

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXXIX, № 4

1964

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնաձու, Ա. Թ. ՐԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Հ.
ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների դոկտոր (պատ. խմբագրի տե-
ղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻՐՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղ-
րակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ
քղրակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Ս. Մ.
ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН, доктор биологических наук
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մարեմտօիկա

Ս. Գ. Հովսեփյան — Բազմակապ տիրույթներում լարի տատանման հավասարման համար Դիրիսլեի խնդրի եզրային կետերի ծնող քաղաքական մասին

Մեխանիկա

Կ. Ս. Կարապետյան և Ռ. Ա. Կոռիկյան — Բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների հեռագոտությունը բարդ լարվածային վիճակի դեպքում

Առաձգականության բեռնություն

Վ. Ս. Սարգսյան — Բաղադրյալ ոչ օրթոտրոպ պրիզմատիկ ձողերի ծոռում

Ֆիզիկա

Մ. Ի. Սովսեսյան և Յու. Ս. Զլյինգարյան — Ռուբինի R_1 առաքման գծի հաճախականության և լայնության ջերմաստիճանային կախումը

Պոլիմերների ֆիզիկա

Ն. Մ. Քոչարյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ն. Ա. Նալբանդյան, Վ. Յ. Առաքելյան և Հ. Ս. Ֆուրչյան — Ուլտրաձայնային ալիքների կլանումը պոլիստիրոլի բենզոլային լուծույթներում

Աստրոֆիզիկա

Ա. Գ. Նիկողոսյան — Անվերջ խոր միաչափ միջավայրից դիֆուզ պոլիտրոմատիկ անդրադարձման ոչ գծային մի խնդրի մասին

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- С. Г. Овсепян*—О порождающем множестве граничных точек в задаче Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных областях 193

Механика

- К. С. Карапетян и Р. А. Котакян*—Исследование прочности бетона при сложно-напряженном состоянии 201

Теория упругости

- В. С. Саркисян*—Изгиб неортотропных составных призматических стержней 207

Физика

- М. Е. Мовсесян и Ю. С. Чилингарян*—Температурная зависимость частоты и ширины излучения линии R_1 рубина 217

Физика полимеров

- Н. М. Кочарян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, *Н. А. Налбандян, В. Ц. Аракелян и Г. С. Фаршян*—Поглощение ультразвуковых волн в растворах полистирола в бензоле 221

Астрофизика

- А. Г. Никогосян*—Об одной нелинейной задаче полихроматического диффузного отражения от бесконечно глубокой одномерной среды 227

Органическая химия

- В. И. Исагульянц*, академик АН Армянской ССР, и *М. Г. Сафаров*—Конденсация непредельных углеводородов с карбонильными соединениями в присутствии катионообменной смолы в качестве катализатора 235

Биохимия

- Ж. И. Акопян*—Взаимоотношения между действием гормонов щитовидной железы и гормонов надпочечников в процессе окисления тирозина 239

Гидрогеология

- Г. И. Тер-Степанян и А. П. Аракелян*—Типы гидрогеологических поперечников в лавах, подстилаемых глинами 245

Стратиграфия

- О. А. Саркисян и С. М. Григорян*—Открытие морских отложений олигоцена в Севано-Ширакском синклинории (Малый Кавказ) 251

С. Г. Овсепян

О порождающем множестве граничных точек в задаче
Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных
областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 18/VI 1964)

В настоящей заметке изучается следующая задача Дирихле

$$(1 + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 - \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \tau(s) \quad (2)$$

в ограниченной многосвязной области D с границей Γ , где λ — вещественный параметр с модулем меньше единицы.

Хорошо известно, что для гиперболических уравнений краевые задачи с заданием на полной границе не являются корректными. Тем не менее изучению таких задач посвящен ряд работ советских и зарубежных авторов (¹⁻⁴ и др.).

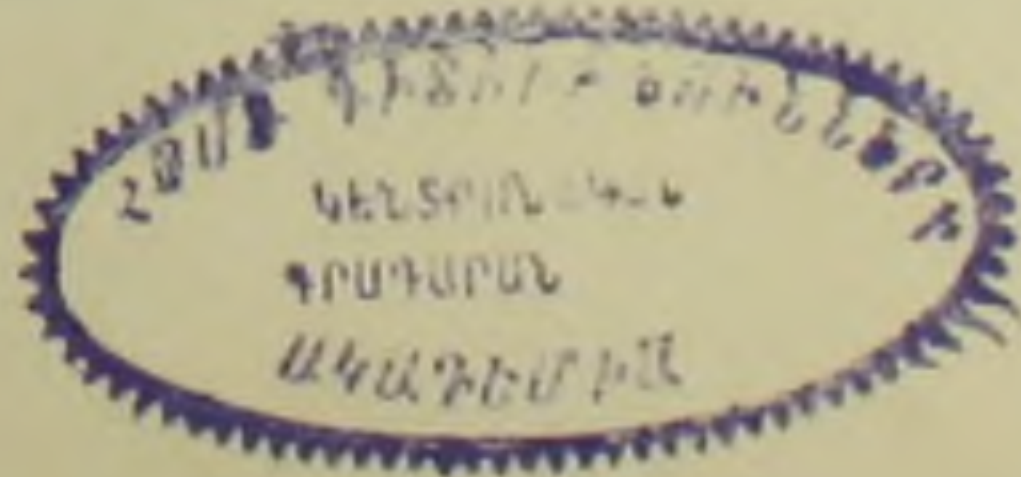
Как сама задача (1), (2), так и порожденные ею спектральные разложения достаточно полно исследованы в работах Р. А. Александра в том случае, когда рассматриваемая область является выпуклой.

Оказалось, что в этом случае все связанные с задачей (1), (2) существенные результаты могут быть сформулированы в терминах специальных топологических отображений границы области на себя.

В частности, в работе (⁴) введено понятие порождающего множества граничных точек, выяснена его роль, и построено это множество в случае выпуклых областей.

Наша цель — исследовать соответствующие вопросы в случае невыпуклых и многосвязных областей.

То обстоятельство, что характеристики уравнения (1) в рассматриваемых нами случаях пересекают границу области в более чем двух точках, естественным образом усложняет исследование, однако путем некоторых дополнительных построений удастся выделить части границы области, где ситуация аналогична случаю выпуклых областей. В остальной части границы обстоятельство совершенно иное.



$$= \int_{\Gamma} \sigma(s) \left[(1 + \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) - (1 - \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds \quad (3)$$

для любой функции $\varphi(x, y) \in \Phi_0(D)$, где $\Phi_0(D)$ множество всех гладких в D функций, исчезающих на границе Γ .

Определение 2. Суммируемую в D функцию $u(x, y)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она представима в виде суммы двух суммируемых в D функций

$$u(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

где $f(x, y)$ постоянна на почти всех характеристических отрезках первого семейства характеристик, а $g(x, y)$ на почти всех характеристических отрезках второго семейства характеристик и если на границе Γ $u(x, y)$ почти везде равна $\sigma(s)$.

Лемма 1. Из того, что $u(x, y)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в смысле определения 1, следует, что она является обобщенным решением той же задачи в смысле определения 2, и наоборот.

Можно доказать аналогично тому, как это сделано в работе (³), что если обобщенное решение задачи (1), (2) является гладкой функцией, то оно является решением в классическом смысле.

Как было указано выше, построение порождающего множества граничных точек играет принципиальную роль в исследовании задач типа Дирихле для уравнения (1). В этой работе мы укажем способ построения порождающего множества в случае класса многосвязных допустимых областей в терминах специальных отображений границы области на себя. Для этой цели нам понадобится ввести ряд определений и понятий.

Рассмотрим два отображения S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} границы Γ на себя. образом исходной точки θ при отображении S_{λ}^{+} (соответственно S_{λ}^{-}) будем понимать второй конец каждого характеристического отрезка первого семейства характеристик (соответственно второго семейства характеристик), первый конец которого совпадает с точкой θ . Если для исходной точки характеристический отрезок вырождается в точку, то образом ее считается она сама.

Заметим, что в рассматриваемых нами случаях, в отличие от случая выпуклой области, отображения S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} определяются, вообще говоря, неоднозначно.

Назовем λ -циклом, порожденным граничной точкой θ , совокупность всех граничных точек, получаемых из исходной точки θ путем поочередного применения отображений S_{λ}^{+} , S_{λ}^{-} или наоборот, причем на каждом шаге применения многозначных отображений S_{λ}^{+} , S_{λ}^{-} понимается некоторый определенный образ.

Цикл называется замкнутым,

Точку $\theta \$

рая является предельной точкой с одной и той же стороны для этих множеств.

Обозначим через N_λ множество всех λ -вершин, а через $N_\lambda^{(0)}$ множество всех периодических λ -вершин.

Пусть B_k — подмножество множества $N_\lambda - N_\lambda^{(0)}$, состоящее из всех тех λ -вершин, каждая из которых λ -эквивалентна с некоторой точкой множества B_{k-1} ($k = 2, 3, \dots, q$), причем за B_1 возьмем некоторую точку p_1 из $N_\lambda - N_\lambda^{(0)}$.

Пусть

$$N_\lambda^{(1)} = \bigcup_{k=1}^q B_k.$$

Совершенно аналогично, исходя из некоторой точки $p_l \in N_\lambda - \bigcup_{k=0}^{l-1} N_\lambda^{(k)}$, образуем множество $N_\lambda^{(l)}$ ($l = 2, 3, \dots, l$).

Таким образом,

$$N_\lambda = \bigcup_{k=0}^l N_\lambda^{(k)},$$

причем при $i \neq j$ каждая точка множества $N_\lambda^{(i)}$ λ -неэквивалентна с каждой точкой множества $N_\lambda^{(j)}$.

Множество дуг на Γ называется инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^- , если образы этих дуг при отображениях S_λ^+ и S_λ^- принадлежат этому множеству дуг. Аналогичным образом определяется инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- множество точек на Γ .

Пусть M_λ — множество точек, образованное всеми λ -циклами всех вершин, тогда дополнение замыкания этого множества состоит из не более чем счетного числа открытых дуг

$$CM_\lambda = \bigcup_{(k)} d_k.$$

Доказывается, что совокупность всех этих дуг d_k инвариантна относительно S_λ^+ и S_λ^- и что каждая из этих дуг является либо непериодической, либо периодической, причем число последних конечно. Для выпуклой области D такие периодические дуги (как и все периодические точки) имеют один и тот же период. Доказывается, что для многосвязных допустимых областей хоть и λ -неэквивалентные периодические дуги могут иметь разные периоды, однако все периодические точки λ -эквивалентных дуг имеют один и тот же период и что все точки одной и той же непериодической дуги из CM_λ λ -эквивалентны некоторой точке из $N_\lambda^{(i)}$ при одном и только

в смысле равномерной сходимости в классе всех собственных функций из $K(D)$, соответствующих этому же собственному значению λ .

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим один простой пример. Пусть R —прямоугольник с длинами сторон a и b . Разделим его на конечное число равных прямоугольников, разделив его стороны соответственно на n и m равных частей, где n и m —произвольные натуральные числа. Пусть Ω —область, полученная из R путем выбрасывания некоторого числа маленьких прямоугольников, а Γ —граница полученной области. Доказывается, что если отношение $\frac{a^2}{b}$ ра-

ционально, то λ —неэргодическое, а если отношение $\frac{a^2}{b}$ иррационально, то λ —эргодическое, причем λ —цикл любой граничной точки всюду плотен на Γ .

Таким образом, заключаем, что для единственности в первом классе Бэра обобщенного решения краевой задачи (1), (2) в области Ω необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{a^2}{b}$ было иррационально.

Следствие. Задача Дирихле (1), (2) неустойчива по отношению к изменению области в том смысле, что для любой ограниченной многосвязной области D с кусочно-гладкой границей существуют сколь угодно близкие области Ω_1 и Ω_2 такие, что решение задачи (1), (2) в области Ω_1 единственно в первом классе Бэра, а в Ω_2 , наоборот, нет единственности.

Действительно, любую такую область можно аппроксимировать с любой степенью точности областями Ω , полученными вышеуказанным способом из прямоугольников R как с рациональным, так и иррациональным отношением $\frac{a^2}{b}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԷՓՅԱՆ

Բազմադասյա սիրույթներով լարի անսահման հաճախման համար
Դիրիխլեի խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմադասյան մասին

Աշխատության մեջ սահմանափակ D տիրույթում դիտարկվում է Դիրիխլեի հետևյալ խնդիրը

$$(1 + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 - \lambda) \frac{\partial^2 u}{\$$

Այն դեպքում, երբ D տիրույթը ուսուցիչ է ինչպես (1) (2) խնդիրը, նույնպես նրանից բխող սպեկտրալ վերլուծությունները բավական լրիվ ուսումնասիրված են Ռ. Լ. Ալեքսանդրյանի աշխատություններում: Մասնավորապես Ռ. Լ. Ալեքսանդրյանի կողմից մտցվել է (1) (2) խնդրի եզրային կետերի ձևող բաղադրության պաշտպանությունը, պարզաբանվել նրա դերը և կառուցվել է այդ բաղադրությունը ուսուցիչ տիրույթների համար:

Ներկա աշխատության մեջ կտոր առ կտոր ոգորկ եզրեր ունեցող վերջավոր կապան տիրույթների համար տրվում է (1) (2) խնդրի եզրային կետերի ձևող բաղադրություն կառուցելու մեթոդ:

Այդ բաղադրության կառուցումը հնարավորություն է տալիս ապացուցելու մի քանի միակության թեորեմներ, ինչպես նաև կառուցելու տվյալ սեփական արժեքին համապատասխանող բոլոր սեփական ֆունկցիաները:

Ապացուցվում է նաև, որ (1) (2) եզրային խնդիրը կայուն չէ տիրույթի փոփոխման նկատմամբ հետևյալ իմաստով:

Ամեն մի կտոր առ կտոր ոգորկ եզրեր ունեցող բաղադրանքով D տիրույթի համար կարելի է ցույց տալ այդ տիրույթին ցանկացած չափով մոտ D_1 և D_2 տիրույթներ այնպես, որ (1) (2) խնդրի լուծումը D_1 տիրույթում միակը լինի, իսկ D_2 տիրույթում միակություն չլինի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆ ՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. Bourgin, R. Duffin. Bull. Amer. Math. Soc. 45(1939), 851—859. ² Փ. Джон. Amer. Journ. of Math. 63, № 1 (1941), 141. ³ Р. А. Александрян, Диссертация, МГУ, 1949. ⁴ Р. А. Александрян. Докторская диссертация, МГУ, 1962. ⁵ Ю. М. Березанский, Укр

К. С. Карапетян и Р. А. Котикян

Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 6/V 1964)

В области исследования прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии пока сделано довольно мало. Такие исследования необходимы не только для отыскания условий прочности бетона при сложно-напряженном состоянии, но и для выяснения возможности получения связи между интенсивностями напряжений и деформаций из соответствующих опытов простого напряженного состояния.

Настоящая работа посвящена исследованию указанного вопроса при следующих сложно-напряженных состояниях:

- 1) кручение с последующим растяжением;
- 2) внутреннее давление с последующим сжатием.

Исследования прочностных и деформативных свойств бетона при сложно-напряженном состоянии были выполнены на полых цилиндрических образцах, наружным диаметром 204 мм, толщиной стенок 2 см, длиной 80 см.

Образцы были приготовлены из мелкозернистого бетона на кварцевом песке и пуцолановом портландцементе Араратского завода, активностью 503 кг/см². Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м ³			Объемный вес бетона в кг/м ³	R_k в кг/см ²
	цемент	песок	вода		
1:1,68	651	1095	448	2194	191

Образцы были приготовлены в металлических разборных формах. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на виброплощадке при продолжительности вибрации 30 секунд.

Из каждого замеса бетона приготавливались 18 образцов и необходимое количество кубиков размерами ребер 10 см. Всего было приготовлено 54 труб

тельно описывает также все экспериментальные кривые сложного нагружения. Кривые, построенные по формуле (5), приведены на фиг. 4а. Здесь же указаны экспериментальные точки, которые соответствуют средним значениям деформаций нескольких образцов для каждого вида испытания.

Таким образом получается, что для выражения зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций бетона при сложно-напряженном состоянии — кручении с последующим растяжением, без особой погрешности, можно воспользоваться соответствующей зависимостью простого напряженного состояния — чистого растяжения.

Приведем результаты исследования прочности и деформативности образцов при сложно-напряженном состоянии — внутреннем давлении с последующим сжатием.

Напряжение от внутреннего давления на внутренней грани поперечного сечения опытного образца определялось по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right), \quad (6)$$

а в радиальном направлении по формуле

$$\sigma_{yy} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left(1 - \frac{R^2}{y^2} \right). \quad (7)$$

В указанных формулах R и r представляют наружный и внутренний радиусы поперечного сечения образца, p — внутреннее давление в кг/см^2 .

Интенсивности напряжений и деформаций определялись по формулам

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2}. \quad (9)$$

На фиг. 4а приведена кривая прочности бетона при данном сложном нагружении, которая и в этом случае представляет эллипс. Кривая построена по формуле (10), которая удовлетворительно описывает опытные данные

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{R_{xx}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yy}}{R_{yy}} \right)^2 = 1. \quad (10)$$

Таким образом, предварительное приложение внутреннего давления приводит к уменьшению предела прочности бетона на осевое сжатие. При этом это уменьшение тем больше, чем больше внутреннее давление.

На фиг. 4 б приведены средние экспериментальные точки кривой интенсивности деформаций чистого сжатия бетона и кривых ин-

тенсивностей деформаций сложного нагружения при различных значениях внутреннего давления, откуда нетрудно заметить, что и в этом случае без особой погрешности экспериментальные кривые могут быть описаны одной общей зависимостью типа (4). Таким образом и при данном сложном нагружении зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций может быть получена от простого напряженного состояния.

В результате описания кривой интенсивности деформаций чистого сжатия получена следующая зависимость

$$\varepsilon_1 = (0,292\varepsilon_1 + 0,014\varepsilon_1^2) \times 10^{-5}. \quad (11)$$

Кривая чистого сжатия по формуле (11) приведена на фиг. 4б сплошной линией. На фиг. 4в по этой же формуле приведены как кривая чистого сжатия, так и кривые для сложного нагружения при различных значениях внутреннего давления.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ԿԱՐԱՄԵՏՅԱՆ ԵՎ Ռ. Ս. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

Քետոնի ամրության և դեֆորմացիկ հասկացումների հետազոտությունը բարդ լարվածային վիճակի դեպքում

Հոդվածը նվիրված է քետոնի ամրության և դեֆորմացիկ հասկացումների ուսումնասիրությանը բարդ լարվածային վիճակի դեպքում: Հետազոտված են

1. Ոլորում - ձգում
2. Ներքին ճնշում - սեղմում

բարդ լարվածային վիճակները:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ինչպես ոլորում-ձգում, այնպես էլ ներքին ճնշում-սեղմում լարվածային վիճակների դեպքում ամրության կորերը էլիպսներ են:

Բացի դրանից ցույց է տված, որ քետոնի լարումների ինտենսիվության և դեֆորմացիաների ինտենսիվության հասկացումների արտահայտության համար երկու բարդ լարվածային վիճակների դեպքում էլ կարելի է

$$\varepsilon_z = (A$$

¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954. ² К. И. Борш, Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil Iași Mat., 1957, VIII, № 2, 163—190. ³ К. С. Чобанян, ДАН АрмССР, т. XXII, № 3 (1956). ⁴ К. С. Чобанян, Известия АН АрмССР, т. XI, № 5 (1958). ⁵ Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян, Известия АН АрмССР, т. X, № 5, (1957). ⁶ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Гостехтеориздат, М.—Л., 1950. ⁷ В. С. Саркисян, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1963. ⁸ В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР, т. XV, № 5 (1962). ⁹ А. М. Динник, Продольный изгиб. Кручение, Изд. АН СССР, М., 1955.

