of Kaluza-Klein massive and massless scalar field cosmological models with Λ in $f(R, T)$ gravity theory. Hatkar and Katore [29] have used polytropic equation of state in Lyra geometry to examine the Kaluza-Klein space-time.

Strange quark matter (SQM) is a new kind of matter made up of many deconfined up (u), down (d), and strange (s) quarks [30,31] and its properties are studied in equilibrium with the weak interactions [32] using the MIT bag model [33]. Furthermore, in the context of the MIT bag model, the thermodynamical properties of SQM were examined in a strong magnetic field with quark confinement by density dependence quark masses, taking total baryon density, charge neutrality, and β -equilibrium at zero temperature into account [34-36]. Chakrabarty [37] used the conventional MIT bag model to investigate the effect of a strong magnetic field on the stability and properties of SQM. Singh and Beesham [38] have examined the LRS Bianchi-I cosmological model in $f(R, T)$ gravity using SQM. Also, Magnetism influences the anisotropies in CMB radiation, which also plays an important role in the formation of structures. Magnetic fields have been observed in the high redshift Lyman system, galaxies, clusters and stars. One of the most interesting areas of research is the relation between magnetic fields and SQM. The behaviour of magnetized strange quark matter (MSQM) for LRS Bianchi-I model has studied in $f(R, T)$ gravity by Sahoo et al. [39]. Aktas [40] have studied Bianchi I and V models with MSQM distributions in reconstructed $f(R, T)$ theory of gravity. Aktas and Aygun [41] have investigated FRW space-time with MSQM solutions in $f(R, T)$ theory of gravity. Also, some authors like [42-45] have studied various aspects of MSQM cosmological models in $f(R, T)$ theory of gravitation. Recently, Khalafi and Malekolkalami [46] has studied the

MSQM Bianchi-I space-time for two different models of $f(R, T)$ theory.

In the present research work, we investigate MSQM distributions for the Kaluza-Klein metric in the context of $f(R, T)$ gravity theory, which is motivated by the discussion above and a few MSQM studies in the literature. Section 2 is devoted to the metric and $f(R, T)$ gravity field equations for $f(R, T) = R + 2f_1(T)$. The solutions to the field equation for the power law and exponential volumetric expansion models are derived in sections 3 and 4, respectively. The energy condition and its interpretation of the investigated model are covered in Section 5. Finally, the last section is devoted to the conclusion.

2. Metric and $f(R, T)$ gravity field equations. In the Kaluza-Klein model, the additional dimension's contribution to the energy momentum tensor is often due to electromagnetic field stresses. We consider the five-dimensional Kaluza-Klein space-time of the form as [47]

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + B^2 d\psi^2, \quad (1)$$

where A and B are functions of t only. In the present study, we assume the matter contents described by energy momentum tensor for the MSQM is given in the following form as [39,41]:

$$T_{ij} = (\rho + p + h)u_i u_j + \left(\frac{h^2}{2} - p \right) g_{ij} - h_i h_j, \quad (2)$$

where ρ is energy density, P is pressure, h^2 is magnetic flux and $u_i = (0, 0, 0, 0, 1)$ is the velocity vector in comoving coordinate system satisfying the condition $u_i u^i = -1$. The magnetic flux $h^2 = h_i h^i$ is chosen in the direction of x -axis satisfying $h_i u^i = 0$ [48,49]. As the flux quantizes along x -axis, which gives the magnetic field in the yz -plane. The action for $f(R, T)$ gravity is expressed in the following form [14]:

$$S = \int \sqrt{-g} (f(R, T) + L_m) d^4x. \quad (3)$$

where $f(R, T)$ is an arbitrary function of the Ricci scalar R and the trace T of the stress-energy tensor of the matter T_{ij} and L_m denotes the matter Lagrangian density.

The stress-energy tensor of the matter is defined as

$$T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{ij}}. \quad (4)$$

Assuming that the Lagrangian density L_m of the matter depends only on the metric tensor components g_{ij} and not on its derivatives, we obtain

$$T_{ij} = g_{ij} L_m - \frac{\delta(L_m)}{\delta g^{ij}}. \quad (5)$$

The $f(R, T)$ gravity field equations are obtained by varying the action (3) with respect to the metric tensor components g_{ij} ,

$$\begin{aligned} f_R(R, T)R_{ij} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{ij} + (g_{ij}\nabla^i\nabla_j - \nabla_i\nabla_j)f(R, T) = \\ = 8\pi T_{ij} - f_T(R, T)T_{ij} - f_T(R, T)\Theta_{ij}, \end{aligned} \quad (6)$$

where ∇_i is the covariant derivative, $\Theta_{ij} = -2T_{ij} + g_{ij}L_m - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 L_m}{\delta g^{ij}\delta g^{\alpha\beta}}$, $f_R = \frac{\partial f(R, T)}{\partial R}$ and $f_T = \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}$.

There are several theoretical models that can be used to represent various matter contributions to $f(R, T)$ gravity. However, Harko et al. [14] categorised these models into three distinct classes, which are as follows:

$$f(R, T) = \begin{cases} R + 2f_1(T) \\ f_1(R) + f_2(T) \\ f_1(R) + f_2(R)f_3(T). \end{cases} \quad (7)$$

In order to analyse the exact solutions of the Kaluza-Klein universe, we consider the first model $f(R, T) = R + 2f_1(T)$, where $f_1(T)$ is an arbitrary function of the trace of the stress-energy tensor of matter. We choose the arbitrary function $f_1(T)$ of trace of the stress-energy tensor of matter source given by

$$f_1(T) = \mu T \Rightarrow f_1'(T) = \mu, \quad (8)$$

where μ is a constant and dash (') denotes differentiation with respect to the argument.

For this choice, the $f(R, T)$ gravity field equation (6) becomes

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = (8\pi + 2\mu)T_{ij} + (2\mu P + \mu T)T_{ij}. \quad (9)$$

Using co-moving coordinates, we get four independent field equations of $f(R, T)$ gravity for the given metric (1) are as follows:

$$\frac{2A_{55}}{A} + \frac{B_{55}}{B} + \frac{2A_5B_5}{AB} + \frac{A_5^2}{A^2} = -(8\pi - 3\mu)\frac{h^2}{2} - (8\pi + 4\mu)p + \mu\rho \quad (10)$$

$$\frac{2A_{55}}{A} + \frac{B_{55}}{B} + \frac{2A_5B_5}{AB} + \frac{A_5^2}{A^2} = (8\pi + 7\mu)\frac{h^2}{2} - (8\pi + 4\mu)p + \mu\rho \quad (11)$$

$$\frac{3A_{55}}{A} + \frac{3A_5^2}{A^2} = (8\pi + 7\mu)\frac{h^2}{2} - (8\pi + 4\mu)p + \mu\rho \quad (12)$$

$$\frac{3A_5B_5}{AB} + \frac{3A_5^2}{A^2} = (24\pi + 11\mu)\frac{h^2}{2} - 4\mu\rho + (8\pi + 3\mu)\rho \quad (13)$$

where the subscript "5" denotes differentiation with respect to t .

The average scale factor a and volume V of universe are defined as

$$V = a^4 = A^3 B. \quad (14)$$

Equating equations (11) and (12), we get

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A_5}{A} - \frac{B_5}{B} \right) + \left(\frac{A_5}{A} - \frac{B_5}{B} \right) \frac{V_5}{V} = 0 \quad (15)$$

on integrating above equation using the (14), the values of metric potentials A and B are as follows

$$A = (c_2 V)^{1/4} \exp \left[\frac{c_1}{4} \int \frac{dt}{V} \right] \quad (16)$$

$$B = c_2^{-3/4} V^{1/4} \exp \left[\frac{-3c_1}{4} \int \frac{dt}{V} \right]. \quad (17)$$

Recently, Katore and Hatkar [47] and Sahoo et al. [50] have investigated some interesting results of Kaluza-Klein metric using MSQM distribution. Here, we follow Sahoo et al. [50] and Moraes [51]. Further, we have system of four independent equations (10) to (13) in five unknowns viz. A , B , h^2 , p and ρ . We need one more condition to get the exact solutions of field equations. We consider the two different volumetric expansions such as power law expansion and exponential law expansion.

3. Power law expansion model. Firstly, we consider the power law volumetric expansion as

$$V = A^3 B = t^{4m} \quad (18)$$

where m is a positive constant.

Using the equation (18), values of A and B are obtained as

$$A = c_2^{1/4} t^m \exp \left[\frac{c_1 t^{1-4m}}{4(1-4m)} \right] \quad (19)$$

$$B = c_2^{-3/4} t^m \exp \left[\frac{-3c_1 t^{1-4m}}{4(1-4m)} \right]. \quad (20)$$

The metric potentials A and B both vanish at time $t=0$, they start to increase with time and finally diverge to infinity as $t \rightarrow \infty$. This is consistent with the Big Bang model. Now, the various cosmological parameters such as mean Hubble parameter H , expansion scalar θ , shear scalar σ obtained as follows:

$$H = \frac{1}{4} \left(\frac{3A_5}{A} + \frac{B_5}{B} \right) = \frac{m}{t} \quad (21)$$

$$\theta = \frac{3A_5}{A} + \frac{B_5}{B} = \frac{4m}{t} \quad (22)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{3A_5}{A} - \frac{B_5}{B} \right)^2 = \frac{3c_1^2}{8t^{8m}}. \quad (23)$$

From the expression (21), (22) and (23), it is observed that the Hubble parameter H , expansion scalar θ and shear scalar σ are decreasing function of time. They diverges to infinity as $t \rightarrow 0$ and becomes zero at infinity. Moreover, as $t \rightarrow \infty$, the ratio $\sigma/\theta \rightarrow 0$. Hence, the investigated model approaches isotropy. Also, the deceleration parameter q is found to be

$$q = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) - 1 = -1 + \frac{1}{m}. \quad (24)$$

The sign of q indicates whether the universe is accelerating or decelerating. A positive sign of q implies a decelerating model, whereas a negative sign of q indicates a accelerating model. According to recent cosmic studies, the expansion of the universe is rapidly accelerating. From equation (24), it is clear that, the deceleration parameter q is negative for $m > 1$, thus the universe is accelerating.

Now, the expression of pressure P , energy density ρ and magnetic flux h^2 for power law volumetric expansion model are obtained as follows:

$$P = - \frac{\frac{3}{2} c_1^2 (\mu + 2\pi) t^{2-8m} + 3m(\mu(4m-3) + 8\pi(2m-1))}{8(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)t^2} \quad (25)$$

$$\rho = \frac{3(-c_1^2 \pi t^{2-8m} + 16(\mu + \pi)m^2 - 4\mu m)}{8(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)t^2} \quad (26)$$

$$h^2 = 0. \quad (27)$$

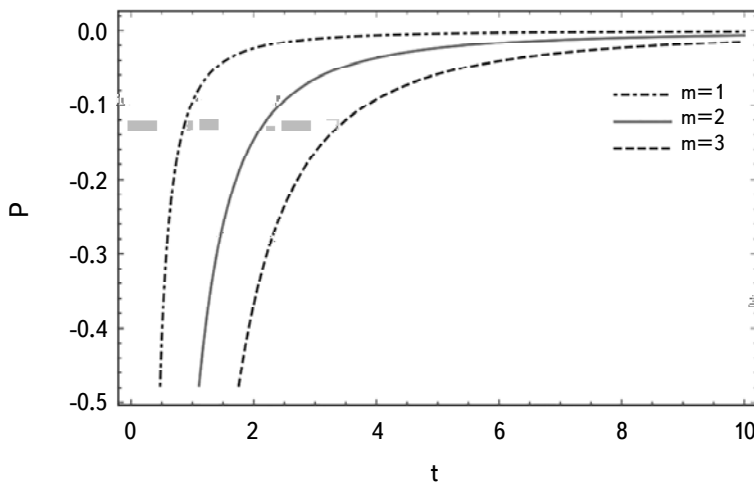


Fig.1. Plot of pressure P vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

The behaviour of pressure P and energy density ρ for the power law model is graphically depicted in Fig.1 and 2 respectively. It is observe that the pressure is an increasing function of time t ; it is very small near $t=0$ and vanishes at infinite time t . It is worth noting that the pressure is negative for different values of parameter m , indicating that the SQM behaves like dark energy. Also, the energy density decreases as time t increases and it is infinte at $t=0$ and vanishes as $t \rightarrow \infty$. For small values of m , the density curve slowly approaches zero with increasing time. As parameter m becomes larger, the curve tends to a constant value. In the power law model, the graph of p/ρ shows the dynamical behaviour with increasing time t as depicted in Fig.3. It is observed that, initially, it evolves

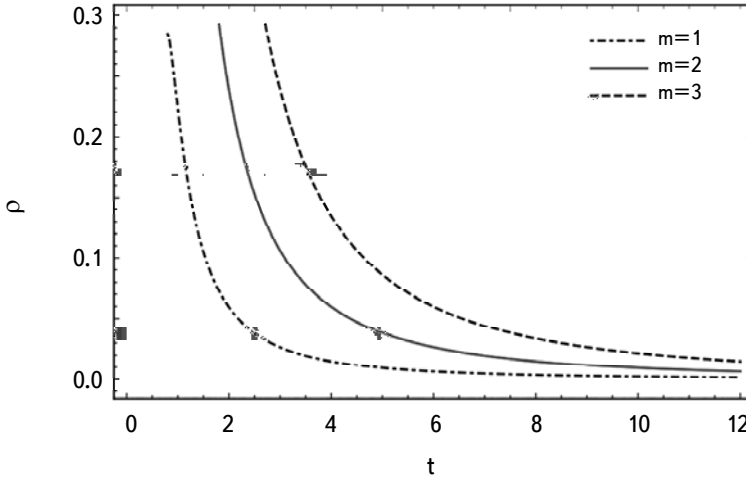


Fig.2. Plot of density ρ vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

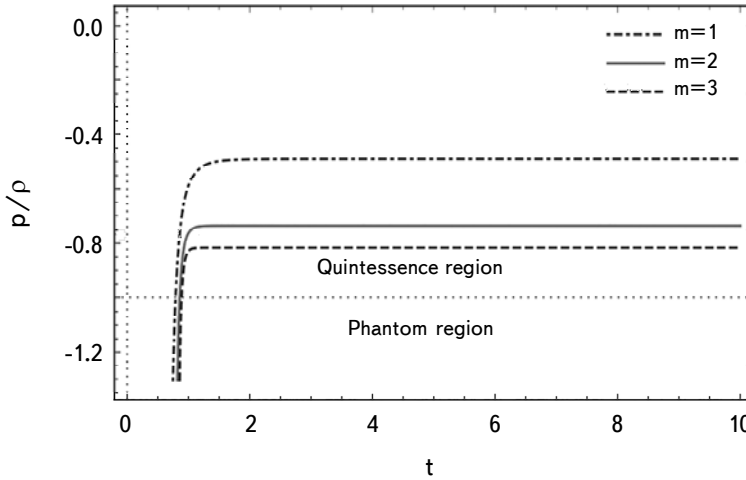


Fig.3. The plot of ratio p/ρ vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

in the phantom region $p/\rho < -1$, crosses the phantom divide line $p/\rho = -1$, suddenly enters into the quintessence region $-1 < p/\rho < -1/3$ and remains constants with increasing time. Suzuki et al. [55] combined all four probes, such as SNe Ia with BAO, CMB, and H_0 measurements, to determine the equation of state (EoS) parameter of dark energy (DE), which is $\omega = -1.013^{+0.068}_{-0.073}$ for a flat w CDM model. In the present case, for $m > 1$, the value of p/ρ is in the range $-1.38 \leq \omega \leq -0.89$, which is consistent with the observational value of EoS (ω) of DE obtained by [55,56].

4. *Exponential volumetric expansion model.* For exponential volumetric expansion law, we assume the volume factor as

$$V = e^{4nt} \quad (28)$$

where n is constant.

For this model, the values of A and B using the equation (28) are obtained as

$$A = c_2^{1/4} \exp \left[nt - \frac{c_1 e^{-4nt}}{16n} \right] \quad (29)$$

$$B = c_2^{-3/4} \exp \left[nt + \frac{3c_1 e^{-4nt}}{16n} \right]. \quad (30)$$

A and B are constant at $t=0$, therefore the model has no singularity at $t=0$. Also, as $t \rightarrow \infty$, both A and B tends to infinity. Now, the various cosmological parameters such as mean Hubble parameter H , expansion scalar θ and shear scalar σ are found to be

$$H = n \quad (31)$$

$$\theta = 4n \quad (32)$$

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} \frac{c_1^2}{e^{8nt}}. \quad (33)$$

From the equations (31), (32) and (33), it is observed that the Hubble parameter H , expansion scalar θ are constant i.e. the rate of expansion of the universe is constant. Shear scalar σ is decreasing function of time. Therefore, $\sigma/\theta \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ i.e. the model approach to isotropy. Also, the deceleration parameter q is obtain as

$$q = -1. \quad (34)$$

The sign of deceleration parameter is negative, therefore the universe is accelerating. The quantities such as the pressure P , energy density ρ and magnetic flux h^2 for exponential volumetric expansion are obtained as

$$P = -\frac{\frac{3}{2}c_1^2(2\pi + \mu)e^{-8nt} + 12(4\pi + \mu)n^2}{8(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)} \quad (35)$$

$$\rho = \frac{e^{-8nt}(48(\pi + \mu)n^2e^{8nt} - 3\pi c_1^2)}{8(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)} \quad (36)$$

$$h^2 = 0. \quad (37)$$

The graphical behaviour of pressure P and energy density ρ vs time t is depicted in Fig.4 and 5. It is observe that, the energy density ρ is decreasing

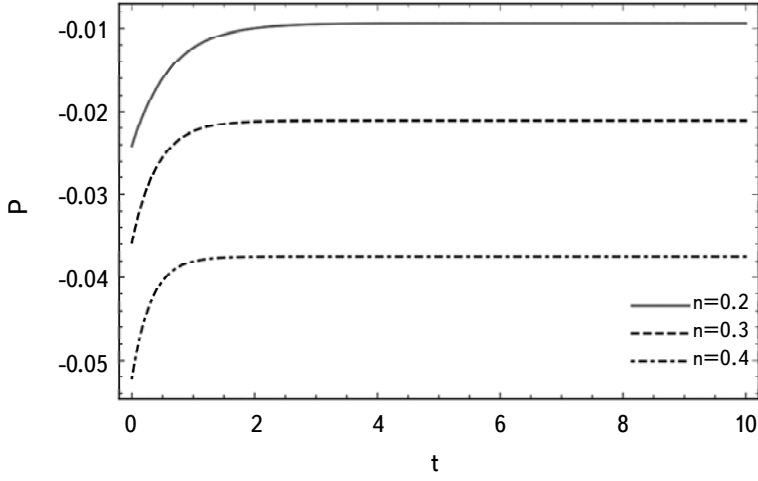


Fig.4. Plot of pressure P vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

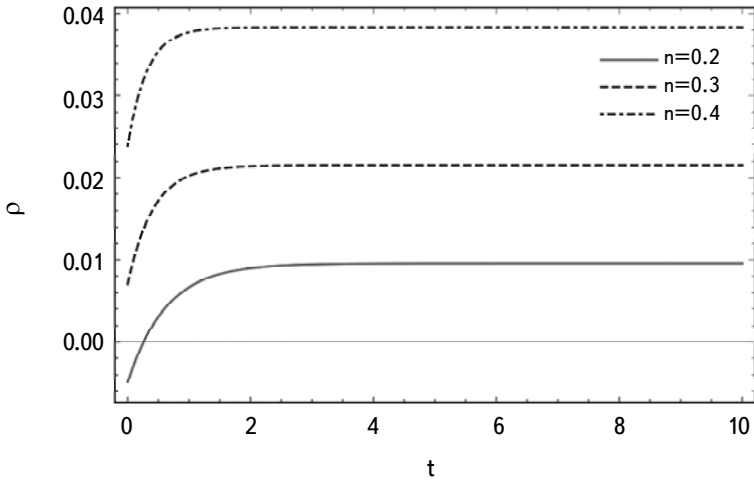


Fig.5. Plot of density ρ vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

function time t . Initially energy density was constant near $t=0$ and slightly increased to its maximum value and remain constant with increasing time. The pressure is negative which reveals that the matter behave like dark energy.

In this case, the Fig.6 represents the behaviour of p/ρ with time t . We observed that, for different value of n , it begins to evolve in the phantom region and suddenly enters into the quintessence region with increasing time t . Recently, Scolnic et al. [57] combine the Planck 2015 CMB and SNe Ia measurements to calculate the best fit value for the EoS parameter $\omega = -1.026 \pm 0.041$. We observe that the value of p/ρ is in the range $-1.162 \leq \omega \leq -0.983$, which is consistent with the observed value of EoS of DE obtained by [58,57].

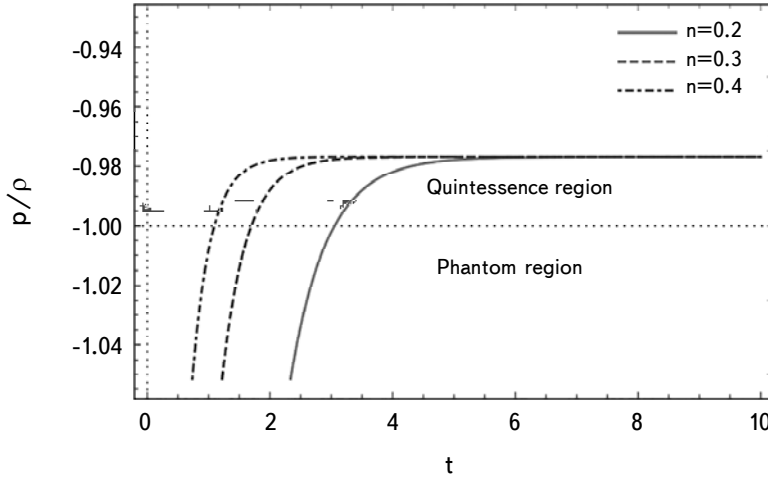


Fig.6. The plot of ratio p/ρ vs time t for $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

5. Energy conditions. The energy conditions are essential for understanding the geometry of universe. The Raychaudhuri's equation is used to obtain the energy conditions, which are a set of linear pressure-density combinations that describe the energy density can never be negative and gravity attracts always. These energy conditions are defined and stated as follows:

- SEC (strong energy condition) $\Rightarrow \rho + 3P \geq 0$,
- NEC (null energy condition) $\Rightarrow \rho + P \geq 0$,
- WEC (weak energy condition) $\Rightarrow \rho \geq 0, \rho + P \geq 0$
- DEC (dominant energy condition) $\Rightarrow \rho > |P| \geq 0$.

Therefore, for first power law volumetric expansion model, the expression for NEC, SEC and DEC are obtained by using the equations (25) and (26) as

$$\rho + P = \frac{t^{-8m-2} (6m(\mu(12m-1) + 8\pi)t^{8m} - 3c_1^2(4\pi + \mu)t^2)}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)} \quad (38)$$

$$\rho + 3P = \frac{3t^{-8m-2}(c_1^2(3\mu + 8\pi)t^2 + 2m(8\pi(4m-3) - \mu(4m+5))t^{8m})}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)} \quad (39)$$

$$\rho - P = \frac{3(c_1^2\mu t^{2-8m} + 2m(\mu(20m-7) + 8\pi(4m-1)))}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)t^2}. \quad (40)$$

Also, for exponential volumetric expansion model, using equations (35) and (36), NEC, SEC and DEC are obtained as

$$\rho + P = \frac{e^{-8nt}(72\mu n^2 e^{8nt} - 3c_1^2(\mu + 4\pi))}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)} \quad (41)$$

$$\rho + 3P = -\frac{3e^{-8nt}(c_1^2(3\mu + 8\pi) + 8(8\pi - \mu)n^2 e^{8nt})}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)}. \quad (42)$$

$$\rho - P = -\frac{3(c_1^2\mu e^{-8nt} + 8(5\mu + 8\pi)n^2)}{16(8\pi^2 + 7\pi\mu + 2\mu^2)}. \quad (43)$$

Fig.7 and 8 show the graphical representation of NEC, SEC and DEC vs time t for power law and exponential law, respectively. From this, it is clear that NEC and DEC are satisfied by both models, but SEC is violated. Sahoo et al. [50] has studied the energy condition and shows that only WEC and DEC satisfies for volumetric expansion model in $f(R, T)$ gravity. Also, Alvarenga et al. [52] shown that energy conditions are satisfied for suitable choice of input parameter in $f(R, T)$ gravity theory. Recently, Sahoo et al. [53] has observed that, NEC and DEC are satisfy but SEC is violated. It is important to note that, our investigation are more relevant than [50,52] and resemble with the investigation

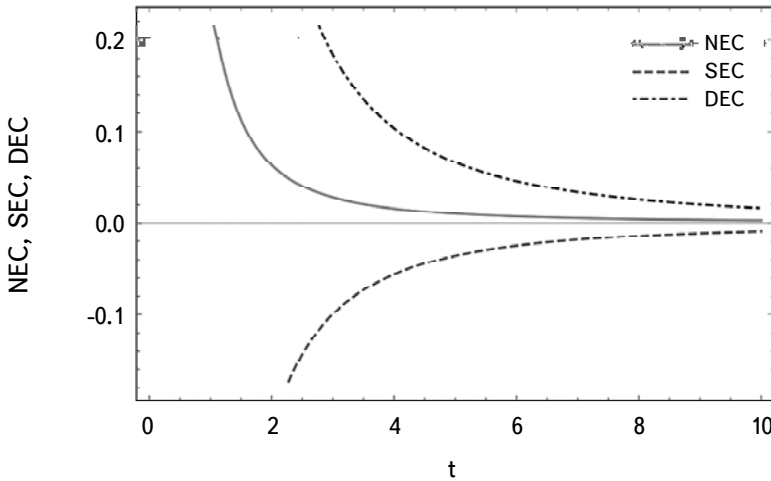


Fig.7. Plot of NEC, SEC and DEC vs time t for $m = 2$, $c_1 = 1$, $\mu = 0.1$.

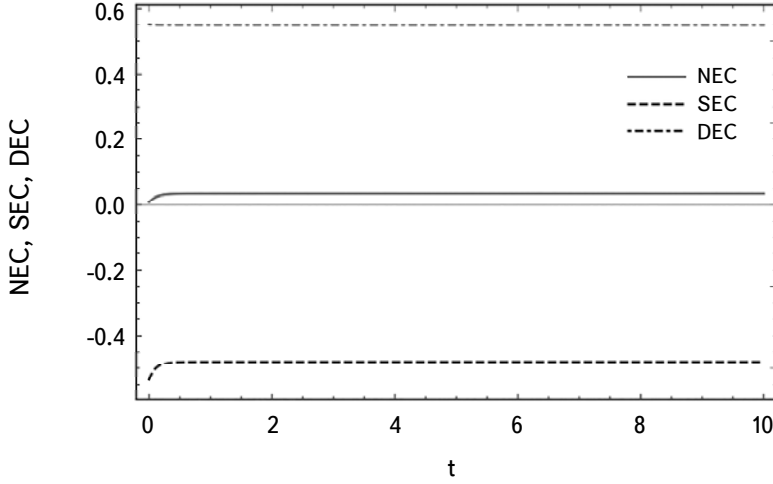


Fig.8. Plot of NEC, SEC and DEC vs time t for $n = 1$, $c_1 = 1$, $\mu = 0.6$.

of [53], because both models satisfies all energy condntions except SEC.

6. *Conclusions.* In this paper, we have studied Kaluza-Klein cosmological models with MSQM in $f(R, T)$ theory of gravity using power law and exponential volumetric expansions.

- In power law expansion model, the shear and expansion scalars, as well as the Hubble parameter H , decrease over time. The rate of expansion of the universe is very high near $t=0$. They diverge to infinity at $t=0$ and vanish at infinite time. The energy density begins to decrease from a positive value, the pressure starts to increase from a negative value, and both approach zero at infinite time. It has been observed that the universe accelerates when $m > 1$.

- In the exponential volumetric expansion model, it is observed that the pressure and the energy density of the universe gradually increase to their maximums and then remain constant with increasing time. For $n > 0$, the universe's expansion rate remains constant. Also, the negative value of the deceleration parameter q indicates that the universe is accelerating, which is consistent with recent findings.

- It is important to note that, for both models, the negative pressure indicates that the matter behaves like dark energy, which causes the accelerated expansion of the universe. Moreover, the trajectory of p/ρ is lie in the range $-1.38 \leq \omega \leq -0.89$ in the case first and $-1.162 \leq \omega \leq -0.983$ in the second. The bounds of EoS parameter obtained by [55] is $\omega = -1.013^{+0.068}_{-0.073}$ and [57] is $\omega = -1.026 \pm 0.041$. It seems that the obtained values of p/ρ in both cases are close to the observational bounds. Further, Aditya et al. [59] obtained the bounds of the EoS parameter

in Lyra geometry as $-1.3 \leq \omega \leq -0.8$. In Saez-Ballester theory, the bounds of the EoS parameter for the Kaluza-Klein model is $-1.6 \leq \omega \leq 0.2$ [60]. When the values of the EoS parameter in scalar-tensor theories for the Kaluza-Klein model are compared to the range of p/ρ in the present model, the resultant value of p/ρ in $f(R, T)$ gravity is found to be more appropriate than that obtained for the EoS parameter in scalar-tensor theories [59,60]. Also, the magnetic flux vanishes for both models and it's worth noting that our findings are consistent with those of [40,41,46,54]. Moreover, both the power law and exponential law models satisfy the NEC and DEC, but the SEC is violated throughout the evolution.

Acknowledgements. The authors are grateful to the anonymous referee for constructive comments to upgrade the manuscript.

¹ Department of Mathematics, Sant Gadge Baba Amravati University, India, e-mail: katore777@gmail.com

² Department of Mathematics, A.E.S. Arts, Commerce and Science College, India, e-mail: schnhatkar@gmail.com

³ Department of Mathematics, Toshniwal Arts, Commerce and Science, India, e-mail: dtadas144@rediffmail.com

УСКОРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

С.Д.КАТОРЕ¹, С.П.ХАТКАР², Д.П.ТАДАС³

Целью данной статьи является изучение Вселенной Калуцы-Клейна в контексте $f(R, T)$ теории гравитации с использованием намагниченного странного кваркового вещества (MSQM). Точные решения уравнений поля получены для двух типов объемного расширения: степенного и экспоненциального. Изучено нарушение энергетических условий. Подробно исследованы также физические и геометрические свойства рассматриваемой модели.

Ключевые слова: метрика Калуцы-Клейна; намагниченное странное кварковое вещество; степенной и экспоненциальный закон; гравитация

REFERENCES

1. *A.G.Riess et al.*, *Astron. J.*, **116**(3), 1009, 1998, <https://doi.org/10.1086/300499>.
2. *A.G.Riess et al.*, *Astron. J.*, **117**(2), 707, 1999, <https://doi.org/10.1086/300738>.
3. *S.Perlmutter et al.*, *Astrophys. J.*, **517**(2), 565, 1999, <https://doi.org/10.1086/307221>.
4. *P.Astier et al.*, *Astron. Astrophys.*, **447**(1), 31, 2006, doi: 10.1051/0004-6361:20054185.
5. *C.L.Bennett et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148**(1), 1, 2003, <https://doi.org/10.1086/377253>.
6. *D.N.Spergel et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148**(1), 175, 2003, <https://doi.org/10.1086/377226>.
7. *M.Tegmark et al.*, *Phys. Rev. D*, **69**(10), 103501, 2004, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.103501>.
8. *H.A.Buchdahl*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **150**(1), 1, 1970, <https://doi.org/10.1093/mnras/150.1.1>.
9. *S.Capozziello, S.I.Nojiri, S.D.Odintsov et al.*, *Phys. Lett. B*, **639**(3-4), 135, 2006, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.06.034>.
10. *S.Nojiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou*, *Phys. Rep.*, **692**, 1-104, 2017, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.06.001>.
11. *R.Ferraro, F.Franco*, *Phys. Rev. D*, **75**(8), 084031, 2007, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.084031>.
12. *H.Farajollahi, A.Ravanpak, P.Wu*, *Astrophys. Space Sci.*, **338**, 195, 2012, <https://doi.org/10.1007/s10509-011-0916-2>.
13. *M.E.Rodrigues, M.J.S.Houndjo, D.Momeni et al.*, *Int. J. Mod. Phys. D*, **22**(8), 1350043, 2013, <https://doi.org/10.1142/S0218271813500430>.
14. *T.Harko, F.S.N.Lobo, S.Nojiri*, *Phys. Rev. D*, **84**(2), 024020, 2011, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.024020>.
15. *M.J.S.Houndjo*, *Int. J. Mod. Phys. D*, **21**(1), 1250003, 2012, <https://doi.org/10.1142/S0218271812500034>.
16. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, *Phys. Lett. B*, **631**, 1, 2005, doi:10.1016/j.physletb.2005.10.010.
17. *G.Cognola et al.*, *Phys. Rev. D*, **73**, 084007, 2006, doi:10.1103/PhysRevD.73.084007.
18. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, *Phys. Rep.*, **505**, 59, 2011, doi:10.1016/j.physrep.2011.04.001.
19. *M.Sharif, M.Zubair*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **03**, 028, 2012, <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/03/028>.
20. *S.Chandel, M.K.Singh, S.Ram*, *Adv. Studies Theor. Phys.*, **6**(24), 1189, 2012.
21. *D.R.K.Reddy, K.R.Santhi*, *Global Journal of Science Frontier Research*, **13**(2), 23, 2013.
22. *K.L.Mahanta*, *Astrophys. Space Sci.*, **353**, 683, 2014, <https://doi.org/10.1007/s10509-014-2040-6>.
23. *T.Harko, J.L.Mathew*, *Eur. Phys. J. C*, **75**(2), 1-18, 2015, <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3287-y>.

24. *D.D.Pawar, Y.Solanke*, Turk J Phys., **39**, 54, 2015 doi:10.3906/fiz-1404-1.
25. *V.Singh, C.P.Singh*, Astrophys. Space Sci., **356**, 153, 2015, <https://doi.org/10.1007/s10509-014-2183-5>.
26. *B.Mishra, S.Tarai, S.K.Tripathy*, Advances in High Energy Physics, **2016**, 8543560, 2016, <https://doi.org/10.1155/2016/8543560>.
27. *A.K.Mishra, U.K.Sharma, A.Pradhan*, New Astron., **70**, 27, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2019.02.003>.
28. *C.Aktas*, Modern Phys. Lett. A, **34**, 11, 1950066, 2019, <https://doi.org/10.1142/S0217732319500664>.
29. *S.P.Hatkar, S.D.Katore*, Prespacetime Journal, **11**(1), 17, 2020.
30. *A.R.Bodmer*, Phys. Rev. D, **4**(6), 1601, 1971, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.4.1601>.
31. *E.Witten*, Phys. Rev. D, **30**(2), 272, 1984, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.30.272>.
32. *E.Farhi, R.L.Jaffe*, Phys. Rev. D, **30**(11), 2379, 1984, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.30.2379>.
33. *A.Chodos et al.*, Phys. Rev. D, **9**(12), 3471, 1974, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>.
34. *R.G.Felipe et al.*, Phys. Rev. C, **77**(1), 015807, 2008, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.77.015807>.
35. *A.A.Isayev, J.Yang*, Proceedings, 4th International Conference Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy (NPAE-2012): Kyiv, Ukraine, 627-631, 2012.
36. *H.Jia-Xun et al.*, Chinese Phys. C, **39**(1), 015101, (2015), <https://doi.org/10.1088/1674-1137/39/1/015101>.
37. *S.Chakrabarty*, Phys. Rev. D, **54**, 1306, 1996, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.1306>.
38. *V.Singh, A.Beesham*, New Astronomy, **89**, 101634, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2021.101634>.
39. *P.K.Sahoo, P.Sahoo, B.K.Bishi et al.*, New Astron., **60**, 80, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2017.10.010>.
40. *C.Aktas*, Turk J. Phys., **41**, 469, 2017.
41. *C.Aktas, S.Aygun*, Chinese Journal of Phys., **55**(1), 71, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2016.12.003>.
42. *V.A.Miransky, I.A.Shovkovy*, Phys. Rep., **576**, 1-209, 2015.
43. *A.A.Isayev, J.Yang*, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, **40**(3), 035105, 2013.
44. *C.F.Li, L.Yang, X.J.Wen et al.*, Phys. Rev. D, **93**(5), 054005, 2016, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.054005>.
45. *C.G.Tsagas, J.D.Barrow*, Class. Quant. Grav., **14**, 2539, 1997, doi:10.1088/0264-9381/14/9/011.
46. *G.H.Khalafi, B.Malekolkalami*, Annals of Physics, **431**, 168508, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.aop.2021.168508>.

47. *S.D.Katore, S.P.Hatkar*, New Astron., **34**, 172, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2014.07.002>.
48. *J.D.Barrow, R.Maartens, C.G.Tsagas*, Phys. Rep., **449**(6), 131, 2007.
49. *C.Aktas, I.Yilmaz*, Gen. Relativ. Gravit., **43**, 1577, 2011, <https://doi.org/10.1007/s10714-011-1154-1>.
50. *P.K.Sahoo, B.Mishra, S.K.Tripathy*, Indian J. Phys., **90**, 485, 2016, <https://doi.org/10.1007/s12648-015-0759-8>.
51. *P.H.R.S.Moraes*, Astrophys. Space Sci., **352**, 273, 2014, <https://doi.org/10.1007/s10509-014-1895-x>.
52. *F.G.Alvarenga, M.J.S.Houndjo, A.V.Monwanou et al.*, Journal of Modern Phys., **4**(1), 130, 2013, doi: 10.4236/jmp.2013.41019.
53. *P.K.Sahoo, S.Mandal, S.Arora*, Astron. Nachr., **342**, 89, 2021, <https://doi.org/10.1002/asna.202113886>.
54. *O.Ozdemir, C.Aktas*, Modern Phys. Lett. A, **35**(14), 2050111, 2020, doi:10.1142/s0217732320501114.
55. *N.Suzuki et al.*, Astrophys. J., **746**, 85, 2012, doi:10.1088/0004-637X/746/1/85.
56. *P.A.R.Ade et al.*, Astron. Astrophys., **571**, A16, 2014, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>.
57. *D.M.Scolnic et al.*, Astrophys. J., **859**, 101, 2018, doi:10.3847/1538-4357/aab9bb.
58. *G.Hinshaw et al.*, Astrophys. J. Suppl., **208**(2), 19, 2013, <https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19>.
59. *Y.Aditya, K.D.Raju, V.U.M.Rao et al.*, Astrophys. Space Sci., **364**, 190, 2019, <https://doi.org/10.1007/s10509-019-3681-2>.
60. *R.L.Naidu, Y.Aditya, R.K.Daniel et al.*, New Astron., **85**, 101564, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2020.101564>.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-125

BULK VISCOUS STRING COSMOLOGICAL MODEL WITH POWER LAW VOLUMETRIC EXPANSION IN TELEPARALLEL GRAVITY

KALPANA PAWAR, A.K.DABRE

Received 12 December 2022

Accepted 3 February 2023

In this paper, we have investigated the Bianchi-type V cosmological model which is spatially homogeneous and anisotropic in presence of bulk viscous fluid containing one-dimensional cosmic string. We have obtained the exact solutions of highly non-linear differential field equations considering the power-law volumetric expansion of the universe and $f(T) = T$ formalism. Some physical and kinematical properties of the constructed model have been discussed and presented graphically and it is interesting to note that the resultant model resembles the recent observational data.

Keywords: *bulk viscous fluid: cosmic string: teleparallel gravity*

1. Introduction. Recent observations and measurements from high redshift supernovae [1-3] indicate that the universe is accelerating. The cause of the universe's acceleration is unknown; it is commonly referred to as the dark energy problem, which is caused by the universe's negative pressure. Two approaches have been proposed to address this issue: one is to develop viable dark energy models, while the other modify Einstein's gravitation theory. Nojiri & Odintsov [4] has reviewed various modified gravities and considered a gravitational alternative for dark energy. Again Nojiri et al. [5,6] reviewed some standard issues and discussed some latest developments in modified gravity as well as unified cosmic history in modified gravity.

Numerous modified gravity theories exist to investigate the unknown and hidden aspects of the universe. Amongst them, the $f(T)$ theory of gravitation, which is based on a modification of the teleparallel equivalent of general relativity, is a viable candidate. Many researchers have discussed various aspects of $f(T)$ gravity. Cai et. al. [7] provided a brief review of $f(T)$ gravity and cosmology. Myrzakulov [8] has studied the accelerating universe from $f(T)$ gravity. Numerous cosmologists have developed theoretical cosmological models that behave similarly to the present physical universe, which is anisotropic, expanding, and accelerating. Pawar & Dabre [9] have studied an anisotropic string cosmological model for perfect fluid distribution in $f(T)$ gravity. Chirde & Shekh [10] examined the thermodynamical aspect of barotropic bulk viscous fluid in teleparallel gravity.

Sharif & Rani [11] studied bulk viscosity taking dust matter in generalized teleparallel gravity. Sadatian [12] analyzed the effect of viscous content on the modified cosmological $f(T)$ model.

Various cosmologists and physicists have studied the theoretical development of the universe and the effects of bulk viscosity and string on cosmic evolution using the source as a bulk viscous fluid containing a string of clouds. Mishra & Dua [13], investigated the dynamics of the universe for bulk viscous string cosmological model using the LRS Bianchi type II metric in the Saez-Ballester theory of gravitation. Tripathy et al., [14] studied LRS Bianchi I model in reference to Einstein's relativity using the source as stiff viscous fluid coupled with an electromagnetic field. Kiran & Reddy [15] presented the non-existence of Bianchi type III bulk viscous string cosmological model in $f(R, T)$ gravity. Santhi et al, [16,17] investigated bulk viscous string cosmological models using Bianchi type II, VIII, IX, and VI_h space-times in $f(R)$ gravity. Pawar & Dabre [18] studied the bulk viscous string cosmological model using the special law of variation for Hubble's parameter in teleparallel gravity. Using the Kantowski-Sachs metric, Reddy et al., [19] built an isotropic bulk viscous string cosmological model that illustrates the special case for non-validating cosmic strings. Hegazy, [20] devised a formula for calculating cosmic entropy in terms of viscosity and applied it to investigate the entropy, enthalpy, Gibbs energy, and Helmholtz energy of a constructed model in the presence of viscosity. Naidu et al., [21-26] vigorously investigated bulk viscous string cosmological models in relation to different gravitational theories. Several cosmologists [27-33] have obtained some recent and significant investigations of bulk viscous fluid in the presence of cloud strings in various contexts.

Motivated by the situations discussed above in this paper, we have considered spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type V space-time to construct the bulk viscous string cosmological model within the context of teleparallel gravity. This paper is divided into several sections: Sec. 2 deals with elementary definitions and equations of motion in the framework of teleparallel gravity. In Sec. 3 considering spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type V metric, we have obtained the corresponding field equations. In Sec. 4, we have obtained the exact solution of highly non-linear field equations along with different physical and kinematical quantities and presented them with 3D graphs. Lastly, in Sec. 5, we have concluded the investigations.

2. Elementary definitions and equation of motion. In this section, we provide a concise explanation of $f(T)$ gravity and a thorough derivation of its field equations. The line element for a general space-time is defined as

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

where $g_{\mu\nu}$ are the components of the metric tensor which are symmetric. The above line element can be transformed into the Minkowskian space-time (which represents the dynamic fields of the theory) as

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ij} \theta^i \theta^j, \quad (2)$$

$$dx^\mu = e^\mu_i \theta^i, \quad \theta^i = e^i_\mu dx^\mu, \quad (3)$$

where η_{ij} is a metric tensors in Minkowskian space-time such that $\eta_{ij} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$ and $e^\mu_i e^\nu_j = \delta^\mu_\nu$ or $e^\mu_i e^\nu_j = \delta^\mu_j$. $\sqrt{-g} = \det[e^\mu_i] = e$ and the dynamic fields of the theory are represented by the tetrads matrix e^μ_α . The Weitzenbocks connection components which have a zero curvature but nonzero torsion for a manifold are defined as

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = e^\alpha_i \partial_\nu e^i_\mu = -e^i_\mu \partial_\nu e^\alpha_i. \quad (4)$$

The components of the torsion tensor for a manifold are defined by the anti-symmetric part of the Weitzenbocks connection

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = e^\alpha_i (\partial_\mu e^i_\nu - \partial_\nu e^i_\mu). \quad (5)$$

Con-torsion tensor components are defined by

$$K^\mu_\alpha = -\frac{1}{2} (T^\mu_\alpha - T^\nu_\alpha - T^\mu_\alpha). \quad (6)$$

A new tensor, S^μ_α constructed from the components of the torsion and con-torsion tensors for a better understanding of the definition of the scalar equivalent to the curvature scalar of Riemannian geometry as follows,

$$S^\mu_\alpha = \frac{1}{2} (K^\mu_\alpha + \delta^\mu_\alpha T^\beta_\beta - \delta^\nu_\alpha T^\beta_\beta). \quad (7)$$

The torsion scalar is defined using the contraction which is similar to the scalar curvature in general relativity as

$$T = T^\alpha_{\mu\nu} S^\mu_\alpha. \quad (8)$$

The action is defined by generalizing the teleparallel gravity, i.e, $f(T)$ theory as

$$S = \int [f(T) + L_{Matter}] e d^4x, \quad (9)$$

where $f(T)$ denotes an algebraic function of the torsion scalar T .

Equations of motion are obtained by functional variation of the action (9) with respect to the tetrads as

$$S^{\nu\rho}_\mu \partial_\rho T f_{TT} + [e^{-1} e^i_\mu \partial_\rho (e e^\alpha_i S^{\nu\rho}_\alpha) + T^\alpha_{\lambda\mu} S^{\nu\lambda}_\alpha] f_T + \frac{1}{4} \delta^\nu_\mu f = 4\pi T^\nu_\mu, \quad (10)$$

where the energy-momentum tensor T^ν_μ is considered as bulk viscous fluid with one-dimensional cosmic string, f_T and f_{TT} denotes respectively the first and second-

order derivatives of $f(T)$ with respect to T . For $f(T)=\text{const}$, the equations of motion in (10) reduce to the equations of motion of the teleparallel gravity with a cosmological constant, which is dynamically equivalent to general relativity. These equations depend on the choice made for the set of tetrads.

3. *Metric and field equations.* We consider a line element

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - e^{2mx} (B^2 dy^2 + C^2 dz^2), \quad (11)$$

which is a spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type-V metric in which m is constant and A , B , and C are a function of cosmic time t only.

Consider the set of diagonal tetrads related to the metric (11) as

$$[e_\mu^\nu] = \text{diag}[1, A, Be^{mx}, Ce^{mx}]. \quad (12)$$

Then the determinant of the matrix (11) is

$$e = ABCe^{2mx}. \quad (13)$$

The torsion scalar (8) is obtained as

$$T = -2 \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + m^2 \right). \quad (14)$$

We consider the source as bulk viscous fluid containing one-dimensional cosmic string given by

$$T_\mu^\nu = (\rho + \bar{p})u_\mu u^\nu + \bar{p}g_\mu^\nu - \lambda x_\mu x^\nu, \quad (15)$$

$$\bar{p} = p - 3\xi H, \quad (16)$$

where $\rho = \rho_p + \lambda$ is the proper string energy density with particles attached to them and ρ_p is the particle energy density, λ is the strings tension density, $3\xi H$ is bulk viscous pressure, $\xi(t)$ is the coefficient of bulk viscosity, H is Hubble's parameter, x^ν denotes a unit space-like vector for the cloud string and u^ν denotes four-velocity vector satisfying the conditions, $u^\nu u_\nu = -1 = -x^\nu x_\nu$ and $u_\nu x^\nu = 0$.

In a co-moving coordinate system, we have

$$u^\nu = (0, 0, 0, 1), \quad x^\nu = (A^{-1}, 0, 0, 0). \quad (17)$$

We obtained the field equations for Bianchi type-V space-time (11), from (10) and (15)-(16) in the framework of teleparallel gravity as

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H - \lambda), \quad (18)$$

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H), \quad (19)$$

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H), \quad (20)$$

$$f + 4f_T \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} \right) = -16\pi\rho, \quad (21)$$

$$\left(2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right) f_T = 0, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) f_T = 0, \quad (23)$$

where the overhead dot (.) denotes the derivative with respect to cosmic time t .

By solving (22) and (23) above field equations reduces to

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + 2\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H - \lambda), \quad (24)$$

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H), \quad (25)$$

$$f + 2f_T \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + 2m^2 \right) + 2 \left(\frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{T}f_{TT} = 16\pi(p - 3\xi H), \quad (26)$$

$$f + 4f_T \left(\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right) = -16\pi\rho. \quad (27)$$

Thus, we have four non-linear differential equations with seven unknowns, namely f , B , C , p , ξ , ρ , and λ ; solutions which are discussed in the next section.

4. Solutions of field equations. As there are four highly non-linear differential equations (24)-(27) and seven unknowns, in order to obtain the exact solutions we consider the linear $f(T) = T$ gravity along with the special power-law volumetric expansion of the universe as

$$V = t^{3n}. \quad (28)$$

where n is a non-zero constant.

We find some kinematical space-time quantities of physical interest in cosmology.

The spatial volume V is defined as

$$V = D_0 BC. \quad (29)$$

where D_0 is an integrating constant.

Also, the volumetric expansion rate of the universe is described by the generalized mean Hubble's parameter H given by

$$H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 H_i = \frac{1}{3} (H_1 + H_2 + H_3), \quad (30)$$

in which H_1, H_2, H_3 denotes the directional Hubble parameters.

From Eqs. (29) and (30), we get

$$H = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 H_i. \quad (31)$$

To analyze, whether the model approaches isotropy or not, we discuss the mean anisotropy parameter A_m , as

$$A_m = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i}{H} - 1 \right)^2. \quad (32)$$

The expansion scalar θ and the shear scalar σ^2 are respectively defined as

$$\theta = u_{;\mu}^{\mu} = 3H, \quad (33)$$

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} A_m H^2, \quad (34)$$

The deceleration parameter is defined as

$$q = -1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right). \quad (35)$$

We obtained the metric coefficients A , B , and C as

$$A = D_0, \quad B = \frac{\sqrt{t^{3n}}}{D_3 e^{D_1 t/2(3n-1)t^{3n}}}, \quad C = D_2 \sqrt{t^{3n}} e^{D_1 t/2(3n-1)t^{3n}}. \quad (36)$$

where D_1, D_2 and D_3 are constants.

Substituting A , B , and C from (36) in (11), we get

$$ds^2 = dt^2 - D_0^2 dx^2 - e^{2mx} \left(\frac{t^{3n}}{D_3^2 e^{D_1 t/(3n-1)t^{3n}}} dy^2 + D_2^2 t^{3n} e^{D_1 t/(3n-1)t^{3n}} dz^2 \right). \quad (37)$$

From (14) we have obtained the torsion scalar as

$$T = -\frac{4m^2 t^2 - D_1^2 t^{2-6n} + 9n^2}{2t^2}. \quad (38)$$

Also, we have determined the mean Hubble's parameter H , the expansion scalar θ , the mean anisotropy parameter A_m , the shear scalar σ^2 , and the deceleration parameters q respectively as

$$H = \frac{n}{t}, \quad (39)$$

$$\theta = \frac{3n}{t}, \quad (40)$$

$$A_m = \frac{D_1^2 t^{2-6n} + 3n^2}{6n^2}, \quad (41)$$

$$\sigma^2 = \frac{D_1^2 t^{2-6n} + 3n^2}{4t^2}, \quad (42)$$

$$q = \frac{1-n}{n} = \text{const}. \quad (43)$$

The graphical representation of Hubble's parameter H versus cosmic time t is depicted in Fig.1, where at an initial epoch when $t=0$ with an increasing value of n the value of H increases and get vanishes as $t \rightarrow \infty$. This shows that the expansion of the universe is getting faster with an increasing value of n but becomes slower with increasing cosmic time t . The ratio $\sigma^2/\theta^2 \neq 0$ shows the constructed model doesn't approach isotropy. Also, the sign of q in (43) demonstrates whether the model is accelerating or not. The positive sign of q i.e. for $0 \leq n \leq 1$ corresponds to a plain decelerating cosmological model although the deceleration parameter in range $-1 \leq q < 0$ corresponds to an accelerating universe and for $q=0$ i.e. for $n=1$ corresponds to the evolution with a constant rate. The observational evidences [1,2] supports the accelerating phase of the universe i.e $-1 \leq q < 0$.

From (27) we obtained the value of energy density as

$$\rho = \frac{4m^2 t^2 + D_1^2 t^{2-6n} - 9n^2}{32\pi t^2}. \quad (44)$$

Solving (24) and (25), we have obtained the value of tension density as

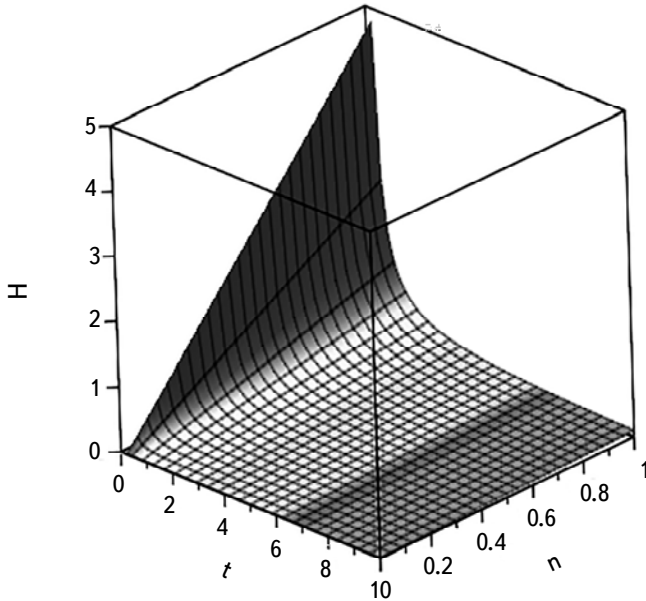


Fig.1. Variation of H vs. t .

$$\lambda = -\frac{3n(3n-1)}{16\pi t^2}. \quad (45)$$

Also, we have obtained the particle density as

$$\rho_p = \frac{4m^2 t^2 + D_1^2 t^{2-6n} + 3n(3n-2)}{32\pi t^2}. \quad (46)$$

Fig.2 depicts the variation of energy density ρ versus cosmic time t , in which

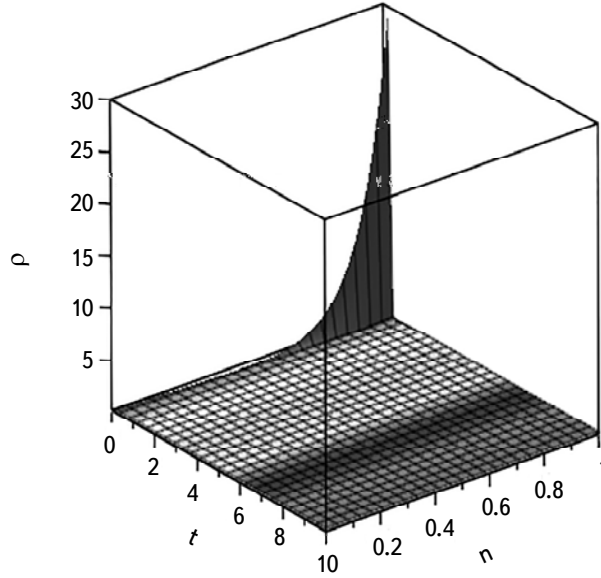


Fig.2. Variation of ρ vs. t .

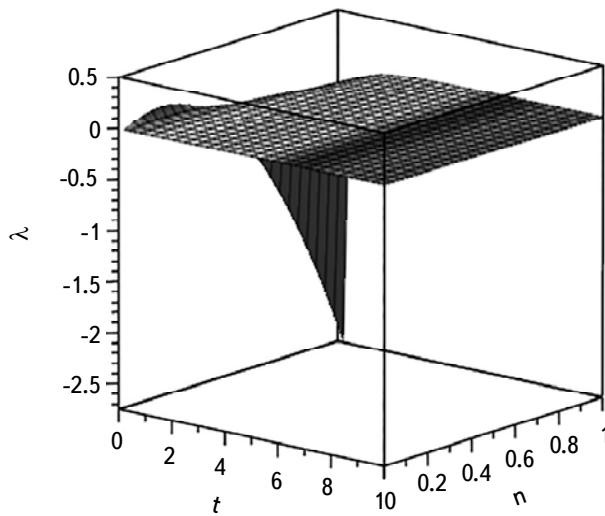


Fig.3. Variation of λ vs. t .

the energy density is very small in the starting phase of evolution for both varying constant n and cosmic time t but as both increases, the energy density becomes a decreasing function of cosmic time t . Whereas the representation of tension density λ as shown in Fig.3 shows that initially, tension density diminishes from positive but with an increasing n it shows the transition from positive to negative for tension density to grow in negative and get vanish when $t \rightarrow \infty$. For a small period of n , the tension density is positive i.e. $\lambda \geq 0$ showing the presence of strings in the universe while after the transition the tension density $\lambda < 0$ showing the string phase disappears which is supported by [34].

We assume that the coefficient of viscosity should vary with the expansion scalar in such a way that

$$\xi\theta = \xi_0 = \text{const.} \quad (47)$$

From (47) we have obtained the coefficient of bulk viscosity as

$$\xi = \frac{\xi_0 t}{3n}. \quad (48)$$

From (26) the pressure can be obtained as

$$p = \frac{4(m^2 + 8\pi\xi_0)t^2 + t^{2-6n}D_1^2 + 3n(3n-2)}{32\pi t^2}. \quad (49)$$

It is seen from Fig.4 that the coefficient of bulk viscosity is an increasing function of cosmic time t for small n but with an increasing n the value of ξ becomes

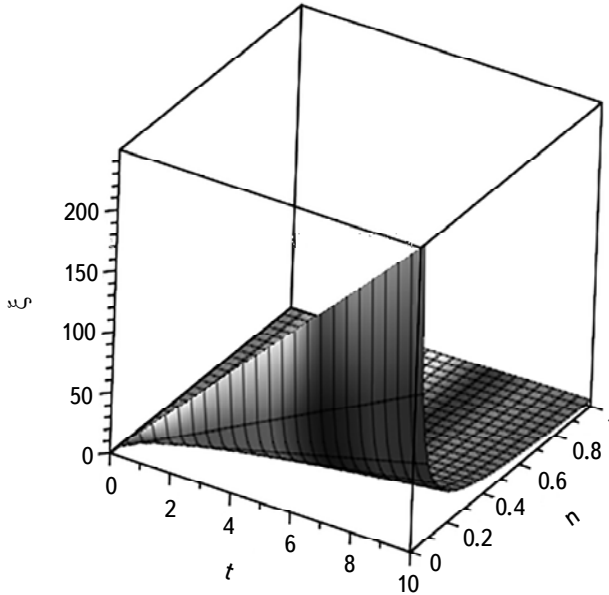
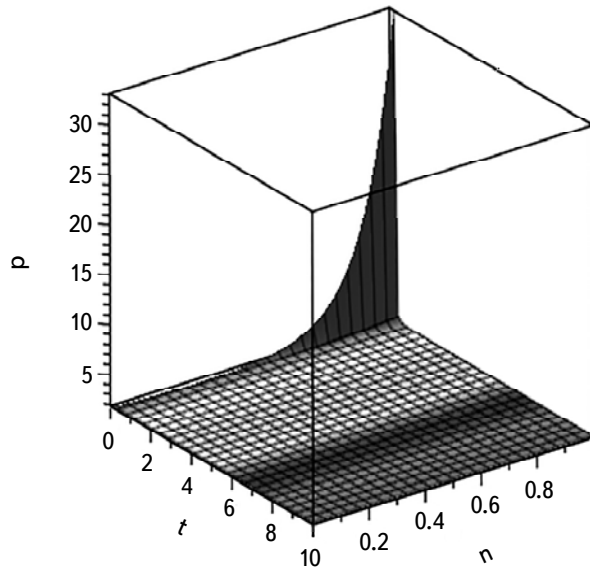


Fig.4. Variation of ξ vs. t .

Fig.5. Variation of p vs. t .

steady. While the pressure is incredibly small for a small value of n but as n increases the pressure diminishes from positive to approach constant with an increasing cosmic time t (Fig.5).

5. Concluding remarks. In this paper, we have studied the spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type V bulk viscous string cosmological model within the context of teleparallel gravity. The deceleration parameter is obtained to be a constant value that shows the decelerating or accelerating phase of the universe depending on the value of n . The Hubble's parameter shows the expansion of the universe is getting faster in the beginning with varying n and become slower through time. Also, the constructed model is purely anisotropic. Energy density is positive throughout the expansion whereas we have found the presence of string in an initial phase but later on string phase disappears which is supported by [34]. The coefficient of bulk viscosity shows transference with varying n and pressure becomes a diminishing function of cosmic time t with increasing n .

Acknowledgments. The authors are very much grateful to the honorable referees and the editor for the illuminating suggestions that have significantly improved our work in terms of research quality and presentation.

Department of Mathematics, Shri R. R. Lahoti Science College, Morshi, Dist. Amravati (M.S.), India, e-mail: ankitdabre@live.com

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОЙ СТРУНЫ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ В ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ

К.ПАВАР¹, А.К.ДАБРЕ¹

В этой статье исследована космологическая модель типа V Бианки, которая является пространственно однородной и анизотропной в присутствии объемной вязкой жидкости, содержащей одномерную космическую струну. Получены точные решения сильно нелинейных дифференциальных уравнений поля с учетом степенного закона объемного расширения Вселенной и $f(T) = T$ формализма. Некоторые физические и кинематические свойства построенной модели были обсуждены и представлены графически, и интересно отметить, что полученная модель соответствует последним данным наблюдений.

Ключевые слова: *объемная вязкая жидкость; космическая струна; телепараллельная гравитация*

REFERENCES

1. *A.G.Riess et al.*, *Astron. J.*, **116**, 1009, 1998.
2. *S.Perlmutter et al.*, *Astrophys. J.*, **517**, 565, 1999.
3. *R.A.Knop et al.*, *Astrophys. J.*, **598**, 102, 2003.
4. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **04**, 115, 2007.
5. *S.Nojiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou*, *Phys. Rep.*, **692**, 1-104, 2017.
6. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, *Phys. Rep.*, **505**, 59-144, 2011.
7. *Y.-F.Cai, S.Capozziello, M. De Laurentis et al.*, *Reports Prog. Phys.*, **79**, 106901, 2016.
8. *R.Myrzakulov*, *Eur. Phys. J. C*, **71**, 1752, 2011.
9. *K.Pawar, A.K.Dabre, N.T.Katre*, *Int. J. Sci. Res. Phy. App. Sci.*, **10**, 1, 2022.
10. *V.R.Chirde, S.H.Shekh*, *Bulg. J. Phys.*, **41**, 258, 2014.
11. *M.Sharif, S.Rani*, *Mod. Phys. Lett. A*, **28**, 1350118, 2013.
12. *S.Davood Sadatian*, *EPL, Europhysics Lett.*, **126**, 30004, 2019.
13. *R.K.Mishra, H.Dua*, *Astrophys. Space Sci.*, **364**, 195, 2019.
14. *S.K.Tripathy, S.K.Nayak, S.K.Sahu et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **321**, 247, 2009.
15. *M.Kiran, D.R.K.Reddy*, *Astrophys. Space Sci.*, **346**, 521, 2013.
16. *M.V.Santhi, T.C.Naidu, D.C.Papa Rao*, *J. Phys. Conf. Ser.*, **1344**, 012036, 2019.
17. *M.V.Santhi, Y.Sobhanbabu, B.J.M.Rao*, *J. Phys. Conf. Ser.*, **1344**, 012038, 2019.

18. *K.Pawar, A.K.Dabre*, Int. J. Sci. Res. Phy. App. Sci., **10**, 8, 2022.
19. *D.R.K.Reddy, S.Anitha, S.Umadevi*, Eur. Phys. J. Plus, **129**, 96, 2014.
20. *E.A.Hegazy*, Astrophys. Space Sci., **365**, 33, 2020.
21. *R.L.Naidu, D.R.K.Reddy, T.Ramprasad et al.*, Astrophys. Space Sci., **348**, 247, 2013.
22. *R.L.Naidu, K.D.Naidu, K.S.Babu et al.*, Astrophys. Space Sci., **347**, 197, 2013.
23. *D.R.K.Reddy, R.L.Naidu, K.D.Naidu et al.*, Astrophys. Space Sci., **346**, 261, 2013.
24. *T.Vidyasagar, R.L.Naidu, R.B.Vijaya et al.*, Eur. Phys. J. Plus, **129**, 36, 2014.
25. *D.R.K.Reddy, R.L.Naidu, K.D.Naidu et al.*, Astrophys. Space Sci., **346**, 219, 2013.
26. *D.R.K.Reddy, R.L.Naidu, T.Ramprasad et al.*, Astrophys. Space Sci., **348**, 241, 2013.
27. *A.K.Sethi, B.Nayak, R.Patra*, J. Phys. Conf. Ser., **1344**, 012001, 2019.
28. *M.R.Mollah, K.P.Singh*, New Astron., **88**, 101611, 2021.
29. *S.R.Bhoyar, V.R.Chirde, S.H.Shekh*, J. Sci. Res., **11**, 249, 2019.
30. *R.Bali, S.Dave*, Astrophys. Space Sci., **282**, 461, 2002.
31. *A.Dixit, R.Zia, A.Pradhan*, Pramana, **94**, 25, 2020.
32. *P.K.Sahoo, A.Nath, S.K.Sahu*, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., **41**, 243, 2017.
33. *M.V.Santhi, V.U.M.Rao, Y.J.Aditya*, Dyn. Syst. Geom. Theor., **17**, 23, 2019.
34. *P.S.Letelier*, Phys. Rev. D, **20**, 1294, 1979.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-137

ВЛИЯНИЕ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРЯЧЕЙ КВАРКОВОЙ МАТЕРИИ

Г.Б.АЛАВЕРДЯН, Г.С.АДЖЯН, А.Г.АЛАВЕРДЯН

Поступила 26 декабря 2022

Принята к печати 3 февраля 2023

В рамках локальной $SU(3)$ модели Намбу - Иона-Лазинио (NJL), в которой учтено также приводящее к смешиванию кварковых ароматов взаимодействие 'т Хоофта, исследуется влияние нейтринных осцилляций на термодинамические характеристики горячей β -равновесной трехароматной и непрозрачной для нейтрино кварковой материи. Для двух значений температуры $T = [60 \text{ и } 100] \text{ МэВ}$, с учетом нейтринных осцилляций, определены термодинамические характеристики кварковой материи. Эти результаты сравниваются с результатами, полученными без учета нейтринных осцилляций. Расчеты показывают, что при остывании непрозрачной для нейтрино кварковой материи высвобождаемая энергия на единицу барионного заряда составит около $150 \div 350 \text{ МэВ}$.

Ключевые слова: *горячая кварковая материя; модель NJL; захваченные нейтрино; нейтринные осцилляции*

1. *Введение.* Конечным продуктом взрыва предсверхновой звезды является звезда с центральной плотностью, в несколько раз превышающую плотность в атомных ядрах (нейтронная звезда, гибридная звезда, кварковая звезда), или черная дыра. После пионерских работ [1,2] огромное количество исследований в основном посвящены определению основных параметров, устойчивости, внутренней структуры как статических, так и вращающихся нейтронных звезд. При определении процесса остывания и анализа наблюдательных проявлений нейтронной звезды принималось, что как основные параметры, так и внутренняя структура горячей звезды, за исключением тонкого невырожденного наружного слоя, такие же как у холодной звезды с той же массой [3-5].

Метод расчета процесса остывания нейтронных звезд был таким же, как у аналогичных расчетов для белых карликов [6]. В этих и во многих последующих работах, посвященных изучению процесса остывания звезд, нейтрино предоставлена только роль беспрепятственного переносчика тепловой энергии из недр звезды наружу. Такое же отношение к нейтрино было и в первых работах по численному моделированию взрыва сверхновой звезды [7-9].

В работах [10-12] нейтрино уже активный "участник" в процессе взрыва сверхновой звезды. Как только температура и плотность вещества при имплозии центральных областей предсверхновой звезды становятся больше $(6 \div 8) \cdot 10^{10}$ МэВ и $(10^{12} \div 10^{13})$ г/см³, соответственно, вещество становится непрозрачным для нейтрино. Поэтому в этих работах учтены не только перенос энергии разными ароматами нейтрино, но и перенос импульса этими частицами, а также нейтринная теплопроводность. Наличие нейтрино в сверхплотном горячем звездном веществе влияет даже на величину вязкости этого вещества [13].

Наблюдательные данные, полученные от SN 1987A (от радио до гамма излучений электромагнитного диапазона, а также нейтринное излучение), подробным образом сопоставлены с результатами теоретических исследований прямо или косвенно связанных с этим явлением в обзоре [14]. В частности, в этом обзоре подробно обсуждается роль нейтрино в процессе имплозии ядра предсверхновой звезды.

Вопросы и проблемы, которые связаны с нейтрино для полноценного и подробного моделирования взрыва предсверхновой звезды и образования гибридной или кварковой звезды, многочисленны.

Целью нашей работы является изучение влияния явления нейтринных осцилляций на термодинамические характеристики непрозрачного для нейтрино горячего кваркового вещества. Особое внимание уделено выяснению влияния этого явления на количество запасенной энергии в веществе. Эта работа является органическим продолжением работ [15,16], где в рамках локальной SU(3) модели Намбу - Иона-Лазинио (NJL) без учета нейтринных осцилляций найдены термодинамические характеристики (композиционный состав, давление, плотность энергии и т.п.) горячей, β - равновесной, электрически нейтральной трехароматной кварковой материи с захваченными нейтрино, состоящей из конститuentных частиц $u, d, s, e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \nu_\tau$. Как показывают наши численные расчеты, учет нейтринных осцилляций приводит к достаточно сильному изменению характеристик лептонной компоненты непрозрачного для нейтрино горячего кваркового вещества. Характеристики же кварковой компоненты, такие как динамические массы кварков (M_u, M_d, M_s), концентрации кварков (n_u, n_d, n_s) и кварковые конденсаты ($\sigma_u, \sigma_d, \sigma_s$) при учете нейтринных осцилляций меняются незначительно.

2. Нейтринные осцилляции. Роль нейтрино в эволюции звезд и во Вселенной огромна. Нейтринная астрофизика дополняет наши знания, полученные путем анализа результатов наземных нейтринных экспериментов. Экспериментальное наблюдение нейтринных осцилляций (Нобелевская премия по физике 2015г.) инициировало много теоретических и экспериментальных исследований по нейтринной физике. Еще в далеком 1957г. Понтекорво

[17,18] предсказал явление нейтринных осцилляций, обусловленное возможным наличием массы у нейтрино.

Открытие нейтринных осцилляций объясняет несоответствие между результатом теоретического расчета интенсивности электронных нейтрино, образующихся при горении водорода в недрах Солнца и результатами измерений наземных нейтринных детекторов. По пути от недр Солнца до Земли электронные нейтрино из-за нейтринных осцилляций частично меняют свой тип (переходят в мюонные и тау нейтрино), что и приводит к уменьшению потока этого аромата нейтрино.

Согласно Стандартной модели элементарных частиц (СМ), существуют три типа (ароматов) левоспиральных и безмассовых нейтрино - электронные ν_e , мюонные ν_μ и таонные нейтрино ν_τ . Предположение об отсутствии массы у нейтрино в СМ исключает их осцилляции. Делаются попытки модифицировать СМ так, чтобы преодолеть это противоречие. Следует отметить, что из-за когерентного рассеяния в среде безмассовые нейтрино приобретают массу и осциллируют - эффект Михеева-Смирнова-Волфенштейна [19,20].

Экспериментальное определение значения массы нейтрино является одной из актуальных задач нейтринной физики. Коллаборацией KATRIN прецизионным измерением энергии электронов бета-распада трития для верхнего предела массы электронного антинейтрино было получено значение 0.8 эВ [21].

Ограничение на значения масс нейтрино получено и из космологических данных. В работе [22] для суммы масс всех трех типов нейтрино получено ограничение сверху 0.09 эВ (уровень достоверности 95%). Однако достоверность полученного ограничения требует дополнительной проверки, поскольку оно зависит от выбора космологической модели.

Для термодинамического описания горячей кварковой материи с захваченными нейтрино нами была использована локальная SU(3) модель Намбу - Иона-Лазинио (NJL) [23,24].

3. Лептонный заряд вещества протокварковой звезды. Вещество как обычных (не сверхплотных), так и холодных сверхплотных звезд прозрачно для нейтрино. Поток нейтрино, рожденных в недрах звезды, будет приводить к уменьшению энергии звезды. При этом лептонный заряд звезды может оставаться или неизменным, или меняться. Если эти нейтрино образовались без изменения химического или изотопического состава вещества звезды (равновесные URCA процессы, тормозное излучение нейтрино, фотонейтрино, и т.п. [25]), то суммарный лептонный заряд, уносимый такими нейтрино, равен нулю. Нейтрино от ядерных превращений, в частности от реакции термоядерного синтеза, покидая звезду, изменяют ее лептонный заряд. Со времен первых работ по рождению нейтрино в звездных недрах (см. [25])

прошло уже больше полвека. Огромное число работ посвящены этому вопросу. Обсуждение и представление результатов этих работ выходят за рамки нашей статьи. Вещество протонейтронных и протокварковых звезд, которые образовались при взрыве предсверхновых звезд, имеет очень высокую температуру ~ 100 МэВ ($\sim 10^{12}$ К) и плотность ($\sim 10^{15}$ г/см³).

Время, при котором центральная часть предсверхновой звезды сжимаясь превращается в протонейтронную или протокварковую звезду, порядка одной секунды. До достижения таких плотностей и температур вещество сжимающегося ядра становится непрозрачным для нейтрино. Поэтому лептонный заряд вещества при имплозии центральных частей предсверхновой звезды остается неизменным. Правда, до образования протокварковой или протонейтронной звезды нейтрино все-таки успевают унести некоторое количество лептонного заряда. Остаточный лептонный заряд, приходящийся на единицу барионного заряда Y_L протонейтронной или протокварковой звезды, в каждом отдельном случае можно определить численным моделированием взрыва сверхновой звезды с учетом кинетики образования и переноса нейтрино. Есть все предпосылки считать, что остаточный лептонный заряд $Y_L \approx 0.1 \div 0.45$ [26-30].

4. *Модель кваркового вещества, лептонный состав и уравнения химического равновесия.* Как в работах [15,16], так и в настоящей статье физические свойства кварковой компоненты описаны в рамках локальной SU(3) модели Намбу - Иона-Лазинио [23,24,31,32].

Численные расчеты проведены для следующих значений параметров этой модели. Для токовых масс u , d и s кварков - $m_u = m_d = 5$ МэВ, $m_s = 140.7$ МэВ, параметра ультрафиолетового обрезания - $\Lambda = 602$ МэВ, константы связи четырехкваркового скалярного взаимодействия - $G = 1.835/\Lambda^2$ и константы связи шестикваркового взаимодействия Кобаяши-Маскава-'т Хоофта - $K = 12.36/\Lambda^5$ [33].

При рассмотренных значениях плотности и температуры в HSQM (горячая странная кварковая материя) с захваченными нейтрино присутствуют все лептоны и антилептоны (электроны и мюоны, электронные, мюонные и таонные нейтрино, а также соответствующие античастицы), кроме таонов. Последние не рождаются, так как масса таона $m_\tau = 1.7$ ГэВ почти в 3 раза больше энергии самой энергичной частицы HSQM. В HSQM, даже если они будут рождаться за счет высокоэнергетического теплового хвоста, то их количество по сравнению с остальными лептонами будет ничтожно мало.

Равновесный химический (композиционный) состав частиц в HSQM устанавливается β -процессами. Хотя в каждом отдельном акте превращения частиц через слабое взаимодействие сохраняется только лептонный заряд

определенного типа, тем не менее в случае присутствия захваченных нейтрино из-за нейтринных осцилляций в конечном итоге будет сохраняться только суммарный лептонный заряд. Из-за взаимопревращения все ароматы нейтрино при термодинамическом равновесии имеют одинаковые химические потенциалы

$$\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = \mu_{\nu_\tau} = \mu_\nu. \quad (1)$$

Следовательно, концентрации всех типов нейтрино одинаковые. Разность концентраций лептонов и антилептонов типа l , ($l = e, \mu, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) обозначим через n_l

$$n_l(T, \mu_l) = \frac{g_l}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_l - \mu_l)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_l + \mu_l)/T}} \right], \quad (2)$$

где g_l - кратность вырождения, а $\varepsilon_l = \sqrt{k^2 + m_l^2}$ - энергия лептона типа l . Для электронов и мюонов $g_l = 2$, а для всех трех ароматов нейтрино, как частиц с определенной спиральностью - $g_l = 1$. Фактически n_l - это плотность лептонного заряда лептонов типа l .

Для заданных значений концентраций барионного заряда n_B и температуры T конституентные массы кварков M_u, M_d, M_s и кварковые конденсаты $\sigma_u, \sigma_d, \sigma_s$, а также химические потенциалы всех частиц $\mu_u, \mu_d, \mu_s, \mu_e, \mu_\mu, \mu_{\nu_e}, \mu_{\nu_\mu}, \mu_{\nu_\tau}$ связаны определенными соотношениями из теории NJL, условиями сохранения барионного и лептонных зарядов, а также условием локальной электронейтральности.

Уравнения термодинамического равновесия при неучете явления нейтринных осцилляций [15,16] и при их учете отличаются только по части условий β -равновесия.

При отсутствии нейтринных осцилляций химические потенциалы частиц кваркового вещества взаимосвязаны соотношениями:

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e - \mu_{\nu_e}, \quad \mu_s = \mu_u + \mu_e - \mu_{\nu_e}, \quad \mu_e - \mu_{\nu_e} = \mu_\mu - \mu_{\nu_\mu} = \mu_\tau - \mu_{\nu_\tau}. \quad (3)$$

Учет явления нейтринных осцилляций приводит к равенству химических потенциалов нейтрино всех ароматов и взаимосвязь между химическими потенциалами частиц принимает вид:

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e - \mu_\nu, \quad \mu_s = \mu_u + \mu_e - \mu_\nu, \quad \mu_e = \mu_\mu. \quad (4)$$

Этим уравнениям следует добавить условие локальной электронейтральности:

$$\frac{1}{3}n_u - \frac{2}{3}(n_d + n_s) - n_e - n_\mu = 0, \quad (5)$$

выражение для плотности барионного заряда:

$$n_B = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s), \quad (6)$$

а также выражение для отношения плотности суммарного лептонного и барионного зарядов:

$$Y_L = \frac{n_e + n_\mu + n_\nu}{n_B}. \quad (7)$$

Здесь $n_\nu = n_{\nu_e} + n_{\nu_\mu} + n_{\nu_\tau}$ - плотность суммарного лептонного заряда всех ароматов нейтрино

$$n_\nu = \frac{3T^3}{6\pi^2} \left[\left(\frac{\mu_\nu}{T} \right) + \pi^2 \left(\frac{\mu_\nu}{T} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Фактически, с точки зрения термодинамики, осцилляции нейтрино стирают все различия между разными ароматами нейтрино, формально все они вместе выступают как нейтрино с кратностью вырождения $g_\nu = 3$.

Уравнения, связывающие конstituентные массы кварков M_u, M_d, M_s , химические потенциалы μ_u, μ_d, μ_s , концентрации кварков n_u, n_d, n_s и кварковых конденсатов $\sigma_u, \sigma_d, \sigma_s$ приведены в нашей работе [15].

5. Результаты численных расчетов. Для фиксированных значений плотности барионного числа n_B , температуры T и относительного лептонного заряда Y_L , численным решением полной системы уравнений равновесия определены уравнение состояния и термодинамические характеристики HSQM с захваченными нейтрино и с учетом эффекта нейтринных осцилляций. Считаем целесообразным здесь приводить эти результаты только для $T = \{60; 100\}$ МэВ и $Y_L = \{0.1; 0.4\}$. Кроме мюонов все лептоны ультрарелятивистские, что дает нам возможность их считать безмассовыми. Это, конечно, не мешает нам учесть явление нейтринных осцилляций. Расчеты показывают, что характеристики кварковой компоненты (концентрации, химические потенциалы и конstituентные массы кварков, а также кварковые конденсаты) слабо зависят от того, учтены или не учтены нейтринные осцилляции. Отметим лишь, что из-за нейтринных осцилляций концентрации u кварков увеличиваются до порядка 4%, а концентрации d и s кварков уменьшаются в сумме на столько же. Как было показано в работе [16] без учета нейтринных осцилляций по количеству и по вкладу в общую энергию HSQM электроны и электронные нейтрино превосходят остальные лептоны. В HSQM с учетом нейтринных осцилляций, из-за равенства химических потенциалов всех ароматов нейтрино, вклады всех лептонов сравнимы. На рис.1а и рис.1б для значений температуры $T = \{60; 100\}$ МэВ и $Y_L = 0.4$ показаны зависимости химических потенциалов электронных и мюонных лептонов от n_B без учета (пунктирные кривые) и с учетом нейтринных осцилляций (сплошные кривые). В HSQM

при отсутствии нейтринных осцилляций и $n_B \geq 0.5 \text{ фм}^{-3}$ химические потенциалы электронов $\sim 250 \div 450 \text{ МэВ}$, что в $2 \div 3$ раза больше массы мюона. Наличие электронных нейтрино с таким же большим химическим потенциалом ($200 \div 500 \text{ МэВ}$) не позволяет частичный переход электронов в мюоны. С другой стороны, мюонный лептонный заряд при сжатии вещества предсверхновой звезды без нейтринных осцилляций сохраняется отдельно и равен своему первоначальному нулевому значению [15,16]. Поэтому количество электронов в HSQM с захваченными нейтрино при отсутствии нейтринных осцилляций намного превосходит количество мюонов.

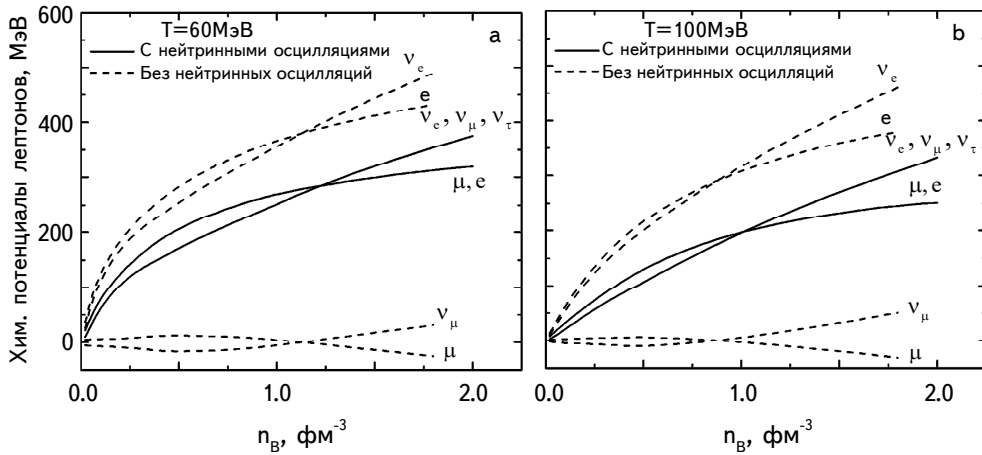


Рис.1. Химические потенциалы лептонов $\mu_e, \mu_\mu, \mu_{\nu_e}, \mu_{\nu_\mu}, \mu_{\nu_\tau}$ в зависимости от плотности барионного числа n_B при двух значениях температуры: а) $T = 60 \text{ МэВ}$, б) $T = 100 \text{ МэВ}$. Сплошные линии соответствуют случаю, когда имеет место смешивание (осцилляции) нейтрино, пунктирные линии - случаю отсутствия нейтринных осцилляций.

Из-за нейтринных осцилляций электронные нейтрино частично превращаются в мюонные и тау нейтрино, что приводит к уменьшению химического потенциала электронного нейтрино. Таким образом становится возможным превращение части электронов в мюоны.

На рис.2а и рис.2б для $T = 100 \text{ МэВ}$ и $Y_L = 0.4$ приведены зависимости концентраций электронов, мюонов и соответствующих античастиц от n_B как без учета (пунктирные кривые), так и с учетом нейтринных осцилляций (сплошные кривые). Видно, что количество отдельных лептонов в HSQM с захваченными нейтрино из-за нейтринных осцилляций намного превосходит количество соответствующего антилептона, что связано с высоким значением химического потенциала этих частиц. Если в HSQM с захваченными нейтрино при отсутствии нейтринных осцилляций концентрации электронов и мюонов сильно отличаются, то при наличии нейтринных осцилляций значения этих параметров примерно равны. Область низких плотностей $n_B \lesssim (0.3 \div 0.5) \text{ фм}^{-3}$ в

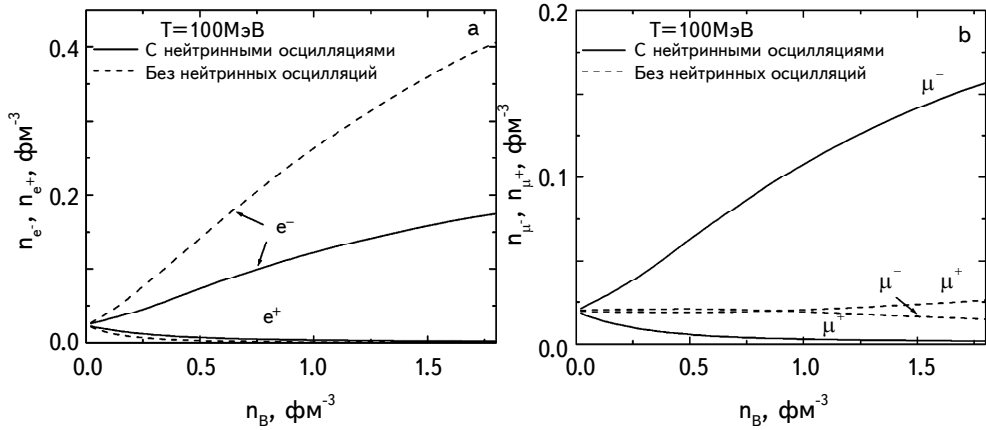


Рис.2. Концентрации заряженных лептонов: а) электронов и позитронов, б) мюонов и антимюонов в зависимости от плотности барионного числа n_B при температуре $T = 100$ МэВ. Сплошные линии соответствуют случаю, когда имеет место смешивание (осцилляции) нейтрино, пунктирные линии - случаю отсутствия нейтринных осцилляций.

кварковых звездах не реализуется. В некоторых рисунках эта область n_B присутствует просто для полноты физической картины.

На рис.3а и рис.3б для $T = \{60; 100\}$ МэВ и $Y_L = 0.4$ показаны зависимости отношений $\varepsilon_{\text{осц}}/\varepsilon_{\text{без осц}}$ и $P_{\text{осц}}/P_{\text{без осц}}$ от концентрации барионного заряда n_B , где $\varepsilon_{\text{осц}}$ и $P_{\text{осц}}$ - плотность энергии и давление при наличии нейтринных осцилляций, а $\varepsilon_{\text{без осц}}$ и $P_{\text{без осц}}$ - те же параметры без осцилляции.

Энергия и давление HSQM с захваченными нейтрино при $n_B \approx 0$ определяются в основном лептонами. Из уравнений химического равновесия

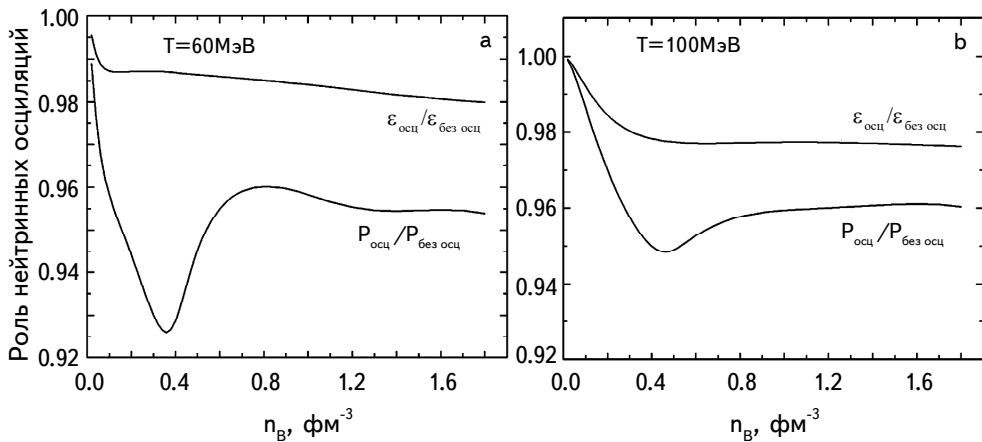


Рис.3. Отношения значений давления $P_{\text{осц}}/P_{\text{без осц}}$ и плотности энергии $\varepsilon_{\text{осц}}/\varepsilon_{\text{без осц}}$ в зависимости от плотности барионного числа n_B при двух значениях температуры: а) $T = 60$ МэВ, б) $T = 100$ МэВ.

следует, что независимо от значения Y_L как при наличии, так и при отсутствии нейтринных осцилляций, когда $n_B \rightarrow 0$, то химические потенциалы всех лептонов и антилептонов стремятся к нулю. Это видно и на рис.1а и рис.1б. Давление и плотность такой системы зависят только от температуры T . Такое состояние близко к состоянию обычного разреженного вещества при очень высоких температурах ($KT \gg m_e c^2$), когда число электрон - позитронных пар намного превосходит число электронов этого вещества в "холодном" ($KT \ll m_e c^2$) состоянии. Из рис.3а и рис.3б видно, что нейтринные осцилляции уменьшают давление и плотность энергии HSQM с захваченными нейтрино до 4-х и 2%, соответственно. Как для $T=60$ МэВ, так и для $T=100$ МэВ отношения $P_{\text{осц}}/P_{\text{безосц}}$ и $\varepsilon_{\text{осц}}/\varepsilon_{\text{безосц}}$ стремятся к единице, когда $n_B \rightarrow 0$, что было объяснено выше.

Для физики прото-нейтронных и прото-кварковых звезд одним из важных параметров является количество энергии, которое освобождается при их охлаждении. Это разница массы звезды до и после охлаждения. Часть этой энергии обусловлена изменением гравитационной энергии звезды, а другая часть определяется термодинамикой ее вещества. Энергию, приходящуюся на единицу объема HSQM с захваченными нейтрино при температуре T , обозначим через ε_T , а в холодном состоянии - через ε_0 . Назовем величину $\Delta\varepsilon = \varepsilon_T - \varepsilon_0$ плотностью тепловой энергии HSQM с захваченными нейтрино, хотя это не только энергия теплового движения частиц вещества. Львиную долю этой энергии уносят нейтрино, унося с собой и лептонный заряд.

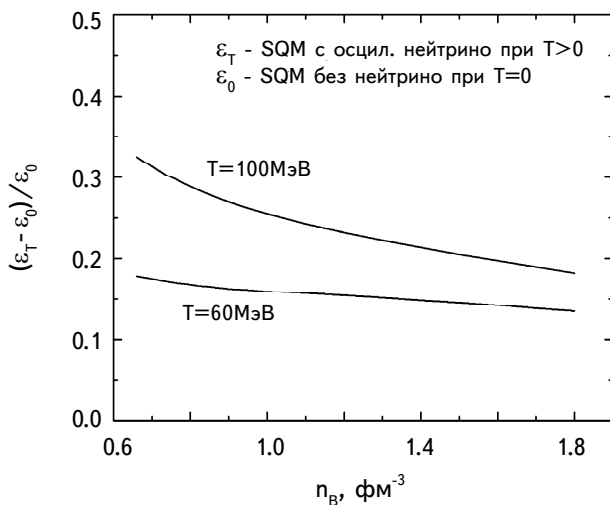


Рис.4. Нормированная разность энергий непрозрачной для нейтрино HSQM со смешиванием (осцилляциями) нейтрино и прозрачной для нейтрино холодной кварковой материи, после ухода всех нейтрино в зависимости от плотности барионного числа n_B при двух значениях температуры $T=60$ МэВ и $T=100$ МэВ.

На рис.4 для $T = \{60; 100\}$ МэВ и $Y_L = 0.4$ показана зависимость отношения $\Delta\varepsilon/\varepsilon_o$ от n_B в области $[0.6; 1.8]$ фм⁻³. В зависимости от n_B это отношение изменяется в пределах от 0.18 до 0.33 для $T = 100$ МэВ и от 0.13 до 0.18 для $T = 60$ МэВ. При остывании от $T = 100$ МэВ до $T = 60$ МэВ изменение энергии единичного объема HSQM с захваченными нейтрино будет $(0.05\varepsilon_o \div 0.15\varepsilon_o)$.

Таким образом, масса протокварковой звезды с $T = 100$ МэВ при ее остывании может уменьшаться до 20 ÷ 30 процентов. Такой же результат был получен и в рамках модели кваркового мешка MIT [34-35].

Конечное значение относительного лептонного заряда по завершению процесса формирования протокварковой звезды находится в области $0.1 \leq Y_L \leq 0.45$. Для сравнения на рис.5 и 6 приведены некоторые характеристики HSQM с захваченными нейтрино при температуре $T = 100$ МэВ в зависимости от n_B для $Y_L = 0.1$ и $Y_L = 0.4$.

Зависимость энергии HSQM с захваченными нейтрино, приходящая на единицу барионного заряда ε/n_B от n_B с учетом нейтринных осцилляций при температуре $T = 100$ МэВ для двух значений $Y_L = \{0.1 \text{ и } 0.4\}$, показана на рис.5. Для сравнения на этом же рисунке показана эта зависимость для холодной ($T = 0$) HSQM, где нейтрино вообще отсутствуют.

Согласно модели NJL, пороговая плотность рождения s кварков в холодном

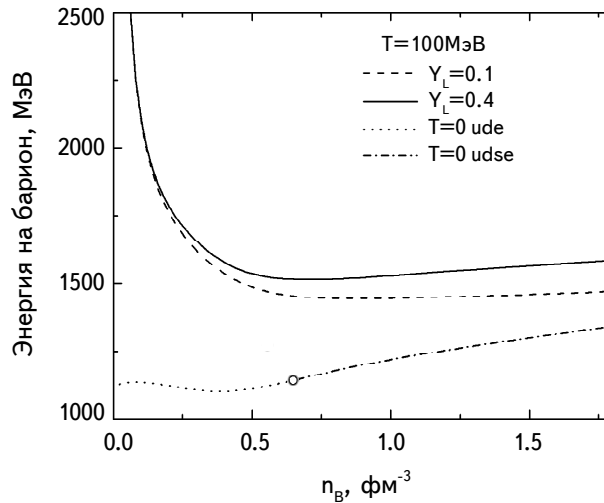


Рис.5. Приходящаяся на единицу барионного заряда энергия $E_1 = \varepsilon/n_B$ в непрозрачной для нейтрино HSQM с осцилляциями нейтрино при температуре $T = 100$ МэВ в зависимости от плотности барионного числа n_B для двух значений параметра удельного лептонного заряда $Y_L = 0.1$ и $Y_L = 0.4$. Для сравнения приводится также аналогичная зависимость для кварковой материи при нулевой температуре, после того, как все нейтрино уже покинули систему. Кружочек обозначает порог рождения странного кварка в β равновесной холодной кварковой материи.

($T=0$) кварковом веществе имеет значение $n_B^{s-thr} = 0.655 \text{ фм}^{-3}$ [36,37]. В области $n_B < n_B^{s-thr}$ в холодном ($T=0$) кварковом веществе существуют только u и d кварки. Причем, когда $n_B \rightarrow 0$, то на один барион приходится $M_{ou} + 2M_{od} = 3M_{ou} \approx 1100 \text{ МэВ}$ энергии [37], что видно и на рис.5. При $T \neq 0$ бесконечное возрастание отношения ε_T/n_B , когда $n_B \rightarrow 0$, обусловлено наличием лептонной компоненты при $n_B = 0$. На кривой, соответствующей нулевой температуре, кружочком обозначен порог рождения странного кварка.

Как отмечено выше, для теории нейтронных звезд с кварковым ядром важна область $n_B \geq 0.5 \text{ фм}^{-3}$. Из рис.5 следует, что в этой области концентрации n_B для HSQM с захваченными нейтрино при температуре $T=100 \text{ МэВ}$, приходящейся на единицу барионного заряда, энергия ε_T/n_B больше от ε_0/n_B в состоянии с температурой $T=0$, на $250 \div 400 \text{ МэВ}$ для $Y_L=0.4$ и на $150 \div 300 \text{ МэВ}$ для $Y_L=0.1$. Если как приемлемое значение для Y_L в протокварковой звезде считать значение $Y_L=0.1$, то масса протокваркового ядра протонейтронной звезды остываясь уменьшится в среднем порядка $10 \div 20\%$.

В холодной ($T=0$) компактной звезде с кварковой сердцевиной ud фаза будет существовать при выполнении условия $n_B^{s-thr} > n_B^Q$, где n_B^Q - плотность барионного числа кваркового вещества в точке фазового равновесия между кварковым и адронным веществами. Вопрос о том, существует ли ud фаза в компактной звезде - зависит не только от уравнения состояния кварковой материи, но и от уравнения состояния адронной материи. В работе [36]

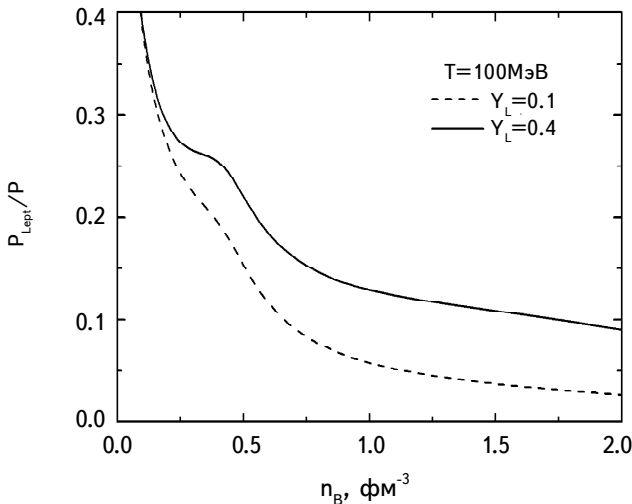


Рис.6. Относительный вклад лептонов в давление P_{Lept}/P в непрозрачной для нейтрино HSQM с осцилляциями нейтрино при температуре $T=100 \text{ МэВ}$ в зависимости от плотности барионного числа n_B для двух значений параметра удельного лептонного заряда $Y_L=0.1$ и $Y_L=0.4$,

показано, что в рамках модели, в которой для кварковой материи использована локальная модель NJL, а для адронной материи - модель релятивистского среднего поля, выполняется условие $n_B^{s-thr} < n_B^Q$ и, следовательно, в холодной гибридной звезде ud фазы не существует. Исследования в рамках усовершенствованной модели NJL, в которой учтены также вклады векторного и аксиально-векторного взаимодействия между кварками [37] показали, что этот вывод остается в силе.

Понятно, что чем меньше Y_L , тем меньше доля давления лептонов P_{Lept} в общем давлении P HSQM с захваченными нейтрино. На рис.6 с учетом нейтринных осцилляций для $T=100$ МэВ и $Y_L = \{0.1 \text{ и } 0.4\}$ показана зависимость отношения P_{Lept}/P от концентрации барионного заряда n_B . В интересном для кварковых звезд интервале $0.5 \text{ фм}^{-3} \lesssim n_B \lesssim 2 \text{ фм}^{-3}$, с возрастанием n_B отношение P_{Lept}/P уменьшается при $Y_L=0.4$ от 0.2 до 0.1 и от 0.15 до 0.02 при $Y_L=0.1$. Стремление этого отношения к единице при $n_B \rightarrow 0$ обусловлено тем, что давление P в этом пределе создается исключительно лептонами. Отметим также, что это имеет место независимо от значения Y_L и от того, учтены или не учтены нейтринные осцилляции.

6. Заключение. На основе модели NJL определены термодинамические характеристики непрозрачного для нейтрино горячего кваркового вещества с учетом нейтринных осцилляций. В соответствии со стандартной моделью элементарных частиц в наших расчетах учтены три аромата нейтрино. Расчеты выполнены для двух значений отношения суммарного лептонного и барионного зарядов HSQM: $Y_L = 0.1$ и $Y_L = 0.4$. Если при отсутствии нейтринных осцилляций в химически равновесном непрозрачном для нейтрино HSQM протокварковой звезды из лептонов важны только вклады электронов и электронных нейтрино, то наличие нейтринных осцилляций делает все лептоны "равноправными". Показанно, что из-за нейтринных осцилляций концентрации лептонов в химически равновесном непрозрачном для нейтрино HSQM сильно превосходят концентрации антилептонов. Причем количество электронов и мюонов мало отличается.

Несмотря на значительные изменения из-за нейтринных осцилляций характеристик лептонной компоненты непрозрачной для нейтрино HSQM, при фиксированном значении плотности барионного числа давление и плотность энергии вещества в зависимости от значения температуры при этом уменьшаются всего до 2 и 4%, соответственно.

Из-за нейтринных осцилляций запасенная тепловая энергия в непрозрачной для нейтрино HSQM уменьшается, однако ее количество остается значительным. Численные расчеты показывают, что в области значений плотности барионного числа, важной для гибридных и кварковых звезд: $0.5 \text{ фм}^{-3} \lesssim n_B \lesssim 2 \text{ фм}^{-3}$, прихо-

дящаяся на единицу барионного заряда энергия ε_T/n_B больше от ε_0/n_B в состоянии с температурой $T=0$, на $250 \div 400$ МэВ для $Y_L=0.4$ и на $150 \div 300$ МэВ для $Y_L=0.1$. Запасенная тепловая энергия в непрозрачной для нейтрино HSQM из-за нейтринных осцилляций уменьшается, однако ее количество настолько значительно, что даже для значения отношения суммарного лептонного и барионного зарядов HSQM $Y_L=0.1$ масса протокваркового ядра протонейтронной звезды остывая, уменьшится в среднем порядка $10 \div 20\%$. Чем больше значение Y_L , тем больше это изменение.

Характеристики же кварковой компоненты, такие как - динамические массы кварков (M_u, M_d, M_s), концентрации кварков (n_u, n_d, n_s) и кварковые конденсаты ($\sigma_u, \sigma_d, \sigma_s$) при учете нейтринных осцилляций меняются незначительно.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории физики сверхплотных звезд при кафедре прикладной электродинамики и моделирования ЕГУ, финансируемой комитетом по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

Ереванский государственный университет, Армения,

e-mail: galaverdyan@ysu.am ghajyan@ysu.am anialaverdyan@ysu.am

EFFECT OF NEUTRINO OSCILLATIONS ON THERMODYNAMIC PROPERTIES OF HOT QUARK MATTER

G.B.ALAVERDYAN, G.S.HAJYAN, A.G.ALAVERDYAN

Within the framework of the local SU(3) Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model, which also takes into account the 't Hooft interaction leading to quark flavor mixing, the influence of neutrino oscillations on the thermodynamic properties of three-flavor hot quark matter in β -equilibrium with trapped neutrinos is studied. For two temperatures $T=[60 \text{ and } 100]$ MeV, taking into account neutrino oscillations, the thermodynamic characteristics of quark matter are determined. These results are compared with the results obtained without taking into account neutrino oscillations. Calculations show that when cooling quark matter, which is opaque to neutrinos, the released energy per unit of baryon charge will be about $150 \div 350$ MeV.

Keywords: *hot quark matter: NJL model: trapped neutrinos: neutrino oscillations*

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.R.Oppenheimer, G.M.Volkoff*, Phys. Rev., **55**, 374, 1938.
2. *J.R.Oppenheimer, H.Snyder*, Phys. Rev., **56**, 455, 1939.
3. *H.-Y.Chiu, E.E.Salpeter*, Phys. Rev. Lett., **12**, 413, 1964.
4. *D.Morton*, Nature, **201**, 1308, 1964.
5. *G.S.Hajyan, Yu.L.Vartanyan*, Astrophysics, **7**, 136, 1971,
6. *M.Schwarzschild*, Structure and evolution of the stars, Princeton Univ. Press, 1958.
7. *S.A.Colgate, R.H.White*, Astrophys. J., **143**, 626, 1966.
8. *W.D.Arnett*, Can. J. Phys., **44**, 2553, 1966.
9. *W.D.Arnett*, Can. J. Phys., **45**, 1621, 1967.
10. *В.С.Имшенник, Д.К.Надеждин*, ЖЭТФ, **68**, 1548, 1972.
11. *D.K.Nadyozhin*, Astrophys. Space Sci., **49**, 399, 1977.
12. *D.K.Nadyozhin*, Astrophys. Space Sci., **51**, 283, 1977.
13. *M.Alford, A.Harutyunyan, A.Sedrakian*, Phys. Rev. D, **100**, 103021, 2019, [arXiv:1907.04192v2].
14. *В.С.Имшенник, Д.К.Надеждин*, УФН, **156**, 562, 1988.
15. *G.S.Hajyan, G.B.Alaverdyan*, Astrophysics, **64**, 370, 2021.
16. *G.S.Hajyan, G.B.Alaverdyan*, Astrophysics, **65**, 126, 2022.
17. *Б.М.Понтекорво*, ЖЭТФ, **33**, 549, 1957, (Sov. Phys. JETP, **6**, 429, 1958).
18. *Б.Понтекорво*, ЖЭТФ, **34**, 247, 1957, (Sov. Phys. JETP, **7**, 172, 1958).
19. *L.Wolfenstein*, Phys. Rev. D, **17**, 2369, 1978.
20. *С.П.Мухеев, А.Ю.Смирнов*, Ядерная физика, **42**(6), 1441, 1985.
21. The KATRIN Collaboration, Nature Physics, **18**, 160, 2022.
22. *E. Di Valentino, S.Gariazzo, O.Mena*, Phys. Rev. D, **104**, 083504, 2021, [arXiv:2106.15267].
23. *Y.Nambu, G.Jona-Lasinio*, Phys. Rev., **122**, 345, 1961.
24. *Y.Nambu, G.Jona-Lasinio*, Phys. Rev., **124**, 246, 1961.
25. *M.A.Ruderman*, Rep. Prog. Phys., **28**, 411, 1965.
26. *S.Wanajo, Y.Sekiguchi, N.Nishimura et al.*, ApJL, **789**, L39, 2014.
27. *A.W.Steiner, M.Prakash, J.M.Lattimer*, Phys. Lett. B, **509**, 10, 2001, [arXiv:astro-ph/0101566].
28. *E.H.Gudmundson, J.R.Buchler*, Astrophys. J., **238**, 717, 1980.
29. *M.Leibendoerfer*, Astrophys. J., **633**, 1042, 2005, [arXiv:astro-ph/0504072].
30. *M.Leibendoerfer, S.C.Whitehouse, T.Fischer*, Astrophys. J., **698**, 1174, 2009, [arXiv: 0711.2929].
31. *T.Eguchi*, Phys. Rev. D, **14**, 2755, 1976.
32. *K.Kikkawa*, Prog. Theor. Phys., **56**, 947, 1976.
33. *P.Rehberg, S.P.Klevansky, J.Hufner*, Phys. Rev. C, **53**, 410, 1996.
34. *G.S.Hajyan*, Astrophysics, **63**, 125, 2020.
35. *G.S.Hajyan*, Particles, **4**, 37, 2021, <https://doi.org/10.3390/particles4010004>.
36. *G.B.Alaverdyan, Yu.L.Vartanyan*, Astrophysics, **61**, 483, 2018.
37. *G.B.Alaverdyan*, Symmetry, **13**, 124, 2021, <https://doi.org/10.3390/sym13010124>.

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.1-151

ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПОЛИТРОП В ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ. I. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Г.А.САИЯН

Поступила 19 декабря 2022

Принята к печати 3 февраля 2023

Представлены известные результаты теории классических газовых политроп в рамках интегрального подхода, где вместо стандартного дифференциального уравнения Лэйна-Эмдена для сферически-симметричной гравитирующей массы рассматривается его эквивалент в виде нелинейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Показано, что обратное преобразование Лапласа уравнения Лэйна-Эмдена для политропы с показателем $n=5$ (модель Шустера) представляет собой рекуррентное соотношение для функций Бесселя первого рода. Доказана инвариантность нелинейного интегрального уравнения Вольтерры относительно гомологических преобразований, а также возможность получения сингулярных решений при определенных условиях. Также показано, что для целочисленных и полуцелых показателей политропы это уравнение эквивалентно многомерному интегральному уравнению, а нахождение с его помощью разложения функции Эмдена в ряд по степеням безразмерного расстояния ξ от центра политропы эквивалентно нахождению ряда Неймана и итерированных ядер в теории Фредгольма. Приближения функций Эмдена в замкнутом виде и их применимость к разным астрофизическим объектам будут представлены и обсуждаться во второй части настоящей работы. Политропы других геометрий и размерностей здесь не рассматриваются.

Ключевые слова: *политропы: уравнение Лэйна-Эмдена: нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода: функция Эмдена*

1. Введение. Теория классических газовых политроп является одной из наиболее детально разработанных разделов теоретической физики и астрофизики и давно нашла себе многочисленные применения в таких областях, как теория внутреннего строения звезд, теория звездной эволюции, строение и динамика звездных скоплений и космология. Будучи построенной на простых физических идеях, она в настоящее время, в основном, представляет математический интерес. Напомним, что дифференциальное уравнение Лэйна-Эмдена, лежащее в основе теории, удалось решить в явном виде лишь в отдельных случаях, а именно, для значений показателя политропы $n=0, 1, 5$, о чем подробно изложено в фундаментальных монографиях [1-4]. Добавим, что в настоящее время, для описания особенностей распределения темной материи во Вселенной, применяются композитные модели с разными индексами политропы [5].

Несмотря на большие возможности численного интегрирования и детальную разработанность политропных моделей, было ясно, что аналитические методы дают возможность понять физическую природу проблемы [6,7] по сравнению с численным интегрированием. Кроме того, они позволяют исследовать политропные модели с точки зрения иных физических представлений [8] и тем самым акцентируют необходимость дальнейшей разработки аналитических методов.

В настоящей статье некоторые основные результаты теории классических газовых политроп описаны с точки зрения теории интегральных уравнений и интегральных преобразований. Этот подход может расширить рамки теории и позволит найти иные аналитические возможности нахождения приближений к точным решениям политропных моделей в замкнутом виде. Примеры таких приближений функций Эмдена для разных показателей политропы включены во вторую часть работы. В работе [9] отдельные аспекты излагаемого здесь подхода были представлены в весьма сжатой форме.

2. Исходное интегральное уравнение теории газовых политроп. Дифференциальное уравнение Лэйна-Эмдена для классических газовых политроп вытекает из обычного уравнения Пуассона для сферически-симметричного распределения гравитирующей массы с плотностью $\rho(r)$, создающей гравитационный потенциал $\varphi(r)$ на расстоянии r от центра, дополненного условием гидростатического равновесия и уравнением состояния $P = K \rho^{1+1/n}$, где P - давление, K - постоянная и n - показатель политропы. Оно обычно записывается в следующем стандартном виде:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = -\theta^n, \quad (1)$$

где $\theta(\xi) = \varphi/\varphi_c$ - функция Эмдена или безразмерный потенциал (гравитационный потенциал нормированный на свое центральное значение), $\theta^n = \rho/\rho_c$ - безразмерная плотность распределения массы, $\xi = r/r_0$ - безразмерное радиальное расстояние, $r_0 = (\varphi_c/4\pi G \rho_c)^{1/2}$ - характерный радиус. Здесь G , как обычно, обозначает гравитационную постоянную. Центральное значение плотности ρ_c является параметром задачи наряду с показателем политропы. Функция Эмдена должна удовлетворять граничным условиям:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (2)$$

Физически приемлемыми являются условия $\xi \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Уравнение (1) с условиями (2) определяет задачу Коши для уравнения Лэйна-Эмдена и позволяет свести его решение к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры 2-го рода. Его особенно легко получить, если переписать уравнение (1) в более компактном виде

$$\frac{d^2(\xi\theta)}{d\xi^2} = -\xi\theta^n, \quad (3)$$

которое вытекает из очевидного равенства [10]:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' = -\frac{1}{\xi} \frac{d^2(\xi\theta)}{d\xi^2}. \quad (4)$$

Интегрирование дает первую производную от функции $\xi\theta$:

$$\frac{d(\xi\theta)}{d\xi} = -\int_0^\xi x \theta''(x) dx + C_1. \quad (5)$$

При $\xi=0$ получаем $C_1=1$. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (3) имеет вид [11]:

$$\xi\theta(\xi) = -\int_0^\xi x \theta''(x)(\xi-x) dx + \xi + C_0. \quad (6)$$

При $\xi=0$ имеем $C_0=0$. Поделив обе части уравнения (6) на ξ , окончательно получим

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi \theta''(x) x (1 - x/\xi) dx. \quad (7)$$

Уравнение Лэйна-Эмдена для изотермической сферы (когда $n=\infty$), по аналогии с обычными политропами, может быть записано в виде:

$$\frac{d^2(\xi\psi)}{d\xi^2} = \xi e^{-\psi}, \quad (8)$$

где $\psi(\xi) = \ln(\rho_c/\rho)$ - безразмерный потенциал, граничные условия для которого определены следующим образом

$$\psi(0)=0, \quad \psi'(0)=0. \quad (9)$$

С учетом этих условий решение задачи о нахождении решения для изотермической политропы можно, как сказано выше, свести к решению следующего однородного нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры второго рода:

$$\psi(\xi) = \int_0^\xi e^{-\psi(x)} x (1 - x/\xi) dx. \quad (10)$$

Уравнения (7) и (10) были получены в [12], а также в статье [13], посвященной исследованию существования, единственности и регулярности решений уравнений типа Лэйна-Эмдена. В [3] показано, как уравнения (7) и (10) могут быть получены с помощью первой формулы Грина. Уравнение типа (7) было использовано в работе [14] о политропной теории вращающихся звезд при $n=1$. Оно может быть положено в основу теории сферических

газовых политроп (как это возможно с его дифференциальным аналогом), откуда некоторые решения вытекают сразу, либо могут быть получены методом последовательных приближений Пикара или с помощью интегральных преобразований.

3. *Точные решения при $n = 0, 1, 5$.* Это те случаи, для которых известны решения дифференциального уравнения Лэйна-Эмдена (8) в виде элементарных функций. Во всех остальных случаях, как уже было сказано выше, решения можно получить только численными методами. В работе [7] отмечается, что для произвольного значения индекса политропы решений уравнения Лэйна-Эмдена в замкнутом виде не существует в принципе и что данный вывод имеет свое обоснование в теории групп Ли. Ниже мы рассмотрим как получаются известные решения для приведенных показателей политропы с помощью интегральных уравнений. Последовательные приближения решения уравнения (7) при $n=2$ получены во второй части работы на основе приема, изложенного в *Приложении 1* в конце статьи.

3.1. *Случай $n=0$.* Он соответствует модели несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), которая применяется при описании как твердых планет, так и состояния вещества в сверхплотных звездных конфигурациях при плотностях порядка ядерной и выше [15], когда при определенных значениях гидростатического давления происходит стабилизация плотности, а влиянием переноса тепловой энергии на состояние вещества можно пренебречь. В этом случае функция Эмдена находится сразу же элементарным интегрированием:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}. \quad (11)$$

Функции такого типа будут использованы нами во второй части при построении приближений к функциям Эмдена в замкнутой форме для других моделей.

3.2. *Случай $n=1$.* В этом случае интегральное уравнение Лейна-Эмдена сводится к стандартному линейному интегральному уравнению типа свертки для функции $\xi\theta$ после умножения обеих частей на ξ :

$$\xi\theta(\xi) = \xi - \int_0^\xi x\theta(x)(\xi - x)dx. \quad (12)$$

Это известное уравнение, которое легко решается методом преобразования Лапласа или последовательных приближений [11,16]. Если $T(s)$ - образ Лапласа функции $\xi\theta(\xi)$

$$\mathcal{L}[\xi\theta](s) = T(s) = \int_0^\infty \xi\theta e^{-s\xi} d\xi, \quad (13)$$

где s - параметр преобразования, то, применяя преобразование Лапласа к

обеим частям уравнения (14) и используя их свойства для операции свертки, получим выражение для $T(s)$:

$$T(s) = \frac{1}{(1+s^2)}. \quad (14)$$

Эта функция представляет собой преобразование Лапласа от $\sin \xi$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}(\xi) = \sin \xi. \quad (15)$$

Отсюда получается хорошо известное решение Риттера: $\theta(\xi) = \sin \xi / \xi$, которое является сферической функцией Бесселя нулевого порядка $j_0(\xi)$ или модифицированной функцией Бесселя $\Lambda_{1/2}(\xi)$, которая в случае произвольного порядка определяется соотношением [17]

$$\Lambda_\alpha(\xi) = \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(\xi),$$

где $J_\alpha(\xi)$ - функция Бесселя порядка α .

3.3. *Случай $n=5$.* Как известно, политропа с таким показателем соответствует модели Пламмера-Шустера, применяемой для описания распределения звезд в шаровых скоплениях, хотя в теории внутреннего строения звезд она не считается физически допустимой моделью [3]. Нахождение функции Эмдена (также Эмдена-Шустера) для этого случая оказалось далеко не простой задачей даже с точки зрения теории дифференциальных уравнений [2] и достаточно сложной с точки зрения интегральных уравнений ввиду их сильной нелинейности. Здесь мы предположим, что сама функция $\theta(\xi)$ является преобразованием Лапласа от другой функции $F(t)t^\nu$, определенной на всей числовой оси. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi \theta^5(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx, \quad (16)$$

где $\theta(\xi)$ может быть представлена в виде интеграла

$$\theta(\xi) = C_1 \int_0^\infty F(t) t^\nu e^{-\xi t/\alpha} dt. \quad (17)$$

Кроме того, вводя другую функцию $\Phi(t)$, зависящую от той же переменной t , имеем для распределения плотности свое интегральное представление

$$\theta^5(\xi) = C_2 \int_0^\infty \Phi(t) t^\mu e^{-\xi t/\alpha} dt, \quad (18)$$

где C_1 , C_2 , α , ν и μ - некоторые положительные числа (не путать некоторые символы с ранее использованными), значения которых обеспечивают нужную

нормировку решения уравнения Лэйна-Эмдена и сходимость интегралов. Эти значения будут определены ниже в тексте. Предполагается, что функции $F(t)t^\nu$ и $\Phi(t)t^\mu$ имеют необходимую скорость экспоненциального роста, при которых существуют ниже указанные интегралы (19) и (20).

Нашей задачей будет получение из (18) функционального соотношения для функций $F(t)$ и $\Phi(t)$ с целью определения искомой функции $\theta(\xi)$. Для этого используем обратное преобразование Лапласа от функций (19) и (20), рассматривая ξ как комплексную переменную:

$$F(t)t^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \theta(\xi) e^{\xi t/\alpha} d\xi, \quad (19)$$

$$\Phi(t)t^\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \theta^5(\xi) e^{\xi t/\alpha} d\xi. \quad (20)$$

Здесь принимается во внимание тот факт, что функции $\theta(\xi)$ и $\theta^5(\xi)$ в комплексной плоскости имеют одинаковые полюсы. Значение параметра $\sigma > 0$ здесь не существенно. Граница области интегрирования проходит справа от полюсов, которые (как будет видно из дальнейшего) располагаются на мнимой оси.

Продифференцируем по ξ подынтегральное выражение в (17), затем применим к обеим частям полученного интеграла обратное преобразование Лапласа:

$$\theta'(\xi) = (1/\alpha) \int_0^\infty F(t)t^{\nu+1} e^{-\xi t/\alpha} dt, \quad (21)$$

$$(1/\alpha) F(t)t^{\nu+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \theta'(\xi) e^{\xi t/\alpha} dt \quad (22)$$

и, аналогично, для второй производной функции Эмдена,

$$(1/\alpha^2) F(t)t^{\nu+2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \theta''(\xi) e^{\xi t/\alpha} d\xi. \quad (23)$$

Дифференцируя (23) по t , получим

$$(1/\alpha^2) \frac{d}{dt} [F(t)t^{\nu+2}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi \theta''(\xi) e^{\xi t/\alpha} d\xi. \quad (24)$$

Далее из (20) следует

$$(1/\alpha) \frac{d}{dt} [\Phi(t)t^\mu] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi \theta^5(\xi) e^{\xi t/\alpha} d\xi. \quad (25)$$

Записывая уравнение Лэйна-Эмдена (1) в раскрытом виде и умножая обе его части на ξ , получим

$$\xi \theta'' + 2\theta' = -\xi \theta^5. \quad (26)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа из обеих частей последнего уравнения, мы приходим к следующему уравнению для функций $F(t)$ и $\Phi(t)$ с учетом выражений (21)-(25):

$$C_1 \left(F'(t) t^{\nu+2} + (\nu/\alpha) t^{\nu+1} F(t) \right) = -C_2 \alpha^2 \left(t^\mu \Phi'(t) - \mu t^{\mu-1} \Phi(t) \right), \quad (27)$$

в котором можно усмотреть рекуррентное соотношение для функций Бесселя, если поделить обе части на $t^{\nu+1}$ и положить $C_1 = 1$, $C_2 \alpha^2 = 1$, $\nu = 0$, $\mu = 2$, $F(t) = J_0(t)$, $\Phi(t) = J_2(t)$:

$$t J_1(t) = 2 J_2(t) + t J_2'(t). \quad (28)$$

Порядок μ для функции Бесселя связан с показателем политропы $n = 5$ соотношением

$$\mu = \frac{n-1}{2}.$$

Таким образом, мы получаем следующее представление решения уравнения Лэйна-Эмдена (см. также интегралы более общего вида (17) и (18) в [17] на с.59):

$$\theta(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t/\alpha} J_0(t) t^\nu dt = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2/\alpha^2}}. \quad (29)$$

Аналогично

$$\theta^5(\xi) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\xi t/\alpha} J_2(t) t^2 dt = \frac{3}{\alpha^2 (1 + \xi^2/\alpha^2)^{5/2}}. \quad (30)$$

Из сопоставления (31) и (32) видно, что следует положить $\alpha^2 = 3$ или $\alpha = \sqrt{3}$. Итак, мы окончательно получаем точные решения для политропы с показателем $n = 5$:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2/3}} \quad \text{и} \quad \theta^5(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}}. \quad (31)$$

Видно, что обе функции имеют одинаковые полюсы $\xi = \sqrt{3}i$, так что в приведенных выше выражениях можно считать, что σ -малое положительное число, близкое к нулю.

Представленный способ решения уравнения Лэйна-Эмдена для политропной модели $n = 5$ не является последовательным с математической точки зрения, поскольку для этого необходимо иметь еще одно соотношение между функциями-образами $F(t)$ и $\Phi(t)$. Можно получить связывающее их интегральное уравнение в комплексной плоскости. Однако оно является сложным ввиду сильной нелинейности и пока неизвестно его решение. Работа в этом

направлении будет продолжена в дальнейшем.

Знание интегралов общего вида в [17] было отправной точкой нашего предположения о том, что функция Эмдена в данном случае сама является преобразованием Лапласа от некоторой другой функции, которую необходимо определить, а обратное Лаплас-преобразование уравнения Лэйна-Эмдена приводит к рекуррентному соотношению для функций Бесселя.

Для нахождения решений уравнения обсуждаемой политропной модели, можно было бы поступить следующим образом. Естественно предполагать, что политропные решения при $n \geq 1$ имеют точку перегиба $\theta''(\xi) = 0$ и являются симметричными функциями аргумента ξ ($\theta(-\xi) = \theta(\xi)$), то есть, либо зависят только от четных степеней аргумента ξ , либо, при разложении в ряд Тейлора, они содержат только его четные степени (условие, которое удовлетворяется на практике). В окрестности точки перегиба это уравнение приближенно принимает вид

$$2\theta'(\xi) = -\xi\theta''(\xi), \quad (32)$$

имеющее решение в виде иррациональной функции, зависящей от ξ^2 . Конечно, поведение функции $\theta(\xi)$ в окрестности отдельно взятой точки не характеризует ее поведение во всей области определения. Но это поведение может привести к гипотезе о возможном виде искомой функции, которая может быть проверена на основе более строгих соображений. Предположим, что в самом общем виде, при $n \geq 5$, политропные модели с бесконечным радиусом могут описываться функциями вида

$$\theta(\xi) = 1/(1 + q\xi^2)^\beta \quad (q, \omega > 0), \quad (33)$$

которые удовлетворяют условиям задачи Коши. Значения постоянных q и ω , должны определяться из дополнительных физических требований, наложенных на модель. Например, масса политропы при $n = 5$ должна быть конечной при бесконечном радиусе. Это требование сводится к условию

$$\xi^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\infty} < \infty. \quad (34)$$

Подставляя (33) в (34) и производя дифференцирование, легко заметить, что последнее условие выполняется при $\omega = 1/2$. Далее при условии обращения гравитационного потенциала в нуль на бесконечности, из интегрального уравнения (18) следует выполнение условия

$$\int_0^\infty \theta^5(\xi) \xi d\xi = 1, \quad (35)$$

что приводит к соотношению между параметрами q и ω :

$$2q = \frac{1}{5\omega - 1}.$$

Отсюда при $\omega = 1/2$ получаем $q = 1/3$, что приводит к решению Шустера-Эмдена. Все другие решения уравнения Лэйна-Эмдена при $n = 5$ (см., в частности, [18,19]), приводятся в работе [20]. Эти решения оказались сингулярными - результат, по нашему мнению, доказуемый в общем виде. Некоторые из этих решений выражаются через эллиптические интегралы, о чем говорилось в монографии Чандрасекара [2].

4. Инвариантность уравнения (7) относительно гомологических преобразований. Принцип гомологии [2,3] применительно к политропным моделям утверждает, что если функция $f(x)$ является решением уравнения Лэйна-Эмдена, то преобразование этого решения $A^{2/(n-1)}f(Ax)$, где A - некоторая константа, а n -показатель политропы, также является решением этого уравнения. Очевидно, что это утверждение должно оставаться справедливым и в отношении вышеупомянутого нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры. Действительно, пусть имеет место уравнение

$$f(\xi) = f(0) - \int_0^\xi f^n(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx, \quad (36)$$

где начальное значение $f(0) = 1$. Перепишем это уравнение, применив вышеприведенное преобразование гомологии и введя новые переменные $Ax = t$, $A\xi = \eta$, заменив $f(0)$ на $A^{2/(n-1)}f(0)$:

$$\begin{aligned} A^{2/(n-1)}f(A\xi) &= A^{2/(n-1)}f(0) - \int_0^\eta A^{2n/(n-1)}f^n(Ax) \frac{t}{A} \left(1 - \frac{Ax}{A\xi}\right) d\frac{t}{A} = \\ A^{2/(n-1)}f(\eta) &= A^{2/(n-1)} - \int_0^\eta \frac{A^{2n/(n-1)}}{A^2} f^n(t) t \left(1 - \frac{t}{\eta}\right) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $A^{2n/(n-1)}/A^2 = A^{2/(n-1)}$, то, поделив обе части уравнения (39) на эту величину, получим уравнение, аналогичное (38), но с новыми переменными:

$$f(\eta) = 1 - \int_0^\eta f^n(t) t \left(1 - \frac{t}{\eta}\right) dt. \quad (38)$$

5. Сингулярные решения уравнения Лэйна-Эмдена. Получение сингулярных решений из уравнения (7) невозможно, поскольку (в силу задачи Коши) оно определяет функцию Эмдена любой политропы как ограниченную в своей области определения. Однако, если не накладывать первое из граничных условий (2) и отбросить в (7) член $\theta(0) = 1$, то получим однородное уравнение Вольтерры второго рода, которое уже допускает сингулярные решения, полученные Чандрасекаром [2]

$$\xi\theta(\xi) = -\int_0^{\xi} x\theta''(x)(\xi-x)dx \quad (39)$$

(заметим, что двукратное дифференцирование последнего уравнения приводит к уравнению Лэйна-Эмдена также, как и (7)). При $\xi \rightarrow 0$ интеграл в правой части (39) должен стремиться к $-\infty$, тем самым обеспечивая положительность левой части. Сделав очевидную в таких случаях подстановку $\theta(\xi) = \delta\xi^{\beta}$, где δ, β - действительные числа, и приравняв после интегрирования коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим

$$\beta + 1 = \beta n + 3 \quad \text{откуда} \quad \beta = -\frac{2}{n-1}, \quad (40)$$

при условии

$$-\frac{\delta^{n-1}}{(\beta n + 2)(\beta n + 3)} = 1 \quad (41)$$

найдем

$$\delta = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{1/(n-1)}. \quad (42)$$

Из этого следует

$$\theta(\xi) = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{1/(n-1)} \xi^{-2/(n-1)}, \quad (43)$$

что повторяет сингулярные решения для $n > 3$, полученные Чандрасекаром [2]. При $1 < n < 3$ решений не существует. При $n = 2$ формальное решение $\theta(\xi) = -2/\xi^2$ физически неприемлемо, ибо приводит к отталкивающему потенциалу. При $n = 5$ получается еще одно известное решение $\theta(\xi) = \mp 1/\sqrt{2\xi}$, помимо приведенного в (31).

Можно предположить, что решения (43) могут иметь физический смысл до определенных (малых) значений расстояния от центра и напоминать поведение функции Эмдена в модели утяжеленных политроп, определенных в работе [21] и введенных в рассмотрение для описания распределения звезд в окрестности галактических ядер, состоящих из сверхмассивных объектов, или распределение галактик в скоплениях галактик, содержащих в центре сверхмассивную галактику. В силу того, что утяжеленные политропы дают пикообразное распределение плотности, можно предположить, что сингулярный характер решения модифицированного для такого случая уравнения Вольтерры (который мы здесь не рассматриваем) остается таковым вплоть до достижения верхней границы этой окрестности. Внутри же этой центральной области (которая предполагается достаточно малой) гравитационный потенциал и

плотность можно считать постоянными или слабо меняющимися (приближение несжимаемой жидкости). Обоснование предположения возможно в рамках детального математического анализа, которое планируется провести в дальнейшем.

8. *Выводы и обсуждение.* В настоящей работе представлен подход к теории классических газовых политроп, основанный на замене известного дифференциального уравнения Лэйна-Эмдена в рамках задачи Коши его интегральным аналогом в форме нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры 2-го рода. Показан вывод некоторых общих результатов классической теории (точные решения, инвариантность уравнения Вольтерры относительно гомологических преобразований, сингулярные решения). Показано, что при $n = 5$ обратное преобразование Лапласа уравнения Лэйна-Эмдена сводится к рекуррентному соотношению для функций Бесселя первого рода, а эквивалентность уравнения (7) - многомерному интегральному уравнению (см. Приложение 2). Во второй части работы будут приведены аналитические приближения функций Эмдена в замкнутом виде для некоторых моделей.

Интегральный подход к теории классических газовых политроп в изложенной версии представлен впервые и в его рамках пока не удалось получить новые результаты. Однако он может представлять методический интерес, когда классические задачи рассматриваются с альтернативных точек зрения. Кроме того, интегральный подход может быть интересен с точки зрения разработки новых алгоритмов численного интегрирования задач, связанных с исследованием политропных моделей, и обратных задач астрофизики, которые могут быть ими стимулированы. Интегральные методы в этом случае предпочтительнее, ввиду плохой обусловленности дифференциальных уравнений, связанной с неустойчивостью обратной задачи относительно ошибок во входных данных при переходе от этих уравнений к конечным разностям.

Кадровое агенство, Келли Сервисис, Канзас Сити, США
e-mail: grigori_saiyan@hotmail.com

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Метод последовательных приближений и итерированные ядра. Последовательные приближения к решению уравнения (7) могут быть найдены с помощью процедуры (назовем ее "матрешкой"), весьма близкой к методу ряда Неймана для интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода [11]. Мы используем ее во второй части работы для частного случая $n = 2$. Здесь же

уравнение Фредгольма удобно для демонстрации идеи, ибо не требует громоздких выражений, возникающих из-за нелинейности задачи, как в случае уравнения Вольтерры при произвольном значении n .

Линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным свободным членом $f(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds + f(t), \quad (\text{П1.1})$$

где $\varphi(t)$ - искомая функция, λ - некоторый параметр, $K(t, s)$ - ядро уравнения, непрерывное в прямоугольнике $a \leq t, s \leq b$ и $f(t) \in C[a, b]$. Подставляя вместо $\varphi(s)$ в подынтегральном выражении (П1.1) всю правую часть этого уравнения, получим в качестве первого шага

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(t, x) \varphi(x) dx + f(t), \quad (\text{П1.2})$$

где $K_2(t, x)$ - итерированное ядро, определяемое интегралом

$$K_2(t, x) = \int_a^b K(t, s) K(s, x) ds. \quad (\text{П1.3})$$

Функция $f(t)$ может считаться нулевым приближением искомой функции $\varphi(t)$, в то время, как первое приближение (итерация) определяется первым интегралом в (П1.2). Второй интеграл выражает остаточный член приближения. Все последующие приближения (итерации) строятся обычным образом, как это описано в [11]:

$$K_{k+1}(t, x) = \int_a^b K(t, s) K_k(s, x) ds. \quad (\text{П1.4})$$

При этом остаточный член возникающего ряда по степеням λ для функции $\varphi(t)$ является его $k+1$ -кратным членом и имеет вид:

$$\lambda^{k+1} \int_a^b K_{k+1}(t, x) \varphi(x) dx. \quad (\text{П1.5})$$

Сказанное может быть представлено также и в операторном виде. Если ввести оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds, \quad (\text{П1.6})$$

то уравнение Фредгольма запишется в виде $\varphi = \lambda A\varphi + f$, что после подстановки в правую часть (П1.6) и k -кратного повторения этой процедуры приводит к операторному ряду:

$$\varphi = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^k A^k f + \lambda^{k+1} A^{k+1} \varphi, \quad (\text{П1.7})$$

который отличается от обычного ряда Неймана лишь формой последнего, остаточного, члена. Как известно, для сходимости этого ряда необходимо выполнение условия $|\lambda A| \leq 1$. Уравнение (П1.7) есть приближение этой функции (то есть, как собственно ряд Неймана), если отбросить последний член, который с очевидностью с ростом k стремится к нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнение (7) как многомерное интегральное уравнение. Покажем, что уравнение (7) эквивалентно многомерному интегральному уравнению. Двумерные случаи таких уравнений уже привлекались, например, для решения задач диффузии в тонкослойных электрохимических элементах [22,23]. Они предоставляют новые возможности для построения численных алгоритмов решения известных задач с заданной геометрией. Возможно, многомерные интегральные уравнения могут оказаться полезными и во многих других задачах, связанных с описанием сложных диффузных (или других) процессов различной физической природы. Здесь многомерность возникает в результате устранения нелинейности искомой функции в подынтегральном выражении начального уравнения (7). Рассмотрим лишь сам процесс преобразования, не обращаясь к какой-либо конкретной задаче.

Вводя новое обозначение $\tau(x) = \theta^n(x)$, перепишем уравнение (7) в виде

$$\sqrt[n]{\tau(\xi)} = 1 - \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx. \quad (\text{П2.1})$$

Далее, возводя обе части уравнения в n -ую степень, получим

$$\tau(\xi) = \left[1 - \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \right]^n = \sum_0^n (-1)^k C_n^k \left[\int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \right]^k \quad (\text{П2.2})$$

k -ая степень интеграла в квадратных скобках, может быть представлена в виде k -кратного интеграла:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \right]^k = \\ & k! \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \int_0^x \tau(x_1) x_1 \left(1 - \frac{x_1}{x}\right) dx_1 \int_0^{x_1} \tau(x_2) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) dx_2 \dots \\ & \dots \int_0^{x_{k-1}} \tau(x_{k-1}) x_{k-1} \left(1 - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right) dx_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

что и доказывает утверждение.

Случай $n=3/2$ вызывает особый интерес, так как возникает при описании состояния вырожденного нерелятивистского газа в белых карликах, квантово-механической модели Томаса-Ферми, структуры адиабатической звезды, равновесие которой поддерживается давлением нерелятивистского газа [2], или квазистационарных звездных систем, удовлетворяющих условию локального термодинамического равновесия [24]. Полагая $\tau(\xi) = \theta^{3/2}(\xi)$, можно записать уравнение, аналогичное (П2.3), в виде

$$\tau(\xi) = \left[1 - \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) dx \right]^{3/2} \quad (\text{П2.4})$$

и разложить правую часть в ряд Тейлора:

$$\tau(\xi) = 1 - \frac{3}{2} \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) dx + \frac{3}{8} \left[\int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) dx \right]^2 - \dots \quad (\text{П2.5})$$

Ввиду того, что интегральное выражение в (П2.4) заведомо меньше единицы, ряд (П2.5) является сходящимся, а его первые два члена дают линейное приближение к этому многомерному интегральному уравнению. Это линейное приближение своим решением имеет сферическую функцию Бесселя нулевого порядка. Во второй части настоящей работы она будет использоваться в качестве исходной для нахождения аппроксимирующих функций в тех случаях, для которых точные решения уравнения Лэйна-Эмдена неизвестны.

THE THEORY OF CLASSICAL GAS POLYTROPES IN AN INTEGRAL REPRESENTATION. I. SOME GENERAL RESULTS

G.A.SAIYAN

The well-known results of the theory of classical gas polytropes within the framework of the integral approach are presented, where instead of the standard Lane-Emden differential equation for a spherically symmetric gravitating mass, its equivalent is considered in the form of a nonlinear integral Volterra equation of the 2-nd kind. It is shown that the inverse Laplace transform of the Lane-Emden equation for a polytrope with a value of $n=5$ (Schuster model) represents the recursive relation for Bessel functions of the first kind. The invariance of the

nonlinear integral Volterra equation with respect to homological transformations is proved, as well as the possibility of obtaining singular solutions under certain conditions. It is also shown that for integer and half-integer polytropes, this equation is equivalent to a multidimensional integral equation, and finding with its help the decomposition of the Emden function into a series by degrees of the dimensionless distance ξ from the center of the polytrope is equivalent to finding the Neumann series and iterated nuclei in Fredholm's theory. Approximations of Emden functions in a closed form and their applicability to different astrophysical objects will be presented and discussed in the second part of this work. Polytropes of other geometries and dimensions are not considered here.

Keywords: *polytropes: Lane-Emden equation: Volterra type nonlinear integral equation of the second kind: Emden function*

ЛИТЕРАТУРА

1. *V.R.Emden*, Gaskugeln, Leipzig, 1907.
2. *S.Chandrasekhar*, An Introduction to the Study of Stellar Structure. University Chicago Press, USA, 2022.
3. *A.C.Eddington*, The Internal Constitution of the Stars. Cambridge University Press. 1930.
4. *G.Horedt*, Polytropes. Applications in Physics and Astrophysics, 2004.
5. *W.J.Chung, L.A.Nelson*, Bose-Einstein condensate & degenerate Fermi cored dark matter, <https://arxiv.org/pdf/1801.00565.pdf>.
6. *G.P.Horedt*, Astron. Astrophys., **172**, 359, 1987.
7. *M.V.Medvedev, G.Rybicki*, Astrophys. J., **555**, 863, 2001.
8. *M.Milgrom*, Phys. Rev., D, **103**, 044043, 2021.
9. *G.A.Saiyan*, Com. BAO, **68**, 509, 2021.
10. *В.В.Иванов*, Астрофизика звезд. Санкт-Петербургский Университет, 2006.
11. *П.М.Краснов*, Интегральные уравнения, М., "Наука", 1975.
12. *Г.А.Саиян*, Кандидатская диссертация, АН Республики Армения, 1997.
13. *U.M.Shaudt*, Ann. Henri Poincare, **1**, 945, 2000.
14. *M.V.Vavrukh, D.V.Dzikovskiy*, Mathematical Modeling and Computing, **8**, 338, 2021.
15. *Г.С.Саакян*, Пространство, время и гравитация. Изд-во Ереванского Университета, 1985.
16. *G.Adomian*, Solving Frontier Problems in Physics. The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, 1993.

17. *Г.Бейтмен, А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции. II., М., "Наука", 1974.
18. *S.Srivastava*, Astrophys. J, **136**, 680, 1962.
19. *H.Goenner, P.Havas*, J. Math. Phys., **41**, 7029, 2000.
20. *P.Mach*, J. Math. Phys., **53**, 062503, 2012.
21. *J.M.Huntley, W.C.Saslaw*, Astrophys. J., **199**, 325, 1975.
22. *M.V.Mirkin, A.J.Bard*, J. Electroanal. Chem., **323**, 1-27, 1992.
23. *M.V.Mirkin, A.J.Bard*, J. Electroanal. Chem., **323**, 29-51, 1992.
24. *V.G.Gurzadyan, A.G.Kechek*, Preprint, Lebedev Institute AN SSSR, N.180, Moscow), 1979.

CONTENTS

Distances to ten nearby galaxies observed with the Hubble space telescope	5
<i>I.D.Karachentsev, N.A.Tikhonov</i>	
Optical classification of BZG objects from BZCAT blazar catalog	17
<i>H.V.Abrahamyan, A.M.Mickaelian, G.M.Paronyan,</i> <i>G.A.Mikayelyan, A.G.Sukiasyan</i>	
Photometric study and orbital solution for some newly discovered eclipsing binary systems	31
<i>M.S.Alenazi, M.M.Elkhateeb</i>	
Superfast line profile variability in spectra of γ Ori	45
<i>A.F.Kholtygin, V.B.Puzin, I.V.Sokolov, M.S.Kurdoyakova</i>	
Herbig-Haro flows and young stars in the Dobashi 5006 dark cloud	61
<i>T.A.Movsessian, T.Yu.Magakian, A.S.Rastorguev, H.R.Andreasyan</i>	
The study of Kantowski-Sachs perfect fluid cosmological model in modified gravity	75
<i>T.Vinutha, K.Niharika, K.S.Kavya</i>	
Effect of the interaction between hyperons on the moment of inertia of the proto neutron stars	95
<i>Xian-Feng Zhao</i>	
Accelerating Kaluza-Klein universe in modified theory of gravitation	109
<i>S.D.Katore, S.P.Hatkar, D.P.Tadas</i>	
Bulk viscous string cosmological model with power law volumetric expansion in teleparallel gravity	125
<i>Kalpana Pawar, A.K.Dabre</i>	
Effect of neutrino oscillations on thermodynamic properties of hot quark matter	137
<i>G.B.Alaverdyan, G.S.Hajyan, A.G.Alaverdyan</i>	
The theory of classical gas polytropes in an integral representation. I. Some general results	151
<i>G.A.Saiyan</i>	

СОДЕРЖАНИЕ (продолжение)

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИПЕРОНОВ НА МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРОТОНЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД	<i>Сиань-Фэн Чжао</i>	95
УСКОРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА В МОДИФИ- ЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	<i>С.Д.Каторе, С.П.Хаткар, Д.П.Тадас</i>	109
КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОЙ СТРУНЫ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ В ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ	<i>Калпана Павар, А.К.Дабре</i>	125
ВЛИЯНИЕ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НА ТЕРМОДИНА- МИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРЯЧЕЙ КВАРКОВОЙ МАТЕРИИ	<i>Г.Б.Алавердян, Г.С.Аджян, А.Г.Алавердян</i>	137
ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПОЛИТРОП В ИНТЕГ- РАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ. I. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	<i>Г.А.Саиян</i>	151