

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXXIX, № 3

1964

խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Լ. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱԽԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԿԱ քղրակից-անդամ, Վ. Հ.
ՀԱՍԻԱՐՋՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԵՀԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների դոկտոր (պատ. խմբագրի տե-
ղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղ-
րակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԿԱ
քղրակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԿԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ
ԿԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԿԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ.
ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԿԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН, доктор биологических наук
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մաքեմատիկա

Ժ. Ն. Քեչիշյան—Բազմանդամների գուգամետ հաջորդականությունների հետ կապված մի քանի հարցերի մասին 12

Ս. Հ. Սինանյան—Շրջանային աղեղի վրա սահմանափակ բազմանդամների և նրանց ածանցյալների մի քանի զնահատականների մասին 13

Մեխանիկա

Ս. Ա. Հոմբարձումյան և Գ. Ե. Ռադղասարյան—Ջերմային դաշտի ազդեցության տակ գտնվող ֆլատտերը 14

Առաձգականություն և հեռություն

Ա. Հ. Բաբլոյան—Մի քանի «գույգ» շարքերի լուծումները 16

Աստրոֆիզիկա

Վ. Հ. Հոմբարձումյան—ակադեմիկոս—Ճառագայթման ազդեցության տակ միջավայրի պարզեցման մի դեպքի մասին 17

Ֆ. Յվիկի—Կոմպակտ գալակտիկաներ 18

Ռադիոֆիզիկա

Լ. Լ. Դեկաբրուն և Ա. Ռ. Մկրտչյան—Նեցուկային լարում մեծ ճշգրտությամբ հոսանքի կայունարարների համար 19

Ինժեներական սելամոլոգիա

Ա. Գ. Լուգանով, Հայկական ՍՍԻ ԳԱ ակադեմիկոս, Բ. Վ. Կարապետյան և Ս. Ա. Շահինյան—Մոդելների վրա կառուցվածքների սեյսմոկայունության ուսումնասիրության մեթոդ՝ պայթեցման սեյսմիկ ազդեցության ներքո 19

Բիոֆիզիկա

Մ. Յա. Մայգելիս, Ա. Գ. Բազարյան և Ֆ. Ջ. Մեյելսոն—Գլուկոզային ճեղքումից առաջացած նյութերի օգտագործումը սպլառակուցի սինթեզի պրոցեսում որոշ օրգանների կոմպենսատոր հիպերֆունկցիայի ժամանակ 20

Ֆիզիոլոգիա

Հ. Գ. Բակլավաջյան—Գլխուղեղի բիոէլեկտրական ակտիվության վրա H- և M-իոյինոլիտիկ նյութերի ազդեցության մեխանիզմի մասին 21

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- Ж. Н. Кешишян*—О некоторых вопросах, связанных с сходящимися последовательностями многочленов 129
- С. О. Синанян*—Некоторые оценки для класса ограниченных на дуге окружности многочленов и их производных 133

Механика

- С. А. Амбарцумян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, и *Г. Е. Багдасарян*—Флаттер пластинки, находящейся в поле действия температуры 141

Теория упругости

- А. А. Баблоян*—Решение некоторых „парных“ рядов 149

Астрофизика

- В. А. Амбарцумян*, академик—Об одном случае просветления среды под воздействием излучения 159
- Ф. Цвикки*—Компактные галактики 167

Радиофизика

- Л. Л. Декабрун* и *А. Р. Мкртчян*—Опорное напряжение для стабилизаторов тока большой точности 171

Инженерная сейсмология

- А. Г. Назаров*, академик АН Армянской ССР, *Б. К. Карапетян* и *С. Г. Шагинян*—Метод исследования сейсмостойкости сооружений на моделях, при сейсмовзрывных воздействиях 177

Биохимия

- М. Я. Майзелис*, *А. Г. Базарджян* и *Ф. З. Меерсон*—Использование продуктов распада глюкозы в процессе синтеза белка при компенсаторной гиперфункции некоторых органов 181

Физиология

- О. Г. Баклаваджян*—О механизме действия Н- и М-холинотических веществ на биоэлектрическую активность головного мозга 187

Ж. Н. Кешишян

О некоторых вопросах, связанных с сходящимися
последовательностями многочленов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/III 1964)

Рассмотрим последовательность многочленов $P_n(z)$ ($n \geq 1$), которая сходится в каждой точке единичного круга $|z| < 1$.

Определение. Точка z единичного круга называется **регулярной** для последовательности многочленов $P_n(z)$, если существует такая ее окрестность, где последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится равномерно. В противном случае точка z единичного круга называется **иррегулярной**.

Монтелем была поставлена задача о характеристике множества иррегулярных точек последовательности многочленов. Эта задача полностью была решена М. А. Лаврентьевым. Им доказана следующая теорема (1, 2).

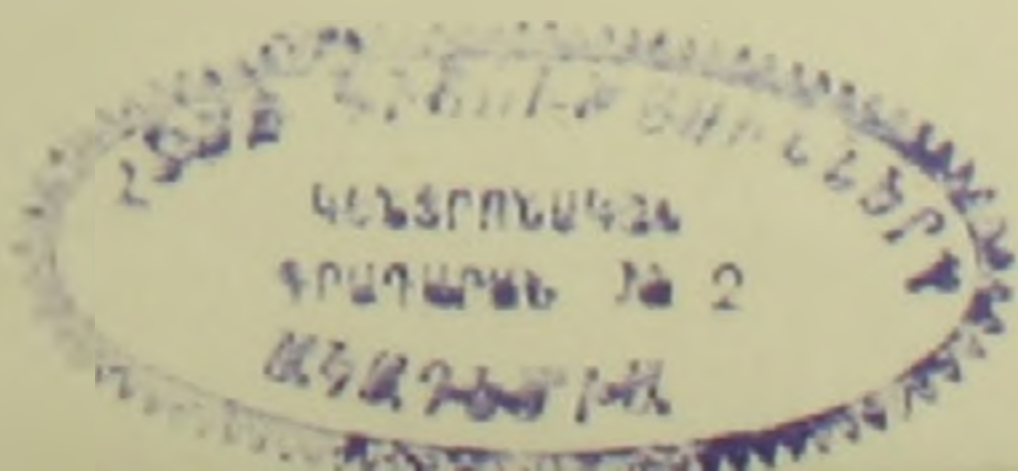
Теорема М. А. Лаврентьева. Для того, чтобы множество E единичного круга было множеством иррегулярных точек некоторой последовательности многочленов, необходимо и достаточно, чтобы оно имело следующие свойства:

1) множество E совершенно относительно единичного круга;
2) множество E является континуумом вместе с единичной окружностью;

3) множество E нигде не плотно;

4) множество E имеет свойство M , т. е. любое замкнутое подмножество F множества E имеет порцию F_1 , которая является границей некоторой области D , содержащей бесконечно удаленную точку, и каждая точка множества E принадлежит либо множеству F_1 , либо области D .

Если точка z_0 ($|z_0| < 1$) является регулярной для последовательности многочленов $P_n(z)$, то существует такая ее окрестность, где последовательность $\{P_n(z)\}$ равномерно ограничена. Наоборот, если последовательность многочленов $P_n(z)$ равномерно ограничена в некоторой окрестности точки z_0 ($|z_0| < 1$), то из теоремы Витали следует, что точка z_0 является регулярной для $\{P_n(z)\}$. Отсюда следует, что последовательность многочленов $P_n(z)$ не может быть равномерно ограниченной ни в какой окрестности иррегулярной точки z_0 . Следо-



вательно, для каждого числа n существуют точка z_n , $|z_n| < 1$, $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ и многочлен $P_{m_n}(z)$ такие, что $|P_{m_n}(z_n)| \geq n$. Таким образом, если обозначить

$$m(z) = \sup_n |P_n(z)|,$$

то для каждой иррегулярной точки z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} m(z) = \infty.$$

С. Н. Мергеляном была поставлена задача о нахождении скорости стремления к бесконечности функции $m(z)$ при $d(z) \rightarrow 0$, где $d(z)$ — расстояние точки z ($|z| < 1$) до множества иррегулярных точек последовательности $\{P_n(z)\}$.

Рассмотрим следующую задачу, которая тесно связана с поставленной выше задачей. Пусть $M(t)$ — положительная монотонная функция действительного переменного t , определенная при $0 < t \leq 1$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = \infty.$$

Обозначим через H класс голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию

$$|f(z)| \leq M[d(z)], \quad |z| < 1,$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до множества E , принадлежащего единичному кругу и имеющего свойства 1) и 2) теоремы М. А. Лаврентьева. Поставим следующую задачу: каким условиям должна удовлетворять функция $M(t)$, чтобы класс H был равномерно ограниченным внутри единичного круга, т. е. класс H был нормальным семейством в единичном круге.

В настоящей заметке проводятся некоторые результаты относительно двух сформулированных выше задач.

1. Обозначим через $r = r(\varphi)$ функцию, определенную на бесконечном интервале $1 < \varphi_0 \leq \varphi < \infty$ и имеющую следующие свойства 1) $0 < r(\varphi) < 1$, 2) $r(\varphi_1) \neq r(\varphi_2)$, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, 3) $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} r(\varphi) = 1$, 4) $r'(\varphi)$ существует и является абсолютно непрерывной функцией, 5) функция $\rho(\varphi) = r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi)$ монотонна. Обозначим через $\varphi(t)$ обратную функцию к функции $\frac{1}{2}\rho(\varphi)$. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы класс голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию

$$|f(z)| \leq M[d(z)], \quad |z| < 1$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до кривой L , уравнением которой в полярных координатах является $r = r(\varphi)$, был равномерно ограниченным

ограниченным внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\varphi(t)} \log \log M(t) = 0.$$

Теорема 2. Для того, чтобы существовала сходящаяся в каждой точке единичного круга последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с кривой L и для которой $m(z) \leq M[d(z)]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\varphi(t)} \log \log M(t) \neq 0.$$

Теорема 3. Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу $|z| < 1$ множество E , которое удовлетворяет условиям теоремы М. А. Лаврентьева, существует сходящаяся в каждой точке единичного круга последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с E и для которой

$$m(z) \leq \exp \left\{ \exp \frac{C}{[d(z)]^2} \right\}, \quad (*)$$

где C — некоторое абсолютное постоянное.

Условие (*) для функции $M(t)$ существенно улучшить нельзя. Существуют принадлежащие единичному кругу множества E , которые удовлетворяют условиям теоремы М. А. Лаврентьева, такие, что класс H является равномерно ограниченным внутри единичного круга, если

$$M(t) = \exp \left[\exp \frac{C}{t^{2-\varepsilon}} \right],$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное, а C — положительное постоянное (см. [3]).

Теорема 3 дает достаточное условие на функцию $M(t)$. Это достаточное условие, однако, вообще не является необходимым. В самом деле, доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Существует сходящаяся в каждой точке единичного круга $|z| < 1$ последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с диаметром $y = 0$ круга $|z| < 1$ и для которой

$$m(z) \leq \exp \left[\exp \frac{C}{d(t)} \right],$$

где C — некоторое абсолютное постоянное.

2. Введем следующее определение.

Определение. Точка z называется *точкой равномерной ограниченности* для последовательности аналитических функций $f_n(z)$, если существует такая ее окрестность, где последовательность $\{f_n(z)\}$ ограничена равномерно. В противном случае точка z называется *точкой неравномерной ограниченности*.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу множество E , которое удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы М. А. Лаврентьева, существует последовательность многочленов $P_n(z)$, множество неравномерно ограниченных точек которой совпадает с E , для которой справедливо неравенство (*).

Теорема 6. Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу множество E , которое удовлетворяет условиям теоремы М. А. Лаврентьева, существует последовательность многочленов $P_n(z)$, множество неравномерно ограниченных точек которой совпадает с E , для которой функция $m(z)$ имеет конечное значение в каждой точке единичного круга и удовлетворяет неравенству (*).

В теоремах 5 и 6 условие (*) существенно улучшить нельзя. Теорема 6 является следствием теоремы 3.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю профессору С. Н. Мергеляну за постановку задач и оказанную помощь при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ժ. Ն. ՔԵՇԻՇՅԱՆ

Բազմանդամների գույքամեծ հաջորդականությունների հետ կապված մի բանի հարցերի մասին

Դիտարկվում են միավոր շրջանի յուրաքանչյուր կետում գույքամեծ $P_n(z)$ բազմանդամների հաջորդականություններ, Այդպիսի հաջորդականությունների համար Մոնտելի կոդից մտցված է ռեդուցյար ու իռեդուցյար կետերի հասկացողությունները: Ներկա հոդվածում ստացված են իռեդուցյար կետերի շրջակայքում

$$m(z) = \sup_n |P_n(z)|$$

Ֆունկցիայի՝ q ելի անվերջ ձգտելու արագությունները վերաբերյալ մի շարք ճշգրիտ գնահատականներ:

Այնուհետև միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների հաջորդականությունների համար մտցվում է հավասարաչափ ու ոչ հավասարաչափ սահմանափակության կետերի հասկացողությունները և բերվում են ճշգրիտ գնահատականներ ոչ հավասարաչափ կետերի շրջակայքում $m(z)$ ֆունկցիայի՝ q ելի անվերջ ձգտելու արագությունների վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. А. Лаврентьев, Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynômes, Actual. Sci. et Industr., № 441 (1936), 1—62, Paris.
² С. Н. Мергелян, ДАН СССР, т. 138, № 2 (1961), 285—288. ³ Ж. Е. Кешишян, Известия АН АрмССР, т. XV, № 2 (1962).

МАТЕМАТИКА

С. О. Синанян

Некоторые оценки для класса ограниченных на дуге окружности многочленов и их производных

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 7/IV 1964)

Отправным пунктом для наших оценок служат экстремальные многочлены n -го порядка

$$M_n(e^{i\theta}) = e^{\frac{i n \theta}{2}} \cdot \cos \left(n \arccos \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Рассмотрим класс A_n'' ($0 < \alpha < \pi$) алгебраических многочленов $P_n(z)$ степени не выше n ($n = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющих условию

$$|P_n(e^{i\theta})| \leq 1 \quad (|z| = 1, |\arg z| \leq \alpha).$$

В работе (1) доказана справедливость неравенств

$$|P_n(e^{i\theta})| \leq |M_n(e^{i\theta})| \quad \text{при } \alpha \leq |\theta| < \pi; \quad (*)$$

$$\max_{|z|=1} |P_n'(z)| \leq \frac{n}{2} \cdot \left(\operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{4} + \operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{4} \right). \quad (**)$$

Здесь мы докажем неравенства такого же типа для дуги окружности и на всей комплексной плоскости.

Лемма 1. Пусть

$$z_k^{(n)} = e^{i \mu_k^{(n)}}, \quad \mu_k^{(n)} = 2 \arcsin \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

суть корни многочлена $M_n(z)$. Тогда для всякого полинома $P_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$ справедливо тождество

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{P_{n-1}(z_k^{(n)})}{a_k^{(n)}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}, \quad (1)$$

где

$$a_k^{(n)} = \frac{i}{2} e^{i \frac{n-2}{2} \mu_k^{(n)}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{2k-1}{2n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Выражение

$$\frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}$$

есть многочлен степени $n - 1$. Пусть j есть одно из чисел $1, 2, \dots, n$. Если $k \neq j$, то

$$\frac{M_n(z_j^{(n)})}{z_j^{(n)} - z_k^{(n)}} = 0.$$

Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow z_j^{(n)}} \frac{M_n(z)}{z - z_j^{(n)}} = M_n'(z_j^{(n)}).$$

Поэтому имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_j^{(n)}} \frac{M_n(z)}{z - z_j^{(n)}} = (-1)^j \cdot n \cdot a_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом правая часть доказываемого тождества при $z = z_j^{(n)}$ становится равной $P_{n-1}(z_j^{(n)})$, т. е. совпадает с его левой частью. Но так как и правая и левая части этого тождества суть полиномы степени не высшей, чем $n - 1$, то из совпадения их в n точках $z_j^{(n)}$ и вытекает их тождественность.

Лемма 2. Для многочленов порядка не выше n справедливо тождество

$$P_n(z) = C_n \cdot M_n(z) + \frac{z}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{P_n(z_k^{(n)})}{z_k^{(n)} \cdot a_k^{(n)}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}, \quad (2)$$

где

$$C_n = P_n(0) / M_n(0).$$

Доказательство. Как легко видеть, разность

$$P_n(z) - \frac{z}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{P_n(z_k^{(n)}) \cdot z_k^{(n)}}{z_k^{(n)} \cdot a_k^{(n)}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}$$

обращается в нуль в n разных точках $z_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и поэтому является многочленом порядка n , если $P_n(0) \neq 0$. Но нули этой разности совпадают с нулями многочлена $M_n(z)$, и поэтому можно утверждать, что она только постоянным множителем отличается от этого многочлена. Положив $z = 0$, получим

$$C_n = P_n(0) / M_n(0).$$

В случае $P_n(0) = 0$ указанная разность обращается в нуль в $n + 1$ точках: $z_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $z = 0$, и поэтому, будучи многочленом порядка не выше n , тождественно равна нулю. В этом случае $C_n = 0$.

Теорема 1. Для многочленов $P_n(z)$ класса A_n^n справедливо неравенство

$$|P_n(z)| \leq 2 \cdot \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{n} |z| \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z - z_k^{(n)}|} \right\} \cdot |M_n(z)| \quad (3)$$

во всей комплексной плоскости.

Доказательство. Согласно неравенству (1) имеем

$$|P_n(0)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{|M_{n+1}(0)|}{|a_k^{(n+1)}|}.$$

Так как ⁽¹⁾

$$M_{n+1}(0) = \frac{(-i)^{n+1}}{2 \sin^{n+1} \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{1}{|a_k^{(n+1)}|} < 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

то имеем, что

$$|P_n(0)| < \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^n \frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$

Из последней оценки получаем, что для любого многочлена класса A_n^n постоянная в тождестве (2) имеет оценку

$$|C_n| < \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Последние оценки дают возможность легко получить утверждение теоремы.

Теорема 2. Для многочленов класса A_n^n справедливо неравенство

$$|P_n^1(e^{i\theta})| \leq \frac{n \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad |\theta| \leq \alpha. \quad (6)$$

Доказательство следует из оценки производной тригонометрического многочлена работы ⁽²⁾.

Неравенство (6) точное в смысле порядка. Это видно из оценки

$$|M_n'(e^{i\theta})| \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}},$$

где при $\theta = \mu_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеет место равенство. Неравенство (6) является обобщением классического неравенства С. Н. Бернштейна, ибо предельный переход в его правой части при $\alpha \rightarrow \pi$ дает неравен-

ство С. Н. Бернштейна для производной многочлена на единичном круге.

Теорема 3. Для многочленов класса A_n^n справедлива оценка

$$|P_n'(z)| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{|z - z_k^{(n)}|} \right) \cdot |M_n(z)|. \quad (7)$$

во всей комплексной плоскости.

Согласно неравенству (6) имеем, что

$$|P_n'(z_k^{(n)})| \leq \frac{n \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{2k-1}{2n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Используя эти оценки и переходя к модулям в тождестве (1), получим оценку (7).

Лемма 3. Функция

$$S_n(e^{i\theta}) = e^{\frac{i n \theta}{2}} \cdot \sin \left[(n+1) \arccos \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right] \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

есть алгебраический многочлен степени n относительно $e^{i\theta}$.

Доказательство. Производная полиномов Чебышева $T_{n+1}(x)$ порядка $n+1$ равна

$$\frac{(n+1) \cdot \sin \{(n+1) \arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}},$$

причем $T_{n+1}'(x)$ содержит только четные степени x , если n — четное число, и только нечетные степени x , если n — нечетное число. В силу этого замечания, применив формулу Эйлера, легко теперь показать, что $S_n(e^{i\theta})$ является многочленом порядка n относительно $e^{i\theta}$.

Лемма 4. Для многочленов порядка не выше n справедливо тождество

$$P_n(z) = C_n' \cdot M_n(z) + \frac{z+1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{P_n(z_k^{(n)})}{\sqrt{z_k^{(n)} \cdot a_k^{(n)} \cdot \cos \frac{\mu_k^{(n)}}{2}}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}},$$

где

$$|C_n'| \leq 1.$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству тождества (2). Оценка $|C_n'| \leq 1$ следует из неравенства (*).

Лемма 5. Имеет место тождество

$$\frac{\sin \left(\arccos \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin \frac{\theta - \mu_k^{(n)}}{2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi}}.$$

Это тождество легко получается применением к $S_{n-1}(z)$ тождества (1).

Теорема 4. Для многочленов класса A_n^n справедлива оценка

$$|P'_n(e^{i\theta})| \leq n \sqrt{n^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1} \quad \text{при } |\theta| \leq \alpha. \quad (8)$$

Это есть аналог неравенства А. А. Маркова для многочленов на отрезке.

Доказательство. Рассмотрим сначала такие значения θ , которые удовлетворяют неравенству $|\theta| \leq \mu_1^{(n-1)}$. Для рассматриваемых значений θ имеем

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \leq 1: \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\mu_1^{(n-1)}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n-2}} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{(n-1)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

Поэтому в силу (6) получаем, что оценка (8) верна при $|\theta| \leq \mu_1^{(n-1)}$.

Теперь допустим, что выполнено неравенство

$$\mu_1^{(n-1)} \leq |\theta| \leq \alpha.$$

Применяя к $P'_n(z)$ тождество леммы (4), переходя к модулям и используя оценку (6), получим

$$|P'_n(z)| \leq |M_{n-1}(z)| + \frac{|z+1|}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n}{\cos \frac{\mu_k^{(n-1)}}{2}} \cdot \frac{|M_{n-1}(z)|}{|z - z_k^{(n-1)}|}.$$

Положив теперь $z = e^{i\theta}$, будем иметь

$$|P'_n(e^{i\theta})| \leq |M_{n-1}(e^{i\theta})| + \cos \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n |M_{n-1}(e^{i\theta})|}{(n-1) \cos \frac{\mu_k^{(n-1)}}{2} \cdot \left| \sin \frac{\theta - \mu_k^{(n-1)}}{2} \right|}.$$

Но для рассматриваемых значений θ все $\sin \frac{\theta - \mu_k^{(n-1)}}{2}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеют один и тот же самый знак. Поэтому последнюю оценку можно записать в следующей форме

$$|P'_n(e^{i\theta})| \leq |M_{n-1}(e^{i\theta})| + \frac{n}{n-1} \cos \frac{\theta}{2} \times \\ \times |M_{n-1}(e^{i\theta})| \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos \frac{\mu_k^{(n-1)}}{2} \cdot \sin \frac{\theta - \mu_k^{(n-1)}}{2}} \right|.$$

Далее, в силу леммы (5) получаем оценку

$$|P'_n(e^{i\theta})| \leq |M_{n-1}(e^{i\theta})| + \\ + \frac{n \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left[(n-1) \arccos \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right]}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \psi(\theta).$$

Положив $\theta = 2 \arcsin \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos x \right)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n-2}$, получим

$$\psi(\theta) = \cos(n-1)x + \frac{n \sin(n-1)x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 x}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin x}.$$

Обозначим

$$\psi(x) = \cos(n-1)x + \frac{n \sin(n-1)x \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 x}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin x}.$$

Имеем

$$\max_{\mu_1^{(n-1)} \leq |\theta| < \alpha} \psi(\theta) = \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n-2}} \psi(x).$$

Можно доказать, что

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n-2}} \psi(x) \leq n \sqrt{n^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

Неравенство (8) доказано.

Неравенство (8) точное в смысле порядка, ибо, например,

$$\max_{|\theta| < \alpha} |M'_n(e^{i\theta})| = \frac{n}{2} \sqrt{n^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

Я думаю, что неравенства (6) и (8) точные и экстремальными многочленами являются многочлены Чебышева (при соответствующей нормировке) для рассматриваемой дуги окружности.

Заметим, что неравенство (8) также является обобщением классического неравенства С. Н. Бернштейна и что последнее получается из (8) путем предельного перехода в его правой части при $x \rightarrow \pi$.

Неравенства типа (6) и (8) были получены И. П. Приваловым⁽⁴⁾ и Джексоном⁽⁵⁾ для тригонометрических полиномов. В дальнейшем их оценки уточнил В. С. Виденский⁽³⁾.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ն. ՍԻՆԱՆՅԱՆ

Զրջանային աղեղի վրա սահմանափակ բազմանդամների և նրանց ածանցյալների մի էանի գնահատականների մասին

Դիտարկվում է միավոր շրջանագծի աղեղի վրա սահմանափակ n -ից ոչ բարձր կարգ ունեցող բազմանդամների դասը: Այդ դասի բազմանդամների և նրանց ածանցյալների համար ստացվում են կարգի տեսակետից ճշգրիտ գնահատականներ, ինչպես դիտարկվող աղեղի վրա, այնպես էլ ամբողջ հարթություն մեջ: Աղեղի վրա նշված դասի բազմանդամների ածանցյալների գնահատականից մասնավորապես ստացվում է միավոր շրջանում բազմանդամի ածանցյալի համար Ս. Ն. Բեռնշտեյնի կլասիկ անհավասարությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. О. Синяня, Успехи мат. наук, XVIII, 2 (110) (1963). ² В. С. Виденский, ДАН СССР, 130, № 1 (1960). ³ И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949. ⁴ И. П. Привалов, Интеграл Коши, Саратов, 1919. ⁵ Д. Джексон, Bull. Am. Math. Soc., 37, 883 (1931).

МЕХАНИКА.

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и Г. Е. Багдасарян

Флаттер пластинки, находящейся в поле действия температуры

(Представлено 2 IV 1964)

1. Рассматривается изотропная пластинка постоянной толщины h , отнесенная к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xOy . Принимается, что от температуры $T = T(z, t)$ зависит лишь модуль упругости материала пластинки E .

Пусть пластинка обтекается сверхзвуковым потоком сжимаемого газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси Ox .

В основу последующих рассуждений ставятся следующие известные гипотезы:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях ⁽¹⁾;
- б) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры в бесконечно малом элементе пластинки ⁽²⁾;
- в) „закон плоских сечений“ при определении аэродинамического давления ⁽³⁾.

На основе принятых предположений исходное дифференциальное уравнение движения пластинки запишется следующим образом ⁽⁴⁾

$$D(t) \Delta \Delta w + \delta_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z, \quad (1.1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$D(t) = E(t) h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, ν — коэффициент Пуассона, w — прогиб пластинки, δ_0 — плотность материала пластинки, Z — нормально приложенная внешняя нагрузка ⁽⁵⁾

$$Z = -2\delta_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla p. \quad (1.2)$$

Здесь ε — коэффициент линейного затухания. ∇p — избыточное давление газа, которое, согласно „поршневой теории“, имеет вид

$$\nabla p = - \frac{\gamma p_\infty}{a_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.3)$$

где p_0 — давление невозмущенного потока газа, a_0 — скорость звука для невозмущенного потока, κ — показатель политропы.

2. Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$w = f(t) e^{-i \frac{\pi}{\lambda_x} x} \sin \frac{\pi y}{\lambda_y}. \quad (2.1)$$

Здесь $f(t)$ — некоторая комплексная функция действительного аргумента, λ_x и λ_y — соответственно длины полуволны в направлениях x и y .

Подставляя (2.1) в (1.1), с учетом (1.2) и (1.3), для определения $f(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left(2\varepsilon + \mu \right) \frac{df}{dt} + \frac{D(t)}{\delta_0 h} \left[\left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2 \right] f(t) - i \frac{\mu \pi}{\lambda_x} U f(t) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\mu = \frac{\kappa p_0}{\delta_0 h a_0}.$$

Подстановкой

$$f(t) = \varphi(t) e^{-(\varepsilon + \mu/2)t} \quad (2.3)$$

из (2.2) получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \delta^2 \varphi(t) = 0, \quad (2.4)$$

$$\varphi(t) = \frac{E(t) h^3 g}{E_0} \left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2 - \frac{12 \gamma_0 h (1 - \nu^2)}{E_0} \left[(\varepsilon + \mu/2)^2 + i \frac{\mu \pi}{\lambda_x} U \right],$$

$$\delta^2 = \frac{E_0}{12 \gamma_0 h (1 - \nu^2)}, \quad (2.5)$$

где E_0 — начальный модуль упругости, γ_0 — удельный вес материала, g — ускорение силы тяжести.

Уравнение (2.4) будем решать методом асимптотического интегрирования. Множитель последнего члена уравнения (2.4), т. е. δ , является большим параметром, в силу этого решение уравнения (2.4) будем искать в виде (6, 7)

$$\varphi = \varphi_0(\delta, t) e^{\omega(t)}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_0(\delta, t)$ — функция интенсивности, $\omega(t)$ — функция изменяемости. Функцию интенсивности представим в виде асимптотического ряда

$$\varphi_0(\delta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} V_n(t). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.4) и требуя, чтобы коэффициенты при всех степенях δ обращались в нули, получим бесконечную систему рекуррентных дифференциальных уравнений для определения $\omega(t)$, $V_0(t)$, $V_1(t)$, ..., $V_n(t)$, ...

$$\begin{aligned}
V_0(t) \left[\frac{d\omega}{dt} \right]^2 + V_0(t) \dot{\psi}(t) &= 0, \\
2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_0(t) &= 0, \\
2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_n}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_n(t) &= - \frac{d^2 V_{n-1}}{dt^2} \\
(n=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ограничиваясь первым приближением, получим

$$\left[\frac{d\omega}{dt} \right]^2 = - \dot{\psi}(t), \tag{2.9}$$

$$2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_0(t) = 0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) для функции изменяемости находим

$$\omega_{1,2}(t) = \pm \int_0^t \sqrt{V \dot{\psi}(t)} dt + c_0. \tag{2.11}$$

где c_0 — постоянная интегрирования.

Подставляя (2.11) в (2.10), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $V_0(t)$, общее решение которого имеет вид

$$V_0(t) = c \dot{\psi}^{-1/4}(t), \tag{2.12}$$

где c также постоянная интегрирования.

Подставляя значения ω и V_0 соответственно из (2.11) и (2.12) в (2.6), с учетом (2.3), в первом приближении для $f(t)$ получим*

$$f(t) = \dot{\psi}^{-1/4} \left[c_1 e^{i\beta(t) - (1+\mu/2)t} + c_2 e^{-i\beta(t) - (1+\mu/2)t} \right], \tag{2.13}$$

где

$$\beta(t) = i \int_0^t \sqrt{V \dot{\psi}(t)} dt = \beta_1(t) + i\beta_2(t) \tag{2.14}$$

$c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Характер функции $f(t)$ зависит как от скорости набегающего потока U , так и от изменения модуля упругости $E(t)$. Если модуль амплитуды $f(t)$ в течение времени возрастает, то будем считать, что пластинка находится в неустойчивом состоянии. В противном случае состояние пластинки является устойчивым. Скорость потока $U_{кр}$, при котором $\frac{d}{dt} |f(t)| = 0$, будем называть критической.

* Отметим, что, пользуясь уравнениями (2.8), можно найти любое приближение асимптотического интегрирования.

3. Для выяснения характера функции $f(t)$ от времени необходимы: аналитическая зависимость модуля упругости материала пластинки от температуры, а также закон изменения температуры во времени t .

Как показывают экспериментальные исследования (8, 9), модули упругости различных материалов, в зависимости от температуры, с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать зависимостями

$$E = E_0 - E_0^* T, \quad (3.1)$$

$$E = E_0 - E_1^* T^2 \quad (3.2)$$

$$E = E_0 e^{-\lambda^* T}, \quad (3.3)$$

где E_0^* , E_1^* , λ^* — некоторые коэффициенты, определяемые из эксперимента.

Пусть средняя температура пластинки изменяется по закону (8)

$$T = At, \quad A = T_{max} t_1^{-1} \quad (0 \leq t \leq t_1), \quad (3.4)$$

где A — постоянный коэффициент пропорциональности, T_{max} — максимально достигаемая температура пластинки, t_1 — время, необходимое для достижения температуры T_{max} .

В силу (3.4) из (3.1), (3.2) и (3.3) соответственно получим

$$E = E_0 - E_1 t, \quad (3.5)$$

$$E = E_0 - E_2 t^2, \quad (3.6)$$

$$E = E_0 e^{-\lambda_1 t}, \quad (3.7)$$

где

$$E_1 = AE_0^*, \quad E_2 = A^2 E_1^*, \quad \lambda_1 = \lambda^* A. \quad (3.8)$$

4. Рассмотрим случай, когда $E(t)$ определяется формулой (3.5). Тогда из (2.13) и (2.14) с учетом (2.5) для $f(t)$ и $\beta(t)$ имеем*

$$f(t) = r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \left[\left(\cos \frac{\alpha + 2\pi j}{4} - i \sin \frac{\alpha + 2\pi j}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(c_1 e^{i\beta_1(t)} + c_2 e^{-i\beta_1(t)} e^{2\beta_2(t)} \right) \right], \quad (4.1)$$

$$\beta(t) = -\frac{2\delta}{3\alpha} \left[r^{3/2} \left(\cos \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - i \sin \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} \right) - \right. \\ \left. - r_0^{3/2} \left(\cos \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} - i \sin \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right) \right], \quad (4.2)$$

$$(j = 0, 1, 2, 3; k = 0, 1)$$

где

$$r^2(t) = \frac{1}{E_0^2} \left[B^2(t) + F^2 U^2 \right],$$

* Укажем, что в этом частном случае уравнение (2.2) может быть решено точно (*).

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{FU}{B(t)},$$

$$a = \frac{E_1}{E_0} h^3 g \left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2, \quad (4.3)$$

$$B(t) = \frac{E_0 - E_1 t}{E_1} E_0 a - 12\gamma_0 h (1 - \nu^2) (\varepsilon + \mu/2)^2,$$

$$F = 12\gamma_0 h (1 - \nu^2) \frac{\pi \mu}{\lambda_x}.$$

$$r_0 = r(0), \quad \alpha_0 = \alpha(0).$$

Следовательно, для $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ имеем

$$\beta_1(t) = -\frac{2\delta}{3a} \left(r^{3/2} \cos \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - r_0^{3/2} \cos \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right), \quad (4.4)$$

$$\beta_2(t) = \frac{2\delta}{3a} \left(r^{3/2} \sin \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - r_0^{3/2} \sin \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right).$$

Как было указано выше, критическая скорость флаттера определяется из условия*

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right| = 0, \quad (4.5)$$

которое после раскрытия имеет вид

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \left\{ r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \left[\left(e^{2\beta_1(t)} (a_2 \cos \beta_1(t) + b_2 \sin \beta_1(t)) + \right. \right. \right. \right. \\ & + a_1 \cos \beta_1(t) - b_1 \sin \beta_1(t) \Big)^2 + \left(e^{2\beta_2(t)} (b_2 \cos \beta_1(t) - a_2 \sin \beta_1(t)) + \right. \\ & \left. \left. + b_1 \cos \beta_1(t) + a_1 \sin \beta_1(t) \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ввиду громоздкости уравнения (4.6) аналитическое определение $U_{кр.}$ затруднительно.

Однако задача определения $U_{кр.}$ существенно упрощается, если приближенно потребовать, чтобы модули обеих слагаемых функции $f(t)$

$$\begin{aligned} & |c_1| r^{-1/4} e^{\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t}, \\ & |c_2| r^{-1/4} e^{-\beta_1(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

были убывающие. Рассматривая (4.7), легко заметить, что модуль первого слагаемого, независимо от скорости потока, в течение вре-

* Легко проверить, что случаи $k=0$ и $k=1$ дают одинаковые результаты для критической скорости флаттера. Поэтому в дальнейшем принимаем $k=0$.

мени убывает. Тогда критическую скорость флаттера определяем из условия

$$\frac{d}{dt} \left[r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \right] \leq 0. \quad (4.8)$$

Имея в виду, что

$$B(t) > 0, \quad \frac{d\beta_2(t)}{dt} = - \frac{\delta}{\sqrt{2E_0}} \sqrt{\sqrt{B^2 + F^2 U^2} - B} < 0, \quad (4.9)$$

из (4.3) и (4.4) находим, что $0 \leq \alpha < \pi/2$ и $\beta_2(t) \leq 0$ ($0 \leq t \leq t_1$).

В силу (4.9) из (4.8) получим

$$\frac{1}{4} \frac{B(t) E_0 a}{B^2 + F^2 U^2} \leq - \frac{1}{\sqrt{24\gamma_0 h (1 - \nu^2)}} \sqrt{\sqrt{B^2 + F^2 U^2} - B} + (\varepsilon + \mu/2). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) дает возможность определить критическую скорость флаттера в любой момент времени t ($0 \leq t \leq t_1$).

В большинстве случаев $B^2 \gg F^2 U^2$. Тогда из (4.10) можно получить

$$\frac{U_{kp}}{U_{kp}^*} = 1 - \frac{1}{4(\varepsilon + \mu/2) E_0 - E_1 t} \frac{E_1}{t}, \quad (4.11)$$

где

$$U_{kp}^* = \sqrt{\frac{D(t)}{\delta_0 h} \left(\frac{\pi}{\lambda_x} + \frac{\pi \lambda_x}{\lambda_y^2} \right) \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu} \right)}$$

— критическая скорость, найденная по квазистатической теории с точки зрения температуры, т. е. когда в окончательной формуле критической скорости для несогреваемой пластинки вместо E полагать $(E_0 - E_1 t)$.

Формула (4.11) показывает, что динамическая критическая скорость флаттера меньше критической скорости, найденной по квазистатической теории, и в случае достаточно малого затухания может существенно отличаться от нее.

В случае несогреваемой пластинки $E_1 = 0$. Тогда из (4.10) получим

$$U_{kp} = V(\lambda_x, \lambda_y) \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu} \right), \quad (4.12)$$

где

$$V(\lambda_x, \lambda_y) = \sqrt{\frac{D_0}{\delta_0 h} \left(\frac{\pi}{\lambda_x} + \frac{\pi \lambda_x}{\lambda_y^2} \right)}$$

— фазовая скорость распространения упругих волн в пластинке, $D_0 = D(0)$.

Формула (4.12) совпадает с точной формулой, полученной в работе (5).

Аналогичным образом можно решить задачу в тех случаях, когда $E(t)$ определяется формулами (3.6) или (3.7).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ջերմային դաժնի ազդեցության առկա գոնվող սալի փառները

Դիտարկվում է առկա սալի կայունության խնդիրը ձայնից մեծ արագությամբ
առկող սեղմելի գազով շրջնակալի, երբ սալը գտնվում է ժամանակի ընթացքում փոփոխ-
վող ջերմային զաշտի ազդեցության տակ:

Ընդունվում է, որ սալի նյութի առաձգական հատկությունները կախված են ջեր-
մային զաշտից:

Հոսանքի կրիտիկական արագության համար ստացված է հաշվային բանաձև:

Ցույց է տրված, որ ստացված կրիտիկական արագությունը փոքր է ջերմաստիճանի
խմանով բավարարատիկական կրիտիկական արագությունից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՐԶՈՒՆ

- ¹ С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948
- ² В. Новацкий, Вопросы термоупругости, Известия АН СССР, 1962.
- ³ А. А. Ильюшин, ПММ, 20, № 6, 1956.
- ⁴ С. А. Амбарцумян, Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1963
- ⁵ В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961.
- ⁶ С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, 1961.
- ⁷ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, 1953.
- ⁸ Б. Е. Гейтвуд, Температурные напряжения, ИЛ, 1959.
- ⁹ И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах, Гостехиздат, 1962.

А. А. Баблоян

Решение некоторых „парных“ рядов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 29/II 1964)

При решении некоторых задач теории упругости, гидромеханики или математической физики, когда граничные условия задачи на некоторой части граничной поверхности задаются одним образом, а на остальной части этой поверхности—другим, решение такой задачи сводится к определению некоторых коэффициентов из „парных“ рядов, содержащих ортогональные системы функций.

Эти „парные“ ряды могут быть записаны в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(\varphi) = f(\varphi) \quad (a < \varphi < c),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n A_n X_n(\varphi) = g(\varphi) \quad (c < \varphi < b),$$

где A_n — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, p_n — заданные зависящие от n числа ($p_n \neq 1$), $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ — граничные функции, а функции $X_n(\varphi)$ образуют полную и ортогональную систему в области $[a; b]$.

В частных случаях такие „парные“ ряды—уравнения рассматривались в работах Кука ⁽¹⁾ (при $X_n(\varphi) = J_\nu(p_n \varphi)$, где p_n — корни уравнения $J_\nu(p_n) = 0$, $0 < \varphi < 1$), Трантера ^(1, 2, 3) (при $X_n(\varphi) = \sin p_n \varphi$; $\cos p_n \varphi$, где p_n принимает значения n и $n + 1/2$), Н. М. Минкова ^(4, 5) (при $X_n(\varphi) = P_n(\cos \varphi)$, $P_n = 2n + 1 + 0 (n^{-2})$), Снеддона ⁽⁶⁾, Шеферда ⁽⁷⁾ и других.

В большинстве из этих работ решение „парных“ рядов дается для случаев, когда одна из функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ тождественно равна нулю. В тех же работах ^(3, 7), где обе функции $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ присутствуют, решения „парных“ рядов—уравнений получаются в виде рядов, содержащих сложные интегралы. Эти ряды в отдельных случаях могут оказаться не сходящимися. Кроме того, такие решения в виде сложных рядов практически неудобны для применения при решении конкретных задач.

В настоящей работе рассматриваются некоторые „парные“ ряды, содержащие тригонометрические функции и полиномы Лежандра.

Решения рассмотренных в работе „парных“ уравнений при помощи формул Мелера и Дирихле-Лапласа интегральных представлений полиномов Лежандра ⁽⁸⁾,

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + 1/2)\varphi d\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi}^{1/2}, \quad P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n + 1/2)\varphi d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} \quad (1)$$

и решений интегральных уравнений Абеля ⁽⁹⁾

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\mu}, \quad u(z) = \frac{\sin\mu\pi}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{f(x) dx}{(z - x)^{1-\mu}}, \quad (2)$$

$$f(x) = \int_x^b \frac{u(\xi) d\xi}{(\xi - x)^\mu}, \quad u(z) = -\frac{\sin\mu\pi}{\pi} \frac{d}{dz} \int_z^b \frac{f(x) dx}{(x - z)^{1-\mu}} \quad (3)$$

получены в замкнутом виде. Получены также формулы для определения значений первого ряда во второй области и второго ряда в первой области. При этом использованы суммы рядов ⁽⁸⁾

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\varphi) \cos(k + 1/2)\beta = \begin{cases} |2(\cos\beta - \cos\varphi)|^{-1/2} & (0 \leq \beta < \varphi \leq \pi) \\ 0 & (\leq \varphi < \beta \leq \pi) \end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\varphi) \sin(k + 1/2)\beta = \begin{cases} 0 & (0 \leq \beta < \varphi \leq \pi) \\ |2(\cos\varphi - \cos\beta)|^{-1/2} & (0 \leq \varphi < \beta \leq \pi) \end{cases} \quad (5)$$

В работе использованы также равенства

$$\sqrt{2} \sin(n + 1/2)\varphi = -\frac{d}{d\varphi} \int_{-1}^{\cos\varphi} \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\cos\varphi - \xi)^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\sqrt{2} \cos(n + 1/2)\varphi = \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos\varphi}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\xi - \cos\varphi)^{1/2}}, \quad (7)$$

$$\sqrt{2} \frac{\sin(n + 1/2)\varphi}{n + 1/2} = \int_{\cos\varphi}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\xi - \cos\varphi)^{1/2}}, \quad (8)$$

$$\sqrt{2} \frac{\cos(n + 1/2)\varphi}{n + 1/2} = \int_{-1}^{\cos\varphi} \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\cos\varphi - \xi)^{1/2}}, \quad (9)$$

которые получаются из формул Мелера и Дирихле-Лапласа ⁽¹⁾, если рассматривать их как интегральные уравнения Абеля и пользоваться решениями (2) и (3).

§ 1. Рассмотрим следующие „парные“ ряды

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) A_n P_n(\xi) &= f(\xi) \quad (-1 < \xi < a) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) &= g(\xi) \quad (a < \xi < 1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра.

Умножим первое уравнение (10) на $(\cos \varphi - \xi)^{-1/2}$ и интегрируем по ξ от -1 до $\cos \varphi$, а второе уравнение (10) умножим на $(\xi - \cos \varphi)^{-1/2}$, интегрируем по ξ от $\cos \varphi$ до 1 и продифференцируем полученное выражение по φ . Используя при этом формулы (7) и (9), систему (10) приводим к виду

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n + 1/2) \varphi &= \int_{-1}^{\cos \varphi} \frac{f(\xi) d\xi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} \left(\begin{array}{l} -1 < \cos \varphi < a \\ \arccos a < \varphi < \pi \end{array} \right) \\ \sqrt{2} A_n \cos(n + 1/2) \varphi &= \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos \varphi}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - \cos \varphi)^{1/2}} \left(\begin{array}{l} a < \cos \varphi < 1 \\ 0 < \varphi < \arccos a \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Умножая оба уравнения системы (11) на $\cos(m + 1/2) \varphi d\varphi$ и интегрируя второе из них от нуля до $\arccos a$, первое от $\arccos a$ до π и складывая полученные выражения, для неизвестных коэффициентов A_n получим следующие значения

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} A_n &= \int_0^{\arccos a} \cos(n + 1/2) \varphi d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos \varphi}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - \cos \varphi)^{1/2}} + \\ &+ \int_{\arccos a}^{\pi} \cos(n + 1/2) \varphi d\varphi \int_{-1}^{\cos \varphi} \frac{f(\xi) d\xi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Вычислим значения ряда

$$S(\xi) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi), \quad (13)$$

при $(a < \xi < 1)$ и $(-1 < \xi < a)$.

Пользуясь формулами (4), (5) и (12), при $(a < \xi < 1)$ будем иметь $S(\xi) = \pi g(\xi)$, а в области $(-1 < \xi < a)$ $S(\xi)$ определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} S(\xi) &= \int_0^{\arccos a} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos \varphi}^1 \frac{g(x) dx}{(x - \cos \varphi)^{1/2}} + \\ &+ \int_{\arccos a}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} \int_{-1}^{\cos \varphi} \frac{f(x) dx}{(\cos \varphi - x)^{1/2}} \end{aligned} \quad (14)$$

§. 2. Рассмотрим теперь систему

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) &= f(\xi) \quad (-1 < \xi < a) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) A_n P_n(\xi) &= g(\xi) \quad (a < \xi < 1) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Аналогичным образом, как это сделано в предыдущем параграфе, для неизвестных коэффициентов A_n системы (15) получим значения

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} A_n &= \int_0^{\arccos a} \sin(n + 1/2)\varphi d\varphi \int_{\cos\varphi}^1 \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - \cos\varphi)^{1/2}} - \\ &- \int_{\arccos a}^{\pi} \sin(n + 1/2)\varphi d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_{-1}^{\cos\varphi} \frac{f(\xi) d\xi}{(\cos\varphi - \xi)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

а значение ряда $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi)$ в области $(a < \xi < 1)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) &= \int_{\arccos \xi}^{\arccos a} \frac{d\varphi}{(\xi - \cos\varphi)^{1/2}} \int_{\cos\varphi}^1 \frac{g(x) dx}{(x - \cos\varphi)^{1/2}} - \\ &- \int_{\arccos a}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\xi - \cos\varphi)^{1/2}} \cdot \frac{d}{d\varphi} \int_{-1}^{\cos\varphi} \frac{f(x) dx}{(\cos\varphi - x)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

§ 3. В предыдущих параграфах рассматривались „парные“ ряды, содержащие полиномы Лежандра. В этом параграфе рассмотрим „парные“ ряды, содержащие тригонометрические функции

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2)^p A_n \sin(n + 1/2)\varphi &= f(\varphi) \quad (0 < \varphi < \beta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n + 1/2)\varphi &= g(\varphi) \quad (\beta < \varphi < \pi) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где $p = \pm 1$.

Первое уравнение системы (18) при $p = -1$ проинтегрируем по φ , а при $p = 1$ это же уравнение интегрируем по φ от 0 до φ . После обозначения

$$F(\varphi) = \begin{cases} f'(\varphi) & \text{при } p = -1 \\ -\int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi + C & \text{при } p = +1 \end{cases} \quad (19)$$

систему (18) можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos (n + 1/2) \varphi &= F(\varphi) & (0 < \varphi < \beta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin (n + 1/2) \varphi &= g(\varphi) & (\beta < \varphi < \pi) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Умножим первое уравнение системы (20) на $\frac{\sqrt{2}}{\pi} (\cos \varphi - \cos \theta)^{-1/2}$ и интегрируем по φ от 0 до θ ; второе уравнение системы (20) умножим на $\frac{\sqrt{2}}{\pi} (\cos \theta - \cos \varphi)^{-1/2}$ и интегрируем по φ от θ до π . Используя при этом формулы интегрального представления полиномов Лежандра (1), систему (20) приводим к виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n (\cos \theta) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{F(\varphi) d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} & (0 < \theta < \beta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n (\cos \theta) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{g(\varphi) d\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} & (\beta < \theta < \pi) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Умножая оба уравнения системы (21) на $P_n (\cos \theta) \sin \theta d\theta$ и интегрируя по θ первое от 0 до β , а второе от β до π и складывая полученные выражения, для неизвестных коэффициентов A_n системы (18) получим следующие значения

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2n+1} \pi A_n &= \int_0^{\beta} P_n (\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{\theta} \frac{F(\varphi) d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} + \\ &+ \int_{\beta}^{\pi} P_n (\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{g(\varphi) d\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} \end{aligned} \quad (22)$$

§ 4. Аналогичным образом решение „парных“ уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos (n + 1/2) \varphi &= f(\varphi) & (0 < \varphi < \beta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2)^p A_n \cos (n + 1/2) \varphi &= g(\varphi) & (\beta < \varphi < \pi), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $p = \pm 1$, получим в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2n+1} \pi A_n &= \int_0^{\beta} P_n (\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{\theta} \frac{f(\varphi) d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} + \\ &+ \int_{\beta}^{\pi} P_n (\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{g(\varphi) d\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{1/2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь введено обозначение

$$G(\varphi) = \begin{cases} -g'(\varphi) & \text{при } p = -1 \\ -\int_{\varphi}^{\bar{\varphi}} g(\varphi) d\varphi + C_1 & \text{при } p = +1. \end{cases} \quad (25)$$

Решения систем (18) и (23) при $p = +1$ даются формулами (22) и (24) и выражаются, соответственно, через постоянные C и C_1 , которые, как легко проверить, можно представить в виде рядов

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad C_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n. \quad (26)$$

Подставляя значения коэффициента A_n , соответственно, из (22) и (24) в формулы (26) и разрешая полученные соотношения относительно C и C_1 , получим их значения.

§ 5. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении сплошного шара, когда на части поверхности шара задано тангенциальное перемещение, а на остальной части поверхности шара известно значение касательного напряжения.

В сферических координатах (t, ξ)

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad t = \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{b}, \quad (27)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, b — радиус шара, рассмотренная задача сводится к интегрированию уравнения Мичеля ⁽¹⁰⁾

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - 4\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad (28)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} v(0, \xi) &= 0 \text{ в области } (-1 \leq \xi < a), \\ \tau_{t\varphi}(0, \xi) &= f_1(\xi) \text{ в области } (a < \xi \leq 1). \end{aligned} \quad (29)$$

Напряжения $\tau_{t\varphi}$, $\tau_{\xi\varphi}$ и перемещение v выражаются через функцию перемещения $\Psi(t, \xi)$ формулами

$$\tau_{\xi\varphi} = -G(1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \tau_{t\varphi} = G \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (30)$$

$$v = b e^t \sqrt{1 - \xi^2} \Psi(t, \xi).$$

Решение уравнения (28) ищем в виде ряда

$$\Psi(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} B e^{(n-1)t} P'_n(\xi), \quad (31)$$

Удовлетворяя граничным условиям (29), для определения неизвестных коэффициентов B_n получим следующие „парные“ ряды

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n'(\xi) &= 0 \quad (-1 < \xi < a) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) B_n P_n'(\xi) &= f'(\xi) \quad (a < \xi < 1) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где введено обозначение

$$f'(\xi) = \frac{f_1(\xi)}{G \sqrt{1-\xi^2}} \quad (33)$$

Предварительно рассмотрим следующую систему

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) &= C_2 \quad (-1 < \xi < a) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) A_n P_n(\xi) &= g(\xi) \quad (a < \xi < 1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

решение которой, согласно (15) и (16), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} A_n &= \int_0^{\arccos a} \sin(n+1/2)\varphi d\varphi \int_{\cos\varphi}^1 \frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-\cos\varphi)^{1/2}} + \\ &+ \frac{C_2}{\sqrt{2}} \int_{\arccos a}^{\pi} \sin(n+1/2)\varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi. \end{aligned} \quad (35)$$

Пользуясь соотношениями (4), (5), (17), (34) и (35), вычисляем суммы следующих рядов

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\xi) = \int_a^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}(\xi-y)} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} - C_2 \left[\pi - \arccos \frac{2a+1-\xi}{1+\xi} \right] \quad \text{в обл. } (a < \xi < 1) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) A_n P_n(\xi) &= - \int_a^1 \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} + \\ &+ \frac{1}{2} C_2 \arccos \frac{1+\xi-2a}{1-\xi} + \end{aligned}$$

$$+ (a-\xi)^{-1/2} \left[C_2 (1-a)^{1/2} - \int_a^1 \frac{g(x)dx}{(x-a)^{1/2}} \right], \quad \text{в обл. } (-1 < \xi < a) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) A_n P_n(\xi) &= - \int_a^1 \frac{dy}{\sqrt{y-\xi}} \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} - \frac{1}{2} C_2 \left[3\pi - \right. \\ &\left. - \arccos \frac{1+\xi-2a}{1-\xi} \right] + (a-\xi)^{-1/2} \left[C_2 (1-a)^{1/2} - \right. \end{aligned}$$

$$-\int_a^1 \frac{g(x)dx}{(x-a)^{1/2}} \Big|; \text{ в обл. } (-1 < \xi < a). \quad (38)$$

Постоянную величину C_2 определяем из того условия, что сумма (38) (сумма касательных напряжений, действующих под штампом) в точке $\xi = a$ не обращалась в бесконечность, т. е.

$$C_2 = (1-a)^{-1/2} \int_a^1 \frac{g(x)dx}{(x-a)^{1/2}}. \quad (39)$$

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) &= C_2 \quad (-1 < \xi < a) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) A_n P_n(\xi) &= g(\xi) - \frac{3}{2\pi} \int_a^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}(\xi-y)} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} + \\ &+ \frac{3C_2}{2\pi} \left[\pi - \arccos \frac{2a+1-\xi}{1+\xi} \right] (a < \xi < 1), \end{aligned} \quad (40)$$

решение которой, согласно (34) и (36), будет выражаться формулой (35).

Если функцию $g(\xi)$ выбрать так, чтобы правая часть второго уравнения системы (40) с точностью до постоянного слагаемого совпала с функцией $f(\xi)$, входящей в систему (32), тогда функция $g(\xi)$ должна удовлетворять интегральному уравнению,

$$\begin{aligned} g(\xi) - \frac{3}{2\pi} \int_a^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\xi-y)}} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} + \frac{3C_2}{2\pi} \left[\pi - \arccos \frac{2a+1-\xi}{1+\xi} \right] = \\ = f(\xi) + C_0, \end{aligned} \quad (41)$$

здесь C_0 должна быть определена из уравнения равновесия внешних усилий, действующих на шар ($\Sigma M_z = 0$). При этом решение системы (32) будет совпадать с решением системы (40) ($B_n = A_n$), данным формулой (35).

Выразим перемещение v и касательное напряжение $\tau_{t\tau}$ на поверхности шара через функцию $g(\xi)$. Эти выражения имеют вид

$$v(0, \xi) = b \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n'(\xi) = \frac{2b}{3G} \left[G \sqrt{1-\xi^2} g'(\xi) - f_1(\xi) \right] \quad (42)$$

в обл. $(a < \xi < 1)$

$$\begin{aligned} \tau_{t\tau}(0, \xi) &= G \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) B_n P_n(\xi) = \\ &= -\frac{G}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} \left\{ \frac{d}{d\xi} \int_a^1 \frac{dy}{\sqrt{y-\xi}} \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{g(x)dx}{\sqrt{x-y}} - \frac{C_2 \sqrt{1-a}}{2(1-\xi) \sqrt{a-\xi}} \right\} \\ &\text{в обл. } (-1 < \xi < a). \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, задача о кручении шара со смешанными граничными условиями свелась к определению функции $g(\xi)$ из интегрального уравнения (41).

Заметим, что нахождение коэффициентов B_n „парных“ рядов (33) можно свести к решению вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ԲԱՐԱՆՅԱՆ

Մի Բանի «գույգ» ճարտերի լուծումները

Հոդվածում տրվում է մի քանի «գույգ» շարք-հավասարումների ճշգրիտ ու վերջավոր տեսքով լուծումները, երբ այդ շարք-հավասարումները պարունակում են Լեժանդրի բազմանդամներ կամ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ: Լուծման ընթացքում օգտագործվում են Լեժանդրի բազմանդամների ինտեգրալ ներկայացման բանաձևերը, Աբելի ինտեգրալ հավասարման լուծումը (4), (5) շարքերի դումարները:

Ատաղված արդյունքների հիման վրա գնդի ոլորման խնդիրը (շտամպի օգնությամբ) բերվում է ինտեգրալ հավասարման կամ գծային անվերջ հավասարումների սխեմայի լուծմանը, որը լիովին սեղույթար է, իսկ ազատ տեղումները սահմանափակ են և ձգտում են դերոյի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ж. Кук, С. Трантер, Dual Fourier-Bessel series, Quart. J. Mech. Appl. Math.
² С. Трантер, Dual trigonometrical series, Proc. Glasgow Math. Assoc., IV, pt. II, 1959, 49—47. ³ С. Трантер, A Further note on dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., IV, pt. IV, 1960, 198—200. ⁴ И. М. Минков, ПММ, ОТН, т. XXIV, вып. 5, 1960, 964—967. ⁵ И. М. Минков, Журнал технической физики, т. 30, вып. II, 1960, 1355—1362. ⁶ Ян Н. Снеддон, Dual equations in elasticity, IUTAM, Аннотации докладов, М., 1963. ⁷ У. М. Шеферд, On trigonometrical series with mixed conditions, Proc London Math. Soc., ser. 2, vol 43, part 3, 366—375. ⁸ Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, И—Л, М., 1952. ⁹ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, Госиздат, ч. 1, М., 1949. ¹⁰ Б. Л. Абрамян, А. А. Баблюян, ПММ, ОТН, т. 24, 1962, 471—480.

АСТРОФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, академик

Об одном случае просветления среды под воздействием излучения

(Представлено 9/VIII 1964)

§ 1. *Предварительные замечания.* Значительная часть классических задач теории переноса излучения носит линейный характер. В них пренебрегают возможным влиянием переносимого излучения на оптические свойства среды. Однако при больших плотностях излучений уже нельзя пренебрегать этим влиянием. Поэтому возникло стремление распространить современную теорию рассеяния света в мутной среде на нелинейные случаи. При этом наряду с анализом сложных случаев, связанных с процессами, встречающимися в эксперименте, целесообразно подвергнуть разбору относительно простые схемы, которые позволяют выявить различные характерные эффекты. Мы имеем в виду прежде всего схемы, в которых мы имеем дело с некогерентными пучками, вследствие чего фазовые соотношения не играют заметной роли. Это мы будем предполагать и в разобранном ниже примере.

Так, например, можно сосредоточить внимание на нелинейной зависимости диффузно-отраженного или диффузно-пропущенного потока от величины падающего на среду стационарного потока (¹). С другой стороны нас могут интересовать физические эффекты просветления или помутнения среды, возникающие вследствие изменения распределения атомов по уровням энергии. Как ни странно, но оказывается, что при определенном расположении уровней даже небольшие стационарные потоки могут иногда повести к существенному просветлению или помутнению. Как раз подобный эффект встречается в примере, который разобран в настоящей статье.

Эффекты, связанные с перераспределением атомов по состояниям, оказываются при больших плотностях излучения существенными даже в простейшей задаче переноса монохроматического излучения, когда среда состоит из атомов, которые имеют только два состояния и речь идет о поле квантов, частота которых соответствует переходу между этими состояниями.

Как известно, в линейной теории, в случае чистого рассеяния (истинное поглощение отсутствует), мы имеем для коэффициента диф-

фузного пропускания через среду с конечной оптической толщиной τ в одномерной задаче решение:

$$q = \frac{H}{F} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{2}}, \quad (1.1)$$

где H и F представляют собой интенсивности прошедшего и падающего потока.

Если же учитывается уменьшение коэффициента рассеяния вследствие перехода части атомов из первого состояния во второе (просветление), то получается выражение:

$$q = \frac{H}{F} = \frac{1 + \alpha F}{1 + \frac{\tau}{2} + \alpha F}, \quad (1.2)$$

где τ уже представляет собой предельное значение оптической толщины среды, соответствующее случаю, когда все атомы находятся в нижнем состоянии и постоянная

$$\alpha = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right)$$

зависит от весов g_2 и g_1 верхнего и нижнего состояний и планковского множителя

$$a = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2}.$$

Сравнивая формулы (1.1) и (1.2), мы видим, что в зависимости от значения величины αF возможны следующие случаи:

- а) если $\alpha F \ll 1$, просветление практически отсутствует;
- б) если $1 < \alpha F < \frac{\tau}{2}$, имеем значительное просветление;
- в) если $\alpha F \gg 1 + \frac{\tau}{2}$, приближенно имеем $H \cong F$, т. е. почти полное просветление среды.

Таким образом, поток

$$F_0 = \frac{a}{1 + \frac{g_1}{g_2}} \quad (1.3)$$

является потоком, при котором просветление становится уже значительным.

§ 2. Об одном частном случае задачи полихроматического чистого рассеяния в одномерной среде. Среди различных нелинейных задач теории переноса излучения в рассеивающей и поглощающей среде видное место занимает группа проблем, относящихся к многократному рассеянию, сопровождающемуся перераспределением энергии между частотами различных спектральных линий. При этом уже

схематический случай среды, состоящей из атомов, имеющих три уровня энергии, представляет принципиальный интерес. Но и эта схематическая задача весьма сложна для решения в ее общем случае. Здесь мы попытаемся проанализировать один из частных случаев этой задачи, когда переход $1 \rightarrow 2$ запрещен и состояние 2 является метастабильным. При этом будем предполагать, что поле излучения является стационарным. Будем также предполагать, что столкновения не играют роли.

В этом случае, вследствие отсутствия циклических переходов типа $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ или $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ и, как это следует из уравнений стационарности, в каждом объеме излучается столько квантов ν_1 (соответствующих переходу $3 \rightarrow 1$), сколько их поглощается, и то же самое справедливо по отношению к частоте ν_2 (соответствующей переходу $3 \rightarrow 2$). Поэтому проблема сводится по существу к чистому рассеянию в каждой из частот в отдельности.

Условия стационарности имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{1 \rightarrow 3} n_1 \rho_1 &= n_3 B_{1 \rightarrow 3} (\rho_1 + \sigma_1), \\ B_{2 \rightarrow 3} n_2 \rho_2 &= n_3 B_{2 \rightarrow 3} (\rho_2 + \sigma_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\sigma_i = \frac{8\pi h \nu_i^3}{c^3}$, а для остальных величин введены общепринятые обозначения.

Для простоты допустим, что мы имеем дело с относительно малыми интенсивностями излучения. Тогда $\rho_1 \ll \sigma_1$ и $\rho_2 \ll \sigma_2$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{n_3}{n_1} &= \frac{g_3^-}{g_1} \rho_1, \\ \frac{n_3}{n_2} &= \frac{g_3^-}{g_2} \rho_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\rho_i = \frac{\rho_i}{\sigma_i}$.

Будем считать, что рассеивающая среда одномерна и имеет конечную оптическую толщину. Поскольку в каждой частоте мы имеем дело с чистым рассеянием, то зависимость всех интенсивностей излучения от оптической глубины будет такая же, как в обычной задаче монохроматического рассеяния. Единственное различие будет заключаться в том, что для каждой частоты мы должны ввести свою оптическую глубину. Обозначим их соответственно через τ_1 и τ_2 .

Нелинейность задачи сказывается в том, что глубины τ_1 и τ_2 в каждой точке зависят от самого поля излучения и должны в дальнейшем быть определены из самой задачи. Но независимо от этого мы можем написать обычные выражения для интенсивностей излучения в каждой частоте, в зависимости от оптической глубины в той же частоте, используя результаты решения обычной одномерной задачи. Для излучений, направленных наружу, имеем:

$$I_1^l = \frac{1}{2} F_1 \frac{\tau_1^\circ - \tau_1}{1 + \frac{\tau_1^\circ}{2}},$$

а для излучений, направленных внутрь,—

$$I_2^l = F_1 \frac{1 + \frac{1}{2} (\tau_1^\circ - \tau_1)}{1 + \frac{\tau_1^\circ}{2}},$$

где F_1 — поток, падающий на границу $\tau_1 = 0$ в частоте ν_1 , а τ_1° — полная оптическая толщина слоя в частоте ν_1 .

Для плотностей излучений имеем:

$$\rho_1 = \frac{I_1^l + I_2^l}{c} = \frac{F_1}{c} \frac{1 + \tau_1^\circ - \tau_1}{1 + \frac{\tau_1^\circ}{2}}. \quad (2.3)$$

С другой стороны для отношения дифференциалов оптических толщин мы имеем:

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{B_{2 \rightarrow 3\nu_2} \Delta\nu_1}{B_{1 \rightarrow 3\nu_1} \Delta\nu_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = k \cdot \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.4)$$

где k — постоянная.

Отсюда на основании (2.2) получаем

$$g_1 \bar{\rho}_2 d\tau_2 = k g_2 \bar{\rho}_1 d\tau_1,$$

а на основании (2.3)

$$g_1 \frac{F_2}{\sigma_2} \frac{1 + (\tau_2^\circ - \tau_2)}{1 + \frac{\tau_2^\circ}{2}} d\tau_2 = k g_2 \frac{F_1}{\sigma_1} \frac{1 + (\tau_1^\circ - \tau_1)}{1 + \frac{\tau_1^\circ}{2}}. \quad (2.5)$$

Интегрирование (2.5) при условии того, что при $\tau_1 = 0$ имеем $\tau_2 = 0$, дает:

$$\frac{g_1 F_1}{\sigma_2} \frac{\tau_2 + \left(\tau_2^\circ \tau_2 - \frac{\tau_2^2}{2} \right)}{1 + \frac{\tau_2^\circ}{2}} = k \frac{g_2 F_1}{\sigma_1} \frac{\tau_1 + \left(\tau_1^\circ \tau_1 - \frac{\tau_1^2}{2} \right)}{1 + \frac{\tau_1^\circ}{2}}. \quad (2.6)$$

Положив здесь одновременно $\tau_2 = \tau_2^\circ$ и $\tau_1 = \tau_1^\circ$, мы получаем соотношение между полными оптическими толщинами среды в двух частотах:

$$\frac{g_1 F_2 \tau_2^\circ}{\sigma_2} = \frac{k g_2 F_1 \tau_1^\circ}{\sigma_1}. \quad (2.7)$$

Внося сюда значение k из (2.4), находим:

$$\frac{\tau_2^\circ}{\tau_1^\circ} = \frac{g_2 \sigma_2 B_{2 \rightarrow 3\nu_2} \Delta\nu_1}{g_2 \sigma_1 B_{1 \rightarrow 3\nu_1} \Delta\nu_2} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Обозначим далее через τ_0 оптическую толщину в частоте для того случая, когда все атомы находятся в первом состоянии. Очевидно, что

$$\tau_0 = \tau_1 + \frac{1}{k} \tau_2. \quad (2.8)$$

Мы будем считать τ_0 основным параметром, характеризующим толщину среды. Тогда из (2.7) и (2.8) получаем:

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{1 + \frac{g_2 \sigma_2 F_1}{g_1 \sigma_1 F_2}}; \quad \tau_2 = \frac{k \tau_0}{1 + \frac{g_1 \sigma_1 F_2}{g_2 \sigma_2 F_1}}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь, чему равно выражение потока в частоте ν_1 , прошедшего через среду. По известной формуле из теории монохроматического рассеяния этот поток H_1 должен быть равен:

$$H_1 = \frac{F_1}{1 + \frac{\tau_1}{2}} = \frac{F_1}{1 + \frac{\tau_0}{2 \left(1 + \frac{g_2 \sigma_2 F_1}{g_1 \sigma_1 F_2} \right)}}. \quad (2.10)$$

И здесь мы можем остановиться на трех различных случаях.

а) Пусть $F_1 \ll F_2$, тогда,

$$H_1 = \frac{F_1}{1 + \frac{\tau_0}{2}}. \quad (2.11)$$

б) Пусть $F_1 \gg F_2$, тогда

$$H_1 = \frac{g_2 \sigma_2 F_1^2}{g_2 \sigma_2 F_1 + \frac{\tau_0}{2} g_1 \sigma_1 F_2}$$

Если при этом $\frac{F_1}{F_2} \gg \tau_0$, то имеем полное просветление среды в частоте ν_1 и

$$H_1 \cong F_1.$$

Если же $\tau_0 \gg \frac{F_1}{F_2} \gg 1$, то

$$H_1 = \frac{2g_2}{g_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{F_1^2}{F_2 \tau_0}. \quad (2.12)$$

в) Наконец, F_1 и F_2 могут быть одного порядка величины и тогда H_1 будет того же порядка, как и при обычном рассеянии, когда оптическая толщина в ν_1 несколько меньше τ_0 .

Итак, в нашей схеме имеет место эффект просветления среды в одной из частот, причем для этого не нужно очень интенсивного потока излучения. Необходимо только, чтобы поток излучения в другой частоте был бы во много раз меньше потока излучения в данной частоте, в которой мы добиваемся просветления.

Если же поток $F_2 = 0$, то среда становится совершенно прозрачной в частоте ν_1 . Точно так же, конечно, при $F_1 = 0$ среда становится прозрачной для частоты ν_2 .

Полученные результаты соблюдаются только лишь в случае, когда переход $1 \rightarrow 2$ запрещен совершенно и второе состояние является совершенно стабильным. Однако на практике всегда с небольшой вероятностью возможны переходы $1 \rightarrow 2$. Это могут быть либо спонтанные переходы, либо же переходы в результате столкновений. Следовательно, совершается некоторое количество циклических переходов. Из-за них условия чистого рассеяния в каждой частоте уже не будут соблюдаться. Вместо условий стационарности (2.1) мы будем иметь теперь уравнения:

$$\begin{aligned} B_{1-3}n_1\rho_1 &= B_{3-1}n_3(\rho_1 + \sigma_1) + n_2b_{2-1}, \\ n_2(B_{2-3}\rho_2 + b_{2-1}) &= n_3B_{3-2}(\rho_1 + \sigma_2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где вероятность перехода $2 \rightarrow 1$, обозначенную через b_{2-1} , будем считать независимой от плотностей излучения, так как актами поглощения в запрещенной линии можно пренебречь по сравнению с числом спонтанных переходов $2 \rightarrow 1$.

Из этих уравнений получаем в тех же предположениях о возможности пренебречь ρ_1 по сравнению с величиной σ_1 :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\rho_1}{\rho_2 + \frac{g_2}{g_3} \frac{b_{2-1}}{B_{3-2}\sigma_2} \left\{ 1 + \frac{B_{3-2}\sigma_2}{B_{3-1}\sigma_1} \right\}} \quad (2.14)$$

Величина, стоящая в скобках, в знаменателе, порядка единицы и все зависит от соотношения порядков величин ρ_2 и $\frac{b_{2-1}}{B_{3-2}\sigma_2}$. Очевидно, что сделанные выше выводы останутся в силе, если в знаменателе (2.14) можно будет пренебречь вторым членом по сравнению с первым. Для этого нужно, чтобы было

$$\frac{F_2}{c} \gg \frac{g_2}{g_3} \frac{b_{2-1}}{B_{3-2}}. \quad (2.15)$$

Поэтому, например, мы уже не можем вызвать просветления среды в частоте ν_1 сколь угодно сильным уменьшением F_2 . Поскольку условие (2.15) определяет некоторое минимальное значение F_2 , для полного просветления среды в частоте ν_1 следует увеличить F_1 до достаточно высокого уровня, определенного из (2.15) и условия

$$F_1 \gg \tau_0 F_2 \gg \frac{cg_2 b_{2-1} \tau_0}{g_3 B_{3-2}}. \quad (2.16)$$

Вообще же случай, отличный от нуля, вероятности перехода $2 \rightarrow 1$ заслуживает специального изучения. Этому случаю посвящена статья А. Г. Никогосяна⁽²⁾.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ճառագայթման ազդեցության հակ միջավայրի պարզեցման մի դեպի մասին

Ճառագայթման տեղափոխության դոսական խնդիրների դրայի մասը կրում են զծային բնույթ: Նրանց մեջ արհամարվում է ճառագայթման դաշտի ազդեցությունը միջավայրի հատկությունների վրա: Սակայն, երբ տեղափոխվող ճառագայթումների խտությունները մեծ են, այդ ազդեցությունը չի կարող արհամարվել: Անհրաժեշտություն է ծագում ընդհանրացնել ճառագայթման տեղափոխման տեսության ձևակերպարարը, ոչ զծային խնդիրները ընդգրկելու նպատակով: Ըստ որում նպատակահարմար է սկսել որոշ դյուրին խնդիրներից, որոնց ուսումնասիրությունը կարող է թույլ տալ ի հայտ բերել ոչ զծային խնդիրների համար բնորոշ երևույթներ:

Ներկա հոդվածում մենք կանգ ենք առնում այն դեպքերի վրա, որոնք բնորոշ են միջավայրի պարզեցման երևույթով: Այդ նպատակով յննված են երկու միաչափ և ստացիոնար խնդիրներ: Երկու դեպքումն էլ ենթադրվում է, որ միջավայրը ունի վերջավոր խտություն:

Առաջին խնդիրը վերաբերվում է մոնոխրոմատիկ ջրման, երբ մենք զործ ունենք միայն երկու էներգետիկ մակարդակ ունեցող ատոմների հետ: Ճառագայթման ազդեցության տակ ատոմների մի մասը տեղափոխվում է զեպի երկրորդ մակարդակ և չերտը դառնում է ավելի թափանցիկ:

Եթե τ_0 -ն միջավայրի ամբողջ օպտիկական հաստությունն է այն դեպքում, երբ ինտենսիվությունները հավասար են զերոյի, ապա, ցույց է տրվում, որ միջավայրը ամբողջապես պարզեցվում է, երբ նրա վրա ընկնող F հոսքի մեծությունը բավարարում է

$$F > \frac{c^2}{16\pi h\nu^2} \tau_0$$

անհավասարություն: Այստեղ մտնող բոլոր նշանակումները (բացի τ_0 -ից, որը վերևում բացատրվեց), սովորական են:

Որպես երկրորդ սրինակ քննված է երեք էներգետիկ մակարդակ ունեցող ատոմներից բաղկացած միջավայրի դեպքը: Ընդունվում է, որ 1-2 անցումը խիստ արդելված է: Ապացուցվում է, որ 1-3 անցումներին համապատասխանող τ_{13} հաճախականության մեջ միջավայրը պարզեցվում է, եթե 2-3 անցումներին համապատասխանող τ_{23} հաճախականությունում ճառագայթման հոսքը բավականաչափ փոքր է: Օպտիկական հաստությունները նշված հաճախականություններում արտահայտվում են (2.9) բանաձևով, իսկ հոսքը (2.10)-ով:

Եթե 1-2 անցումը ունի որոշ, ոչ մեծ հաճախականություն, ապա ստացված բանաձևերը մոտավոր են ուժի մեջ, եթե միայն բավարարվում է (2.15) պայմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. А. Амбарцумян, ДАН АрмССР т. XXXVIII, № 4, (1964). ² А. Г. Никогосян, ДАН АрмССР (в печати).

АСТРОФИЗИКА

Ф. Цвики

Компактные галактики

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 13/VIII 1964)

Для нашего познания эволюции Вселенной характерно, что мы изучаем теоретически возможные наиболее плотные космические тела и затем пытаемся открыть их посредством наблюдений. Займемся здесь вопросом о компактных светящихся системах.

Светящиеся звездные системы имеют определенный верхний предел полной массы M и их средней плотности $\bar{\rho}$ (¹⁻³). Эти пределы определяются тем, что когда M и $\bar{\rho}$ возрастают, плотность излучения и газа в пространстве между звездами также растет до тех пор, пока звезды не начинают обдираться этим излучением и все более плотными и возбужденными газовыми облаками. Примерный предел для светящихся компактных галактик, по-видимому, достигается при плотности порядка 10^{11} звезд в объеме диаметром в 100 световых лет. Системы, состоящие из *темного вещества*, имеют теоретический предел компактности, при котором сумма масс покоя свободных отдельных частиц, помноженная на c^2 , становится равной абсолютной величине полной потенциальной энергии системы.

Для целей предварительной терминологии мы назовем *умеренно компактными* те системы, которые еще отличимы от звезд на пленках, полученных 18-дюймовым Шмидт-телескопом Паломарской обсерватории. Многие из этих систем входят в новый Каталог галактик и скоплений галактик (^{4,5}). Они имеют диаметры от пяти до десяти секунд дуги. Мы назовем *компактными* те системы, которые едва отличимы от звезд на пластинках, полученных 48-дюймовым телескопом Шмидта и которые имеют диаметры от двух до пяти секунд дуги. Наконец, мы назовем *весьма компактными* системы, которые обычно невозможно отличить от звезд на пластинках, полученных 48-дюймовым телескопом Шмидта и диаметры которых меньше двух секунд дуги.

Первоначально (⁶⁻⁹) я начал искать компактные галактики в надежде, что они будут действовать как гравитационные линзы, фокусируя изображения крайне отдаленных галактик и тем увеличивая видимую светимость последних. Поскольку такие изображения не были

найжены, то для проверки общей теории относительности стало важным выяснить, какими могут быть размеры, массы и другие характеристики компактных галактик. Эти идеи и приведенные выше рассуждения заставили меня начать систематические поиски и исследование компактных галактик и компактных частей галактик (^{1, 10-13}). При этом внимание было сосредоточено на объектах, которые при первом просмотре кажутся звездообразными на пластинках, полученных 48-дюймовым телескопом Шмидта. Некоторые из полученных результатов мы приводим ниже.

1. В моих предварительных поисках я нашел в среднем одну компактную галактику на каждые пять квадратных градусов в интервале видимых фотографических величин $13 < m_p < 17$.

2. На пластинках, полученных 200-дюймовым телескопом, компактные галактики видны как диски высокой поверхностной яркости, которая может достигать $m_p = 19$ на одну квадратную секунду дуги, и ярче. Границы диска часто замечательно резкие. Во многих случаях с яркими дисками связаны внешние крайне слабые образования, такие как галосы, спиральные рукава, шпоры и струи. Иногда один или несколько ярких звездообразных узлов видны на концах спиральных рукавов или струй.

3. Обращает на себя внимание, что компактные галактики часто составляют широкие пары и кратные группы. Иногда также случается, что до пяти компактных систем находятся в близком соприкосновении, будучи погружены в слабое и разорванное светлое образование.

4. Многие компактные диски и узлы наблюдаются близ центров и в других частях в остальном нормальных галактик.

5. Типы спектров до сих пор исследованных компактных галактик принадлежат интервалу от К до А. Этот последний тип является весьма редким для нормальных галактик. Часто имеются эмиссионные линии, особенно водорода и кислорода, а в некоторых случаях только эмиссионные линии и видны.

6. Большие ширины линий поглощения и испускания в спектрах компактных галактик указывают на высокую дисперсию внутренних скоростей, которая может достигать до 2000 км/сек. Если это истолкование ширин линий правильно и если компактные галактики являются стационарными системами, найденные их массы доходят до 10^{12} солнечных масс.

7. Символические скорости удаления первых нескольких исследованных компактных галактик лежат в пределах от 1000 км/сек. до 30000 км/сек.

8. Индикативные абсолютные фотографические величины (¹⁴⁻¹⁶) исследованных компактных галактик лежат в пределах — $13 > M_p > -20$.

9. Относительное индикативное отношение массы к светимости изученных компактных галактик находится между 50 и 1000. Эти зна-

чения указывают на присутствие огромного количества темного вещества в некоторых таких системах. Типичным случаем очень яркой компактной галактики является система с координатами $\alpha = 1^h 01^m 12^s$ и $\delta = +29^\circ 52'$ (1950), для которой $m_p = +17.5$, $V_s = 24400 \frac{\text{км}}{\text{сек.}}$, $M_p = -19.3$, $M = 8 \cdot 10^{11} M_\odot$ и $(M/L) \approx 110 (M_\odot/L_\odot)$, где L есть индикативная абсолютная фотографическая светимость.

Вдобавок к различным обычным исследованиям компактных галактик начата следующая программа работ.

а. Некоторое число компактных галактик включено в нашу регулярную программу поисков сверхновых с тем, чтобы зарегистрировать различные степени их светимости и возможные большие вспышки.

б. Хотя мы предполагаем, что компактные галактики являются очень старыми звездными системами, мы подозреваем, что при некоторых, очень редко встречающихся условиях, они могут служить местом самых огромных вспышек энергий, известных во Вселенной. Например, вспышка сверхновой внутри компактной галактики может повести к такой последовательности событий, как обдирка и частичное разрушение соседних звезд, последующее взрывное выделение излучения заключенного в центральных частях этих звезд, коллапс этих центральных частей и образование плотных тел, таких как нейтронные звезды и, наконец, как общий результат—превращение светящейся компактной галактики в темную весьма компактную галактику. Такая лавина событий может привести к суммарному освобождению энергии порядка 10^{66} эрг за время порядка от 1000 до десяти миллионов лет.

в. Эрупции намеченного выше типа превратят компактные галактики временно в интенсивные радиогалактики, также как в наиболее мощные излучатели света и космических лучей. Электрические поля, которые, интегрируясь в широких областях, приведут к разностям потенциала до 10^{20} вольт, также как весьма обширные магнитные поля будут автоматически генерированы благодаря тем же процессам, которые нами раньше (^{16, 17}) связывались со вспышками сверхновых.

С целью проверки этих предположений организуется сотрудничество с несколькими группами радиоастрономов в США и Франции. Возможно, что некоторые из компактных галактик, особенно имеющих линии испускания в спектрах окажутся радиоисточниками той или иной мощности. Если в какой-нибудь компактной галактике будет наблюдена какая-либо оптическая вспышка, будет дано знать и наблюдателям космических лучей, которые уже несколько лет сотрудничают с подкомиссией по сверхновым комиссии 28 Международного астрономического союза.

Наконец, необходимо подчеркнуть, что прозрачная объективная решетка на полное отверстие 48-дюймового телескопа Шмидта, в пользу создания которой я выступал уже много лет (^{8, 18}), составит

одно из наиболее могучих средств для отыскания компактных галактик, сверхновых и многих других типов небесных объектов.

Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния

Ֆ. ՑՎԻԿԻ

Կոմպակտ գալակտիկաներ

Համեմատաբար պայծառ (տեսանելի մեծությունը մինչև 17) գալակտիկաները, որոնց պատկերները Շմիդտի տիպի ժամանակակից դիտակներով ստացված լուսանկարների վրա հազիվ են տարբերվում աստղերից, նպատակահարմար է անվանել կոմպակտ գալակտիկաներ:

Մենք գտել ենք, որ երկնակամարի ամեն մի հինգ բառակուսի աստիճանի վրա հանդիպում է մոտ մեկ կոմպակտ գալակտիկա:

Կոմպակտ գալակտիկաները բնորոշվում են հաճախ մեծ զանգվածով, բարձր մակերևութային պայծառությամբ և ներքին արագությունների մեծ դիսպերսիայով:

Երբեմն սպեկտրում նրանք ունենում են առաքման գծեր:

Նշվում են կոմպակտ գալակտիկաների ուսումնասիրության կարևորագույն խնդիրները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Փ. Цвики, А. Ј., 65, 504, 1960. ² Փ. Цвики, Phys. Blätter, 17, 393—399, 1961. ³ Փ. Цвики, Annales Guebhard, 39, 263—273, 1963. ⁴ F. Zwicky, E. Herzog and P. Wild, Catalogue of Galaxies and of Clusters of Galaxies, vol. I (Calif. Inst. of Technology), 1960. ⁵ F. Zwicky, E. Herzog and P. Wild, ibid. vol. II (Calif. Inst. of Technology), 1963. ⁶ Փ. Цвики, Phys. Rev., 51, 290, 1937. ⁷ Փ. Цвики, ibid., 51, 679, 1937. ⁸ Փ. Цвики, Observatory, 48, 121—143, 1948. ⁹ F. Zwicky, Morphological Astronomy (Berlin: Springer Verlag), p. 216, 1957. ¹⁰ Փ. Цвики, А. Ј. 68, 301, 1963. ¹¹ Փ. Цвики, Sky and Telescope, 26, 83, 1963. ¹² F. Zwicky, Carnegie Institution of Washington Yearbook 1962/63 „Rpt. of Mount Wilson and Palomar Observatories“, p. 32, 1963. ¹³ Փ. Цвики, Comptes Rendus, № 16, October, p. 2240—2241, 1963. ¹⁴ Փ. Цвики և Մ. Մ. Хьюмассон, Ap. J., 132, 627—639, 1960. ¹⁵ Փ. Цвики, և Մ. Մ. Хьюмассон, ibid., 133, 794—813, 1961. ¹⁶ Փ. Цвики, Phys. Rev., 55, 986, 1939. ¹⁷ Փ. Цвики, Proc. Nat. Acad. Sciences, 25, 338—344, 1939. ¹⁸ Փ. Цвики, Pub. Astr. Soc. Pacific, 53, 242—244, 1941.

Л. Л. Декабрун и А. Р. Мкртчян

Опорное напряжение для стабилизаторов тока большой точности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 25/III 1964)

Одна из основных задач, возникающих при разработке радиоспектроскопической аппаратуры, состоит в том, чтобы для ориентации магнитных моментов ядер или электронов в атомах исследуемого вещества получить магнитное поле H_0 , имеющее достаточно высокую точность. Этим понятием объединяются следующие характеристики магнитного поля:

- 1) однородность поля в необходимом рабочем объеме;
- 2) его стабильность во времени.

Необходимая однородность магнитного поля достигается путем выбора надлежащей конструкции магнита в целом и, в особенности, его полюсных наконечников, а также технологией механической и термической обработки ответственных частей магнитопровода (^{1,2}). Кроме того, разработаны методы коррекции магнитного поля в заданной области с помощью системы контуров, несущих электрические токи (³).

Необходимая стабильность H_0 задается той минимальной скоростью развертки спектров, которая требуется при исследовании заданного класса веществ. Результирующая скорость магнитной развертки может быть, очевидно, представлена как сумма двух слагаемых:

$$(\dot{v}_m)_p = \frac{dH_0}{dt} + \frac{\delta H_0}{dt} \quad (1)$$

Здесь:

$$\frac{dH_0}{dt} = F_1(t) \quad (2)$$

есть закономерность изменения H_0 , заданная условиями эксперимента. В радиоспектрометрах это, в большинстве случаев, постоянная величина. Иногда (например, в масспектрометрах) $F_1(t)$ может быть экспонентой. Возможны и другие виды $F_1(t)$.

Второе слагаемое в уравнении (1)

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = f_1(t) \quad (3)$$

отражает самопроизвольное изменение H_0 в результате процессов, которые не могут контролироваться оператором. Для воспроизводимости результатов измерения, очевидно, необходимо выдержать соотношение:

$$\left| \frac{\partial H_0}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{dH_0}{dt} \right| \quad (4)$$

которым и определяются требования к системе стабилизации H_0 . Эта система должна удерживать самопроизвольные изменения H_0 в таких пределах, чтобы:

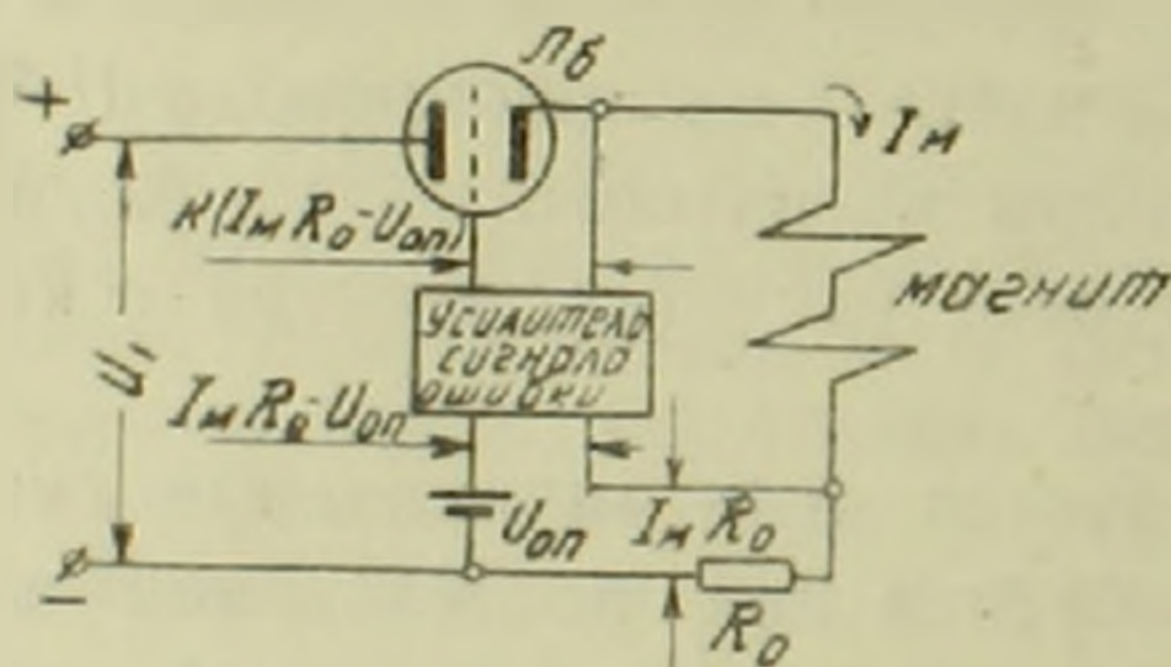
$$\left| \frac{\partial H_0}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{dH_0}{dt} \right|_{\text{мин.}} \quad (5)$$

В наиболее точных радиоспектрометрах для достижения необходимой стабильности магнитного поля электромагнитов применяются две независимые системы:

1) система стабилизации тока возбуждения I_m в обмотке электромагнита (4, 5);

2) система стабилизации потока Φ (система суперстабилизации) или же система стабилизации напряженности магнитного поля на основе явления ядерного магнитного резонанса (7).

Применение второй системы того или иного вида возможно только при условии высококачественной стабилизации.



Фиг. 1. Принципиальная схема стабилизатора тока.

На фиг. 1 представлен принцип наиболее распространенных систем стабилизации тока I_m (8). Падение напряжения на контрольном сопротивлении $I_m R_0$ сравнивается с опорным напряжением $U_{оп}$. Разность $I_m R_0 - U_{оп}$ усиливается усилителем сигнала ошибки и, изменяя сеточное напряжение проходных ламп $Л_6$, управляет величиной I_m .

Если эта система имеет достаточно большой коэффициент передачи разомкнутой петли

$$k \cdot s \cdot R_0 = k_p \quad (6)$$

(k — коэффициент усилителя сигнала ошибки, s — крутизна проходных ламп $Л_6$), то ее установившееся состояние характеризуется соотношением:

$$(I_m)_{уст} = \frac{U_{оп}}{R_0} \quad (7)$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial (I_m)_{уст}}{\partial t} \approx \text{const} \frac{\partial U_{оп}}{\partial t} \quad (8)$$

Так, если по назначению спектрометра необходимо, чтобы.

$$\frac{1}{(I_M)_0} \cdot \frac{\delta (I_M)_0}{dt} \leq 10^{-6} / \text{сек.}$$

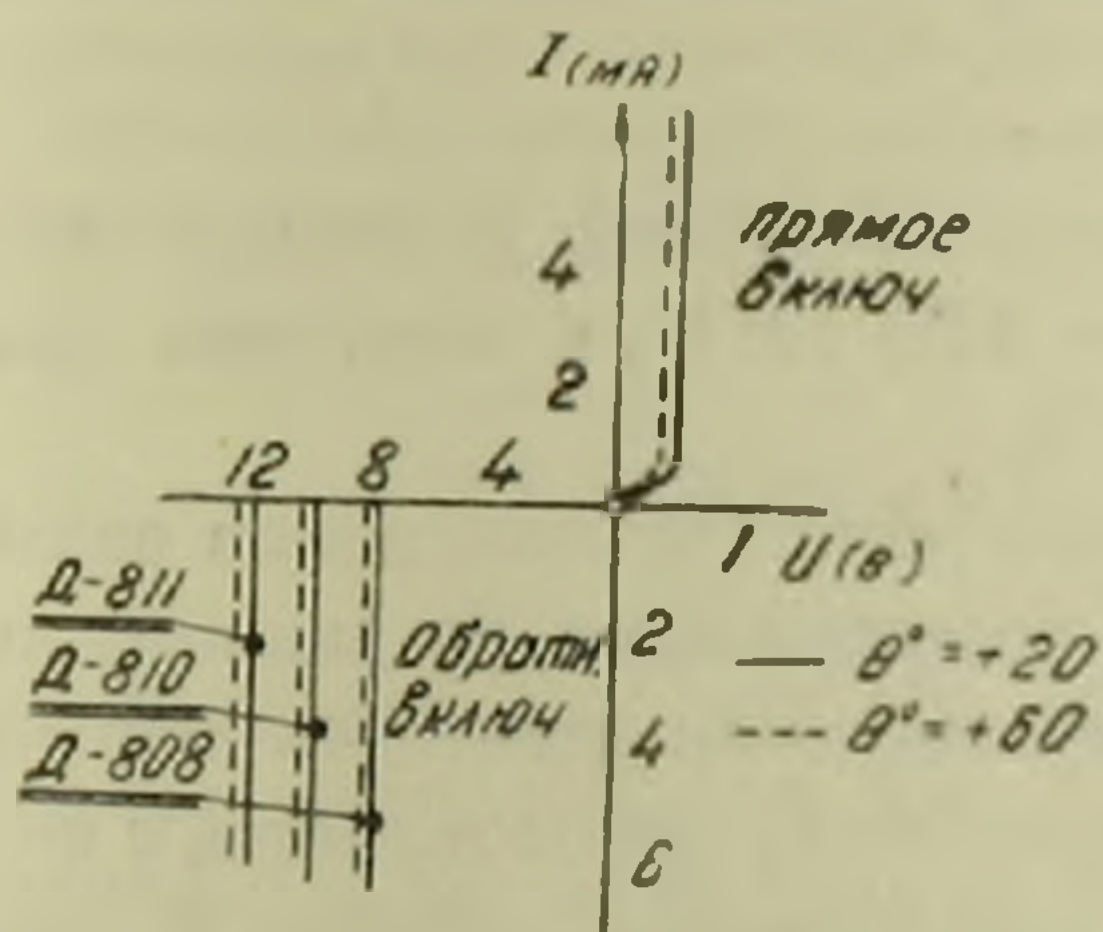
то самопроизвольные изменения опорного напряжения по порядку величины должны быть того же порядка или меньше:

$$\frac{1}{U_{оп}} \cdot \frac{\delta U_{оп}}{dt} \leq 10^{-6}.$$

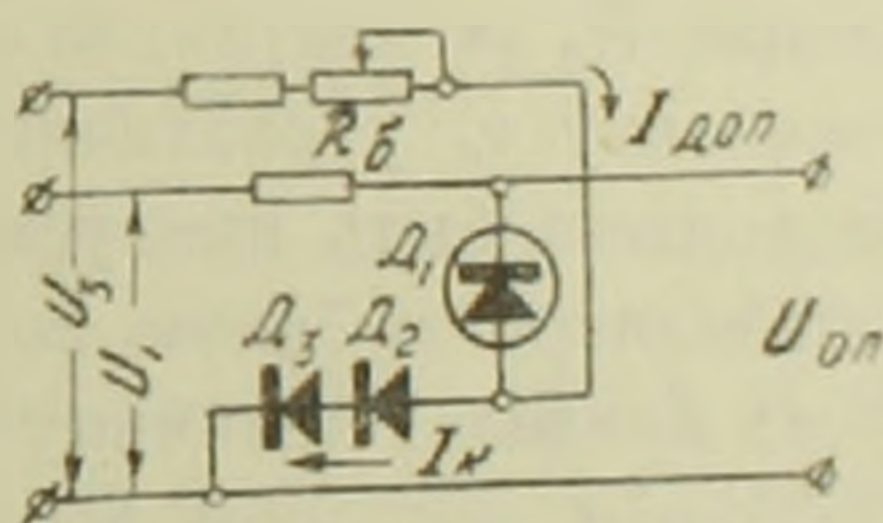
Напряжение, удовлетворяющее этому условию, не может быть получено простыми средствами. Достаточно отметить, что нормальные элементы, являющиеся метрологическими эталонами, могут обеспечить такую точность только при условии тщательного термостатирования⁽⁹⁾. Более удобны окисно-ртутные элементы, например, типа ОР-4, но они требуют периодического контроля.

При разработке спектрометра ядерного магнитного резонанса, предназначенного для исследования кристаллов⁽¹⁰⁾, авторы предприняли попытку получить для системы стабилизации I_M опорное напряжение от сети, не прибегая к использованию химических источников тока. В литературе отмечалась принципиальная возможность использования напряжения кремниевых стабилитронов (диодов Зенера) в каче-

стве опорного напряжения в прецизионных системах стабилизации^(11, 12). Однако практические схемы не опубликованы.



Фиг. 2. Характеристики кремниевых стабилитронов отечественного производства.

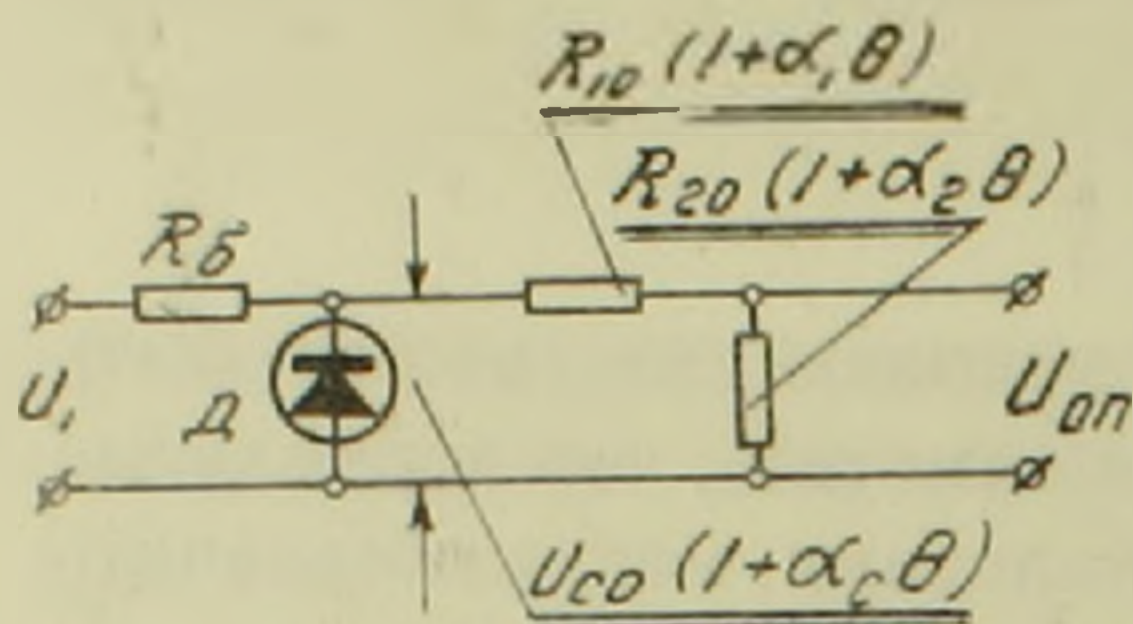


Фиг. 3. Схема температурной компенсации напряжения кремниевого стабилитрона.

На фиг. 2 приведены характеристики кремниевых стабилитронов отечественного производства. Там же приведена типовая характеристика $P-n$ -перехода кремниевого диода для прямого включения. Температурные коэффициенты напряжения для прямого и обратного включений имеют противоположные знаки, что позволяет осуществить температурную компенсацию по схеме, представленной на фиг. 3⁽¹²⁾. Наилучшая компенсация достигается регулировкой тока через компенсирующие $P-n$ переходы. На фиг. 3 через эти переходы пропускается дополнительный ток от вспомогательного источника U_3 . В некоторых случаях необходимо, чтобы ток компенсирующих диодов был меньше тока стабилизирующего диода. Для этого компенсирующие диоды шунтируют внешним сопротивлением. Собственный дрейф

(при $\theta = \text{const}$) выходного напряжения таких диодных групп может составлять всего лишь $(2-3) \cdot 10^{-8}$ сек., что вполне достаточно для систем стабилизации I_m . Однако схема требует тщательной юстировки и периодической проверки.

Авторы полагают, что более простое решение задачи дает применение компенсирующего делителя (фиг. 4). В этой схеме:



Фиг. 4. Принцип термокомпенсирующего делителя напряжения.

$$U_{оп}(\theta) = \frac{R_{20}(1 + \alpha_2\theta)}{R_{10}(1 + \alpha_1\theta) + R_{20}(1 + \alpha_2\theta)} \times U_{co}(1 + \alpha_c\theta) \quad (9)$$

(α — температурные коэффициенты соответствующих элементов, θ — температура их).

Из (9) находим:

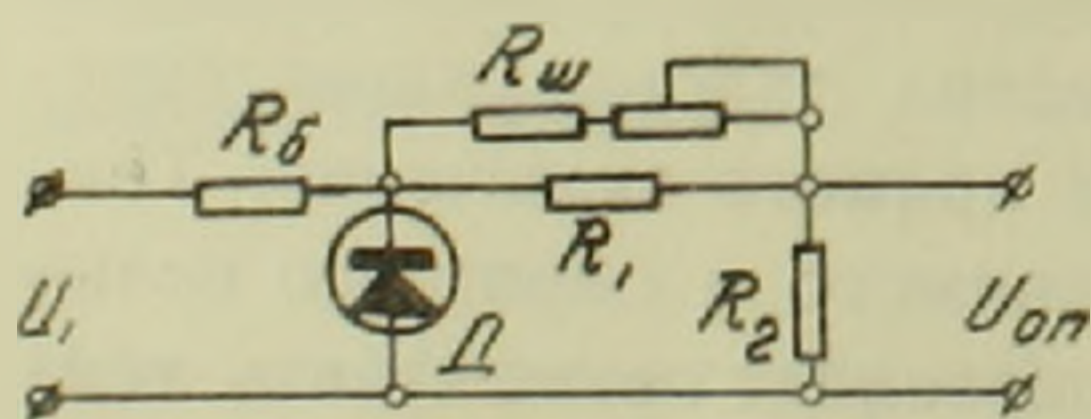
$$\frac{dU_2}{d\theta} = \frac{\alpha_2 + \alpha_c - \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10} + R_{20}}}{\left[1 + \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10} + R_{20}}\right]^2} U_{20}, \quad (10)$$

откуда получаем условие полной температурной компенсации $U_{оп}$

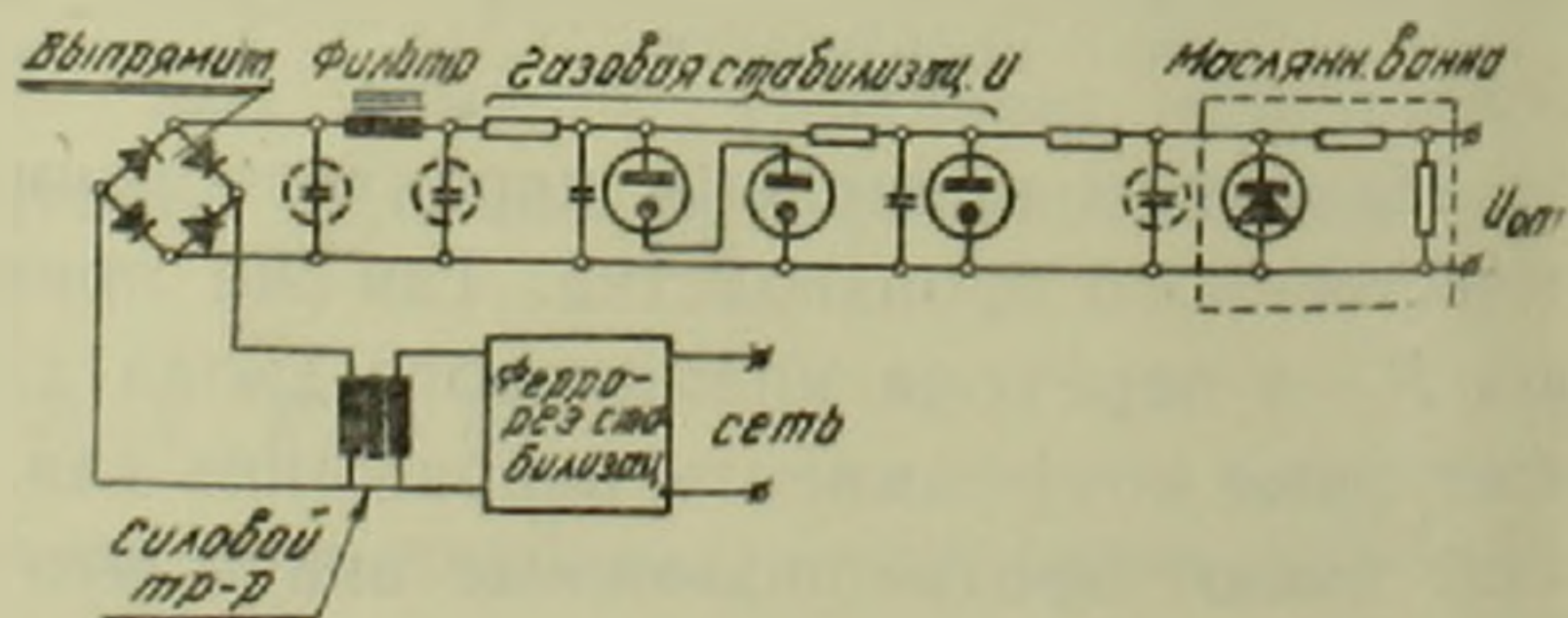
$$\frac{R_{20}}{R_{10}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_c} - 1. \quad (11)$$

Удобными материалами для компенсирующего делителя являются медь для сопротивления R_1 (α меди = $3,93 \cdot 10^{-3}$) и манганин для сопротивления R_2 (α манганина = $2 \cdot 10^{-5}$).

Поскольку α_c у различных экземпляров стабилитронов различно, в схеме должна быть предусмотрена подстройка ее по данному экземпляру стабилитрона. Такую подстройку легко осуществить варьируя в небольших пределах величину R_1 . Для этого R_1 изготавливается с небольшим плюсовым допуском, после чего высокоомным шунтом R_m (фиг. 5) доводится до необходимой величины. Поскольку $R_m \gg R_1$, температурный коэффициент R_m играет очень малую роль и шунт



Фиг. 5. Принцип индивидуальной юстировки схемы опорного напряжения.



Фиг. 6. Полная принципиальная схема источника опорного напряжения с сетевым питанием.

может быть выполнен из композиционных сопротивлений типа ВС.

Измерения, выполненные на стабилитронах Д-808, в схеме без подстроечного шунта, в условиях, при которых медное сопротивление R_1 , манганиновое сопротивление R_2 и стабилитрон находились в об-

шей масляной ванне показали, что при изменении t в пределах от 18° до 45°C U_{00} изменяется не более чем на 10^{-6} своей начальной величины. Это дает возможность использовать получаемое таким образом напряжение в качестве опорного, не прибегая к термостатированию элементов схемы.

На фиг. 6 представлена полная схема источника опорного напряжения, использованная авторами в системе питания электромагнита ЭМ-10 000, разработанного для ядерно-резонансной спектроскопии кристаллов.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Լ. Լ. ԴԵԿԱԲՐՈՒՆ ԵՎ Ս. Ռ. ՄԿՐՏՅԱՆ

Նեցուկային լարում մեծ ճեզրտության հոսանքի կայունացման համար

Հղվածում քննարկված է էլեկտրամագնիսների հոսանքի կայունացման սխեմայի նեցուկային լարման աղբյուրներին վերաբերվող հիմնական պահանջները:

Նկարագրված է այդ պահանջները բավական մեծ ճշգրտությամբ և առանց ջերմակարգավորիչ հասուկ միջոցառումների բավարարող, փոփոխական հոսանքի ցանցից սնվող նեցուկային լարման կոնկրետ աղբյուր ու տրված է նրա սխեման:

Որպես այդպիսի աղբյուրի հիմնական մաս, ծառայել է կաթոդային ստաբիլիտրոնը լարման ջերմհամակշռող (термокомпенсирующий) բաժանարարի հետ:

Հեղինակները նշված նեցուկային լարման աղբյուրի սխեման օգտագործել են բյուրեղների միջուկ-ռեզոնանսային սպեկտրոսկոպիայի համար իրենց կիրառած ЭМ-10,000 էլեկտրամագնիսի սնման սխեմանում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Примас, Р. Арнд, Р. Ернст, Ztschr. für Instrumentenkunde, 1959. ² А. Блаум, М. Пакард, Science, 122, 738—741, 1955. ³ В. Андерсон, Сборник „ЯМР и ЭПР спектроскопия“, ИИЛ, 1964. ⁴ А. Леше, Ядерная индукция, ИИЛ, 1963. ⁵ Н. Примас, Н. Гутовский, The Rev. of Sc. Instr. 28; 510, 1957. ⁶ Р. Л. Гарвин, Д. Гутчинсон, Пенмаус, The Rev. of Sc. Instr. 30, 105, 1959. ⁷ Ю. П. Денисов, ПТЭ, 1959, № 1. ⁸ Л. Декабрун, Усилители и источники питания, Роствиздат, 1961. ⁹ Курс электроизмерений, п/р В. Прыткова и А. Талицкого, ГЭИ, 1960. ¹⁰ Л. Декабрун, А. Мкртчян, Известия АН Арм. ССР, серия физ-мат. наук, т. 17, № 7, 1964. ¹¹ Н. Примас, Р. Арнд, Р. Ернст, Ztschr. für Instrumentenkunde, 1960, янв. ¹² Додик С. Полупроводниковые стабилизаторы постоянного напряжения и тока. М., „Сов. радио“, 1962.

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. Г. Назаров, академик АН Армянской ССР, Б. К. Карапетян и С. Г. Шагинян

Метод исследования сейсмостойкости сооружений на моделях, при сейсмовзрывных воздействиях

(Представлено 15/IV 1964)

В работах (^{1,2}) была показана возможность решения задач сейсмостойкости на основе исследования моделей, изготовленных по принципу простого подобия, на сейсмовзрывное воздействие. Здесь рассматривается эта же задача с более общей точки зрения, на основе теории расширенного подобия, при условии равенства ускорений для модели и оригинала (³). Это позволяет изготовлять модель не предусматривая ее пригрузку, что облегчает проведение эксперимента. Основные условия подобия принимают вид:

- для длин — $l' = \alpha l$,
- для плотностей — $\rho' = \delta \rho$,
- для деформаций — $\varepsilon' = \gamma \varepsilon$,
- для напряжений — $\sigma' = \beta \sigma$, где $\beta = \alpha \delta$,
- для объемных сил — $k' = \delta k$,
- для сил $P' = \alpha^3 \delta P$,
- для времен — $t' = \xi t = \sqrt{\alpha \gamma} t$
- для смещений — $u' = \alpha \gamma u$,
- для скоростей — $v' = \sqrt{\alpha \gamma} v$,
- для ускорений — $w' = w$ (по условию),
- для ширин трещин — $\Delta l' = \alpha \gamma \Delta l$.

Здесь величины для моделей показаны со знаком „штрих“. Величины для оригиналов имеют те же обозначения, но без знака „штрих“. Греческими буквами обозначены множители подобия.

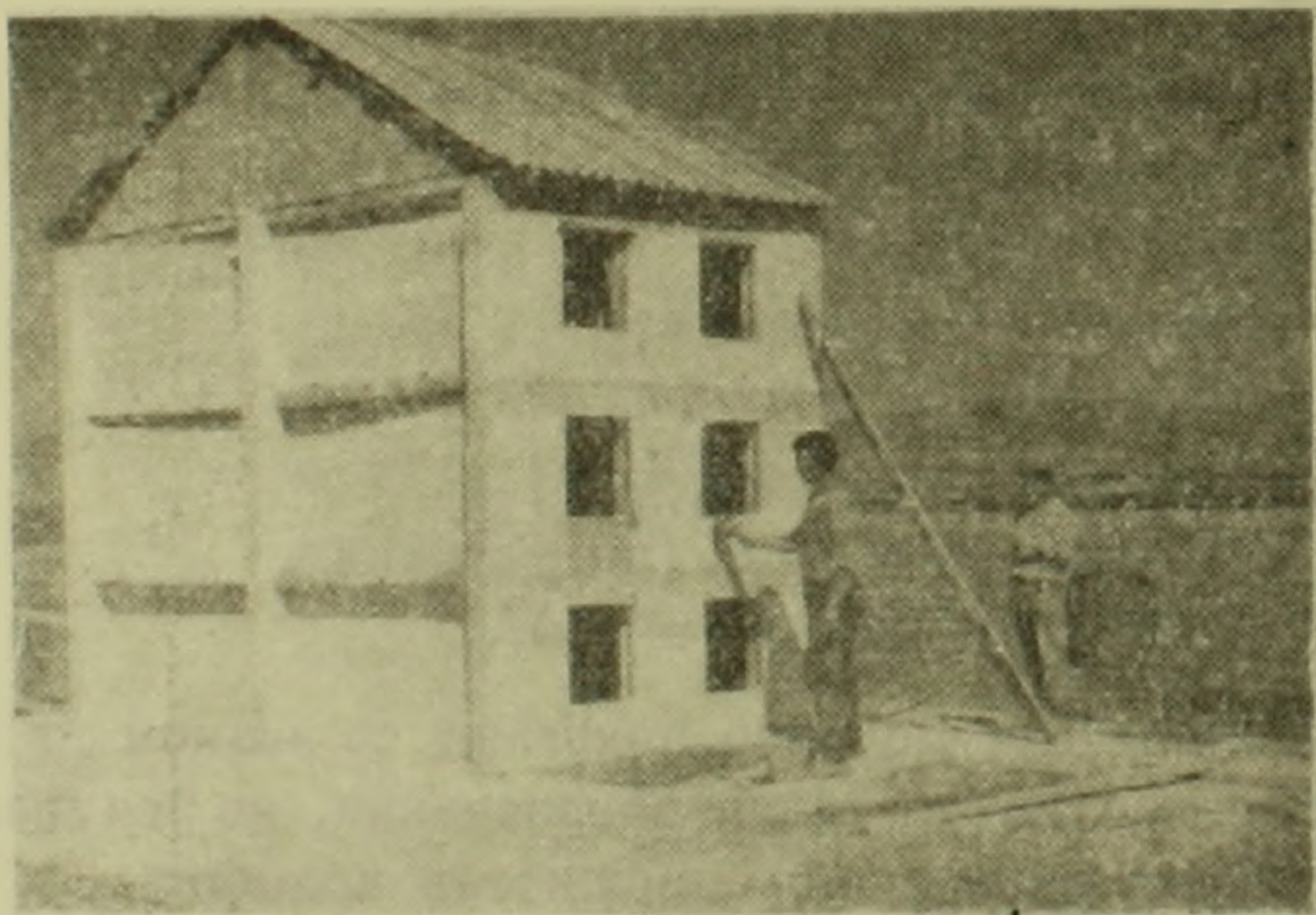
Путем анализа спектрального состава колебаний почвы, вызванных пробными взрывами, и сопоставления со спектральным составом колебаний почвы при разрушительных землетрясениях устанавливается величина множителя подобия ξ для времен. Этим фиксируется значение $\sqrt{\alpha \gamma}$. Далее делаются пробные подсчеты на основе имеющихся в распоряжении экспериментатора механических данных по модельным материалам для определения множителей подобия α , δ , γ . Из

подобранных модельных материалов строится модель при найденном множителе геометрического подобия α .

На подходящем расстоянии от модели закладывается серия зарядов на прямой линии, для обеспечения плоского фронта сейсмовзрывной волны в зоне расположения модели. Измерительная аппаратура в виде системы сейсмографов, велосиграфов, акселерографов, маятниковых сейсмометров, деформометров располагается на грунте на фундаменте и на сооружении. Если сооружение представляет собою многоэтажное здание, то желательно непосредственно измерять ускорения на уровне перекрытий, а также относительные подвижки смежных перекрытий. Если непосредственно до взрывов делались статические испытания, устанавливающие связи между горизонтальными силами и смещениями, то по полученным данным измерений по сейсмовзрывным воздействиям получаем возможность установления связей между силами инерций, приложенных к междуэтажным перекрытиям, а также реакциями внутренних сил в пределах каждого этажа.

Полезно также перед взрывом осуществлять и динамические испытания модели, например, для установления периодов ее свободных колебаний и декрементов затухания. По изложенной здесь вкратце методике была испытана модель отсека трехэтажного крупноблочного здания на сейсмовзрывные воздействия. Здание это было рассчитано на VIII баллов. Множители подобия были приняты следующими

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \quad \gamma = 0.94.$$



Фиг. 1.

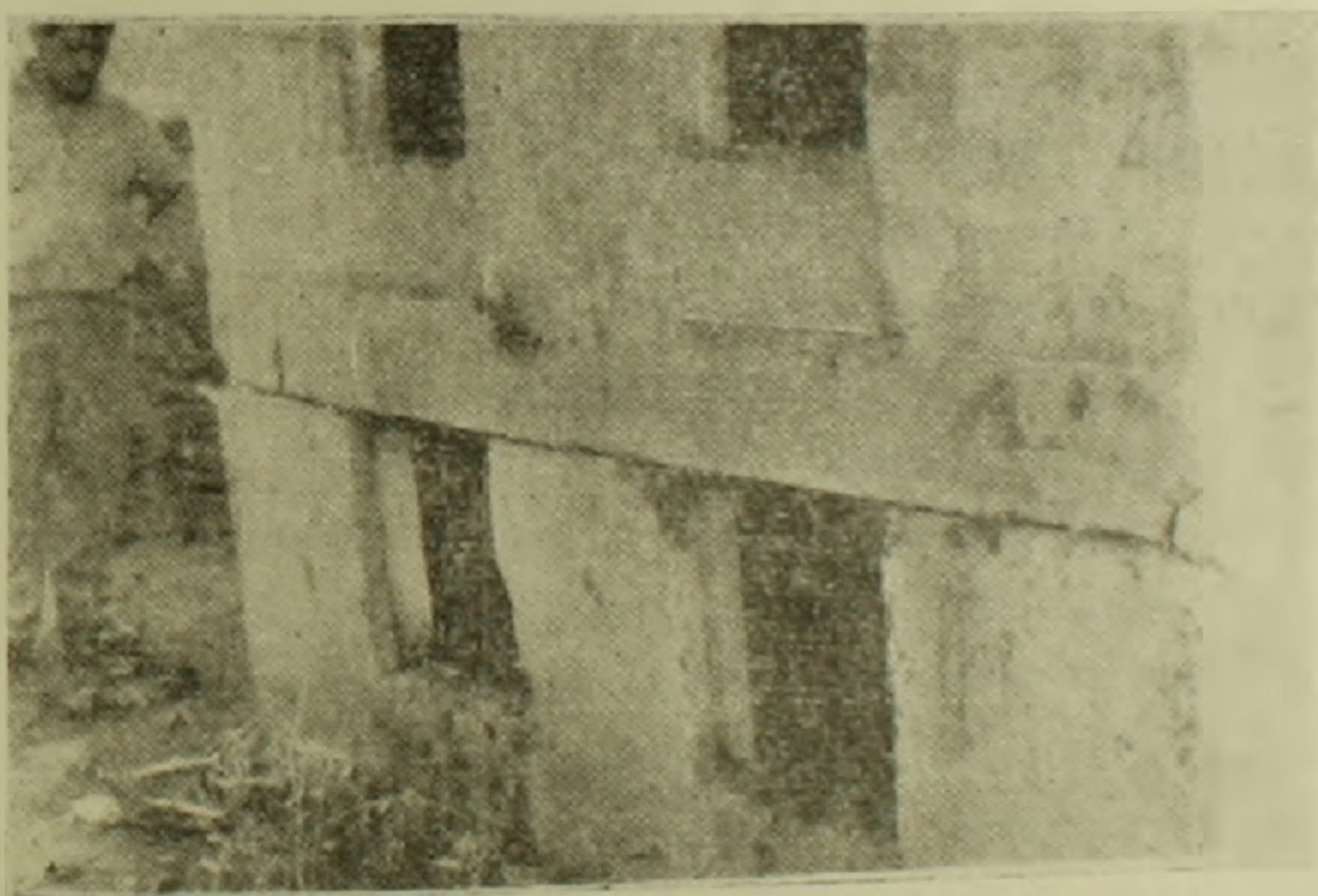
Модель была возведена на суглинисто-супесчаном основании. Геометрические размеры модели оказались следующими: длина фасада — 2,50 м, ширина — 3,50 м, высота — 3,0 м. Толщина стен — 8—13 см, толщина междуэтажных перекрытий — 8 см. Общий вес модели около 7 т. Общий вид модели показан на фиг. 1.

Модель подвергалась сейсмозрывным воздействиям разной интенсивности и различно ориентированных по отношению к его плану. Взрывы осуществлялись на расстоянии 11—20 м от модели. Максимальная суммарная величина одновременно взрывающихся зарядов (аммонит) не превышала 300 кг. Сейсмозрывной эффект усиливался путем производства взрывов в котлах, образуемых в результате предварительных взрывов—прострелок малого количества заряда на дне скважины (фиг. 2).



Фиг. 2.

Интенсивность сейсмозрывного воздействия на модель, по данным многомаятниковых сейсмометров, оценивается порядка 8—9 баллов. В модели возникли существенные трещины и сдвиги (фиг. 3).



Фиг. 3.

Проведенные эксперименты подтверждают эффективность принятого метода. Для дальнейшей его отработки необходимо вести систематические исследования взрывов в различных грунтовых условиях, при различных методах и параметрах осуществления взрывов для более

точного моделирования сейсмической нагрузки и зависимости от поставленных задач.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ ԵՎ Ս. Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Մոդելների վրա կառուցվածքների սեյսմոկայունության ուսումնասիրության մեթոդ՝ պայթեցման սեյսմիկ ազդեցության ներքո

Նախորդ աշխատություններում (1,2) որված են սեյսմոկայունության խնդիրների
յուժման հնարավորությունը հասարակ նմանության սկզբունքով պատրաստված մոդելնե-
րի ուսումնասիրության հիման վրա: Ներկա հոդվածում նույն խնդրի քննարկումը կա-
տարվում է ընդլայնված նմանության տեսությամբ, ելնելով մոդելի և օբիեկտի միջ-
դասումների հավասարեցման պայմաններից: Տրված են ընդլայնված նմանության հիմ-
նական պայմանները, վերահիշյալ վերապահումներ:

Փորձնական պայթեցումների միջոցով և իրական ուժեղ երկրաշարժներից առաջա-
ցած հողի տատանումների սպեկտրալ կադմություններով համեմատությունը հնարավորու-
թյուն է ստեղծում որոշելու ժամանակի նմանության ξ գործակցի մեծությունը կա-
պագային դրուստներում կառուցված բնակելի տան փորձնական մոդելը, նմանության
 $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{3}$; $\gamma = 0.94$ և $\delta = 1$ գործակիցներով, հասցված է քայքայման տարբեր
հեռավորություններից կատարված պայթեցումներից: Կատարված փորձարկումները հա-
տատում են նշված մեթոդի էֆեկտիվությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Назаров, ДАН Армянской ССР, т. XXIV, № 1 (1957). ² Т. Г. Сагдиев, А. А. Диланян, Труды Ин-та сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН Таджикской ССР, т. IX, Душанбе, 1961. ³ А. Г. Назаров, Известия АН Армянской ССР (серия технических наук), т. X, № 5 (1957); т. X, № 6 (1957); т. XI, № 4 (1958); т. XI, № 6 (1958); т. XIV, № 1 (1961); т. XV, № 6 (1962); т. XV, № 1 (1963); т. XVI, № 4 (1963).

М. Я. Майзелис, А. Г. Базарджян и Ф. З. Меерсон

Использование продуктов распада глюкозы в процессе синтеза белка при компенсаторной гиперфункции некоторых органов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыаном 20/IV 1964)

Взаимосвязь, существующая между физиологической функцией и аппаратом синтеза белка дифференцированных клеток, играет решающую роль в возникновении роста и деления этих клеток при увеличении интенсивности их функционирования. Показано, что гиперфункция миокарда при экспериментальном пороке (¹⁻³), единственной почки при нефрэктомии (^{4,5}), доли печени после гепатэктомии (^{6,7}), коры надпочечников при длительном введении АКТГ (⁸), закономерно влечет за собой активацию синтеза РНК, белка, ДНК в клетках этих органов. Данная активация увеличивает количество хромосомных наборов, РНК и белка в клетке и тем самым либо подготавливает митоз, либо обеспечивает увеличение плоидности и размеров клетки: она является основой клеточного роста и деления—основой компенсаторной гипертрофии и регенерации органов.

Ранее выполненные исследования показали, что фактором, определяющим активность аппарата биосинтеза белка дифференцированных клеток является не функция органа, взятая в целом, а интенсивность функционирования его структур (ИФС), равная количеству функции, осуществляемой единицей массы органа (⁹).

В начальной аварийной стадии процесса гиперфункция осуществляется негипертрофированным органом, она оказывается возможной только благодаря увеличению ИФС. Увеличение ИФС в свою очередь вызывает активную гиперфункцию генетического аппарата.

Во второй стадии гипертрофия приводит к тому, что увеличенная функция распределяется в возросшей массе его функционирующих структур—ИФС снижается до нормального или субнормального уровня—активация биосинтеза белка прекращается и гипертрофия завершается. Применительно к сердцу установлено, что в начальной стадии гиперфункции вызванная стенозом аорты активация синтеза белка и энергообразование в растущем миокарде сопровождаются изменением ассортимента субстратов, потребляемых миокардом из крови, в сторону преобладания углеводов (^{2,10}). Происходит мобилизация

60—70% гликогенного резерва сердечной мышцы при одновременном увеличении в ней содержания жирных кислот (^{11, 12}).

Во второй стадии процесса, когда рост миокарда, достигнув определенного предела, завершается, а интенсивность синтеза белка и энергообразование приближаются к нормальному уровню, гликогенное депо миокарда восстанавливается, а содержание жирных кислот уменьшается до контрольного уровня (¹³).

В связи с этим возникло предположение, что значительное увеличение использования углеводов в аварийной стадии компенсаторной гиперфункции миокарда не только обеспечивает достаточное образование энергии в процессе гликолиза и дыхания, но играет также существенную пластическую роль поставщика исходных продуктов для синтеза белков и нуклеиновых кислот.

На основе данного предположения в настоящей работе изучалось включение меченого углерода глюкозы в белок миокарда и белок почки при компенсаторной гиперфункции и гипертрофии этих органов.

Компенсаторную гиперфункцию миокарда левого желудочка 14 крыс-самцов воспроизводили стенозированием брюшной аорты, обеспечивающим уменьшение ее поперечного сечения в 3 раза, по методике Безнак (¹⁴) в модификации А. К. Когана (¹⁵).

Девять животных были забиты через четверо суток после начала гиперфункции при наличии выраженной активации синтеза нуклеиновых кислот и белков в миокарде и увеличении относительного веса желудочков сердца на 35%. Остальных животных забивали через 28 суток после начала гиперфункции—при незначительной активации синтеза и медленном росте миокарда; относительный вес миокарда был увеличен на 74%, т. е. с четвертого по 28 сутки на 39%.

Компенсаторную гиперфункцию левой почки воспроизводили у 15 крыс-самцов посредством удаления правой почки. 10 животных из числа оперированных забивали через 2 суток после начала гиперфункции, при наличии активации синтеза нуклеиновых кислот и белков, а также при трехкратном увеличении митотической активности почечной ткани. При этом относительный вес оставшейся почки был увеличен на 20%. Остальных крыс забивали через 30 суток после начала гиперфункции при незначительной активации синтеза и медленном росте единственной почки. Относительный вес единственной почки был увеличен на 34,6%, т. е. возрос с третьих по тридцатые сутки на 14,6%. В качестве контрольных использовали 10 intactных животных.

Глюкозы—1-с¹⁴ из расчета 15—20 тысяч имп/мин. на 1 г веса животного вводили в вену бедра. Через 4 часа животных забивали деклпитацией. После извлечения и отмывания от крови сердца и почки опытных и контрольных животных навески исследуемых тканей (миокарда левого желудочка и почки) весом по 0,3—0,5 г гомогенизировали. Белки осаждали 10% раствором трихлоруксусной кислоты.

экстрагировали липоиды. Высушенные белки тщательно измельчали и наносили на фольгу весом до 20 мг. Счет радиоактивности в тонком слое белка производили счетчиком БФЛ-25 на установке Б-2 в свинцовом домике. Включение C_{14} в ткань почки и мышцы сердца исследовали в высушенных гомогенатах ткани весом до 16 мг (тонкий слой). Результаты счета выражали в виде отношения радиоактивности 1 г сухого белка (или 1 г сырой ткани) к радиоактивности, введенной на 1 г веса животного.

Результаты опытов, в которых изучалось включение углерода глюкозы в белок миокарда, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Влияние компенсаторной гиперфункции сердца на включение углерода C_{14} глюкозы в ткань и белок миокарда левого желудочка

Миокард интактных животных	Миокард через 4 суток после начала гиперфункции	Миокард через 28 суток после начала гиперфункции	Достоверность различий
Включение C_{14} в ткань миокарда, выраженное в $\frac{\text{имп./мин./г ткани}}{\text{имп./мин./г веса}}$			
0,59 ± 0,100	0,92 ± 0,110	0,74 ± 0,087	$P_{I-II} < 0,05$ $P_{I-III} > 0,1$ $P_{II-III} < 0,1$
Включение C_{14} в белок миокарда, выраженное в $\frac{\text{имп./мин./г белка}}{\text{имп./мин./г веса}}$			
0,095 ± 0,0065	0,215 ± 0,025	0,165 ± 0,021	$P_{I-II} < 0,01$ $P_{I-III} < 0,1$ $P_{II-III} > 0,1$

Из данных таблицы следует, что в аварийной стадии компенсаторной гиперфункции включение углерода глюкозы в ткань миокарда возросло на 56%, а в белок мышцы сердца—на 127%. В следующей стадии, когда гипертрофия миокарда уже достигла значительного развития и дальнейший рост сердечной мышцы протекал значительно медленнее, включение C_{14} в ткань было увеличено на 25%, а в белок этой ткани на 74%.

Таким образом компенсаторная гиперфункция сердца одновременно с ростом миокарда и активацией в нем процессов синтеза влечет за собой резкое увеличение включения углерода глюкозы в белок миокарда. По мере замедления роста сердца и уменьшения интенсивности синтеза нуклеиновых кислот и белков, включение углерода в белок миокарда уменьшается.

Данные о влиянии компенсаторной гиперфункции почки на включение в ткань и белок этого органа углерода глюкозы представлены в табл. 2.

Из материала таблиц следует, что аварийная стадия компенсатор-

ной гиперфункции приводит к увеличению включения углерода глюкозы в ткань почки на 20%, а в белок этой ткани на 15%. Однако эти различия статистически недостоверны. Во второй стадии процесса, когда гипертрофия единственной почки в основном уже осуществилась и дальнейший рост органа происходит весьма медленно, данный сдвиг отсутствует—включение углерода глюкозы в ткань и белок не отличается от контрольного уровня.

Из сопоставления результатов, полученных при исследовании миокарда и почки, следует, что в условиях интактного организма включение углерода глюкозы в суммарный белок почки намного больше, чем его включение в суммарный белок миокарда. После возникновения интенсивной компенсаторной гиперфункции включение углерода глюкозы в белок почечной ткани увеличивается незначительно, а включение в белок миокарда, напротив, резко возрастает.

Таблица 2

Влияние компенсаторной гиперфункции на включение углерода C_{14} глюкозы в ткань и белок почки

Почка интактных животных I	Почка через 2 суток после начала гиперфункции II	Почка через 18 суток после начала гиперфункции III	Достоверность различий
Включение C_{14} в ткань коркового слоя почки, выраженное в $\frac{\text{имп./мин./г ткани}}{\text{имп./мин./г веса}}$			
$0,245 \pm 0,0240$	$0,295 \pm 0,0243$	$0,246 \pm 0,0244$	$P_{I-II} > 0,05$ $P_{II-III} > 0,05$ $P_{I-III} > 0,05$
Включение C_{14} в белок коркового слоя почки, выраженное в $\frac{\text{имп./мин./г белка}}{\text{имп./мин./г веса}}$			
$0,179 \pm 0,0107$	$0,205 \pm 0,0108$	$0,177 \pm 0,0100$	$P_{I-II} > 0,05$ $P_{II-III} < 0,05$

Очевидно, что меченый углерод глюкозы может включаться в белок лишь в составе различных аминокислот, образовавшихся предварительно из продуктов распада глюкозы.

Наблюдавшееся в наших экспериментах включение углерода глюкозы в белок могло быть обусловлено как преобразованием в аминокислоты продуктов гликолиза, например пировиноградной кислоты, в аланин или серин, так и преобразованием в аминокислоты участников лимонно-кислого цикла, например α -кетоглутаровой кислоты в глютаминовую или щавелево-уксусной в аспарагиновую. Таким образом, главный результат экспериментов состоит в том, что в интактном организме продукты распада глюкозы трансформируются в аминокислоты и в таком виде используются для обновления белковых структур внутренних органов. При гиперфункции-гипертрофии данный процесс резко интенсифицируется, причем такая интенсификация осо-

бенно выражена в условиях компенсаторной гиперфункции миокарда. Этот факт хорошо согласуется с наблюдениями Коверта об интенсивном включении глюкозы в другие метаболиты в изолированном сердце собаки.

В экспериментах автора не более половины глюкозы, поглощенной сердцем из перфузионной жидкости, превращалось в CO_2 , пировиноградную и молочную кислоты. Остальные продукты распада глюкозы, по-видимому, были использованы в процессах синтеза. Известно, что пировиноградная и молочная кислоты могут использоваться сердцем различным образом. Карбоксильный углерод окисляется до CO_2 в трикарбоновом цикле, а β -углеродный атом превращается неокислительным путем и возможно включается в определенные соединения, т. е. используется в процессе синтеза.

Тот факт, что в интактном организме углерод глюкозы более интенсивно включается в белок почки, чем в белок сердца, согласуется с положением, что интенсивность обновления белков в мышечной ткани, определяемая по включению меченых аминокислот, значительно ниже, чем интенсивность обновления белков паренхиматозных органов и, в частности, белков почки.

В связи с этим особый интерес приобретает наше наблюдение, что в условиях гиперфункции органа процессы, обеспечивающие использование продуктов распада глюкозы для образования аминокислот и синтеза белка, мобилизуются в миокарде в большей мере, чем в почке. Это явление может быть вызвано двумя различными причинами.

Во-первых, возможно, что при нормальном уровне сократительной функции мощности ферментных систем миокарда, обеспечивающих использование продуктов распада углеводов для синтеза белка, функционируют лишь в незначительной степени. Однако они легко могут быть мобилизованы при увеличении уровня функции и быстром росте мышечной ткани. В почке же эти ферментные системы постоянно функционируют на уровне, близком к максимуму, и возможности их дополнительной мобилизации ограничены.

Во-вторых, особенности использованных нами экспериментальных моделей, а также функциональная специфика сердца и почки могли привести к тому, что при компенсаторной гиперфункции этих органов интенсивность функционирования структур миокарда оказалась увеличенной в большей мере, чем интенсивность функционирования структур единственной почки.

В результате активации синтеза белков и нуклеиновых кислот в миокарде и, в частности, использования в синтезе продуктов распада глюкозы, была выражена больше, чем в почке.

Обе эти возможности требуют экспериментальной проверки путем сопоставления включения углерода глюкозы с включением меченых аминокислот (¹) и изучения активности ферментов, осуществляющих аминирование и трансаминирование (²) в процессе компенсаторной гиперфункции внутренних органов.

На основе имеющегося фактического материала мы можем заключить, что использование продуктов распада глюкозы для синтеза белка играет определенную роль в пластическом обеспечении физиологической функции изучавшихся внутренних органов. При увеличении уровня специфической функции органов и развитии гипертрофии интенсивность данного процесса закономерно возрастает.

Институт нормальной и патологической
физиологии Академии медицинских наук СССР

Մ. ՅԱ. ՄԱՅՁԵԼԻՍ, Ա. Գ. ԲԱԶԱՐՋՅԱՆ ԵՎ Յ. Զ. ՄԵՅԵՐՍՈՆ

Գլյուկոզային ճեղքումից առաջացած հյուսքերի օգտագործումը սպիտակուցի սինթեզի պրոցեսում որոշ օրգանների կոմպենստոր հիպերֆունկցիայի ժամանակ

Արտաթանրի նպատակն է ուսումնասիրել սրտի և երիկամների կոմպենստոր գերֆունկցիայի պրոցեսում գլյուկոզայի քայքայումից առաջացած նյութերի օգտագործումը սպիտակուցների սինթեզի ժամանակ:

Սրտի կոմպենստոր գերֆունկցիա է առաջացվել սրտիայնի աորտայի սեղման, իսկ երիկամին՝ մի կողմից երիկամի հեռացման միջոցով:

Փորձերի արդյունքների մասին դադարաբեկ կազմվում անմշակ հյուսվածքի և գերֆունկցիայի պայմաններում մնացած սրտի մկանի (ձախ սրտախոռոչի) և երիկամի սպիտակուցների մեջ C^{14} գլյուկոզայի ներարկման հիման վրա: Վերջինս ներարկվել է ազդարան երակի մեջ 15—20 հազ. իմպուլս Կենդանու մեկ դրամ քաշին: Գերֆունկցիայի ենթարկված կենդանիները զլխադատվել են օպերացիայից 4 և 28 օր, իսկ գլյուկոզայի ներարկումից 4 ժամ հետո: Մինչդեռ երիկամի գերֆունկցիայի զեպրում—օպերացիայից 2, 18 օր, իսկ գլյուկոզայի հեռացումից 4 ժամ հետո:

Փորձի արդյունքները ցույց են տրված 1 և 2 աղյուսակներում: C^{14} կարող է ներթափանցել սպիտակապույրի մեջ միայն այն զեպրում, երբ այն անցել է ամինոթթուների քաղաղրության մեջ: Դերֆունկցիայի հիպերտրոֆիայի ժամանակ նկատվում է այդ պրոցեսի խիստ ուժեղացում, հատկապես սրտի մկանի գերֆունկցիայի ժամանակ: Այդ բացատրվում է նրանով, որ մկանային հյուսվածքների սպիտակուցների վերանորոգման ինտենսիվությունն ավելի ցածր է, քան երիկամների սպիտակուցների վերանորոգման ինտենսիվությունը:

Առաջված փաստական տվյալների հիման վրա կարելի է եզրակացնել, որ գլյուկոզայի քայքայումից առաջացած նյութերի օգտագործումը սպիտակուցի սինթեզում կատարում է որոշակի դեր ուսումնասիրվող օրգանների ֆիզիոլոգիական ֆունկցիայի պլաստիկ պրոցեսը ապահովելու տեսակետից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Ф. З. Меерсон, О взаимосвязи физиологической функции и генетического аппарата клетки, 1963. 2 Ф. З. Меерсон, Компенсаторная гиперфункция и недостаточность сердца, 1960. 3 А. Г. Базарджян, Е. М. Лейкина, К. К. Антипова, ДАН СССР, 155, № 3 (1964). 4 Ройс, Proc. Soc. Exp. Biol. and Med. 113, № 4, 1046—48, 1963. 5 Д. Кесснер, Е. Томас, Nature, 190, 4771, 171, 1961. 6 Д. Голбрук, Дж. Эванс, Exp. Cell. Res. 28, № 1, 120, 1962. 7 Н. Г. Климан, А. Эрслев, Proc. Soc. Exp. Biol. Med. 112, № 2, 338, 1963. 8 Н. Филала, Neoplasma 10, № 1, 1963. 9 Ф. З. Меерсон, Н. С. Колесина и др., ДАН СССР, 155, № 3 (1964). 10 Ф. З. Меерсон, Г. И. Марковская, Cor. of Vasa. № 2, 1963. 11 Г. Г. Амарантова, В кн. «Девятая конференция молодых ученых Института физиологии АМН СССР», 1963. 12 Ф. З. Меерсон, М. Е. Егорова, Вопросы медицинской химии, № 7, 1955. 13 Ф. З. Меерсон, Вопросы патофизиологии недостаточности сердца, 1962. 14 М. Безнак, J. Physiol. 120, № 3, 23, 1953. 15 А. Х. Коган, Бюл. экспериментальной биологии и медицины, № 1, стр. 112—114, 1961.

О. Г. Баклаваджян

О механизме действия Н- и М-холинолитических веществ на биоэлектрическую активность головного мозга

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Мирзояном 11 IV 1964)

Активация электроэнцефалограммы (ЭЭГ) под влиянием ацетилхолина, никотина, эзерина и других холиномиметических веществ и наличие двустороннего антагонизма между ними и антиацетилхолиновыми веществами доказывает участие холинергических структур в восходящей активирующей системе РФ. Окончательно не решен вопрос о том, относятся ли холинергические структуры коры и РФ среднего мозга к типу Н- или М-холинорецепторов по классификации С. В. Аничкова (¹). П. П. Денисенко (^{2,3}) полагает, что Н-холинореактивные системы локализованы преимущественно на уровне коры. М-холинореактивные — на уровне подкорки. В этих исследованиях в качестве одного из Н-холинолитиков применялся пентафен, который, однако, обладает и выраженным М-холинолитическим действием (⁴). Имеются данные (⁵), что десинхронизация, вызванная никотином, исчезает при перерезке ствола мозга впереди бугров четверохолмия (премезенцефалическая перерезка), что указывает на мезенцефалический уровень действия никотина. На основании этих данных Р. Ю. Ильюченко и Р. У. Островская полагают, что структуры РФ среднего мозга, участвующие в механизме активации ЭЭГ никотином, по своему характеру являются Н-холинореактивными. В исследованиях Р. Ю. Ильюченко и Г. Д. Смирнова (⁶) установлено, что М-холинолитические вещества при местной аппликации на поверхности коры вызывают появление медленных волн.

Для выяснения механизма действия некоторых центральных холинолитиков с избирательным Н- и М-холинолитическим действием и для определения типа холинорецептивных структур РФ среднего мозга и коры головного мозга в данной работе изучено действие холинолитиков ганглерона, арпенала и атропина на спонтанную ЭЭГ коры и РФ среднего мозга, на реакцию „пробуждения“ ЭЭГ, на реакцию „вовлечения“ и на вызванные потенциалы. Ганглерон и арпенал, созданные коллективом Института тонкой органической химии под руководством А. Л. Миджояна, обнаруживают высокую фармакологи-

ческую активность. Н. Е. Акопян (7) обнаружила избирательное действие ганглера на проведение нервного возбуждения в вегетативных ганглиях. В исследованиях С. А. Мирзояна и сотр. (8,9) доказано, что действие ганглера на рефлекторные реакции в значительной мере обусловлено его влиянием на центральную нервную систему.

Арпенал блокирует как Н-, так и М-холинорецептивные системы мозга с преимущественным Н-холинолитическим действием (10).

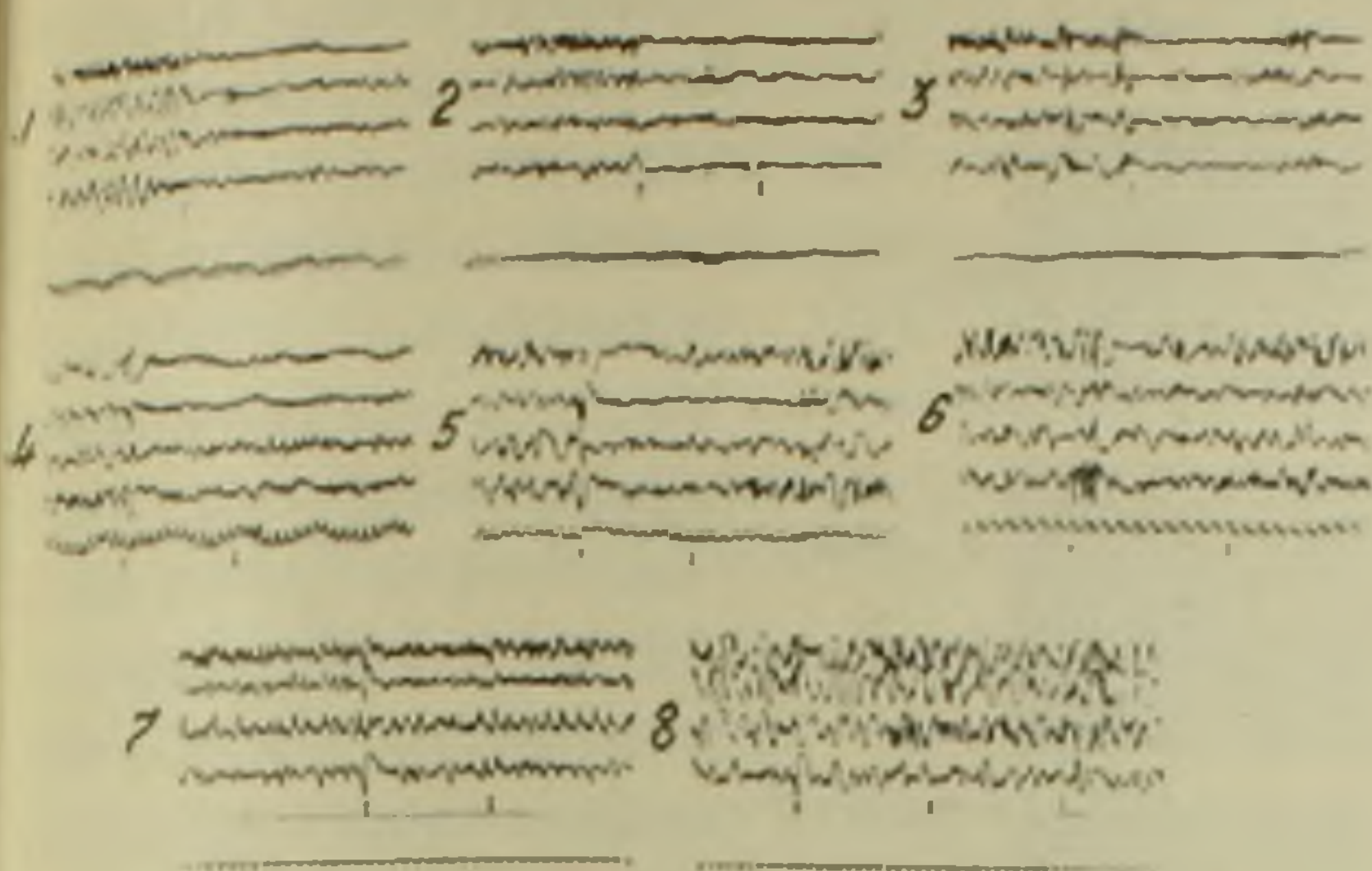
Опыты проведены на 45 неанестезированных кошках, обезвреженных прокураном. Изучено влияние в/в введения Н- и М-холинолитиков на ЭЭГ коры и РФ и на реакцию „вовлечения“, вызванную низкочастотным (6 гц) раздражением неспецифического ядра таламуса *n. ventralis anterior*. Влияние препаратов на ЭЭГ изучено и на бодрствующих кошках при помощи хронически вживленных множественных электродов. В серии опытов изучено влияние местной аппликации препаратов на первичные и вторичные ответы коры, вызванные раздражением седалищного нерва.

У кураризированных кошек в условиях острого опыта без наркоза в фоновой ЭЭГ преобладают волны средней амплитуды (30–100 мкв) с частотой 4–10 в 1 сек. Иногда такая исходная активность чередуется периодами активации в виде спонтанной десинхронизации с появлением низкоамплитудных, высокочастотных колебаний потенциалов. В ряде случаев наблюдается постоянная десинхронизация в исходной ЭЭГ коры и РФ. Электрическое раздражение седалищного нерва, а также раздражение РФ среднего мозга импульсами частотой 200 гц вызывает длительную активацию мозга типа реакции десинхронизации (фиг. 1, 1).

Внутривенное введение ганглера в дозе 4 мг/кг вызывает иногда появление медленных волн в ЭЭГ в течение первых 3–5 минут. Поскольку эти изменения ЭЭГ происходят на фоне значительного падения артериального давления, они являются, вероятно, отражением нарушения мозгового кровообращения. По нормализации кровяного давления медленные волны исчезают, восстанавливается исходная ЭЭГ и афферентное раздражение вызывает такую же десинхронизацию как и до введения препарата (фиг. 1, 2). Дополнительное введение ганглера в дозе 5 мг/кг вызывает такой же эффект. Иногда отмечается незначительное ухудшение реакции пробуждения—пороговое раздражение седалищного нерва вызывает в этих случаях десинхронизацию менее выраженную и менее продолжительную по сравнению с нормой (фиг. 1, 3). Несмотря на то, что в течение опыта общая доза ганглера доводится до 9–10 мг/кг внутривенно, восходящая активирующая система РФ не блокируется Н-холинолитиком. Это же наблюдается в хронических опытах при внутримышечном введении ганглера в дозе 10 мг/кг.

Н- М-холинолитическое вещество арпенал в тех же дозах вызывает более выраженные изменения в биоэлектрической активности коры и РФ. Внутривенное введение арпенала в дозе 4 мг/кг вызы-

яет появление медленных волн высокой амплитуды как в коре, так и в РФ (фиг. 1, 5). При электрическом раздражении седалищного нерва или РФ среднего мозга возникает отчетливая реакция десинхронизации, которая, однако, имеет место лишь в момент действия раздражения.



Фиг. 1. Влияние Н- и М-холинолитиков на активацию ЭЭГ коры и РФ среднего мозга, вызванную электрическим раздражением седалищного нерва. Приведены результаты трех острых опытов (1—3, 4—6, 7—8). Значение кривых (сверху вниз): ЭЭГ лобной, теменной, затылочной областей коры мозга и РФ среднего мозга, ЭКГ.

1—контрольная запись; 2—через 10 минут после введения 4 мг/кг ганглерона в вену; 3—через 10 минут после дополнительного введения 5 мг/кг ганглерона в вену (общая доза 9 мг/кг); 4—контрольная запись другого опыта; 5—через 12 минут после введения 4 мг/кг арпенала в вену; 6—через 15 минут после дополнительного введения 5 мг/кг арпенала в вену (общая доза 9 мг/кг); 7—контрольная запись другого опыта; 8—через 10 минут после введения 1.5 мг/кг атропина в вену.

При электрическом раздражении периферических нервов (фиг. 1, 8) и РФ среднего мозга.

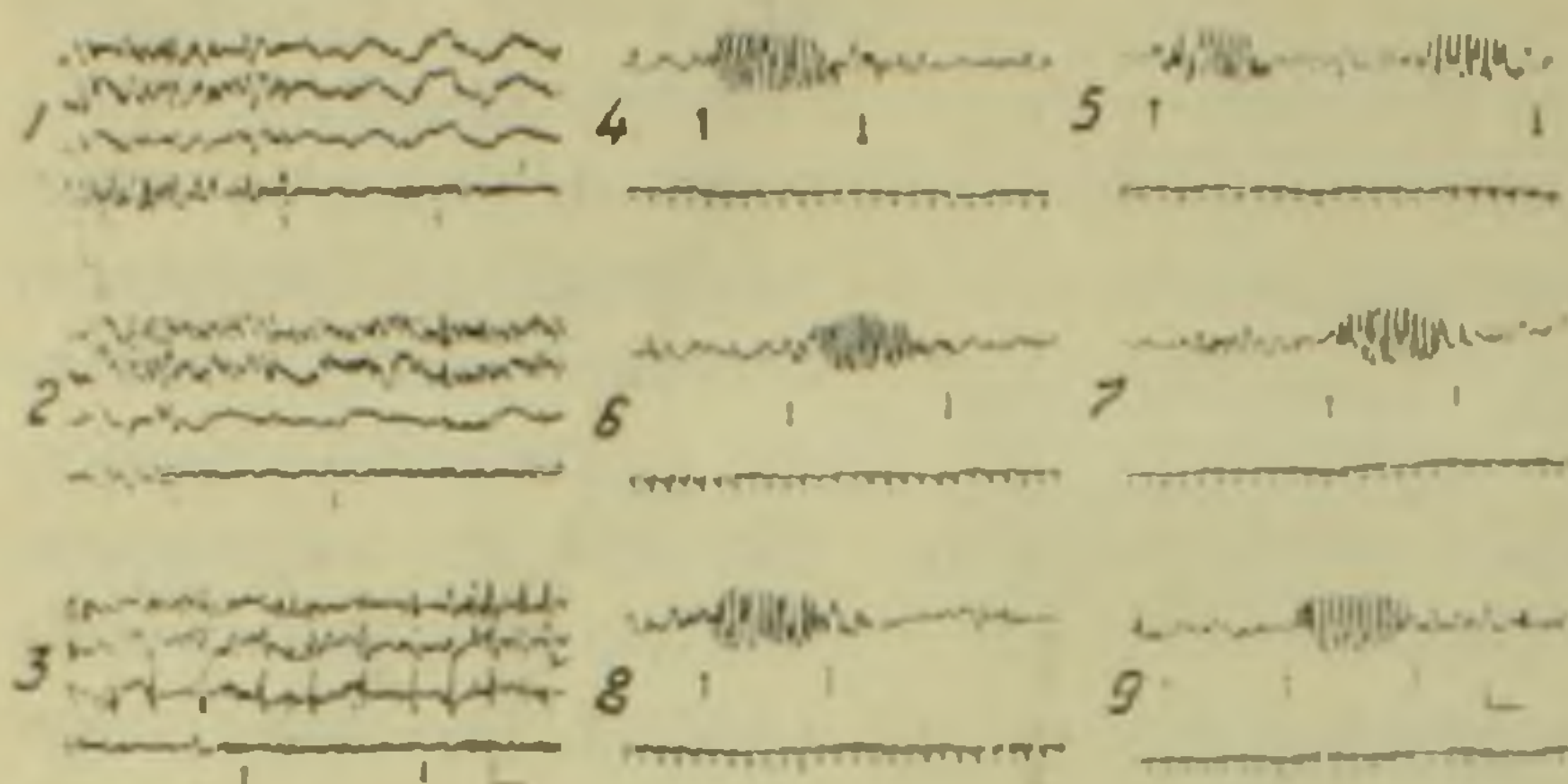
Таким образом применение холинолитических препаратов с избирательным Н- и М-холинолитическим действием дало возможность выявить качественное различие в их действии на электрическую активность мозга. В ряде ганглерон-арпенал-атропин действие на ЭЭГ усиливается по мере усиления мускаринолитического действия препарата. Следовательно, можно полагать, что в активирующей системе РФ среднего мозга преобладают М-холинореактивные структуры.

Существует ли качественное различие в действии Н- и М-холинолитиков на диффузные неспецифические структуры таламуса, которые осуществляют преимущественное влияние на ассоциативную кору? Из литературных данных (11) известно, что атропин не подавляет реакции вовлечения, вызванной низкочастотным раздражением неспецифических ядер таламуса. Эти данные были подтверждены нами при

Дополнительное введение арпенала в дозе 5 мг/кг внутривенно вызывает обычно полную блокаду реакции десинхронизации на периферическое раздражение (фиг. 1, 6) и даже электрическое раздражение РФ иногда не вызывает активации ЭЭГ. Такой же эффект оказывает арпенал в хронических опытах.

Атропин вызывает еще более выраженные изменения в ЭЭГ. При внутривенном введении атропина в дозе 1—2 мг/кг в ЭЭГ коры и РФ появляются медленные волны (1—3 в 1 сек.) большой амплитуды (100—500 мкВ), которые не подавляются при надпороговом электрическом раздражении периферических нервов (фиг. 1, 8) и РФ среднего мозга.

внутримышечном введении атропина (фиг. 2, 9). Внутривенное введение атропина в дозе—1,5—3 мг/кг вызывает заметное подавление реакции „вовлечения“. Неспецифические структуры фазовой активации мозга мало чувствительны к действию Н-холинолитиков. Ганглерон и арпепал в дозе 10 мг/кг



Фиг. 2. 1—3—влияние местной аппликации холинолитиков на электрокортикограмму. Значение кривых (сверху вниз): ЭЭГ лобной левой, теменной левой, затылочной левой, теменной правой областей коры.

1—контрольная запись ЭЭГ и реакция „пробуждения“ при раздражении седлищного нерва; 2—через 2 минуты после 4-минутной местной аппликации ганглерона (лобная область); арпенала (теменная область) и атропина (затылочная область); 3—через 10 минут после вторичной аппликации препаратов; 4—9—влияние Н- и М-холинолитиков на реакцию „вовлечения“; 4—контрольная запись; 5—через 20 минут после внутримышечного введения 10 мг/кг ганглерона; 6—контрольная запись; 7—через 25 минут после внутримышечного введения 10 мг/кг арпенала; 8—контрольная запись; 9—через 30 минут после внутримышечного введения 10 мг/кг атропина.

действию М- и Н-холинолитических веществ по сравнению с неспецифической системой восходящей активирующей РР и в определенных условиях подавляется только веществами М-холинолитического типа.

Для выяснения чувствительности корковых синапсов к действию антихолинергических препаратов Н- и М-холинолитического типа в серии опытов изучено влияние местной аппликации ганглерона, арпенала и атропина на электрокортикограмму и на вызванные потенциалы коры. Установлено, что аппликация этих препаратов на поверхности коры вызывает появление медленных волн в ЭЭГ только в участке аппликации, в то время как в соседнем контрольном участке продолжает отводиться такая же активность, как в норме. Медленные волны наиболее выражены в зонах приложения ганглерона и арпенала (фиг. 2, 2). В этих участках наблюдается значительное подавление реакции десинхронизации. Повторное применение препаратов подавляет реакцию десинхронизации и в зоне аппликации атропина. В этом участке на 10—15 минуте после аппликации регистрируются

арпенал в дозе 10 мг/кг внутримышечно не вызывают заметных изменений в реакции вовлечения как при их самостоятельном применении в отдельных опытах, так и при их комбинированном применении в одном и том же опыте (фиг. 2, 5, 7). На бодрствующих кошках, обездвиженных прокураном или дитилином, внутривенное введение ганглерона в дозе 3—6 мг/кг также не вызывает заметных изменений в реакции „вовлечения“. Следовательно, нужно полагать, что неспецифическая таламокортикальная афферентация менее чувствительна к

спонтанные высокоамплитудные стрихниноподобные спайки, возникающие регулярно в 1,5–2 сек раз (фиг. 2, 3).

Данные этих опытов дают основание полагать, что поверхностные структуры коры чувствительны к действию Н- и М-холинолитических веществ и имеется качественное различие в действии Н- М-холино-

гиков на корковые синапсы.

Эти данные были подтверж-

дены в опытах с регистрацией

вызванных потенциалов. Изу-

чено влияние местной аппли-

кации ганглера, арпенала и

атропина как при их самостоя-

тельном применении в различ-

ных опытах, так и при их

последовательном применении

в одном и том же опыте. Ре-

зультаты однотипны во всех

случаях. Местная аппликация

1,5% раствора ганглера в

зоне первичных ответов вызы-

вает подавление отрицатель-

ной фазы первичного ответа и

некоторое увеличение поло-

жительной (фиг. 3, 2). Эффект

ганглера напоминает не-

сколько эффект гамма-амино-

масляной кислоты, которая,

согласно некоторым авторам,

блокирует избирательно аксо-

дендритические возбуждаю-

щие синапсы коры мозга (12).

Рисунок 3 иллюстрирует так-

же результаты другого опыта

с арпеналом. В серии экспери-

ментов с изучением эффекта

местной аппликации арпенала

установлено, что подавление отрицательной фазы вызванного потен-

циала под влиянием арпенала менее выраженное по сравнению с ганг-

лероном (фиг. 3, 5). Эффект атропина диаметрально противоположен

эффекту ганглера. Под действием атропина происходит постепенное

увеличение отрицательного потенциала и „атропиновый“ потенциал со

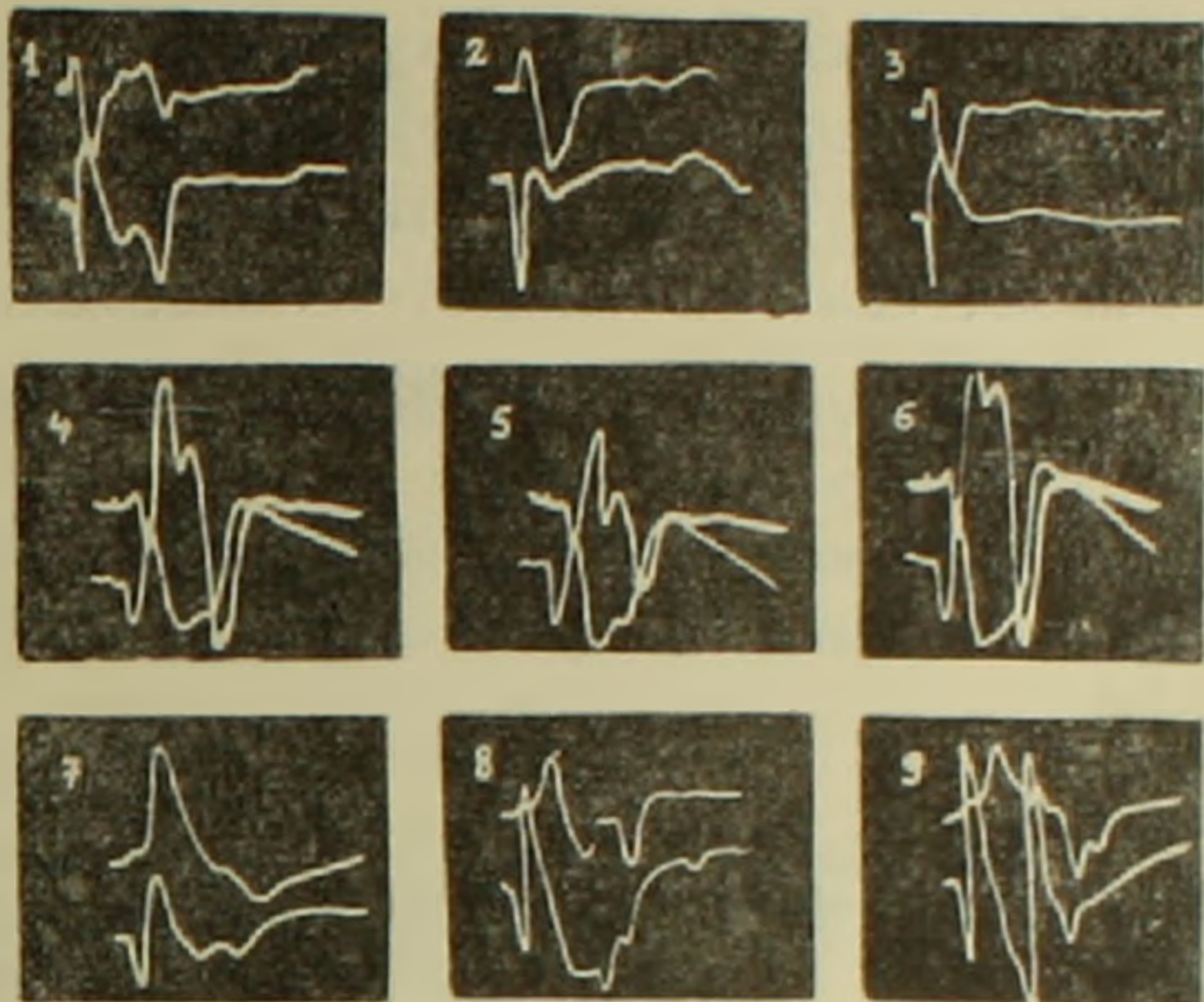
своим выраженным отрицательным пиком, иногда выходящим за эк-

ран осциллографа, напоминает стрихниновый потенциал (фиг. 3, 8, 9).

Усиление отрицательной фазы первичного ответа под влиянием атро-

пина Чатфильд и Пурпура (13) объясняют наличием в коре ингиби-

рующих, гиперполяризующих синапсов, чувствительных к атропину.



Фиг. 3. Влияние местной аппликации Н- и М-холинолитиков на первичные ответы второй соматосензорной зоны коры, вызванные одинарным электрическим раздражением седалищного нерва. Во всех осциллограммах: верхняя кривая—вторичный ответ в *gyr. lateralis anterior*; нижняя кривая—первичный ответ в *gyr. ectosylv. anter.* Аппликация препаратов произведена в зоне первичных опытов. Приведены результаты трех опытов. 1—контрольная запись; 2—после ганглера; 3—восстановление после промывания коры физиологическим раствором; 4—контрольная запись; 5—после арпенала; 6—восстановление; 7—контрольная запись; 8—после атропина; 9—после промывания физиологическим раствором. Отклонение луча вверх—отрицательное колебание. Отметка времени—10 м сек. Масштаб усиления—100 мкв.

При интерпретации действия ганглерона и атропина на вызванные потенциалы мы исходим из положения, что поверхностно-отрицательная волна первичного ответа представляет постсинаптический дендритический потенциал (¹⁴) и действие применяемых холинолитических препаратов на него рассматривается нами как действие на возбуждающие, деполяризующие и тормозящие, гиперполяризующие аксодендритические синапсы. Видимо корковые синапсы различного электрогенеза (возбуждающие и ингибирующие) проявляют различную чувствительность к Н- и М-холинолитическим веществам. В коре мозга имеются, вероятно, как Н-, так и М-холинореактивные структуры с преобладанием видимо Н-холинорецепторов в возбуждающих аксодендритических синапсах коры.

Институт физиологии им. академика Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Հ. Գ. ԲԱՎԼԱԴԱՆՅԱՆ

Պիրազինի բիոէլեկտրական ակտիվության վրա Н- և М- խորինովիտիկ հյուսքերի ազդեցության մեխանիզմի մասին

Н- և М- ընտրողական հատկությամբ խորինովիտիկ ազդեցությամբ (զանգվերոն, արփենա, և ատրոպին) ֆարմակոլոգիական պրեպարատների օգտագործմամբ հաստատվեց միջին ուղեղի ինքնաշնչական գոյացությունում գլխավորապես М- խորիններդիկ կառուցվածքի կոնցիպիան:

Թալամուսի ոչ սպեցիֆիկ կորիզները, որի ցածր հաճախականության էլեկտրական գրգռումը առաջացնում է «ներգրավման» («вовлечения») ուղեկցիան, քիչ է զգայուն խորինովիտիկ պրեպարատների ազդեցության: Ատրոպինի 1,5—3 մգ/կգ դոզայով ներվենային ներարկումը առաջացնում է «ներգրավման» ուղեկցիայի նկատելի ճնշում: Ուսումնասիրելով խորինովիտիկների ազդեցությունը հրահրված պոտենցիալների և էլեկտրոկեղևադրի վրա պարզվել է, որ ուղեղի կեղևում գոյություն ունեն ինչպես Н, այնպես և М խորինոռեակտիվ կառուցվածքներ, որոնցից ըստ երևույթին կեղևի գրգռող շրեկոացող արուղենտրիկ սինապսներում գերակշռում են Н խորինոռեակտորները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. В. Аничков, М. А. Гребенкина, Бюлл. эксперим. биол. и мед. № 9, стр. 28, 1947. ² П. П. Денисенко, «Фармакол. и токсикология», № 1, стр. 15, 1962. ³ П. П. Денисенко, В кн. Фармакология новых седативных средств и их клинич. применение. Медгиз, 1962. ⁴ П. П. Денисенко, Физиолог. журн. СССР, № 2, стр. 160, 1961. ⁵ Р. Ю. Ильюченко, Р. У. Островская, Бюлл. эксперим. биол. и мед. № 7, стр. 43, 1962. ⁶ Р. Ю. Ильюченко, Г. Д. Смирнов, Физиолог. журн. СССР, № 10, стр. 1141, 1962. ⁷ Н. Е. Акопян, В кн. Ганглерион и опыт его клинического применения, стр. 51, Ереван, 1959. ⁸ С. А. Мирзоян, Э. С. Габриелян, Труды III объедин. научн. сессии Тбилисского, Азербайджанского и Ереванского гос. мед. ин-тов. Тбилиси, 1962. ⁹ С. А. Мирзоян, С. В. Довлетьян, «Фармакол. и токсикология», № 2, 1955. ¹⁰ М. Я. Михельсон и соавт. В сборнике совещания, посвященного препарату арпенал и опыт его клинического применения, Ереван, 1963. ¹¹ V. G. Longo, Electroencephalographic atlas for Pharmacol. Research, Amsterdam, 1962. ¹² D. P. Purpura, M. Girado and H. Grundfest, Science, 125, 1200, 1957. ¹³ P. Chatfield and D. Purpura, EEG & Clin. Neurophysiol., 6, 1954. ¹⁴ А. И. Ройтбак, Биоэлектрические явления в коре больших полушарий, Тбилиси, 1955.

