

№ 144

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

АЖ 144

XLI

1965

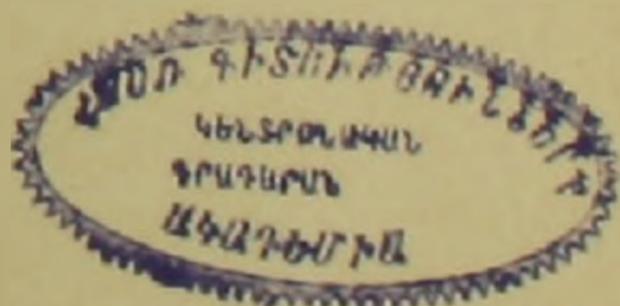
DA-5775

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-  
տությունների բեկնածու, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ,  
ՀՍՍՐ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Մ. ԲԱՌԱ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Հ.  
ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.  
ԳԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ բոլորակից-անդամ  
(սլատ. խմբագրի տեղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻՐ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐ-  
ՉՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Ս. Ս.  
ՄԿՐՏՀՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ.  
ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ.  
ՋՐՐԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս (սլատ.  
խմբագիր), Ռ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ  
բոլորակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.  
АФРИКЯН, кандидат биологических  
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН  
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.  
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-  
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.  
КАЗАРЯН, чл.-корресп. АН АрмССР  
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-  
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.  
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.  
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.  
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,  
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՅԱՐԱՎՉՈՒԹՅՈՒՆ

Ե Ե Կ Ա Ե

ЕРЕВАН

**Մարեմտօթկա**

Ք. Յու. Լեվին և Ի. Հ. Խաչատրյան — Վիճերի և Գելիի մի թեորեմի ընդհանրացումը հիստորիոսոփյան կամայական ամբողջ կարգի և նորմալ տիպի ֆունկցիաների համար . . . . .	3
Ս. Մ. Սարգսյան — Քառահուսային այժմասերով կաշու — Ռիմանի սխեմայի յուժումների հասկոթյունները . . . . .	10
Վ. Ա. Յավրյան — Շաուրմ — Լյուվիլի օպերատորների համար հետքերի բանաձևի մասին . . . . .	14

**Մեխանիկա**

Լ. Ա. Մովսեսյան — Գերիդիկ փոփոխվող երկարության հեծանի տատանումները . . . . .	22
--	----

**Ֆիզիկա**

Ա. Ի. Կուզնեցով և Վ. Հ. Զալյիկյան — Ջրածնի ատոմի իոնիզացիան ինտենսիվ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման ներգործությամբ . . . . .	27
---	----

**Պոլիմեռների Ֆիզիկա**

Լ. Գ. Սկրոնյան, Ռ. Վ. Բաղդասարյան և Ա. Վ. Կեոբյան — Մետալիզացիայի մասին խնդիրը և պոլիբրոսպրենային կաուչուկի մակրամոլեկուլի թերմոդինամիկական հոսանքներ . . . . .	34
---	----

**Ռիտմիկա**

Ա. Շ. Կոլսոյան — Ազուտ-այկալի հոգերի դեհիդրացիաների ակտիվությունը . . . . .	41
---	----

**Լեկտուրանոսյուն**

Ա. Վ. Կազարյան — Բազալաների հազվագյուտ առջատումներ Լոռու պլանտայում . . . . .	47
---	----

**Ռադիոֆիզիկա**

Ս. Ս. Բալայան — Ջերմային ազդեցությունը ցորենի սերմերի սենագենյան ճառագայթման ժամանակ . . . . .	51
--	----

**Քույսերի Ֆիզիոլոգիա**

Ի. Ա. Կեոբյան — Աշնանային ցորենի սերմի ամինոթթուների և յուժնի շարքերի փոփոխությունը յարովիզացիայի ընթացքում . . . . .	55
---	----

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

## Математика

- Б. Я. Левин и И. О. Хачатрян* — Об обобщении одной теоремы Винера —  
Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полу-  
плоскости . . . . . 3
- С. Ц. Саркисян* — Свойства решений систем Коши — Римана с квадрат-  
ными добавками . . . . . 10
- В. А. Яврян* — О формуле следов для операторов Штурма — Личвилля . . . . . 14

## Механика

- Л. А. Мовсисян* — Колебания балки с периодически изменяющейся длиной . . . . . 22

## Физика

- А. Д. Газазян и В. О. Чалтыкян* — Ионизация атома водорода под дей-  
ствием электромагнитного излучения . . . . . 27

## Физика полимеров

- Л. Г. Мелконян, Р. В. Багдасарян и А. В. Геворкян* — К вопросу оценки  
тавск. и термодинамическая гибкость макромолекул полихлоропренового кау-  
чука . . . . . 34

## Биохимия

- А. Ш. Галстян* — Активность дегидрогеназ засоленно-солонцеватых почв . . . . . 41

## Геология

- С. В. Казарян* — Уникальные отдельности базальтов Лорийского плато . . . . . 47

## Радиобиология

- Р. С. Бабаян* — Влияние термических воздействий при рентгенооблучении  
семян пшеницы . . . . . 51

## Физиология растений

- И. А. Геворкян* — Об изменении свободных аминокислот и растворимых  
углеводов в семенах озимой пшеницы в процессе яровизации . . . . . 59

МАТЕМАТИКА

Б. Я. Левин и И. О. Хачатрян

Об обобщении одной теоремы Винера—Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/1 1965)

1°. Известна следующая теорема Винера—Пэли (1).

Пусть  $\Phi(x)$  — вещественная неотрицательная функция на оси  $(-\infty, \infty)$  и  $\Phi(x) \in L_2$ . Необходимым и достаточным условием для того, чтобы в классе  $H_2$  существовала функция  $F(z)$ , такая, что почти всюду  $|F(x)| = \Phi(x)$ , является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \Phi(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (1)$$

Если условие  $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  заменить условием  $\Phi(x) < C$ , то класс  $H_2$  надо будет заменить классом голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости функций. При этом условие (1) будет необходимым также в более широком классе — в классе голоморфных в верхней полуплоскости функций конечной степени.

Целью настоящей заметки является установление следующих теорем.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi(x)$  — неотрицательная ограниченная функция на  $(-\infty, \infty)$  и пусть интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Phi(x)}{1+|x|^{p+2}} dx \quad p > 0 - \text{целое число} \quad (1')$$

сходится. Тогда существует голоморфная в верхней полуплоскости функция  $f(z)$ , удовлетворяющая условиям

- а)  $f(z) \neq 0$  при  $y > 0$
- б)  $|f(z)| < C \exp(c|z|^{p+1})$   $\text{Im } z > 0$
- в)  $|f(x)| = \Phi(x)$ .

Обратная теорема верна в следующей формулировке.

Теорема 1'. Если  $f(z)$  голоморфна в верхней полуплоскости и удовлетворяет условиям а, б, в, причем  $p$  — четное число, то интеграл (1') будет сходиться.

2°. При доказательстве теоремы 1 будет использовано специальное представление гармонических функций, имеющих степенной рост в полуплоскости с помощью видоизмененного ядра Пуассона

$$k_p(t; z) = \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{z}{t^2} - \dots - \frac{z^p}{t^{p+1}} \right]. \quad (2)$$

Следующие утверждения доказываются по схеме доказательств лемм 2 и 3 и теоремы 4 главы V монографии (2).

Лемма 1. Если  $u(t)$  непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ ,  $u(t) = 0$  при  $|t| < 1$  и  $u(t) < c|t|^{p+1}$  и существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) t^{-(p+2)} dt, \quad (1'')$$

то существует также интеграл

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) k_p(t; z) dt \quad (3)$$

для любого невещественного  $z$ . При этом  $v(z)$  — гармоническая в верхней полуплоскости функция со значениями  $u(x)$  на  $(-\infty, \infty)$  и удовлетворяющая неравенству

$$|v(z)| < C_1 + \frac{r^{p+1} |\sin(p+1)\vartheta| + |\sin p\vartheta|}{\sin^2 \vartheta}, \quad z = re^{i\vartheta}.$$

Если еще известно, что  $u(t) \leq 0$  на  $(-\infty, \infty)$ , то справедлива оценка

$$v(z) \leq O(|z|^{p+1})$$

во всей верхней полуплоскости.

Теорема 2. Для того, чтобы функция  $u(z)$ , гармоническая в полуплоскости  $y > 0$ , непрерывная в замкнутой полуплоскости  $y \geq 0$ , равная нулю на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  и удовлетворяющая условию

$$|u(z)| < c|z|^{p+1} + c_1 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty,$$

представлялась в форме

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) k_p(t; z) dt + \sum_{k=1}^{p+1} a_k r^k \sin k\vartheta, \quad z = re^{i\vartheta}. \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t^{p+2}} dt.$$

При этом коэффициенты  $a_k$  в (4) определяются формулами

$$a_m = \frac{2}{\pi r^m} \int_0^\pi u(re^{i\theta}) \sin m\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r u(t) \left[ \frac{1}{t^{m+1}} - \frac{t^{m-1}}{r^{2m}} \right] dt,$$

$m = 1, 2, \dots, p$

$$a_{p+1} = \frac{2}{\pi r^{p+1}} \int_0^\pi u(re^{i\theta}) \sin(p+1)\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-r}^r \frac{u(t) t^p}{r^{2p+2}} dt + \int_{|t|>r} \frac{u(t)}{t^{p+2}} dt \right].$$

При иных предположениях представление (4) показано Р. Неванлинна (2). При доказательстве достаточности мы пользуемся следующим фактом.

**Лемма 2.** Если гармоническая в верхней полуплоскости функция  $w(z)$  удовлетворяет неравенству

$$w(z) \leq c_1 + c_2 |z|^{p+1}$$

и  $w(x) = 0$ , то она имеет вид

$$w(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k r^k \sin k\theta,$$

где  $a_k$  — вещественны.

**Доказательство.** Продолжим  $w(z)$  нечетно относительно  $y$  в нижнюю полуплоскость. Из формулы Карлемана, учитывая, что  $w(x) = 0$ , получим

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^\pi w(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = O(1),$$

или

$$\int_0^\pi w(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = O(R).$$

Далее,

$$\int_0^\pi |w_+(Re^{i\theta}) - w_-(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta = O(R),$$

$$\int_0^\pi w_-(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = O(R) + \int_0^\pi w_-(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \leq O(R) + O(R^{p+1}) = O(R^{p+1}).$$

т. е.

$$\int_0^\pi |w(Re^{i\theta}) \sin \theta| d\theta \leq O(R^{p+1}).$$

Пусть

$$w(Re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \sin k\theta.$$

Тогда

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(Re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta = a_k R^k.$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_k R^k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(Re^{i\theta}) \sin \theta \cdot \frac{\sin k\theta d\theta}{\sin \theta} < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |w(Re^{i\theta}) \sin \theta| \times \\ &\times \left| \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \right| d\theta < c_k \int_0^{\pi} w |Re^{i\theta}| \sin \theta d\theta = O(R^{p-1}), \end{aligned}$$

что возможно только в случае  $a_{p+2} = a_{p+3} = \dots = 0$ .

3°. Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 1', мы несколько сообщим известную формулу Карлемана

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda < r_k < R} \left( \frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \sin \theta_k &= \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln |F(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(x)F(-x)| dx + O(1). \end{aligned} \quad (5)$$

Именно при любом натуральном  $p$  верно равенство

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda < r_k < R} \left( \frac{1}{r_k^p} - \frac{r_k^p}{R^{2p}} \right) \sin p\theta_k &= \frac{p}{\pi R^p} \int_0^{\pi} \ln |F(Re^{i\theta})| \sin p\theta d\theta + \\ &+ \frac{p}{2\pi} \int_{-R}^{-\lambda} \ln |F(x)| \left( \frac{1}{x^{p+1}} - \frac{x^{p-1}}{R^{2p}} \right) dx + \frac{p}{2\pi} \int_{\lambda}^R \ln |F(x)| \left( \frac{1}{x^{p+1}} - \right. \\ &\left. - \frac{x^{p-1}}{R^{2p}} \right) dx + O(1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $F(z)$  — голоморфная функция в области

$$0 < \lambda \leq |z| \leq R, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (7)$$

а  $a_k = r_k e^{i\theta_k}$  — ее корни в этой области.

Формулу (6) можно получить, применяя формулу Грина

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

к функциям  $u = (r^\rho - R^{-\rho} r^{-\rho}) \sin p\theta$ ,  $v = \ln |F(z)|$  в области (7) без кружков с центрами в точках  $a_n$  и впоследствии устремляя к нулю радиусы этих кружков.

Доказательство теоремы 1. Не нарушая общности, можно предположить, что  $\Phi(x) < 1$  на  $(-\infty, \infty)$  и  $\Phi(x) = 1$  при  $|x| < 1$ .

Тогда по лемме 1 функция

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \Phi(t) k_p(t; z) dt$$

гармонична в верхней полуплоскости и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lambda(x + iy) = \ln \Phi(x)$$

$$\lambda(z) < O(|z|^{\rho+1}) \quad \text{Im } z > 0.$$

Голоморфная функция

$$f(z) = \exp\{\lambda(z) + i\mu(z)\},$$

где  $\mu(z)$  — сопряженная с  $\lambda(z)$  гармоническая функция, будет искомой.

Доказательство теоремы 1'. Так как  $f(z) \neq 0$ , то из формулы Карлемана (5) получим

$$0 < \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \ln |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \times \\ \times \ln |f(x)f(-x)| dx + O(1).$$

Так как согласно условию  $\ln |f(x)f(-x)| < 0$ , то

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \ln |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \geq O(1) \quad (8)$$

при достаточно больших  $R$ . С другой стороны,

$$\int_0^\pi \ln |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq O(R^{\rho+1}). \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\int_0^\pi \ln |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta = O(R^{\rho+1}). \quad (10)$$

Из формулы (10) и второго условия теоремы, как и при доказательстве леммы 2, получим

$$\int_0^\pi |\ln |f(Re^{i\theta})|| |\sin(\rho+1)\theta| d\theta = O(R^{\rho+1}). \quad (11)$$

Напишем формулу (6) для  $f(z) \neq 0$  с заменой  $p$  на  $p+1$

$$O < \frac{1}{2\pi R^{p+1}} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \sin(p+1)\theta d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \ln |f(x)| \left( \frac{1}{x^{p+2}} - \frac{x^p}{R^{2p+2}} \right) dx + O(1). \quad (6)$$

Из (11) и (6') следует, что при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-R}^R \ln |f(x)| \left( \frac{1}{x^{p+2}} - \frac{x^p}{R^{2p+2}} \right) dx = O(1)$$

или, если учесть четность  $p$ ,

$$\int_{-2R}^{2R} \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} \left( 1 - \frac{x^{2p+2}}{(2R)^{2p+2}} \right) dx < c,$$

откуда

$$\int_{-2R}^{2R} \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} \left( 1 - \frac{x^{2p+2}}{(2R)^{2p+2}} \right) dx < c$$

и тем более

$$\int_{-R}^R \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} dx < c.$$

Устремляя  $R \rightarrow \infty$ , получим

$$\int \frac{|\ln \Phi(x)|}{x^{p+2}} dx < \infty.$$

**Замечание.** Пример функции  $f(z) = e^{-z^2}$  показывает, что условие четности  $p$  нельзя отбросить. Но если  $\Phi(x) = c$  при  $-\infty < x < 1$ , то, как видно из доказательства, условие (1') является необходимым при любом целом  $p$ .

Харьковский государственный университет  
им. М. Горького

Институт математики и механики  
Академии наук Армянской ССР

**Վերստի և Պելլի մի բևորեմի քննարկումը կիսահարթությունում  
կամայական ամբողջ կարգի և մասնա թիվի ֆունկցիաների համար**

Հայտնի է Վերստի և Պելլի հետևյալ թեորեմը<sup>1</sup>: Եթե  $\Phi(x)$ -ը կամայական ոչ բացասական իրական ֆունկցիա է  $L_1(-\infty, \infty)$  դասից: Որպեսզի  $H_2$  դասում գոյություն ունենա մի  $F(z)$  ֆունկցիա, այնպիսին, որ նրա մուլտիպլիկատիվը իրական սահմանների վրա համարյա աճողորեն կամրնկեն  $\Phi(x)$ -ի նեա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա (1) պայմանը:

Եթե  $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  պայմանը փոխարինենք  $\Phi(x) \in L_1$  պայմանով, իսկ  $H_2$  դասը՝ վերին կիսահարթությանում հոլոմորֆ և սահմանափակ ֆունկցիաների դասով, ապա թեորեմի հարակացությունը դարձյալ ուժի մեջ կմնա: Այդ սրույթ (1) պայմանը անհրաժեշտ է նաև այն դեպքում, երբ համապատասխան  $F(z)$  ֆունկցիայի սահմանափակության պայմանը փոխարինենք այնպիսի թույլ պայմանով՝  $|F(z)| < C \exp c_1 |z|$ :

Հարգանքով ապացուցվում է, որ եթե տեղի ունի (1) պայմանը, որտեղ  $\rho > 0$  — ամբողջ թիվ է, ապա գոյություն ունի վերին կիսահարթությանում հոլոմորֆ և  $a, b, c$  պահանջներին բավարարող ֆունկցիա: Հակադարձ թեորեմը նիշ է, եթե  $\rho$ -ն դուրս գալիս ամբողջ թիվ է:

**ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն**

<sup>1</sup> Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964.  
<sup>2</sup> К. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., 1956. <sup>3</sup> Р. Невоидович, Acta Soc. Sci. Fenn. 50, № 12 (1925).

С. Ц. Саркисян

Свойства решений систем Коши—Римана с квадратными добавками

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/1 1965)

При изучении плоского остановившегося течения несжимаемой вязкой жидкости получается система вида:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = a\omega^2 + b, \quad (1)$$

где  $\omega = u + iv$ —искомая функция,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}.$$

Заменой переменной систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \alpha \omega^2 + \beta \omega, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$ —постоянные величины.

1°. Рассмотрим систему более общего вида, чем (2). Рассматривается система вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = A\omega^2 + B\omega\bar{\omega} + C\bar{\omega}^2 + D\omega + E\bar{\omega}, \quad (3)$$

где коэффициенты  $A, B, \dots, E$ —функции переменной  $z$ , заданной в некоторой области  $G$ , и принадлежащие  $L_p(G)$ ,  $p > 2$ . Будем говорить, что  $\omega(z)$  является обобщенным решением системы (3) в окрестности точки  $z_0$ , если в некоторой окрестности  $G_0$  этой точки  $\omega$  обладает обобщенными производными в смысле Соболева<sup>(1)</sup>, которые суммируемы со степенью  $p > 1$  и удовлетворяют системе (3) почти везде в  $G_0$ . Если  $\omega(z)$  удовлетворяет системе (3) в окрестности каждой точки области  $G$ , исключая, быть может, точки некоторого дискретного относительно  $G$  множества  $G^*$ , то будем говорить, что  $\omega(z)$  является обобщенным решением системы (3) в области  $G$ . Множество  $G^*$ , которое содержит лишь изолированные точки, вообще говоря, зависит от выбора  $\omega$ . Если  $G^*$  пустое множество, то обобщенное решение  $\omega(z)$  будем называть регулярным решением системы (3) в области  $G$ . Но

так как из суммируемости обобщенных производных следует непрерывность функции в  $G$  (1), то регулярное в области  $G$  решение непрерывно в  $G$  и удовлетворяет системе (3) почти везде в  $G$ . Для решений систем (3), регулярных в  $G$ , имеют место

**Теорема 1.** Если  $A, B, C, D, E$  ограниченные в  $G$  функции и регулярное решение  $w(z)$  системы (3) в точке  $z_0 \in G$  имеет нуль бесконечного порядка, то  $w(z) \equiv 0$  в области.

**Теорема 2.** Пусть  $z_0 \in G$  является предельной точкой для нулей регулярного решения системы (3). Тогда  $w(z) \equiv 0$  в  $G$ .

2°. Приведем теперь одно интегральное представление регулярных решений системы (3) в  $G$ .

**Теорема 3.** Пусть  $A, B, C, D, E \in L_{p,12}(G)$ , где  $G$  некоторая область, и пусть  $w = w(z)$  регулярное решение системы (3) в этой области  $G$ . Тогда  $w(z)$  имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - \omega(A_0 e^{w(z)})} \cdot e^{w(z)}, \quad (4)$$

где  $\Psi(z)$  мероморфная в  $G$  функция,

$$\omega(P) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{P(t)}{t-z} dz_t, \quad (5)$$

$$A_0(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \cdot \frac{\bar{w}}{w} + C(z) \frac{\bar{w}^2}{w^2}, & \text{если } w(z) \neq 0, z \in G, \\ A(z) + B(z) + C(z), & \text{если } w(z) = 0, z \in G \end{cases}$$

$$D_0(z) = \begin{cases} D(z) + E(z) \cdot \frac{\bar{w}}{w}, & \text{если } w(z) \neq 0, z \in G \\ D(z) + E(z), & \text{если } w(z) = 0, z \in G. \end{cases}$$

Верна и обратная

**Теорема.** Всякая функция вида (4), где  $\Psi(z)$  мероморфна в  $G$ , а  $\omega(P)$  имеет вид (5), является регулярным решением системы (3).

В частности, если  $B \equiv C \equiv E \equiv 0$ , то правая часть (4) зависит только от  $A(z)$  и  $D(z)$ .

Обобщенное решение системы (3) в области  $G$  является регулярным решением в  $G - G^*$ , где  $G^*$  дискретное относительно  $G$  множество. Следовательно, обобщенное решение системы (3) в области  $G$  имеет вид (4), где  $\Psi(z)$  в точках  $G^*$  имеет любые изолированные особенности.

Если положить  $D \equiv E \equiv 0$ , то формула (4) принимает вид

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - \omega(A_0)}, \quad (6)$$

где  $\Psi(z)$  аналитическая в  $G$  функция, а  $\omega(A_0)$  функция вида (5), т. е. представление обобщенных решений системы вида

$$\frac{d\omega}{dz} = A\omega^2 + B\omega\bar{\omega} + C\bar{\omega}^2$$

в области  $G$ , полученное в работе (2).

Если положить  $A \equiv B \equiv C \equiv 0$ , то формула (4) принимает вид

$$\omega(z) = \varphi(z) \cdot e^{n(D_0)}, \quad (7)$$

где  $\varphi(z)$  аналитическая в  $G$  функция, а  $\omega(D_0)$  функция вида (5). Формула (7) является интегральным представлением первого рода обобщенных аналитических функций, приведенных в работе (2).

3. Здесь мы приведем некоторые свойства решений систем (3).

Определение. Точка  $z$  расширенной плоскости  $z = x + iy$ , в окрестности  $0 < |z - z_0| < r$  которой обобщенное решение системы (3)  $\omega(z)$  непрерывно, называется устранимой особой точкой, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$  существует и конечен, полюсом, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$  существует и равен бесконечности, существенно особой точкой, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$  не существует.

Теорема 4. (Аналог теоремы Сохоцкого).

Если  $z_0$  — существенно особая точка обобщенного решения  $\omega(z)$  системы (3) в  $G$ , то для любого комплексного числа  $A$  существует последовательность точек  $z_k \rightarrow z_0$  такая, что  $\lim_{z_k \rightarrow z_0} \omega(z) = A$ .

Теорема 5. (Аналог теоремы Лиувилля).

Если  $\omega(z)$  регулярное в открытой плоскости  $E$  решение системы (3) и  $\left| \frac{1}{\omega} \right|$  ограничена на всей (открытой) плоскости, то  $\omega(z)$  имеет вид

$$\omega(z) = \frac{1}{C - \omega(A_0 e^{n(D_0)})} \cdot e^{n(D_0)}, \quad (8)$$

где  $C = \text{const}$ ,  $\omega(P)$  функция вида (5).

Функции вида (8) можно назвать обобщенными постоянными.

Теорема 5. Пусть  $\omega(z)$  регулярное, не равное тождественно нулю решение системы (3) в области  $G$ . Пусть  $\omega(z_0) = 0$  в некоторой точке  $z_0 \in G$ , тогда в окрестности этой точки

$$\omega(z) = (z - z_0)^n \cdot \bar{\omega}(z), \quad (9)$$

где  $n$  — некоторое целое положительное число, а  $\bar{\omega}(z)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $z_0$ , где она не обращается в нуль. Число  $n$  в (9) будем называть критичностью нуля  $z_0$ .

Теорема 6. (Аналог принципа аргумента).

Пусть  $\omega(z)$  — регулярное решение системы (3) в области  $G$ , которая удовлетворяет следующим условиям: 1)  $\omega(z)$  — непрерывна в  $G + \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница области  $G$  и 2)  $\omega(z) \neq 0$  всюду на  $\Gamma$ . В та-

ком случае число нулей внутри области  $G$  определяется по формуле

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \bar{w}(z), \quad (10)$$

причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

В частности, если  $B \equiv C \equiv E \equiv 0$ ,  $A, D$  — голоморфные в  $G$  функции, то (4) принимает вид

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - A(z) e^{D(z)z}} \cdot e^{D(z)z},$$

где  $\Psi(z)$  — аналитическая функция в  $G$ .

Ереванский политехнический институт

Ս. Ն. ՄԱՐԿՈՅԻՆ

Ֆունկցիոնալիս առ մասերով կասու-Ռիմանի սխեմի լուծումների հասկարչումները

Դիտարկվում են հետևյալ տիպի սխեմաները

$$\frac{\partial w}{\partial z} = Aw^2 + Bw\bar{w} + C\bar{w}^2 + Dw + E\bar{w}$$

$A, B, C, D, E \in L_p(G)$ ,  $p > 2$  դեպքում են մի շարք կլասիկ բերումները (Ստրոնգու, Հրոֆիլի, արգումենտի սկզբունքի և այլն) ընդհանրացումները և անալոզները այդ սխեմաների լուծումների դասում:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԿԱՆՆԻՐՅՈՒՆ

<sup>1</sup> С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, Физматгиз 1950. <sup>2</sup> С. Ц. Саркисян, ДАН Арм ССР, т. 34, № 3, стр. 141—146 (1962). <sup>3</sup> И. И. Векуа, Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1950.



где  $\operatorname{tg} \beta$  — некоторое вещественное число. Считаем, что  $H_1^* = H_1$ ,  $H_2^{(-)} = H_2$ .

В дальнейшем через  $S_1$  и  $S_2$  обозначаются, соответственно, банаховы пространства ядерных операторов и операторов Гильберта—Шмидта.  $l, l_1$  и  $l, l_2$  нормы в  $S_1$  и  $S_2$ ,  $V$  — оператор умножения на  $q_2(x)$ :  $Vy = q_2(x)y$ .

Сначала покажем, что в любой общей точке регулярности  $z$

$$(H_2^{(l)} - zI)^{-1} - (H_1^{(l)} - zI)^{-1} \in S_1, \quad 0 < l < +\infty.$$

Легко видеть, что для этого достаточно, чтобы  $R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_1$ , где  $R_{z,l} = (H_1^{(l)} - zI)^{-1}$ . Так как  $\|R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_1 \leq \|V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_2^2$ , то остается показать, что  $V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_2$ . Отметим, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что  $D(V) \supseteq D(H_1)$ , но  $D(V^{\frac{1}{2}}) \supseteq D(H_1^{\frac{1}{2}})$  и, следовательно, сумма  $H_2 = H_1 + V$  понимается в смысле форм (см. (2)).

Пусть

$$-\varphi'' + q_1(x)\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad h \neq \infty$$

$$-\varphi'' + q_1(x)\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1, \quad h = \infty.$$

Тогда можно показать, что

$$\|V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \int_0^l q_2(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(x, \lambda)|^2}{|\lambda - z|^2} d\sigma_1^{(l)}(\lambda),$$

где  $\sigma_1^{(l)}$  — спектральная функция оператора  $H_1^{(l)}$ . Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1^{(l)}(\lambda)}{|\lambda - z|} < +\infty \quad \text{при } h \neq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1^{(l)}(\lambda)}{|\lambda - z|^2} < +\infty \quad \text{при } h = \infty.$$

Так как  $|\varphi(x, \lambda)| \leq \operatorname{const}$ ,  $0 \leq x \leq b$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$  при  $h = \infty$  и  $\varphi(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$  при  $h = \infty$ , то  $V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_2$ . Более того,  $\|V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_2$  ограничен при фиксированном  $z$  и при  $0 < l_0 \leq l < \infty$ . Таким образом,

$$\|R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_1 \leq C(z), \quad 0 < l_0 \leq l < \infty \quad (1)$$

Пусть  $q_2(x) \geq 0$ . Обозначим через  $\lambda_n^{(l)}$  и  $\mu_n^{(l)}$  собственные числа операторов  $H_1^{(l)}$  и  $H_2^{(l)}$ , занумерованные в порядке возрастания (операторы

$H_1$  и  $H_2$  полуограничены).  $\varphi_{n,l}^{(1)}$  и  $\varphi_{n,l}^{(2)}$  — соответствующие собственные функции. Можно показать, что

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) < \int_{-\infty}^{\infty} \xi_l(t) dt < \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}), \quad l < +\infty \quad (2)$$

Если  $A$  и  $C = A + B$  полуограниченные операторы,  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  — соответствующие собственные числа, занумерованные в порядке возрастания,  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  — соответствующие нормированные собственные элементы, то в работе (2) доказано, что

$$\sum_{k=1}^n (B\psi_k, \psi_k) < \sum_{k=1}^n (\mu_k - \lambda_k) < \sum_{k=1}^n (B\varphi_k, \varphi_k). \quad (3)$$

Применим это неравенство к операторам  $H_1^{(l)}$  и  $H_2^{(l)}$ . Получим

$$\sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) < \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \int_0^1 q_2(x) \varphi_{n,l}^2(x) dx,$$

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) > \sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} \int_0^1 q_2(x) \psi_{n,l}^2(x) dx.$$

Из (2) следует

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} \int_0^1 q_2(x) \psi_{n,l}^2(x) dx < \int_{-\infty}^{\infty} \xi_l(t) dt < \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \int_0^1 q_2(x) \varphi_{n,l}^2(x) dx. \quad (4)$$

Имеем

$$\sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \varphi_{n,l}^2(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi^2(x, \lambda) d\tau_1^{(l)}(\lambda) = \Theta_1^{(l)}(x, x, \lambda),$$

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} \psi_{n,l}^2(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \psi^2(x, \lambda) d\tau_2^{(l)}(\lambda) = \Theta_2^{(l)}(x, x, \lambda).$$

Известно, что  $\tau_k^{(l)}(\lambda) \rightarrow \tau_k(\lambda)$  при  $l \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2$ ) во всех точках непрерывности  $\tau_k(\lambda)$ . Следовательно, почти всюду

$$H_1^{(l)}(x, x, \lambda) \rightarrow \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi^2(x, t) d\tau_1(t) = H_1(x, x, \lambda),$$

$$H_2^{(l)}(x, x, \lambda) \rightarrow \int_{-\infty}^{\lambda} \psi^2(x, t) d\tau_2(t) = H_2(x, x, \lambda).$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} \varepsilon_l(t) dt = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt. \quad (5)$$

Согласно формуле М. Г. Крейна (1.4) имеем:

$$\operatorname{Sp} |(H_2^{(l)} - zI)^{-1} - (H_1^{(l)} - zI)^{-1}| = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{(t-z)^2} dt,$$

где  $0 < l < \infty$ , а  $z$  — любая общая точка регулярности для  $H_1^{(l)}$  и  $H_2^{(l)}$ .  
Можно показать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{(t-z)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t)}{(t-z)^2} dt. \quad (6)$$

Из работы (2) следует, что

$$\ln \det (I + R_{a,l}^{\frac{1}{2}} V R_{a,l}^{\frac{1}{2}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{t-z} dt.$$

Пусть  $H_1^{(l)} > (a + \varepsilon)I$  при  $0 < l_0 < l < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда (см. (2))

$$\ln \det (I + R_{a,l}^{\frac{1}{2}} V R_{a,l}^{\frac{1}{2}}) < |R_{a,l}^{\frac{1}{2}} V R_{a,l}^{\frac{1}{2}}|.$$

Из этого неравенства вместе с (1) и (6) следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{t-z} dt = \operatorname{Const} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t)}{t-z} dt.$$

Отсюда уже нетрудно получить (5).

Переходя к пределу в неравенстве (4), можно получить

$$\int_0^{\lambda} q_2(x) \Theta_2(x, x, \lambda) dx < \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt < \int_0^{\lambda} q_2(x) \Theta_1(x, x, \lambda) dx. \quad (7)$$

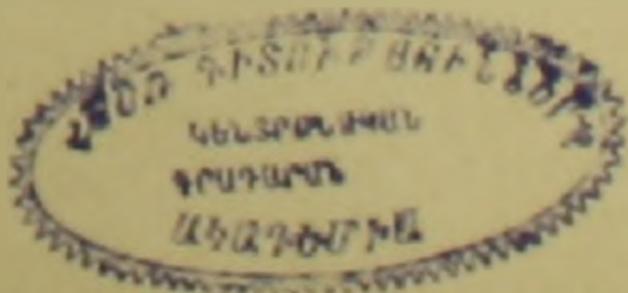
Б. М. Левитан ((6), теорема 4.1\*) установил, что равномерно по  $x$  в любом конечном интервале при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\Theta_k(x, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{2x} + o(1) \text{ при } \lambda \neq \infty, (k = 1, 2)$$

$$\Theta_k(x, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} - \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{2x} + o(1) \text{ при } \lambda = \infty, (k = 1, 2).$$

Следовательно, из (7) получаем

\* В формулировке этой теоремы содержится вычислительная неточность



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_2(x) \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x} dx + o(1) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt - \\ & - \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_2(x) \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x} dx + o(1) \text{ при } h \neq \infty \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_2(x) \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x} dx + o(1) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt - \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \leq - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_2(x) \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x} dx + o(1) \text{ при } h = \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt - \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \rightarrow \frac{q_2(0)}{4} \quad (h \neq \infty), \\ & \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt - \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \rightarrow -\frac{q_2(0)}{4} \quad (h = \infty). \end{aligned}$$

Эти равенства равносильны теореме 1.

Таким же образом можно поступить в случае  $q_2(x) < 0$ . Если  $q_2(x)$  — любое, то  $q_2(x) = q_2^+(x) - q_2^-(x)$ , где  $q_2^+(x) \geq 0$ ,  $q_2^-(x) \geq 0$ . Отсюда легко следует теорема 1 при любом  $q_2(x)$ . Эта теорема в случае  $q_2(x) \equiv 0$  и  $h = \infty$  доказана Л. Д. Фаддеевым<sup>(7)</sup>, причем

вместо финитности от  $q_2(x)$  требовалось только  $\int_0^{\infty} x |q_2(x)| dx < +\infty$ .

Она без строгого вывода была указана также Р. Г. Ньютоном<sup>(8)</sup>. В случае, когда полуограниченный оператор  $H_1$  имеет дискретный спектр, эта теорема совпадает с результатом М. Г. Гасымова<sup>(9)</sup>.

2. Здесь мы рассмотрим два сингулярных оператора Штурма—Лиувилля, которые задаются одним и тем же дифференциальным выражением, но разными условиями в нуле. В том случае, когда эти операторы имеют дискретный спектр, М. Г. Гасымов и Б. М. Левитан<sup>(9)</sup> получили формулу для суммы разностей собственных значений этих операторов. Здесь эта формула обобщается на любые операторы Штурма—Лиувилля (не обязательно с дискретным спектром).

Пусть операторы  $H_{h_1}$  и  $H_{h_2}$  задаются равенствами:

$$H_{h_1}y = -y'' + q(x)y, \quad y'(0) - h_1y(0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$H_{h_2}y = -y'' + q(x)y, \quad y'(0) - h_2y(0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

$q(x)$  — интегрируемая вещественная функция в любом конечном интервале, причем для простоты изложения мы считаем, что имеется случай точки Вейла. Случай круга Вейла совершенно аналогичен. Пусть оператор  $H_h$  полуограничен. Так как резольвенты операторов  $H_{h_2}$  и  $H_{h_1}$  отличаются на одномерный оператор, то  $H_{h_2}$  тоже полуограничен и имеет смысл  $\xi(\lambda) = \xi(\lambda, H_{h_2}, H_{h_1})$ , причем можно считать, что  $\xi(\lambda) \neq 0$  левее спектров  $H_{h_2}$  и  $H_{h_1}$ . Справедлива

Теорема 2. При любой функции  $q(x)$ , порождающей полуограниченные операторы  $H_{h_2}$  и  $H_{h_1}$ ,

$$\int_{-\infty}^0 \xi(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} \left( \xi(\lambda) - \frac{1}{\pi} (h_2 - h_1) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) d\lambda = -\frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2).$$

Наметим доказательство.

Как и прежде, рассмотрим в  $L_2(0, l)$  операторы  $H_{h_2}^{(l)}$  и  $H_{h_1}^{(l)}$  и обозначим соответствующие собственные числа и нормированные собственные функции через  $\lambda_{n,l}$ ,  $\mu_{n,l}$ ,  $\varphi_{n,l}^{(x)}$ ,  $\psi_{n,l}^{(x)}$ . Для определенности предположим, что  $h_2 > h_1$ . Тогда

$$H_{h_2}^{(l)} > H_{h_1}^{(l)} \text{ и } \mu_{n,l} > \lambda_{n,l}.$$

Из неравенства (10) работы (9) и неравенства (2) следует, что

$$\begin{aligned} (h_2 - h_1) \sum_{\mu_{n,l} < \lambda} \varphi_{n,l}^2(0) &< \sum_{\mu_{n,l} < \lambda} (\mu_{n,l} - \lambda_{n,l}) < \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t) dt < \sum_{\lambda_{n,l} < \lambda} (\mu_{n,l} - \lambda_{n,l}) < \\ &< (h_2 - h_1) \sum_{\lambda_{n,l} < \lambda} \varphi_{n,l}^2(0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(h_2 - h_1) \sigma_{h_2}^{(l)}(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t) dt < (h_2 - h_1) \sigma_{h_1}^{(l)}(\lambda), \quad (8)$$

где  $\sigma_{h_2}^{(l)}(\lambda)$  и  $\sigma_{h_1}^{(l)}(\cdot)$  — спектральные функции операторов  $H_{h_2}^{(l)}$  и  $H_{h_1}^{(l)}$ . Пусть  $A_l = (H_{h_2}^{(l)} + al)^{-1}$  и  $B_l = (H_{h_1}^{(l)} + al)^{-1}$ , где  $a > 0$ , такое, что  $H_{h_2}^{(l)} > (-a + \epsilon)I$ ,  $H_{h_1}^{(l)} \geq (-a + \epsilon)I$ . Можно доказать, что в ядерной норме

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (B_l - A_l) (A_l - zI)^{-1} = (B - A) (A - zI)^{-1}. \quad (9)$$

Обозначим  $\eta_l(t) = \xi_l(\lambda)$ , где  $t = \frac{1}{\lambda + a}$ .

Известно (2), что при невещественных  $z$

$$\int_0^1 \frac{\eta_l(t)}{t - z} dt = \text{le det}(I + (B_l - A_l) (A_l - zI)^{-1}).$$

Из (9) следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta_l(t)}{t-z} dt \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\eta(t)}{t-z} dt.$$

Отсюда, как и в п. 1, можно получить, что

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt.$$

Перейдя к пределу в (8) при  $l \rightarrow \infty$ , получим

$$(h_2 - h_1) \sigma_{h_1}(\lambda) < \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t) dt \leq (h_2 - h_1) \sigma_{h_1}(\lambda).$$

Отсюда аналогично тому, что в работе (9), можно получить доказательство теоремы 2.

3. Теперь рассмотрим тот случай, когда  $h_1 = h$ ,  $h_2 = \infty$ .

Имеет место

**Теорема 3.** Если  $q(x)$  финитная функция и имеет производную в нуле, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \xi(\lambda, H_h, H_-) d\lambda + \int_0^{\infty} \left( \xi(\lambda, H_h, H_-) - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) d\lambda = \\ = \frac{q(0)}{2} + \frac{1}{2} h^2. \end{aligned} \quad (10)$$

**Доказательство.**

Вместе с операторами  $H_h$  и  $H_-$  рассмотрим также операторы  $H_h^{(0)}$  и  $H_-^{(0)}$ , которые соответствуют случаю  $q(x) = 0$ .

Легко проверить, что

$$\xi(\lambda, H_0^{(0)}, H_-^{(0)}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Так как

$$\xi(\lambda, H_0, H_-) = \xi(\lambda, H_0, H_0^{(0)}) + \xi(\lambda, H_0^{(0)}, H_-^{(0)}) + \xi(\lambda, H_-^{(0)}, H_-),$$

то из теоремы 1 следует, что при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, H_0, H_-) dt = \frac{1}{2} \lambda - \frac{q(0)}{2} + o(1).$$

Отсюда, с помощью теоремы 2 и равенства  $\xi(\lambda, H_h, H_-) = \xi(\lambda, H_0, H_-) - \xi(\lambda, H_0, H_h)$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, H_h, H_-) dt = \frac{1}{2} \lambda - \frac{q(0)}{2} - \frac{2}{\pi} h \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} h^2 + o(1) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty$$

Отметим, что в формуле (10) участвует  $q(0)$ , в то время как формула в теореме 2 от  $q(x)$  не зависит.

В заключение автор выражает свою благодарность члену-корреспонденту АН УССР М. Г. Крейну за постановку задач и советы.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ՅԱԿՈՅԱՆ

Շտուգում-լիքուղիի օպերատորների համար հեռուի բաժանի մասին

$L_1(0, \infty)$  տարածության մեջ դիտարկվում են  $H_1$  և  $H_2$  օպերատորները՝

$$H_1 y = -y'' + q_1(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0$$

$$H_2 y = -y'' + q_1(x)y + q_2(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0$$

որտեղ  $q_2(x)$ -ը ֆինիտ ֆունկցիա է:

Նշանակենք  $\xi(\lambda)$ -ով  $H_1$  և  $H_2$  օպերատորների սպեկտրայի սեղանաբաժի ֆունկցիան (տե՛ս (1))։ Ապացուցվում է հետևյալ

թեորեմը

Երև  $q_2(x)$ - ունի ածանցյալ զրո կետում,

այսինքն՝

$$\int_{-\infty}^0 \xi(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} \left( \xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \right) d\lambda = \frac{q_2(0)}{4}, \quad \text{երբ } h \neq \infty$$

$$\int_{-\infty}^0 \xi(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} \left( \xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} q_2(x) dx \right) d\lambda = -\frac{q_2(0)}{4}, \quad \text{երբ } h = \infty$$

Ապացուցվում են նաև բանաձևեր նաև այն  $H_1$  և  $H_2$  օպերատորների համար, որոնք արվում են միևնույն բանաձևերով, բայց տարբեր եզրային պայմաններով:

ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> М. Г. Крейн, Матем. сборник, 33 (75), 3, (1953). <sup>2</sup> В. А. Яврян, ДАН АрмССР, т. 38, № 1 (1964). <sup>3</sup> М. Г. Гасымов, ДАН СССР, т. 150, № 6 (1963). <sup>4</sup> М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 144, № 2 (1962). <sup>5</sup> И. Ц. Голберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве. <sup>6</sup> Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 19 (1955). <sup>7</sup> Л. Д. Фарджев, ДАН СССР, т. 115, № 5 (1957). <sup>8</sup> R. G. Newton, Phys. Rev., vol. 101 № 5 (1956). <sup>9</sup> И. Г. Гасымов и Б. М. Левитан, ДАН СССР, т. 151, № 5 (1956).

Л. А. Мовсисян

Колебания балки с периодически изменяющейся длиной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 17/II 1965)

1. Рассматривается балка с постоянной жесткостью на изгиб, которая приводится в движение вследствие начального отклонения и начальной скорости, сообщаемых ей в момент  $t = 0$ . Принимается, что одна из опор балки совершает гармонические колебания в продольном направлении, а другая — неподвижна.

Исследуется движение части балки, находящейся между опорами, в предположение, что амплитуда продольно движущейся опоры мала по сравнению с первоначальной длиной балки.

Уравнение движения элемента балки и начальные условия следующие <sup>(1)</sup>

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x), \tag{1.2}$$

где обозначения общепринятые.

Вместо обычных краевых условий будем иметь\*

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = A \sin \alpha t \text{ и } x = l, \tag{1.3}$$

где  $A$  — амплитуда,  $\alpha$  — частота колебаний продольно движущейся опоры.

Преобразуем уравнения (1.1) — (1.3), введя безразмерные координаты

$$y = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{\alpha}{l} t. \tag{1.4}$$

Уравнение движения при этом примет вид

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \tag{1.5}$$

\* Для определенности здесь рассмотрен случай шарнирного опирания краев, другие случаи получаются совершенно аналогично.

где  $\lambda = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{J}{F}}$  — обратная величина гибкости балки.

Перейдем к новым переменным

$$z = \frac{y-1}{\mu \sin \beta \tau - 1}, \quad \theta = \tau, \quad (1.6)$$

где  $\mu = \frac{A}{l}, \quad \beta = \frac{al}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$

Согласно вышепринятому предположению  $\mu \ll 1$ .

Учитывая (1.4) и (1.6), вместо (1.2), (1.3) и (1.5) будем иметь

$$w(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial w(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a} \varphi(z) - \mu \beta z \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z} \quad (1.7)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1. \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (\mu \sin \theta - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu^2 \beta^2 z^2 \cos^2 \beta \theta (\mu \sin \beta \theta - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \\ - 2(\mu \sin \beta \tau - 1)^3 \mu \beta z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} + \mu \beta^2 z (2\mu \cos^2 \beta \theta - \\ - \sin \beta \theta + \mu \sin^2 \beta \theta) (\mu \sin \beta \theta - 1)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Уравнение (1.9) с условиями (1.7) и (1.8) решается пользуясь предположением относительно малости  $\mu$ .

Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра  $\mu$

$$w(z, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i w_i(z, \theta). \quad (2.1)$$

Произведя обычные процедуры, вместо (1.9) будем иметь

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = 4 \sin \beta \theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - 2\beta z \cos \beta \theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \theta} + \beta^2 z \sin \beta \theta \frac{\partial w_0}{\partial z}. \quad (2.2)$$

.....

Краевые и начальные условия для системы (2.2) будут

$$w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1, \quad (2.3)$$

$$w_0(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a} \varphi(z),$$

$$w_i(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_i(z, 0)}{\partial \theta} = -\beta z \frac{\partial w_{i-1}(z, 0)}{\partial z} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Систему (2.2) с условиями (2.3) и (2.4) можно решать последовательно. Для нулевого приближения имеем

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = 1, \quad (2.6)$$

$$w_0(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a} \varphi(z). \quad (2.7)$$

Решение (2.5) с условиями (2.6) и (2.7) будет

$$w_0(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \omega_n \theta + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \theta \right] \sin n\pi z, \quad (2.8)$$

где  $\omega_n = n^2 \pi^2 \lambda$ ,

$$a_n = 2 \int_0^1 f(z) \sin n\pi z dz \quad \text{и} \quad b_n = \frac{2l}{a} \int_0^1 \varphi(z) \sin n\pi z dz. \quad (2.9)$$

Из (2.2)–(2.4) и (2.8) для первого приближения имеем

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -4\omega_n \sin \beta \theta (b_n \sin \omega_n \theta + a_n \omega_n \cos \omega_n \theta) \sin n\pi z - \right. \\ & \left. - \beta n \pi \left[ 2(b_n \cos \omega_n \theta - a_n \omega_n \sin \omega_n \theta) \cdot \cos \beta \theta + \beta \left( \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \theta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + a_n \cos \omega_n \theta \right) \sin \beta \theta \right] z \cos n\pi z \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = 1. \quad (2.11)$$

$$w_1(z, 0) = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial \theta} = -\beta \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n z \cos n\pi z.$$

Ищем решение (2.10) в виде

$$w_1(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\theta) \sin m\pi z, \quad (2.13)$$

которое уже удовлетворяет условиям (2.11).

Подставляя (2.13) в (2.10), для неизвестных  $F_m(\theta)$  получим

$$\begin{aligned}
F'_m + \omega_m^2 F_m = & - \left( 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \sin \beta \theta \left( a_m \cos \omega_m \theta + \right. \\
& \left. + \frac{b_m}{\omega_m} \sin \omega_m \theta \right) + \beta \cos \beta \theta (b_m \cos \omega_m \theta - a_m \omega_m \sin \omega_m \theta) - \\
& - 2\beta \sum_{n(m+n)}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} \left[ - 2 \cos \beta \theta (b_n \cos \omega_n \theta - a_n \omega_n \sin \omega_n \theta) + \right. \\
& \left. + \beta \sin \beta \theta \left( a_n \cos \omega_n \theta + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \theta \right) \right]. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Решение (2.14) будет

$$\begin{aligned}
F_m(\theta) = & C_m^{(1)} \sin \omega_m \theta + C_m^{(2)} \cos \omega_m \theta - M_m \cos (\beta + \omega_m) \theta + \\
& + P_m \sin (\beta + \omega_m) \theta + N_m \cos (\beta - \omega_m) \theta + Q_m \sin (\beta - \omega_m) \theta - \\
& - 2\beta \sum_{n=1(n \neq m)}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} [- M_n \cos (\beta + \omega_n) \theta + \\
& + P_n \sin (\beta + \omega_n) \theta - N_n \cos (\beta - \omega_n) \theta + Q_n \sin (\beta - \omega_n) \theta], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\text{где } M_m = \frac{b_m \Omega_m^{(1)}}{4\beta \omega_m (\beta + 2\omega_m)}; \quad P_m = \frac{a_m \Omega_m^{(1)}}{4\beta (\beta + 2\omega_m)};$$

$$N_m = \frac{b_m \Omega_m^{(2)}}{4\beta \omega_m (-\beta + 2\omega_m)}; \quad Q_m = \frac{a_m \Omega_m^{(2)}}{4\beta (2\omega_m - \beta)};$$

$$M_n = \frac{b_n (2\omega_n + \beta)}{2\omega_n \Omega_m^{(3)}}; \quad P_n = \frac{a_n (\beta + 2\omega_n)}{2\Omega_m^{(3)}};$$

$$N_n = \frac{b_n (2\omega_n - \beta)}{2\omega_n \Omega_m^{(4)}}; \quad Q_n = \frac{a_n (\beta - 2\omega_n)}{2\Omega_m^{(4)}}; \quad (2.16)$$

$$\Omega_m^{(1)} = 2\beta \omega_m + \beta^2 + 8\omega_m^2; \quad \Omega_m^{(2)} = 2\beta \omega_m - \beta^2 - 8\omega_m^2;$$

$$\Omega_m^{(3)} = \omega_m^2 - (\beta + \omega_n)^2; \quad \Omega_m^{(4)} = \omega_m^2 - (\beta - \omega_n)^2.$$

Постоянные интегрирования  $C_m^{(1)}$  и  $C_m^{(2)}$  найдем из условий (2.12),

которые дают

$$C_m^{(2)} - M_m + N_m + 2\beta \sum_{n=1(n \neq m)}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} (M_n + N_n) = 0;$$

$$\omega_m C_m^{(1)} + (\beta + \omega_m) P_m + (\beta - \omega_m) Q_m - 2\beta \sum_{n=1(n \neq m)}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} .$$

$$[(\beta + \omega_n) P_n + (\beta - \omega_n) Q_n] = \frac{\beta a_m}{2} + 2\beta \sum_{n=1(n \neq m)}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mna_n}{m^2 - n^2} .$$

(2.17)

Довольствуясь первым приближением, для прогиба балки будем иметь

$$w(z, \theta) \approx w_0(z, \theta) + \mu w_1(z, \theta), \quad (2.18)$$

где значения  $w_0(z, \theta)$  и  $w_1(z, \theta)$  нужно брать из (2.8) и (2.13).

Из выражения (2.18), которое может достаточно хорошо описывать движение балки для случая  $\mu \ll 1$ , видно, что прогиб балки при некоторых значениях  $\beta$  (см. (2.16) формулы  $\Omega_m^{(3)}$  и  $\Omega_m^{(4)}$ ) может неограниченно возрастать. Такое поведение балки по характеру похоже на ее поведение при параметрическом резонансе. Как видно из (2.16), значения  $\beta$ , при которых возникнет резонанс, следующие:  $\beta = \omega_m \pm \omega_n$  или

$$\alpha = \frac{\pi^2 (m^2 \pm n^2)}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \cdot \frac{J}{F}}. \quad (2.19)$$

Из (2.19) при  $m = n = 1$  получается значение частоты возникновения главного параметрического резонанса <sup>(2)</sup>.

Институт математики и  
механики Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

### Պերիոդիկ փոփոխվող երկարության հեծանի ատամնավոր

Դիտարկվում է հաստատուն կոշտութուն ունեցող հեծանի տատանումները, երբ նրա մի եզրն անշարժ է, իսկ մյուս եզրը կատարում է հարմոնիկ տատանումներ երկայնական ուղղությամբ:

Ենթադրելով, որ եզրի երկայնական տատանման ամպլիտուդան փոքր է հեծանի սկզբնական երկարությունից, խնդրի լուծումը ներկայացվում է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (2.1):

Ստացված է սկզբնական առաջանալու (2.19) պայմանը:

### ЛИТЕРАТУРА — Փ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> А. П. Филиппов, Колебания упругих систем, Изд. АН УССР, Киев, 1956.  
<sup>2</sup> В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М., 1956.

А. Д. Газазян и В. О. Чалтыкян

Ионизация атома водорода под действием интенсивного  
 электромагнитного излучения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 21/1 1965)

Ионизация атомов под действием сильного поля электромагнитного излучения представляет определенный теоретический и экспериментальный интерес в связи с появлением мощных источников электромагнитного излучения. В литературе имеется много работ, посвященных этому вопросу (1-4).

В данной работе, следуя идее работы (2)\*, мы рассмотрим ионизацию атома водорода в поле интенсивного электромагнитного излучения с круговой поляризацией с поглощением нескольких квантов света. Расчеты проведены для атома водорода, несмотря на то, что они верны и для водородоподобных атомов.

Время пролета электрона через барьер, ширина которого

$$l \sim \frac{E}{eE}$$

где  $E$  — энергия электрона,  $E$  — напряженность электрического поля, равно

$$l \sim \frac{l}{v} = \frac{E}{eEv} = \frac{mv}{2eE}$$

где  $v$  — скорость электрона. Отсюда ясно, что если частота внешнего поля намного меньше чем  $\frac{2eE}{mv}$ , т. е.

$$\frac{2eE}{mv\omega} \gg 1, \tag{1}$$

то процесс имеет характер тунельного эффекта в постоянном электрическом поле, и вероятность его может быть вычислена по формуле

\* Мы благодарны Л. В. Келдышу, любезно ознакомившему нас со своей работой до ее опубликования.

$$\omega = \frac{4m^3 e^0}{E h^3} \exp\left(-\frac{2m^2 e^3}{3h^4 E}\right)$$

(см., например, (3)).

При обратном неравенстве, т. е.

$$\frac{2eE}{mv\omega} \ll 1, \quad (2)$$

процесс носит многофотонный характер. Как показано в работе (2), природа этих двух эффектов одинакова. Обозначая  $\gamma = \frac{eE}{m\omega c}$  и

$\bar{p} = \frac{v}{c}$ , условие (2) можно переписать в виде

$$\frac{2\gamma}{\bar{p}} \ll 1. \quad (2')$$

Рассмотрим уравнение Шредингера для электрона в переменном электрическом поле

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\vec{E}(t) \vec{r} \right) \psi. \quad (3)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(t) \vec{r} - \frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2m} \vec{q}(t)^2 dt}, \quad (4)$$

где  $V$  — нормировочный объем

$$\vec{q}(t) = \vec{p} - \int e\vec{E}(t) dt. \quad (5)$$

(В работе (2) выписана волновая функция для частного случая линейной поляризации внешнего поля).

Среднее значение по времени квадрата  $\vec{q}(t)$  представляет собой квадрат „среднего эффективного“ импульса  $p_{эфф}$  электрона в электромагнитном поле (см. (11))

$$\overline{\vec{q}(t)^2} = p_{эфф}^2. \quad (6)$$

Вычислим теперь вероятность перехода электрона из основного состояния в состояние, описываемое волновой функцией (4), в дипольном приближении. Отметим, что эффект электрического поля учитывается в выражении для волновой функции свободного состояния (4), т. е. в ускорении свободного электрона внешним полем.

Матричный элемент перехода непосредственно с основного состояния в сплошной спектр имеет вид:

$$M_{f,i} = -\frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} V_{f,i}(t) e^{-\frac{i}{h} E_0 t} dt. \quad (6)$$

Здесь  $E_0$  — энергия электрона атома водорода в основном состоянии, а

$$V_{f,i}(t) = \int \psi_f^* e \vec{E}(t) \vec{r} \psi_i d\vec{r}, \quad (7)$$

где  $\psi_i$  — задается выражением (4) и (5), а

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}},$$

$r_0 = \frac{h^2}{m e^2} = 0,529 \cdot 10^{-8}$  см — радиус первой боровской орбиты атома водорода.

После вычисления интеграла (7) получим

$$V_{f,i}(t) = -32\pi i h^5 \frac{1}{V V} \frac{1}{V \pi r_0^3} \frac{1}{r_0} \frac{e \vec{E}(t) \vec{q}(t)}{\left[ \vec{q}(t)^2 + \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 \right]^{3/2}} e^{\frac{i}{h} \int_{-\infty}^t \frac{1}{2m} \vec{q}(t)^2 dt} \quad (8)$$

Теперь рассмотрим случай круговой поляризации электрического поля, вектор поляризации которого вращается в плоскости (x, y):

$$\vec{E}(t) = (E \cos \omega t, E \sin \omega t, 0), \quad (9)$$

тогда

$$V_{f,i}(t) = -32\pi i h^5 \frac{1}{V V} \frac{1}{V \pi r_0^3} \frac{1}{r_0} \frac{e E p \sin \vartheta \cos(\omega t - \Phi)}{\left[ p_{\vartheta\Phi}^2 - 2 \frac{e E}{\omega} \sin \vartheta \sin(\omega t - \Phi) + \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 \right]^{3/2}} \times e^{\frac{i}{h} \frac{p_{\vartheta\Phi}^2}{2m} t + \frac{i}{h} \frac{e E p \sin \vartheta \cos(\omega t - \Phi)}{m \omega}}, \quad (10)$$

где  $\vartheta$  и  $\Phi$  сферические углы вектора импульса электрона  $\vec{p}$ , а

$$p_{\vartheta\Phi}^2 = \overline{q(t)^2} = p^2 \left( 1 + \frac{v^2}{\beta^2} \right). \quad (11)$$

При выполнении условия (2') отсюда следует, что

$$p_{\vartheta\Phi} \approx p \quad (12)$$

и, кроме этого, мы можем пренебречь зависимостью от времени в предэкспоненциальном множителе выражения (10). Тогда, разлагая экспоненту по функциям Бесселя

$$e^{ix \cos(\omega t - \Phi)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(x) e^{is\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right)} e^{-is\omega t}$$

и используя следующее соотношение

$$J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x) = 2J'_s(x),$$

мы приходим к следующему выражению для  $V_{f,i}(t)$

$$V_{f,i}(t) = -32\pi h^5 \frac{1}{V\sqrt{V}} \frac{1}{V\sqrt{\pi r_0^3}} \frac{1}{r_0} \frac{eE\rho \sin \vartheta}{\left[p^2 + \left(\frac{h}{r_0}\right)^2\right]^3} \times \\ \times \sum_{s=-\infty}^{\infty} J'_s(x) e^{is\frac{\pi}{2}} e^{is\Phi} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{p^2}{2m} - sh\omega\right)t}, \quad (13)$$

здесь  $x = \gamma \frac{p\rho}{h\omega} \sin \vartheta$ .

Подставляя (13) в выражение (6) и производя интегрирование по времени, окончательно получим для матричного элемента перехода следующее

$$M_{f,i} = \sum_{s=0}^{\infty} M_{f,i}^s, \quad (14)$$

где  $M_{f,i}^s$ , с точностью до фазового множителя, есть

$$M_{f,i}^s = 32\pi h^4 \frac{1}{V\sqrt{V}} \frac{1}{V\sqrt{\pi r_0^3}} \frac{1}{r_0} \frac{eE\rho \sin \vartheta}{\left[p^2 + \left(\frac{h}{r_0}\right)^2\right]^3} J'_s(x) \times \\ \times 2\pi h \vartheta \left(\frac{p^2}{2m} - sh\omega - E_0\right). \quad (15)$$

Из формулы (14) и (15) явно видно, что мы имеем дело с многофотонным процессом, закон сохранения энергии которого имеет вид

$$sh\omega = \frac{p^2}{2m} + I_0, \quad (16)$$

где  $I_0 = -E_0$  потенциал ионизации.

Дифференциальная вероятность перехода за единицу времени с поглощением  $s$  фотонов будет

$$dW_s = \frac{|M_{f,i}^s|^2}{T} \frac{d^3p V}{(2\pi h)^3}, \quad (17)$$

где  $T$  время наблюдения. Подставляя сюда выражение (15) и производя интегрирование, окончательно получим

$$W_s = 2 \cdot 16^s \cdot \gamma^2 \frac{h\omega}{mc^2} \left( mc \frac{r_0}{h} \right)^4 \cdot \omega \left( p \frac{r_0}{h} \right)^3 \frac{1}{\left[ 1 + \left( p \frac{r_0}{h} \right)^2 \right]^6} \times \\ \times \int_0^\pi J_s'^2 \left( \gamma \frac{pc}{h\omega} \sin \vartheta \right) \sin^3 \vartheta d\vartheta. \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда

$$s \gg \left( \gamma \frac{pc}{h\omega} \right)^2, \quad (19)$$

тогда

$$J_s' \left( \gamma \frac{pc}{h\omega} \sin \vartheta \right) \approx \frac{\gamma^{s-1}}{2^s} \left( \frac{pc}{h\omega} \right)^{s-1} \sin^{s-1} \vartheta \frac{1}{(s-1)!}.$$

Подставляя это в (18) и производя интегрирование по  $\vartheta$ , получим

$$W_s = 2^s \cdot \omega \eta^{1/2} \frac{(a\varepsilon)^s}{(2s+1)!} \cdot s^2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1+\eta\varepsilon)^6}, \quad (20)$$

где

$$a = 2\gamma \frac{mc^2}{h\omega},$$

$$\eta = 2\pi c^2 h\omega \frac{1}{\left( \frac{h}{r_0} \right)^2 c^2},$$

$\varepsilon$  — энергия электрона в единицах энергии фотона

$$\varepsilon = \frac{E}{h\omega}.$$

При больших  $s$   $(2s+1)! \approx 2s(2s)!$ . Применяя формулу Стирлинга, имеем

$$W_s = 32\omega \eta^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{s} \left( \frac{\lambda\varepsilon}{s^2} \right)^s \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1+\eta\varepsilon)^6}, \quad (21)$$

где  $\lambda = a \left( \frac{e}{2} \right)^2$ ,  $e$  — основание натурального логарифма. Используя закон сохранения энергии

$$s = \varepsilon + \varepsilon_0: \quad \varepsilon_0 = \frac{I_0}{h\omega},$$

окончательно получим

Таблица

Напряженность электрического поля $E$ (в/с.м)	Вероятность ионизации при $S < S_0$ (формула туннельного эффекта) $W'$ (сек $^{-1}$ )	Минимальное число поглощенных квантов $S_0 = \min S$	Вероятность ионизации при $S \geq S_0$ , $W'$ , (сек) $^{-1}$ (формула многофотонного эффекта)				
			$S = S_0 + 1$	$S = S_0 + 2$	$S = S_0 + 3$	$S = S_0 + 10$	$S = S_0 + 100$
$10^6$	$5,8 \cdot 10^{-1491}$	$S_0 = 2\gamma \frac{mc^2}{h\nu} + 1$ $S_0 = \epsilon_0 + 3$ $S_0 = \epsilon_0 + 2$	$4,2 \cdot 10^{-34}$	$2 \cdot 10^{-38}$	$1,04 \cdot 10^{-50}$	$2,5 \cdot 10^{-75}$	$7,4 \cdot 10^{-575}$
$5 \cdot 10^6$	$9,8 \cdot 10^{-283}$		$1,8 \cdot 10^{-21}$	$1,7 \cdot 10^{-23}$	$1,9 \cdot 10^{-32}$	$3,6 \cdot 10^{-50}$	$4,8 \cdot 10^{-424}$
$10^7$	$6,5 \cdot 10^{-132}$		$2,6 \cdot 10^{-16}$	$1,6 \cdot 10^{-17}$	$9,6 \cdot 10^{-25}$	$2,4 \cdot 10^{-39}$	$2 \cdot 10^{-402}$
$5 \cdot 10^7$	$1,02 \cdot 10^{-11}$		$2,1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	$8,0 \cdot 10^{-16}$	$7,2 \cdot 10^{-209}$
$10^8$	$6,6 \cdot 10^0$		$6,1 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-147}$

$$W_s = 32\omega\tau_i^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \lambda \frac{s - \epsilon_0}{s^2} \right)^2 \frac{V s (s - \epsilon_0)}{[1 + \eta (s - \epsilon_0)]^6} \quad (22)$$

Последняя формула применима для значения энергии

$$s \gg 2\tau_i \frac{mc^2}{\hbar\omega}$$

которая получается из формулы (2').

Приведем таблицу для различных значений вероятности ионизации в зависимости от напряженности внешнего поля и от числа поглощенных квантов света при  $\hbar\omega = 1,8$  эв.

В заключение выражаем благодарность профессору М. Л. Тер-Микаеляну за многочисленные и весьма полезные обсуждения.

Объединенная радиационная лаборатория  
Академии наук Армянской ССР  
и Ереванского государственного университета

### Ա Պ. ԳԼՉԱԶՅԱՆ ԵՎ Վ. Հ. ՉԱԼԻԿՅԱՆ

#### Ջրածնի ատոմի իոնիզացիան ինտենսիվ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման ներգործությամբ

Աշխատանքում գիտարկված է ջրածնի ատոմի իոնիզացիան շրջանային բևեռացված ինտենսիվ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման դաշտում: Ուսյց է արվում, որ

$$\frac{2eE}{m\nu\omega} \ll 1$$

պայմանի սահմանը ղեկավարում պրոցեսն ունի բազմաֆոնոնային բնույթ, որի համեմատականությունը արտահայտվում է (22) բանաձևով: Հակադարձ պայմանի ղեկավարում պրոցեսն ունի հաստատուն էլեկտրոն-դաշտում թունկային էֆեկտի բնույթ: Չնայած հոգ-վածում հաշվումները բերված են ջրածնի ատոմի համար, սակայն ստացված արդյունքները կարելի է կիրառել նաև ջրածնանման ատոմների ղեկավարում: Հոգվածի վերջում բերված թվային գնահատումները կարող են ծառայել էքսպերիմենտալ նպատակների համար:

### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ը Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Ю. Р. Оппенгеймер, Phys. Rev., 31, 66, 1928. <sup>2</sup> Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1945 (1964). <sup>3</sup> Ф. В. Бункин, А. М. Прохорова, ЖЭТФ, 46, 1090 (1964). <sup>4</sup> Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, ЖЭТФ, 47, 1150 (1964). <sup>5</sup> Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.

ФИЗИКА ПОЛИМЕРОВ

Л. Г. Мелконян, Р. В. Багдасарян и А. В. Геворкян

К вопросу оценки  $\alpha_{\text{виск.}}^*$  и термодинамическая гибкость  
 макромолекул полихлоропренового каучука\*\*

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 20/II 1965)

Изучение гибкости макромолекул следует рассматривать как одну из важных задач исследования структуры полимеров, поэтому установление количественной связи между свойствами макромолекул в растворе и их гибкостью представляет значительный интерес.

Количественной характеристикой термодинамической (равновесной) гибкости служит отношение экспериментального найденного значения размера макромолекулы в идеальном растворителе  $(\bar{h}^2)_0^{1/2}$  к величине соответствующей модели свободного вращения  $(\bar{h}^2)_f^{1/2}$ . Однако возможность применения метода светорассеяния при одновременном определении „невозмущенных размеров“ клубков  $(\bar{h}^2)_0^{1/2}$  и молекулярных весов  $\bar{M}$  макромолекул в идеальном растворителе (если  $\theta$  смесь растворителей) ограничено соблюдением условия  $\frac{dn}{dc} \gg n_0' - n_0''$  (где  $n_0'$  и  $n_0''$  показатели преломления компонентов смеси), не говоря о практической невозможности определения размеров макромолекул, веса которых не превышает  $3-5 \cdot 10^5$  (за исключением жестких цепей). Поэтому в экспериментальных работах часто используют гидродинамические методы, в которых о размерах макромолекул судят по их гидродинамическим свойствам в растворе. Среди них наиболее широко применим вискозиметрический метод, основанный на том, что характеристическая вязкость  $[\eta]$  раствора пропорциональна отношению эффективного гидродинамического объема макромолекулы ( $V \sim (\bar{h}^2)^{3/2}$ ) к их молекулярному весу (1)

$$[\eta] = \Phi \frac{(\bar{h}^2)^{3/2}}{\bar{M}}, \quad (1)$$

где

$$(\bar{h}^2)^{3/2} = \alpha (\bar{h}^2)_0^{3/2}. \quad (1a)$$

Однако вискозиметрический способ определения степени растяжения макромолекулы ( $\alpha_{\text{вискоз.}}$ ) при оценке ее термодинамической гиб-

\* Степень растяжения молекулярного клубка в растворе.

\*\* Настоящая статья относится к циклу работ „Светорассеяния и гидродинамическое поведение макромолекул полихлоропрена в растворе“.

кости согласно уравнениям (1) и (1a) не достаточно точен, ввиду экспериментально и теоретически установленного факта зависимости коэффициента  $\Phi$  от качества растворителя (\*).

Основываясь на современной теории гидродинамических свойств (2), мы при определении степени растяжения клубка в растворе используем соотношение

$$z^3 = \frac{[\eta]}{[\eta]_0} \cdot \beta, \quad (2)$$

вводя поправочный коэффициент  $\beta = \frac{\Phi}{\Phi'} = 1.362$ , где  $\Phi = 2.86 \cdot 10^{21}$  теоретическое значение коэффициента Флори, превосходящее экспериментальное ( $\Phi' = 2.1 \cdot 10^{21}$  для линейных гибких макромолекул в хорошем растворителе) на величину, заметно превышающую ошибку опыта. Это объясняется тем, что теоретическое значение  $\Phi$  получено на основе гауссовой статистики и поэтому, строго говоря, справедливо лишь для  $\theta$  растворителя. В хороших растворителях взаимодействие макромолекулы с растворителем (неоднородное разбухание клубка), влияя на характер распределения звеньев в клубке, может приводить к изменению значения  $\Phi$  от  $2.86 \cdot 10^{21}$  до  $1.68 \cdot 10^{21}$  (для предельного случая очень больших объемных эффектов) (3). Последнее обстоятельство и учтено в настоящей работе при определении  $z_{\text{виск}}^3$  макромолекулы полихлоропренового каучука в растворе для оценки ее термодинамической гибкости с использованием значений  $(h^2)_0$  и  $M$  в хорошем растворителе, измеренных методом светорассеяния. Заметим, что указанным способом рассчитанные  $z$  могут с сравнительно большой точностью (чем при допущении  $\beta = 1$ ) применяться при апробировании термодинамической теории второго вириального коэффициента  $A_2$  линейных клубков (4).

Исследуемый полимер представлял собой полихлоропреновый каучук (наирит П), полученный методом эмульсионной полимеризации при  $40^\circ\text{C}$ . Фракции полимера осаждались из 1% раствора в бензоле метанолом и высушивались в вакууме при сравнительно низкой температуре ( $20^\circ\text{C}$ ), во избежание структурирования образцов. Были выделены 15 узких фракций, высокомолекулярные из которых (8 фракций) исследованы в настоящей работе.

Молекулярные веса и размеры макромолекул фракций определялись в четыреххлористом углероде на визуальной круговой нефелометрической установке с введением поправки на асимметрию индикатриссы светорассеяния (см., напр., (5)). При исследовании использовался неполяризованный монохроматический пучок света с  $\lambda = 5460 \text{ \AA}$ , а в качестве стандарта для определения приведенной интенсивности растворов ( $R_0$ ) был выбран бензол,  $R_{90}$  которого равна  $16.3 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-1}$ .

Оптическая постоянная  $K$  для данной системы полимер—растворитель оказалась равной  $K = 0.72 \cdot 10^{-7}$ . Перед измерением светорассеяния растворы всех фракций очищались центрифугированием в те-

чение 45 мин. при 20000g. Результаты измерений представлены в таблице.

Характеристическая вязкость  $[\eta]$  растворов фракций определялась вискозиметром типа Освальда в четыреххлористом углероде и в  $\theta$  растворителе. Значение  $\theta$  температуры, равной 21°C (для смеси бензол 82,45% + 17,55% метанол), определялось на основании зависимости критической температуры полного смешения полимера с растворителем ( $T_c$ ) от молекулярного веса (<sup>6</sup>)

$$T_c = \theta \left( 1 - \frac{b}{M^{1/2}} \right). \quad (3)$$

Из уравнения следует, что  $\theta$  является предельной критической температурой смешения при  $M \rightarrow \infty$  (фиг. 1). Результаты измерений приведены в сводной таблице.

Зависимости характеристической вязкости фракций  $[\eta]$  и размеров макромолекул  $(\bar{h}^2)^{1/2}$  в четыреххлористом углероде, а также  $[\eta]$  в  $\theta$  растворителе от молекулярного веса (в двойном логарифмическом масштабе) приведены на фиг. 2 и 3. В пределах ошибки эксперимента кривые оказались строго линейными и в интервале молекулярных весов  $1,51 \cdot 10^6 + 4,2 \cdot 10^5$  могут быть описаны уравнениями:

$$[\eta] = 1,82 \cdot 10^{-4} \bar{M}_w^{0,69},$$

$$(\bar{h}^2)^{1/2} = 0,46 \bar{M}_w^{0,56} \text{ \AA},$$

$$[\eta]_{\theta} = 13,34 \cdot 10^{-4} \bar{M}_w^{1,50}. \quad (5)$$

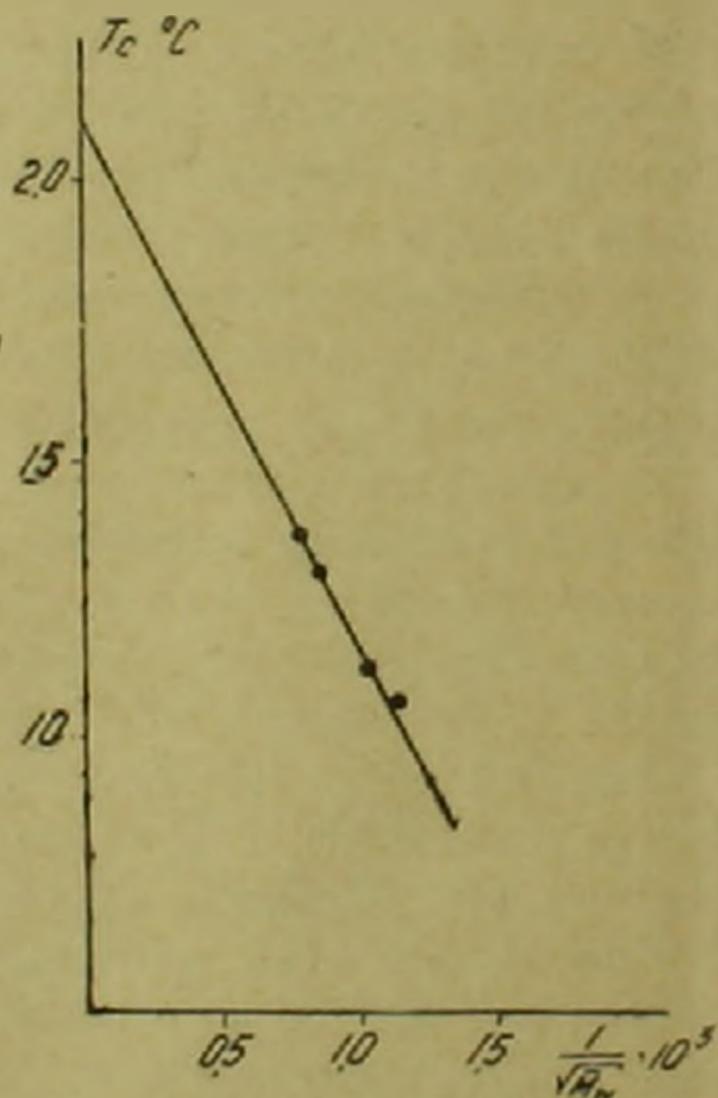
где экспоненты (в  $CCl_4$ ) удовлетворяют условиям

$$[\eta] \sim M^a \text{ и } (\bar{h}^2)^{1/2} \sim M^{\frac{1+a}{3}}. \quad (6)$$

Здесь  $a = \frac{1+3\varepsilon}{2}$ , отсюда значение  $\varepsilon$ ,

обусловленное взаимодействием дальнего порядка в полимерной цепочке („объемные эффекты“), равно 0,12. Теоретическое значение  $\varepsilon$  лежит в пределах  $0 < \varepsilon < 0,2$  (<sup>7</sup>).

Современные термодинамические (и статистические) теории растворов линейных клубкообразных макромолекул устанавливают связь между молекулярным весом  $M$ , вторым вириальным коэффициентом  $A_2$ , размерами клубков в растворе  $(\bar{h}^2)^{1/2}$  и со степенью их растяжения  $\alpha$ . Так, например, теория Флори—Орофино (<sup>8</sup>) приводит к соотношению



Фиг. 1. Зависимость температуры полного смешения  $T_c$  от молекулярного веса для некоторых фракций полихлоропрена (наирита П).

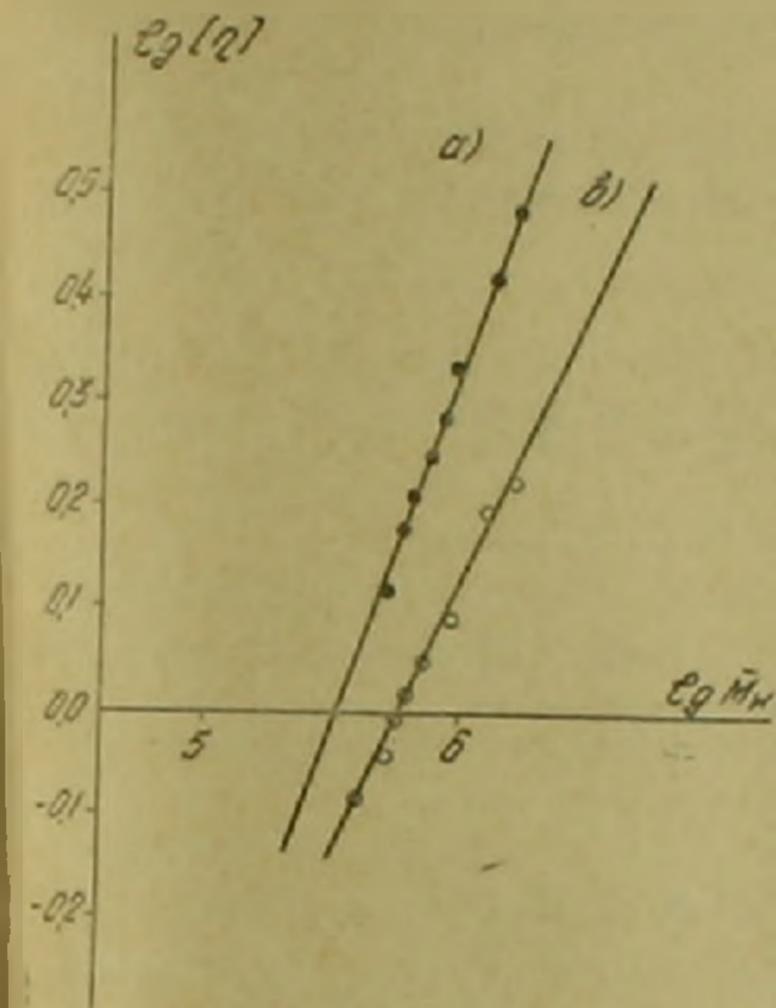
$$A_2 = \frac{2^{1/2} \pi^{1/2}}{3^{1/2}} \cdot N_A \frac{(\bar{h}^2)^{1/2}}{M^2} \psi(z), \quad (7)$$

где  $N_A$  — число Авогадро;  $\psi(z)$  — функция от степени растяжения клубка  $\alpha$

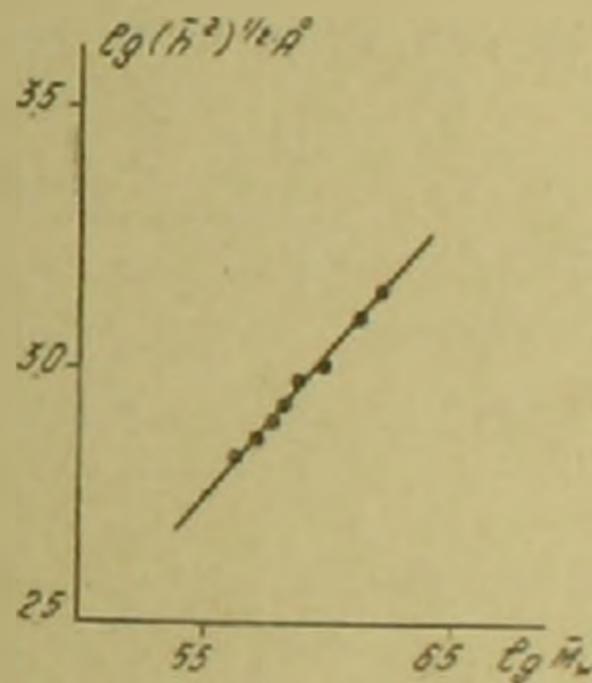
$$\psi(z) = \frac{4}{3^{1/2}} \ln \left[ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (z^2 - 1) \right]. \quad (8)$$

На фиг. 4 приведены кривые функции  $\psi(z)$  от  $z$  согласно некоторым из существующих теорий  $A_2$ , взятые из работы (9), и экспериментальные точки, рассчитанные на основе (7), имеющей общий характер, для макромолекул полихлоропрена (наирит II) в  $CCl_4$ .

Из рисунка видно, что точки в



Фиг. 2. Зависимость  $\lg [\eta]$  от  $\lg \bar{M}_w$  для растворов фракций наирита II в  $CCl_4$ .



Фиг. 3. Зависимость  $\lg (\bar{h}^2)^{1/2}$  от  $\lg \bar{M}_w$  для растворов фракций наирита II в  $CCl_4$ .

основном группируются вокруг кривой Флори—Кригбаума—Орофино. К сожалению, изучение хода кривой  $\psi(z)$  в области  $z > 1,4$  не пред-

ставляется возможным в связи с ограничением молекулярных весов линейного полихлоропрена до порядка  $1 + 2 \cdot 10^6$ , что, очевидно, обусловлено наличием в нем двойных связей, приводящих к структурированию высокомолекулярных образцов.

Значения  $(\bar{h}^2)_f^{1/2}$  соответствующей модели свободного вращения рассчитывались по формуле

$$(\bar{h}^2)_f^{1/2} = 5,57 \sqrt{\rho} A \quad \text{или} \quad (\bar{h}^2)_f^{1/2} = 0,591 \sqrt{M} A \quad (8)$$

согласно (10) для полихлоропренового каучука (синтезированного эмульсионной полимеризацией, при  $40^\circ C$ ), с учетом цис- и транс-конфигураций, а также сочленений 1,2 и 3,4 в полимере.

Таблица

Результаты измерений молекулярных характеристик фракций полихлоропренового каучука (наирит П) в растворе

№№	$[\eta] \text{ (г/дл)}^{-1}$		$\bar{M}_w$	$\Lambda, \cdot 10^4$	$(\bar{h}^2)^{1/2} \cdot \text{Å}$	$a_{\text{вискоз.}}$	$(\bar{h}^2)_f^{1/2} \cdot \text{Å}$	$\frac{(\bar{h}^2)_f^{1/2}}{(\bar{h}^2)_f^{1/2}}$	$(\bar{h}^2)_0^{1/2} \cdot \text{Å}$	$\frac{(\bar{h}^2)_0^{1/2}}{(\bar{h}^2)_f^{1/2}}$
	в $\text{CCl}_4$	0-растворитель								
II	3,02	1,66	1.610.000	2,2	1385	1,34	750	1,85	1030	1,37
III	2,60	1,55	1.340.000	2,2	1250	1,31	682	1,83	955	1,40
IV	2,14	1,24	938.000	2,3	1090	1,30	570	1,73	770	1,35
V	1,77	1,12	762.000	2,4	916	1,28	515	1,78	717	1,39
VI	1,63	1,03	645.000	2,5	820	1,28	474	1,73	640	1,35
VII	1,50	0,99	600.000	2,4	774	1,26	455	1,70	616	1,35
VIII	1,32	0,90	513.000	2,6	710	1,25	423	1,68	568	1,34
IX	1,16	0,82	420.000	2,8	646	1,24	382	1,69	520	1,37

Результаты вычислений  $(\bar{h}^2)'$ , а также значений  $z$  и  $(\bar{h}^2)''$ , рассчитанные по уравнениям (1а) и (2), приведены в таблице. В последнем столбце дано отношение  $(\bar{h}^2)''/(\bar{h}^2)'$ , среднее значение которого 1,37 в пределах ошибки эксперимента хорошо согласуется с результатами предыдущих работ по изучению светорассеяния и гидродинамического поведения макромолекул полихлоропреновых каучуков в растворе (10, 11).

Другой характеристикой равновесной гибкости гауссовой цепи служит величина, обратная числу мономерных единиц  $S$ , входящих в один сегмент.

Известно, что контурная длина (т. е. длина полностью вытянутой цепи без деформации валентных углов) макромолекулы  $L$  равна

$$L = NA.$$

С другой стороны, для гауссовых цепей (при числе статистических сегментов  $N \gg 1$ ) справедливо соотношение (12)

$$\bar{h}^2 = NA^2 \text{ при условии } h \ll L.$$

Для макромолекул полихлоропренового каучука (наирита П) с учетом микроструктуры цепи (13) на основании данных таблицы получаем, что длина статистического сегмента Куна  $A = \frac{h^2}{L} = 11,7 \text{ \AA}$ , а число мономерных единиц  $S = 2,3$ .

Большая термодинамическая гибкость макромолекул полихлоропренового каучука, по-видимому, связана с большой свободой вращения молекулярной цепочки вокруг связей С — С соседних с двойным.

Можно полагать, что силы электростатического характера, обусловленные наличием хлора в диеновой цепи (дипольный момент связи С — С1  $\sim 2,0 \text{ Д}$ ), практически не оказывают влияния на гибкость макромолекулы, из-за большого расстояния между полярными группами С — С1 вдоль цепи (14). На гибкость цепи практически не оказывает влияния также наличие малой доли цис-конфигурации присоединения 1,4 ( $\sim 10\%$ ). На наш взгляд, изучение светорассеяния полихлоропреновых каучуков (с целью выяснения характера зависимости гибкости от микроструктуры цепи) с различным содержанием цис- и транс-конфигураций, а также сочленений 1,2 и 3,4 несомненно должно представлять определенный интерес и может стать предметом детального исследования.

Всесоюзный научно-исследовательский  
проектный институт полимерных продуктов

**Գնահատման խնդիրը և պոլիբյուրոպրենային կաուչուկի մակրոմոլեկուլի քերամոլինամիկական ճկունությունը**

Աշխատանքում արծարծված է պոլիմերների ստրուկտուրայի (լուծույթում) ուսումնասիրության կարևոր հարցերից մեկը՝ լուսացրման և մածուցիկության մեթոդների համագրմամբ: Հիմնվելով զծային կծիկանման մակրոմոլեկուլների մամանակակից հիդրոդինամիկ տեսության վրա, առաջարկված է կծիկի ձգվածության շափը լուծույթում գնահատելու համար սգտագործել հայտնի առնչությունը՝

$$\alpha^2 = \frac{[\eta]}{[\eta]_0} \cdot \beta,$$

մացնելով ուղղման գործակից  $\beta = 1.362$ : Այդ եղանակով հաշված է նախրիտ II-ի 5 րարծրամոլեկուլյար ֆրակցիաների մակրոմոլեկուլների շափերը իդիսայական (B) լուծիչում, սգտագործելով լավ լուծիչում (CCl<sub>4</sub>) որոշված մոլեկուլյար կշռի  $\bar{M}_w$  և մակրոմոլեկուլի շափերի  $(\bar{h}^2)^{1/2}$ : համար ստացված արժեքները:

Հետազոտված ֆրակցիաների համար փորձով ստացված և տեսականորեն հաշված վալենտական կապի շուրջը ազատ պտույտի ենթադրությամբ, միջին լատակուսային ծայրակետային հեռավորությունների հարաբերությունը՝ որը բնորոշում է շղթայի ճկունությունը, ստացվել է հավասար 1.37: Դա վկայում է պոլիբյուրոպրենի (նախրիտ II) մակրոմոլեկուլը մեծ թերմոդինամիկ ճկունության մասին: Պետք է ենթադրել, որ բեռացված C—Cl կապի դիպոլ մոմենտը  $\sim 2, 0D$  պրակտիկորեն չի ազդում մոլեկուլյար շղթաների ներքին պատման վրա՝ շղթայի երկայնքով այդ կապերի զգալի հեռավորության պատճառով: Էքսպերիմենտալ տվյալների մշակումը մոլեկուլյար կշռների  $1,61 \cdot 10^4 - 4,2 \cdot 10^5$  ինտերվալի համար հնարավորություն է տալիս գրելու հետևյալ առնչությունները՝

$$[\eta] = 1,82 \cdot 10^{-4} \bar{M}_w^{0,68}; (\bar{h}^2)^{1/2} = 0,46 \cdot \bar{M}_w^{0,56} \text{ \AA} \quad [\eta]_0 = 13,34 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{M}_w^{0,50}$$

ЛИТЕРАТУРА - ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> P. J. Flory, Principles of the Polymer Chemistry, N. Y., 1953. <sup>2</sup> О. Б. Птицын, Ю. Е. Эйзнер, ЖТФ, 29, 1117 (1959); В. К. Кризбаум, Д. К. Карпенгер, J. Phys. Chem., 59, 1166 (1955). <sup>3</sup> О. Б. Птицын, Успехи физ. наук, 69, 371 (1959) <sup>4</sup> В. Е. Эскин, ДАН СССР, т. 142, 881 (1962). <sup>5</sup> В. Н. Цветков, К. З. Фаттахов, О. В. Каллистов, ЖЭТФ, 26, 351 (1954), И. Курквуд, И. Райзман, J. Chem. Phys., 16, 565 (1948). <sup>6</sup> М. В. Волькенштейн, Конфигурационная статистика полимерных цепей, Из-во, АН СССР, М.—Л., 1959. <sup>7</sup> Т. А. Орофино, П. И. Флори, J. Chem. Phys., 25, 1067 (1957). <sup>8</sup> О. В. Птицын, Высокомолекулярная химия, 3, 1673 (1961). <sup>9</sup> Л. Г. Мелконян, Р. В. Багдасарян, А. В. Геворкян, Известия АН АрмССР, серия хим. наук, т. 17, 5, 483 (1964). <sup>10</sup> Л. Г. Мелконян, Р. В. Багдасарян, А. В. Геворкян, Известия АН АрмССР, серия хим. наук, т. 18, 4, 1965 (в печати). <sup>11</sup> В. Кун, Koll. Z., 68, 2 (1934). <sup>12</sup> D. В. Сандерс, Proc. Faraday Soc., 53, 860 (1957).

## БИОХИМИЯ

А. Ш. Галстян

## Активность дегидрогеназ засоленно-солонцеватых почв

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 8 I 1965)

Исследования ферментативной активности засоленных почв показали, что в солончаках под влиянием щелочности и растворимых солей гидролазы быстро инактивируются, а оксидазы более устойчивы к этим факторам. Здесь сравнительно активны каталаза и дегидрогеназы, действие которых динамично и зависит от характера и степени засоления (1, 2).

В этой работе мы стремились выяснить некоторые особенности действия дегидрогеназ почв в связи с их солонцеватостью. Исследования проводились на засоленно-солонцеватых почвах Араратской равнины. Образцы почв были взяты весной. Активность дегидрогеназ определялась по методике, основанной на восстановлении 2, 3, 5-трифенилтетразолия хлористого (ТТХ) в трифенилформазаны (ТФФ), и выражалась в миллиграммах ТФФ на 10 г почвы за сутки (3-5).

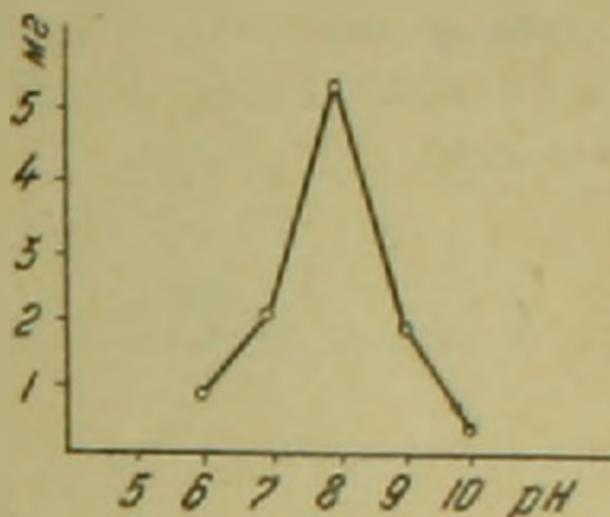
Засоленные почвы Араратской равнины при непосредственном воздействии близко залегающих от поверхности почвы минерализованных грунтовых вод переживают луговую стадию развития. При луговой стадии почвообразования солонцеобразование возможно как путем естественной эволюции луговых почв щелочными натриевыми грунтовыми водами, так и путем вертикальной промывки солончаков паводковыми водами. Так как почти все засоленные почвы содержат соду, то солонцеобразование здесь носит содовый характер (6).

Опыты показали, что биохимические процессы при солонцеобразовании наглядно отражаются в действии дегидрогеназ. В эволюции почвообразования при постепенном переходе болотно-луговой почвы к луговым солончакам наблюдается снижение активности дегидрогеназ (табл. 1). Засоленно-солонцеватые почвы без добавления извне субстратов дегидрирования и коэнзима I (дифосфопиридин-нуклеотида, ДПН) обладают дегидрогеназной активностью. Следовательно, эти почвы содержат некоторые дегидрогеназы и соответствующие им субстраты. При добавлении к почве 0,5 мг коэнзима I отмечается ускорение реакции восстановления соли тетразолия. Последнее свидетель-

Данные полных вытяжек, гумуса и активности дегидрогеназ луговых засоленных почв

Почва, № разреза	Глубина, см	в %/‰ на 100 г сухой почвы мг/экв								рН водной вытяжки	Гумус %	Активность	
		сумма солей	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	общая HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Na по вы- числению			без коэф- зиента	коэф- циент I
Болотно-луговая, хлоридно-содово-сульфатно-солянцеватая, 123	0-20	0,855	<u>0,025</u> 0,82	<u>0,197</u> 3,23	<u>0,141</u> 3,98	<u>0,240</u> 4,99	<u>0,005</u> 0,25	<u>0,002</u> 0,17	<u>0,270</u> 11,78	9,1	3,4	2,4	3,9
	20-40	0,847	<u>0,056</u> 1,89	<u>0,253</u> 4,14	<u>0,121</u> 3,41	<u>0,206</u> 4,28	<u>0,010</u> 0,50	<u>0,003</u> 0,25	<u>0,254</u> 11,08	9,6	1,1	1,1	2,1
Сульфатно-содовый со- лонец-солончак, 121	0-20	1,398	<u>0,244</u> 8,11	<u>0,719</u> 11,79	<u>0,088</u> 2,48	<u>0,178</u> 3,70	<u>0,004</u> 0,20	<u>0,0002</u> 0,02	<u>0,409</u> 17,78	10,1	0,8	1,5	1,9
	20-40	1,922	<u>0,339</u> 11,30	<u>0,938</u> 15,38	<u>0,159</u> 4,48	<u>0,250</u> 5,20	<u>0,003</u> 0,15	<u>0,0007</u> 0,06	<u>0,571</u> 24,87	10,3	0,8	0,9	1,3
	40-60	1,342	<u>0,211</u> 7,05	<u>0,633</u> 10,38	<u>0,150</u> 4,23	<u>0,153</u> 3,18	<u>0,004</u> 0,20	<u>0,0005</u> 0,04	<u>0,401</u> 17,48	9,9	0,7	0,4	0,7
Содовый солонец-со- лончак, 125	0-20	3,551	<u>0,789</u> 26,30	<u>1,813</u> 29,72	<u>0,240</u> 6,77	<u>0,446</u> 9,28	<u>0,002</u> 0,10	<u>0,001</u> 0,08	<u>1,049</u> 45,42	10,1	0,6	0,3	0,4
	20-40	0,798	<u>0,095</u> 3,16	<u>0,465</u> 7,63	<u>0,053</u> 1,49	<u>0,049</u> 1,02	<u>0,004</u> 0,20	<u>0,002</u> 0,17	<u>0,225</u> 9,65	9,6	0,5	0,4	0,5
	40-60	0,585	<u>0,047</u> 1,56	<u>0,353</u> 5,78	<u>0,039</u> 1,10	<u>0,025</u> 0,52	<u>0,005</u> 0,25	<u>0,001</u> 0,08	<u>0,162</u> 7,07	9,2	0,5	0,2	0,3

ствуется о ферментативном характере восстановления ТТХ самой почвой, без каких-нибудь добавлений извне. В болотно-луговой засоленно-солонцеватой почве активность дегидрогеназ сравнительно высокая, что зависит от значительного содержания органических веществ и активного действия микроорганизмов. Для насыщения дегидрогеназы этой почвы больше нуждаются в коэнзиме I. Потребность в коэнзиме I для дегидрирования собственных субстратов в сульфатно-содовом солонце-солончаке уменьшается, а в содовом солончаке, в связи с высокой щелочностью, почти отсутствует. Последнее указывает на то, что значительное количество органических веществ этих почв глубоко дегидрировано.



Фиг. 1. Влияние pH на активность дегидрогеназ почвы

Обнаружение значительной активности дегидрогеназ в засоленно-солонцеватых почвах обусловлено тем, что оптимум pH этих ферментов находится в щелочном интервале pH 8,0 (фиг. 1), сдвиг которого в зависимости от свойств почв ближе к единице (pH 7,4—8,5).

Дегидрогеназы засоленно-солонцеватых почв имеют различные отношения к субстратам дегидрирования (табл. 2). В солонцеватых почвах сравнительно активна глюкозодегидрогеназа. В зависимости от характера засоления наблюдается также активное действие дегидроге-

Таблица 2

Активность дегидрогеназ луговых засоленных почв

Почва	Без донаторов	Донаторы водорода				
		глюкоза	глицерофосфат	лимонная кислота	глутаминовая кислота	этиловый спирт
Болотно-луговая хлоридно-сульфатно-содово-солонцеватая	2,7	8,2	4,5	3,2	2,8	2,4
Содово-сульфатно-засоленно-солонцеватая	1,7	8,8	2,1	2,2	2,3	2,0
Хлоридно-сульфатный солончак	0,3	0,3	0,2	0,5	0,2	0,2
Сульфатно-содово-хлоридный солончак	0,2	0,5	0,2	1,0	0,6	0,2

наз глицерофосфата, лимонной и глутаминовой кислот. Действие дегидрогеназы этилового спирта или не обнаруживается, или незначительное (4). В засоленных почвах, где солонцеобразовательный про-

цесс выражен слабо, действие дегидрогеназ подавлено. В корковом солонце-солончаке в связи с сильным солонцеобразованием с поверхности почвы обнаруживается высокая активность дегидрогеназ, которая еще больше повышается в присутствии субстратов (табл. 3). В зависимости от перемещения солонцеобразовательного процесса по профилю почвы соответственно изменяется и активность дегидрогеназ. В глубокостолбчатом солонце-солончаке в нижних слоях почвы обнаруживается сравнительно большая активность дегидрогеназ, чем в верхнем.

Таблица 3

Активность дегидрогеназ засоленных почв в зависимости от степени их солонцеватости

Почва, № разреза	Глубина, см	Поглощенные основания в мг-экв на 100 г почвы				Na в % от емкости	Активность		
		Ca	Mg	Na	сумма		без суб- стратов	глюкоза	глюкоза + кати- оним I
Слабосолонцеватый со- дово-хлоридно-суль- фатный солончак, 126	0—20	22,2	13,0	5,4	40,6	13,3	0,6	1,5	2,1
	20—40	15,0	10,0	3,1	28,1	11,0	0,5	1,0	2,4
	40—60	14,3	5,4	0,9	20,6	4,4	0,3	0,8	1,2
Корковый сульфатно-со- довый солонец-солон- чак, 121	0—20	21,9	5,8	27,5	55,2	49,8	1,7	7,8	10,1
	20—40	17,6	7,7	25,2	50,5	49,9	1,1	6,7	8,4
	40—60	15,7	9,6	18,5	43,8	42,2	0,5	5,4	6,1
Глубокостолбчатый со- дово-сульфатный соло- нец-солончак, 119	0—20	18,3	8,4	7,1	33,8	21,1	1,2	3,6	4,8
	20—40	22,0	6,5	15,0	43,5	34,5	1,0	4,0	4,7
	40—60	15,8	2,7	18,0	36,5	49,2	1,4	5,3	6,2

В засоленно-солонцеватых почвах, мобилизованных дегидрогеназами, водород в анаэробных условиях передается кислородосодержащим соединениям. От дегидрогеназных систем водород в первую очередь акцептирует кислород нитратов, сульфатов, фосфатов и других соединений. Так как эти почвы почти не содержат нитратов и очень много содержат сульфатов, то последние акцептируют водород дегидрогеназных систем и восстанавливаются. Предварительные опыты, проведенные в вакуумных колбах с 5 г почвы и 5 мл 2% раствором глюкозы, показали, что в случае отсутствия акцептора водорода (ТТХ) сульфаты почвы исполняют эту роль. Разница в количестве сульфатов до и после опыта за неделю показывает, что их восстановление в почве осуществляется дегидрогеназными ферментами с участием сульфатредуктазы, активность которой в солонцах выше, чем в хлоридно-сульфатном солончаке (табл. 4).

Восстановление сульфатов засоленно-солонцеватых почв

Почва	Активность дегидрогеназ	SO <sub>4</sub> <sup>-</sup> в мг-экв на 100 г почвы		
		до опыта	после опыта	разница, действие сульфатредуктазы
Болотно-луговая засоленно-солонцеватая	8,2	10,3	9,1	1,2
Сульфатно-содовый солонец-солончак	8,8	11,4	10,0	1,4
Хаоридно-сульфатный солончак	0,5	81,8	81,1	0,7

О необходимости внеклеточных ферментов для восстановления сульфатов впервые высказался А. Г. Франк-Каменецкий. В дальнейшем В. О. Таусон и А. Д. Пельш производили термодинамический анализ десульфатизационных процессов сульфатредуцирующих бактерий и доказали эту необходимость (6). Наши исследования показывают, что катализаторами реакций восстановления сульфатов в почве являются внеклеточные дегидрогеназы, продуцированные живыми организмами почвы. Как известно, работы И. Н. Антипова-Каратаева (5) и других (7-9) показали, что биохимическое восстановление сульфатов в сульфиды в результате жизнедеятельности сульфатредуцирующих и иных бактерий приводит к получению соды, а следовательно, и солонцеобразованию.

Итак, засоленно-солонцеватые почвы в отличие от солончаков обладают высокой дегидрогеназной активностью. Внеклеточные дегидрогеназы почвы характеризуют интенсивность и направленность биохимических процессов при солонцовом типе почвообразования. Они осуществляют восстановление сульфатов, которое является основной реакцией образования соды в почве—биологическим путем, приводящей к солонцеобразованию.

Институт почвоведения и агрохимии  
МСХ Армянской ССР

И. С. ԳՐԱԿՅԱՆ

**Ազոտ-ալկալի հողերի գեոքիմիայի և ակտիվությունը**

Արարատյան հարթավայրի ազոտ-ալկալի հողերը ունեն բարձր գեոքիմիայի ակտիվություն: Այս հողերում հատկապես ակտիվ է գործում գլյուկոզազնիդրազան: Բարձր գեոքիմիային ակտիվությունը այստեղ պայմանավորված է նրանով, որ այդ ֆերմենտների սպտիմում рН գտնվում է հիմնային միջավայրում և նրա տեղադրված կախված հողի ֆիզիկա-քիմիական հատկություններից կազմում է մեկ միավոր (рН 7,5-8,5):

Ազուտ-ալկալի հողերում զեհիդրացների ակտիվությունը կապված է նրանց ալկալիացման աստիճանից: Դեհիդրացները իրագործում են հողում եղած թթվածնակիր անիոնների, նիտրատների, սուլֆատների, կրկաթի օքսիդի և այլնի վերականգնումը համապատասխան բիոլոգիական պրոցեսների ժամանակ: Քանի որ հողում եղած սուլֆատները կարող են իանդիտանալ զեհիդրացների կողմից մորֆիլիզացված հրածնի ակցեպտոր, նշանակում է այդ ֆերմենտների սիստեմում գործում է նաև սուլֆատուկուկտազան:

Դեհիդրացների միջոցով սուլֆատների վերականգնումը սուլֆիդների հողի մեջ բիոքիմիական ճանապարհով սողայի առաջացման իմնական ռեակցիան է, որը տանում է զեդի ալկալիացման պրոցեսը: Այսպիսով ալկալիացման տիպի հողագոյացումը մեծ մասամբ ուղեկցվում է զեհիդրացային բարձր ակտիվությամբ, որը այդ պրոցեսներին մասնակցող բիոքիմիական ռեակցիաների ցայտուն արտահայտությունն է:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ը Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> А. Ш. Галстян, ДАН АрмССР, т. 30, № 1 (1960). <sup>2</sup> А. Ш. Галстян, „Известия АН АрмССР“ (биол. науки), т. 17, № 11 (1964). <sup>3</sup> А. Ш. Галстян, ДАН АрмССР, т. 35, № 4 (1962). <sup>4</sup> А. Ш. Галстян, ДАН СССР, т. 156, № 1 (1964). <sup>5</sup> Г. Ленхард, Z. Pflanzenenergie, Düng. Bodenk. 77, 1957. <sup>6</sup> И. Н. Антипов-Каратаев, Мелнорация солонцов в СССР, М., 1953. <sup>7</sup> А. Р. Вернер и Н. В. Орловский, „Почвоведение“, № 9, 1948. <sup>8</sup> Н. С. Пономарева, „Почвоведение“, № 9, 1962. <sup>9</sup> Л. Витинг и П. Яницкий, The Jour. of soil Science, vol. 11, № 2, 1963.

С. В. Казарян

### Уникальные отдельности базальтов Лорийского плато

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 16/1 1965)

В долинах рек Армении — Дебед, Арпа, Дзорагет, Воротан, Хадж широко развиты базальтовые и андезито-базальтовые лавы, играющие важную роль в формировании ее современного рельефа.

Излияние базальтов происходило неоднократно и из различных вулканических центров. Каждому излиянию соответствует один поток лав, что отчетливо устанавливается на бортах долин указанных рек. Наибольшее количество таких потоков установлено в долине реки Дебед.

Здесь насчитывается одиннадцать потоков, каждому из которых присущ определенный тип отдельностей пород, обусловленный условиями остывания лавы.

До сих пор в базальтовых потоках Армении описаны столбчатые, плитчатые и глыбовые отдельности. Причем в потоках со столбчатыми отдельностями столбы, как правило, ориентированы по отношению к верхней и нижней плоскостям перпендикулярно и представляют собой более или менее равностороннюю шестигранную призму.

Как мы увидим ниже, отдельности, обнаруженные в базальтовом потоке долины р. Дебед, резко отличаются от до сих пор известных отдельностей аналогичных пород, поэтому их следует рассматривать как новый вид отдельностей.

Последние обнажаются на небольшом (400 м) отрезке шестого по счету потока базальтов (средняя часть разреза), расположенном в пределах Шаумянского района г. Алаверди, на левом берегу р. Дебед и на расстоянии 300 м от нее.

Гипсометрически обнажение\* возвышается над уровнем р. Дебед на 100 м.

\* Описываемое обнажение было сфотографировано С. А. Титанияном по инициативе писателя-журналиста А. А. Тамазяна, который готовит к печати научно-популярный очерк о подобных красотах природы Армении.

Обнажение представлено столбами (призмами) базальтов, имеющими в поперечнике форму неравностороннего многоугольника с различным количеством углов, но с преобладанием пятигранных многоугольников. Несколько реже представлены столбы с шестигранными, а еще реже с четырехгранными многоугольниками.



Фиг. 1.

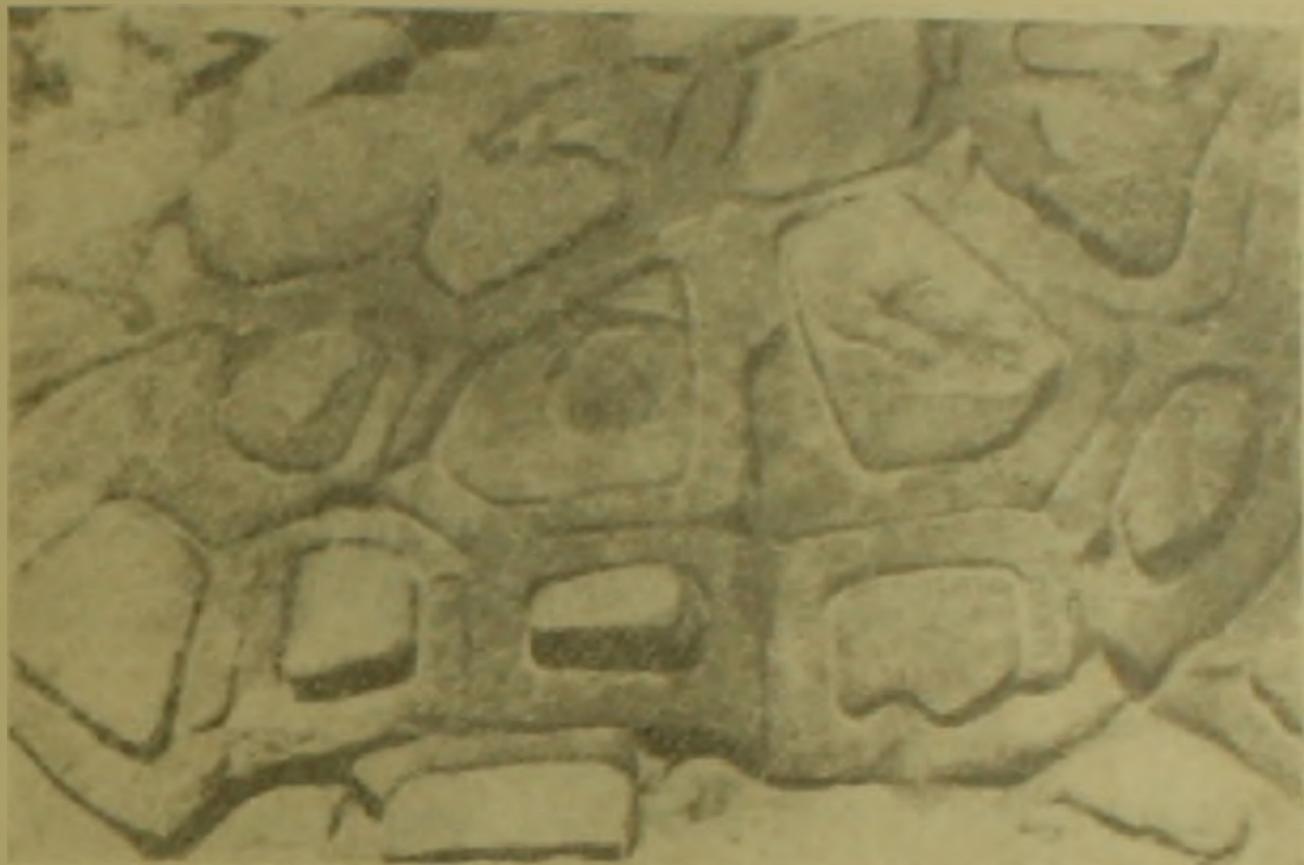
Трехгранные столбы на всем обнажении установлены лишь в двух случаях (фиг. 1, 2).



Фиг. 2.

Столбы базальтов здесь в отличие от других районов Армении ориентированы по отношению к верхней и нижней плоскостям потока не перпендикулярно, а наклонно, под углом  $75-80^\circ$ .

В пределах обнажения все столбы без единого исключения состоят из сердцевины и 2.—3-сантиметровой корки (рубашки), которые отделяются друг от друга отчетливо выраженной полосой шириной в один сантиметр. Причем корка полностью повторяет конфигурацию сердцевины. Если сердцевина пятигранна, то корка также пятигранна; если она шестигранна, то корка также шестигранна и т. д.



Фиг. 3.

Макроскопически в свежем изломе порода корки ничем не отличается от породы сердцевины.

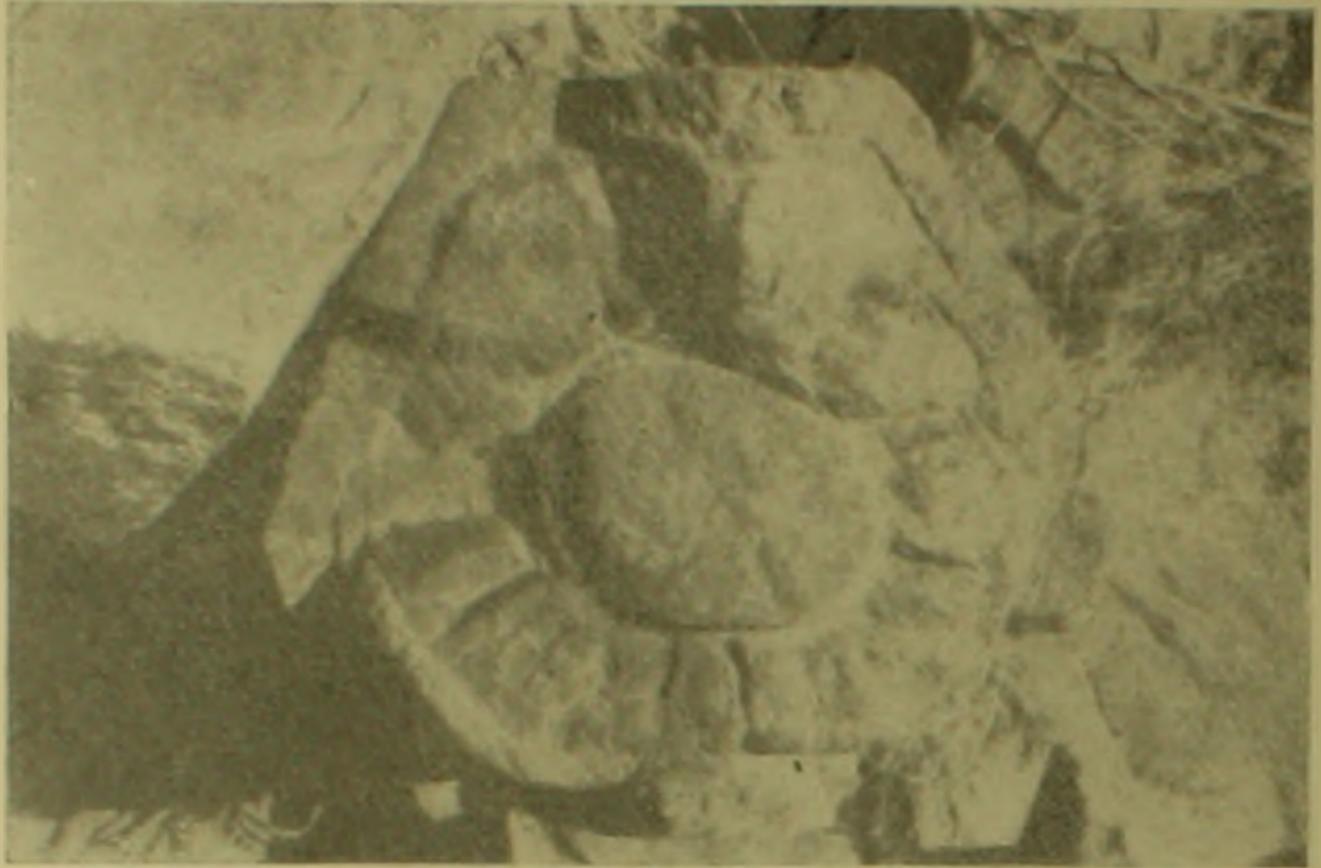
Полоса шва по всему периметру многоугольника, являясь наиболее слабой частью породы, подвергнута более интенсивному выветриванию, чем остальные части столба, вследствие чего вдоль нее по всему периметру всех столбов на поверхности образовалась выбоина глубиной 4—6 мм, которая придает обнажению совершенное скульптурное очертание (фиг. 1—4).

Это явление с глубиной полностью исчезает. Точнее, оно исчезает сразу же ниже дна выбоины, т. е. через 4—6 мм от дневной поверхности, и тогда, в свежем поперечном изломе, между коркой и сердцевиной столба вместо полосы наблюдается едва заметный шов.

Размеры столбов разные и колеблются от 10 × 15 до 50 × 60 см в поперечнике. Интересно отметить, что на всем обнажении не был установлен ни один столб с равносторонним многоугольником в поперечнике.

При пристальном наблюдении обнажения можно уловить весьма любопытную картину: отдельные столбы-индивиды, объединяясь в группу, образуют словно колонии полипов, сохраняя при этом форму либо пятиугольного, либо шестиугольного многоугольника. На обнажении установлено несколько таких семейств, граничащих вплотную друг с другом.

Выражаясь архитектурным языком, общий вид обнажения оставляет впечатление циклопической кладки стен.



Фиг. 4.

Описанные отдельности базальтов по красоте и редкости нельзя назвать иначе, как уникальными.

Институт геологических наук  
Академии наук Армянской ССР

## II Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

### Քաղախների հազվագյուտ անջատումներ Լոռու պլատոյում

Մինչև այժմ Հայաստանի բազալտներում անհավասարակող եռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն պրիզմաների տեսքի սյունաձև անջատումներ հայտնի չեն եղել:

Լոռու պլատոյում հայտնաբերված անհավասարակող եռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն պրիզմաների տեսքի անջատումները երկրաբանների համար մեծ հետաքրքրություն են ներկայացնում:

Նրանց միջոցով հնարավոր է վերականգնել բազալտային լավայի սառեցման ժամանակ գոյութուն ունեցող միջավայրը, սառեցումից հետո հազմահարման ճեղքանքները և լավայի ներքին ընդլայնումը:

Խրենց հազվագյուտությամբ և բացառիկ զեղեցկությամբ Լոռու պլատոյի բազալտների այս նոր անջատումներն արժանի են հետազոտոր ուսումնասիրությունների:

## РАДИОБИОЛОГИЯ

Р. С. Бабаян

Влияние термических воздействий при рентгенооблучении  
семян пшеницы

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 16/II 1965)

Термическое воздействие на организмы после ионизирующей радиации увеличивает количество мутаций, хромосомных aberrаций и других радиационных повреждений (1-5).

Вероятным объяснением термического последствия считается допущение, что ионизирующие излучения наряду с истинными повреждениями обуславливают также появление полустабильных, потенциальных, изменений. Последние дополнительным воздействием другими факторами (в данном случае температурой) могут возвращаться к норме, или наоборот (1-3).

По данным Н. И. Шапиро и Е. М. Протопопова (4), нагрев семян до 85° перед облучением гамма-лучами сильно снижает мутационный процесс у хромосом. По мнению этих авторов, температурное воздействие является модификацией кислородного эффекта.

Обработка семян пшеницы температурой порядка 30—40° в течение 3—10 и больше дней стимулирует их прорастание, повышает всхожесть. Это в основном объясняется тем, что под влиянием температуры повышается проницаемость семян для воздуха (кислорода) и воды (6-9).

По нашим данным (1964 г.), кратковременная (5—15 минут) обработка семян пшеницы высокими температурами (40—80°) оказывает значительное влияние на рост и продуктивность растений.

Вопрос о природе совместного влияния термического фактора и радиооблучения изучен недостаточно, поэтому и приведенные здесь данные представляют определенный интерес.

Объектом опытов являлись семена сортов пшеницы Украинка, Арташати—42 и Эрлинацеум. Семена сортов Украинка и Эрлинацеум до облучения подвергались теплообработке в водяной бане, семена же Арташати—42 до и после облучения обрабатывались в сухом состоянии, в термостате. Термическая обработка проводилась при температурах: 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80±1°С. Продолжительность теплообработки семян в водяной бане 10±0,5 минут, в термостате—15±0,5 мин.

Замоченные семена облучались дозами 500 и 1500 р, сухие семена 5000 р. и 20 000 р. Облучение проводилось аппаратом РУМ-11 при 180 кв, 14 ма, без фильтра, мощность дозы 500 р/мин.

Семена проращивались в чашках Петри при температуре 20—25°. Показателями роста были приняты: длина ростка, длина и количество корешков 10-дневных растений.

Полученные данные показывают, что теплообработка предотвращает угнетающее действие рентгенооблучения на рост растений.

Из табл. 1 видно, что у растений, полученных из замоченных семян пшеницы Эринацеум, при обработке температурой 50° без облучения, длина ростка составляет 95,3% от контроля, а у растений, полученных из тех же семян, но облученных дозой 1500 р, длина ростка в сравнении с вариантом без теплообработки составляет 192,1%.

При обработке семян температурой 55°, без облучения, длина ростка резко уменьшается — 1,92 см против 7,20 см в контроле, а у обработанных и облученных дозой 1500 р соответственно получается 2,3 и 2,79 см. Таким же образом изменяется длина корешков. Аналогичные данные получены и у сорта Украинка.

Таблица 1

Влияние теплообработки семян до рентгенооблучения на начальный рост растений (замоченные семена, теплообработка в водяной бане)

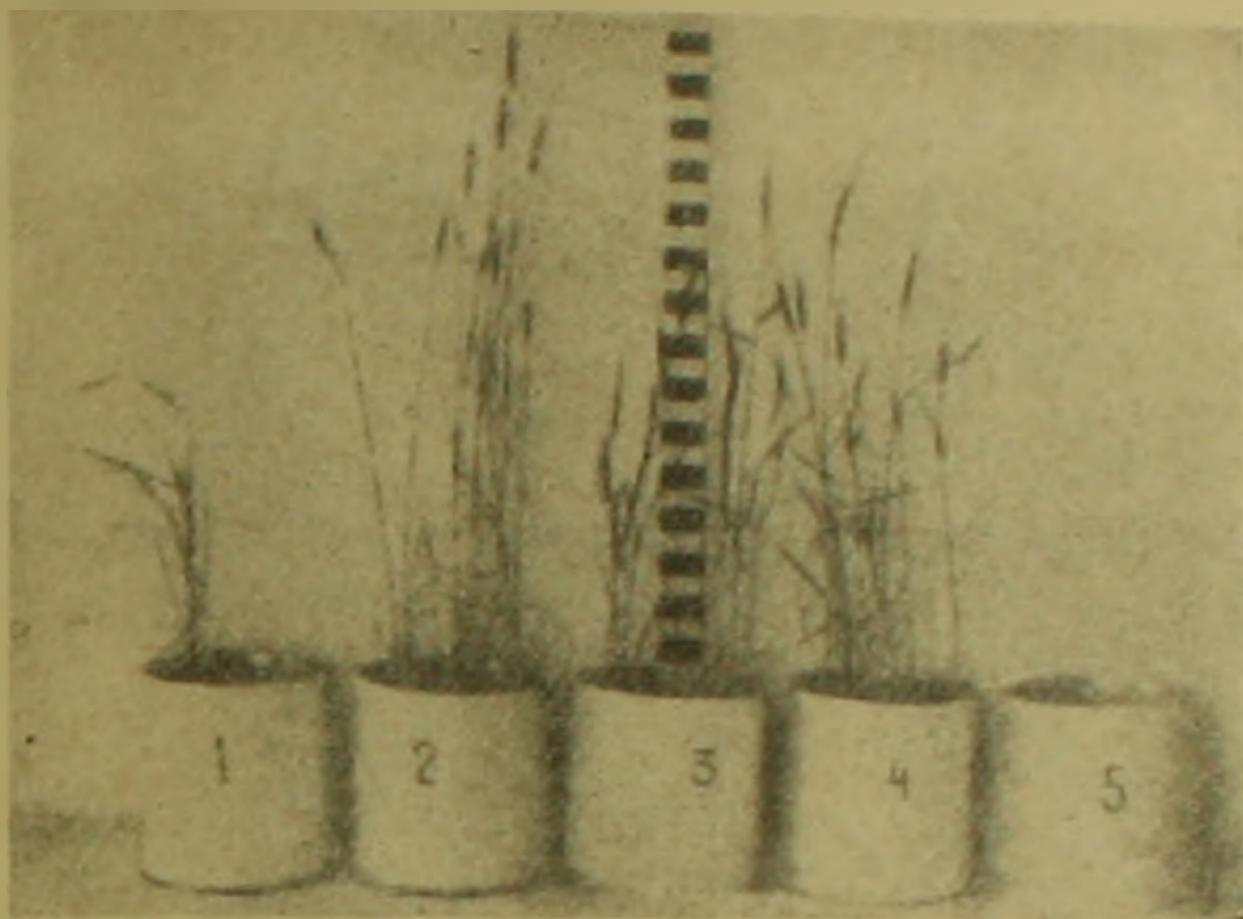
Температура обработки ботки	Доза облучения					
	0		500 р		1500 р	
	длина ростка, см $M \pm m$	длина корешка, см $M \pm m$	длина ростка, см $M \pm m$	длина корешка, см $M \pm m$	длина ростка, см $M \pm m$	длина корешка, см $M \pm m$
<b>Сорт Эринацеум</b>						
20	7,2 ± 0,3	6,9 ± 0,2	7,9 ± 0,3	7,0 ± 0,3	2,8 ± 0,2	1,5 ± 0,1
45	7,8 ± 0,3	7,0 ± 0,3	7,0 ± 0,3	5,6 ± 0,3	4,1 ± 0,2	2,2 ± 0,1
50	6,8 ± 0,3	6,2 ± 0,3	—	—	5,2 ± 0,2	3,3 ± 0,1
55	1,9 ± 0,2	1,0 ± 0,2	3,8 ± 0,3	1,7 ± 0,2	2,3 ± 0,2	1,2 ± 0,1
<b>Сорт Украинка</b>						
20	10,6 ± 0,2	10,2 ± 0,2	10,8 ± 0,2	12,3 ± 0,3	—	3,4 ± 0,2
45	10,8 ± 0,3	10,7 ± 0,2	11,5 ± 0,3	11,7 ± 0,3	—	4,1 ± 0,2
50	11,3 ± 0,2	10,9 ± 0,3	9,7 ± 0,3	6,7 ± 0,3	—	4,7 ± 0,1
55	6,1 ± 0,2	2,2 ± 0,1	7,9 ± 0,3	4,7 ± 0,3	—	3,3 ± 0,1

Обработанные температурой указанным способом и облученные семена сорта Эринацеум в 1963 г. были также высеяны в вегетационные сосуды. Фиг. 1 дает ясное представление о защитном эффекте предварительной теплообработки.

На фиг. 2 и 3 представлены данные об изменении длины ростка и корешков 10-дневных растений в зависимости от теплообработки и рентгенооблучения по сорту Арташати—42. Семена этого сорта, как

уже указывалось, обработаны температурой до и после рентгенооблучения в сухом состоянии.

Здесь тоже наблюдается четко выраженный защитный эффект теплообработки до облучения.



Фиг. 1. Пшеница Эрринацеум. Семена облучались дозой в 1500 р. До облучения семена подвергались термообработке в замоченном состоянии на водяной бане: 1, 20°, 2, 40°, 3, 45°, 4, 50°, 5, 55°.

Так, при облучении дозой в 20000 р без предварительной теплообработки длина ростка составляет 11,57 см, суммарная длина корешков 26,4 см, при облучении же семян, предварительно обработанных температурой, длина ростка и корешков увеличивается, составляя при 60°—15,40 и 40,63 см, при 70°—14,94 и 53,17 см.

Таким же образом изменяется количество корешков и длина наиболее длинного из них.

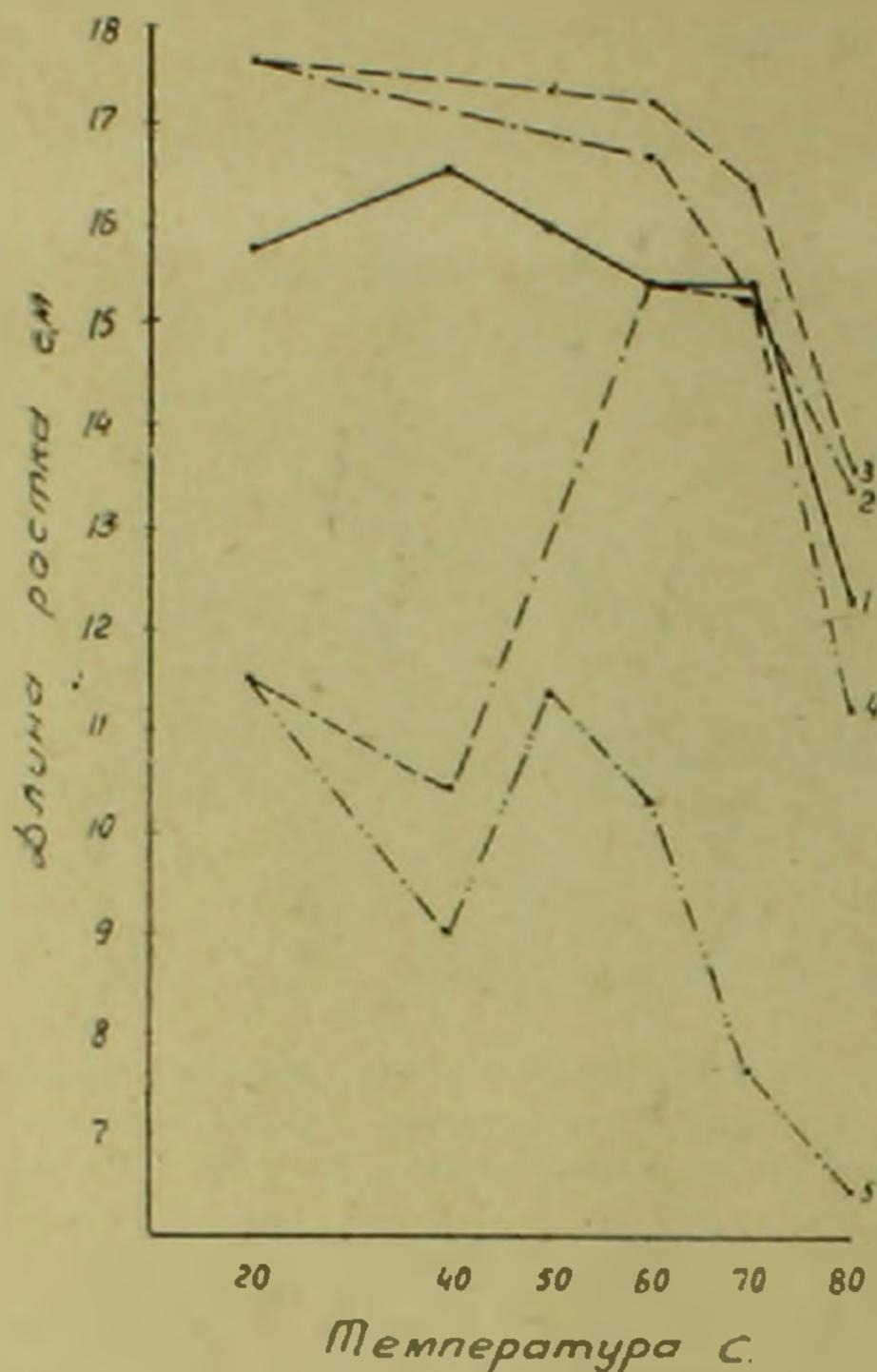
Из приведенных данных (фиг. 2, 3) видно, что теплообработка семян после облучения в противоположность теплообработке до облучения угнетает рост растений.

Так, у растений, полученных из необработанных семян и облученных дозой 20 000 р, длина ростка составляет 11,57 см, а при обработке температурами 60°, 70° и 80° соответственно снижается до 10, 32, 7, 62 и 6,47 см. Общая длина всех корешков одного растения при облучении дозой в 20 000 р составляет 26,40 см, при обработке же указанными температурами снижается соответственно до 24,87, 16,01 и 11,93 см.

Согласно полученным результатам действие стимулирующей дозы облучения (500 р при замоченных и 5000 р при сухих семенах) заметным образом не изменяется от теплообработки.

Из данных ряда исследователей и результатов описанных опытов с убедительной достоверностью вытекает, что предшествующая облучению теплообработка семян в пределах 40—80°, продолжительностью в

10—15 минут, оставляет защитное действие. Такая же теплообработка после облучения, наоборот, усиливает угнетающее действие облучения.



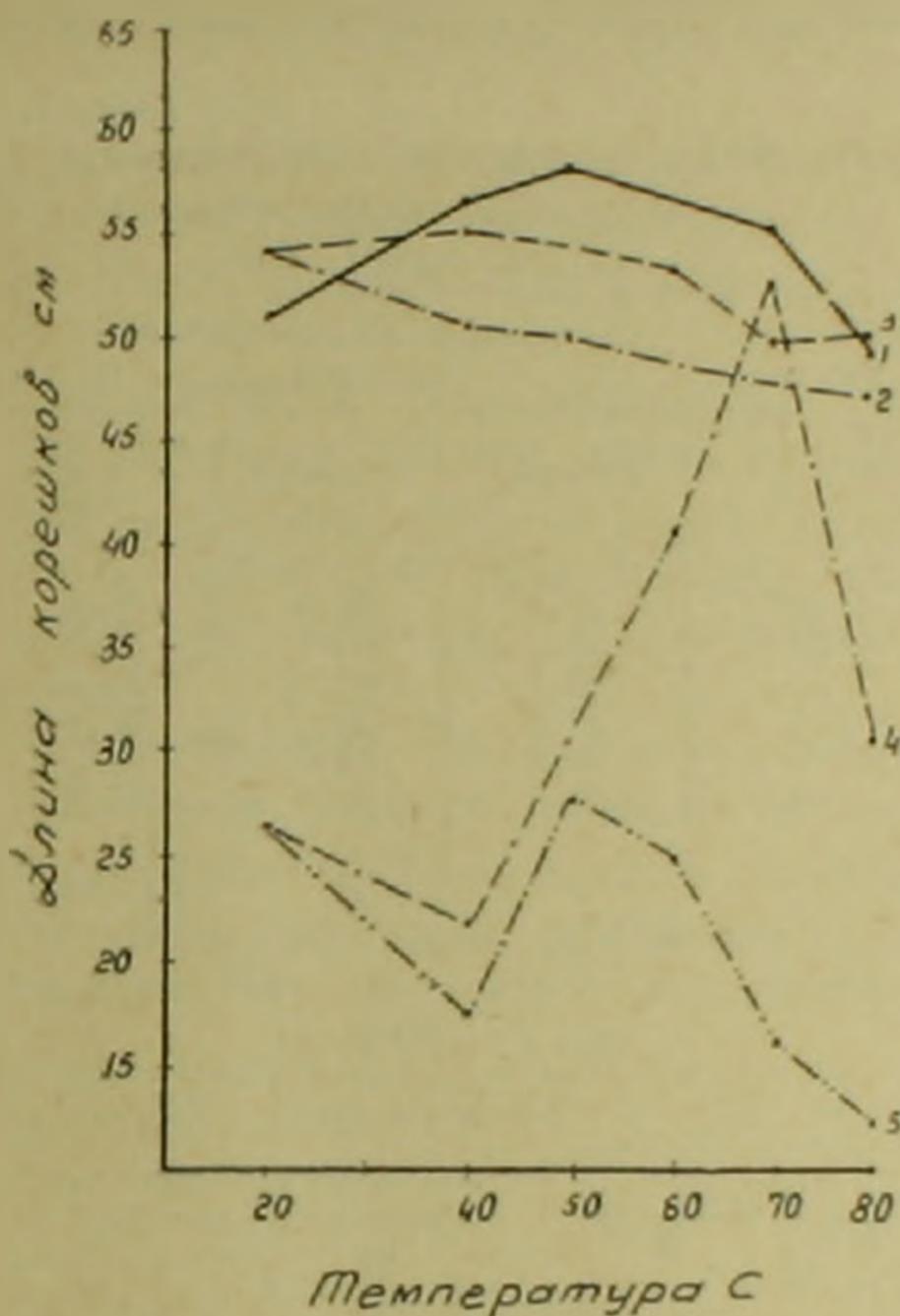
Фиг. 2. Кривые длины ростка 10-дневных растений сорта Арташати—42 в зависимости от температуры термообработки и рентгенооблучения.

1 — без облучения; 2 — термообработка до облучения в 5000 р; 3 — термообработка после облучения в 5000 р; 4 — термообработка до облучения дозой в 20000 р; 5 — термообработка после облучения дозой в 20000 р.

Изучая влияние термического воздействия ( $53^{\circ}$ ) на семена ячменя после облучения гамма-лучами (учитывалось количество хромосомных нарушений), Н. И. Шапиро и Е. М. Бочарова (<sup>3</sup>) приходят к выводу, что действие кислорода и температуры независимо друг от друга и что «...температурное воздействие специфично и не может заменить кислородное».

Как уже указывалось, защитное действие температурных воздействий до облучения Н. И. Шапиро и Е. М. Протопопова (<sup>4</sup>) считают модификацией кислородного эффекта. Ими предполагается, что нагрев семян уменьшает концентрацию кислорода в них или делает клеточные мембраны менее проницаемыми для кислорода, или затрудняет деблокировку мест, чувствительных к кислороду.

Имея в виду повышение частот хромосомных aberrаций вследствие температурного воздействия после облучения, авторы выдвигают рабочую гипотезу, согласно которой повышенная температура усиливает диффузионные процессы в клетках и тем самым увеличивает возможность повреждающего действия кислорода.



Фиг. 3. Кривые общей длины корешков 10-дневных растений сорта Арташати—42 в зависимости от температуры термообработки и рентгенооблучения.

1 — без облучения; 2 — термообработка до облучения дозой в 5000 p; 3 — термообработка после облучения дозой в 5000 p; 4 — термообработка до облучения дозой в 20000 p; 5 — термообработка после облучения дозой в 20000 p.

Многие исследователи, как уже указывалось, предполагают, что термообработка увеличивает проницаемость семян, чем и способствует увеличению их проростаемости и энергии начального роста.

Нами проводились опыты для выяснения вопроса об изменении проницаемости семян пшеницы вследствие термообработки. Проницаемость определялась разницей в весе 100 семян (сорт Арташати—42) после термообработки и после замачивания в воде в течение 6, 12 и 24 часов. Соответствующие данные приведены в табл. 2.

Полученные результаты показывают, что проницаемость обработанных семян значительно ниже.

Изменение проницаемости для газов определялось действием паров эфира на семена. Необработанные и обработанные при разных температурах семена ставились в эксикатор с эфиром в течение 2,4,6 дней, часть семян оставлялась для контроля. Разницей степени всхожести контрольных и подвергшихся действию паров эфира семян судили о проницаемости газов. Соответствующие данные приведены в табл. 3.

Таблица 2

Изменение проницаемости семян пшеницы  
для воды после теплообработки  
(сорт Арташати—42)

Температура обработки	% воды в семенах после замачивания		
	6 часов	12 часов	24 часов
20	21,1	32,8	38,1
40	21,2	31,2	34,8
50	20,3	30,8	33,2
60	20,6	29,8	35,3
70	20,9	29,5	33,6
80	20,6	28,4	34,6

Таблица 3

Влияние паров эфира на всхожесть  
обработанных температурой семян пшеницы  
(сорт Арташати—42)

Температура обработки	Всхожесть семян в %			
	контрольных	подвергнутых действию эфира в течение дней		
		2	4	6
20	96,6	95	100	80
40	100	90	90	—
50	100	90	90	55
70	100	80	80	65
80	100	85	75	60

Полученные данные показывают, что эфир сильнее действовал на семена, подвергшиеся теплообработке.

Из данных этих опытов вытекает, что вследствие теплообработки проницаемость семян пшеницы для воды понижается, а для газов, наоборот, повышается. Эти противоречивые, с первого взгляда, данные можно объяснить антагонизмом воды и воздуха (газов). Возможно, проникший в микропоры семян воздух, препятствует проникновению воды. Из этого вытекает, что защитное действие теплообработки до облучения не связано с изменением концентрации кислорода.

Предположению, что действие теплообработки является модификацией кислородного эффекта, противоречат также следующие данные наших опытов.

При облучении дозой в 5000 р рост растений от предшествующей или последующей облучению семян теплообработки существенно не изменяется.

Известно, что при увеличении концентрации кислорода действие радиации резко усиливается, что не наблюдалось при указанной дозе.

Вышесказанное дает основание предположить, что наблюдаемый термический эффект, по меньшей мере в целом, не сводится к кислородному эффекту. Возможно, что кислородный и термический эффекты имеют общую основу, но первичный механизм их реализации, по-видимому, различен.

Известно, что кислородный эффект является продуктивным методом при изучении многих вопросов радиобиологии (10, 11 и др.).

Нам кажется, что термический эффект тоже таит в себе значительные возможности в этом отношении и может стать методом различных радиобиологических исследований с растительными объектами.

**Выводы 1.** Термическая обработка семян пшеницы температурами 40—80°C, продолжительностью в 10—15 минут, перед рентген-облучением оставляет ясно выраженный защитный эффект на рост растений.

2. Такая же теплообработка после облучения усиливает угнетающее действие облучения.

3. Влияние стимулирующих доз облучения от предшествующей или последующей термической обработки существенно не изменяется.

4. Получены некоторые данные, согласно которым при рентген-облучении семян пшеницы существует специфичное термическое последствие (термический эффект).

Лаборатория радиационной генетики  
АН Армянской ССР

Ի. Ի. ԲԱՐՍԵԱՆ,

### Ջերմային ազդեցությունը ցորենի սերմերի ռենդենյան ճառագայթման ժամանակ

Պորենի Ուկրաինկա. Արտաշատի — 42 և էրինացեում ս-րտերի սերմեր ջերմային ազդեցության են ենթարկվել, ունեցելնյան ճառագայթումից առաջ և հետո:

Սերմերի ջերմամշակումը կատարվել է շոր (տերմոստատում) և թաց (ջրային բազնիքում) եղանակով, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80 ± 1 աստիճանի տակ 10—15 ± 0.5 րոպե տեղաթիվածը: Իրջված սերմերը ճառագայթվել են 500 և 1500 ունեցան. շոր սերմերը՝ 5000 և 20000 ունեցան զոգայով:

Աճի ցուցանիշներ են համարվել 10 օրեկան բույսերի ձիւրի և արմատների երկարությունը, արմատների թանակը:

Փորձերի տվյալները ցույց են տալիս, որ սերմերի ջերմամշակումը ունեցելնյան ճառագայթման ենթարկելուց առաջ անի վրա թողնում է պաշտպանիչ ազդեցություն ճառագայթման ենթարկելուց հետո ջերմամշակումը, ընդհակառակը, թողնում է ճնշող ազդեցություն:

Փորձեր են կատարվել պարզելու սերմերի թափանցկանությունը փոփոխությունը ջերմամշակման հետևանքով:

Ջրի նկատմամբ թափանցկանությունը որոշվել է 100 սերմերի շոր և ջրում 6, 12 և 24 ժամ թրջելուց հետո ունեցած կշիռների տարբերությամբ:

Կազերի նկատմամբ թափանցկանությունը որոշվել է (Ֆիլի գույքիչիների սերմերի ժյունակության վրա թողած ազդեցությամբ):

Այդ փորձերի տվյալները ցույց են տալիս, որ սերմերի ջերմամշակման հետևանքով նրանց թափանցկանությունը չրի նկատմամբ նկատելիորեն փոքրանում է (4—5 տոկոս), իսկ գազերի նկատմամբ՝ բարձրանում:

Արվում են հետևյալ եզրակացությունները:

1. Յարենի սերմերի ջերմամշակումը 10—80° ջերմաստիճանի տակ 10—15 րոպե տևողությամբ, ետիջան նրանց ունեցելիս ճառագայթումը թողնում է պարզ արտաօայտված պաշտպանիչ ազդեցություն:

2. Նույնպիսի ջերմամշակումը ճառագայթումից հետո մեծացնում է ճառագայթման ճնշող ազդեցությունը:

3. Մենտզելյան ճառագայթման խթանող դոզաների ազդեցությունը ետիորդող կամ հաջորդող ջերմամշակումից (ապես չի փոխվում):

4. Ստացվել են մի քանի տվյալներ, որոնց համաձայն ցորենի սերմերի ունեցելիս ճառագայթման մասնակ գոյություն ունի յուրահատուկ ջերմաչին ազդեցություն (ջերմաչին էֆեկտ):

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> К. В. Ватти, В сб. Первичные механизмы биологического действия ионизирующих излучений, Изд. АН СССР, стр. 189, М., 1963. <sup>2</sup> И. А. Захаров, С. Г. Инге-Вектомов, В сб. Первичные механизмы биологического действия ионизирующих излучений, Изд. АН СССР, стр. 194, М., 1963. <sup>3</sup> Н. И. Шапиро и Е. М. Бочарова, ДАН СССР, т. 133, № 2, 1960. <sup>4</sup> Н. И. Шапиро Е. М. Протолопова, „Радиобиология“, т. IV, вып. 2, стр. 270, 1964. <sup>5</sup> П. К. Шкварников, И. В. Черный, „Радиобиология“, т. IV, вып. 2, стр. 297, 1964. <sup>6</sup> С. А. Мазурин, Труды н.-и. Ин-та богарного земледелия Уз. ССР. Вып. 2, 1963. <sup>7</sup> Н. А. Максимов, Краткий курс физиологии растений, М., 1948. <sup>8</sup> П. Д. Углов, „Физиология растений“, № 4, 1963. <sup>9</sup> М. К. Фирсова, Методы исследования и оценки качества семян, М., 1955. <sup>10</sup> С. Н. Ардашников, В сб. Первичные механизмы биологического действия ионизирующих излучений, стр. 15 Изд. АН СССР, М., 1963. <sup>11</sup> П. И. Долин, В сб. Роль перекисей кислорода в начальных стадиях радиобиологического эффекта, стр. 20, Изд. АН СССР, М., 1960. <sup>12</sup> З. Бак, П. Александер, Основы радиобиологии, Изд. АН СССР, М., 1963. <sup>13</sup> И. М. Васильев, Действие ионизирующих излучений на растения, Изд. АН СССР, М., 1962. <sup>14</sup> Н. И. Шапиро, Е. М. Бочарова и В. В. Белицина, ДАН СССР, т. 126, № 1, стр. 191 (1959).

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

И. А. Геворкян

Об изменении свободных аминокислот и растворимых углеводов  
 в семенах озимой пшеницы в процессе яровизации

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 22/1 1965)

Исследования внутренних особенностей индивидуального развития растений, при воздействии на них в определенные сроки пониженными температурами, показали, что, наряду с многочисленными изменениями в обмене веществ, происходят существенные сдвиги также в углеводном и аминокислотном обмене. Эти обменные реакции способствуют в некоторой степени изменению качества углеводов и белков клеток конуса нарастания и определяют направление их дифференциации в сторону формирования генеративных органов.

Исследования, проведенные по превращению растворимых углеводов и свободных аминокислот в процессе яровизации в тканях растений (1-3) в основном велись с целью изучения качественного состава углеводов и аминокислот. Значительный интерес, на наш взгляд, представляет также динамика изменений количественных отношений указанных соединений в процессе яровизации, чему и посвящается наше сообщение. Экспериментальные данные получены в лаборатории физиологии растений Ботанического института АН Армянской ССР. Работа велась под руководством В. О. Казаряна, которому выражаю глубокую благодарность.

Для выяснения состава и содержания растворимых сахаров и свободных аминокислот в ходе яровизации нами подвергались исследованию эндосперм и зародыш семян сорта озимой пшеницы Украинка. С этой целью отобранные семена средней величины были помещены в марлевые мешочки и увлажнены в течение 48 часов, после чего они проращивались при комнатной температуре (20-22°) в течение 24 часов до образования проростков, длиной в 0,5-1 см. Затем проросшие семена помещались в эксикатор при определенной влажности (95% H<sub>2</sub>O + 5% H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) и переносились в холодильник с температурой 2-3°. Через определенные промежутки времени (10, 20, 37, 45, 50 дней) брались пробы семян для хроматографических анализов. Зародыш отделялся от эндосперма острой бритвой, но, невзи-

Варианты опыта	Моносахарозы							
	Глюкоза		Фруктоза		Ксилоза		Сумма	
	энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.
К-покоящееся семя	4,20	3,20	1,20	0,74	—	—	5,40	3,94
К-проросшее семя при повыш. тем.	9,89	4,00	2,87	1,30	2,53	—	15,29	5,30
10 дн. яровиз.	3,57	4,30	2,70	2,70	1,47	2,39	7,74	9,39
20 дн. яровиз.	27,33	18,05	1,40	2,83	3,57	6,77	32,30	27,65
37 дн. яровиз.	30,66	19,38	0,87	2,83	3,57	6,72	35,10	28,93
45 дн. яровиз.	9,40	51,55	0,60	3,22	1,67	12,16	11,67	66,93
50 дн. яровиз.	13,93	53,20	—	6,15	—	18,00	13,93	77,35

рая на тщательное проведение этой операции, все же некоторые следы эндосперма оставались на отрезанном зародыше. Контролем для данного опыта служили эндосперм и зародышевая часть покоящихся семян, а также эндосперм и зародыш семян, проросших в течение 24 часов при комнатной температуре 20—22°.

Исследуемый материал фиксировался в вакуум-сушилке при 70—75°. Дальнейшие анализы по выделению свободных аминокислот и растворимых сахаров проводились по методике, разработанной В. О. Казаряном и Э. С. Авунджяном (4). Количественные определения свободных аминокислот (за исключением пролина) проводились после хроматографического их разделения и перевода в нингидриново-кадмиевый комплекс (5), с использованием соответствующих стандартных кривых. Интенсивность окраски измерялась спектрофотометром (СФ-4) при длине волны 550 мμ.

Количественное определение растворимых углеводов проводилось двумя методами: анилинфталатным методом для определения альдосахаров (6), модифицированным Н. Г. Завадской, Г. И. Горбачевой, Н. С. Мамушиной (7), и резорциновым методом для определения кетосахаров в модификации Кулька (8). Определение количества сахаров проводилось по градуировочным кривым, построенным для каждого сахара отдельно. Интенсивность окраски измерялась спектрофотометром СФ-5 при длине волны 415 мμ. Разделение аминокислот проводилось при помощи одномерной восходящей, а сахаров — круговой хроматограммы. В качестве растворителя использовался раствор Войвуда (9).

Результаты полученных хроматографий (фиг. 1) свидетельствуют об идентичности состава растворимых сахаров зародыша и эндосперма покоящихся семян озимой пшеницы. В обоих случаях обнаружена сахароза и глюкоза. В дальнейшем в процессе прорастания и яровиза-

молл пшеницы в процессе яровизации (в мг на 1 г сухого вещества)

Сахароза		Мальтоза		Сумма		Олигосахара		Рафиноза		Общая сумма	
энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.	энд.	зарод.
4,00	2,00	—	0,63	4,00	2,63	—	—	—	—	9,40	6,57
6,67	3,70	2,83	0,74	9,50	4,44	8,07	—	6,09	—	38,95	9,74
7,33	5,00	1,07	1,17	8,40	6,18	3,53	2,10	6,30	2,00	25,97	19,67
35,67	3,40	4,47	4,10	40,14	7,50	6,13	3,00	16,40	2,93	94,97	41,08
36,33	4,88	7,60	5,54	43,90	10,42	3,55	5,67	14,20	4,00	97,98	49,02
7,33	16,66	2,82	7,82	10,15	24,48	—	4,55	5,47	3,02	27,29	99,00
20,67	20,20	3,73	29,32	23,82	29,52	—	6,21	—	1,90	37,73	115,08

нии семян состав сахаров в них значительно меняется: при прорастании семян в условиях повышенной температуры в результате гидролитического распада запасных углеводов эндосперма происходит соответственное увеличение в нем растворимых сахаров (олигосахара, рафиноза, сахароза, глюкоза и фруктоза). В зародыше в этот период идентифицировано меньшее число сахаров (сахароза, глюкоза и следы фруктозы). Однако в ходе яровизации наблюдается постепенное нарастание в зародыше числа растворимых сахаров и, наоборот, их убывание в эндосперме. Это, видимо, связано с переходом указанных сахаров из эндосперма в зародыш. В результате такого распределения сахаров уже на 50 день яровизации в эндосперме идентифицируются лишь рафиноза, мальтоза, сахароза и следы глюкозы, тогда как в зародыше уже обнаружены олигосахара, рафиноза, мальтоза, сахароза, глюкоза, фруктоза и ксилоза.

Сумма растворимых сахаров в эндосперме и зародыше (табл. 1) увеличивается, хотя в содержании отдельных сахаров наблюдаются значительные различия: наименьшее их количество выявлено в покоящемся семени, где основная часть углеводов представлена в виде крахмала.

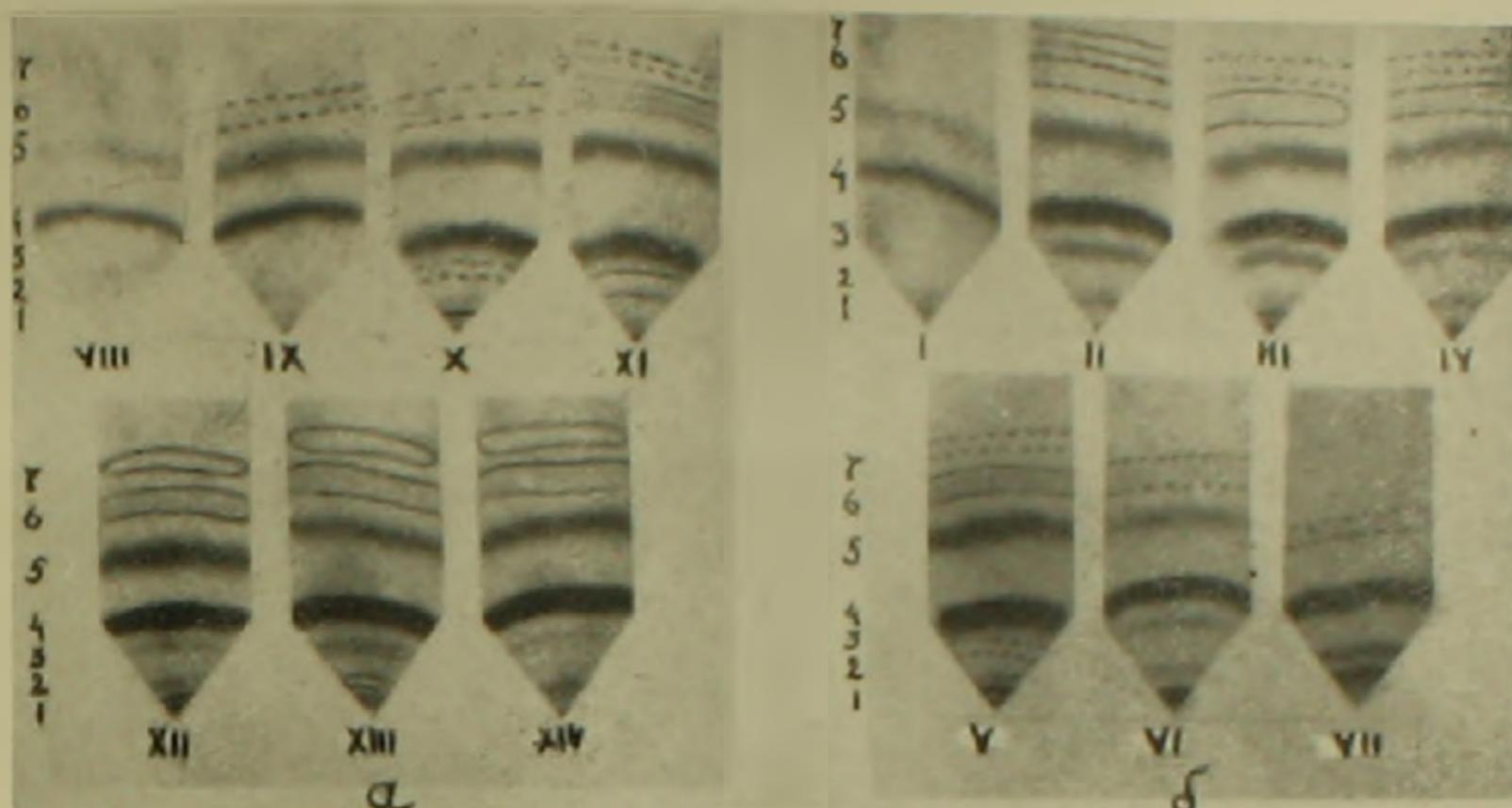
В ходе яровизации значительным изменениям подвергается содержание всех идентифицированных нами сахаров: содержание их увеличивается в зародыше, видимо, вследствие передвижения их из эндосперма в зародыш.

Результаты хроматографического анализа свободных аминокислот (фиг. 2) показали, что как в зародыше, так и эндосперме покоящихся семян имеются почти одни и те же аминокислоты (аспарагин, глицин, серин, треонин, аланин и глютаминовая кислота). Исключение составляют аспарагиновая кислота и лейцины, которые выявлены в зародыше, но отсутствуют в эндосперме. В процессе прорастания в условиях

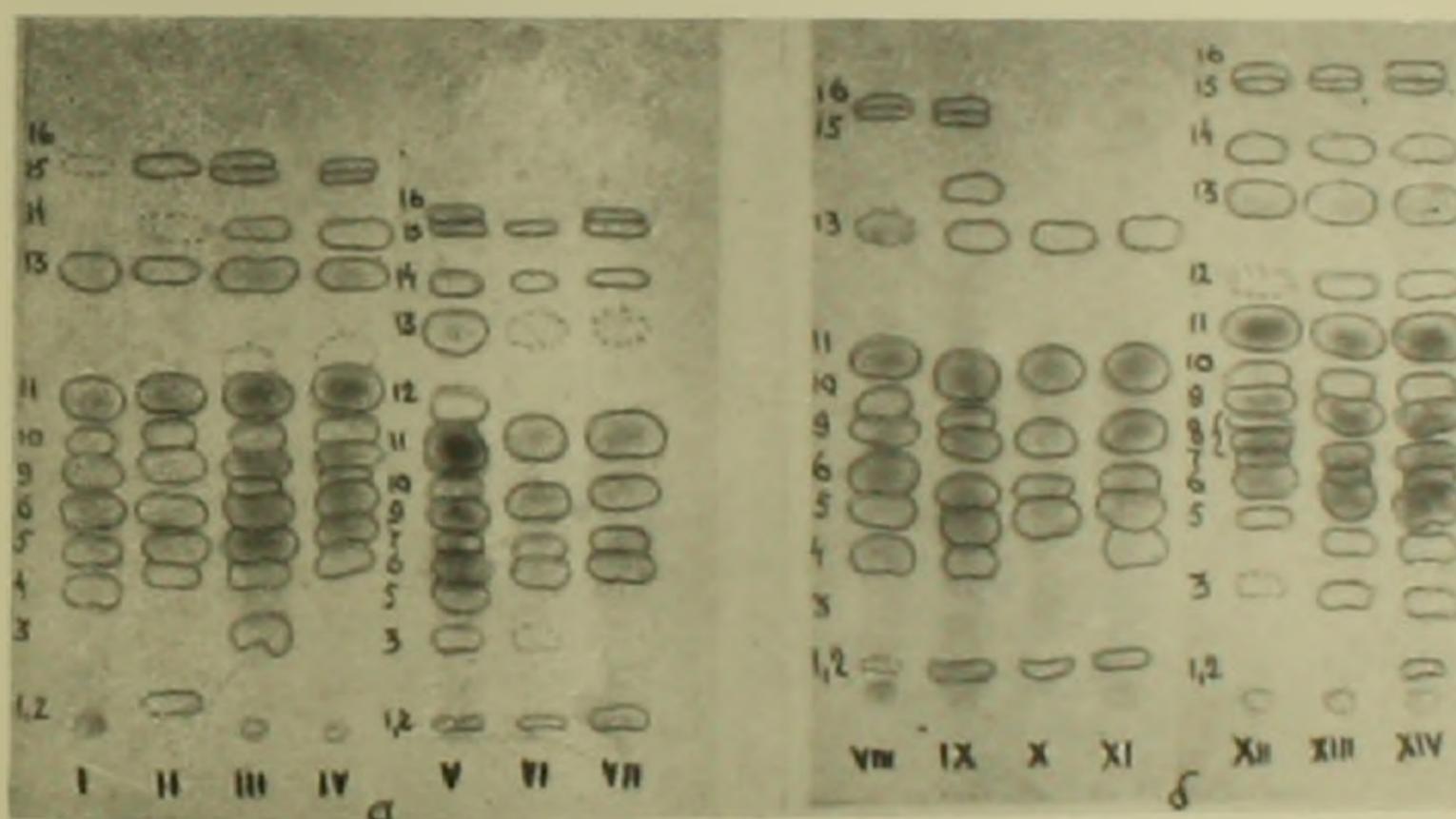
Таблица 2

Содержание свободных аминокислот в эндосперме и зародыше озимой пшеницы  
в процессе яровизации (в мг на 1 г сухого вещества)

Аминокислоты	Контр. покоя- щееся семя		Контр. проросшее семя при повыш. темп		Яровизация в днях									
					10 дней		20 дней		37 дней		45 дней		50 дней	
	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.	эндос.	зарод.
Цистин + цистени	—	—	2,23	4,21	1,97	3,61	1,97	3,41	1,67	7,29	1,26	1,11	1,52	5,10
Лизин	—	—	—	—	3,35	—	—	—	2,95	1,65	следы	1,49	—	1,20
Аспарагин	7,20	3,20	3,46	—	1,13	—	0,93	—	0,38	—	—	—	—	—
Аспарагин. к-та	—	7,60	5,46	1,80	5,25	5,46	4,20	6,36	3,60	1,80	1,19	2,10	2,10	1,28
Серин	0,28	0,45	0,29	0,79	0,37	0,60	0,40	0,34	0,40	0,47	1,16	0,91	0,90	0,69
Глицин	—	0,32	0,74	0,66	0,93	1,05	1,20	1,62	0,77	1,83	0,65	2,00	0,41	1,95
Глутаминов. к-та	0,42	0,48	0,34	0,39	0,56	0,73	0,85	0,75	0,26	0,75	0,51	0,79	0,56	0,79
Треонин	0,27	0,48	0,31	1,47	0,25	0,86	0,50	—	0,24	0,59	0,42	1,12	0,33	0,73
Аланин	0,18	0,21	0,20	1,18	0,32	0,75	0,24	0,33	0,20	1,41	0,28	0,77	0,32	0,87
Аминомасляная к-та	—	—	0,70	—	0,83	0,33	0,82	—	1,22	0,28	1,63	0,39	0,95	0,43
Валин	—	—	0,32	0,95	0,35	0,88	0,50	0,59	0,51	2,29	0,63	1,63	0,46	1,28
Фенилаланин	—	—	1,08	1,41	0,87	1,87	1,17	1,32	1,15	2,32	2,25	2,98	1,28	2,59
Лейцины	—	0,31	0,34	0,81	0,66	0,59	1,02	0,33	0,84	1,17	2,42	1,12	1,08	1,03
Сумма	8,35	13,08	15,47	14,67	16,84	16,73	13,80	14,85	14,19	21,85	12,40	16,31	9,91	16,94



Фиг. 1. Хроматограмма растворимых сахаров в эндосперме (а) и зародыше (б) семени озимой пшеницы сорта Украинка. I, VIII—покоящееся семя, II, IX—семя, проросшее при повышенной температуре, III, X—семя, яровизированное 10 дней, IV, XI—семя, яровизированное 20 дней, V, XII—семя, яровизированное 37 дней, VI, XIII—семя, яровизированное 45 дней, VII, XIV—семя, яровизированное 50 дней. 1—олигосахара; 2—рафиноза; 3—мальтоза; 4—сахароза; 5—глюкоза; 6—фруктоза; 7—ксилоза.



Фиг. 2. Хроматограмма свободных аминокислот в эндосперме (а) и зародыше (б) семени озимой пшеницы сорта Украинка. I, VIII—покоящееся семя, II, IX—семя, проросшее при повышенной температуре, III, X—семя, яровизированное 10 дней, IV, XI—семя, яровизированное 20 дней, V, XII—семя, яровизированное 37 дней, VI, XIII—семя, яровизированное 45 дней, VII, XIV—семя, яровизированное 50 дней. 1, 2—цистин с цистеином; 3—лизин; 4—аспарагин; 5—аспарагиновая кислота; 6—серин; 7—глицин; 8—неидентифицированная аминокислота; 9—глутаминовая кислота; 10—треонин; 11—аланин; 12—пролин; 13—аминомасляная кислота; 14—валин; 15—фенилаланин; 16—лейцин.

повышенной температуры как в зародыше, так и в эндосперме появляются цистин с цистеином, аминоясляная кислота и валин. При воздействии пониженными температурами указанный характер распределения свободных аминокислот не остается постоянным, и происходит дальнейшее изменение их состава: в начале яровизации число аминокислот в эндосперме увеличивается по сравнению с зародышем. В дальнейшем в зародыше появляются некоторые новые аминокислоты, которые в эндосперме исчезают. В результате такого распределения в конце яровизации (50 дней яровизации) число их в зародыше преобладает над их числом в эндосперме.

Эти различия в составе аминокислот наглядно свидетельствуют о том, что в процессе яровизации семян происходит постепенное вовлечение в обмен одних и освобождение других аминокислот. Следовательно, в период яровизации в семенах происходит глубокое преобразование белковых веществ и их компонентов-аминокислот, что отмечено также Т. А. Кирилловой (10).

При сопоставлении результатов анализов по содержанию свободных аминокислот (табл. 2) в эндосперме и зародыше наблюдается следующая закономерность: в зародыше, в процессе яровизации, повышается содержание отдельных аминокислот, причем их максимальное количество обнаруживается при яровизации от 37 до 45 дней. В эндосперме же, наоборот, наибольшее количество аминокислот обнаружено в начале яровизации, затем наступает некоторое снижение, причем наименьшее количество их наблюдается с 37 по 45 день. Это дает нам основание полагать, что увеличение состава и содержания свободных аминокислот в зародыше в процессе яровизации происходит, главным образом, в результате перемещения их из эндосперма, хотя и не исключается возможность образования их при гидролизе белка в самом зародыше. В результате этого содержание как суммы, так и каждой аминокислоты в зародыше преобладает над содержанием последних в эндосперме.

На основании изложенных экспериментальных данных можно констатировать, что характер как углеводного, так и аминокислотного обмена в различных частях семени находится в тесной зависимости от его прорастания и воздействия на него пониженными температурами, вследствие чего увеличивается как состав, так и содержание растворимых углеводов и свободных аминокислот.

Ботанический институт Академии наук  
Армянской ССР

Ի Ա ԿԵՎՈՒԴԱՆ

**ԱՆՆԱՆԱԿԻ ԳՈՐԵՆԻ ԱԵՐՄԻ ԱՄԻՆՈՐՐՈՆԵՐԻ և լուծելի ցախաբերի  
փոփոխությունը լարոփրոպայի բերացում**

*Բույսերի անհատական զարգացման ներքին առանձնահատկությունների առում-  
նախընթացում որոշակի ժամկետներում ցածր ջերմաստիճանի ազդեցությամբ դեպ-*

րում. ցույց են տվել, որ նյութափոխանակության բազմաթիվ փոփոխությունների շար-  
քում տեղի է ունենում նկատելի տեղաշարժ նաև ածխաջրային և ամինոթթվային փոխ-  
անակության մեջ: Վերջինս նպաստում է ածխաջրերի և ամինոթթուների որակի որոշ  
փոփոխությունների անման կոնում և կոզմոնորոշում է նրանց զիջերենցիաբան գեներատիվ  
օրգանների կազմավորման ուղղությունը:

Ելնելով վերոհիշյալից, մեր կողմից ուսումնասիրվել է ազատ ամինոթթուների և  
յուծելի շաքարների կազմը և բանակր աշնանացան ցորենի «Ուկրաինկա» սորտի սերմի  
սազմում և էնզոսպերմում յարովիպացիայի բնթացրում:

Կատարված ուսումնասիրությունների արդյունքները ցույց տվեցին, որ յուծելի  
շաքարների կազմը հանգուտի շրջանում գտնվող սերմի էնզոսպերմում և սազմում միա-  
նման է: Խարովիպացիայի բնթացրում, շաքարների կազմը նրանց մեջ զդայիորեն փոփո-  
խում է՝ սազմի մեջ նկատվում է յուծվող շաքարների կազմի աստիճանաբար ավելացում,  
իսկ էնզոսպերմի մեջ բնզնակառուցը, նրանց կազմը նվազում է: Ուսումնասիրվող շաքար-  
ների պարունակությունը յարովիպացիայի բնթացրում նույնպես ենթարկվում է որոշակի  
փոփոխությունների: Շաքարների քանակը սազմում ավելանում է, իսկ էնզոսպերմում  
բնզնակառուցը՝ նվազում է:

Աշնանացան ցորենի սազմի և էնզոսպերմի ազատ ամինոթթուների կազմի ուսում-  
նասիրությունների արդյունքները ցույց են տալիս, որ ցածր ջերմաստիճանի ազդեցությամբ  
պայմաններում նրանց կազմում տեղի են ունենում որոշակի փոփոխություններ: Թար-  
վիպացիայի սկզբում ազատ ամինոթթուների թիվը էնզոսպերմում սազմի համեմատ ավե-  
լանում է: Հետագայում սազմի բիթներում հանգես են դայի մի քանի նոր ամինոթթու-  
ներ, որոնք անհայտանում են էնզոսպերմում: Այսպիսի տեղաբաշխման հետևանքով յար-  
ովիպացիայի վերջում (յարովիպացիայի 30-րդ) նրանց թիվը սազմում գերազանցում է էնզո-  
սպերմում պարունակվող ամինոթթուների թվից:

Ազատ ամինոթթուների քանակը յարովիպացիայի բնթացրում փոխվում է հետևյալ  
որինաչափությամբ՝ սազմում տեղի է ունենում ազատ ամինոթթուների պարունակության  
աստիճանական աճ, ըստ որում նրանց առավելագույն քանակը ի հայտ է բերվում յար-  
ովիպացիայի 37--43-րդ օրերում: էնզոսպերմում, բնզնակառուցը, ամինոթթուների առավե-  
լագույն քանակը հայտնաբերվում է յարովիպացիայի սկզբում, այնուհետև նրանց քանակը  
նվազում է, ըստ որում նվազագույն քանակը հայտնաբերվում է յարովիպացիայի 37--41  
օրերում, սրա հետևանքով, ինչպես առանձին ամինոթթուների, այնպես էլ նրանց բնզ-  
նակը պարունակությունը սազմում գերազանցում է էնզոսպերմի համեմատությամբ:

Այս տվյալները իրավունք են տալիս նշելու, որ ինչպես ածխաջրային, այնպես էլ  
ամինոթթվային նյութափոխանակությունը սերմերի տարբեր մասերում սերտ կերպով  
կապված են ձյման և ցածր ջերմաստիճանի ազդեցության հետ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А    Գ Ր Ա Վ Ի Ը Ն Ս Ի Թ Ե Յ Ս Ի Ն

1. А. В. Благовещенский, Г. А. Кириллова, ДАН СССР, т. 100, № 1 (1955).  
2. Н. И. Проскурякова, Н. Б. Стрижевская, Углеводно-фосфатный обмен в зароды-  
шках и эндоспермах озимой пшеницы в процессе яровизации, Биохимия зерна, сб. 2,  
Из-во АН СССР, 1944. 3. С. Т. Грецуук, К. Кулька, Wolne aminokwasы w procesie  
jaryzacji ziarna zyto ozimego (Secale cereale L.) Acta Soc. bot. polon., 32, № 2, 1963.  
4. В. С. Казарян, Э. С. Авунобян, ДАН Арм ССР, т. 27, 2 (1958). 5. С. Лисицки и Г.  
Лауренти, Dosage de la leucine de l'isolucine et de phenylalanine des proteines par  
chromatographie sur papier, Bull. Soc. chim. moi., v. 37, № 11, 1955. 6. С. Баар, Quan-  
titative estimation of glucose by paper partition chromatography, Biochem. J., v. 58,  
№ 1, 1957. 7. И. Г. Завадская, Г. И. Горбачева, Н. С. Мамушица, Методика коли-  
чественной бумажной хроматографии сахаров, органических кислот и аминокислот у  
растений, Изд. АН СССР, 1962. 8. Р. Кулька, Colorimetric estimation of ketopentose  
and ketohexoses, Biochem. J., v. 63, № 4, 1956. 9. А. С. Войвуд, A method for the  
estimation of micro amounts of amino nitrogen and its application to paper to frost  
hardness, Arch. Biochem., 23, 1949. 10. Т. А. Кириллова, «Физиология растений», 5,  
2, 1958.

