

ԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
КАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

XL, № 2

1965

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՍՍՐ ԲԱ ԲՊՐԱԿԻԳ-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱ-
ԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ ԲՊՐԱԿԻԳ-անդամ, Վ. Հ.
ԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ԱԶԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների դոկտոր (պատ. խմբագրի տե-
ղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻՐՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ ԲՊՐ-
ԱԿԻԳ-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐՋՈՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ
ԲՊՐԱԿԻԳ-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, շՍՍԻ
ԲԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, շՍՍԻ
ԲԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ, շՍՍԻ
ԲԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ.
ՈՒՊՆՉՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ ԲՊՐԱԿԻԳ-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН, доктор биологических наук
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մարեմասիկա

Ն. Ն. Թովմասյան — Հարթության վրա երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտիկ սիստեմի համար մի եզրային խնդրի մասին

Ս. Ա. Հակոբյան — Անկյունային տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի պարամետրական ներկայացման մասին

Առանձնականության սեռություն

Վ. Ս. Սարգսյան — Բազադրյալ ոչ ռեթոտրոպ պրիզմատիկ ձողերի ոլորումը .

Ֆիզիկա

Է. Դ. Գազազյան և Հ. Ս. Մերգելյան — Հորթ խնդիրը հիդրոդինամիկ ֆերիտով լցված ալիքատարի մեջ

Սան Շի — Ֆերոմագնետիկի մագնիսականացման ջերմաստիճանային կախվածությունը կոնկրետ վիզացիայի էլեկտրոնների մոդելում

Պոլիմերների ֆիզիկա

Ս. Թ. Բարսամյան, Լ. Ս. Տոլալյան և Վ. Ն. Պիկալովա — Մի քանի պոլիդի-վինիլացետալների դիէլեկտրիկական հատկությունները

Անօդանավային էմիսիա

Ս. Ն. Ավագյան, Ս. Ս. Աղաբեկյան և Ա. Վ. Մուշեղյան — Մանգանի և կոբալտի խելատային կոմպլեքսային միացությունների ստացումը

Բիոֆիզիկա

Գ. Վ. Բարսեղյան — Էթանոլամիների ազդեցությունը միոզինի և ալտոմիոզինի մի քանի հատկությունների վրա

Ս. Ա. Տեր-Կարապետյան, Հայկական ՍՍԻ ԳԱ ակադեմիկոս, և Ն. Ն. Մակարովա — Բիոտինի և ազոտի աղբյուրների ազդեցությունը γ-ամինոկարագաթթվի կուտակման վրա՝ կասկած խմորասնկերի կուլտուրայի առանձնահատկությունների հետ

Հիստոֆիզիկա

Հ. Մ. Ջիլինգարյան — Աղիների ներպատային ներվային բջիջների միկրոսկոպիկական ուսումնասիրման նոր մեթոդ և կապարի նստվածքի առաջացման սկզբունքը .

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

<i>Н. Е. Товмасян</i> — Об одной граничной задаче эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости	65
<i>С. А. Акопян</i> — О параметрических представлениях некоторых классов функций, голоморфных в угловых областях	71

Теория упругости

<i>В. С. Саркисян</i> — Кручение неортотропных составных призматических стержней	81
--	----

Физика

<i>Э. Д. Газазян</i> и <i>О. С. Мергелян</i> — Плоская задача излучения в волноводе, заполненном гиротропным ферритом	89
<i>Ян Ши</i> — Температурная зависимость намагниченности ферромагнетика в модели коллективизированных электронов	93

Физика полимеров

<i>С. Т. Барсаян, Л. С. Толапчян</i> и <i>В. Н. Пикалова</i> — Диэлектрические свойства некоторых полидивинилацеталей	101
---	-----

Неорганическая химия

<i>С. А. Авакян, Р. Р. Агабекян</i> и <i>А. В. Мушегян</i> — Получение хелатных комплексов соединений хлоридов марганца и кобальта	107
--	-----

Биохимия

<i>Г. В. Барсегян</i> — Влияние этаноламина на некоторые свойства миозина и актомиозина	109
<i>М. А. Тер-Каранетян</i> , академик АН Армянской ССР, и <i>Е. Н. Макарова</i> — Культуральные особенности влияния биотина и источника азота на накопление γ-аминомасляной кислоты у дрожжей	117

Гистохимия

<i>А. М. Чилингарян</i> — Новая методика для микроскопического изучения интрамуральных нервных клеток кишечника и принцип образования преципитатов свинца в клеточных структурах	123
--	-----

МАТЕМАТИКА

Н. Е. Товмасян

Об одной граничной задаче для эллиптической системы
дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/VIII 1964)

1. В настоящей работе рассматривается следующая задача: в конечной плоской односвязной области D с границей Γ требуется найти регулярное решение эллиптической системы

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

принадлежащее классу $C^1_\alpha(\bar{D})$ и удовлетворяющее граничному условию

$$a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

где $z = x + iy$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ — искомый вектор, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — заданный действительный вектор на Γ , $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — действительные квадратные матрицы n -го порядка на Γ , A , B , C — действительные постоянные квадратные матрицы n -го порядка.

Пусть $z = t(s)$ — параметрическое уравнение границы Γ , где s — длина дуги. Предполагается, что функция $t(s) \in C^3_1(\Gamma)$, а функция f и элементы матриц $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ принадлежат классу $C^1_\alpha(\Gamma)$.

Мы здесь будем изучать задачу (1) — (2) для тех эллиптических систем, для которых характеристическое уравнение

$$\det(A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \quad (3)$$

имеет только простые корни.

Задачу (1) — (2) будем называть нетеровой, если однородная задача (1) — (2) имеет конечное число линейно независимых решений и неоднородная задача разрешима, если функция f подчинена конечному числу условий ортогональности.

Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (1) — (2) изучена в работах⁽¹⁻⁵⁾. В работе⁽⁶⁾ получено достаточное условие нетеровости задачи (1) — (2) (условие Я. Б. Лопатинского). Задачи, рассмотренные в работах⁽¹⁻⁵⁾, удовлетворяют этому условию. В настоящей работе указывается более общее условие, при выполнении которого задача (1) — (2) приводится к эквивалентному одномер-

ному сингулярному интегральному уравнению нормального типа, доказывается нетеровость этой задачи и получена формула для индекса.

2. Пусть характеристическое уравнение (3) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни этого уравнения с положительными мнимыми частями. Общее решение системы (1) в этом случае можно записать в виде (1):

$$u = \operatorname{Re} (a_1 \varphi_1(z_1) + \dots + a_n \varphi_n(z_n)), \quad (4)$$

где $a_1, \dots, a_n$ есть n -мерные постоянные векторы, являющиеся нетривиальными частными решениями уравнений

$$(A + 2B\lambda_k + C\lambda_k^2) a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$z_j = x + \lambda_j y$; $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ — произвольные аналитические функции соответственно в областях $D_1, \dots, D_n$. Область D_j получается из области D при помощи отображения $\varsigma = x + \lambda_j y$. Если $u \in C_2^1(\bar{D})$, то $\varphi_j \in C_2^1(\bar{D}_j)$.

Предположим, что начало координат находится внутри области D . Функции $\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n)$ в точке нуль можно подчинить условиям

$$\operatorname{Re} (a_1 \lambda_1 \varphi_1(0) + \dots + a_n \lambda_n \varphi_n(0)) = 0. \quad (5)$$

При этих условиях $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ будут определяться единственным образом с помощью $u(x, y)$.

Подставляя общее решение (4) в граничное условие (2), получим $\operatorname{Re} (\beta_1 \varphi_1(z_1) + \dots + \beta_n \varphi_n(z_n) + \gamma_1 \varphi_1'(z_1) + \dots + \gamma_n \varphi_n'(z_n))|_{\Gamma} = f$, (6)

где

$$\varphi_j'(z) = \frac{d\varphi_j(z)}{dz}, \quad \beta_j = c a_j, \quad \gamma_j = (a + \lambda_j b) a_j.$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Наложим на векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ следующие условия:

Условие 1. Из векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ можно выбрать векторы $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_k}$, которые линейно независимы в любой точке $z \in \Gamma$, а остальные линейно зависимы от векторов $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_k}$.

Если условие 1 выполняется, то перенумеровав корни характеристического уравнения (3) с положительными мнимыми частями, его можно сформулировать в следующем виде: векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ линейно независимы в любой точке $z \in \Gamma$, а $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ линейно зависимы от $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Мы будем использовать условие 1 в последней формулировке.

Определим векторы $\delta_{k+1}, \dots, \delta_n$ на Γ следующим образом:

$$\delta_j = \beta_j - \sum_{p=1}^k c_{jp} \frac{\cos(v, y) - \lambda_p \cos(v, x)}{\cos(v, y) - \lambda_j \cos(v, x)} \beta_p, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (7)$$

где c_{jp} — функции на Γ , определяемые из уравнений

$$\gamma_j = c_{j1}\gamma_1 + \dots + c_{jk}\gamma_k, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (8)$$

а ν — внутренняя нормаль кривой Γ в точке (x, y) .

Условие 2. Векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_{k+1}, \dots, \delta_n$ линейно независимы в любой точке границы Γ .

Если матрицы $a(z)$ и $b(z)$ постоянны, то очевидно, что условие 1 всегда выполняется. Если $k = n$, то условия 1 и условие 2 совпадают и они равносильны условию Я. Б. Лопатинского ⁽⁶⁾.

При соблюдении условия 1 и условия 2 задача (1)–(2) приводится к эквивалентному одномерному сингулярному интегральному уравнению нормального типа, если использовать интегральные представления аналитических функций $\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n)$, подобранных следующим образом:

$$\varphi_j(z_j) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_j(t) dt_j}{t_j - z_j} + ic_j, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(z_j) = & \int_{\Gamma} \mu_j(t) \ln \left(1 - \frac{z_j}{t_j} \right) ds + ic_j + \int_{\Gamma} \mu_j(t) ds + \\ & + \sum_{p=k+1}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c_{pj}(t) \mu_p(t)}{t_p} \ln \left(1 - \frac{z_j}{t_j} \right) dt_j. \end{aligned} \quad (10)$$

$(j = 1, 2, \dots, k).$

Здесь c_{pj} определяются из (8), $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ — действительные функции, $c_1, \dots, c_n$ — действительные постоянные, i — мнимая единица,

$$\mu_p(t) = \frac{d\mu_p(t)}{dt}, \quad t_j = \xi + \lambda_j \eta, \quad t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad t_p' = \frac{dt_p}{dt}$$

$(j, p = 1, 2, \dots, n).$

В этих интегральных представлениях величины $\mu_j(t)$ и c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) определяются единственным образом по $\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n)$. Используемые здесь интегральные представления аналитических функций $\varphi_j(z_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) являются простыми следствиями интегральных представлений, приведенных в ⁽⁸⁾.

Подставляя интегральные представления аналитических функций $\varphi_j(z_j) = (j = 1, 2, \dots, n)$ из (9) и (10) в граничное условие (6) и переходя к пределу, когда точка (x, y) стремится к границе области D , для определения функций $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ и постоянных $c_1, \dots, c_n$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^n \left[\tilde{a}_j(t) \mu_j(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\beta}_j(t, \tau) \mu_j(\tau) d\tau}{t - \tau} - (\operatorname{Im} \beta_j) c_j \right] = f, \quad (11)$$

где $\bar{\alpha}_j(t)$ и $\bar{\beta}_j(t, \tau)$ есть n -мерные векторы;

$$\bar{\alpha}_j(t) = \pi \operatorname{Im} \left(\gamma_j(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} \right), \bar{\beta}_j(t, t) = -i\pi \operatorname{Re} \left(\gamma_j(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} \right), j = 1, \dots, k,$$

$$\bar{\alpha}_j(t) = \operatorname{Re} \delta_j(t), \bar{\beta}_j(t, t) = i \operatorname{Im} \delta_j(t), j = k + 1, \dots, n.$$

Система интегральных уравнений (11) эквивалентна нашей задаче в следующем смысле: если задача (1)–(2) имеет решение, то существуют действительные функции $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ и действительные постоянные $c_1, \dots, c_n$, удовлетворяющие уравнению (11); если существуют действительные функции $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ и действительные постоянные $c_1, \dots, c_n$, удовлетворяющие уравнению (11), то задача (1)–(2) имеет решение и оно находится при помощи формулы (4), а функции $\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n)$ находятся из (9) и (10).

Отсюда, в силу известных теорем теории сингулярных уравнений ⁽⁸⁾, следует

Теорема. При выполнении условия 1 и условия 2 задача (1)–(2) нетривальна, индекс этой задачи $2(k-l)$, где k число линейно независимых векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, а l — приращение аргумента функции

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi} \det \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1k} & \delta_{1,k+1} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nk} & \delta_{n,k+1} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

при обходе z контура Γ один раз в положительном направлении.

Здесь $\gamma_{ij}, \dots, \gamma_{nj}$ и $\delta_{ip}, \dots, \delta_{np}$ ($j = 1, 2, \dots, k, p = k + 1, \dots, n$) являются компонентами векторов γ_j и δ_p соответственно. Индексом задачи (1)–(2) называется разность числа линейно независимых решений однородной задачи (1)–(2) и числа условий разрешимости неоднородной задачи (1)–(2). При вычислении индекса используется также условие (5).

Ն. Ե. ՅՈՎՍՏՅԱՆ

Հաղորդյալ վրա երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտիկ սխեմի համար մի եզրային խնդրի մասին

Դիտարկված է հետևյալ խնդիրը՝ Γ եզրագիծ ունեցող վերջավոր հարթ միակապ D տիրույթում, պահանջում է գտնել

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

էլիպտիկ սխեմի ուղղությամբ լուծումը, որը պատկանում է $C_a^1(\bar{D})$ դասին և բավարարում է Γ -ի վրա

$$a(z) u_x + b(z) u_y + c(z) u = f \quad (2)$$

եզրային պայմանին, որտեղ $z = x + iy$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ որոշելի վեկտոր է, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — տրված իրական վեկտոր է Γ -ի վրա, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — n կարգի իրական բազմ-...

կուսային մատրիցներ են Γ -ի վրա, A, B, C , — n կարգի իրական հաստատուն քառակուսային մատրիցներ են:

Ցույց է տրվում այն ընդհանուր պայմանը, որի կատարման դեպքում (1) — (2) խնդիրը բերվում է համադրման թիաչափ սինգուլյար նորմալ տիպի ինտեգրալ հավասարմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. В. Бицадзе, „Сообщ. АН Груз. ССР“, 5, № 8 (1944.) ² И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948. ³ М. И. Вишик, О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сборник, 29 (71), 3, 1951. ⁴ Б. В. Боярский, ДАН СССР, т. 124, № 1 (1959) ⁵ А. И. Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем диф. ур. на плоскости. Труды Московского математического общества, т. 10, 1961. ⁶ Я. Б. Лопатинский, Об одном способе приведения граничных задач для системы диф. ур. эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, „Укр. матем. журнал“, т. 5, № 2, 1953. ⁷ А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, М., 1959. ⁸ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946.

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян

О параметрических представлениях некоторых классов функций,
 голоморфных в угловых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/1 1965)

М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян ^(1, 2) рассматривали класс $M_2[\alpha, \omega]$ функций $F(z)$, голоморфных в области

$$\Delta(\alpha) : \{ |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0 < |z| < \infty \}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \infty$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty, \quad -1 < \omega < 1. \quad (1)$$

Ими получено параметрическое представление этого класса, которое дается следующей теоремой.

Теорема А. 1°. Класс $M_2[\alpha, \omega]$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} z \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^\infty E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} z \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha}, \quad \rho \geq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$$

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}, \quad \text{а функции } v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$$

произвольны

2°. Если $F(z) \in M_2[\alpha, \omega]$, то

$$L_\rho(z; F) \equiv \int_0^\infty E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(-)}(\tau; F) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^\infty E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(+)}(\tau; F) \tau^{\mu-1} d\tau = F(z), \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$v_{(\pm)}(\tau, F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau r} - 1}{\pm ir} F(r^{1/\rho} e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}) r^{\mu-1} dr.$$

3°. Формула

$$L_\rho(e^{i\varphi} r^{1/\rho}; F) \equiv r^{1-\mu} \left\{ \frac{d}{dr} \left[r^\mu \int_0^\infty E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\rho} \tau^{1/\rho}; \mu+1) v_{(-)}(\tau; F) \tau^{\mu-1} d\tau \right] + \right. \\ \left. + \frac{d}{dr} \left[r^\mu \int_0^\infty E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\rho} \tau^{1/\rho}; \mu+1) v_{(+)}(\tau; F) \tau^{\mu-1} d\tau \right] \right\} = \\ = F(e^{i\varphi} r^{1/\rho}), \quad (|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < r < \infty)$$

справедлива для всех r при $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и почти для всех r при $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$.

В дальнейшем этот результат был существенно дополнен М. М. Джрбашьяном, а именно им доказана

Теорема Б. 1°. Если $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ и $\kappa = \frac{\alpha\rho}{(2\alpha-1)\rho-2\alpha}$, то справедливо тождество

$$L_\rho(z; F) \equiv 0, \quad z \in \Delta(\kappa, \pi),$$

где $\Delta(\kappa, \pi)$ есть область угла

$$\left\{ |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2\kappa}, \quad 0 < |z| < \infty \right\}.$$

2°. Если $\rho \geq \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, то

$$L_\rho(e^{i\varphi} r^{1/\rho}; F) \equiv 0, \quad |\varphi - \pi| \leq \frac{\pi}{2\kappa}$$

на всей полуоси $(0, \infty)^*$.

Параметрическое представление класса $M_2[\alpha, 0] = M_2[\alpha]$, где $0 < \alpha < \infty$, дано в работе М. М. Джрбашьяна совместно с автором**.

* Теорема Б еще не опубликована.

** Находится в печати.

Это представление осуществляется уже с помощью функции Вольтерра

$$v(z; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{z^{t+\mu}}{\Gamma(t+\mu+1)} dt,$$

обладающей важными асимптотическими свойствами на всей римановой поверхности

$$G: \{ -\infty < \text{Arg } z < \infty, \quad 0 < |z| < \infty \}.$$

В настоящей статье мы устанавливаем, что в представлениях классов $M_2[\alpha, \omega]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty, -1 < \omega < 1\right)$ и $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$ вместо ядер $E_p(z; \mu)$ и $v(z; \mu)$ можно взять значительно более общие ядра, именно обобщенную гипергеометрическую функцию

$${}_pF_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^k \quad (2)$$

в целую функцию вида

$$F(\vartheta; \rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2, \rho_3; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + \vartheta)^{k\rho_1^{-1} + \mu_1} [\Gamma(k\rho_2^{-1} + \mu_2)]^{1/\rho_3}} \quad (3)$$

для класса $M_2[\alpha, \omega]$ и обобщенную функцию типа Вольтерра

$$v_q(z; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(t\beta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(t\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^{t+\mu} dt \quad (4)$$

для класса $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$.

1. Параметрическое представление класса

$$M_2[\alpha, \omega] \left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty, -1 < \omega < 1 \right).$$

Для формулировки теоремы напомним некоторые вспомогательные факты. В работе (3) мы рассматривали следующие функции

$$K_p(s; \mu, \varphi) = \frac{\pi \rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\varphi)} \Psi(s)}{\sin \pi \rho (s + \mu - 1)}$$

$$H_{\rho}^{(\pm)}(s; \mu) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} s} [\Psi(1-s)]^{-1},$$

где

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{\rho}{\delta_1}(s + \mu - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{\rho}{\delta_p}(s + \mu - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}(s + \mu - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s + \mu - 1)\right)},$$

на параметры налагая ограничения

$$\text{a) } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p} \leq 2;$$

$$\text{б) } \mu = \mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \dots - \nu_p + \frac{p-q}{2};$$

$$\text{в) для данного } \rho \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Здесь дополнительно требуем, чтобы

$$\mu_i \rho_i \geq 1, \quad \nu_j \delta_j \geq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, q+1, j = 1, 2, \dots, p).$$

Нами установлено, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$$

пределы в среднем

$$\frac{k_\rho(x, \mu, \varphi)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K_\rho(s; \mu, \varphi)}{1-s} x^{-s} ds$$

и

$$\frac{h_\rho^{(\pm)}(x, \mu)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{H_\rho^{(\pm)}(s; \mu)}{1-s} x^{-s} ds$$

существуют почти всюду и принадлежат классу $L_2(0, \infty)$. Кроме того,

для всех $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right]$ имеем также

$$k_\rho(x, \mu, \varphi) = \int_0^x {}_\rho F_q(e^{i\varphi} t^{1/\rho}) t^{\mu-1} dt,$$

где функция ${}_p F_q(z)$ определяется рядом (2), который сходится на всей плоскости z в силу а) и представляет целую функцию порядка ρ .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1°. Класс $M_2[\alpha, \omega]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty, -1 < \omega < 1 \right)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^\infty {}_\rho F_q(z e^{i \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} \right) \tau^{1/\rho}} \tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau) d\tau + \int_0^\infty {}_\rho F_q(z e^{-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} \right) \tau^{1/\rho}} \tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau) d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha), \quad (1.1)$$

где $v_{(\pm)}(\tau)$ — произвольные функции из класса $L_2(0, \infty)$, при этом

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \dots - \frac{1}{\delta_p} \leq 2 - \frac{1}{\alpha}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \mu &= \mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \dots - \nu_p + \frac{p-q}{2} = \\ &= \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

2°. Если $F(z) \in M_2[\alpha, \omega]$, то справедлива формула

$$\begin{aligned} L_\rho(z; F) &\equiv \int_0^\infty {}_pF_q(ze^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})} \tau^{1/\rho}) \tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau; F) d\tau + \\ &+ \int_0^\infty {}_pF_q(ze^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})} \tau^{1/\rho}) \tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau; F) d\tau = F(z) \quad z \in \Delta(\alpha), \quad (1.2) \end{aligned}$$

где $v_{(\pm)}(\tau; F)$ также принадлежат классу $L_2(0, \infty)$ и почти всюду на $(0, \infty)$ определяются соответственно формулами

$$v_{(\pm)}(\tau; F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{h_\rho^{(\pm)}(r\tau; \mu)}{r} F(r^{1/\rho} e^{\pm i\pi/2\alpha}) r^{\mu-1} dr. \quad (1.3)$$

3°. Формула

$$\begin{aligned} L_\rho^*(e^{i\varphi} r^{1/\rho}; F) &\equiv r^{1-\mu} \left\{ \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{k_\rho\left(r\tau; \mu; \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} + \varphi\right)}{\tau} v_{(-)}(\tau; F) d\tau + \right. \\ &+ \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{k_\rho\left(r\tau; \mu; -\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2\alpha} + \varphi\right)}{\tau} v_{(+)}(\tau; F) d\tau = F(e^{i\varphi} r^{1/\rho}) \\ &\quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < r < \infty \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

справедлива для всех r при $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и почти для всех r при $\varphi =$

$$= \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

4°. В случае $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ для значений

$$\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho} \leq \psi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{\rho}$$

имеет место равенство

$$L_\rho^*(e^{i\psi} r^{1/\rho}; F) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Кроме того, при $\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho} < \arg z < 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{\rho}$, $0 < |z| < \infty$

$$L_{\rho}(z; F) \equiv 0. \quad (1.6)$$

5°. В случае $\rho = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ имеем также равенство

$$L_{\rho}^*(-r^{1/\rho}; F) = 0 \quad (0 < r < \infty). \quad (1.7)$$

Доказательство пункта 1° вполне аналогично доказательству, которое приводится в работе (2). Наметим доказательство остальных пунктов. Пусть $F(z) \in M_2[\alpha, \omega]$, тогда известно (2), что почти всюду существуют граничные значения $F(r^{1/\rho} e^{\pm i\pi/2\alpha}) r^{\mu-1}$ и принадлежат классу $L_2(0, \infty)$, где $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$. Если $F_{\rho}(s, \varphi)$ и $F_{\rho}^{\pm}(s) \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \right)$ преобразования Меллина функций $F(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1}$ и $F(r^{1/\rho} e^{\pm i\pi/2\alpha}) \times \times r^{\mu-1}$ соответственно, то сперва мы устанавливаем, что они связаны формулой

$$F_{\rho}(s; \varphi) = e^{\pm i\rho(s+\mu-1)\left(\frac{\pi}{2\alpha} \mp \varphi\right)} F_{\rho}^{(\pm)}(s) \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \right). \quad (1.8)$$

Теперь, если $V_{(\pm)}(s; F)$ преобразования Меллина функций $v_{(\pm)}(\tau; F)$, то легко проверяются тождества

$$K_{\rho}\left(s; 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho} + \varphi\right) V_{(+)}(1-s; F) +$$

$$+ K_{\rho}\left(s; \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} + \varphi\right) V_{(-)}(1-s; F) = F_{\rho}(s; \varphi) \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \right) \quad (1.9)$$

и

$$K_{\rho}\left(s; -\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2\alpha} + \psi\right) V_{(+)}(1-s; F) + K_{\rho}\left(s; \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{2\alpha} + \right.$$

$$\left. + \psi\right) V_{(-)}(1-s; F) = 0, \quad \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho} \leq \psi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{\rho} \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \right). \quad (1.10)$$

Тождества такого вида для предельного случая $\alpha = \infty$ впервые были установлены М. М. Джрбашяном в работе (4). Из тождеств (1.9) и (1.10) следуют остальные утверждения теоремы.

Примечание. Аналогичная теорема справедлива также в том случае, когда в формулах (1.1) — (1.7) функции ${}_pF_q(z)$, $h_{\rho}^{(\pm)}(x, \mu)$, $k_{\rho}(x, \mu, \varphi)$ заменены соответственно функциями (3),

$$h^{(\pm)}(x, \rho, \mu) = \frac{x}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{H^{(\pm)}(s, \rho, \mu)}{1-s} x^{-s} ds,$$

где

$$H^{(\pm)}(s, \rho, \mu) = \exp \left\{ \pm i \frac{\pi}{2} s + \left[\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} (\mu - s) \right] \log \left[\vartheta - \rho (\mu - s) \right] \right\} \times \\ \times \left[\Gamma \left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} (\mu - s) \right) \right]^{1/\rho_3}$$

и

$$I(x, \rho, \mu, \varphi) = \int_0^x F(\vartheta; \rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2, \rho_3; t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt$$

рассмотренные нами в работе (5). Относительно параметров полагаем

$$\vartheta \geq 1, \mu_2 \rho_2 \geq 1 \\ \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2 \rho_3} \leq 2 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_2} \left(\mu_2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

2°. Параметрическое представление класса $M_2[x]$ ($0 < x < \infty$).

Напомним определения некоторых функций, рассмотренных нами в работе (3). Определение функции $M^{(\pm)}(s)$ дополним следующей формулой

при $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$

$$M(s; \varphi) =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i e^{-i\varphi s} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}, \\ 0, \quad \text{Im } s > 0 \end{cases} \quad \text{Im } s < 0$$

при $\varphi \leq -\frac{\pi}{2}$

$$M(s; \varphi) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{Im } s < 0 \\ -2\pi i e^{-i\varphi s} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}, \\ \text{Im } s > 0 \end{cases}$$

$$H^{(\pm)}(s) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} s} \frac{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(\tilde{\mu} - s)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(\tilde{\mu} - s)\right)}{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(\tilde{\mu} - s)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(\tilde{\mu} - s)\right)}.$$

Относительно параметров полагаем

$$\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \cdots - \frac{1}{\beta_p} = 1,$$

$$\tilde{\mu} = \mu_1 + \cdots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \cdots - \nu_p + \frac{p-q}{2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Пределы в среднем

$$\frac{m(x, \varphi)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{M(s; \varphi)}{1-s} x^{-s} ds$$

и

$$\frac{h^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds$$

существуют почти всюду и принадлежат классу $L_2(0, \infty)$.

2) При $|\varphi| \geq \frac{\pi}{2}$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}$ справедлива формула

$$m(x, \varphi) = \int_0^x p^{\nu_q} \left(e^{i\varphi} t; -\frac{1}{2} \right) dt,$$

где $p^{\nu_q}(z; \mu)$ определяется формулой (4).

Параметрическое представление класса $M_2[\alpha]$ ($0 < \alpha < \infty$) дается теоремой.

Теорема 2. 1°. Класс $M_2[\alpha]$ ($0 < \alpha < \infty$) совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^\infty p^{\nu_q} \left(i z e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \tau; -\frac{1}{2} \right) v_{(-)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty p^{\nu_q} \left(-i z e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}} \tau; -\frac{1}{2} \right) v_{(+)}(\tau) d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где $v_{(\pm)}(\tau)$ — произвольные функции из класса $L_2(0, \infty)$.

Причем

$$\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \dots - \frac{1}{\beta_p} = 1$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_{q+1} - \frac{q+1}{2} = \nu_1 + \dots + \nu_p - \frac{p}{2}.$$

2°. Если $F(z) \in M_2[\alpha]$, то справедлива формула

$$L(z; F) \equiv \int_0^\infty \rho^{\nu_q} \left(i z e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \tau; -\frac{1}{2} \right) v_{(-)}(\tau; F) d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \rho^{\nu_q} \left(-i z e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}} \tau; -\frac{1}{2} \right) v_{(+)}(\tau; F) d\tau = F(z) \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где $v_{(\pm)}(\tau, F)$ также принадлежат классу $L_2(0, \infty)$ и почти всюду на $(0, \infty)$ определяются соответственно формулами

$$v_{(\pm)}(\tau; F) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(r\tau)}{r} F(re^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha}}) dr.$$

3°. Формула

$$L^*(e^{i\varphi} r; F) \equiv \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{m\left(r\tau; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} + \varphi\right)}{\tau} v_{(-)}(\tau; F) d\tau +$$

$$+ \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{m\left(r\tau; -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\alpha} + \varphi\right)}{\tau} v_{(+)}(\tau; F) d\tau = F(e^{i\varphi} r)$$

$$\left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0 < r < \infty \right)$$

справедлива для всех r при $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и почти для всех r при $\varphi =$

$$= \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

4°. При $|\operatorname{Arg} z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \pi$ имеем

$$L(z; F) \equiv 0.$$

Кроме того, при $|\psi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \pi$

$$L^*(e^{i\psi} r; F) \equiv 0 \quad 0 < r < \infty.$$

И в этом случае доказательство основано на легко проверяемых тождествах вида (1.9) и (1.10).

Выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ո. Ա. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Անկլոնային սիուլքներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի
պարամետրական ներկայացումների մասին

Մ. Մ. Ջրբաշյանը և Ա. Ե. Ավետիսյանը (1, 2) դիտարկել էին

$$\Delta(\alpha) : \left\{ |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0 < |z| < \infty \right\}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \infty$$

անկյան մեջ հոլոմորֆ և

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty, \quad -1 < \omega < 1$$

պայմանին բավարարող ֆունկցիաների $M_2[\alpha, \omega]$ դասը նրանց կողմից ստացված է այն դասի պարամետրական ներկայացումը (թեորեմ A), ընդ որում այդ ներկայացումը իրականացնում է Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան՝

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}.$$

Ներկա աշխատանքում ստացված է, որ այդ ներկայացումը պահում է իր ուժը, երբ կորի հանդիսացող Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան փոխարինվում է ավելի ընդհանուր (2) և (3) կորիզներով, պարամետրերի բավական լայն ընտրության դեպքում: Ստացված է նաև, որ Մ. Մ. Ջրբաշյանի հետ համատեղ աշխատանքում դիտարկված $M_2[\alpha, 0] \equiv M_2[\alpha]$ ($0 < \alpha < \infty$) դասի պարամետրական ներկայացումը մնում է իրավացի, երբ այդ ներկայացումը իրականացնող Վոլտերայի ֆունկցիան՝

$$v(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{t+\mu}}{\Gamma(t+\mu+1)} dt$$

փոխարինվում է Վոլտերայի տիպի ընդհանրացված (4) ֆունկցիայով՝

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян, ДАН СССР, 120, № 3, 457—460 (1958).
² М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян, „Сибирский математический журнал“, т. I, № 3, 1960, 383—425. ³ С. А. Акопян, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат. наук, XV, № 1 (1962). ⁴ М. М. Джрбашян, „Известия АН СССР“, серия матем., 19, 133—190 (1955). ⁵ С. А. Акопян, ДАН АрмССР, XXXIV, № 1 (1962).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение неортотропных составных призматических стержней

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/IV 1964)

Задача кручения составного призматического упругого стержня через функцию кручения Сен-Венана была решена Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾, а через функции напряжений Прандтля—К. С. Чобаняном⁽²⁾. Та же задача с учетом линейной ползучести через функцию напряжений исследована Н. Х. Арутюняном и К. С. Чобаняном⁽³⁾, а с учетом нелинейной ползучести рассмотрена в работе⁽⁴⁾.

Задача кручения ортотропного слоистого прямоугольного упругого стержня впервые решена С. Г. Лехницким⁽⁵⁾. Та же задача для изотропного стержня как упругого, так и с учетом ползучести иным методом рассмотрена в работе⁽⁶⁾.

Задача кручения стержней, составленных из различных анизотропных материалов через функцию кручения Сен-Венана, рассмотрена К. И. Боршом⁽⁷⁻⁹⁾. Метод, который ведет к решению этой задачи, основан на идее Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾, а именно решить задачу при помощи обобщенного потенциала. Кручению неоднородных анизотропных упругих цилиндров посвящена работа Чжяо Хуэй-юана⁽¹⁰⁾.

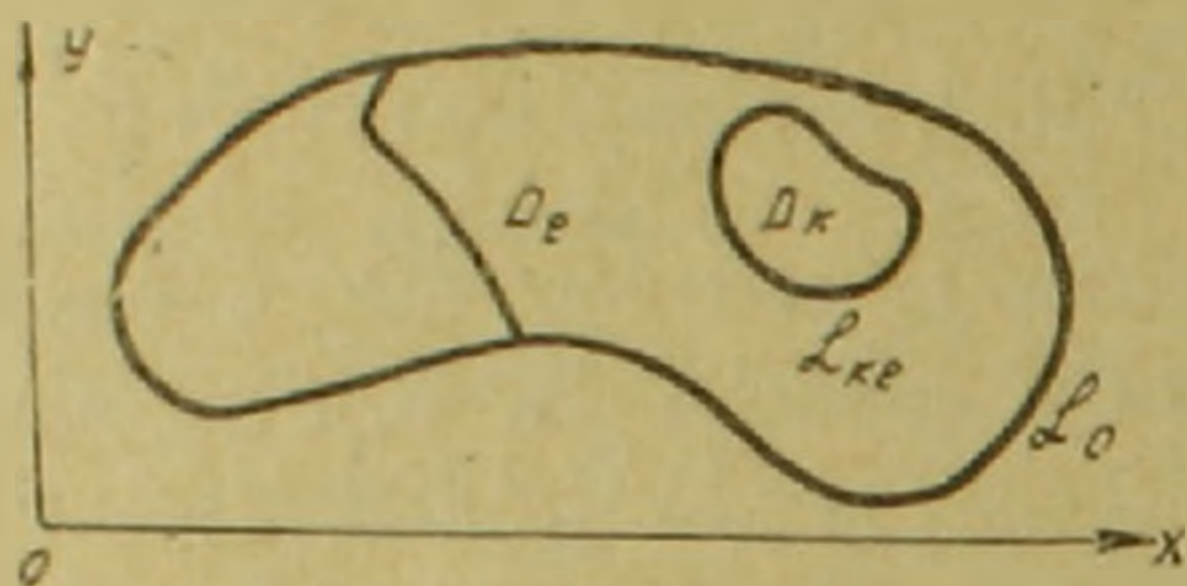
В настоящей работе рассматривается задача кручения стержней, составленных из различных анизотропных (неортотропных) материалов, через функцию напряжений Прандтля. Получены основные дифференциальные уравнения задачи и необходимые условия, при помощи которых однозначно определяется функция напряжений во всей области поперечного сечения стержня. Предложен способ решения полученных дифференциальных уравнений с неразделяющимися переменными. Этим способом полученные дифференциальные уравнения приводятся к системе рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В работе дается обобщение теоремы Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении призматических стержней, составленных из различных неортотропных материалов.

В качестве примера решена задача о кручении неортотропных двухслойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения.

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим анизотропный призматический стержень, составленный из различных анизотропных призматических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям, когда упругие постоянные этих тел различны. Предположим, что в каждой точке каждого тела имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к оси стержня (т. е. каждое тело — неортотропное).

Область поперечного сечения, соответствующую различным материалам стержня, обозначим через $D_1, D_2, \dots, D_n$, линию раздела смежных областей D_k и D_l — через L_{kl} , а контур всей области — через L_0 (фиг. 1). Поместим начало прямоугольной системы координат



Фиг. 1.

x, y, z в некоторой точке концевой сечения стержня, направив ось z параллельно его образующим.

Рассмотрим напряженное состояние данного стержня при воздействии двух закручивающих моментов M_1 , приложенных на его торцах.

Положим, как и при кручении однородных стержней, что компоненты напряжений и деформации, за исключением $\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}$ и $\gamma_{xz}^{(k)}, \gamma_{yz}^{(k)}$, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} = \sigma_y^{(k)} = \sigma_z^{(k)} = \tau_{xy}^{(k)} = 0, \\ \varepsilon_x^{(k)} = \varepsilon_y^{(k)} = \varepsilon_z^{(k)} = \gamma_{xy}^{(k)} = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тогда уравнения равновесия для элемента стержня примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и будут тождественно удовлетворены, если, как обычно, положить

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(k)} = -\frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\Psi_1(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ обозначают функцию напряжений Прандтля $\Psi(x, y)$ в областях $D_1, \dots, D_n$ соответственно.

В рассматриваемом случае обобщенный закон Гука имеет вид ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}^{(k)} = a_{44}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)}, \\ \gamma_{xz}^{(k)} = a_{45}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)}. \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $a_{ij}^{(k)}$ — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44}^{(k)} > 0, \quad a_{55}^{(k)} > 0, \quad a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - [a_{45}^{(k)}]^2 > 0. \quad (1.5)$$

условия неразрывности деформаций в силу (1.1) примут вид

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^{(k)}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^{(k)}}{\partial x} = -2\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

где ϑ — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставляя выражения $\gamma_{xz}^{(k)}$ и $\gamma_{yz}^{(k)}$ из (1.4) в (1.6) и принимая во внимание (1.3), находим

$$a_{44}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} = -2\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.7)$$

Принимая, что боковая поверхность свободна от воздействия внешних сил, условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности L_{kl} области D_k и D_l , а также непрерывность перемещения $\tilde{\omega}$, находим

$$\Psi_0 = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (1.8)$$

$$\Psi_k = \Psi_l, \quad \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_k = \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_l \quad \text{на } L_{kl}, \quad (1.9)$$

где

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial \nu} \right)_k = a_{44}^{(k)} l_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{55}^{(k)} l_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_{45}^{(k)} \left(l_1 \frac{\partial}{\partial y} + l_2 \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$l_1 = \frac{dx}{d\nu}, \quad l_2 = \frac{dy}{d\nu}.$$

Итак, задача о кручении рассматриваемого стержня сводится к определению в D_0 функции $\Psi(x, y)$, удовлетворяющей в соответствии уравнению (1.7), граничным условиям (1.8) и условиям (1.9) на L_{kl} .

При этом ϑ определяется из соотношения

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_t} \quad \left(C_t = \frac{2}{\vartheta} \iint_{D_0} \Psi d\Omega \right). \quad (1.10)$$

§ 2. Обобщение теоремы Бредта. Пусть Γ — замкнутая кривая, целиком лежащая в одной из односвязных или многосвязных областей D_k поперечного сечения стержня. Ω — площади области, ограниченной Γ . Тогда обобщение теоремы Бредта для рассматриваемой задачи будет

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_k ds = -2\vartheta \Omega. \quad (2.1)$$

Пользуясь условием (1.9), формулу Бредта можно обобщить и для такой замкнутой линии Γ , которая лежит внутри D_0 поперечного сечения стержня и пересекает L_{kl} . В этом случае область D , ограниченная линией Γ и линиями L_{kl} , разбивается на несколько областей, в каждой из которых справедлива обобщенная формула Бредта (2.1).

В частном случае, если материал изотропен, то (2.1) совпадает с формулой, полученной в работе (2).

§ 3. О решении задачи кручения неортотропных составных призматических стержней. Обозначим через μ малый параметр для области D_1

$$\mu = \frac{a_{45}^{(1)}}{\sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)}}} < 1. \quad (3.1)$$

Далее, введем новые переменные α и β , связанные со старыми зависимостями ^(12, 13)

$$x = \alpha, \quad y = \beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(1)}}{a_{44}^{(1)}}}. \quad (3.2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.7) и условие (1.9) примут вид

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha^2} - 2\mu \lambda_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha \partial \beta} + \delta_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \beta^2} = -\frac{2}{a_{44}^{(k)}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

$$N_1[u]_k + \mu N_1[u]_k = N_1[u]_l + \mu N_2[u]_l \quad \text{на } L_{kl}, \quad (3.4)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_k(x, y) &= \vartheta u_k(\alpha, \beta), \quad \lambda_k = \frac{a_{45}^{(k)} \cdot a_{44}^{(1)}}{a_{45}^{(1)} \cdot a_{44}^{(k)}}, \quad \delta_k = \frac{a_{55}^{(k)} a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)} a_{44}^{(k)}}, \\ N_1[\]_k &= a_{44}^{(k)} l_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{a}_{55}^{(k)} l_2 \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad N_2[\]_k = -e_k \left(l_1 a_{44}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \beta} + l_2 \sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \\ \bar{a}_{55}^{(k)} &= a_{55}^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}}, \quad e_k = \frac{a_{45}^{(k)}}{a_{45}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представим решение уравнения (3.3) в виде ряда по степеням параметра μ ^(12, 13)

$$U_k(\alpha, \beta) = U_k^{(0)}(\alpha, \beta) + \sum_{l=1}^{\infty} U_k^{(l)}(\alpha, \beta) \cdot \mu^l \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Подставляя значение $U_k(\alpha, \beta)$ из выражения (3.6) в дифференциальное уравнение (3.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим

$$\Delta_k U_k^{(0)} = \rho_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

$$\Delta_k U_k^{(i)} = \rho_k^{(i)}(\alpha, \beta) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

где

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \delta_k \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \rho_k^{(0)} = -\frac{2}{a_{44}^{(k)}}, \quad \rho_k^{(i)}(\alpha, \beta) = 2\lambda_k \cdot \frac{\partial^2 U_k^{(i-1)}}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

При помощи (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) из граничного условия (1.8) и из условий на линии раздела L_{kl} (1.9) легко получаются

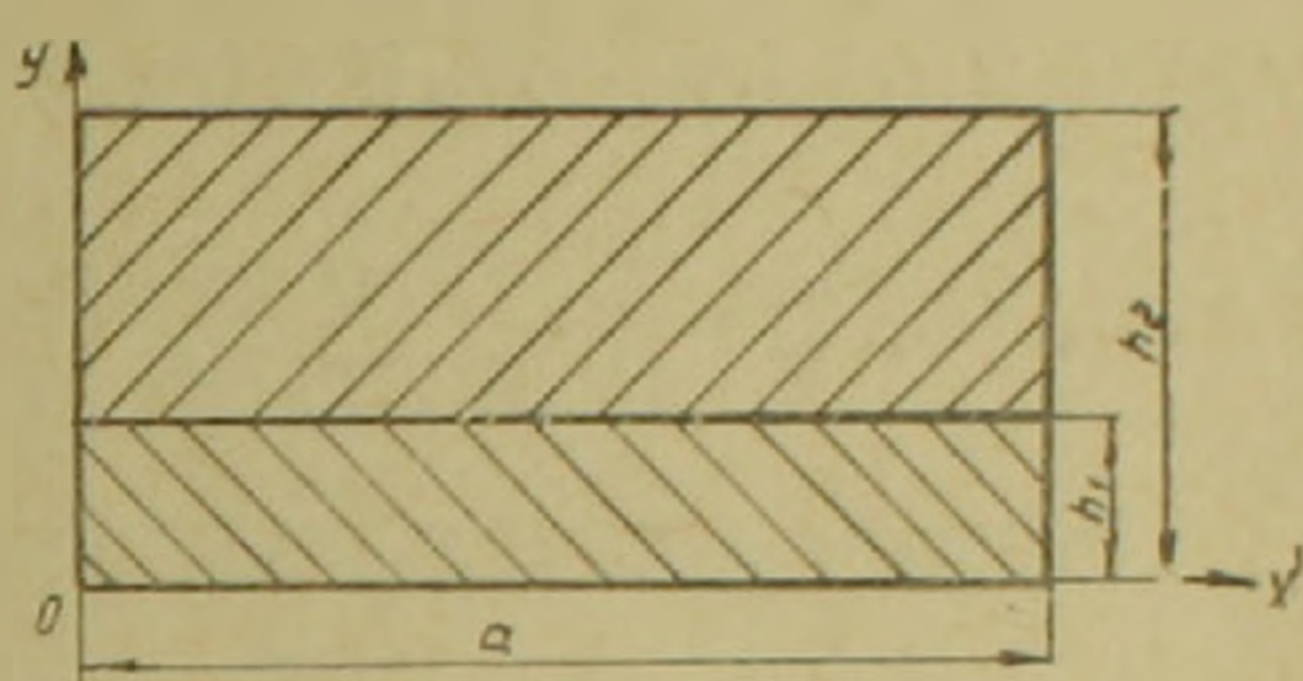
$$U^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{на } L_0, \quad (3.10)$$

$$U_k^{(i)} = U_l^{(i)} \quad \text{на } L_{kl}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1[U^{(0)}]_k &= N_1[U^{(0)}]_l, \\ N_1[U^{(i)}]_k + N_2[U^{(i-1)}]_k &= N_1[U^{(i)}]_l + N_2[U^{(i-1)}]_l \end{aligned} \right\} \quad \text{на } L_{kl} \quad (3.11)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (3.3) с условиями (1.8) и (1.9) приводится к рекуррентным дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными (3.7) и (3.8) с более простыми условиями (3.10) и (3.11). Иначе говоря, задача о кручении неортотропных составных призматических стержней сводится к ряду задач, сходных с задачей о кручении ортотропных составных призматических стержней.

§ 4. Кручение неортотропных двухслойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения (фиг. 2). Нетрудно видеть, что для определения функции напряжений $U_k^{(o)}(\alpha, \beta)$ в каждой области D_k ($k = 1, 2$) нужно решить уравнение (3.7) с условиями



Фиг. 2.

$$U_k^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (4.1)$$

при $\alpha = 0$ и $\alpha = a$

$$U_1^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \quad (4.2)$$

$$U_2^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \beta = \beta_2 \quad (4.3)$$

$$\left(\beta_2 = h_2 \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} \right),$$

$$U_1^{(o)}(a, \beta) = U_2^{(o)}(\alpha, \beta) \quad \text{на } \beta = \beta_1 \quad \left(\beta_1 = h_1 \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} \right), \quad (4.4)$$

$$a_{55}^{(1)} \frac{\partial U_1^{(o)}}{\partial \beta} = a_{55}^{(11)} \cdot \frac{\partial U_2^{(o)}}{\partial \beta} \quad \text{на } \beta = \beta_1. \quad (4.5)$$

Решение уравнения (3.7) представим в виде

$$U_k^{(o)} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + b_{kj}) \sin \frac{\pi j \alpha}{a} \quad (k = 1, 2), \quad (4.6)$$

где

$$t_{kj} = \frac{\pi j}{a} \sqrt{\delta_k}, \quad b_{kj} = \frac{8a^2}{\pi^3 j^3 \delta_k a_{44}^{(k)}}.$$

Постоянные A_{kj} и B_{kj} определяются из (4.2)–(4.5).

Второе приближение строим следующим образом. Подставляя выражения $U_k^{(o)}(\alpha, \beta)$ из (4.6) в (3.8) и учитывая (3.9), получим

$$\Delta_k U_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} E_{jk}(\beta) \cos \frac{\pi j \alpha}{a}, \quad \left[E_{jk}(\beta) = \frac{2\lambda_k \pi j t_{kj}}{a} (A_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta) \right]. \quad (4.7)$$

Из (3.10) и (3.11) для $U_k^{(1)}$ будем иметь следующие граничные условия

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad (k=1, 2) \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = a, \quad (4.8)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0, \quad (4.9)$$

$$U_2^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2, \quad (4.10)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = U_2^{(1)}(\alpha, \beta) \quad \text{на} \quad \beta = \beta_1, \quad (4.11)$$

$$\bar{q}_{12} \cdot \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \beta} = \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \beta} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t_{1n}, t_{2n}, \beta) \sin \frac{\pi n \alpha}{a} \quad \text{на} \quad \beta = \beta_1, \quad (4.12)$$

где

$$C_n(t_{1n}, t_{2n}, \beta) = \bar{q}_{12} [\bar{B}_{n_1}(t_{1n}, \beta) - e_2 \bar{B}_{n_2}(t_{2n}, \beta)], \quad \bar{q}_{12} = \frac{a_{55}^{(1)}}{a_{55}^{(II)}},$$

$$\bar{B}_{nk}(t_{kn}, \beta) = -\frac{4}{a^2} \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{nj}{j^2 - n^2} (A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + b_{kj}).$$

Решение дифференциального уравнения (4.7) представим в виде

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \psi_{nk}(\beta) \sin \frac{\pi n \alpha}{a} \quad (k=1, 2). \quad (4.13)$$

Подставляя значения $U_k^{(1)}$ из (4.13) в уравнения (4.7), для определения $\psi_{nk}(\beta)$ получим следующее уравнение

$$\psi_{nk}^{II}(\beta) - \partial_k \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \cdot \psi_{nk}(\beta) = \bar{G}_{nk}(\beta),$$

$$\left[\bar{G}_{nk}(\beta) = -\frac{4}{\pi a} \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} E_{jk}(\beta) \frac{n}{j^2 - n^2} \right]. \quad (4.14)$$

Решив уравнение (4.14), из (4.13) находим для $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$ следующее значение

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} [C_{nk} \operatorname{sh} t_{kn} \beta + D_{nk} \operatorname{ch} t_{kn} \beta + d_{kn}(\beta)] \sin \frac{\pi n \alpha}{a}, \quad (4.15)$$

где

$$d_{kn}(\beta) = \sum_{j=1, 3}^{\infty} (R_{nkj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + T_{nkj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta),$$

$$R_{nkj} = -\frac{8\lambda_k n j t_{kj}}{a^2 (j^2 - a^2)} \cdot \frac{A_{kj}}{t_{kj} - \partial_k \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2},$$

$$T_{nkj} = -\frac{8\lambda_k n j t_{kj}}{a^2 (j^2 - n^2)} \cdot \frac{B_{kj}}{t_{kj} - \partial_k \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2}.$$

Постоянные C_{nk} и D_{nk} определяются из (4.9)–(4.12).

Таким образом, имея $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$, при помощи (3.8)–(3.11), анало-

гично можно построить решения и в последующих приближениях. Ограничиваясь первыми двумя приближениями, учитывая (3.2), (3.5), (3.6), (4.6) и (4.15), для функции напряжений получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \Psi_k(x, y) = & \vartheta \sum_{j=1, 3} \left[A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + b_{kj} \right] \times \\ & \times \sin \frac{\pi j x}{a} + \mu \vartheta \sum_{n=2, 4}^{\infty} \left[C_{nk} \operatorname{sh} t_{kn} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + D_{nk} \operatorname{ch} t_{kn} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + \right. \\ & \left. + d_{kn}(\beta) \right] \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Имея функцию напряжений, при помощи (1.3) и (1.14) можно определить касательные напряжения и жесткость стержня.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ո. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բաղադրյալ ոչ օրթոտրոպ պրիզմաթիկ ձողերի ոլորումը

Դիտարկված է տարրեր նյութերից կազմված ոչ օրթոտրոպ (ամեն մի կետում առանցքին ուղղահայաց առաձգական մեկ սիմետրիայի հարթություն ունեցող) պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը: Ստացված են հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և անհրաժեշտ պայմանները: որոնց օգնությամբ միարժեք կերպով որոշվում են լարվածության ֆունկցիաները (Պրանդտլի ֆունկցիաները) տրված տիրույթներում:

Առաջարկված է խնդրի լուծման եղանակը: Լուծումները ներկայացված են շարքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր) աստիճանների: Այդ եղանակով, ստացված չանջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումները ընդվում են անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների ուկուրենտ ռիստեմի:

Ընդհանրացված է Բրեդտի թեորեմը:

Որպես կիրառություն լուծված է երկչերտ ուղղանկյուն ընդլայնական կտրվածք ունեցող ոչ օրթոտրոպ ձողի ոլորման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М.—Л., 1954. ² К. С. Чобанян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат., ест. и техн. наук), т. VIII, № 2 (1955). ³ Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян, Известия АН СССР*, отд. технических наук, № 6, 1956. ⁴ М. М. Манукян, В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. XVI, № 3 (1963). ⁵ С. Г. Лехницкий, Инженерный сборник, т. 23, 1956. ⁶ В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 4 (1959). ⁷ К. И. Борш, Studii și cercetări științifice, Acad. RPR, Filiala Iași, VII (1956), 2. ⁸ К. И. Борш, An Studii și cercetări științ. Univ. Iași, Sec. 1, 1957, 3 № 1—2, 207—212. ⁹ К. И. Борш, Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Iași, Mat., 1957, VIII, № 2, 163—190. ¹⁰ Чжяо Хуэй-юаня, Acta mech. sinica, 1959, 3, № 2. ¹¹ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950. ¹² В. С. Саркисян, Известия АН СССР*, ОТН Механика и машиностроение, № 2 (1963). ¹³ В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР*, т. XV, № 5 (1962).

ФИЗИКА

Э. Д. Газазян и О. С. Мергелян

Плоская задача излучения в волноводе, заполненном
гиротропным ферритом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 22/VI 1964)

В работе рассмотрено излучение линейного заряда, пролетающего со сверхсветовой скоростью между двумя идеально проводящими плоскостями. Пространство между плоскостями заполнено средой, обладающей магнитной гиротропией. Вычислены потери энергии на излучение черенковских волн и исследован их спектр. Показано, что излучаемые волны имеют правую и левую эллиптическую поляризацию и дискретный спектр.

1. *Поле линейного заряда в среде, обладающей магнитной гиротропией.* Пусть заряженная нить, имеющая линейную плотность заряда ρ и параллельная оси y , движется вдоль оси z из $-\infty$ в $+\infty$ с постоянной скоростью v . Окружающая среда имеет диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную проницаемость μ_{ik} , где ⁽¹⁾

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu & -ig & 0 \\ ig & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вычислим поле, создаваемое зарядом нити в окружающей среде. Плотность тока, создаваемого нитью, имеет вид

$$\vec{j} = \rho v \cdot \delta(x) \delta(z - vt), \quad (2)$$

а поле будет описываться уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho v \delta(x) \delta(z - vt), \\ \text{rot } \vec{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \delta(x) \delta(z - vt).$$

Представив поле нити в виде двойных интегралов Фурье

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(k) e^{i(k_x x + \frac{\omega}{v} z - \omega t)} dk_x d\omega, \quad (3')$$

из уравнений поля для $\vec{E}(k)$ имеем

$$E_x(\vec{k}) = \frac{i\rho}{\pi \epsilon v^2} \frac{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right) \left(\beta^2 \epsilon \mu - 1\right) - \frac{g^2}{\mu^2} \beta^2 \epsilon \mu \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right)}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right)^2 + \frac{g^2}{\mu^2} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right)} \omega, \quad (4)$$

$$E_y(\vec{k}) = -\frac{\rho}{\pi \epsilon v} \frac{g}{\mu} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \frac{k_x}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right)^2 + \frac{g^2}{\mu^2} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu\right)},$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + k_x^2.$$

Интегрируя по k_x выражения (3') с Фурье-компонентами (4), получим

$$E_z(\vec{r}, t) = -\frac{\rho}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon \alpha} \left\{ \frac{1}{S_1} c_1 e^{i \frac{\omega}{v} S_1 x} + \frac{1}{S_2} c_2 e^{i \frac{\omega}{v} S_2 x} \right\} e^{i \frac{\omega}{v} (z - vt)} d\omega, \quad (5)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \frac{i\rho}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{g} \frac{1}{\epsilon \alpha} \left(e^{i \frac{\omega}{v} S_1 x} - e^{i \frac{\omega}{v} S_2 x} \right) e^{i \frac{\omega}{v} (z - vt)} d\omega,$$

где

$$c_{1,2} = (\alpha \mp 1) (\beta^2 \epsilon \mu - 1 - \frac{g^2}{\mu^2} \beta^2 \epsilon \mu) \pm 2, \quad (6)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{g^2 \beta^2 \epsilon \mu}} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad S_{1,2}^2 = \beta^2 \epsilon \mu - 1 + \frac{g^2}{2\mu^2} \beta^2 \epsilon \mu (-1 + \alpha).$$

Излучение, как следует из формул (5), имеет место при выполнении условий $S_{1,2}^2 > 0$ (либо одного из них, либо обоих).

Потери энергии на излучение единиц длины нити на единице пути описываются формулой:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\rho^2}{v} \int_{S_1^2 > 0} c_1(\omega) \frac{1}{\epsilon \alpha S_1} d\omega + \int_{S_2^2 > 0} c_2(\omega) \frac{1}{\epsilon \alpha S_2} d\omega. \quad (7)$$

Как видно из формул (5) — (7), излучение состоит из волн правой и левой эллиптической поляризации, которым соответствуют первый и второй члены в формуле (7).

2. Поле и излучение в волноводе. Пусть теперь на расстоянии $x = \pm d$ имеются две идеально проводящие плоскости, образующие плоский волновод. Огражденное от стенок волновода поле ищем в виде

$$\vec{E}' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \left\{ \vec{E}_1(\omega) e^{i \frac{\omega}{v} s_1 x} + \vec{E}_2(\omega) e^{-i \frac{\omega}{v} s_1 x} + \right. \\ \left. + \vec{E}_3(\omega) e^{i \frac{\omega}{v} s_2 x} + \vec{E}_4(\omega) e^{-i \frac{\omega}{v} s_2 x} \right\}. \quad (8)$$

Из условия обращения полных полей в нуль на стенках волновода получим

$$E_{1z}(\omega) = E_{2z}(\omega) = \frac{\rho}{4v} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right)}{(\alpha+1) s_2 \varepsilon \alpha} \left(c_1 e^{i \frac{\omega}{v} s_1 d} + c_2 e^{i \frac{\omega}{v} s_2 d} \right) - \right. \\ \left. - i \frac{\cos\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right)}{\varepsilon \alpha} \left(e^{i \frac{\omega}{v} s_1 d} - e^{i \frac{\omega}{v} s_2 d} \right) \right\}, \\ \Delta = \frac{1}{s_2 (\alpha+1)} \sin\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right) \cos\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right) + \\ + \frac{1}{s_1 (\alpha-1)} \sin\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right) \cos\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right). \quad (9)$$

$$E_{3z}(\omega) = E_{4z}(\omega) = \frac{\rho}{4v} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right)}{(\alpha-1) s_1 \varepsilon \alpha} \left(c_1 e^{i \frac{\omega}{v} s_1 d} + c_2 e^{i \frac{\omega}{v} s_2 d} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{\cos\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right)}{\varepsilon \alpha} \left(e^{i \frac{\omega}{v} s_1 d} - e^{i \frac{\omega}{v} s_2 d} \right) \right\}.$$

Из формул (4) — (5) видно, что поле с Фурье-компонентами E_{1z} и E_{2z} дает вклад в излучение при $s_1^2 > 0$, а поле с Фурье-компонентами E_{3z} и E_{4z} при $s_2^2 > 0$.

Потери энергии единицей длины заряда на единице пути определяются тормозящей силой, действующей на заряд со стороны полного поля, и даются следующей формулой

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{i\rho^2}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right)}{\varepsilon \alpha s_2 (\alpha+1)} \left[c_1 \sin\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right) + c_2 \sin\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{\cos\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right)}{\varepsilon \alpha} \sin\left(\frac{s_1 + s_2}{2} \frac{\omega}{v} d\right) \sin\left(\frac{s_1 - s_2}{2} \frac{\omega}{v} d\right) \right\} d\omega, \quad (10)$$

$$\frac{dW_2}{dz} = \frac{i\rho^2}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right)}{\varepsilon \alpha s_1 (\alpha - 1)} \left[c_1 \sin\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right) + c_2 \sin\left(\frac{\omega}{v} s_2 d\right) \right] - \right. \\ \left. - 2 \frac{\cos\left(\frac{\omega}{v} s_1 d\right)}{\varepsilon \alpha} \sin\left(\frac{s_1 + s_2}{2} \frac{\omega}{v} d\right) \sin\left(\frac{s_1 - s_2}{2} \frac{\omega}{v} d\right) \right\} d\omega, \quad (10)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_1}{dz} + \frac{dW_2}{dz}.$$

Интеграл $\frac{dW_1}{dz}$ состоит из вычетов в точках, где $\Delta = 0$ и выполняется условие $s_1^2 > 0$. Он описывает интенсивность излучения правой эллиптической поляризации. Аналогично $\frac{dW_2}{dz}$ есть интенсивность левополяризованного излучения, имеющего место на частотах, удовлетворяющих условиям $\Delta = 0$ и $s_2^2 > 0$.

Как видно из сказанного выше, спектр излучения является дискретным и излучаемые частоты должны удовлетворять условиям

$$\Delta = 0, \quad s_{1,2}^2 > 0.$$

При $g \rightarrow 0$ и $d \rightarrow \infty$ результаты переходят в полученные в (2,3).

Авторы благодарны Г. М. Гарибяну за полезные советы и обсуждения.

Физический институт ГКАЭ
ЦНИ физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

Է. Դ. ԿԱԶԱՋՅԱՆ և Վ. Ս. ՄԵՐԿԵԼՅԱՆ

Հաղթ խնդիրը հիբոստոպ ֆերիտով լցված ալիքատարի մեջ

Ալիքատարի մեջ ղեկարկված է այն դեպքը, երբ անվերջ երկարություն ունեցող լիցքավորված թելը շարժվում է երկու դուգահեռ անվերջ մետաղյա հարթությունների հարթ ալիքատարի առանցքով, որը լցված է հիբոստոպ ֆերիտով: Ցույց է տրված, որ չեռնկոյան ճառագայթման ուղղմանի բավարարման դեպքում այդպիսի թելը ճառագայթում է էլիպտիկ՝ աջ և ձախ րեկոացված ալիքների ղիսկրիտ սպեկտր: Ստացված են բաժանված ճառագայթման դաշտերի և ինտենսիվության համար: Հարթություններն իրարից անսահմանորեն հեռացնելիս ստացվում է անցում ազատ տարածության խնդրին և սպեկտրը դառնում է անընդհատ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Л. Микаелян, Ферриты на сверхвысоких частотах, М., 1963. ² А. И. Морозов, Диссертация, МГУ, 1957. ³ Г. М. Гарибян и О. С. Мергелян, „Известия АН Арм. ССР“, физ.-мат. науки, 12, № 5 (1959).

ФИЗИКА

Ян Ши

Температурная зависимость намагниченности ферромагнетика в модели коллективизированных электронов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 9/VII 1964)

Существующие теории ферромагнетизма переходных металлов по существу базируются либо на модели локализованных электронов, либо на модели коллективизированных (блуждающих) электронов. В первой модели предполагается, что электроны, отвечающие за ферромагнетизм, локализованы на атомах кристаллической решетки и взаимодействуют между собой посредством обменных сил. В этой модели была развита теория спиновых волн (¹⁻³) и рассчитана температурная зависимость намагниченности (^{1, 4, 5}), которая, как известно, пропорциональна $T^{3/2}$ при низких температурах.

Вторая модель, модель коллективизированных электронов, допускает движение „магнитных“ электронов в кристалле и поэтому представляется более реалистичной для описания ферромагнитных металлов (группы железа). Однако в ранних вариантах (⁶) этой модели не учитывалась корреляция между электронами, поэтому низкотемпературная зависимость намагниченности получалась квадратичной или даже экспоненциальной, что не согласовывалось с экспериментальными данными. В более поздних работах (^{7, 8}) рассматривался вопрос об элементарных возбуждениях в такой модели. Оказалось, что наряду с однофермионными возбуждениями (которые только и рассматривались в (⁶)), обладающими непрерывным спектром, существует еще дискретная ветвь возбуждений бозевского типа (спиновая волна), которая соответствует коллективному возбуждению в рассматриваемой модели (см. (⁶)). В настоящей работе с помощью метода двухвременных функций Грина мы получим трансцендентное уравнение, определяющее зависимость намагниченности в модели коллективизированных электронов с учетом эффекта корреляции между взаимодействующими электронами. Оказывается, что в области низких температур наиболее существенный член намагниченности пропорционален $T^{3/2}$, как и в модели локализованных спинов, кроме того, существует еще член T^2 или $\exp(-\Delta E/T)$. При предельном переходе к случаю локализованных электронов полученное уравнение дает известную интерполяционную формулу Боголюбова и Тябликова (^{4, 5}) для гейзенберговской модели.

Рассмотрим систему N взаимодействующих электронов, движущихся в поле ионов кристаллической решетки. Гамильтониан такой системы можно записать в виде*

$$H = \sum_f E(f) a_f^+ a_f + \frac{1}{2} \sum_{f_1 f_2 f_2' f_1'} U(f_1, f_2; f_2', f_1') a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_2'} a_{f_1'}. \quad (1)$$

Введем „коллективные“ двухвременные функции Грина (см. (9))

$$\langle\langle a_{ks}^+ a_{k+qs} | a_{p+qs} a_{ps} \rangle\rangle \text{ и } \langle\langle a_{ks}^+ a_{k+q, -s} | a_{p+q, -s} a_{ps} \rangle\rangle. \quad (2)$$

Расцепляя цепочку уравнений для функций Грина на первом звене (см. (8)), получаем для Фурье-образов функций (2) уравнения

$$\begin{aligned} [E - \bar{E}_s(k+q) + \bar{E}_s(k)] \langle\langle a_{ks}^+ a_{k+qs} | a_{p+qs} a_{ps} \rangle\rangle + [n_s(k) - n_s(k+q)] \times \\ \times \sum_{k'} \{ [U(k', k+q; k'+q, k) - U(k', k+q; k, k'+q)] \times \\ \times \langle\langle a_{k's}^+ a_{k'+qs} | a_{p+qs} a_{ps} \rangle\rangle - U(k', k+q; k, k'+q) \langle\langle a_{k', -s}^+ a_{k'+q, -s} | \times \\ \times a_{p+qs} a_{ps} \rangle\rangle \} = \frac{i}{2\pi} \delta(p-k) [n_s(k) - n_s(k+q)], \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} [E - \bar{E}_{-s}(k+q) + \bar{E}_s(k)] \langle\langle a_{ks}^+ a_{k+q, -s} | a_{p+q, -s} a_{ps} \rangle\rangle + \\ + [n_s(k) - n_{-s}(k+q)] \sum_{k'} U(k', k+q; k'+q, k) \langle\langle a_{k's}^+ a_{k'+q, -s} | \times \\ \times a_{p+q, -s} a_{ps} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \delta(p-k) [n_s(k) - n_{-s}(k+q)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{E}_s(k)$ — одночастичная энергия с учетом самосогласованного потенциала

$$\bar{E}_s(k) = E_s(k) + \sum_{k', s'} [U(k, k'; k', k) - U(k, k'; k, k') \delta_{ss'}] n_{s'}(k'), \quad (5)$$

а $n_s(k) = \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$ — среднее число заполнения в состоянии (k, s) .

Общее исследование особенностей Фурье-образов функций Грина на основании уравнений (3) и (4) проводилось в (8). Для вычисления намагниченности необходимо получить явный вид самих функций. Решить уравнения (3) и (4) в общем виде затруднительно. Имея в виду приложение к d -электронам переходных металлов, в настоящей работе мы будем рассматривать нашу задачу в приближении сильной связи.

Разложим волновую функцию одноэлектронного состояния $\psi_{k, s}(r)$ по функциям Ванье $\Psi_s(r - R_m)$,

* Все обозначения те же, что и в работе (8).

$$\psi_{ks}(r) = N^{-1/2} \sum_m \Psi_s(r - R_m) \exp ikR_m, \quad (6)$$

где R_m — радиус-вектор m -го узла решетки.

Тогда собственная энергия электронов $E(k)$ и матричные элементы взаимодействия $U(k_1, k_2; k_2', k_1')$ выражаются формулами

$$E(k) = N^{-1} \sum_{m, m'} E(R_m, R_{m'}) \exp ik(R_{m'} - R_m), \quad (7)$$

$$U(k_1, k_2; k_2', k_1') = N^{-2} \sum_{m, l, l', m'} U(R_m, R_l; R_{l'}, R_{m'}) \times \\ \times \exp i(k_1' R_{m'} + k_2' R_{l'} - k_2 R_l - k_1 R_m), \quad (8)$$

где

$$E(R_m, R_{m'}) = \int \dot{\Psi}(r - R_m) H(r) \Psi(r - R_{m'}) dr. \quad (9)$$

($H(r)$ — аддитивная часть гамильтониана),

$$U(R_m, R_l; R_{l'}, R_{m'}) = \\ = e^2 \iint \dot{\Psi}(r - R_m) \dot{\Psi}(r' - R_l) \Psi(r' - R_{l'}) \Psi(r - R_{m'}) |r - r'|^{-1} dr dr'. \quad (10)$$

Вследствие малости перекрытия функций Ванье величины $E(R_m, R_{m'})$ и $U(R_m, R_l; R_{l'}, R_{m'})$ быстро уменьшаются при относительном удалении аргументов друг от друга. Единственным исключением является величина $U(R_m, R_l; R_l, R_m)$, которая уменьшается сравнительно медленно, приблизительно как $|R_m - R_l|^{-1}$. В качестве первого приближения ограничимся главными членами в разложениях (7) и (8):

$$E(k) = E_0 + E_1 \varphi(k)/2, \quad (11)$$

$$U(k_1, k_2; k_2', k_1') = N^{-1} [U_0 + U_1 \varphi(k_1 - k_2') + \\ + \sum_R U(0, R; R, 0) \exp i(k_1 - k_1') R]. \quad (12)$$

Здесь $E_0 = E(0, 0)$, $E_1 = 2zE(0, a)$, $U_0 = U(0, 0; 0, 0)$, $U_1 = zU(0, a; 0, a)$, где a — радиус-вектор ближайшего соседа, а z — координационное число. Функция $\varphi(k)$ определяется формулой

$$\varphi(k) = z^{-1} \sum_a \exp ika, \quad (13)$$

где $\sum_a$ означает суммирование по всем ближайшим соседям. Заметим, что вид функции $\varphi(k)$ зависит только от типа кристаллической структуры.

Из-за наличия экспоненциального множителя последний член в первой части равенства (12) имеет заметное значение лишь в весьма небольшой области k -пространства:

$$|k_1 - k_1'| \lesssim V^{-1/2}, \quad (14)$$

где V -объем кристалла.

В работе (8) уже отмечалось, что для параллельных спинов спектр индивидуальных (однофермионных) возбуждений начинается с нуля, а спектр коллективных возбуждений отделен от нуля энергетической щелью значительной величины. Поэтому для сравнительно невысоких температур можно вообще не учитывать последнего, ограничиться только индивидуальными возбуждениями. Совершенно иное дело с антипараллельными спинами. Для них спектр коллективных возбуждений (спиновых волн) начинается с нуля или отделен щелью небольшой величины порядка зеемановской энергии, поэтому его учет является существенным. На основании сказанного в уравнении (3) мы опустим последний член в левой части и приближенно выразим функцию $\langle\langle a_{ks}^+ a_{k+qs} | a_{p+qs}^+ a_{ps} \rangle\rangle$ в виде

$$\langle\langle a_{ks}^+ a_{k+qs} | a_{p+qs}^+ a_{ps} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \delta(p - k) \frac{n_s(k) - n_s(k + q)}{E - \bar{E}_s(k + q) + \bar{E}_s(k)}. \quad (15)$$

Что касается уравнения (4), то его следует решать более тщательно. Подставляя сюда выражения (11) и (12) и имея в виду для последнего члена выражения (12) условие (14), можем написать

$$\begin{aligned} & [E - \bar{E}_\uparrow(k + q) + \bar{E}_\uparrow(k)] \langle\langle a_{k\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} | a_{p+q\uparrow}^+ a_{p\uparrow} \rangle\rangle + \\ & + N^{-1} [U_0 + U_1 \varphi(q)] [n_\uparrow(k) - n_\downarrow(k + q)] \sum_{k'} \langle\langle a_{k'\uparrow}^+ a_{k'+q\uparrow} | a_{p+q\uparrow}^+ a_{p\uparrow} \rangle\rangle = \\ & = \frac{i}{2\pi} \delta(p - k) [n_\uparrow(k) - n_\downarrow(k + q)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь мы уже отбросили члены порядка V^{-1} , исчезающие после предельного перехода $V \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ ($V/N = v = \text{const}$).

Решение уравнения (16) имеет вид

$$\langle\langle a_{k\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} | a_{p+q\uparrow}^+ a_{p\uparrow} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(p - k) [n_\uparrow(k) - n_\downarrow(k + q)]}{[E - \bar{E}_\uparrow(k + q) + \bar{E}_\uparrow(k)] [1 - P(q, E)]}, \quad (17)$$

где $P(q, E)$ — „поляризационный оператор“ в принятом приближении

$$P(q, E) = N^{-1} [U_0 + U_1 \varphi(q)] \sum_k \frac{n_\uparrow(k) - n_\downarrow(k + q)}{\bar{E}_\uparrow(k + q) - \bar{E}_\uparrow(k) - E}, \quad (18)$$

Зная функции Грина, можно по известной спектральной теореме (см., например, (9)) вычислить соответствующие корреляционные функции. Имеем

$$\langle \overset{+}{a}_{k+qs} \overset{+}{a}_{ks} \overset{+}{a}_{ps} \overset{+}{a}_{p+qs} \rangle = \delta(p-k) \frac{n_s(k) - n_s(k+q)}{\exp[|\bar{E}_s(k+q) - \bar{E}_s(k)|/T] - 1}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \langle \overset{+}{a}_{k+q\downarrow} \overset{+}{a}_{k\downarrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k+q\uparrow} \rangle = \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(\omega/T) - 1]^{-1} \text{Im} \frac{n_{\uparrow}(k) - n_{\downarrow}(k+q)}{[\omega - \bar{E}_{\downarrow}(k+q) + \bar{E}_{\uparrow}(k)][1 - P(q, E)]} d\omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Намагниченность системы можно было бы получить стандартным путем как частную производную свободной энергии по внешнему магнитному полю. Однако мы поступим несколько иначе, задавшись целью сразу получить для нее трансцендентное уравнение, не вычисляя свободной энергии. Для этого воспользуемся условием постоянства полного числа частиц N , т. е. $\langle N^2 \rangle - \langle N^2 \rangle = 0$, или

$$\begin{aligned} & \sum_{k, k', s} \langle \overset{+}{a}_{ks} \overset{+}{a}_{ks} \overset{+}{a}_{k's} \overset{+}{a}_{k's} \rangle + 2 \sum_{k, k'} \langle \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k'\downarrow} \overset{+}{a}_{k'\downarrow} \rangle = N^2 = \\ & = N \sum_k [\langle \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \rangle + \langle \overset{+}{a}_{k\downarrow} \overset{+}{a}_{k\downarrow} \rangle]. \end{aligned} \quad (21)$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_{k, k', s} \langle \overset{+}{a}_{ks} \overset{+}{a}_{ks} \overset{+}{a}_{k's} \overset{+}{a}_{k's} \rangle - 2N^{-1} \sum_{k, k'} \langle \overset{+}{a}_{k'\downarrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k'\downarrow} \rangle = \\ & = \sum_{k'} [\langle \overset{+}{a}_{k\uparrow} \overset{+}{a}_{k\uparrow} \rangle - \langle \overset{+}{a}_{k\downarrow} \overset{+}{a}_{k\downarrow} \rangle] = N\sigma, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\sigma = M_z V / N\mu_0$ — относительная намагниченность системы.

Подставляя выражения (19) и (20) в равенство (22) и переходя от суммы к интегрированию, после небольших упрощений получаем

$$\sigma = 1 - \frac{2v}{\pi(2\pi)^3} \int \frac{dq}{U_0 + U_1 \varphi(q)} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(\omega/T) - 1]^{-1} \text{Im} \frac{P(q, \omega)}{1 - P(q, \omega)} d\omega. \quad (23)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (23), зависит от относительной намагниченности σ . Поэтому равенство (23) есть трансцендентное уравнение, определяющее намагниченность σ в зависимости от температуры T и магнитного поля H .

Как уже было показано в (8), особенности функции Грина для антипараллельных спинов при небольших q имеют вид изолированного полюса и линии разреза на действительной оси комплексной плоскости энергии. Соответственно формулу (23) можно записать в виде

$$\sigma = 1 - Q_1 - Q_2, \quad (24)$$

где Q_1 — вклад от коллективного возбуждения (изолированного полюса), Q_2 — вклад от индивидуальных возбуждений (линии разреза).

Рассмотрим сначала вклад Q_1 . Из-за экспоненциального множителя в подынтегральной функции главную роль играют малые значения энергии. Для малых E и q , удовлетворяющих условиям

$$|E - 2\mu_0 H| \ll U_0 \quad (U \equiv U_0 + U_1)$$

$$|q| \ll U_0 \left| \frac{\partial E(k)}{\partial k} \right|, \quad (25)$$

поляризационный оператор $P(q, E)$ можно разложить по степеням E и q

$$P(q, E) = 1 + \frac{1}{U_0} \left\{ E - 2\mu_0 H + U_1 q^2 \sum_{\alpha, \beta} e^\alpha e^\beta \varphi''(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{E_1 q^2}{H_0} \sum_{k, \alpha, \beta} [n_+(k) - n_-(k)] e^\alpha e^\beta \left[\frac{\varphi''_{\alpha\beta}(k)}{2} - \frac{E_1}{U_0} \varphi'_\alpha(k) \varphi'_\beta(k) \right] \right\} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{U_0} (E - E_q), \quad (26)$$

$$(e^\alpha = q^\alpha / |q|).$$

Здесь

$$\varphi'_\alpha(k) = \left. \frac{\partial \varphi(k+q)}{\partial q^\alpha} \right|_{q=0} = i z^{-1} \sum_a a^\alpha \exp i k a$$

$$\varphi''_{\alpha\beta}(k) = \left. \frac{\partial^2 \varphi(k+q)}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right|_{q=0} = -z^{-1} \sum_a a^\alpha a^\beta \exp i k a. \quad (27)$$

Таким образом, для вклада Q_1 получаем простое выражение

$$Q_1 = \frac{2v_0}{(2\pi)^3} \int \frac{dq}{\exp(E_q/T) - 1}, \quad (28)$$

где спектр спиновых волн E_q определяется из формулы (26) (см. также (8)). При низких температурах из (28) получаем: $Q_1 \sim \sigma T^{3/2}$.

Кстати заметим, что если ограничиться только этим вкладом, то из выражений (24) и (28) мы получим

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \text{cth} \frac{E_q}{2T} dq. \quad (29)$$

Уравнение (29) по виду точно совпадает с соответствующим уравнением для гейзенберговской модели, полученным и исследованным в работах Н. Н. Боголюбова и С. В. Тябликова (4) и С. В. Тябликова (5). Единственное различие состоит в спектре спиновых волн E_q : в модели коллективизированных электронов в выражении для E_q появляются дополнительные члены с E_1 , обусловленные подвижностью

электронів і зв'язані з кінцею шириною відповідуючої енергетическої зони. В предельном же случае, когда электроны считаются неподвижными и жестко закрепленными к атомам кристалла, ширина зоны стремится к нулю, и спектр E_q полностью совпадает со спектром спиновых волн в гейзенберговской модели — наша формула для намагниченности переходит в формулу Боголюбова — Тябликова.

Однако подвижность электронов не только вносит поправку в спектр спиновых волн. При ее учете мы должны еще рассматривать вклад в намагниченность от индивидуальных возбуждений. При этом следует различить два случая: а) когда спектр индивидуальных возбуждений отделен от нуля энергетической щелью ΔE :

$$\min [\bar{E}_+(k+q) - \bar{E}_+(k)] = \Delta E > 0 \quad (k \in A); \quad (30)$$

б) когда этот спектр не отделен от нуля щелью, т. е. при некоторых значениях q ($q_1 \leq |q| \leq q_2$)

$$\min [\bar{E}_+(k+q) - \bar{E}_+(k)] = 0. \quad (31)$$

В случае а) главная часть вклада Q_2 экспоненциально зависит от температуры:

$$Q_2 \sim \exp(-\Delta E/T), \quad (32)$$

а в случае б), если считать электроны обоих направлений спинов вырожденными, главная часть вклада Q_2 пропорциональна квадрату температуры:

$$Q_2 \sim T^2. \quad (33)$$

ЦНИ физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

ՅԱՆ ՇԻ

Ֆերմիոնների մագնիսականացման ջերմաստիճանային կախվածությունը կոլեկտիվիզացված էլեկտրոնների մոդելում

Հիմնվելով ^(*)-ի վրա, ստացված է ֆերմիոնական մետաղի մագնիսականացման ջերմաստիճանային կախվածությունը կոլեկտիվիզացված էլեկտրոնների մոդելի համար, էլեկտրոնների միջև կորելյացիայի հաշվառմամբ:

Յածք ջերմաստիճաններում մագնիսականացումը պարունակում է ինչպես սպինային ախրներով պայմանավորված $T^{3/2}$ անդամ, այնպես էլ անհատական զրգոումներով պայմանավորված $\exp(-\Delta/T)$ կամ T^2 անդամ: Լոկալիզացված էլեկտրոնների դեպքի համար ջերմաստիճանային անցման ժամանակ ստացված բանաձևն անցնում է Հեյզենբերգի մոդելի համար Բոդոլյուրովի—Տյաբլիկովի հայտնի ինտեգրալային բանաձևին ^(4, 5):

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ф. Блох, Zs. f. Phys. 61, 206 (1930). ² Т. Хольштейн, Х. Примаков, Phys. Rev. 58, 1098 (1940). ³ Ф. Дайсон, Phys. Rev. 102, 1217, 1230 (1956). ⁴ Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР, т. 126, 53 (1959). ⁵ С. В. Тябликов, УМЖ, 11, 287 (1959). ⁶ Е. С. Стонер, Proc. Roy. Soc. A165, 372 (1938); A169, 339 (1939).

Е. П. Уольфарт, Proc. Roy. Soc. A195, 434 (1949); Rev. Mod. Phys. 25, 211 (1953);
А. Б. Лидьяр, Proc. Phys. Soc. A64, 814 (1951); A65, 885 (1952). ⁷ А. А. Абрикосов,
И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ, 35, 771 (1958); Т. Изуяма, Prog. Theor. Phys. 23, 909
(1960); Д. М. Эдуардс, Proc. Roy. Soc. A269, 338 (1962); М. М. Антонов, Kull. Akad.
Phys. Soc. 8, 227 (1953). ⁸ Ян Ши, ДАН АрмССР, 39, № 2, 73 (1964). ⁹ В. Л. Бонч-
Буревич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, Фи-
зматгиз, 1961.

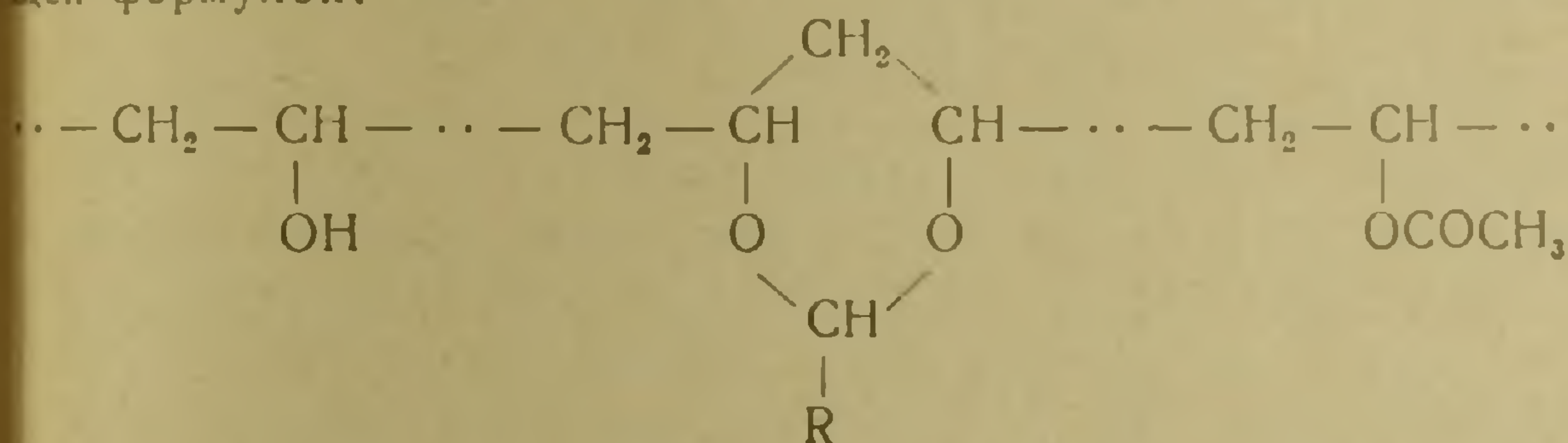
ФИЗИКА ПОЛИМЕРОВ

С. Т. Барсамян, Л. С. Толапчян и В. Н. Пикалова

Диэлектрические свойства некоторых полидивинилацеталей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 8/VII 1964)

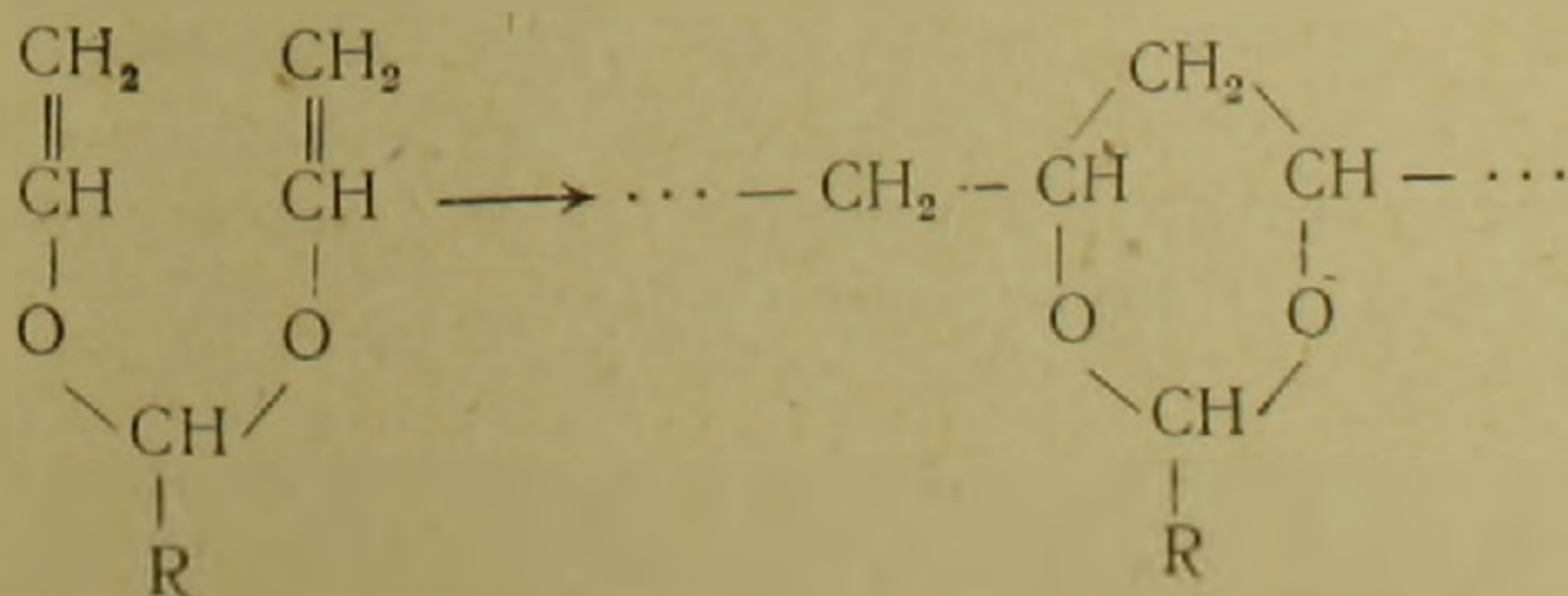
Диэлектрические свойства ацеталевых производных поливинилового спирта были изучены многократно разными исследователями (1-4). Однако эти исследования до сих пор производились на образцах поливинилацеталей, получаемых ацеталированием альдегидами поливинилового спирта, которые наряду с ацетальными группами всегда содержат гидроксильные и некоторое количество остаточных ацетатных групп (5). Схематически они могут быть представлены следующей формулой:



где R является CH₃; C₂H₅; C₃H₇ и т. д.

Поэтому вышеуказанные поливинилацетали значительно отличаются между собой по составу и степени ацеталирования, что, в свою очередь, затрудняет проследить влияние величины альдегидного остатка в гомологическом ряду поливинилацеталей на их диэлектрические свойства.

В последнее время С. Г. Мацояном и сотрудниками (6) был предложен принципиально новый способ получения поливинилацеталей непосредственно из мономеров путем циклической полимеризации дивинилацеталей:



Эта реакция дала возможность получить поливинилацетаты, в которых степень ацеталирования достигает 100%.

В настоящей работе изучены некоторые диэлектрические свойства 100%-ных поливинилацетатов—полидивинилформала (ПДВФ) и полидивинилэтанала (ПДВЭ), а также двух видов технических поливинилбутиралей (ПВБ)—промышленного и лабораторного, полученного циклической сополимеризацией дивинилбутирала и винилацетата последующим омылением ацетатных групп (¹). Состав и свойства исследованных образцов поливинилацетатов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Полимер	Состав звеньев (моль %)			Молекулярный вес	Температура стеклования °С
	ацетальных	гидроксильных	ацетатных		
ПДВФ*)	99,3	0	0	13000-15000	75
ПДВЭ*)	99,4	0	0	11000	50
ПДВБ	99,6	0	0	9600	25
Лабораторный ПВБ**)	55,81	42,93	1,23	67000	—
Промышленный ПВБ**)	51,07	47,28	1,65	10000	—

Результаты исследований температурной зависимости тангенса угла диэлектрических потерь ($\operatorname{tg} \delta$), диэлектрической проницаемости (ϵ') на частотах 400, 1000 и 5000 гц для исследуемых полимеров приведены на фиг. 1 и 2, а зависимости остаточного удельного объемного электросопротивления (ρ_v) от температуры—на фиг. 3. Ход кривых, изображенных на фиг. 1 и 2 в исследованном интервале температур (от +20 до 100°С), подтверждает дипольно-эластичную релаксационную природу (²) этих характеристик. Такое сегментальное движение цепочек макромолекул в интервалах температур размягчения полимеров наблюдается также на кривых (фиг. 3). Температурные интервалы (табл. 2), при которых наблюдаются максимумы $\operatorname{tg} \delta$, сильный прирост ϵ' и разлом на прямых ρ_v характеризуют температуры стеклования (T_g) полимеров (^{3,9}). Последняя сильно зависит от строения и молекулярного веса полимерных молекул.

В случае ПДВФ перемещение таких температурных интервалов ($\operatorname{tg} \delta_{\max}$; прирост ϵ' ; излом ρ_v) в сторону более высоких температур, по сравнению ПДВЭ (табл. 2) объясняется тем, что увеличение величины альдегидного остатка уменьшает T_g (⁵); это так называемый „эффект внутренней пластификации“ (²).

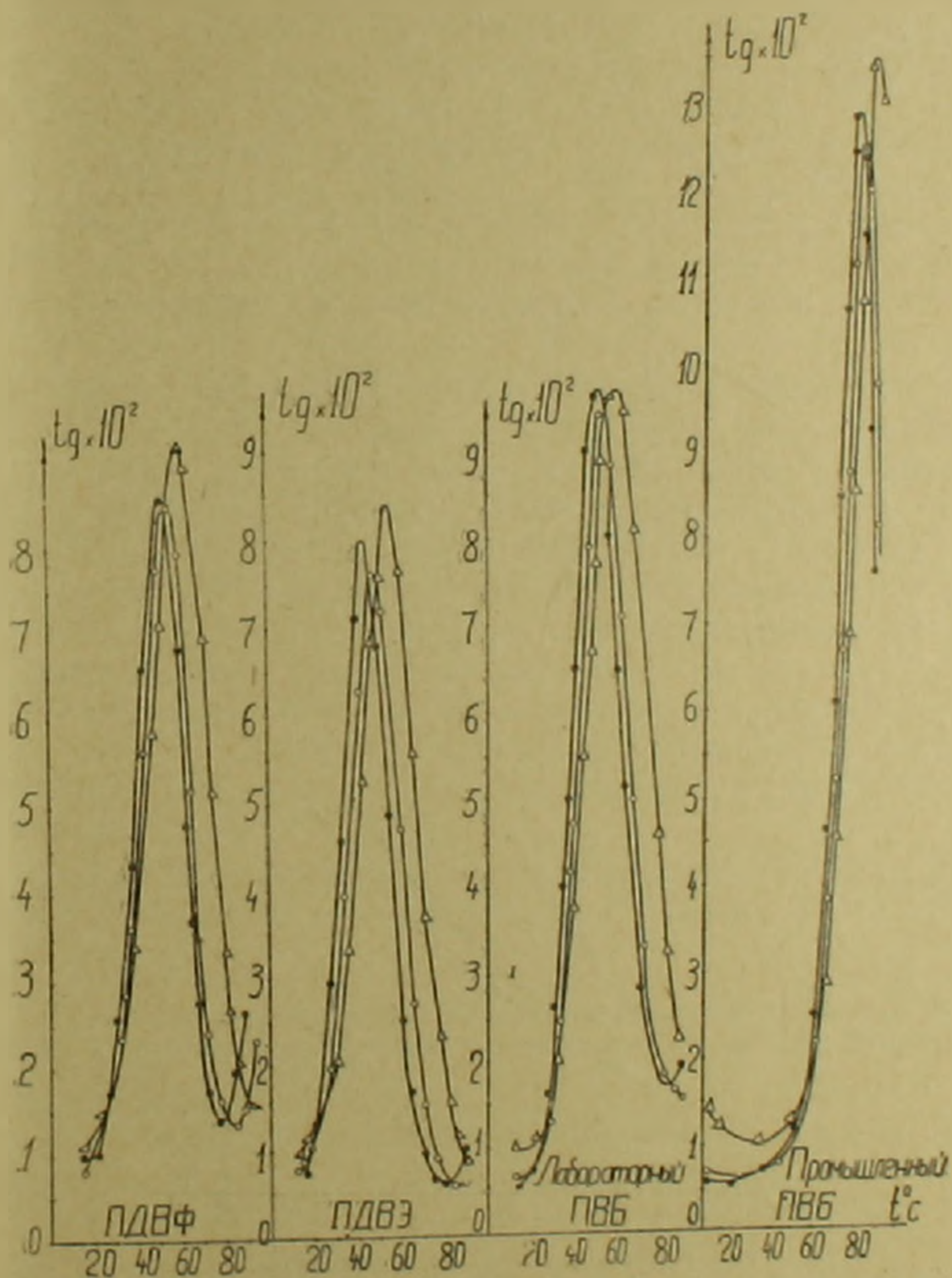
*) Полимеры синтезированы в лаборатории полимеризации и поликонденсации ИОХ АН Армянской ССР.

**) Полимер из серийного выпуска Ереванского завода „Поливинилацетат“.

Таблица 2

Полимер	Температурный интервал $t_{g_{\max}}$ (°C)	Температурный интервал раз- лома зависимости $\rho_0 - t$ (°C)
ПДВФ	51—59	42—50
ПДВЭ	42—55	39—45
Лабораторный ПВБ	50—57	47—52
Промышленный ПВБ	80—90	72—81

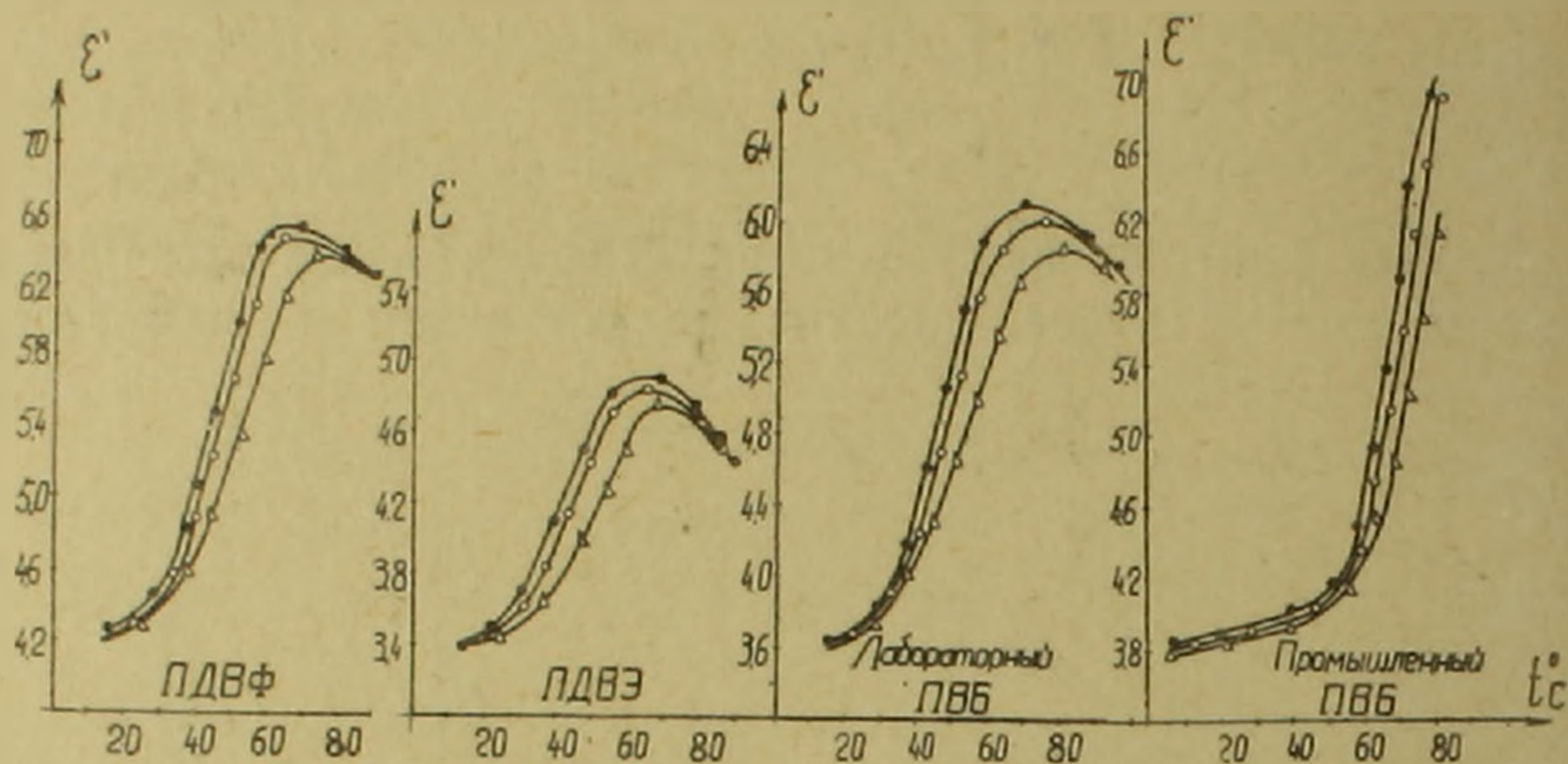
В случае промышленного ПВБ перемещение вышеуказанных температур в сторону более высоких по сравнению с лабораторным



Фиг. 1. Зависимость $\text{tg } \delta$ от температуры.
Частоты: — ● — 400 гц; ○ — 1000 гц; △ — 5000 гц.

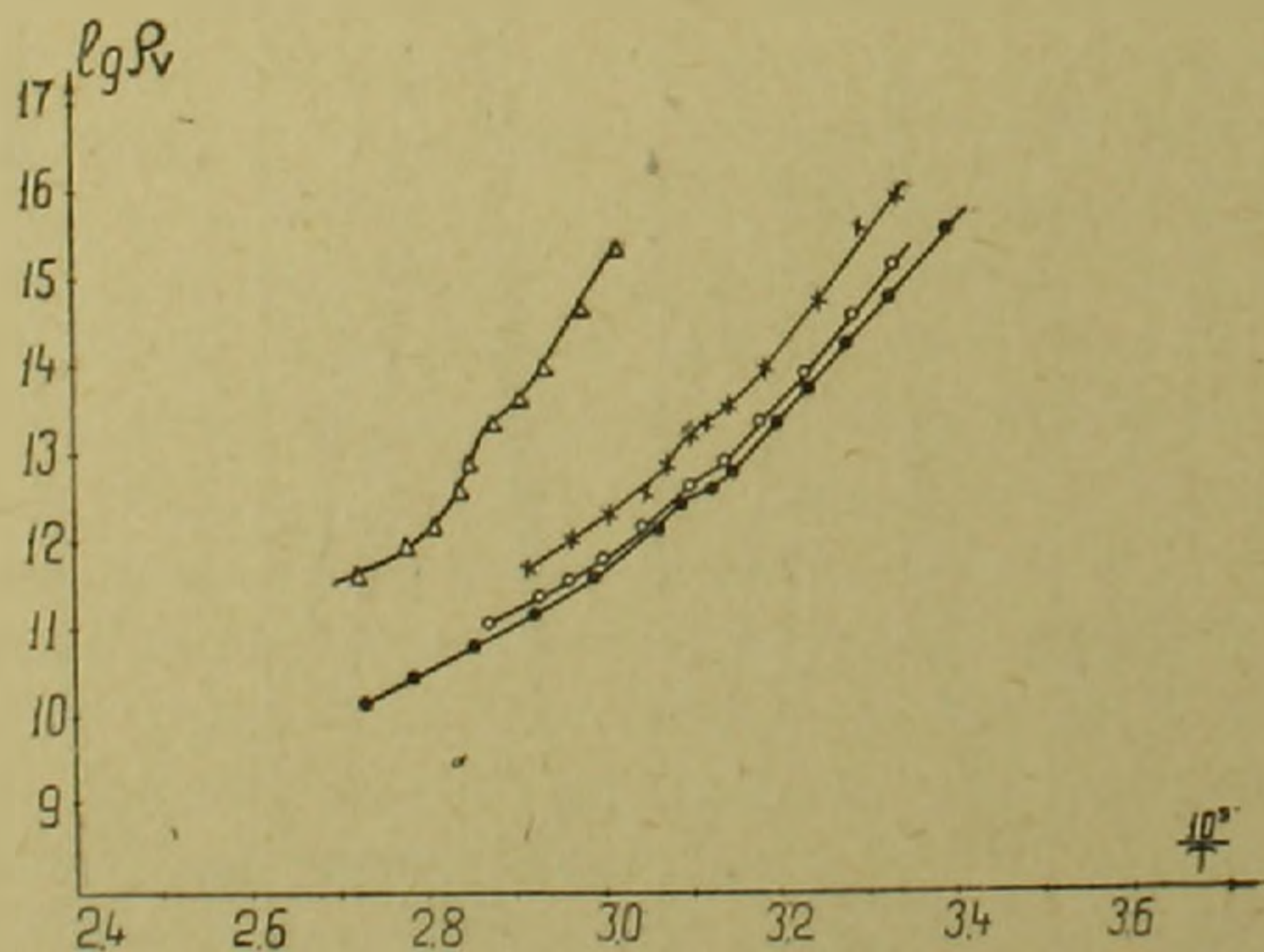
ПВБ, как мы предполагаем, зависит от большой разницы молекулярных весов этих полимеров — более чем в 6,5 раз (табл. 1).

Сравнивая температурные интервалы $\lg \delta_{\max}$ лабораторного ПВБ с ПДВФ или с Тс ПДВБ (табл. 1 и 2), замечаем, что лабораторный ПВБ имеет более высокую температуру стеклования. Это можно объ-



Фиг. 2. Зависимость ϵ' от температуры.
Частоты; — ● — 400 гц; ○ — 1000 гц; Δ — 5000 гц.

яснить замещением ацетальных групп у лабораторного ПВБ сильно полярными и более малообъемными гидроксильными и ацетатными группами. Эти группы, которые придают полимерам более сильные внутри- и межмолекулярные взаимодействия, составляют не менее 50 моль %. На этот эффект не может повлиять фактор молекулярных весов, так как полимеры, кроме промышленного ПВБ, имеют почти одинаковые молекулярные веса (табл. 1).



Фиг. 3. Зависимость ρ_v от температуры.
● — ПДВФ; ○ — ПДВЭ; X — лабораторный ПВБ;
Δ — промышленный ПВБ.

Вышеуказанное заключение можно сделать также для зависимостей $\rho_v - t^{\circ}\text{C}$.

Завышенные значения ϵ' и $\text{tg } \delta$ у ПДВФ по сравнению ПДВЭ связаны, по-видимому, более высоким значением дипольных моментов элементарных звеньев ПДВФ (2,36 Д) по сравнению с ПДВЭ — (2,14 Д)*.

Однако с увеличением затруднения перемещения заряженных ионов (радикалов или сегментов цепей) из-за пространственного фактора электропроводность в ряду ПДВФ, ПДВЭ, лабораторного ПВБ и промышленного ПВБ уменьшается.

Более завышенные значения ρ_v (на $2 \div 4$ порядка) в исследованном интервале температур промышленного ПВБ (фиг. 3), по-видимому, связано с более высоким значением молекулярного веса полимера (увеличивается T_c) по сравнению с лабораторным ПВБ, так как у обоих полимеров степени замещения ацетальных групп почти одинаковы.

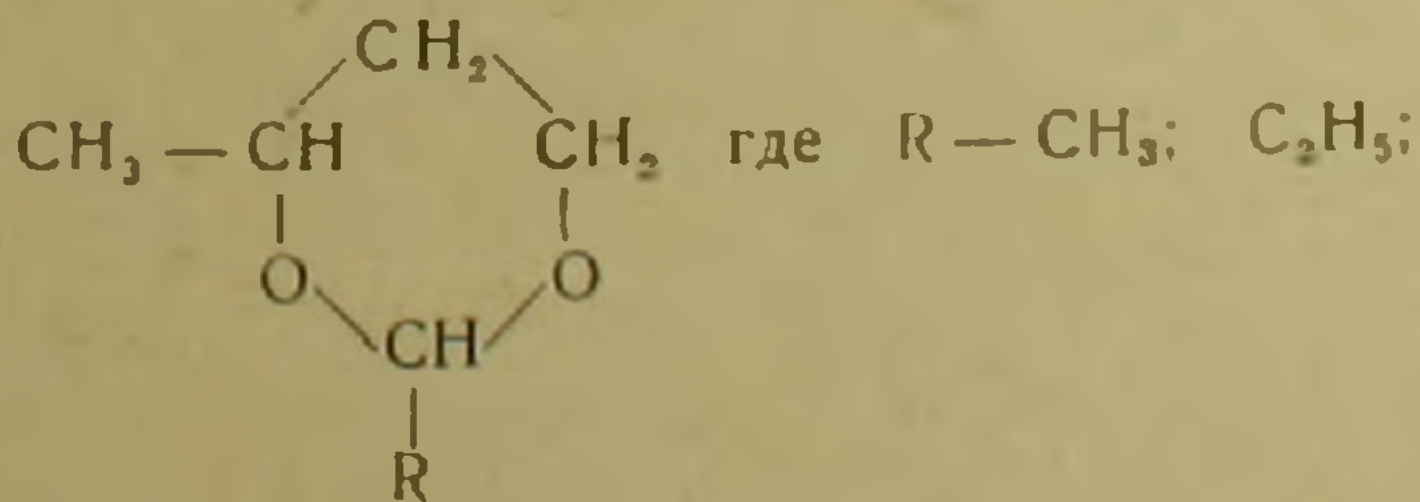
Наблюдается также заметно завышенные значения ϵ' и $\text{tg } \delta$ у промышленного ПВБ, которое, по-видимому, связано с более высокой степенью замещения ацетальных групп сильно полярными ацетальными (1,75 Д) и гидроксильными (1,66 Д) группами⁽¹¹⁾. Эти же группы, из-за малого объема, увеличивают плотность полярности полимера на единицу объема. Вышеуказанные качественные результаты могут быть более убедительными при проведении исследований на других представителях полидивинилацеталей с выяснением значений времен релаксаций и энергий активаций данных процессов.

Такое исследование представляет особый интерес и явится продолжением настоящей работы.

Однако можно привести основное заключение данного сообщения, что замещение ацеталей гидроксильными и ацетатными группами сильно искажает картину диэлектрических и тепловых свойств гомологического ряда поливинилацеталей, которое предполагалось Г. П. Михайловым⁽¹²⁾.

В заключение авторы приносят благодарность Н. М. Кочаряну за постоянный интерес к данной работе, С. Г. Мацояну и М. Г. Воскан-

*) Эти значения дипольных моментов определены нами по методу Харриса-Ольдера⁽¹⁰⁾ в разбавленных растворах для следующих низкомолекулярных веществ



которые идентичны по своей структуре элементарным ячейкам взятых нами полимеров.

яну (ИОХ АН Армянской ССР) за синтез исследованных веществ и ценное обсуждение при составлении настоящего сообщения.

ЦНИИ физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

Ս. Խ. ԲԱՐՍԱԴՅԱՆ, Լ. Ս. ՏՈՒԼԱԳՃՅԱՆ եւ Վ. Ն. ՊԻՍԱԼՈՎԱ

Մի Բանի պոլիդիվինիլացետատների դիէլեկտրիկական հատկությունները

Պոլիմերներում դիէլեկտրիկական հատկությունները պայմանավորված են նրանց մակրոմոլեկուլների էլեմենտար օղակների կառուցվածքով: Մինչև այժմ ուսումնասիրված պոլիդիվինիլացետատների շարքի պոլիմերները մակրոմոլեկուլային էլեմենտար օղակում, բացի ացետալային ֆունկցիոնալ խմբից, պարունակում էին նաև հիդրօքսիլային և ացետատային խմբեր, որոնք ազդեցություն էին պոլիդիվինիլացետատներին հատուկ դիէլեկտրիկական հատկությունները:

Այդ ապացուցելու համար ջերմաստիճանային և էլեկտրական դաշտի հաճախականության լայն տիրույթներում ուսումնասիրվել են $100^\circ/\text{C}$ -անոց պոլիդիվինիլֆորմատ և պոլիդիվինիլէթանային դիէլեկտրիկական հատկությունները և համեմատվել են արդյունաբերական եղանակով ստացված պոլիդիվինիլբութիրալի հետ, որոնց մակրոմոլեկուլների էլեմենտար օղակներում պարունակվում են նաև ացետատային և հիդրօքսիլ խմբեր:

Այսպիսով տվյալ հետազոտությունից կարելի է ենթադրել, որ չի կարելի ոչ թե ացետալային խմբերով փոխարինված պոլիդիվինիլացետատների դիէլեկտրիկական և ջերմային հատկությունները վերագրել պոլիմերի մակրոմոլեկուլի միայն ացետալային էլեմենտար օղակին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. М. Эрлих и П. Н. Щербак, ЖТФ, т. 25, в9, 1575 (1955). ² П. Ф. Веселовский, Изв. Томского политехнического института им. Кирова, 91, 399 (1956). ³ Т. И. Борисова, Г. П. Михайлов, ЖТФ, 28, 139 (1958). ⁴ Сатерленд, Фант, J. Polymer Sci 11, 177 (1953). ⁵ С. Н. Ушаков, Поливиниловый спирт и его производные, т. I и II, АН СССР, Л., 1960. ⁶ С. Г. Мацоян, М. Г. Аветян, М. Г. Восканян, Высокомолекулярные соединения, 4, 562 (1961). ⁷ С. Г. Мацоян, М. Г. Аветян, М. Г. Восканян, Авт. свид. № 134866. ⁸ Г. П. Михайлов, Г. И. Борисова, Успехи химии, т. 30, в7, 894 (1961). ⁹ Б. И. Сажеин, Электропроводность полимеров, Изд. "Химия", Л., 1961. ¹⁰ Ф. Гаррис, Б. Олдер, J Chem Phys, 21, 1031 (1953). ¹¹ С. Р. Smyth, Dielectric behavior and structure, 1955. ¹² Г. П. Михайлов, Журнал ВХО им. Д. И. Менделеева, т. IV, в. 4, 404 (1961).

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. А. Авакян, Р. С. Агабекян и А. В. Мушегян

Получение хелатных комплексов соединений хлоридов
 марганца и кобальта

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. А. Тер-Карапетяном 10/III 1964)

Ряд хелатных соединений переходных металлов был получен ранее (¹⁻²) и было показано, что комплексообразование с аминоалленовыми и аминокетилленовыми лигандами идет как за счет ненасыщенной связи, так и аминогрупп. Установлено также, что эти соединения устойчивы в щелочной среде.

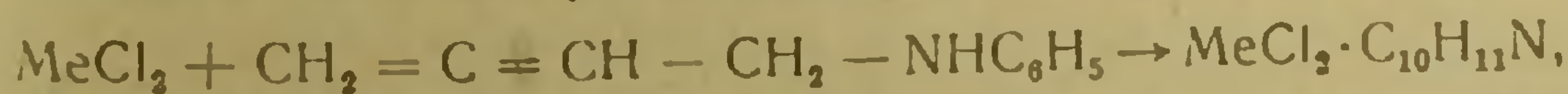
Однако до сих пор не описаны комплексные соединения двухвалентного марганца и кобальта с аминоалленовыми лигандами.

Получение и изучение хелатных комплексных соединений двухвалентного марганца и кобальта, кроме теоретического интереса, имеет также практическое значение, поскольку хелаты цинка, марганца, кобальта, меди (особенно такие, которые устойчивы в щелочной среде) находят широкое применение в сельском хозяйстве как микроудобрения.

Все это побудило нас получить новые соединения хлоридов марганца и кобальта.

К чистой сухой соли хлорида металла при энергичном перемешивании прибавлен с небольшим избытком аминокетилленовый лиганд. Затем реакционная смесь нагревалась до 70°, при этом происходил процесс комплексообразования. Полученные вещества промыты спиртом и высушены в сушильном шкафу при 50°С.

Реакции комплексообразования можно представить уравнением:



где $\text{Me} = \text{Co}^{2+}, \text{Mn}^{2+}$.

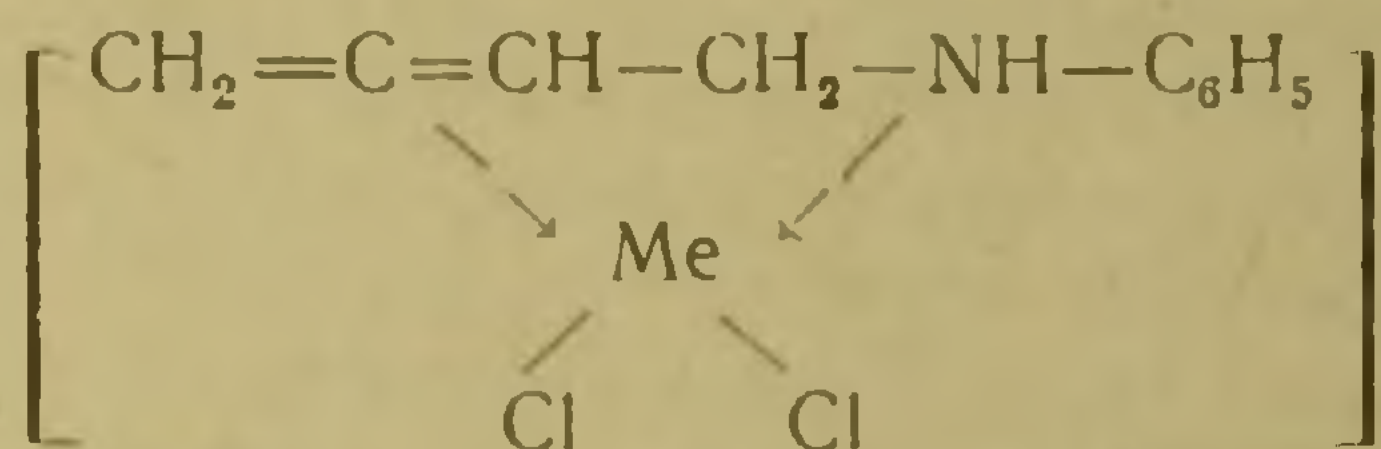
Анализы и физические константы полученных комплексных соединений приведены в таблице.

Соединения	Плотность, г/см ³	Молек. объем см ³	Темп. разло- жения	Найдено, %			Вычислено, %		
				Me	Cl	N	Me	Cl	N
$\text{MnCl}_2 \cdot \text{C}_{10}\text{H}_{11}\text{N}$	2,46	110,5	172—242	20,05	29,57	5,03	20,26	29,83	5,16
$\text{CoCl}_2 \cdot \text{C}_{10}\text{H}_{11}\text{N}$	1,78	124,6	—	21,12	26,10	4,80	21,43	25,78	5,09

Полученные соединения в обычных условиях вполне стабильны. В воде трудно растворимы, не растворимы в метаноле, бензоле и н-гептане, устойчивы в щелочных растворах и не растворяются в них. Хорошо растворяются в минеральных и органических кислотах.

Сняты спектры поглощения полученных комплексных соединений и исходных веществ. На основании сравнения инфракрасных спектров комплексных соединений с соответствующим спектром органического лиганда установлено, что частоты валентных колебаний алленовой связи и аминогрупп значительно смещены. Смещение этих частот в $MnCl_2 \cdot C_{10}H_{11}N$ и $CoCl_2 \cdot C_{10}H_{11}N$ комплексных соединениях и появление дополнительных частот в области между алленовой и двойной связью по сравнению с исходными продуктами свидетельствуют о значительной перестройке алленовых, а также аминовых группировок при образовании комплексных соединений.

Совокупность химических и спектральных данных подтверждает, что циклообразование в комплексных соединениях происходит за счет алленовой связи и аминогрупп органического лиганда. Следовательно, $MeCl_2 \cdot C_{10}H_{11}N$ можно представить следующей координационной структурой



Как указывалось выше, полученные хелатные соединения не растворимы в щелочах, но растворимы в кислотах. Это обстоятельство указывает на то, что комплексы могут применяться в сельском хозяйстве как микроудобрения.

Общим для изученных солей является то, что при нагревании они разлагаются не плавясь.

Ереванский государственный
университет

Ս. Ն. ԱՎԱԳՅԱՆ, Ռ. Ա. ԱՂԱՐԵԿՅԱՆ ԵՎ Ա. Վ. ՄՈՒՇԵԳՅԱՆ

Մանգանի և կոբալտի բուրդների խելատային կոմպլեքսային միացությունների ստացումը

Դրականությամբ մեջ դեռ չեն նկարագրված մանգանի և կոբալտի կոմպլեքսային միացությունները ամինաալենային լիգանդների հետ: Մենք սինթեզել ենք $MnCl_2 \cdot C_{10}H_{11}N$, $CoCl_2 \cdot C_{10}H_{11}N$ խելատային միացությունները: Որոշված է սինթեզված նյութերի բյուրեղների կառուցվածքը, հաշված է նրանց մոլային ծավալը, նկարագրված են սպեկտրները, հանված են տաքացման կորերը:

Նշված միացությունների ինֆրակարմիր սպեկտրների ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ կոմպլեքսացոյացումը ընթանում է $C_{10}H_{11}N$ լիգանդի ալենային խմբի և ամինային խմբի հաշվին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Н. Авакян, Р. А. Карапетян, Р. С. Эминян, «Известия АН АрмССР» (серия хим. наук), т. 16, 124 (1963).
- ² С. Н. Авакян, Р. А. Закарян, ЖОХ, 33, 3364 (1963).
- ³ С. Н. Авакян, Р. А. Карапетян, «Известия АН АрмССР» (серия хим. наук), т. 16, 535 (1963).

БИОХИМИЯ

Г. В. Барсегян

Влияние этаноламина на некоторые свойства миозина и актомиозина

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 29/V 1964)

Многочисленными исследованиями установлено, что этаноламин вызывает определенные функционально-биохимические сдвиги в животном организме. Одним из эффектов многогранного действия этого биогенного стимулятора является повышение уровня анаболических процессов и, в частности, усиление белкового синтеза (1-4). Нами установлено, что в печени и мышцах белых крыс и цыплят, получавших этаноламин, процентное содержание белка увеличивается. Перед нами стояла задача выяснить претерпевают ли белковые тела какие-либо качественные изменения под влиянием этаноламина. Для решения этого вопроса мы задались целью изучить некоторые свойства миозина и актомиозина.

Подопытными животными служили крысы обоего пола весом 150—200 г.

Крысы разделялись на две группы: одна группа служила контролем, а другая получала этаноламин вместе с кормом в количестве 10 мг/кг. Через месяц животных обезглавливали парами, отпрепаровывали бедренные мышцы, очищали от жира и сухожилий, промывали физраствором, после чего экстрагировали миозин принятым способом (0,5 М KCl + 0,03 М NaHCO₃, pH=7,8) в течение 8—10 минут. Миозин осаждали 20-кратным разбавлением дистиллированной водой.

Полученный белок очищали двукратным переосаждением. Аналогичным методом выделяли актомиозин, экстракция которого длилась 24 часа. Выделенные белки растворяли в 0,5 М KCl и определяли количество азота методом микрокельдаля в параллельных пробах. Содержание белка одновременно определяли методом Лоури.

Приведенные в табл. 1 данные показывают, что у крыс, получавших этаноламин, концентрация миозина и актомиозина в бедренных мышцах повышается соответственно на 15,1 и 14,0%. Другими опытами, поставленными на печеночной ткани, нами установлено, что под действием этаноламина наибольшие изменения по сравнению с целой тканью отмечаются в структурных белках. Следовательно, действие этаноламина адресуется в первую очередь к структурным белкам как в печени, так и в мышцах.

Таблица 1

Количество миозина и актомиозина у крыс, получавших
этаноламин (в $\mu\text{г}$ на 1 г свежей ткани).
Средние данные 24 опытов

Условия опыта	Миозин	Актомиозин
Контроль $M \pm \sigma$	$27,8 \pm 5,15$	$35,1 \pm 6,92$
Этаноламин $M \pm \sigma$	$32,0 \pm 6,23$	$40,0 \pm 6,15$
Прирост в %	15,1	14,0
Достоверность	$t=2,65 \quad p<0,01$	$t=2,66 \quad p<0,01$

Изучение свойств сократительных белков мышц мы начали с определения сульфгидрильных групп, как общих, так и свободно реагирующих. Общие SH-группы определяли амперометрической титрацией двухлористой ртутью, а свободно реагирующих — нитропруссидной реакцией. Для стабилизации полученного окрашивания использовали сульфосалициловую кислоту.

Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что в норме на 1 $\mu\text{г}$ белка миозина приходится $1,10 \cdot 10^{-7}$ моля общих и $4,22 \cdot 10^{-8}$ моля свободных SH-групп. Последние составляют около 35—40% от общего количества SH-групп. Примерно такое же соотношение наблюдается в актомиозине. У крыс, получавших этаноламин, содержание как общих, так и свободно реагирующих SH-групп повышается.

Таблица 2

Сульфгидрильные группы сократительных белков мышц под
действием этаноламина (в молях на 1 $\mu\text{г}$ белка).
Средние данные 24 опытов

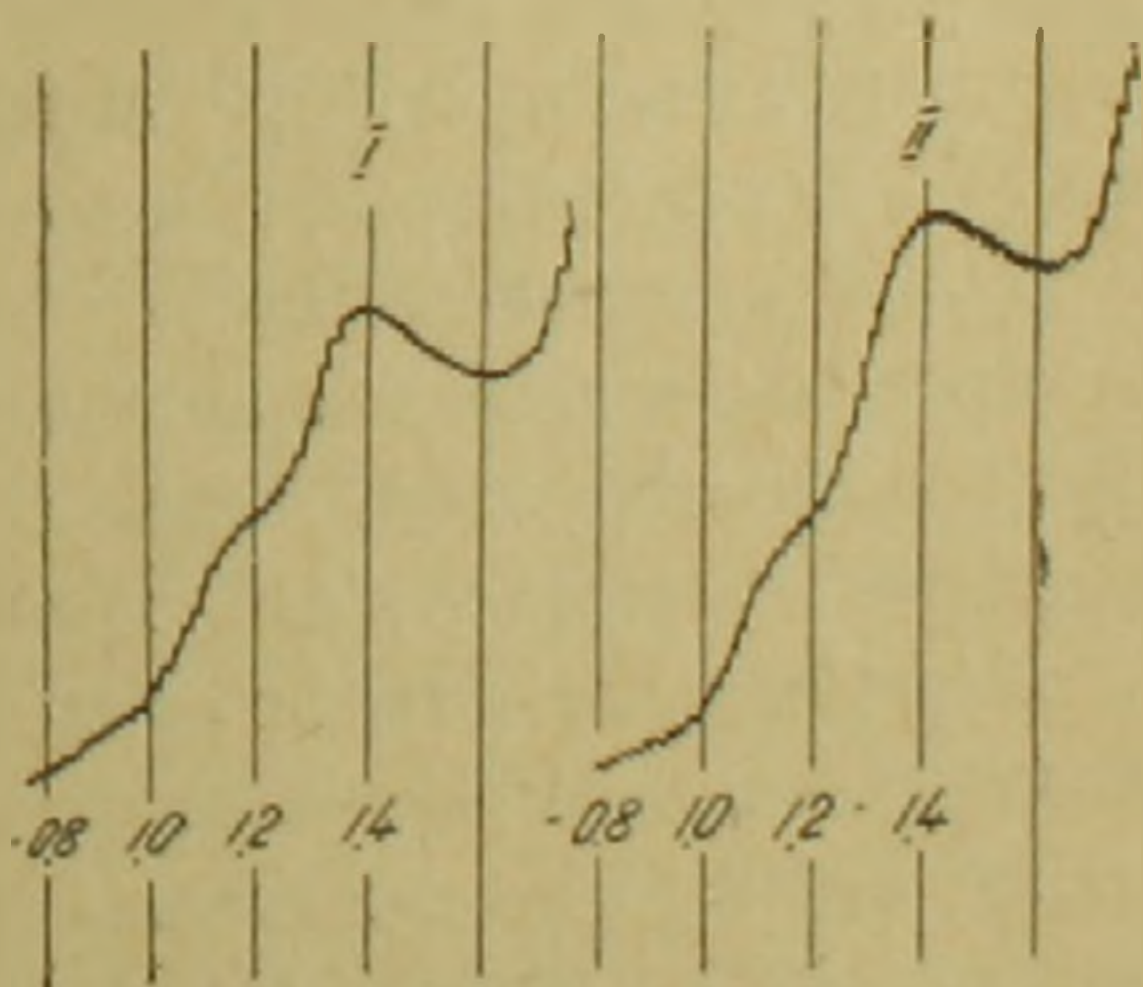
Условия опыта	Миозин		Актомиозин	
	Общие	Свободно реагирующ.	Общие	Свободно реагирующ.
Контроль	$1,10 \cdot 10^{-7}$ $\pm 0,25 \cdot 10^{-7}$	$4,22 \cdot 10^{-8}$ $\pm 0,21 \cdot 10^{-8}$	$0,75 \cdot 10^{-7}$ $\pm 0,15 \cdot 10^{-7}$	$2,93 \cdot 10^{-8}$ $\pm 0,27 \cdot 10^{-8}$
Этаноламин	$1,25 \cdot 10^{-7}$ $\pm 0,20 \cdot 10^{-7}$	$4,90 \cdot 10^{-8}$ $\pm 0,40 \cdot 10^{-8}$	$0,84 \cdot 10^{-7}$ $\pm 0,13 \cdot 10^{-7}$	$3,34 \cdot 10^{-8}$ $\pm 0,31 \cdot 10^{-8}$
Прирост в %	13,6	16,2	12,0	14,0
Достоверность	$t=2,34$ $0,01 < p < 0,02$	$t=7,6$ $p < 0,01$	$t=2,25$ $0,02 < p < 0,05$	$t=5,06$ $p < 0,01$

Несмотря на некоторое превалирование повышения свободно реагирующих SH-групп в процентном отношении, в абсолютных количествах больше увеличивается общее количество SH-групп. Если

учесть, что разность в количествах общих и свободно реагирующих SH-групп составляет количество вяло реагирующих SH-групп, то можно заключить, что под действием этаноламина увеличивается также содержание вяло реагирующих SH-групп.

Для подтверждения наших данных относительно увеличения SH-групп сократительных белков мышц под действием этаноламина мы определяли сульфгидрильные группы также полярографическим методом. Известно, что белковые вещества при полярографии вызывают появление двухступенчатой волны. По мнению ряда авторов (^{5,6}), в возникновении второй ступени полярографической волны принимают участие SH-группы; они способствуют адсорбции белковой молекулы на поверхности ртутной капли и образованию комплексов белковых веществ с ионом кобальта, чем обуславливаются восстановительные процессы на катоде. Наши опыты проводились на саморегистрирующем полярографе типа Гейровского LP-55, при постоянной температуре $+14^{\circ}$ и чувствительности гальванометра 1/100 от максимальной $2 \cdot 10^{-9}$ а/мм. В сконструированный нами электролизер наливали 5 мл аммиачного буфера ($0,2 \text{ N NH}_4\text{Cl} + \text{NH}_4\text{OH}$), 2,5 мл белкового раствора (2 мг/мл) и 2,5 мл $2 \cdot 10^{-3}$ М CoCl_2 . При полярографии миозина и актомиозина в указанной среде нами получались наглядные, двухступенчатые волны. Потенциал полуволны первой ступени находился в области $-1,1$ вольта а второй ступени $-1,3$ вольта. Полученные полярограммы (фиг. 1) показали, что высота первой ступени волны у крыс контрольной и опытной групп почти одинакова, а высота второй ступени волны заметно увеличивается в сократительных белках крыс, получавших этаноламин. Эти данные свидетельствуют о качественных изменениях белковых тел (в первую очередь об изменениях в содержании реактивных сульфгидрильных групп) у животных, получавших этаноламин.

Установив действие этаноламина на сульфгидрильные группы миозина и актомиозина, мы заинтересовались их АТФ-фосфогидролазной активностью. Для миозина инкубационная смесь была следующего состава: 1,0 мл миозина (1 мг белка), 0,5 мл 0,03 М CaCl_2 , 1,0 мл боратного буфера ($\text{pH} = 8,6$), 0,5 мл $2,4 \cdot 10^{-2}$ М АТФ. Инкубация длилась 5 мин. при 37° , после чего действие фермента приостанавливалось добавлением 0,5 мл 20% трихлоруксусной кислоты. Аналогичным образом определяли АТФ-фосфогидролазную активность актомиозина с той разницей, что вместо CaCl_2



Фиг. 1. Двухступенчатая полярографическая волна миозина бедренных мышц.

I—у контрольной крысы; II—у крысы, получавшей этаноламин.

брали 0,5 мл $5 \cdot 10^{-2}$ М $MgCl_2$. Определяли прирост неорганического фосфора, который выражали в единицах Qp. Вычисляли также валовую активность этих ферментов: V-АТФ-фосфогидролаза = $Qp \times p$, где p — содержание белка в мг на 1 г свежей ткани.

Таблица 3

АТФ-фосфогидролазная активность миозина

Условия опыта	Прирост в микро- атом Р/мг белка	Qp	V-АТФ-фосфо- гидролаза.
Контроль	$22,0 \pm 2,98$	941 ± 129	26159 ± 7197
Этаноламин	$25,6 \pm 3,43$	1095 ± 151	35040 ± 8093
Прирост в %	16,4	16,4	33,9
Достоверность	$t=4,0 \quad p<0,01$	$t=3,89 \quad p<0,01$	$t=4,14 \quad p<0,01$

Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что у крыс, получавших этаноламин, АТФ-фосфогидролазная активность миозина повышается на 16,4%. Имея в виду, что одновременно увеличивается содержание миозина в единице веса ткани, валовая активность этого фермента повышается еще сильнее.

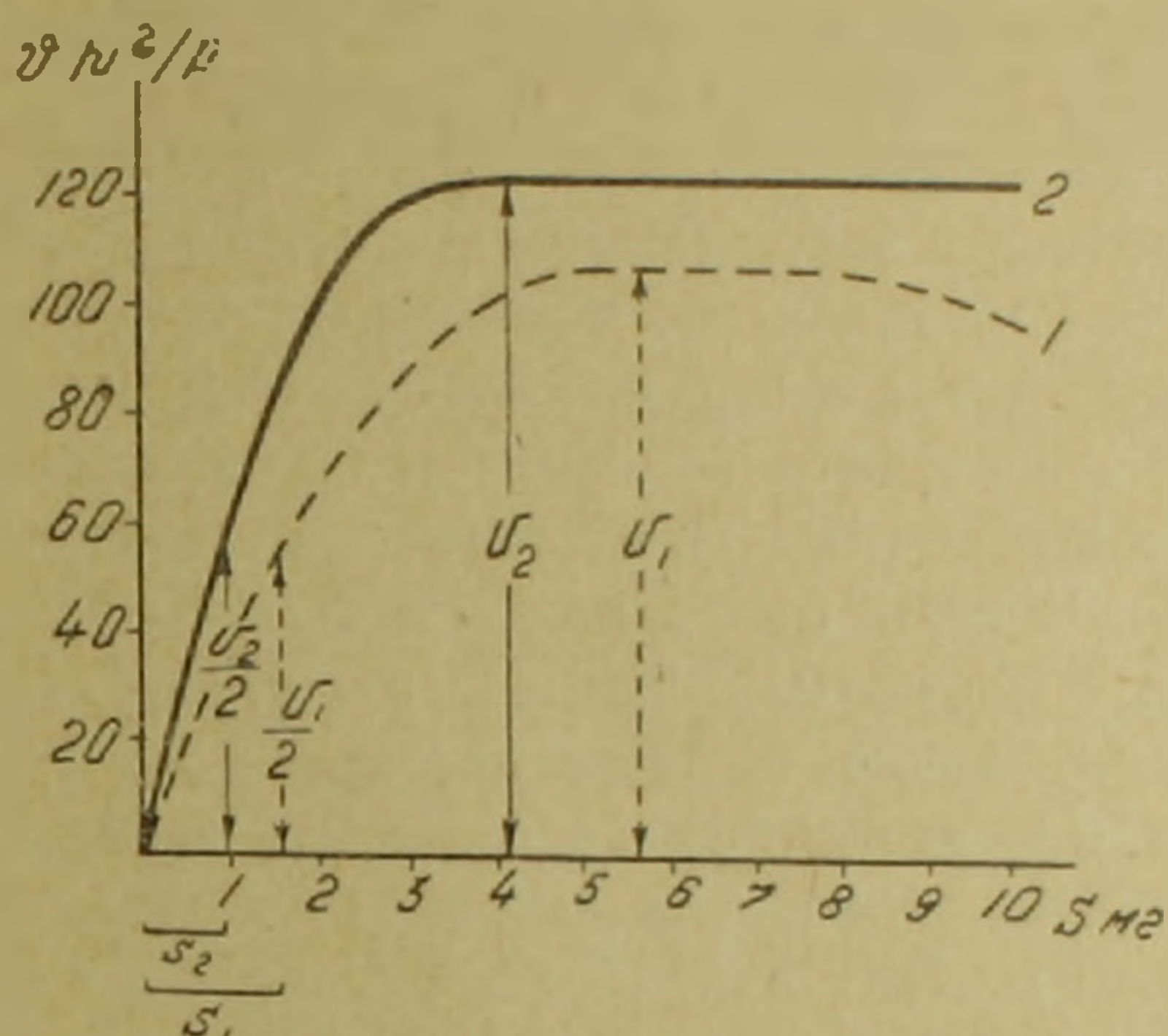
Аналогичные данные были получены также в отношении актомиозина.

Для разностороннего изучения АТФ-фосфогидролазной активности сократительных белков мышц при действии этаноламина мы определяли константу Михаэлиса—Ментена. С этой целью мы инкубировали разные количества АТФ с миозином (1 мг белка) без этаноламина и с этаноламином ($1,5 \cdot 10^{-2}$ мк М/мл). Результаты этих опытов (фиг. 2) показали, что константа Михаэлиса—Ментена уменьшается под действием этаноламина, т. е. скорость реакции, равная половине максимальной, достигается при меньших количествах субстрата.

Нами изучалась также термолабильность вязкости и АТФ-фосфогидролазы миозина и актомиозина. Установлено, что при тепловой денатурации миозин и актомиозин крыс, получающих этаноламин, некоторой степени лучше сохраняют свои нативные свойства.

Полученные данные свидетельствуют о качественных изменениях структурных белков мышц под действием этаноламина. Представляет особый интерес, в частности, увеличение количества SH-групп и повышение АТФ-фосфогидролазной активности. Известно, что АТФ-фосфогидролаза является тиоловым ферментом (⁷⁻¹⁰). Следовательно, повышение ее активности является естественным результатом увеличения количества SH-групп. Известно также, что не все SH-группы ответственны за повышение активности АТФ-фосфогидролазы (¹¹⁻¹⁴), но полученные результаты говорят о том, что под действием этаноламина освобождаются именно такие SH-группы, которые способны

взаимодействовать с АТФ. Каким образом этаноламин, будучи по своей структуре несложным веществом, может вызывать подобные изменения? Реагирует ли он с белковыми телами непосредственно или через другие системы? Для разрешения этих задач мы поставили опыты в условиях *in vitro* с разными концентрациями этаноламина. Было установлено, что этаноламин в концентрациях $1,5 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-1}$ мкМ/мл увеличивает SH-группы и повышает АТФ-фосфогидролазную активность, но значительно слабее, чем в условиях *in vivo*.



Фиг. 2. Кривые АТФ-фосфогидролазной активности миозина при различных концентрациях субстрата. 1—у контрольной крысы; 2—у крысы, получавшей этаноламин; S —субстрат (АТФ) в мг на пробу; V —скорость реакции (прирост неорганического фосфора после инкубации в мкг); V_1 , V_2 —максимальная скорость реакции в контрольной и опытной пробах; $\frac{V_1}{2}$.

$\frac{V_2}{2}$ — скорость реакции, равная половине максимальной в контрольной и опытной пробах; S_1 , S_2 —концентрация субстрата в контрольной и опытной пробах, при которой скорость реакции равна половине максимальной (константа Михаэлиса—Ментена).

Следовательно, при целостности организма какой-то фактор усиливает действие этаноламина. По данным Гольдштейна и др., гормон щитовидной железы увеличивает количество SH-групп в миозине (^{15,16}). Для изучения возможной роли щитовидной железы в действии этаноламина мы поставили специальные опыты с угнетением ее функции 6-метилтиоурацилом. Было установлено, что на этом фоне значительно понижается эффект от этаноламина. Следовательно, введенный в организм этаноламин оказывает определенное действие через щито-

видную железу. Какой же механизм увеличения количества SH-групп? Как указывает Гольдштейн, здесь имеются три возможности:

- 1) увеличение количества цистеина в молекуле белка;
- 2) разрыв тиоэфирной связи в метионине;
- 3) восстановление дисульфидных связей в сульфгидрильные.

Нам представляется маловероятным первый путь увеличения SH-групп под действием этаноламина. Придавая определенное значение деметилированию метионина мы считаем, что увеличение SH-групп в основном обуславливается восстановлением дисульфидных групп и возможно разрывом водородных связей между SH- и некоторыми другими боковыми группами белка. В превращении S-S-групп в SH- может играть роль увеличение количества восстановленного глутатиона, которое наблюдается под действием этаноламина⁽¹⁷⁾. Интересно отметить, что Г. В. Камалюном наблюдалось восстановление этаноламином работы изолированного сердца лягушки, отравленного хлористым кадмием⁽¹⁸⁾. Для изучения возможной роли цистеина в увеличении SH-групп мы поставили модельные опыты с цистеином. Известно, что в водных растворах часть SH-групп цистеина находится в связанном состоянии через внутримолекулярные и межмолекулярные водородные связи. При инкубации раствора цистеина с этаноламином отмечается освобождение дополнительного количества SH-групп. Добавление АТФ на раствор цистеина вызывает заметное уменьшение количества SH-групп⁽¹³⁾. При инкубации цистеина с АТФ и этаноламином наблюдается увеличение SH-групп в меньшей степени, чем при инкубации только с этаноламином, что можно объяснить связыванием некоторого количества SH-групп с присутствующим в среде АТФ. Аналогичные данные были получены и с миозином. Следовательно, часть освобождающихся этаноламином SH-групп обладает способностью реагировать с АТФ.

Из вышеизложенного следует, что этаноламин усиливает реакционную способность миозина и актомиозина.

Основываясь на результатах наших опытов, можно прийти к следующим основным выводам.

1. Этанолламин увеличивает содержание миозина и актомиозина в скелетных мышцах белых крыс.

2. Количество общих и свободно реагирующих сульфгидрильных групп увеличивается под действием этаноламина.

3. АТФ-фосфогидролазная активность миозина и актомиозина повышается у крыс, получавших этаноламин.

Ереванский зоотехническо-
ветеринарный институт

Գ. Վ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Էթանոլամինի ազդեցությունը միոզինի եւ ակտոմիոզինի մի-
ջանի հասկանությունների վրա

Նախորդ ուսումնասիրություններով հաստատվել է, որ էթանոլամինը կենդանական օրգանիզմում առաջացնում է որոշակի ֆունկցիոնալ-բիոքիմիական փոփոխություններ

նրա բազմակողմանի ազդեցության արտահայտություններից մեկն է հանդիսանում սպիտակուցների սինթեզի արագացումը: Սպիտակուցների քանակական փոփոխություններն ուսումնասիրելուց հետո մեր առաջ խնդիր դրեցինք հետազոտել նրանց որակական փոփոխությունները: Այդ նպատակով սպիտակ առնետների կմախքային մկաններից անջատել և մաքրել ենք միոգին և ալտոմիոգին սպիտակուցները և ուսումնասիրել ենք նրանց հատկությունները, հատկապես ընդհանուր և ազատ սուլֆհիդրիլային խմբերը և ԱՏՖ-ֆոսֆոհիդրոլազային ակտիվությունը:

Հիմնվելով մեր փորձերի արդյունքների վրա կարելի է հանդել հետևյալ եզրակացություններին.

1. էթանոլամինն ավելացնում է միոգինի և ալտոմիոգինի քանակությունը սպիտակ առնետների կմախքային մկաններում:
2. Ընդհանուր և ազատ սուլֆհիդրիլային խմբերը շատանում են էթանոլամինի ազդեցության տակ:
3. Միոգինի և ալտոմիոգինի ԱՏՖ-ֆոսֆոհիդրոլազային ակտիվությունը բարձրանում է էթանոլամին ստացող առնետների մոտ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Г. В. Барсегян, Материалы Межвуз. конф. по проблеме влияния биостимуляторов на организм и их применения в с/х практике, Ереван, 1963. ² Г. В. Барсегян, Материалы Второй Всес. конф. по физиол. и биохим. основам повышения продукт. с/х животных, Боровск, 1963. ³ Г. В. Барсегян, Первый Всес. биох. съезд. Тезисы докл. вып. 3, 1964. ⁴ Г. В. Барсегян, Труды Ереванского зооветинститута, 26, 29, 1964. ⁵ И. Д. Иванов, Полярнография белков, энзимов и аминокислот. Изд. АН СССР, 1961. ⁶ В. М. Корниенко, Уч. зап. Харьковск. ун-та им. А. М. Горького, 63, 267, 1956. ⁷ М. Зифф, J. Biol. Chem., 153, 25, 1944. ⁸ Т. П. Сингер, Е. С. Г. Баррон, Proc. Soc. Exp. Biol. Med., 56, 129, 1944. ⁹ К. Бэйли, С. Перри, Biochim. Biophys. Acta, 1, 506, 1947. ¹⁰ В. А. Энгельгардт, Г. А. Яровая, Укр. биох. журн. 27, 312, 1955. ¹¹ Ф. Турба, Г. Кучинский, Biochim. Biophys. Acta, 7, 76, 1952. ¹² М. Барани, К. Барани Biochim. Biophys. Acta, 35, 293, 1959. ¹³ Б. Ф. Поглазов, В. Билуши, А. А. Баев, Биохимия, 23, 269, 1956. ¹⁴ С. С. Оганесян и Т. С. Заминян, Пятый междунар. биох. конгресс, рефераты секц. сообщ., том I, стр. 436. ¹⁵ Б. И. Гольдштейн, М. Б. Гинцбург, Е. А. Колли, Е. Ю. Мильграм, О. С. Скловская, Биохимия, 11, 447, 1946. ¹⁶ Б. И. Гольдштейн, Укр. биох. журн., 24, 160, 1952. ¹⁷ М. Г. Гаспарян, А. А. Акопян, Труды Ер. зооветинститута, 22, 33, 1957. ¹⁸ Г. В. Камалян и Р. В. Давтян, ДАН Арм ССР, 21, 3, 113 (1955).

БИОХИМИЯ

М. А. Тер-Карапетян, академик АН Армянской ССР, и Е. Н. Макарова

Культуральные особенности влияния биотина и источника азота на
 накопление γ -аминомасляной кислоты у дрожжей

(Представлено 4/VII 1964)

γ -Аминомасляная кислота (ГАМК) обнаружена в дрожжевых организмах относительно недавно (¹⁻⁴). Установлено, что ГАМК входит в состав растворимого в воде, 80% этиловом спирте или же 4% трихлоруксусной кислоте запасного фонда аминокислот.

В других детальных исследованиях по изучению запасного фонда аминокислот в зависимости от видовых и культуральных особенностей дрожжей нет сведений о наличии этого важного метаболита (⁵).

Вопросу изучения обмена ГАМК у дрожжевых организмов уделено мало внимания. Выдвинута гипотеза, что в пекарских дрожжах количество ГАМК увеличивается в условиях анаэробнозиса (³). Однако это предположение было в дальнейшем опровергнуто (⁶). Установлено, что у *Candida tropicalis* штамм КЗ—10 при усвоении *d*-ксилозы в качестве единственного источника углерода ГАМК накапливается больше в запасном фонде аминокислот, чем при усвоении *d*-глюкозы (⁴), но механизм этого явления еще не изучен. Подробными исследованиями показано, что для двух культур дрожжей—*Candida utilis* (штамм IMI 23311), *Saccharomyces cerevisiae* (*Dist. Comp. Ltd*)—ГАМК является плохим источником углерода, но хорошим источником азота, усваиваемым через реакции переаминирования посредством адаптивного фермента (⁶).

За последние годы на примере ряда представителей рода *Candida* в нашей лаборатории установлены новые факты, показывающие тесную зависимость состава свободных аминокислот дрожжевых клеток как от природы организма, так и от источников азотного питания (⁷⁻⁹).

Настоящая работа посвящена изучению некоторых особенностей влияния биотина на накопление свободной ГАМК у представителей рода *Candida* при выращивании в присутствии различных источников азота (аммиак и аспарагин).

Объектом исследования служили три штамма из рода *Candida*, у которых особенно наглядно выражено влияние источников азота или биотина на процессы накопления ГАМК, а именно—*C. guilliermondii* № 71, *C. pulcherrima* № 95, полученные из отдела типовых культур Института микробиологии АН СССР и *C. tropicalis* штамм КЗ—10 из коллекции лаборатории биохимии Арм. НИИЖиВ⁽⁸⁾.

Культуральная основная среда (о. с.) имела следующий состав на 1 литр водопроводной воды: глюкоза—10 г, $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ —3,1 г или аспарагин 3,2 г, KH_2PO_4 —1,23 г, $\text{MgSO}_4 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ —0,625 г, $\text{CaCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ —0,125 г, NaCl —0,125 г.

О. с. использовалась с добавлением и без добавления биотина в дозе 8 мкг на один литр среды. Методы очищения ингредиентов среды, приготовления и стерилизации сред были описаны в нашей предыдущей работе⁽⁸⁾.

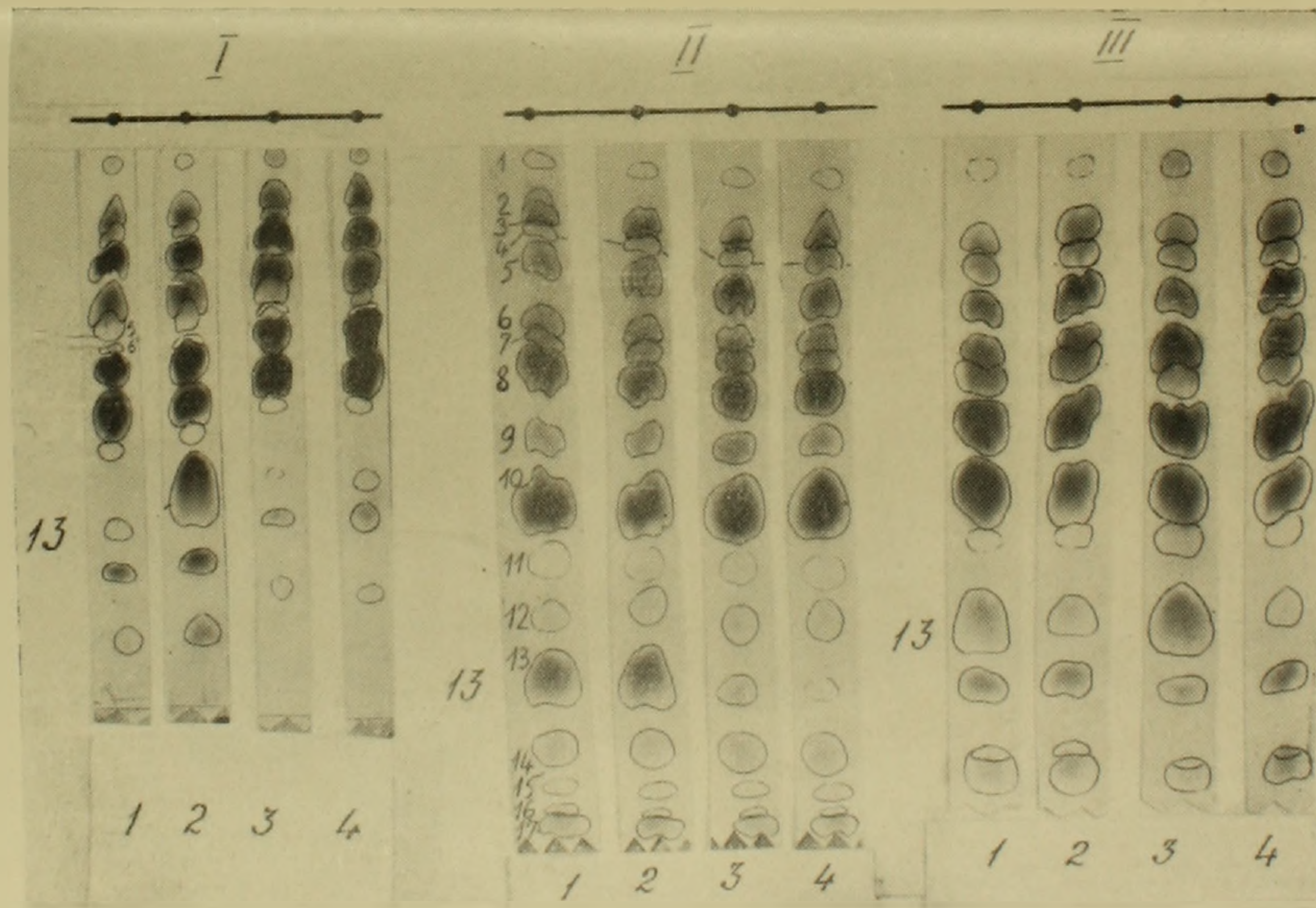
Для подготовки посевного материала музейная культура выращивалась в о. с. до истощения глюкозы, затем она подвергалась голоданию в дистиллированной воде в течение 24 часов. Голодающая культура вносились в виде водной суспензии в расчете 5—8 мг (сухого вещества) на 100 мл культуральной среды, помещенной в 750-миллилитровые конические колбы на каждый вариант. Инкубация колб производилась при оптимальной для каждой культуры температуре на круговой качалке (200 об/мин.), что обеспечивало обильное аэрирование растущей культуры. Инкубация продолжалась до расходования 85—90% исходной глюкозы в вариантах с витаминами, что требовало 16—24 час.; в этот момент в вариантах без витаминов расход глюкозы не превышал 10% от исходного количества. Полученная биомасса после тщательного промывания холодной дистиллированной водой высушивалась при 85°C, затем экстрагировалась 80% кипящим этанолом в течение 1 часа.

Для обнаружения состава свободных аминокислот спиртовые экстракты подвергались хроматографированию как непосредственно, так и после гидролиза в 20% HCl для расщепления пептидов. Проверка показала, что относительное количество ГАМК существенной разницы не имеет между исходным экстрактом и его гидролизатом.

В табл. 1 представлены средние данные из 6 опытов, показывающие условия выращивания, при которых изучено накопление ГАМК в биомассе у трех исследуемых культур.

На фиг. 1 представлены результаты, полученные при одной из 6—8 повторностей, проведенных с каждой культурой. Они показывают, что накопление ГАМК в фракции растворимых аминокислот находится в тесной зависимости как от источников азота, так и от биотина.

У *C. guilliermondii* и *C. pulcherrima* ГАМК накапливается, в основном, при усвоении аммиака, но почти или вовсе отсутствует в случае усвоения аспарагина в качестве единственного источника азота; у *C. tropicalis* шт. КЗ—10, ГАМК присутствует в составе растворимых аминокислот в равной степени при усвоении как аммиака, так и аспарагина.



Фиг. 1. Аминокислоты спирторастворимой фракции после гидролиза, I—*C. guilliermondii*; II—*C. pulcherrima*; III—*C. tropicalis* КЗ—10.

Варианты опытов; 1—аммиак без биотина; 2—аммиак с биотином; 3—аспарагин без биотина; 4—аспарагин с биотином. Пятно 13—гаммааминомасляная кислота.

Эти факты указывают на значительное расхождение в путях усвоения азота аммиака и аспарагина исследуемыми культурами.

Для синтеза ГАМК путь прямого аминирования оказывается более эффективным у первых двух культур, чем у *C. tropicalis* шт. КЗ-10.

Таблица 1

Влияние аммиака и аспарагина на расщепление глюкозы, синтез биомассы и экономический коэффициент синтеза биомассы

Культуры	Расщепленная глюкоза, мг		Синтез биомассы, мг		Биомасса глюкоза, %	
	NH ₄ ⁺	Аспарагин	NH ₄ ⁺	Аспарагин	NH ₄ ⁺	Аспарагин
<i>C. guilliermondii</i> О. С.	71	95	28	25	21	22
О. С. + биотин	802	862	329	330	41	41
<i>C. pulcherrima</i> О. С.	57	464	17	177	31	34
О. С. + биотин	891	843	313	313	37	37
<i>C. tropicalis</i> КЗ-10 О. С.	34	129	6	26	18	20
О. С. + биотин	917	900	293	333	32	37

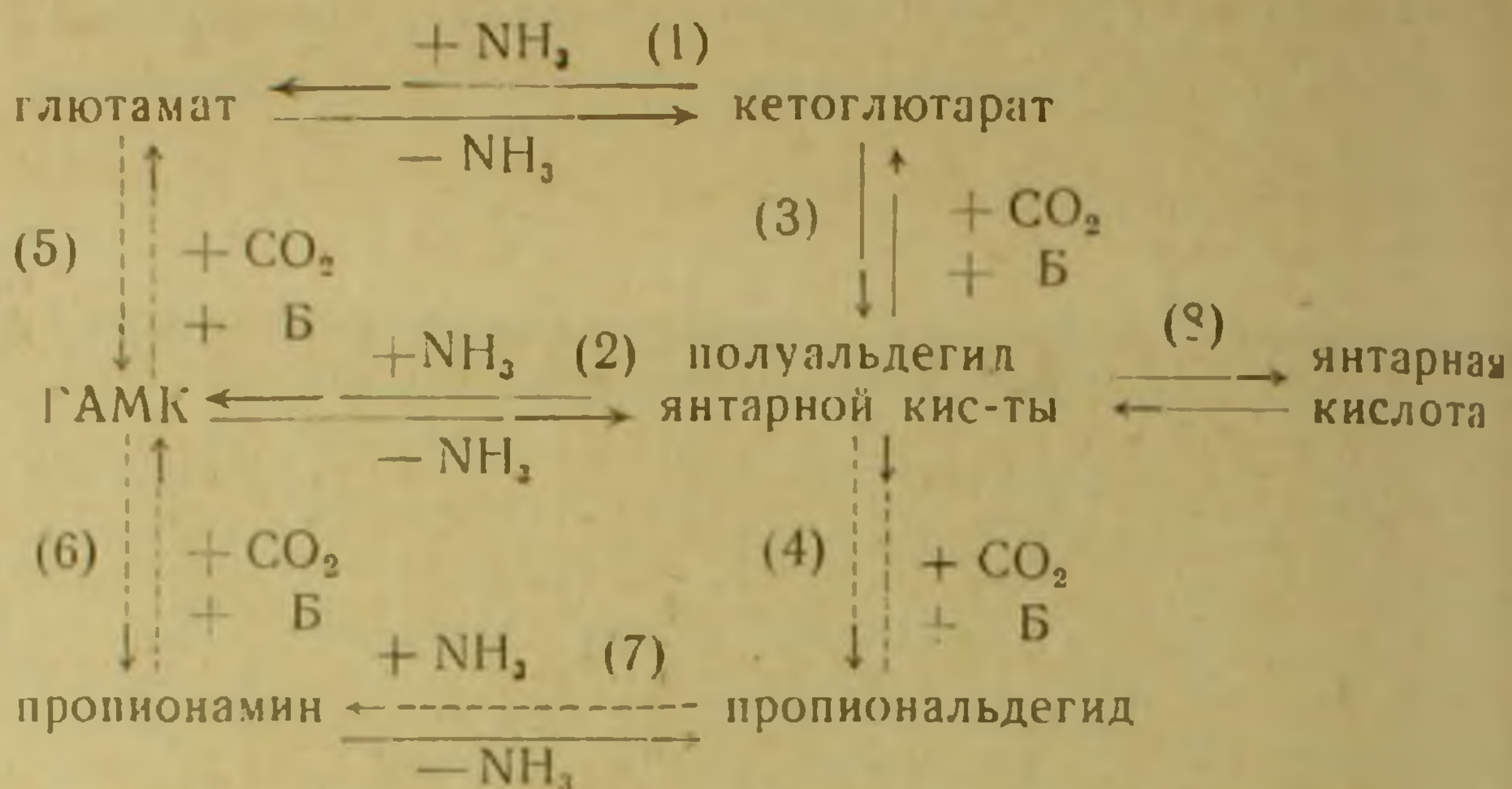
Другие, не менее важные, особенности обнаружены у различных культур по влиянию биотина на накопление ГАМК. У *C. guilliermondii* происходит резкое повышение количества ГАМК в спирторастворимой фракции в присутствии биотина, в то время как у *C. tropicalis* ГАМК накапливается, в основном, в отсутствие этого витамина. Это указывает на то, что у двух исследуемых культур биотин или действует на различные звенья путей метаболизма ГАМК, или противоположно влияет на направленность обратимых реакций синтеза и распада ГАМК.

У *C. pulcherrima*, у которой потребность в биотине значительно меньше выражена, чем у двух предыдущих культур (8-9), накопление ГАМК происходит почти в равной степени, независимо от присутствия биотина. Здесь можно предполагать, что биотин или не контролирует пути синтеза и распада ГАМК, или же запасы биотина клетки достаточны для нормального накопления ГАМК.

Вышеприведенные примеры показывают, что у отдельных представителей рода *Candida* (принадлежащих в данном случае разным видам), имеются определенные расхождения в путях, ведущих к накоплению ГАМК.

В качестве одной из возможных рабочих гипотез для дальнейших исследований выдвигается нижеследующая схема, где ГАМК рассматривается как истинный промежуточный метаболит, уровень которого в за-

пасном фонде аминокислот определяется реакциями его синтеза и распада с учетом роли биотина в процессах фиксации углекислого газа.



Здесь надо признать, что у отдельных культур преобладают те или иные пути. Так, например, снижение количества ГАМК в присутствии биотина у *C. tropicalis* шт. КЗ-10 можно объяснить стимулированием реакции (3), которая ведет к синтезу кетоглутаровой кислоты из полуальдегида янтарной кислоты, а затем глутамата или же прямой фиксацией углекислого газа на ГАМК (реакция 5), ведущей также к образованию глутамата; повышение количества ГАМК в присутствии биотина у *C. guilliermondii* можно объяснить усилением синтеза полуальдегида янтарной кислоты (примерно путем реакции 8 или 4) и дальнейшим аминированием последнего. Другим путем повышения количества ГАМК может быть усиление реакции 6 и т. д.

Особенности интенсификации или торможения реакции аминирования и переаминирования указывают на другие возможные пути регуляции уровня ГАМК в дрожжевых клетках (реакции 1, 2, 7).

Все вышеизложенное говорит о важнейшем значении проведения сравнительных биохимических исследований для выявления особенностей механизма действия различных источников азота и витаминов у отдельных представителей родов и видов микроорганизмов, что приведет к новым представлениям об их межвидовых и внутривидовых отношениях.

Армянский научно-исследовательский
институт животноводства и ветерина-
рии Министерства сельского хозяйства
Армянской ССР.

Институт микробиологии Академии наук
Армянской ССР

Քիմիների և ազոտի ազրյուրների ազդեցությունը γ -ամինոկարապթիկ կուսակման վրա՝ կապված խմորասնկերի կուլտուրայի սուաննահաակությունների հետ

Candida ցեղի բազմաթիվ ներկայացուցիչների օրինակի վրա մեր կողմից նախապես չստատովել է, որ խմորասնկային բջիջների ազատ ամինոթթուների կազմը կախված է ինչպես օրգանիզմի բնույթից, այնպես էլ ազոտային սնուցման ազրյուրներից:

Ներկա աշխատանքը նվիրված է *Candida* ցեղի մի քանի ներկայացուցիչների մոտ ազատ γ -ամինոկարապթիկ կուտակման վրա բիոտինի ազդեցության առանձնահատկություններին՝ ազոտի տարրեր ազրյուրների (ամոնիակ և ասպարադին) սուկայության սլայմաններում:

Կատարված հետազոտությունները բերել են հետևյալ հիմնական եզրակացություններին՝

1. γ -ամինոկարապթիկ կուտակումն ազատ ամինոթթուների ֆրակցիայում կախված է ինչպես ազոտի ազրյուրներից, այնպես էլ բիոտինի ներկայությունից:

2. *C. guilliermondii*-ի և *C. pulcherrima*-ի մոտ γ -ամինոկարապթիկ կուտակվում է հիմնականում ամոնիակի յուրացման ղեպքում և համարյա բացակայում է, երբ որպես ազոտի միակ ազրյուր է ծառայում ասպարադինը:

3. *C. guilliermondii*-ի մոտ բիոտինի ներկայությամբ տեղի է ունենում γ -ամինոկարապթիկ քանակի խիստ բարձրացում՝ սպիրտալուծելի ֆրակցիայում, այն ժամանակ, երբ *C. tropicalis* K3—10-ի մոտ γ -ամինոկարապթիկ կուտակվում է հիմնականում այդ վիտամինի բացակայության ղեպքում: *C. pulcherrima*-ի մոտ γ -ամինոկարապթիկ կուտակումը տեղի է ունենում անկախ վիտամինի ներկայությունից, միայն ամոնիակի յուրացման ղեպքում:

4. Կարապթիկ սինթեզը և ճեղքումը ներկայացնող հիպոթետիկ սխեման ցույց է տալիս, որ տարրեր կուլտուրաների մոտ կարող է ղերակշռել ճեղքման և սինթեզի այս կամ այն ուղին:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ А. Шейльс, В. Мумс, С. Шейльс, Feder. Proc., 5, 152, 1946. ² Л. Лундгал, Е. Сандегрен, Acta chem. Scand. 4, 1150, 1950. ³ Л. Рид, J. Biol. chem. 183, 451, 1950. ⁴ М. А. Тер-Карапетян, ДАН СССР 122, (5), 870 (1958) ⁵ Г. Хальворсон, В. Фрай, Д. Швемин, J. Gen. Physiol. 38, (4), 549, 1955. ⁶ Р. Пиетрушко, Л. Фауден, Annals Bot. 25, (100), 491, 1961. ⁷ М. А. Тер-Карапетян, Е. Н. Макарова, С. О. Инджикян, Тезисы докл. XLII Научн. сессии Ерев. госунта, 66, 1962. ⁸ М. А. Тер-Карапетян, Е. Н. Макарова, „Изв. АН Арм. ССР“ (биол. науки) 17, 1, 27, (1964). ⁹ М. А. Тер-Карапетян, Тезисы I-го Всесоюзного биохимического съезда (г. Ленинград), вып. II, 195, 1964.

ГИСТОХИМИЯ

А. М. Чилингарян

Новая методика для микроскопического изучения интрамуральных нервных клеток кишечника и принцип образования преципитатов свинца в клеточных структурах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. К. Карапетяном 29/VI 1964)

Фосфорсодержащие соединения, как известно, по данным современной биохимии, имеют чрезвычайно важное значение в обменных и энергетических процессах организма. Однако до настоящего времени эти соединения гистохимически остаются мало изученными, вследствие отсутствия соответствующих методов исследования.

Первоначальные попытки проводить реакцию на срезах фиксированной или свежезамороженной мозговой ткани давали отрицательные результаты, поэтому для всестороннего изучения влияния различных факторов на развитие и особенности реакции нами, как модель, было подобрано межмышечное нервное сплетение тонкого отдела кишечника кошки, который позволит избегать процедуру приготовления срезов и иметь в физикохимическом отношении малоизмененную ткань. Этот объект нами широко применялся при изучении достоверности и специфичности метода определения активности кислой фосфагазы (^{1, 2}).

Фосфорсодержащие соединения в настоящем исследовании в клеточных структурах осаждались ионами свинца, образуя при этом нерастворимые преципитаты ортофосфатов.

Проведенные исследования позволили, с одной стороны, разработать методику для избирательного выявления нейронов кишечных сплетений, а с другой — установить определенную закономерность образования преципитатов свинца в клеточных структурах, что и лежит в основе разработанных нами новых методов для изучения ряда субстанций в клеточных структурах центральной нервной системы и в паренхиматозных органах.

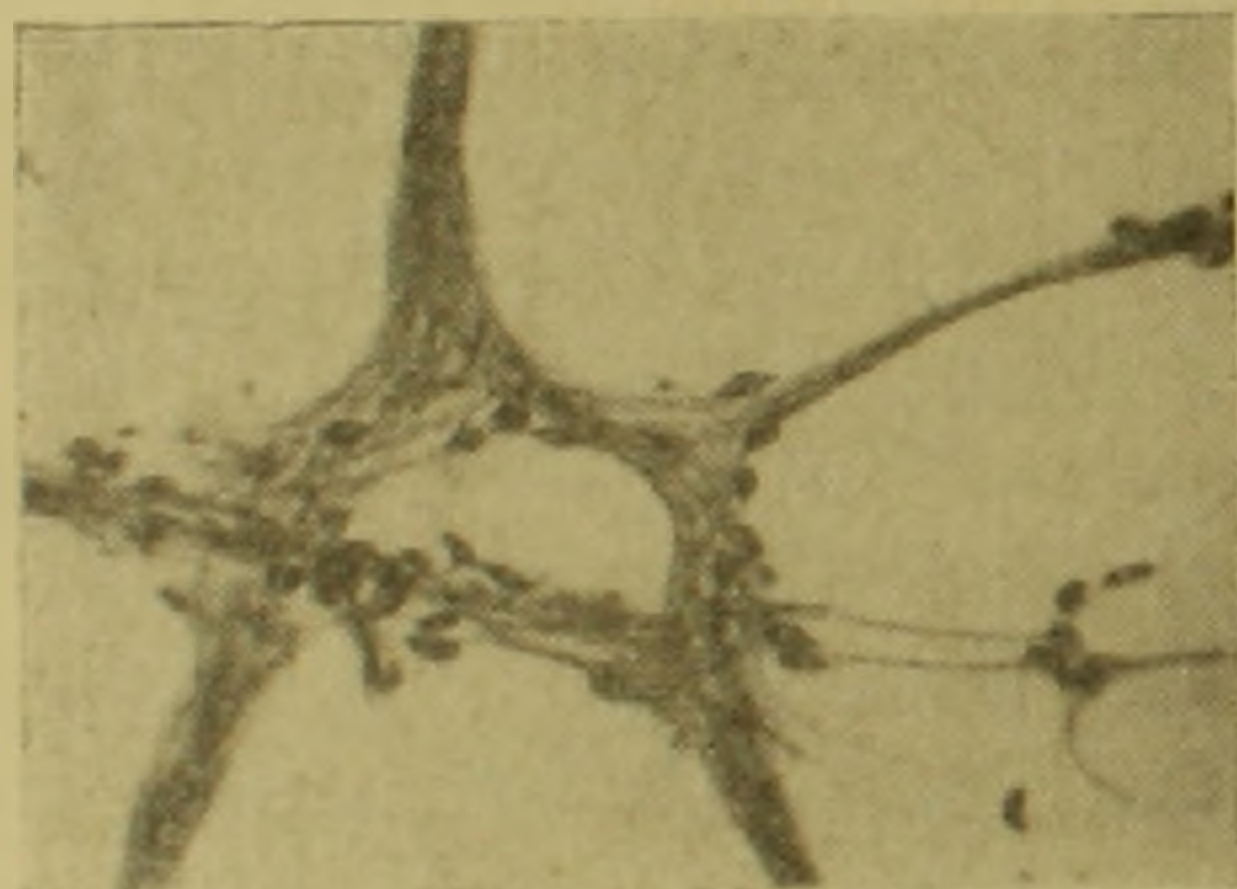
Исследования проводились на межмышечном нервном сплетении тонкого отдела кишечника кошки, а в некоторых случаях данное сплетение изучалось и на толстом отделе.

После декапитации животного быстро извлекался кишечник, который 24—48 часов фиксировался в ацетоне на холоду. Способ фиксации

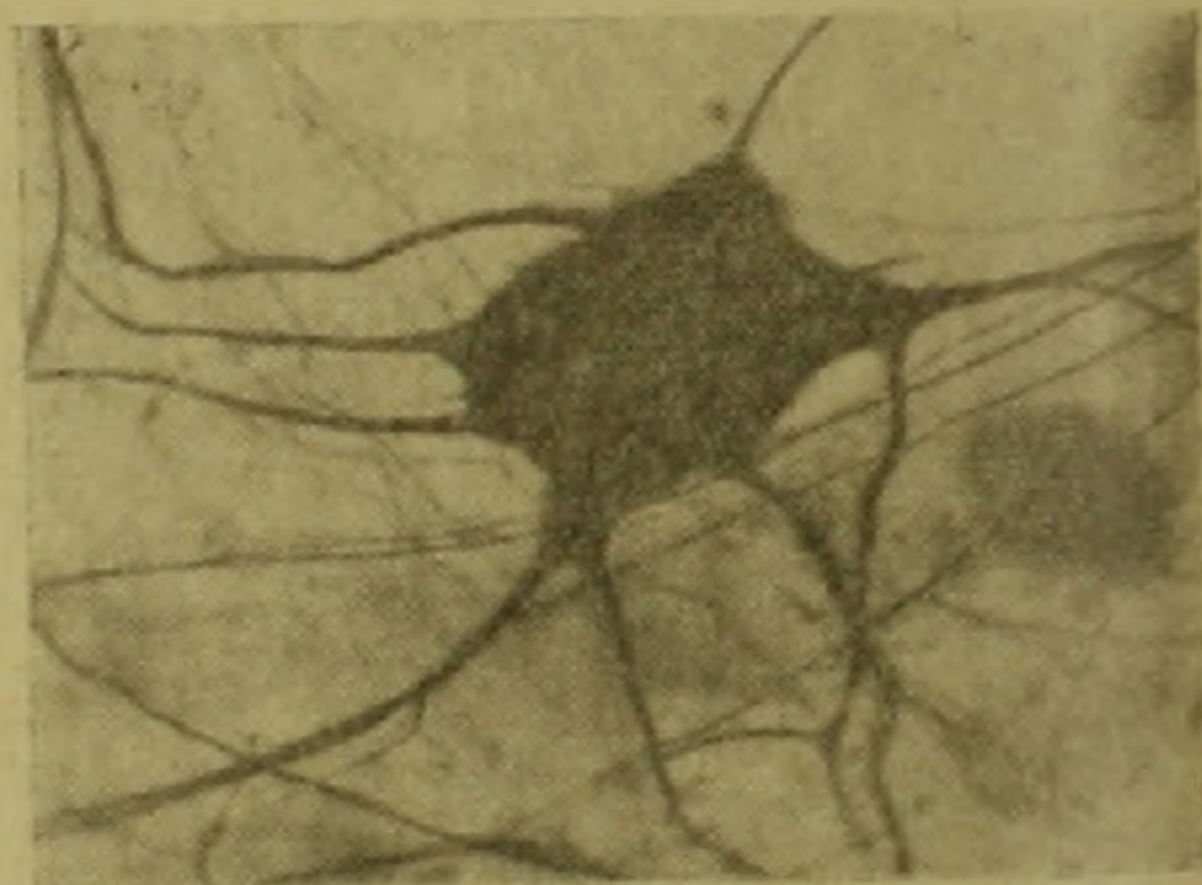
и приготовления тотальных препаратов проводился описанным ранее путем (1,2). При приготовлении тотальных препаратов следует обратить особое внимание на сроки, не оставляя их в воде более 5—10 мин.

Готовые препараты переносились в смесь следующего состава 0,01 мол. (0,38%-ый раствор) уксуснокислого свинца 100 мл и нормальной ацетатный буфер pH 5,9—35 мл. Срезы в этой смеси инкубировались при 37° 5—10 дней и более. Далее производилась промывка в воде 15—20 мин., в 2%-ной уксусной кислоте 5—10 мин., промывка в нескольких сменах воды 15 мин., погружение в 0,5—1%-ный раствор сернистого натрия или аммония 5—15 мин. и тщательная промывка в нескольких сменах воды и через дистиллированную воду, препараты заключались в глицерин-желатину или обычным путем в бальзам.

Полученные таким путем препараты межмышечного сплетения тонкого отдела кишечника по своей четкости во многом напоминают препараты серебряной импрегнации по Бильшовскому—Гросс. На бледном фоне интенсивно выступает сеть ганглиев межмышечного нервного сплетения и соединяющие их нервные стволы (фиг. 1). Ядра гладких мышц нейроглии и мезотелия, а также других тканевых элементов не реагируют. Иногда на препаратах местами выступают фрагментированные волокна, по-видимому, эластические. В ганглиях интенсивно окрашиваются перикарионы и отростки клеток II типа Догеля, которые можно про-



Фиг. 1. Межмышечное нервное сплетение тонкого отдела кишечника кошки. Реакция нервных клеток и межганглиональных нервных стволов. (Микрофото. Об. 0, ок. 6).

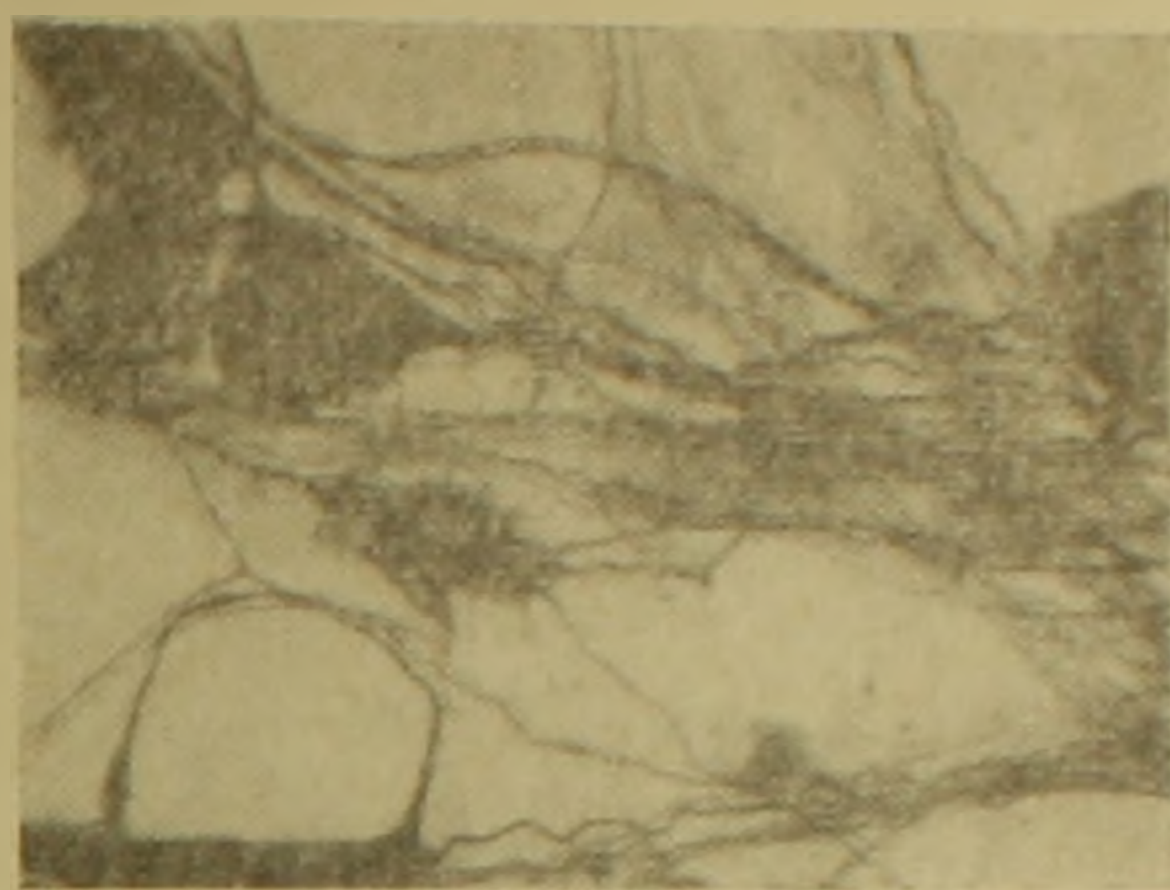


Фиг. 2. Межмышечное нервное сплетение тонкого отдела кишечника кошки. Нервная клетка II типа Догеля. Видны многочисленные отростки, отходящие от тела клетки. (Микрофото. Об. 40, ок. 10).

следить на далеком расстоянии (фиг. 1, 2). Помимо этих клеток часто, особенно при длительных сроках инкубации, в значительном количестве окрашиваются мелкие нервные клетки и клетки I типа Догеля (фиг. 3). Однако они реагируют слабее по сравнению с клетками II типа. В межганглионарных и мелких нервных стволах интенсивно выступают нервные волокна и отростки нервных клеток соседних ганглиев.

Изучение толстого отдела кишечника показывает, что в межмышечном сплетении в основном реагируют клетки II типа, а реакция нервных волокон сходна с тонким отделом. Необходимо отметить значительное отличие в реакции нервных клеток в различных отделах кишечника.

12-перстная кишка обычно дает нечеткую неравномерную, а иногда и отрицательную реакцию. Реакция тощего и подвздошного отделов может быть одинаковой или отличаться у отдельных индивидуумов. Различные отделы кишечника у отдельных индивидуумов по-разному реагируют на водную промывку после фиксации. Так, у одних часовая промывка препаратов одного отдела в воде не вызывает особых изменений в реакции, в то время как в другом отделе она может полностью ее снять.



Фиг. 3. Межмышечное нервное сплетение тонкого отдела кишечника кошки. Ганглий: в середине клетка I типа Догеля с короткими отростками. (Микрофото. Об. 24, ок. 6).

Это обстоятельство, несомненно, представляет большой интерес и, вероятно, связано с физиологическим состоянием исследуемого органа, влияющего на физико-химические свойства субстанций, реагируемых с ионами свинца. Говорить о природе последних крайне трудно из-за невозможности постановки всесторонних контрольных гистохимических экспериментов, поскольку, как было указано выше, короткая водная промывка большей частью снимает реакцию. Сам этот факт уже указывает, что мы имеем дело с низкомолекулярными соединениями легко экстрагируемых из тканей. Контроль по Танглеру ⁽³⁾ показывает, что по окончании реакции преципитат не растворяется в 10%-ном уксуснокислом аммонии, что говорит о его ортофосфатной природе.

Тем не менее данный тест нам кажется еще недостаточным для окончательного утверждения ортофосфатной природы образованных преципитатов.

Свинцовые соединения за последние годы нами широко применялись для микроскопического изучения разных структур ^(4,5). Недавно ⁽¹⁾ нами было установлено, что в контрольном субстрате для определения активности кислой фосфатазы по Гомори иногда могут окрашиваться нервные клетки кишечника, и эта находка использовалась в ряде экспериментальных работ ⁽⁶⁻⁸⁾. Однако во всех вышеуказанных наших исследованиях, надо признаться, подход большей частью был эмпирическим.

Дальнейшие наши исследования дали возможность установить основную закономерность образования преципитатов свинца с разными

субстанциями в клеточных структурах, сущность которой вкратце сводится к следующему.

1. Избирательная реакция ионов свинца с определенной субстанцией при данном рН зависит от концентраций ионов свинца и применяемого буфера.

2. Для каждого рН свойственны свои концентрационные взаимоотношения буфера и ионов свинца.

Помимо этого, в развитии реакции существенное значение имеет и состояние ткани, а также способ получения срезов (фиксация).

Зависимость реакции разных субстанций от концентрации ионов свинца и буфера покажем на следующих примерах: как стандартную концентрацию уксуснокислого свинца возьмем 0,01 мол. раствор 100 мл и 10 мл 1 мол. ацетатного буфера при рН 5,6. В данном случае при инкубации срезов настоящим способом отмечается слабая, но умеренная реакция ядер гладкомышечных клеток и местами волокна, по-видимому эластические. Очень слабо могут реагировать единичные перикарионы с короткими отростками. Если другая часть срезов инкубируется в смеси, где количество буфера увеличивается до 20 см³, то наблюдается неравномерность ядерной реакции. В одних местах она интенсивная, в других совершенно отсутствует и вместо них уже видны четко окрашенные нервные клетки и стволы. А на срезах инкубируемых в смеси с количеством буфера 25—30 см³ четко и избирательно видны нервные клетки и стволы. Картина сходна с той, которая получается при рН 5,9 при количестве буфера 35 см³, как указывалось в настоящем сообщении. При дальнейшем увеличении количества буфера полностью отсутствует окраска всех структур и препараты совершенно бесцветны.

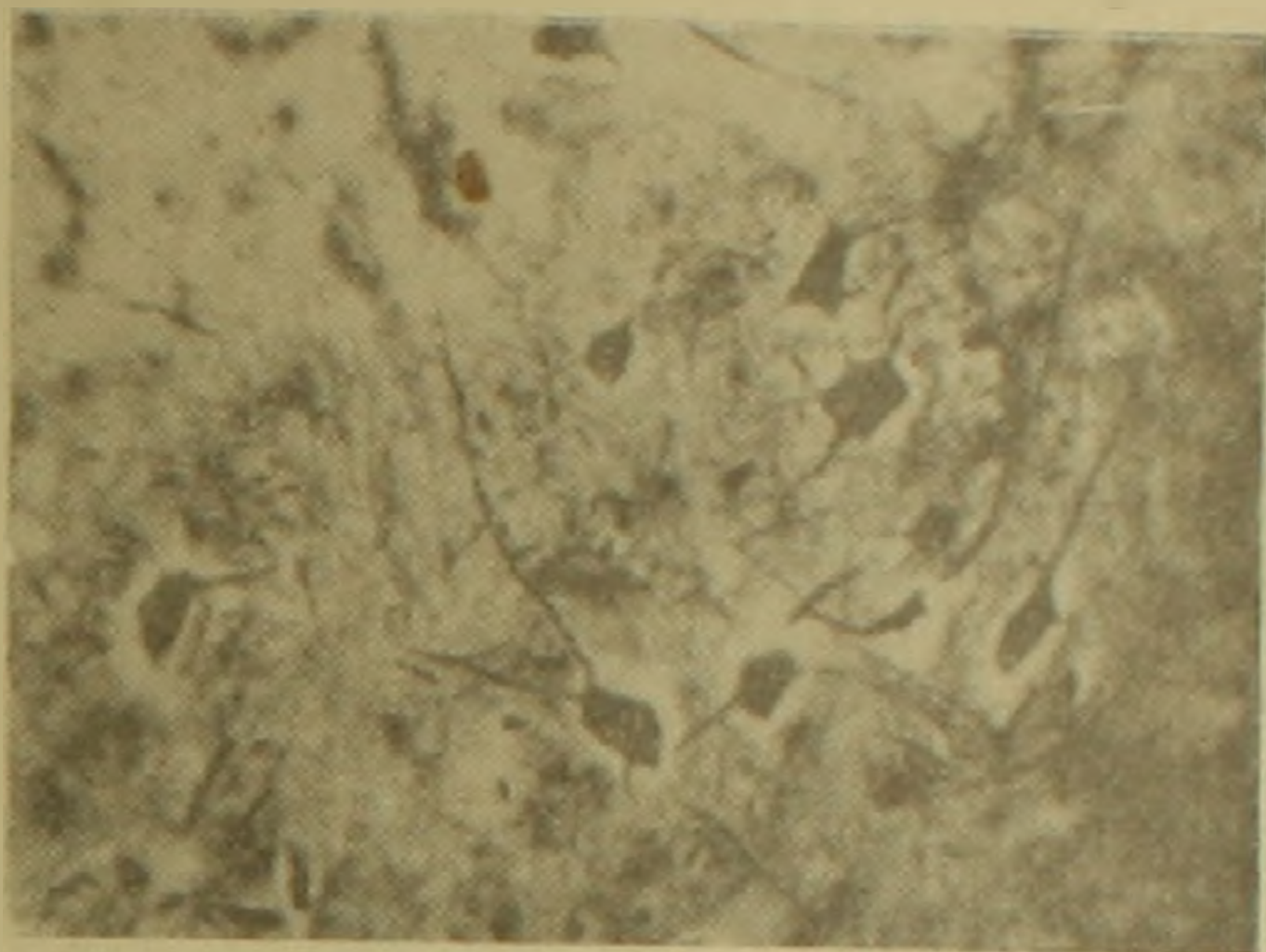
Аналогичные изменения в реакции наблюдаются при снижении концентрации ионов свинца от 0,01 мол. до 0,001 мол. при неизменном количестве буфера. Например, если к количеству раствора свинца 100 мл, но разной молярности, прибавить 10 мл 1 молярного раствора ацетатного буфера при рН 5,6, то постепенно происходит усиление и неравномерность ядерной реакции вплоть до ее исчезновения и появления избирательной реакции нервных клеток при 0,003—0,001 мол. растворе свинца.

При инкубации срезов в 0,01 мол. растворе свинца—100 мл. и мол. буфер рН 4,7—10—12 мл (контрольный субстрат по Гомори) структуры большей частью не окрашиваются. Но стоит срезы инкубировать в той же смеси, снизив лишь количество буфера до 6—8 мл или увеличив концентрацию ионов свинца, то появляется реакция ядерной или нервной субстанции, сходная с картиной при рН 5,6—5,9.

Исходя из приведенных примеров и наших других наблюдений, можно дать следующую характеристику реакций разных субстанций при различных рН. При рН от 5,6 до 3,8 для получения реакции ядерной или нервной субстанции следует соответственно уменьшить количество прибавляемого буфера или увеличить концентрацию ионов свинца. При рН от 5,6 до 6,2, наоборот, увеличивается количество буфера или снижается концентрация ионов свинца.

Таким образом, одна и та же субстанция реагирует при широких значениях (3,8—6,4), что говорит об отсутствии изоэлектрической точки. Выбранный нами рН 5,9 и буфер 35 см³ удобны в том отношении, что реакция при этом происходит более равномерно и уменьшаются ошибки технического характера.

После установления принципа образования преципитатов свинца мы также изучили реакцию нервных структур головного и спинного мозга. Для этой цели кусочки различных отделов мозга фиксировались 24 часа в холодном ацетоне. После промывки в физиологическом растворе готовились замороженные срезы, которые длительное время (25 дней) инкубировались и обрабатывались настоящим методом.



Фиг. 4 Спинной мозг кошки. Реакция отдельных нервных клеток вентрального рога. рН 5,9, буфер 35 см (Микрофото. Об. 8, ок. 6).

На структурах мозга наблюдается та же закономерность в образовании преципитатов свинца. Однако в отличие от кишечника не удалось получить равномерной и одинаковой реакции на разных участках одного и того же препарата, что, по-видимому, связано с процедурой промывания срезов и их приготовлением. На препаратах местами наблюдается четкая окраска перикарионов и отростков нервных клеток и волокон в спинном мозге, в стволе и в мозжечке (фиг. 4). В коре реагируют единичные клетки. Несмотря на неравномерность реакции нервных клеток, полученные факты говорят о возможности изучения нейронов центральной нервной системы на срезах с помощью свинцовых соединений. Четкая морфологическая картина, полученная при этом, указывает, что при успешной стабилизации субстанции нейронов мозга до реакций откроет новый путь для изучения морфологии и цитохимии нервных структур центральной нервной системы. В настоящем сообщении стабилизация этих соединений и стандартизация звеньев обработки осуществилась пока в отношении кишечника, в связи с этим методика предназначена для изучения кишечных нейронов.

Институт физиологии им. акад. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Աղիքների ցեղաբանական և քիմիական բնութագրի միկրոսկոպիական
ուսումնասիրման նոր մեթոդ և կապարի նոսրացման սկզբունքը

Աղիքների միջավանաչին ներվային հանգույցը ունի այն առավելությունը, որ նշան-
ադրությունը և տալիս խոստովելու կորվածքներ պատրաստելու անհրաժեշտությունը

է ունենալ ֆիզիկո-քիմիական տեսանկյունից թիչ փոփոխված հյուսվածք: Այս սրբիտը նախկինում մեր կողմից ոգտադործվել է որոշ ֆերմենտատիվ ռեակցիաների հիստոքիմիական առանձնահատկութիւնները ուսումնասիրելու համար:

Մշակված է նոր մեթոդ, որը ապահովում է միջմկանային ներվային հանգույցի ընկճների և նրանց էլուստների ընտրողական ռեակցիան ու նրանց ցայտուն հայտնաբերումը: Միաժամանակ ցույց է տրված, որ նույն կենդանու բարակ աղիների տարբեր հատվածներում ռեակցիան կարող է արտահայտված լինել տարբեր աստիճանի: Այս հանգամանքը որոշակի հետաքրքրութիւն է ներկայացնում ցիտոֆիզիոլոգիական տեսանկյունից և ըստ երևույթին կապված է տվյալ հատվածի ֆիզիոլոգիական վիճակի հետ:

Կատարված հետազոտութիւնները հնարավորութիւն տվեցին գալու որոշակի եզրակացութեան, որի հիման վրա ձևակերպված է նոր օրինաչափութիւն կապարի կոմպլեքսների առաջացման մասին ընթացիկ գոյացութիւններում: Այս օրինաչափութիւնը և ընկճ է հեղինակի կողմից մշակվող նոր մեթոդների հիմքում, որոնք առաջադրվում են տարբեր գոյացութիւնների ձևաբանական և ընթացիկ քիմիական հետազոտութիւնների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. М. Чилингарян, Некоторые данные по гистохимии и цитоархитектонике нервных сплетений кишечника, Дисс., М., 1954. ² А. М. Чилингарян, ДАН Арм. ССР, т. XXVIII, № 4, 177 (1959). ³ Е. Тандлер, J. Histochem Cytochem. Б, 489, 1957. ⁴ А. М. Чилингарян, Материалы научно-методической конференции АГЭ сельхоз ВУЗ-ов, тез. докл. вып. II, 99, М. 1963. ⁵ А. М. Чилингарян, Е. Н. Паравян, „Известия АН Арм. ССР“ (мед. науки) 6,15, 1961. ⁶ Л. И. Евсеева, Изменение активности кислой фосфатазы и концентрации ортофосфатов в нейронах вегетативной нервной системы при нарушении кровообращения и илеусе, Автореф. дисс., М., 1956. ⁷ Х. Церет, Архив анатомии гистологии и эмбриологии I, 63, 1958. ⁸ Н. П. Петропавловская, Сравнительно-гистохимические данные об активности фосфатаз и о плюмбофильности вегетативных нейронов крупного рогатого скота, Автореф. дисс., М., 1961.