ՀՍՍՀ ԳԱ
Տեղեկագիր

ՖԻԶԻԿԱ
ФИЗИКА

1970

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 309—319 (1970)

К ВОПРОСУ О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

О. С. МЕРГЕЛЯН, С. Н. СТОЛЯРОВ

В работе обсуждается вопрос о выборе тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде. Ввиду того, что вариационный принцип дает неоднозначное выражение для тензора энергии-импульса, делается попытка получить однозначное выражение, исходя из физических соображений. Показано, что если в безграничной среде в любой координатной системе выполняется соотношение $\vec{S} = W \cdot \vec{V}_g$, то в такой среде необходимо пользоваться тензором Минковского.

1. Вопрос об определении вида тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде обсуждается в течение более чем полувека [1]. Для установления однозначного выражения для этого тензора предпринимались многочисленные попытки как с помощью усреднения микроскопических выражений для действующих на диэлектрик сил [1]—[2], так и с помощью применения феноменологического вариационного принципа [3] (см. также ссылки на работы в [4]). В настоящее время из многих предлагавшихся видов тензора энергии-импульса T_{ik} наиболее распространенными остались лишь два, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками: тензор Абрагама T_{ik}^{A} и тензор Минковского T_{ik}^{M}, которые в покоящейся среде имеют вид [1]

$$T_{ik}^{A} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\nu}^{A} & -ic\vec{G}^{A} \\ -\dfrac{i}{c}\vec{S}^{A} & W^{A} \end{pmatrix}; \qquad T_{ik}^{M} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\nu}^{M} & -ic\vec{G}^{M} \\ -\dfrac{i}{c}\vec{S}^{M} & W^{M} \end{pmatrix}; \tag{1}$$

где

$$T_{\alpha\nu} = \frac{1}{8\pi}\left\{[(E_\alpha D_\nu + E_\nu D_\alpha) + (H_\alpha B_\nu + B_\alpha H_\nu)] - (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})\delta_{\alpha\nu}\right\},$$

$$\vec{G}^{A} = \frac{1}{c^2}\vec{S}^{A}; \quad \vec{S}^{A} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]; \quad W^{A} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}), \tag{2}$$

$$T_{\alpha\nu}^{M} = \frac{1}{8\pi}\left\{(E_\alpha D_\nu + H_\alpha B_\nu) - \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})\right\},$$

$$\vec{G}^{M} = \frac{1}{4\pi}[\vec{D}\vec{B}]; \quad \vec{S}^{M} = \vec{S}^{A}; \quad W^{M} = W^{A}. \tag{3}$$

Здесь индексы $i, k = 1, 2, 3, 4$ и $\alpha, \nu = 1, 2, 3$, а векторы индукции $\vec{D}$ и $\vec{B}$ связаны с полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ известными соотношениями [1].

Величины W и $\vec{S}$ определяют соответственно плотность и поток энергии электромагнитного поля в среде, а вектор $\vec{G}$ электромагнитный импульс этого поля. Тензоры $T_{\alpha\nu}$ связаны с теми напряжениями, которые возникают в среде под действием электромагнитного поля.

Приведенные выше два тензора в покоящейся среде отличаются только видом тензоров натяжений $T_{\alpha\nu}$ и различным характером связи векторов $\vec{G}$ и $\vec{S}$. (Отметим, что в покоящейся изотропной среде тензоры натяжений у Минковского и Абрагама также совпадают и различие сводится только к выражению для импульса поля). Если в покоящейся среде это различие реально проявляется весьма редко и приводит к малым эффектам, то в движущихся средах эти различия становятся весьма существенными. В частности, для среды, движущейся со скоростью $\vec{U}=c\vec{\beta}$, выражения для плотности W и потока $\vec{S}$ энергии поля имеют вид [1]

$$\vec{S}^A=\frac{c}{4\pi}\left\{[\vec{E}\vec{H}]+\frac{\vec{\beta}}{1-\beta^2}(\vec{\beta},\,[\vec{D}\vec{B}]-[\vec{E}\vec{H}])\right\};$$
$$\vec{W}^A=\frac{1}{8\pi}\left\{(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B})+\frac{(\vec{\beta},[\vec{D}\vec{B}]-[\vec{E}\vec{H}])}{1-\beta^2}\right\}; \tag{4а}$$

$$\vec{S}^M=\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}],\quad W^M=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}). \tag{4б}$$

Как видно из (4б), выражения для потока $\vec{S}^M$ и плотности энергии W^M в движущейся среде сохраняют свой вид (то же можно сказать о $T_{\alpha\nu}$ и $\vec{G}$).

Отметим, что микроскопический подход к такой сугубо макроскопической проблеме, как правило, приводит к громоздким и трудно анализируемым выражениям (см. напр., [5]). По-видимому, более простым и наглядным является или феноменологический подход к данной проблеме, исходя из общих принципов, или анализ данного вопроса на конкретном примере среды, например, на примере движущейся полностью ионизованной плазмы.

В данной работе мы покажем, что применение вариационного принципа к данной проблеме не говорит в пользу однозначного выбора тензора Абрагама (2), как это утверждалось в работе [3], а скорее указывает на большой произвол в выборе тензора T_{ik}. Кроме того, мы приведем некоторые соображения, которые говорят в пользу применения в ряде конкретных электродинамических расчетов тензора T_{ik} в форме Минковского (3).

2. Применим вариационный прицип для вычисления тензора энергии и импульса в среде, характеризуемой антисимметричными тензорами полей F_{ik} и индукций H_{ik} вида [1]

$$i\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43});\ \vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12});\ i\vec{D} = (H_{41},\ H_{42},\ H_{43});$$

$$\vec{H} = (H_{23},\ H_{31},\ H_{12}) \tag{5}$$

в той форме, в которой он был применен при рассмотрении электромагнитного поля в гравитационном поле, т. е. в неэвклидовом пространстве с метрикой g_{ik} [6],

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}\right)} - \frac{\partial}{\partial g^{ik}}(\sqrt{-g}\,\Lambda), \tag{6}$$

где Λ — плотность функции Лагранжа в неэвклидовом пространстве с метрикой g_{ik}, детерминант которой равен $(-g)$.

Поскольку мы в дальнейшем будем иметь дело с инерциальной (галилеевой) системой координант, в которой $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, а остальные $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то тогда первый член в правой части выражения (6) обращается в нуль и мы имеем

$$T_{ik} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial g^{ik}}(\sqrt{-g}\Lambda). \tag{7}$$

Выберем теперь функцию Лагранжа Λ в среде в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}\,F_{pt}H^{pt}. \tag{8}$$

С помощью известных формул связи ко- и контравариантных компонент тензоров

$$H^{pt} = H_{em}\,g^{pl}\,g^{tm} \tag{9}$$

запишем функцию Лагранжа в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}\,F_{pt}H_{em}g^{pl}g^{tm}. \tag{10}$$

Варьируя функцию Λ, даваемую формулами (8) — (10), авторы работ [3], [12], [13] и ряда других получали тензор энергии-импульса Абрагама (формула (2)). При этом они исходили из требования симметрии T_{ik}.

Подставляя (10) в формулу (7), мы получим следующее выражение

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(F_i^lH_{kl} + H_i^lF_{kl}\right) - \frac{1}{4}\,F_{lm}H^{lm}g_{ik}\right\}. \tag{11}$$

При этом были использованы соотношения $\dfrac{\partial g}{\partial g^{ik}} = -gg_{ik}$ и $\dfrac{\partial g^{pl}}{\partial g^{ik}} =$

$=\frac{1}{2}\{g_l^p g_k^l + g_k^p g_l^l\}$, а также известные формулы перехода от ко- к контравариантным компонентам тензоров и обратно [6], аналогичные (9). Компоненты H_l^l и F_l^l являются смешанными компонентами тензоров. Заметим, что в галилеевой (инерциальной) системе координат нет различия между ко- и контр-, а также и смешанными компонентами тензоров, т. е. все индексы будут опущены вниз и, кроме того, g_{ik} ведет себя в T_{ik} как δ_{ik}.

Рассмотрим теперь тензор T_{ik} из (11) в галилеевой системе координат,

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(F_{il}H_{kl}+H_{il}F_{kl})-\frac{1}{4}F_{lm}H_{lm}\delta_{ik}\right\}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что полученный тензор является симметричным, однако он не совпадает с тензором Абрагама, хотя мы использовали тот же лагранжиан, что и авторы [3], [12], [13]. Не совпадает наше выражение и с тензором Минковского.

Это означает, что выбор тензора T_{ik} из вариационного принципа осуществляется неоднозначно. Такая неоднозначность связана с тем, что физический смысл имеют не компоненты этого тензора, а сила f_i, определяющая действие поля на среду. Она равна $f_i=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ и поэтому мы всегда можем определить T_{ik} с точностью до тензора $g_{ik}(x)$ вида $\frac{\partial \Psi_{ikl}}{\partial x^l}$, дивергенция от которого обращается в нуль (это будет тогда, когда Ψ_{ikl} антисимметричен по индексам i; k).

Иными словами, вид тензора T_{ik} зависит от тех условий или ограничений, которые накладываются на него при выборе этого тензора. В частности, если мы наложим условие симметричности ($T_{ik}=T_{ki}$) то это не значит, что мы автоматически получаем тензор Абрагама (2), как это утверждалось в работе [3]. В нашем случае условие симметрии привело к тензору, у которого $T_{\alpha\gamma}$ совпадает с Абрагамовским выражением, а для $\vec{S}$ и $\vec{G}$ имеем

$$\vec{G}=\frac{1}{c^2}\vec{S}=\frac{1}{8\pi c}\{[\vec{E}\vec{H}]+[\vec{D}\vec{B}]\}. \tag{12a}$$

Таким образом, однозначный выбор вида тензора энергии-импульса поля в среде должен, на наш взгляд, осуществляться наложением на этот тензор, т. е. на его компоненты, определенных условий. В зависимости от характера наложенных условий и будет определяться характер тензора T_{ik}.

В покоящихся средах имеет место соотношение между потоком электромагнитной энергии $\vec{S}$, ее плотностью W и групповой скоростью $\vec{V}_g$,

$$\vec{S} = W \cdot \vec{V}_g. \tag{13}$$

Это соотношение в покоящейся среде не связано с выбором тензора энергии-импульса, так как в покоящейся среде

$$T^A_{4k} = T^M_{4k}.$$

Нашей целью будет показать, что для безграничной среды, у которой соотношение (13) выполняется и в том случае, если она движется со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$, в конкретных расчетах надо пользоваться тензором энергии-импульса Минковского.

3. Докажем теперь, что соотношение (13) выполняется в движущейся среде только для $\vec{S}$ и W вида (3). Для этого рассмотрим однородную и изотропную среду с диэлектрической постоянной $\varepsilon\,(\mu=1)$, измеренной в системе ее покоя, движущуюся со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$. Дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн в такой среде имеет вид [7]

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2}(\vec{k}\,\vec{u} - \omega)^2 = 0, \tag{14}$$

где k — волновой вектор волны частоты ω, а диэлектрическая постоянная ε, вообще говоря, является функцией частоты волны ω' в системе покоя среды, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\omega')$, где

$$\omega' = \frac{\omega - \vec{k}\,\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15}$$

В пространстве волновых векторов $\vec{k}$ или в пространстве показателей преломления $\vec{n} = \frac{ck}{\omega}$ уравнение (14) представляет некоторую поверхность. Тогда групповая скорость $\vec{V}_g = \frac{d\omega}{dk}$ волн в такой среде направлена по нормали к поверхности волновых векторов (14) и ее направление совпадает с направлением радиуса-вектора, проведенного от источника в точку наблюдения [8].

Направление потока вектора Пойнтинга $\vec{S}$ по отношению к поверхности волновых векторов (14) можно определить следующим образом [11].

Выпишем уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн с $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B} \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$,

$$\vec{B} = [\vec{n}\,\vec{E}],\ \vec{D} = [\vec{H},\ \vec{n}],\ [\vec{n}\,\vec{D}] = 0,\ [\vec{n}\,\vec{B}] = 0 \tag{16}$$

и проварьируем их по направлению $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$ при фиксированной частоте волны ω.

Умножая вариацию первого уравнения в (16) скалярно на $\vec{H}$, а второго — скалярно на $\vec{E}$ и складывая, получим

$$(\delta\vec{n}\,\vec{S}_0) - \frac{c}{8\pi}\,\Delta, \tag{17}$$

где

$$\Delta = \{(\vec{E}\,\delta\vec{D}) - (\vec{D}\,\delta\vec{E})\} + \{(\vec{H}\,\delta\vec{B}) - \vec{B}\,\delta\vec{H})\} \quad \text{и} \quad \vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}\vec{H}].$$

Вектор $\delta\vec{n}$ параллелен касательной к поверхности (14) волновых векторов $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\,n(\omega, \vec{k})$. Естественно, что обращение величины Δ в нуль означает, что поток $\bar{S}_0$ направлен перпендикулярно поверхности (14) и, следовательно, параллелен направлению групповой скорости $\vec{V}_g$. Последнее автоматически выполняется для случая покоящихся изотропных ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\delta\vec{D} = \varepsilon\delta\vec{E}$) и анизотропных ($D_i = \varepsilon_{ij}E_j$) сред с симметричным тензором ε_{ij}.

Для произвольных покоящихся и движущихся сред соотношения между ($\vec{D}$, $\vec{B}$) и ($\vec{E}$, $\vec{H}$) имеют весьма сложный вид и, вообще говоря, величина Δ в (17) может оказаться отличной от нуля (см. ниже раздел 4). Однако для движущихся изотропных и однородных сред эта связь имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \gamma^2\{(\varepsilon - \beta^2)\,\vec{E} - (\varepsilon - 1)\,\vec{\beta}\,(\vec{\beta}\vec{E}) + (\varepsilon - 1)\,[\vec{\beta}\vec{B}]\}, \\ \vec{H} &= \gamma^2\{(1 - \varepsilon\beta^2)\,\vec{H} + (\varepsilon - 1)\,\vec{\beta}\,(\vec{\beta}\vec{B}) + (\varepsilon - 1)[\vec{\beta}\vec{E}]), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, а $\mu = 1$.

Если среда не обладает дисперсией, т. е. $\varepsilon = \text{const}$, то, определяя из соотношений (18) вариации $\delta\vec{D}$ и $\delta\vec{n}$ через $\delta\vec{E}$ и $\delta\vec{B}$ и используя уравнения Максвелла, после несложных вычислений можно показать, что в этом случае ($\varepsilon = \text{const}$) $\Delta = 0$ и, следовательно, поток энергии $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}\vec{H}]$ в движущейся среде без дисперсии параллелен направлению групповой скорости. Как мы видим, величина $\bar{S}_0$ совпадает с величиной $\vec{S}$ в (3). В то же время поток энергии S^A из (2) кроме составляющей $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}\vec{H}]$ имеет дополнительное векторное слагаемое, пропорциональное $\vec{\beta}$, и, следовательно, вектор не будет параллелен вектору $\vec{V}_g$. Заметим при этом, что групповая скорость $\vec{V}_g$ волн в движущейся среде не зависит от вида рассматриваемого нами тензора.

Покажем теперь, что вектор $\vec{S}^{M}$ не только параллелен $\vec{V}_g$, но и что для W^M и $\vec{S}^M$ выполняется соотношение (13). Для этого рассмотрим простой случай цилиндрической системы, когда $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_z$, $\vec{E} = E_\rho\vec{e}_\rho + E_z\vec{e}_z$ и $\vec{k} = k_\rho\vec{e}_\rho + k_z\vec{e}_z$ и вычислим W^M и компоненты $\vec{S}^M$ через одну из компонент поля (E_z) и параметры среды. С помощью соотношений (18), уравнений Максвелла (16) и дисперсионного уравнения (14) можно показать, что

$$S_z^M = \frac{\varepsilon E_z^2\gamma^2}{4\pi n_\rho^2}\cdot c\,(1-\beta^2)\{(1-\beta^2\varepsilon)\,n_z + \beta\,(\varepsilon-1)\},$$

$$S_\rho^M = \frac{\varepsilon E_z^2\gamma^2}{4\pi n_\rho^2}\,\frac{cn_\rho}{\gamma^2},\quad S_\varphi^M = 0,\quad W_M = \frac{\varepsilon E_z^2\gamma^2}{4\pi n_\rho^2}\{(\varepsilon-\beta^2) - \beta\,(\varepsilon-1)\,n_z\}, \tag{19}$$

где $n_\rho = \dfrac{ck_\rho}{\omega}$ определяется через $n_z = \dfrac{ck_z}{\omega}$ с помощью (14).

С другой стороны, для движущейся среды без дисперсии групповая скорость $\vec{V}_g$ имеет вид [10]

$$\vec{V}_g = c\,\frac{\vec{n} + (\varepsilon-1)\,\gamma^2\vec{\beta}\,(1-\vec{\beta}\vec{n})}{1 + (\varepsilon-1)\,\gamma^2\,(1-\vec{\beta}\vec{n})}. \tag{20}$$

Сравнивая компоненты $\vec{V}_g$ с выражениями (19), нетрудно убедиться в том, что $\vec{S}^M = W^M\cdot\vec{V}_g$.

В заключение заметим, что для произвольного электромагнитного поля (не плоских и монохроматических волн) в движущейся среде без дисперсии из уравнений Максвелла и соотношений связи Минковского (18) можно показать, что для величин W^M и $\vec{S}^M$ выполняется закон сохранения (в отсутствии внешних токов)

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial W^M}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S}^M = 0. \tag{21}$$

Последнее оказалось возможным потому, что в движущейся среде без дисперсии выполняется соотношение $\vec{E}d\vec{D} + \vec{H}d\vec{B} = \vec{D}d\vec{E} + \vec{B}d\vec{H}$, что нетрудно проверить с помощью (18), что аналогично условию $\Delta = 0$ для монохроматических плоских волн.

Таким образом, мы показали, что в движущейся среде без дисперсии соотношение (13) выполняется для компонент тензора Минковского и не справедливо для компонент тензора Абрагама.

4. Рассмотрим каким образом наличие дисперсии в движущейся среде сказывается на справедливости высказанных нами выше утверждений. Пусть диэлектрическая проницаемость среды ε ($\mu = 1$) зависит в системе ее покоя от частоты ω', т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\omega')$. Тогда в лаборатор-

ной системе координат, относительно которой среда движется со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$, в силу соотношения (15) величина $\varepsilon(\omega')$ будет зависеть и от волнового вектора $\vec{k}$, т. е. движение диспергирующей среды приводит к появлению пространственной дисперсии [10], и следовательно, диэлектрическая постоянная будет зависеть от направления распространения $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$ так, что

$$\varepsilon(\omega') = \varepsilon(\gamma, \omega'[1 - \vec{\beta}\vec{n}]). \tag{22}$$

Это означает, что при варьировании величин $\vec{P}$ и $\vec{H}$ в (18) по направлению $\vec{n}$ мы должны варьировать не только вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но и величину ε. Расчет показывает, что в этом случае величина Δ отлична от нуля и равна

$$\Delta = \delta\varepsilon\gamma^2 f(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}),$$

$$f(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}) = E^2 - (\vec{\beta}\vec{E}) - \beta^2 B^2 - (\vec{\beta}\vec{B}) + 2(\vec{B}, [\vec{E}\vec{\beta}]), \tag{23}$$

или, используя (22), получим

$$\Delta = -\omega\gamma^3 (\vec{\beta}\delta\vec{n}) \cdot f \cdot \varepsilon'(\omega'),$$

$$\varepsilon'(\omega') = \frac{\partial\varepsilon(\omega')}{\partial\omega'}. \tag{24}$$

Поскольку в данном случае Δ пропорционально $\delta\vec{n}$, то с помощью (24) соотношение (17) можно записать так —

$$(\delta\vec{n} \cdot \vec{S}) = 0, \tag{25}$$

где

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1, \; \vec{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \omega\gamma^3 \vec{\beta} \cdot \varepsilon' f. \tag{26}$$

Таким образом, для движущейся среды при наличии дисперсии роль потока энергии, который нормален к поверхности (14) волновых векторов и, следовательно, параллелен направлению групповой скорости $\vec{V}_g$, играет не вектор $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]$, а суммарный вектор потока $\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1$ в (26). Это совершенно аналогично отличию направления потока энергии $\vec{S}$ от вектора $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]$ в покоящихся средах при учете пространственной дисперсии [9] и, как мы видим, в обоих случаях связано с учетом пространственной дисперсии.

Для доказательства справедливости соотношения (13) и в данном случае рассмотрим опять конкретный случай аксиально-симметричной задачи, когда $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_z$, $\vec{E} = E_\rho\vec{e}_\rho + E_z\vec{e}_z$, $\vec{k} = k_\rho\vec{n}_\rho + k_z\vec{n}_z$. В этом случае, как нетрудно видеть из (26), вектор $\vec{S}_1$ имеет только z-ую компоненту. Ее можно вычислить в явном виде через параметры среды и одну из компонент электрического поля (E_z). С помощью уравнений Максвелла (16) и дисперсионного уравнения (14) можно получить

$$S_{1z} = \frac{c}{8\pi}\,\omega\gamma\beta\varepsilon'\,\frac{\varepsilon}{n_\rho^2}\,\gamma^2 E_z^2\,(1-\beta n_z)^2. \tag{27}$$

В то же время групповая скорость волн в движущейся среде с дисперсией имеет вид [10]

$$\vec{V}_g = c\,\frac{\vec{n} + \vec{\beta}\gamma^2(1-\vec{\beta}\vec{n})\left\{(\varepsilon-1) + \frac{\gamma}{2}\varepsilon'(1-\vec{\beta}\vec{n})\right\}}{1+\gamma^2(1-\vec{\beta}\vec{n})\left\{(\varepsilon-1)+\frac{\gamma}{2}\varepsilon'(1-\vec{\beta}\vec{n})\right\}}, \tag{28}$$

где опять $\gamma^{-2} = 1-\beta^2$, $\varepsilon = \varepsilon(\omega')$. $\varepsilon' = \dfrac{d\varepsilon}{d\omega'}$.

Сравнивая выражения (28) и (26), мы видим, что в данном случае соотношение (13) оказывается выполненным, если под плотностью энергии W^M в движущейся диспергирующей среде понимать величину $W^M(\omega)$, равную

$$W(\omega) = \frac{\varepsilon E_z^2\gamma^2}{4\pi n_\rho^2}\,\{(\varepsilon-\beta^2) - \beta(\varepsilon-1)\,n_z\}\left\{1+\gamma^2(1-\beta n_z)\left[(\varepsilon-1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\gamma}{2}\varepsilon'(1-\beta n_z)\right]\right\}. \tag{29}$$

Это выражение аналогично [9] можно получить и из рассмотрения законов сохранения для волнового пакета в движущейся диспергирующей среде.

В заключение мы хотим отметить специфическую особенность движущейся полностью ионизированной плазмы, для которой

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_\rho^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{\omega_\rho^2}{\gamma^2(\omega - \vec{k}\vec{n})^2}. \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае поверхность волновых векторов (14) становится сферической и, следовательно, нормаль к ней совпадает с направлением волнового вектора $\vec{k}$. Это значит, что и направление групповой скорости $\vec{V}_g$ тоже совпадает с направлением $\vec{k}$. Это легко обнаружить из выражения (28), если в него подставить формулу (30). Оказывается, что именно добавка $\vec{S}_1$ в (26) к потоку $\vec{S}_0$ делает полный поток $\vec{S}$ направленным тоже в направлении $\vec{k}$.

Заметим, что групповая скорость $\vec{V}_g$ и полный поток энергии $\vec{S}$ направлены по волновому вектору $\vec{k}$ в средах, у которых ε имеет вид

$$\varepsilon(\omega') = 1 + \frac{\text{const}}{\omega'^2}. \tag{31}$$

Резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что так как тензор энергии-импульса электромагнитного поля, полученный с помощью вариационного принципа, имеет неоднозначное выражение, можно попытаться устранить эту неоднозначность, определяя какую-либо его компоненту из других соображений. В качестве таких компонент мы взяли реально наблюдаемые величины: плотность энергии W и плотность потока энергии $\vec{S}$. Проведенный выше анализ их свойств говорит о том, что для сред, у которых в движущейся системе координат выполняется соотношение (13), необходимо пользоваться тензором Минковского. Примером таких сред может служить плазма и плазмоподобные среды с ε, задаваемой формулой (31).

Мы ограничились рассмотрением безграничных сред. На наш взгляд в этом случае не имеет смысла делить тензор энергии-импульса на тензор поля и среды, как это делалось в [12]—[13]. Насколько это необходимо при решении граничных задач, требует, по-видимому, отдельного рассмотрения.

Авторы благодарны В. Л. Гинзбургу, Б. М. Болотовскому, Г. М. Гарибяну и В. Р. Тевикяну за ценные советы и полезные дискуссии.

Ереванский физический институт — Поступила 26.XII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Паули*, Теория относительности, ГИТТЛ, М.—Л. 1947.
9. *И. Е. Тамм*, Основы теории электричества, ГИТТЛ, М.—Л. (1949).
3. *K. F. Novobatzky*, Acta Phys. Kung, 1, № 5, 25 (1949).
4. *А. М. Глуцюк*, Указатель литературы по электродинамике движущихся сред, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1967.
5. *S. R. de Groot* and *L. C. Suttorp*, Phys. Let. 24A, № 7, 385 (1967) и ссылки на ранние работы.
6. *Л. Д. Ландау*, *Е. М. Лифшиц*, Теория поля, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
7. *Б. М. Болотовский*, *А. А. Рухадзе*, ЖЭТФ, 37, № 5, 1346 (1959).
8. *В. М. Болотовский*, *О. С. Мергелян*, *С. Н. Столяров*, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 203 (1969).
9. *В. М. Агранович* и *В. Л. Гинзбург*, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, ГИФМЛ, М., 1965.
10. *С. Н. Столяров*, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 5, № 4, 671 (1962).
11. *Л. Д. Ландау*, *Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
12. *G. Marx* and *G. O. Györgyi*, Ann. of Phys., 16, 241 (1955).
13. *G. Marx*, *G. Györgi*, Acta Phys. Hung. 3, 213 (1954).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԷՆԵՐԳԻԱ-ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՏԵՆԶՈՐԻ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ս. Ն. ՍՏՈԼՅԱՐՈՎ

Աշխատանքում քննարկվում է միջավայրում էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիա-իմպուլսի տենզորի ընտրման հարցը։ Քանի որ վարիացիոն սկզբունքով ստացված էներգիա-իմպուլսի տենզորի արտահայտությունը միարժեք չի, ապա փորձ է արվում ստանալ միարժեք արտահայտություն՝ ելնելով ֆիզիկական դատողություններից։ Ցույց է տրված, որ եթե անսահման միջավայրում, ցանկացած կոորդինատային սիստեմում տեղի ունի $S = W \cdot V_g$ առնչությունը, ապա այդպիսի միջավայրի համար անհրաժեշտ է օգտվել Մինկովսկու տենզորից։

ON THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF ELECTROMAGNETIC FIELD

O. S. MERGELIAN, S. N. STOLIAROV

The paper deals with choosing the energy-momentum tensor of an electromagnetic field in the medium. In view of the fact that the variational principle offers an ambiguous expression for the energy-momentum tensor, an attempt is made to obtain an unambiguous expression on the basis of physical considerations. It is shown that, if in an infinite medium in any coordinate system the relationship $\vec{S} = W \cdot \vec{V}_g$ is fulfilled, then in such a medium the Minkowskian tensor should be used.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 320—337 (1970)

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАКЛОННОМ ПРОХОЖДЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ И СТОПКУ ПЛАСТИН

В. А. АРАКЕЛЯН, Г. М ГАРИБЯН

В работе получены поля переходного излучения, возникающие при наклонном пролете заряженной частицы через одну границу раздела сред, пластину и стопку пластин. Формулы имеют относительно более простой вид по сравнению с ранее полученными выражениями и легко интерпретируются, так как при решении задачи о наклонном пролете заряда через одну границу раздела сред была использована другая система базисных векторов.

В случае же пластинки и стопки пластин был использован развитый ранее метод построения решений.

Задача о наклонном прохождении заряженной частицы через границу двух сред и через пластину рассматривалась многими авторами [1]—[13]. Однако полученные при этом формулы для полей переходного излучения имеют весьма сложный вид.

Дело в том, что в отмеченных работах при нахождении проекций электрического вектора поля в тангенциальной плоскости использовалась косоугольная система координат. В настоящей работе при нахождении тех же проекций мы пользуемся прямоугольной системой координат. В результате полученные формулы становятся симметричными и относительно более простыми.

Но основное преимущество настоящего подхода заключается в том, что с его помощью, а также используя метод построения решений [14], можно получить формулы для полей излучения и в таком сложном случае, как наклонный пролет заряда через стопку пластин.

§ 1. Наклонное прохождение заряда через одну границу раздела сред

Пусть заряженная частица с постоянной скоростью падает на плоскость $z=0$, которая является границей между двумя средами с электромагнитными постоянными ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Пусть траектория частицы лежит в плоскости (yz), т. е. $\vec{v}\,(0,\ v_y,\ v_z)$.

Решение неоднородного уравнения Максвелла ищем в виде

$$\vec{E}^0_{1,2}(\vec{r},t)=\int \vec{E}^0_{1,2}(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\,d\vec{k}, \tag{1.1}$$

где $\omega=\vec{k}\vec{v}=k_y v_y+k_z v_z$, $d\vec{k}=dk_x dk_y dk_z$, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй среде.

Фурье-компонента электрического поля частицы, как известно, имеет вид

$$\vec{E}^{0}_{1,2}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2 \varepsilon_{1,2}} \cdot \frac{\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_{1,2}\,\mu_{1,2}\,\vec{v} - \vec{k}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\,\mu_{1,2}}.$$

При перпендикулярном пролете заряда тангенциальная составляющая электрического поля заряда ($\vec{E}^{0}_{1,2t}$) была пропорциональна только вектору $\vec{\varkappa}$ ($\vec{\varkappa}$ — компонента вектора $\vec{k}$ в плоскости (xy)). В исследуемом случае симметрия задачи нарушается, что приводит к добавлению в числителе выражения $\vec{E}^{0}_{1,2t}$ вектора $\vec{v}_y$. Для того, чтобы выразить его через другие векторы, введем вектор $[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]$ ($\vec{n}$ — единичный вектор оси z, единичные векторы $\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}$, $\vec{n}$ и $\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}$ составляют правую систему).

Тогда можно написать, что $\vec{v}_y = \frac{k_y v_y}{\varkappa}\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} - \frac{k_x v_y}{\varkappa}\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}$ (см. рис. 1).

С учетом разложения вектора $\vec{v}_y$ по направлениям $\vec{\varkappa}$ и $[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]$ тангенциальная составляющая электрического поля заряда примет вид

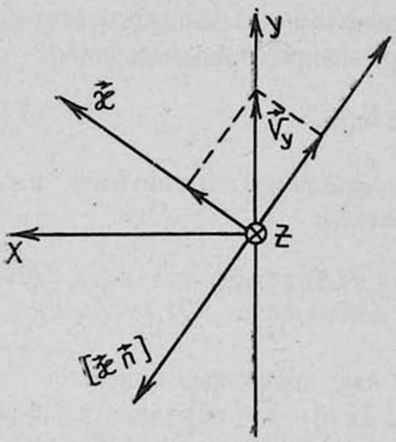


Рис. 1.

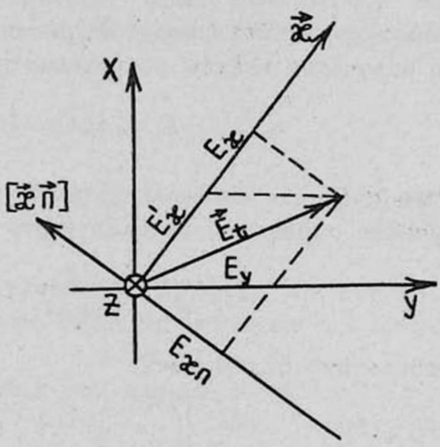


Рис. 2.

$$\vec{E}^{0}_{,2\,t}(\vec{k}) = \frac{ei}{2\pi^2\varepsilon_{1,2}} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_{1,2}\,\mu_{1,2}\,\frac{k_y v_y}{\varkappa^2} - 1\right)\vec{\varkappa} - \frac{\omega}{c^2}\varepsilon_{1,2}\,\mu_{1,2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa^2}\,[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\,\mu_{1,2}}. \quad (1.2)$$

Пользуясь формулой

$$\vec{H}^{0}_{1,2}(\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu_{1,2}}\,[\vec{k}, \vec{E}^{0}_{1,2}(\vec{k})],$$

нетрудно получить для тангенциальной составляющей Фурье-компоненты магнитного поля частицы следующее выражение:

$$\vec{H}^0_{1,2\,t}(\vec{k}) = -\frac{ei}{2\pi^2 c}\,\frac{\dfrac{k_x k_z}{\varkappa^2} v_y \vec{\varkappa} + \left(\dfrac{k_y k_z}{\varkappa^2} v_y - v_z\right)[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}. \tag{1.3}$$

Решение однородных уравнений Максвелла представим в виде

$$\vec{E}_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_{1,2}(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} \mp \lambda_{1,2} z - \omega t)} d\vec{k}, \tag{1.4}$$

где $\lambda^2_{1,2} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2} - \varkappa^2$, а $\bar{\rho}$ — компонента вектора $\vec{r}$ в плоскости (xy). Поле $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ движется в отрицательном направлении оси z в первой среде, тогда как $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ — в положительном направлении оси z во второй среде.

Тангенциальную составляющую электрического поля излучения представим состоящей из компонент, направленных по $\vec{\varkappa}$ и $[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]$,

$$\vec{E}_{1,2\,t}(\vec{k}) = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} E_{1,2\,\varkappa} + \frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa} E_{1,2\,\varkappa n}. \tag{1.5}$$

Нормальную составляющую Фурье-компоненты электрического вектора поля излучения найдем из условия поперечности свободного поля,

$$E_{1,2\,n}(\vec{k}) = \pm \frac{\varkappa}{\lambda_{1,2}} E_{1,2\,\varkappa}. \tag{1.6}$$

Тангенциальную составляющую Фурье-компоненты магнитного поля излучения определим из следующей формулы:

$$\vec{H}_{1,2}(\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu_{1,2}}[\vec{\varkappa} \mp \vec{n}\lambda_{1,2}, \vec{E}_{1,2}(\vec{k})]. \tag{1.7}$$

В результате будем иметь

$$\vec{H}_{1,2}(\vec{k}) = \pm \frac{c}{\omega\mu_{1,2}}\left\{\left(\frac{\varkappa}{\lambda_{1,2}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\varkappa}\right) E_{1,2\,\varkappa}\,[\vec{\varkappa}\,\vec{n}] - \frac{\lambda_{1,2}}{\varkappa} E_{1,2\,\varkappa n}\,\vec{\varkappa}\right\}. \tag{1.8}$$

Из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе раздела сред мы с помощью (1,2), (1.3), (1.5) и (1,8) получаем два векторных уравнения. Так как каждое из них распадается на два скалярных, то мы имеем в результате четыре уравнения для определения четырех неизвестных $E_{1,2\,\varkappa}$ и $E_{1,2\,\varkappa n}$. Заметим, что мы воспользовались уравнением непрерывности для тангенциальной составляющей магнитного поля, а не нормальной составляющей индукции электрического поля (как это обычно имеет место при перпендикулярном пролете заряда), так как $D_{1,2\,n}$, согласно

(1.6), выражается только через $E_{1,2\varkappa}$, и. тем самым, вместе с условием для тангенциальной составляющей электрического поля это условие не даст полной системы уравнений.

Решая полученную систему уравнений, будем иметь

$$E_{1,2\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}+\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}}\left\{\frac{\mp\frac{1}{k_z}+\frac{\varepsilon_{2,1}}{\lambda_{2,1}\varepsilon_{1,2}}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}\left(1-\frac{k_y v_y\omega}{\varkappa^2c^2}\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pm\frac{1}{k_z}-\frac{1}{\lambda_{2,1}}}{k^2-\frac{\omega_2}{c^2}\varepsilon_{2,1}\mu_{2,1}}\left(1-\frac{k_y v_y\omega}{\varkappa^2c^2}\varepsilon_{2,1}\mu_{2,1}\right)\right\}, \qquad (1.9)$$

$$E_{1,2\varkappa n}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_xk_zv_y}{\varkappa\lambda_{1,2}}\frac{\mu_1\mu_2}{\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\left(\frac{\mp\frac{1}{\lambda_{2,1}}+\frac{\mu_{1,2}}{k_z\mu_{2,1}}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}+\frac{\pm\frac{1}{\lambda_{2,1}}-\frac{1}{k_z}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{2,1}\mu_{2,1}}\right). \qquad (1.10)$$

Если перейти от пары компонент $E_{1,2\varkappa}$ и $E_{1,2\varkappa n}$ к паре компонент $E'_{1,2\varkappa}$ и $E_{1,2y}$, то формулы (1.9) и (1.10) переходят в формулы (8) и (9) работы [1]. В этом можно убедиться, если рассмотреть связь между проекциями электрических полей настоящей работы и работы [1]. Действительно, из рис. 2 легко получить

$$E_\varkappa=E'_\varkappa+\frac{k_y}{\varkappa}E_y,$$

$$E_{\varkappa n}=\frac{k_x}{\varkappa}E_y. \qquad (1.10')$$

Из [1] следует, что, прежде чем подставить поля $E'_\varkappa$, E_y работы [1] в формулу (1.10'), необходимо первое поле умножить на $\varkappa$, а второе — на v_y.

Напишем выражения для полей в том случае, когда одна из сред является вакуумом.

а) Пусть первая среда является вакуумом, а вторая обладает параметрами ε и μ. Тогда имеем

$$E_{1,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{\gamma_1}{g},\quad E_{1,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_xv_y}{\varkappa}\frac{f_1}{g}, \qquad (1.11)$$

$$E_{2,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{\delta_2}{g},\quad E_{2,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_xv_y}{\varkappa}\frac{h_2}{g}. \qquad (1.12)$$

б) Пусть вторая среда является вакуумом, первая—обладает параметрами ε и μ, а граница между двумя средами есть плоскость $z=a$. Тогда

$$E_{1,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\,\frac{\delta_1}{g}\,e^{i(k_z+\lambda)a},\quad E_{1,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\,\frac{h_1}{\bar g}\,e^{i(k_z+\lambda)a},\tag{1.13}$$

$$E_{2,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\,\frac{\gamma_2}{g}\,e^{i(k_z-\lambda_0)a},\quad E_{2,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\,\frac{f_2}{\bar g}\,e^{i(k_z+\lambda_0)a}.\tag{1.14}$$

В пунктах а) и b) были использованы следующие обозначения:

$$\gamma_{1,2}=\frac{\mp\frac{1}{k_z}+\frac{\varepsilon}{\lambda}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\cdot u+\frac{\pm\frac{1}{k_z}-\frac{1}{\lambda}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}\cdot s;$$

$$f_{1,2}=\frac{k_z\mu}{\lambda_0}\left(\frac{\mp\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{k_z\mu}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+\frac{\pm\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{k_z}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}\right);$$

$$\delta_{1,2}=\frac{\pm\frac{1}{k_z}-\frac{1}{\lambda_0}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\cdot u+\frac{\mp\frac{1}{k_z}+\frac{1}{\varepsilon\lambda_0}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}\cdot s;$$

$$h_{1,2}=\frac{k_z\mu}{\lambda}\left(\frac{\pm\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{k_z}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+\frac{\mp\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\mu}{k_z}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}\right);$$

$$u=1-\frac{k_y v_y\omega}{\varkappa^2c^2};\ s=1-\frac{k_y v_y\omega}{\varkappa^2c^2}\varepsilon\mu;\ g=\frac{\varepsilon}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0};\ \bar g=\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0};$$

$$\lambda^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu-\varkappa^2,\quad \lambda_0^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\varkappa^2.$$

§ 2. Наклонное прохождение заряда через пластину

1. Пусть заряд с постоянной скоростью $\vec v\,\{0,\,v_y,\,v_z\}$ наклонно проходит через помещенную в вакууме пластину, имеющую толщину a и электромагнитные постоянные ε и μ. Левая грань пластины совпадает с плоскостью $z=0$ (см. рис. 3).

Поле излучения до пластины и после пластины будем искать в виде

$$\vec E_0'(\vec r,t)=\int\vec E_0'(\vec k)\,e^{i(\vec\varkappa\vec\rho-\lambda_0 z-\omega t)}\,d\vec k,$$

$$\vec E_1'(\vec r,t)=\int\vec E_1'(\vec k)\,e^{i(\vec\varkappa\vec\rho+\lambda_0 z-\omega t)}\,d\vec k,\tag{2.1}$$

а поле излучения в пластине—в виде

$$\vec{\mathbf{E}}''_1(\vec{r}, t) = \int \vec{\mathbf{E}}''_1(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} - \lambda z - \omega t)}\, d\vec{k},$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_1(\vec{r}, t) = \int \vec{\mathbf{E}}'_1(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} + \lambda z - \omega t)}\, d\vec{k}. \qquad (2.2)$$

В формулах (2.1) и (2.2) поля с одним штрихом соответствуют волнам, движущимся в положительном направлении оси z, а с двумя штрихами — в отрицательном направлении оси z. Тангенциальные составляющие электрических полей излучения представим в виде

$$\vec{E}''_{0,t}(\vec{k}) = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} E''_{0,\varkappa} + \frac{[\vec{\varkappa}\vec{n}]}{\varkappa} E''_{0,\varkappa n},$$

$$\vec{E}'_{1,t}(\vec{k}) = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} E'_{1,\varkappa} + \frac{[\vec{\varkappa}\vec{n}]}{\varkappa} E''_{1,\varkappa n},$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_{1,t}(\vec{k}) = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} \mathbf{E}'_{1,\varkappa} + \frac{[\vec{\varkappa}\vec{n}]}{\varkappa} \mathbf{E}'_{1,\varkappa n},$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_{1,t}(\vec{k}) = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} \mathbf{E}'_{1,\varkappa} + \frac{[\vec{\varkappa}\vec{n}]}{\varkappa} \mathbf{E}'_{1,\varkappa n}.$$

Поступая аналогично тому как это было сделано в первом параграфе, напишем условия непрерывности тангенциальных компонент полных полей на границах $z=0$ и $z=a$.

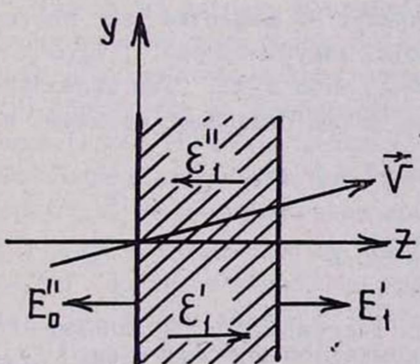


Рис. 3.

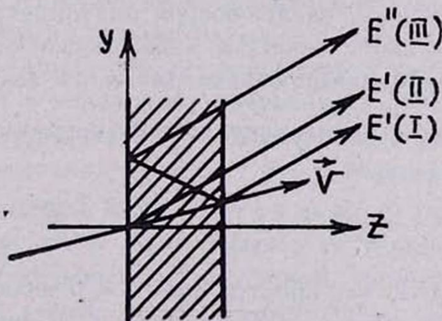


Рис. 4.

Решая получающуюся при этом систему из восьми уравнений, мы находим для Фурье-компонент полей вне пластинки следующие выражения:

$$E''_{0,\varkappa} = \frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{A}{F}, \qquad E''_{,\varkappa n} = \frac{ei}{2\pi^2}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_x v_y}{\varkappa}\cdot\frac{B}{F}, \qquad (2.3)$$

$$E'_{1,\varkappa} = \frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\frac{D}{F}e^{i(k_z-\lambda_0)a},\ E'_{1,\varkappa n} = \frac{ei}{2\pi^2}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_x v_y}{\varkappa}\cdot\frac{C}{\bar F}e^{i(k_z-\lambda_0)a}, \quad (2.4)$$

где

$$\left.\begin{matrix} A \\ D \end{matrix}\right\} = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}\right)\gamma_{1,2}e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)\gamma_{2,1}e^{i\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\delta_{1,2}e^{\pm ik_z a},$$

$$\left.\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}\right\} = \left(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}\right)f_{1,2}e^{-i\lambda a} + \left(\frac{\mu}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)f_{2,1}e^{i\lambda a} + \frac{2}{\lambda_0}h_{1,2}e^{\pm ik_z a},$$

$$F = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a},$$

$$\bar F = \left(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\mu}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a},$$

Если перейти от пары компонент $E_\varkappa$ и $E_{\varkappa n}$ к паре компонент E'_x и E_y, используя (1.10′), то формулы (2.3) и (2.4) переходят в соответствующие формулы работ [11], [12].

В дальнейшем мы будем называть Фурье-компоненту $E_\varkappa$ $\varkappa$—компонентной, а Фурье-компоненту $E_{\varkappa n}$ $\varkappa n$—компонентной поля.

2. Для нахождения полей излучения при наклонном прохождении заряда через пластину, помещенную в вакууме, можно также идти и другим путем, а именно, применяя метод построения [14].

Для этого нам надо знать некоторые коэффициенты, относящиеся к преломлению и отражению волн на границе среда—вакуум для $\varkappa$—и $\varkappa n$—компонент полей излучения, а также коэффициент многократного отражения в пластине этих полей.

Пусть электромагнитная волна падает из вещества на плоскую границу, разделяющую полупространства вакуум—среда. Пусть этой границей является либо плоскость $z=0$, либо $z=a$. Тангенциальную составляющую электрического вектора волны разложим по двум взаимно перпендикулярным направлениям $\vec\varkappa$ и $[\vec\varkappa\,\vec n]$, т. е.

$$\vec E_t = \frac{\vec\varkappa}{\varkappa}E_\varkappa + \frac{[\vec\varkappa\,\vec n]}{\varkappa}E_{\varkappa n}.$$

Если полупространство $z<0$ является вакуумом, а $z>0$ заполнено веществом с электромагнитными постоянными ε и μ, и волна падает справа на плоскость $z=0$, то нетрудно убедиться, что коэффициенты отражения для компонент $E_\varkappa$ и $E_{\varkappa n}$ соответственно будут

$$r = \frac{\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{\varepsilon}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}},\quad \bar r = -\frac{\frac{\mu}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_0}}, \quad (2.5)$$

а коэффициенты прохождения

$$\eta = \frac{\frac{2\varepsilon}{\lambda}}{\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}}, \quad \bar{\eta} = \frac{\frac{2}{\lambda_0}}{\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}}. \tag{2.6}$$

Если полупространство $z < a$ заполнено веществом, а $z > a$ — пустое, и волна падает слева на плоскость $z = a$, то коэффициенты отражения и преломления для компонент E_x и E_{xn} соответственно будут

$$r_a = re^{2i\lambda a}, \quad \bar{r}_a = \bar{r}\, e^{2i\lambda a},$$

$$\eta_a = \eta e^{i(\lambda-\lambda_0)a} \quad \bar{\eta}_a = \bar{\eta}\, e^{i(\lambda-\lambda_0)a}. \tag{2.7}$$

Пусть, наконец, излучение падает из вакуума на вещество, имеющее либо конечную толщину a, либо заполняющее все полупространство $z > 0$. Сравним коэффициенты прохождения на границе вакуум—пластинка и на границе вакуум—полубесконечная среда. Очевидно, что они будут различаться из-за наличия у пластинки второй границы $z = a$. Отношение этих коэффициентов даст нам коэффициент многократного отражения в пластинке. Этот коэффициент для компонент E_x и E_{xn} имеет вид

$$R = \frac{1}{1 - r\, r_a}, \quad \bar{R} = \frac{1}{1 - \bar{r}\, \bar{r}_a}. \tag{2.8}$$

Пользуясь формулами (1.11)—(1.14) и (2.5)—(2.8), нетрудно написать выражения для полей излучения, испущенных вперед и назад в случае пластинки.

а) Излучение за пластиной.

Как видно из рис. 4, переходное излучение, испущенное вперед, состоит из волн трех типов. Волна E' (I) образуется на границе среда—вакуум и будет описываться формулами (1.14) для $E_{2,x}$ и $E_{2,xn}$. Волна E' (II) образуется на границе вакуум—среда и будет описываться формулами (1.12). Но вклад волны E' (II) в переходное излучение за пластиной определяется при помощи коэффициентов многократного отражения $(R, \bar{R})$ и коэффициентов прохождения $(\eta_a, \bar{\eta}_a)$, т. е. значение E' (II) надо умножить как на коэффициенты R и $\bar{R}$, так и на η_a, $\bar{\eta}_a$ для E_x и E_{xn} соответственно. Наконец, волна E'' (III) описывается формулами (1.13). Вклад волны E'' (III) в излучение за пластиной определяется коэффициентами отражения от левого края пластинки $(r, \bar{r})$, коэффициентами прохождения через правую границу $(\eta, \bar{\eta})$, а также коэффициентами многократного отражения в пластине $(R, \bar{R})$. В результате получим

$$E'_{1,x} = E'_x\,(\mathrm{I}) + \eta_a R E'_x\,(\mathrm{II}) + \eta_a r R E''_x\,(\mathrm{III}),$$

$$E'_{1,xn} = E'_{xn}\,(\mathrm{I}) + \bar{\eta}_a \bar{R}\, E'_{xn}\,(\mathrm{II}) + \bar{\eta}_a \bar{r}\, \bar{R}\, E''_{xn}\,(\mathrm{III}),$$

или, выписывая E_x и E_{xn} в явном виде, пользуясь (1.14), (1.12) и (1.13), получим

$$E'_{1,\varkappa} = \frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\,\frac{P'_\varkappa}{g},\quad E'_{1,\varkappa n} = \frac{ei}{2\pi^2}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\,\frac{P'_{\varkappa n}}{g}, \tag{2.9}$$

где

$$P'_\varkappa = \gamma_2\, e^{i(k_z-\lambda_0)a} + \gamma_{1a} R\delta_2 + \gamma_{1a} r R\delta_1 e^{i(k_z+\lambda)a},$$

$$P'_{\varkappa n} = f_2 e^{i(k_z-\lambda_0)a} + \bar\gamma_{1a}\bar R h_2 + \bar\gamma_{1a}\bar r\,\bar R h_1 e^{i(k_z+\lambda)a}.$$

Подставляя явные значения коэффициентов γ_1, $\bar\gamma_1$, r, $\bar r$ и $R, \bar R$ из (2.5)—(2.8) в (2.9), мы получим формулы, совпадающие с формулами (2.4).

б) Излучение до пластины.

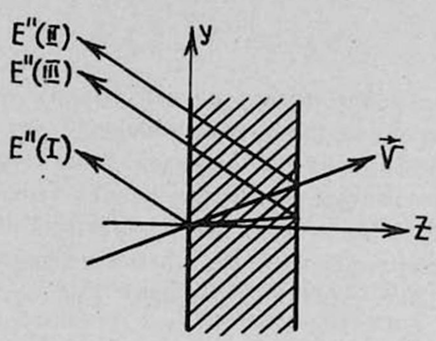


Рис. 5.

Проводя рассуждения, аналогичные сделанным выше в пункте а), но пользуясь теперь рис. 5, мы можем написать следующие формулы для полей излучения в пространстве до пластины:

$$E''_{0,\varkappa} = E''_\varkappa(\mathrm{I}) + \gamma_1 R E''_\varkappa(\mathrm{II}) + \gamma_1 r_a R\, E'_\varkappa(\mathrm{III}),$$

$$E''_{0,\varkappa n} = E''_{\varkappa n}(\mathrm{I}) + \bar\gamma_1 \bar R\, E''_{\varkappa n}(\mathrm{II}) + \bar\gamma_1 \bar r_a \bar R E'_{\varkappa n}(\mathrm{III}),$$

или

$$E''_{0,\varkappa} = \frac{ei\varkappa}{2\pi^2}\cdot\frac{P''_\varkappa}{g},\quad E''_{0,\varkappa n} = \frac{ei}{2\pi^2}\cdot\frac{\omega}{c^2}\cdot\frac{k_x v_y}{\varkappa}\cdot\frac{P''_{\varkappa n}}{g}, \tag{2.10}$$

где

$$P''_\varkappa = \gamma_1 + \gamma_1 R\delta_1\, e^{i(k_z+\lambda)a} + \gamma_1 r_a R\delta_2,$$

$$P''_{\varkappa n} = f_1 + \bar\gamma_1 \bar R h_1\, e^{i(k_z+\lambda)a} + \bar\gamma_1\, \bar r_a \bar R h_2.$$

Формулы (2.10) переходят в формулы (2.3), если подставить в них значения коэффициентов отражения, прохождения и многократного отражения. Таким образом, метод построения решения и обычный метод (т. е. решение с помощью условий непрерывности на всех границах) дают один и тот же результат.

Перейдем теперь к нахождению полей излучения при наклонном прохождении заряда через стопку пластин, пользуясь методом построения.

§ 3. Наклонное прохождение заряда через стопку пластин

Как известно из метода построения [14], для того, чтобы решить задачу об излучении заряда в стопке пластин, достаточно знать формулы излучения на одной пластине и некоторые коэффициенты, относящиеся к распространению излучения в стопке пластин. Электрическое поле переходного излучения на одной пластине выражается формулами (2.3) и (2.4) или (2.9)—(2.10). Остается найти коэффициенты отражения и прохождения электромагнитного излучения через стопку пластин или ее часть.

1. Допустим, что слева на стопку, состоящую из N пластин с толщиной a и расстоянием между ними b, падает заданная волна $\vec{E}_0'(N)e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}+\lambda_0 z-\omega t)}$. Очевидно, что до стопки ($z<0$) мы будем иметь еще и отраженную волну $\vec{E}_0''(N)\,e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}-\lambda_0 z-\omega t)}$. За стопкой ($z>Na+(N-1)\,b$) будет прошедшая волна $\vec{E}_N'(N)\,e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}+\lambda_0 z-\omega t)}$. В отсеках присутствуют волны обоих типов. Поле в m-ом отсеке будем обозначать через $\vec{E}_m'(N)\,e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}+\lambda_0 z-\omega t)}$ и $\vec{E}_m''(N)\,e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}-\lambda_0 z-\omega t)}$. Отсеки пронумерованы следующим образом: пространство до стопки назовем нулевым отсеком, пространство за стопкой — N-ым отсеком [14]. Пластинки пронумерованы числами 1, 2, 3,$\cdots N$ вдоль положительного направления оси z. Представим тангенциальные составляющие амплитуды электрических полей в виде:

в вакууме
$$\vec{E}_t' = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}E_\varkappa' + \frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}E_{\varkappa n}',$$

$$\vec{E}_t'' = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}E_\varkappa'' + \frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}E_{\varkappa n}'',$$

и в среде
$$\mathbf{E}_t' = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\mathbf{E}_\varkappa' + \frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}\mathbf{E}_{\varkappa n}',$$

$$\mathbf{E}_t'' = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\mathbf{E}_\varkappa'' + \frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa}\mathbf{E}_{\varkappa n}''.$$

Тангенциальные составляющие магнитных полей будут иметь вид:

в вакууме
$$\vec{H}_t' = -\frac{c}{\omega}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\frac{E_\varkappa'}{\lambda_0}\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa} - \lambda_0 E_{\varkappa n}'\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\right\},$$

$$\vec{H}_t'' = \frac{c}{\omega}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\frac{E_\varkappa''}{\lambda_0}\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa} - \lambda_0 E_{\varkappa n}''\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\right\},$$

и в среде
$$\vec{H}_t' = -\frac{c}{\omega\mu}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\frac{\mathbf{E}_\varkappa'}{\lambda}\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa} - \lambda\mathbf{E}_{\varkappa n}'\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\right\},$$

$$\vec{H}_t'' = \frac{c}{\omega\mu}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon\mu\,\frac{\mathbf{E}_\varkappa''}{\lambda}\,\frac{[\vec{\varkappa}\,\vec{n}]}{\varkappa} - \lambda\mathbf{E}_{\varkappa n}''\,\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}\right\}.$$

Введем вместо полей новые величины

$$E_{m,\varkappa}' = E_{m,\varkappa}'(N)\, e^{i\lambda_0 [ma + (m-1)b]},$$

$$E_{m,\varkappa n}' = E_{m,\varkappa n}'(N)\, e^{i\lambda_0 [ma + (m-1)b]},$$

$$E_{m,\varkappa}'' = E_{m,\varkappa}''(N)\, e^{-i\lambda_0 [ma + (m-1)b]},$$

$$E_{m,\varkappa}'' = E_{m\,\varkappa n}''(N)\, e^{-i\lambda_0 [ma + (m-1)b]}.$$

Тогда из условий сшивки электрических и магнитных полей на границах $(m+1)$-ой пластинки можно получить следующую связь между полем в $(m+1)$-ом и m-ом отсеках:

$$E_{m+1,\varkappa}'' = N_1 E_{m,\varkappa}'' + M_1 E_{m,\varkappa}', \quad E_{m+1,\varkappa n}'' = \overline{N}_1 E_{m,\varkappa n}'' + \overline{M}_1 E_{m,\varkappa n}',$$

$$E_{m+1,\varkappa}' = N_2 E_{m,\varkappa}'' + M_2 E_{m,\varkappa}', \quad E_{m+1,\varkappa n}' = \overline{N}_2 E_{m,\varkappa n}'' + \overline{M}_2 E_{m,\varkappa n}', \tag{3.1}$$

где

$$M_1 = -\frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon}\, e^{i\lambda_0 b} G; \quad \overline{M}_1 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\mu}\, e^{i\lambda_0 b}\, \overline{G};$$

$$M_2 = -\frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon}\, e^{i\lambda_0 b} H; \quad \overline{M}_2 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\mu}\, e^{i\lambda_0 b}\overline{H};$$

$$N_1 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon}\, e^{-i\lambda_0 b} F; \quad \overline{N}_1 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\mu}\, e^{-i\lambda_0 b}\overline{F};$$

$$N_2 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon}\, e^{-i\lambda_0 b} G; \quad \overline{N}_2 = -\frac{\lambda\lambda_0}{4\mu}\, e^{-i\lambda_0 b}\overline{G};$$

$$F = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a}; \quad \overline{F} = \left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a};$$

$$H = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a}; \quad \overline{H} = \left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a} - \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a};$$

$$G = \left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)(e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}); \quad \overline{G} = \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)(e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}).$$

Поля в трех соседних отсеках связаны между собой соотношениями [14]:

$$E_{m+1,\varkappa}'' = 2\alpha E_{m,\varkappa}'' - E_{m-1,\varkappa}'', \quad E_{m+1,\varkappa n}'' = 2\beta E_{m,\varkappa n}'' - E_{m-1,\varkappa n}'',$$

$$E_{m+1,\varkappa}' = 2\alpha E_{m,\varkappa}' - E_{m-1,\varkappa}', \quad E_{m+1,\varkappa n}' = 2\beta E_{m,\varkappa n}' - E_{m-1,\varkappa n}', \tag{3.2}$$

где

$$2\alpha = M_2 + N_1, \ 2\beta = \overline{M}_2 + \overline{N}_1.$$

Для нахождения в произвольном отсеке поля, распространяющегося в положительном направлении оси z (E'_m), надо иметь в виду, что $E''_N = 0$. Полагая $m = N - 1$ в (3.1), получим

$$E'_{N-1,\varkappa} = N_1 E'_{N\varkappa}, \ E'_{N-1,\varkappa n} = \overline{N}_1 E'_{N,\varkappa n}. \tag{3.3}$$

Пользуясь (3.3) и полагая в (3.2) $m=N-1, \ N-2, \cdots$, приходим к соотношениям

$$E'_{m,\varkappa} = Q_{N-m}(\alpha) E'_{N,\varkappa}, \ E'_{m,\varkappa n} = Q_{N-m}(\beta) E'_{N,\varkappa n}, \tag{3.4}$$

где $Q_m(\alpha) = N_1 u_{m-1}(\alpha) - u_{m-2}(\alpha)$ и $Q_m(\beta) = \overline{N}_1 u_{m-1}(\beta) - u_{m-2}(\beta)$, а $u_m(\alpha)$, $u_m(\beta)$ — полиномы Чебышева 2-го рода.

Положив в (3.4) $m = 0$, определим E'_N через заданное $E'_0(N)$. Подставляя затем полученное значение E'_N в (3.4), для компонент поля $E'_{m,\varkappa}$ и $E'_{m,\varkappa n}$ будем иметь следующие выражения:

$$E'_{m,\varkappa}(N) = \frac{Q_{N-m}(\alpha)}{Q_N(\alpha)} e^{-im(a+b)\lambda_0} E'_{0,\varkappa}(N),$$

$$E'_{m,\varkappa n}(N) = \frac{Q_{N-m}(\beta)}{Q_N(\beta)} e^{-im(a+b)\lambda_0} E'_{0,\varkappa n}(N). \tag{3.5}$$

Для того, чтобы получить в произвольном отсеке поля, распространяющееся в отрицательном направлении оси z (E''_m), надо в формулах (3.1) положить $m=0$,

$$E''_{1,\varkappa} = N_1 E''_{0,\varkappa} + M_1 E'_{0,\varkappa},$$

$$E''_{1,\varkappa n} = \overline{N}_1 E''_{0,\varkappa n} + \overline{M}_1 E'_{0,\varkappa n}. \tag{3.6}$$

Полагая в (3.2) $m=1, 2, 3, \cdots$ и имея ввиду (3.6), получим

$$E''_{m,\varkappa} = Q_m(\alpha) E''_{0,\varkappa} + M_1 u_{m-1}(\alpha) E'_{0,\varkappa n},$$

$$E''_{m,\varkappa n} = Q_m(\beta) E''_{0,\varkappa n} + \overline{M}_1 u_{m-1}(\beta) E'_{0,\varkappa n}. \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.7) $m = N$ и учитывая, что $E''_N=0$, найдем связь между E''_0 и E'_0, подставив которую в (3.7), окончательно получим

$$E''_{m,\varkappa}(N) = \frac{N_2 u_{N-m-1}(\alpha)}{Q_N(\alpha)} e^{im(a+b)\lambda_0} E'_{0,\varkappa}(N),$$

$$E''_{m,\varkappa n}(N) = \frac{\overline{N}_2 u_{N-m-1}(\beta)}{Q_N(\beta)} \cdot e^{im(a+b)\lambda_0} E'_{0,\varkappa n}(N). \tag{3.8}$$

Полученные формулы (3.5) и (3.8) определяют амплитуты волн в произвольном отсеке для $\varkappa$- и $\varkappa n$ — компонент полей. В том случае, когда заданная внешняя волна $\vec{E}''_N(N) e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} - \lambda_0 z - \omega t)}$ падает на стопку справа, производя выкладки, аналогичные вышеприведенным, мы вместо формул (3.5) и (3.8) будем иметь

$$E'_{m,\varkappa}(N) = \frac{N_2 u_{m-1}(\alpha)}{Q_N(\alpha)} e^{-i[(N+m)a+(N+m-2)b]\lambda_0} E''_{N,\varkappa}(N),$$

$$E'_{m,\varkappa n}(N) = \frac{\overline{N}_2 u_{m-1}(\beta)}{Q_N(\beta)} e^{-i[(N+m)a+(N+m-2)b]\lambda_0} E''_{N,\varkappa n}(N) \tag{3.9}$$

и

$$E''_{m,\varkappa}(N) = \frac{Q_m(\alpha)}{Q_N(\alpha)} e^{-i(N-m)(a+b)\lambda_0} E''_{N,\varkappa}(N),$$

$$E''_{m,\varkappa n}(N) = \frac{Q_m(\beta)}{Q_N(\beta)} e^{-i(N-m)(a+b)\lambda_0} E''_{N,\varkappa n}(N). \tag{3.10}$$

2. Получим теперь некоторые коэффициенты, относящиеся к распространению электромагнитной волны в стопке пластин.

а) Сначала это сделаем для случая, когда волна падает на стопку слева. Из (3.5) вытекает, что коэффициент прохождения из k-ого отсека в m-ый отсек $(m>k)$ для $E_\varkappa$ компоненты волны равен

$$\tau_{|k<m}^{k,m} = \frac{E'_{m,\varkappa}(N)}{E'_{k,\varkappa}(N)} = \frac{Q_{N-m}(\alpha)}{Q_{N-k}(\alpha)} e^{-i(a+b)(m-k)\lambda_0}, \tag{3.11}$$

а для $E_{\varkappa n}$

$$\overline{\tau}_{|k<m}^{k,m} = \frac{E'_{m,\varkappa n}(N)}{E'_{k,\varkappa n}(N)} = \frac{Q_{N-m}(\beta)}{Q_{N-k}(\beta)} \cdot e^{-i(m-k)(a+b)\lambda_0}. \tag{2.12}$$

Из (3.5) и (3.8) для $\varkappa$- и $\varkappa n$—компонент полей получим коэффициент отражения в k-ом отсеке стопки, состоящей из N пластин, от $(N-k)$ оставшихся пластин,

$$r'_{N,k} = \frac{E''_{k,\varkappa}(N)}{E'_{k,\varkappa}(N)} = \frac{N_2 u_{N-k-1}(\alpha)}{Q_{N-k}(\alpha)} e^{2i\lambda_0(a+b)k}, \tag{3.13}$$

$$\overline{r}'_{N,k} = \frac{E''_{k,\varkappa n}(N)}{E'_{k,\varkappa n}(N)} = \frac{\overline{N}_2 u_{N-k-1}(\beta)}{Q_{N-k}(\beta)} e^{2i\lambda_0(a+b)k}. \tag{3.14}$$

Найдем связь между полем за стопкой, состоящей из m пластин, и полем в m-ом отсеке стопки, состоящей из N пластин. С помощью (3.5), а также принимая $E'_{0,\varkappa}(m) = N'_{0,\varkappa}(N)$ и $E'_{0,\varkappa n}(m) = E'_{0,\varkappa n}(N)$, нетрудно получить

$$P_{N,m} = \frac{E'_{m,\varkappa}(N)}{E'_{m,\varkappa}(m)} = \frac{Q_m(\alpha)\, Q_{N-m}(\alpha)}{Q_N(\alpha)}, \tag{3.15}$$

$$\overline{P}_{N,m} = \frac{E_{m,\varkappa n}(N)}{E'_{m,\varkappa n}(m)} = \frac{Q_m(\beta)\, Q_{N-m}(\beta)}{Q_N(\beta)}. \tag{3.16}$$

Эти величины учитывают влияние, которое оказывает вся N-пластинчатая стопка на излучения, появившиеся по какой-либо причине в ее m-ом отсеке.

б) Перейдем теперь к случаю, когда волна падает на стопку справа. В этом случае коэффициенты прохождения $\varkappa$- и $\varkappa n$—компонент поля из k-ого отсека в m-ый отсек $(k>m)$ соответственно будут равны

$$\tau_{|k>m}^{k,m} = \frac{E''_{m,\varkappa}(N)}{E''_{k,\varkappa}(N)} = \frac{Q_m(\alpha)}{Q_k(\alpha)} e^{-i(k-m)(a+b)\lambda_0}, \tag{3.17}$$

$$\bar{\tau}_{k>m}^{k,\,m} = \frac{E''_{m,\,\varkappa n}(N)}{E'_{k,\,\varkappa n}(N)} = \frac{Q_m(\beta)}{Q_k(\beta)}\, e^{-i(k-m)(a+b)\lambda_0}, \tag{3.18}$$

а коэффициенты отражения

$$r''_{N,\,k} = \frac{E'_{k,\,\varkappa}(N)}{E''_{k,\,\varkappa}(N)} = \frac{N_2\, u_{k-1}(\alpha)}{Q_k(\alpha)} \cdot e^{-2i\,[ka+(k-1)\,b]\,\lambda_0}, \tag{3.19}$$

$$\bar{r}''_{N,k} = \frac{E'_{k,\,\varkappa n}(N)}{E''_{k,\,\varkappa n}(N)} = \frac{\overline{N}_2\, u_{k-1}(\beta)}{Q_k(\beta)}\, e^{-2i\,[ka+(k-1)\,b]\,\lambda_0}. \tag{3.20}$$

Наконец, найдем связь между полем до стопки, состоящей из m пластин, и полем в $N - m$-ом отсеке для стопки, состоящей из N пластин. С помощью (3.10), а также принимая $E_{N,\varkappa}(N) = E_{m,\varkappa}$ и $E_{N,\varkappa n}(N) = E_{m,\varkappa n}(m)$, будем иметь

$$P'_{N,\,m} = \frac{E''_{N-m,\,\varkappa}(N)}{E''_{0,\,\varkappa}(m)} = \frac{Q_{N-m}(\alpha)\, Q_m(\alpha)}{Q_N(\alpha)} = P_{N,\,m}, \tag{3.21}$$

$$\overline{P}'_{N,\,m} = \frac{E''_{N-m,\,\varkappa n}(N)}{E''_{0,\,\varkappa n}(m)} = \frac{Q_{N-m}(\beta)\, Q_m(\beta)}{Q_N(\beta)} = \overline{P}_{N,\,m}. \tag{3.22}$$

Как видно из формул (3.15), (3.16) и (3.21), (3.22), величины $P_{N,m}$ и $\overline{P}_{N,\,m}$ не зависят от того падает ли заданная внешняя волна на стопку справа или слева. Они характеризуют m-ый отсек стопки, состоящей из N пластин.

С другой стороны, если взять значения коэффициентов отражения из формул (3.13), (3.14) и (3.19), (3.20) и иметь при этом в виду, что

$$Q_m(\alpha)\; Q_{N-k}(\alpha) - Q_N(\alpha)\; Q_{m-k}(\alpha) = -M_1 N_2\; u_{k-1}(\alpha)\; u_{N-m-1}(\alpha)$$

и

$$Q_m(\beta)\; Q_{N-k}(\beta) - Q_N(\beta)\; Q_{m-k}(\beta) = -\overline{M}_1 \overline{N}_2\; u_{k-1}(\beta)\; u_{N-m-1}(\beta),$$

то можно получить

$$\frac{1}{1 - r'_{N,\,m}\, r''_{N,\,m}} = \frac{Q_{N-m}(\alpha)\; Q_m(\alpha)}{Q_N(\alpha)} = P_{N,\,m},$$

$$\frac{1}{1 - \bar{r}'_{N,\,m}\, \bar{r}''_{N,\,m}} = \frac{Q_{N-m}(\beta)\; Q_m(\beta)}{Q_N(\beta)} = \overline{P}_{N,\,m}.$$

Значит, величины $P_{N,\,m}$ и $\overline{P}_{N,\,m}$ есть коэффициенты, учитывающие многократные отражения излучения (для $E_\varkappa$ и $E_{\varkappa n}$ компонент соответственно) в k-ом отсеке стопки, состоящей из N пластин.

3. Теперь, пользуясь формулами предыдущих разделов, мы можем написать выражения для $\varkappa$- и $\varkappa n$-компонент полей излучения в произвольном отсеке стопки при наклонном прохождении через нее заряда. Для этого нам надо знать еще формулы переходного излучения на одной пластине, когда она поставлена в произвольном месте на оси z [14].

Они имеют вид

$$E'_{0,x}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}P''_{\varkappa}e^{i\varphi''_0 z_0},\quad E'_{0,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2 g}\cdot\frac{\omega}{c^2}\cdot\frac{k_x v_y}{\varkappa}P''_{\varkappa n}e^{i\varphi''_0 z_0},$$

$$E'_{1,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}P'_{\varkappa}e^{i\varphi'_0 z_0},\quad E'_{1,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2 g}\cdot\frac{\omega}{c^2}\cdot\frac{k_x v_y}{\varkappa}P'_{\varkappa n}e^{i\varphi'_1 z_0},$$

где $\varphi'_0=k_z-\lambda_0$, $\varphi''_0=k_z+\lambda_0$, а $z=z_0$ есть координата левого края пластинки. Сначала построим выражения для компонент поля $E'_{N,\varkappa}$ и $E'_{N,\varkappa n}$ за стопкой пластин. Чтобы получить вклад в поле излучения за стопкой пластин от поля, образованного на k-ой пластинке и направленного вперед, надо умножить его на коэффициент, учитывающий многократные отражения в k-ом отсеке ($P_{N,k}$), и коэффициент прохождения волны через оставшиеся $(N-k)$ пластин ($\eta^{k,N}_{k<N}$). Вклад в $E'_{N,\varkappa}$ и $E'_{N,\varkappa n}$ даст также поле, образованное на k-ой пластине, но направленное назад (E''_{k-1}). Этот вклад будет равен E''_{k-1}, умноженному на коэффициент, учитывающий многократные отражения в $(k-1)$-ом отсеке ($P_{N,k-1}$), коэффициент отражения от предыдущих $(k-1)$ пластин ($r''_{N,k-1}$) и на коэффициент прохождения через $(N-k+1)$ пластин ($\eta^{k-1,N}_{k-1<N}$). Суммируя эти вклады по всем пластинкам стопки, мы будем иметь

$$E'_{N,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}\left\{P'_{\varkappa}\sum_{k=1}^{N}e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}P_{N,k}\,\eta^{k,N}_{k<N}+\right.$$
$$\left.+P''_{\varkappa}\sum_{k=2}^{N}e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,r''_{N,k-1}\,\eta^{k-1,N}_{k-1<N}\right\},\tag{3.23}$$

$$E'_{N,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2 g}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\left\{P'_{\varkappa n}\sum_{k=1}^{N}e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\overline{P}_{N,k}\,\overline{\eta}^{k,N}_{k<N}+\right.$$
$$\left.+P''_{\varkappa n}\sum_{k=2}^{N}e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\overline{P}_{N,k-1}\,\overline{r}''_{N,k-1}\,\overline{\eta}^{k-1,N}_{k-1<N}\right\}.\tag{3.24}$$

Легко видеть что при $N=1$ формулы (3.23), (3.24) переходят в формулы (2.9). При $u_y=0$, т. е. при перпендикулярном входе заряда в стопку, $E'_{N,\varkappa n}=0$, а выражение для $E'_{N,\varkappa}$ переходит в формулу (34) работы [14]. При этом надо иметь в виду, что в отмеченной формуле суммирование проводилось по отсекам, а не по пластинкам, как это было сделано в настоящей работе. Поэтому при сравнении формул необходимо в некоторых слагаемых положить $m=k-1$. С помощью аналогичных рассуждений мы можем написать формулы для компонент $E''_{0,\varkappa}$ и $E''_{0,\varkappa n}$ поля излучения до стопки. Они будут иметь вид

$$E''_{0,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}\left\{P''_{\varkappa}\sum_{k=1}^{N}e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,\eta^{k-1,0}_{k-1>0}+\right.$$

$$+P'_{\varkappa}\sum_{k=1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0} P_{N,k}\, r'_{N,k}\, \eta^{k,0}_{k>0}\Big\}, \qquad (3.25)$$

$$E''_{0,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2 g}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\Big\{P''_{\varkappa n}\sum_{k=1}^{N} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\,\overline{P}_{N,k-1}\,\eta^{k-1,0}_{k-1>0}+$$

$$+P''_{\varkappa n}\sum_{k=1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\,\overline{P}_{N,k}\,\overline{r}'_{N,k}\,\overline{\eta}^{k,0}_{k>0}\Big\}. \qquad (3.26)$$

При $N=1$ формулы (3.25) и (3.26) переходят в формулы (2.10). При $v_y=0$ (перпендикулярное прохождение заряда через стопку пластин) $E''_{0,\varkappa n}=0$, а формула для $E''_{0,\varkappa}$ переходит в формулу (35) работы [14].

Наконец, для построения поля внутри стопки в каком-либо отсеке m необходимо найти вклад в это поле от пластин, расположенных справа и слева от отсека m. В результате получим

$$E'_{m,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}\Big\{P'_{\varkappa}\Big[\sum_{k=1}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}P_{N,k}\,\eta^{k,m}_{k<m}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}P_{N,k}\,r'_{N,k}\,\eta^{k,m}_{k>m}\,r''_{N,m}\Big]+ \qquad (3.27)$$

$$+P''_{\varkappa}\Big[\sum_{k=2}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,r''_{N,k-1}\,\eta^{k-1,m}_{k-1<m}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{N} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,\eta^{k-1,m}_{k-1<m}\,r''_{N,m}\Big]\Big\},$$

$$E'_{m,\varkappa n}=\frac{ei}{2\pi^2 g}\,\frac{\omega}{e}\,\frac{k_x v_y}{\varkappa}\Big\{P'_{\varkappa n}\Big[\sum_{k=1}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\,\overline{P}_{N,k}\,\overline{\eta}^{k,m}_{k<m}+ \qquad (3.28)$$

$$+\sum_{k=m+1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\,\overline{P}_{N,k}\,\overline{r}_{N,k}\,\overline{\eta}^{k,m}_{k>m}\,\overline{r}''_{N,m}\Big]+$$

$$+P''_{\varkappa n}\Big[\sum_{k=2}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\,\overline{P}_{N,k-1}\,\overline{r}''_{N,k-1}\,\overline{\eta}^{k-1,m}_{k-1<m}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{N} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\,\overline{P}_{N,k-1}\,\overline{\eta}^{k-1,m}_{k-1<m}\,\overline{r}''_{N,m}\Big]\Big\},$$

$$E''_{m,\varkappa}=\frac{ei\varkappa}{2\pi^2 g}\Big\{P''_{\varkappa}\Big[\sum_{k=2}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,r''_{N,k-1}\,\eta^{k-1,m}_{k-1<m}\,r'_{N,m}+$$

$$+\sum_{k=m+1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}P_{N,k-1}\,\eta^{k-1,m}_{k-1>m}\Big]+P'_{\varkappa}\Big[\sum_{k=1}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}P_{N,k}\,\eta^{k,m}_{k<m}\,r'_{N,m}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}P_{N,k}\,r'_{N,k}\,\eta^{k,m}_{k>m}\Big]\Big\}, \qquad (3.29)$$

$$\begin{aligned} E''_{m,\,\varkappa n} = \frac{ei}{2\pi^2 g}\frac{\omega}{c^2}\frac{k_x v_y}{\varkappa}\Bigg\{ P''_{\varkappa n}\Bigg[\sum_{k=2}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\,\overline{P}_{N,\,k-1}\,\overline{r}''_{N,\,k-1}\,\overline{\eta}^{k-1,\,m}_{k-1<m}\,\overline{r}'_{N,\,m} + \\ + \sum_{k=m+1}^{N} e^{i(k-1)(a+b)\varphi''_0}\,\overline{P}_{N,\,k-1}\,\overline{\eta}^{k-1,\,m}_{k-1>m}\Bigg] + \\ + P'_{\varkappa n}\Bigg[\sum_{k=1}^{m} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\,\overline{P}_{N,\,k}\,\overline{\eta}^{k,\,m}_{k<m}\,\overline{r}'_{N,\,m} + \\ + \sum_{k=m+1}^{N-1} e^{i(k-1)(a+b)\varphi'_0}\,\overline{P}_{N,\,k}\,\overline{r}'_{N,\,k}\,\overline{\eta}^{k,\,m}_{k>m}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

4. Приведем также формулы для потока энергии переходного и черенковского излучений, образуемых при наклонном прохождении заряженной частицы через стопку за все время ее пролета, на далеких расстояниях от стопки через плоскость $z = \text{const}$.

а) Поток излучения за стопкой

$$S'_N = \frac{4\pi^2}{cv_z^2}\int_0^\infty \{|E'_{N,\,\varkappa}|^2 + \cos^2\vartheta\,|E'_{N,\,\varkappa n}|^2\}\,\omega^2 d\Omega d\omega, \tag{3.31}$$

где $\varkappa = \dfrac{\omega}{c}\sin\vartheta$, ϑ — есть угол между лучем зрения и положительным направлением оси z, $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, а Фурье-компоненты $E'_{N,\,\varkappa}$ и $E'_{N,\,\varkappa n}$ определяются формулами (3.23) и (3.24), (φ — азимутальный угол).

б) Поток излучения в пространстве до стопки

$$S''_0 = \frac{4\pi^2}{cv_z^2}\int_0^\infty \{|E''_{0,\,\varkappa}|^2 + \cos^2\vartheta\,|E''_{0,\,\varkappa n}|^2\}\,\omega^2 d\Omega d\omega. \tag{3.32}$$

Здесь ϑ — есть угол между лучем зрения и отрицательным направлением оси z, а Фурье-компоненты $E''_{0,\,\varkappa}$ и $E''_{0,\,\varkappa n}$ определяются формулами (3.25) (3.26).

В заключение авторы выражают благадарность Н А. Корхмазяну за полезные беседы в ходе выполнения работы.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 4.V.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян*. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 7 (1958).
2. *Н. А. Корхмазян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 6, 87 (1958).
3. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 38, 1814 (1960).
4. *Н. А. Корхмазян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 2, 139 (1960).
5. *Н. А. Корхмазян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 115 (1962).
6. *В. Е. Пафомов*, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, 5, 484 (1962).

7. *H. Boersch, P. Dobberstein, D. Fritzsche, G. Sauerbrey*, Zeit. Phys., 187, 97 (1965).
8. *Н. А. Корхмазян, С. С. Элбакян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 3 (1969).
9. *В. Е. Пафомов*, Труды ФИАН, 44, 28 (1969).
10. *И. М. Франк*, Препринт ОИЯИ, Р4—4980 (1970).
11. *В. А. Енибарян, Б. В. Хачатрян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 1, 11 (1966).
12. *J. C. Ashley*, Phys. Rev., 155, 208 (1967).
13. *Г. М. Гарибян, С. С. Элбакян*, Изв. АрмССР, Физика, 3, 244 (1968).
14. *В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 339 (1969).

ԹԻԹԵՂՈՎ ԵՎ ԿԱՄԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԹԻԹԵՂՆԵՐՈՎ ՄԱՍՆԻԿԻ ԹԵՔ ԱՆՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ԱՌԱՋԱՑՈՂ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Վ. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ

Աշխատանքում ստացված են բանաձևեր անցումային ճառագայթման դաշտերի և ճառագայթվող էներգիայի համար, երբ մասնիկը թեքությամբ անցնում է երկու միջավայրերը բաժանող սահմանով վակուումում տեղավորված մեկ թիթեղով և կամավոր թվով թիթեղներով։ Օգտագործելով վեկտորների հիմքային այլ սիստեմ, համեմատած նախկինում կատարված աշխատանքների հետ, ստացվել են մեկ սահմանի խնդրի դեպքում պարզ բանաձևեր։ Մեկ թիթեղի և կամավոր թվով թիթեղների խնդիրը լուծելիս, կիրառվել է նախկինում մշակված լուծումների կառուցման մեթոդը։

ON THE THEORY OF TRANSITION RADIATION IN AN OBLIQUE PASSAGE OF A CHARGED PARTICLE THROUGH A PLATE AND A STACK OF PLATES

V. A. ARAKELIAN, G. M. GARIBIAN

Transition radiation fields, produced in an oblique passage of a charged particle the interface of the media, a plate and a stack of plates, are obtained in the investi-
hrough gation. The formulas derived are of a relatively simpler form compared with those obtained previously and they are more easily interpreted since in solving the problem on an oblique passage of a charge through the interface between the media a different system of basis vectors has been applied.

Yet in the case of a plate or a stack of plates the method of constructing solutions, developed previously, has been used.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 338—249 (1970)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧЕТНОСТИ ЧАСТИЦ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ

В. А. ХОЗЕ

Рассмотрены методы определения внутренних четностей частиц в реакциях $e^+ e^- \to a_1 + a_2$. Метеды базируются на инвариантности относительно вращений и отражений и сохранении спиральности ультрарелятивистских электронов.

1. Одной из важнейших задач физики высоких энергий являются эксперименты по определению внутренних четностей частиц (напр., [1–3]). В последнее время достигнут существенный прогресс в постановке экспериментов на встречных электрон-позитронных пучках. В связи с этим представляет интерес рассмотрение методов определения внутренней четности в реакциях вида

$$e^+ e^- \to a_1 + a_2. \tag{1}$$

Представляется целесообразным рассмотреть случай поляризованных начальных частиц, поскольку излучение при длительном движении в магнитном поле накопителя может приводить к возникновению поперечной поляризации электрона (против поля) и позитрона (по полю) [4—5]. Используются лишь общие требования инвариантности относительно вращений и отражений и сохранение спиральности ультрарелятивистских электронов [6—8].

Пусть E, $\vec{p}$ энергия и импульс начального электрона ($E \gg m_e$); $\vec{q}$ — импульс частицы a_k в с. ц. и. $\vec{\zeta}^{(1)}$, $\vec{\zeta}^{(2)}$ вектора поляризации электрона и позитрона. J_l, I_l спин и внутренняя четность частицы a_l. В качестве оси z выберем направление импульса $\vec{p}$. Ось x направим по нормали к плоскости реакции (плоскость, образованная векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$). Ограничимся рассмотрением случаев, когда по поляризациям конечных частиц проведено суммирование или если конечные частицы имеют определенные проекции спинов на направление нормали к плоскости реакции. Выражение для дифференциального сечения реакции (1) (с точностью до членов $\sim m_e/E$) при произвольной поляризации начальных частиц записывается в виде

$$\sigma = a(\theta)\,[1+\zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}] + b(\theta)\,(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}\zeta_2^{(2)}), \tag{2}$$

где

$$a(\theta) = \frac{1}{2}\left|\langle \vec{q}, f\,|S|\,(+), (+)\,\vec{p}\rangle\right|^2,$$

$$b(\theta) = \frac{1}{2}\langle \vec{q}, f\,|S|\,(+), (+)\,\vec{p}\rangle\langle \vec{q}, f\,|S|\,(-), (-)\,\vec{p}\rangle^*. \tag{3}$$

В (3) величина $<\vec{q},\ f|S|(+),\ (+)\vec{p}>(<\vec{q},\ f|S|(-),\ (-)\vec{p}>)$ матричный элемент процесса (1) при соответствующей нормировке для случая, когда обе начальные частицы поляризованы по оси z (против оси z).

При выводе (2), (3) использовались сохранение спиральности ультрарелятивистских электронов и инвариантность относительно отражения в плоскости реакции.

2. Рассмотрим процесс (1) в однофотонном канале для случая $J_1 = J,\ J_2 = 0$.

Заметим, что если $J_1 = J_2 = 0$, процесс (1) идет в однофотонном канале лишь если величина $I = I_1 I_2$ положительна, соответствующее выражение для сечения процесса содержится в работе [9]. Методы определения четности для случая, когда в конечном состоянии n частиц со спином 0, импульсы которых лежат в плоскости реакции, содержатся в работе [8]. В силу однофотонности приближения, проекция спина частицы a_1 на направление ее импульса может принимать лишь значения $M = \pm 1,\ 0$. Согласно результатам работ [9—11], для дифференциального сечения, просуммированного по поляризациям частицы a_1 можно получить соотношения

$$a(\theta) = 2G_1 - G_2 \sin^2\theta,$$
$$b(\theta) = -G_2 \sin^2\theta. \tag{4}$$

В (4) $\cos\theta = \vec{p}\vec{q}/|\vec{p}||\vec{q}|$. G_1, G_2 — функции формфакторов конечных частиц[1].

Используя (3, 4), однофотонность канала и инвариантность относительно отражения осей y и z, получаем

$$G_2 = -1/4(1+\eta)F_1 + F_2,$$
$$2G_1 - G_2 = 1/4(1+\eta)F_1 + F_2, \tag{5}$$

где

$$F_1 = |<\vec{q},\ J,\ 0|S|(+),\ (+)\vec{p}>|^2 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F_2 = <\vec{q},\ J,\ 1|S|(+),\ (+)\vec{p}>|^2 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = I(-1)^J. \tag{6}$$

При $\eta = -1$

$$G_1 = G_2 = F_2, \tag{7}$$

и выражение для дифференциального сечения имеет вид

$$\sigma = F_2\left[(1+\cos^2\theta)(1+\zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}) - \sin^2\theta(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}\zeta_2^{(2)})\right]. \tag{8}$$

Проверка выполнения соотношения (8) при исследовании диффе-

---

[1] Величины G_1 и G_2 простым образом связаны с функциями D_1 и D_2 работ [9, 11].

ренциального сечения реакции может служить способом определения знака величины η.

3. Пусть частица a_1 — фотон, а $J_2 = 0$.

В этом случае $M \neq 0$, $F_1 = 0$ и имеет место (8) независимо от знака величины I_2. Для определения величины I_2 здесь необходимо измерять поляризацию конечного фотона. Используя (2, 3) и инвариантность относительно отражений в плоскости реакции, получим выражение для параметра ξ, определяющего степень линейной поляризации конечного фотона по направлению нормали:

$$\xi\,\bar{\sigma} = R(\theta)\,(1 + \zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}) - I_2\sigma_0(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}\zeta_2^{(2)}),$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0(1 + \zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}) - I_2R(\theta)\,(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}\zeta_2^{(2)}). \tag{9}$$

В (9) σ_0 — сечение реакции с неполяризованными частицами, $\bar{\sigma}$ — сечение с поляризованными начальными частицами. Величина $R(\theta)$[3] определяется динамикой процесса, ее вид легко получить из (3). С помощью формул (9) легко получить различные соотношения между наблюдаемыми, позволяющие определить I_2. Так, в актуальном для встречных пучков случае поперечных антипараллельных поляризаций начальных частиц величина I_2 может быть определена, например, из соотношения

$$\frac{\xi_\perp\bar{\sigma}_\perp - \xi_\parallel\bar{\sigma}_\parallel}{\bar{\sigma}_\perp + \bar{\sigma}_\parallel} = I_2|\vec{\zeta}^{(1)}|\,|\vec{\zeta}^{(2)}|. \tag{10}$$

В (10) $\xi_\perp$ ($\xi_\parallel$) — степень линейной поляризации конечного фотона для случая $\zeta_1^{(1)} = \pm|\vec{\zeta}^{(1)}|$, $\zeta_1^{(2)} = \mp|\vec{\zeta}^{(2)}|$ (для случая $\zeta_2^{(1)} = \pm|\vec{\zeta}^{(1)}|$, $\zeta_2^{(2)} = \mp|\vec{\zeta}^{(2)}|$).

$\bar{\sigma}_\perp$, $\bar{\sigma}_\parallel$ — сечения реакции при тех же поляризациях начальных частиц.

4. Рассмотрим случай $J_1 = 1/2$, $J_2 = 1/2$. Можно показать, что выражения для проекций векторов поляризации частиц a_1 и a_2 на направление нормали (p^1, p^2) имеют вид

$$p^{1,2}\bar{\sigma} = N_{1,2}(\theta)\,(1 + \zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}) - IN_{2,1}(\theta)\,(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}\zeta_2^{(2)}),$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0(1 + \zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}) - IK(\theta)\,(\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)}\zeta_2^{(1)}). \tag{11}$$

Здесь $I = I_1I_2$; $N_{1,2}(\theta)$, $K(\theta)$ определяются динамикой процесса, их вид легко получить из (3). Смысл величин σ_0, $\bar{\sigma}$ тот же, что в п. 3.

С помощью (11) легко получить различные соотношения между наблюдаемыми, позволяющие определить I. Для случая поперечных антипараллельных поляризаций начальных частиц аналогично п. 3 величина I может быть определена, например, из соотношения

$$\frac{(p^1)_\perp\bar{\sigma}_\perp - (p^1)_\parallel\bar{\sigma}_\parallel}{(p^2)_\perp\bar{\sigma}_\perp + (p^2)_\perp\bar{\sigma}_\parallel} = I|\vec{\zeta}^{(1)}|\,|\vec{\zeta}^{(2)}|. \tag{12}$$

---

[3] В однофотонном канале $I_2R(\theta)/\sigma_0 = \sin^2\theta/(1 + \cos^2\theta)$.

Если $|\vec{\zeta}^{(1)}| = |\vec{\zeta}^{(2)}| = 1$, то

$$\begin{aligned} (p^1)_{\perp} &= I(p^2)_{\perp}, \\ (p^1)_{\parallel} &= -I(p)^2_{\parallel}. \end{aligned} \tag{13}$$

Если a_2 является античастицей по отношению к a_1, то в этом случае в силу СР инвариантности теории

$$N_1(\theta) = N_2(\theta), \; p^1 = p^2. \tag{14}$$

Если a_1, a_2 — мюонная пара, то $N_{1,2}(\theta) \sim \mu/E$ (μ — масса мюона) в силу сохранения спиральности.

Внутренняя четность частиц в процессе (1) может также определяться из поведения сечения процесса у порога [12]. Автор благодарен проф. В. Б. Берестецкому и проф. В. А. Сидорову за обсуждение.

Ереванский физический институт

Поступила 17.III.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. М. Биленький, Р. М. Рындин*, ЖЭТФ, 45, 1192 (1963).
2. *С. М. Биленький, Л. И. Лапидус, Р. М. Рындин*, УФН, 84, 243 (1964).
3. *В. М. Биленький, Р. М. Рындин*, Ядерная физика, 3, 332 (1966).
4. *А. А. Соколов, И. М. Тернов*, ДАН. СССР, 153, 1052 (1963).
5. *В. Н. Байер, В. М. Катков*. ЖЭТФ, 52, 1422 (1967).
6. *И. Б. Хриплович*, Ядерная физика, 3, 762 (1966).
7. *В. Н. Байер, В. А. Хозе*, Ядерная физика, 5, 1257 (1967).
8. *В. А. Хозе*, Ядерная физика, 7, 1094 (1968).
9. *В. Н. Байер, В. С. Фадин*, ДАН, СССР, 161, 74 (1965).
10. *D. R. Yennie, M. M. Levy, D. G. Ravenhall*, Rev. Mod. Phys., 29, 144 (1957).
11. *В. Н. Байер, В. Н. Фадин, В. А. Хозе*, Ядерная физика, 3, 327 (1966).
12. *В. Н. Байер*. УФН, 78, 619 (1962).

ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԶՈՒՅԳՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱԾ ՓՆՋԵՐԻ ԷՔՍՊԵՐԻՄԵՆՏՆԵՐՈՒՄ

Վ. Ա. ԽՈԶԵ

Դիտարկված են մասնիկների ներքին զույգության որոշման մեթոդները $e^+e^- \to a_1 + a_2$ *ռեակցիաներում։*

Մեթոդները հիմնված են պտտման և անդրադարձման նկատմամբ ինվարիանտության և գերհարաբերական էլեկտրոնների պարուրության պահպանման վրա։

ON DETERMINATION OF PARTICLE PARITY IN EXPERIMENTS ON COLLIDING BEAMS

V. A. KHOZE

The methods of determining the intrinsic parities in reactions $e^+e^- \to a_1 + a_2$ are discussed. The methods are based on the invariance with respect to rotations and reflections and on the conservation of helicity of ultrarelativistic electrons.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 342—346 (1970)

СЕЧЕНИЕ НЕУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНО-АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ С ЯДРАМИ АТОМОВ АЛЮМИНИЯ И СВИНЦА

Д. Т. ВАРДУМЯН, Г. А. МАРИКЯН, К. А. МАТЕВОСЯН

Экспериментальная установка содержит ионизационный калориметр и широкозазорные искровые камеры с рабочей площадью 106×60 *см*^{2}, между которыми помещены мишени из алюминия и свинца.

Осуществление совместной работы калориметра и искровых камер позволяет исследовать неупругие ядерные взаимодействия с регистрацией первичной и вторичных частиц в камерах и с измерением энергии первичной в калориметре.

Представлено краткое описание установки и предварительные результаты измерений, которые согласуются с данными других авторов.

После осуществления совместной работы [1, 2] широкозазорных искровых камер и ионизационного калориметра открылись новые возможности исследования ядерных взаимодействий при сверхвысоких энергиях.

Установка (рис. 1), расположенная на станции Нор-Амберд и предназначенная для исследования ядерно-активной компоненты косми-

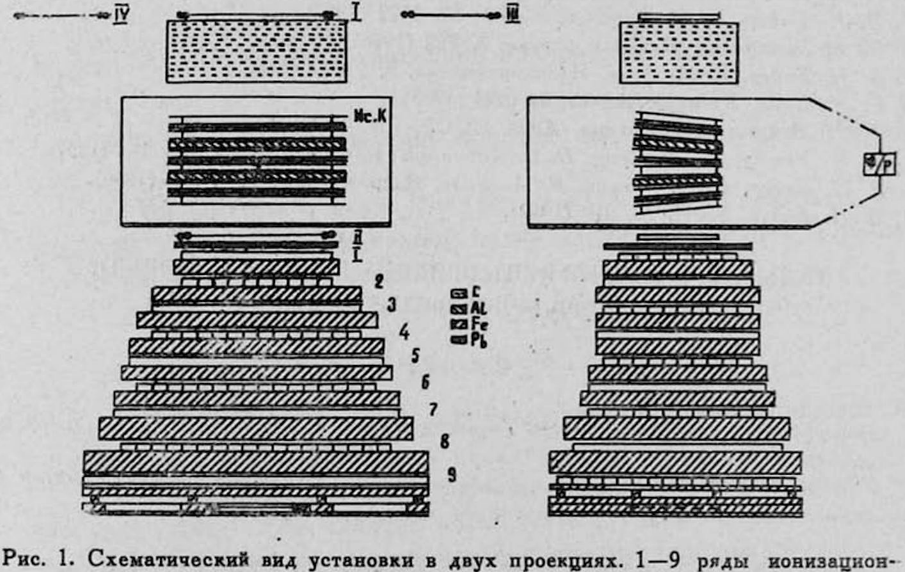


Рис. 1. Схематический вид установки в двух проекциях. 1—9 ряды ионизационных камер калориметра, I—IV, „0“ ряды счетчиков Гейгера-Мюллера, ИСК — искровые камеры, Ф/Р — фоторегистратор.

ческих лучей на высоте 2050 *м* над уровнем моря, содержит ионизационный калориметр, искровые камеры и годоскопическую систему счетчиков Гейгера-Мюллера. В калориметре 9 рядов ионизационных камер ИК-6, расположенных между слоями железа с общей толщиной

820 $г/см^2$. Над первым рядом находится свинцовый поглотитель толщиной 45 $г/см^2$, который предназначен для выделения электронно-фотонной компоненты.

В схему совпадений были включены I и II ряды счетчиков Гейгера-Мюллера и II—VIII ряды калориметра. С целью уменьшения доли боковых событий, крайние ионизационные камеры калориметра (по одной в одной проекции и по двум в другой) были исключены из схемы совпадений. Регистрация событий происходила, когда заряженная частица проходила через указанные ряды и в калориметре образовывала ливень с числом частиц большим порогового. Эффективная светосила установки составляет 0,2 $м^2$. *стер*.

В первой серии измерений над калориметром находились шесть искровых камер с размерами $106 \times 60 \times 5$ $см^2$, между которыми в трех отсеках были расположены мишени из свинца толщиной по 33 $г/см^2$ и алюминия (электроды искровых камер) по 2,2 $г/см^2$, а в двух — из алюминия толщиной по 16,5 $г/см^2$. Маленькая ширина зазора искровых камер была выбрана с целью облегчения условий экранировки усилителей калориметра от наводок высоковольтного разряда в камерах, так как этот вопрос в то время еще не был решен.

Из-за задержек запускающего импульса (~ 20 *мксек*) треки в подобной камере получаются расширенными, вследствие чего разделение двух частиц, проходящих на расстоянии 10 *мм* друг от друга, становится практически невозможным. Вместе с тем камера с зазором 50 *мм* имеет достаточную эффективность регистрации ливня частиц [3] и дает возможность зарегистрировать упругие ядерные взаимодействия, происходящие в веществе, расположенного над камерой. То есть с помощью таких камер можно определить сечение неупругого ядерного взаимодействия, но точность определения углового распределения вторичных частиц окажется неудовлетворительной.

Для создания условий подробного изучения характеристик неупругого ядерного взаимодействия, необходимо использовать искровые камеры с более широким зазором, но так, чтобы при этом можно было обеспечить эффективную экранировку усилителей калориметра от помех высоковольтного разряда в этих камерах.

После изучения и окончательного решения вопроса экранировки, исходя из конструктивных особенностей нашей установки, были выбраны искровые камеры с межэлектродным зазором 100 *мм*, хотя условия экранировки допускали использование камер с зазором в 2—3 раза большим.

Во второй серии измерений над калориметром были помещены 4 искровые камеры размерами $106 \times 60 \times 10$ $см^3$, между которыми в одном отсеке находилась свинцовая мишень толщиной 30 $г/см^2$ и алюминевая толщиной 2,7 $г/см^2$ (электроды камер), а в остальных двух — алюминевая толщиной по 16,7 $г/см^2$. Расчеты показывают [4], что при этих толщинах мишеней $\sim 70\%$ всех случаев ядерного взаимодействия с образованием в среднем 4 частиц, последние из мишени выходят без вторичного взаимодействия. Следовательно, имеется возможность определения множественности вторичных частиц.

Из полученных фотографий (рис. 2) видно, что по зарегистрированным в искровых камерах вторичным частицам можно достаточно

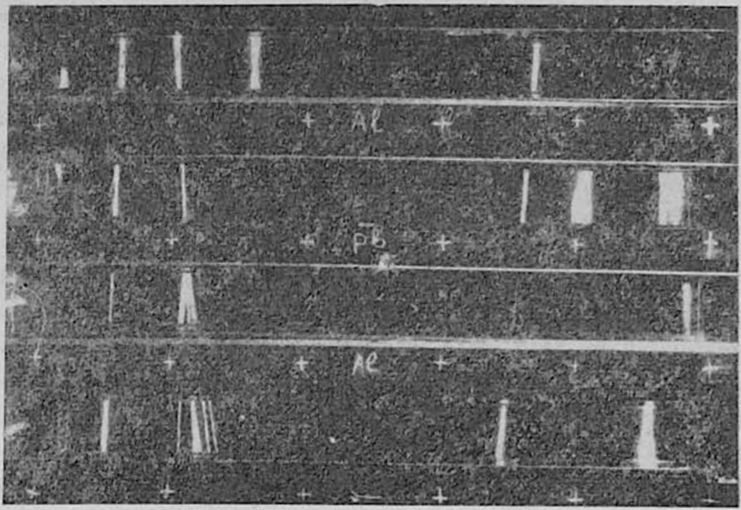


Рис. 2. Фотография треков частиц в искровых камерах.

точно определить место их генерации и определить пробег неупругого взаимодействия. Для этого необходимо знать полное количество частиц N_0, прошедших через данную мишень и число тех из них N, которые претерпели ядерное взаимодействие с образованием вторичных $\geqslant 2$ частиц. В этом случае пробег неупругого ядерного взаимодействия выражается формулой

$$\lambda = \frac{x}{\ln \frac{N_0}{N_0 - N}},$$

где x — толщина однородной мишени.

Если в данном промежутке имеются две разнородные мишени и трудно выделить в которой из них произошло взаимодействие, как это имеет место в нашем случае (свинец и алюминиевые электроды искровых камер), пробег взаимодействия в свинце будет

$$\lambda_{pb} = \frac{x_{pb}}{\ln \frac{N_0}{N_0 - N} - \frac{x_{Al}}{\lambda_{Al}}},$$

где x_{pb} — толщина свинца, x_{Al} — толщина алюминия, λ_{Al} — пробег неупругого взаимодействия в алюминии, для которого было принято значение, полученное в этом эксперименте.

Энергия первичных частиц измерялась с помощью ионизационного калориметра, поэтому для определения N_0 выделялись частицы направление которых по искровым камерам совпадало (с точностью $\pm 6^\circ$) с осью локального ливня, зарегистрированного в калориметре. Выходящие в бока ливни исключались из рассмотрения.

Исходя из этого критерия отбора, в статистику включались как одиночные частицы, так и события, когда имелись сопровождающие частицы, находящиеся на расстоянии >10 *см* от отобранной частицы и по направлению полностью выходящие за пределы локального ливня в калориметре. Вследствие такого отбора число ложных событий (случайных совпадений) становится $< 5\%$. Имея ввиду, что почти столько же процентов ложных событий будут включены в число частиц, прошедших без взаимодейстния, можно утверждать, что погрешности сечения взаимодействия из-за ложных событий будут $\leqslant 2\%$.

В двух сериях измерений были отобраны 292 частицы (113 в первой серии и 179 во второй) с энергией $\geqslant 10^{11}$ *эв*, со средним значением $\sim 5 \cdot 10^{11}$ *эв*. Из них в алюминиевых мишенях провзаимодействовали 69, чему соответствует пробег $\lambda_{Al} = 104 \pm 14$ *г/см*^{2}. В мишенях из свинца было зарегистрировано 68 случаев неупругого взаимодействия, что дает $\lambda_{Pb} = 202 \pm 27$ *г/см*^{2}. В эти значения вводились поправки, учитывающие долю толчков от μ-мезонов ($\sim 5\%$) и направление прохождения первичных частиц через мишень.

Используя эти значения, был определен показатель в формуле зависимости сечения ядерного взаимодействия от атомного веса вещества, $\sigma = \sigma_0 A^{\alpha}$, $\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}12$. Полученные результаты согласуются с данными других работ [5, 6].

Ереванский физический институт Поступила 2.10.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Т. Вардумян, Г. А. Марикян, К. А. Матевосян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 5, 14 (1968).
2. *Н. Х. Бостанджян, Д. Т. Вардумян, Г. А. Марикян, К. А. Матевосян, А. П. Оганесян*, ПТЭ, 1, 43 (1969).
3. *Н. Х. Бостанджян, Г. А. Марикян, К. А. Матевосян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 1, 55 (1966).
4. *R. W. Tompson*, Proc. of Conf. on the Interaction between Cosmic Rays. September, 1964.
5. *Г. А. Марикян, К. А. Матевосян*, ЖЭТФ, 51, 1613 (1966).
6. *Е. В. Денисов*, Изв. АН СССР, серия физ., 32, 368 (1968).

ԱԼՅՈՒՄԻՆԻ ԵՎ ԿԱՊԱՐԻ ԱՏՈՄՆԵՐԻ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ՀԵՏ ՄԻՋՈՒԿԱ-ԱԿՏԻՎ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՈՉ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔԸ

Դ. Տ. ՎԱՐԴՈՒՄՅԱՆ, Գ. Հ. ՄԱՐԻԿՅԱՆ, Կ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Էքսպերիմենտալ սարքավորումն ընդգրկում է իոնացման կալորիմետր և լայնաճեղք կայծային խցեր 106×60 սմ² աշխատանքային մակերեսով, որոնց միջակայքերում տեղադրված են ալյումինե և կապարե թիրախներ։

Կալորիմետրի և կայծային խցերի համատեղ աշխատանքի իրագործումը հնարավորություն է ընձեռում հետազոտել ոչ առաձգական փոխազդեցությունները թիրախներում՝ կայծային խցերում արձանագրելով առաջնային և երկրորդային մասնիկները և կալորիմետրում չափելով առաջնայինի էներգիան։

Ներկայացված է սարքավորման համառոտ նկարագրությունը և չափումների նախնական արդյունքները, որոնք համընկնում են այլ հեղինակների տվյալների հետ։

NONELASTIC INTERACTION CROSS-SECTION OF NUCLEAR-ACTIVE PARTICLES WITH NUCLEI OF ALUMINUM AND LEAD ATOMS

D. T. VARDUMIAN, G. A. MARIKIAN, K. A. MATEVOSIAN

An experimental arrangement is described consisting of an ionization calorimeter and wide-gap spark chambers of 106×60 *cm*² opereting area with aluminum and lead targets placed between them.

A combined operation of the calorimeter and spark chambers allows to investigate nonelastic nuclear interactions, detecting primary and secondary particles in the chambers and measuring the primary particle energy in the calorimeter.

The preliminary results of measurements are presented which are in good agreement with the data of other authors.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 347—363 (1970)

О ВЛИЯНИИ РАЗМЕРОВ КРИСТАЛЛА НА ШИРИНУ ДИФРАКЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ. I

П. А. БЕЗИРГАНЯН, Л. Г. ГАСПАРЯН

Рассмотрено влияние размеров кристалла на ширину дифракционных максимумов рентгеновских лучей и доказано, что в общем случае ширина рефлекса зависит как от размеров кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей, так и от размеров отражающих плоскостей в плоскости падения.

Рассмотрены случаи неподвижного и качающегося кристаллов.

Изучение зависимости ширины дифракционных максимумов от размеров и формы облучаемого кристалла имеет важное значение в рентгеноструктурных исследованиях. Этот вопрос стал объектом исследования с тех пор, когда Шеррер [1] впервые наблюдал расширение линий на рентгенограммах коллоидального золота.

В работах [1 — 10], посвященных влиянию размеров кристалла на ширину дифракционных максимумов, в различных приближениях выведены формулы, связывающие ширины дифракционных максимумов с размерами и формой облучаемых кристаллов. Обзору этого вопроса и сравнению различных методов определения размеров частиц по рентгенограммам посвящены работы [11—13].

В книгах [15—19] изложены теории и экспериментальные методы исследования влияния размеров кристалла на ширину дифракционных максимумов. В книге [14] детально рассмотрен вопрос определения размера малых частиц электронографическим методом.

Обычно считают, что рентгенографически определяется размер частицы в направлении нормали отражающих плоскостей (элементарная теория) или среднее значение в том же направлении (строгая теория).

Однако в работе [20] в рамках элементарной теории показано, что рентгенографически определяются размеры кристалла в плоскости падения в направлении минимального размера.

Цель настоящей работы показать, что и в рамках строгой теории рентгенографически определяется среднее значение размеров кристалла в плоскости падения.

§ 1. Критика теорий влияния размера кристалла на ширину дифракционных максимумов

Несмотря на то, что вопрос влияния размера кристалла на ширину дифракционных максимумов впервые полностью разобрал Лауэ и на его работе основываются все дальнейшие исследования, тем не менее работа Стокса и Вильсона считается более строгой и общей. Поэтому мы здесь ограничимся разбором работ только последних авторов.

Стокс и Вильсон [6], приведя интерференционную функцию

$$J_0\left(\frac{S}{\lambda}\right) = \sum_{n}\sum_{n'} \exp\{ik\vec{S}(\vec{r}_n - \vec{r}_{n'})\} \tag{1}$$

к виду

$$J_0(\xi, \eta, \psi) = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \exp\{2\pi i(m_1\xi + m_2\eta + m_3\psi)\}, \tag{2}$$

где

$$m_1 = n_1' - n_1; \quad m_2 = n_2' - n_2; \quad m_3 = n_3' - n_3,$$

находят:

1. Максимальное значение средней интерференционной функции $\overline{J_0(m)}$ подстановкой $\xi = 0$ и последующим интегрированием по η и ψ, что дает

$$4\pi\rho_m^2 \overline{J_0(m)} = b^*c^* \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{m_1} 1, \tag{3}$$

где

ρ_m — расстояние узла обратной решетки от начала координат.

2. Интегральную интенсивность поперек линии колец Дебая-Шеррера интегрированием по ξ, η и ψ, что дает

$$4\pi\rho_m^2 \int J_0(\rho)\, d\rho = a^*b^*c^* \sum\sum\sum 1. \tag{4}$$

3. Интегральную ширину линии с помощью (3) и (4), что дает

$$\beta(\rho) = \frac{1}{G_0(m)} \int J_0(\rho)\, d\rho = V\left(a^2bc \sum\sum\sum\sum 1\right)^{-1} = \frac{V}{S},$$

где

$$S = \frac{1}{a^2bc \sum\limits_{n_1}\sum\limits_{n_2}\sum\limits_{n_3}\sum\limits_{m_1} 1},$$

V — объем частицы.

Откуда после суммирования по n_1, n_2, n_3 и m_1 и после некоторых преобразований для интегральной ширины линии получают следующие выражения:

$$\beta(2\theta) = \frac{\lambda V}{\cos\theta \int T dV}, \tag{5}$$

$$\beta(2\theta) = \frac{\lambda V}{\cos\theta \int V_t dt}, \tag{6}$$

где

T — размер кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей,

dV — объем перпендикулярной к отражающим плоскостям (h, k, l) элементарной ячейки кристалла, вся длина которой в направлении нормали равна T.

Величина $\frac{\int T dV}{V}$ или $\frac{\int V_t dt}{V}$ — нормированное среднее значение толщины кристалла в направлении, перпендикулярном к отражеющим плоскостям.

Таким образом, в рассматриваемой теории с помощью интегральной ширины линии (5) или (6) определяется среднее значение размера кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей.

При выводе (5) или (6) предполагается, что:

1. Падающий пучок параллелен и однороден.
2. Все кристаллики поликристалла оптически независимы друг от друга.
3. Интегрирование по сфере радиуса $\rho = \frac{|\vec{S}|}{\lambda}$ заменено интегрированием по плоскости, касательной этой сферы в точке выхода радиуса вектора $\vec{R}$.
4. При интегрировании по ξ, η и ψ предполагается, что эти величины независимы друг от друга.
5. Максимальное значение интегральной интенсивности получено интегрированием по η и ψ при $\xi = 0$.
6. Предполагается, что распределение интенсивности вокруг всех узлов обратной решетки одинаковое.
7. Для получения средней интенсивности интегрирование произведено по η и ψ в пределах от $-1/2$ до $1/2$.

Для выяснения степени корректности указанных предположений исследуем распределение интенсивности в обратной решетке.

I. При монохроматической плоско-параллельной падающей волне и поликристаллическом образце (очень большое число совершенно беспорядочно ориентированных кристаллитов) сфера распределения, описанная узлом обратной решетки, когда эта решетка вращается вокруг начала координат, показана на рис. 8.

В рассматриваемом случае постоянны:

а) радиус сферы распределения — $\left|\frac{\vec{S}_1}{\lambda}\right| = \left|\frac{\vec{S}_0}{\lambda}\right| = \frac{1}{\lambda} = \text{const}$ (монохроматическое излучение),

б) направление падения первичной волны — $\frac{\vec{S}_0}{\lambda} = \text{const}$ (метод Дебая-Шеррера),

с) радиус сферы, описанной узлом обратной решетки (все решетки беспорядочно ориентированных кристаллитов одинаковы).

Так как пересечением вышеуказанных двух сфер определяется конус максимального рассеяния (одно из колец Дебая-Шеррера) и так как первичное излучение монохроматическое (радиус сферы распространения постоянен), то распределение рассеянной интенсивности вокруг узлов обратной решетки, а в рассматриваемом случае (поликристалл) в окрестностях круга пересечения этих двух сфер, отлично от нуля только в тех областях, которые расположены на сфере распространения. Действительно, вне сферы распространения распределение интенсивности равно нулю, так как выход конца дифракционного вектора $\frac{\vec{S}}{\lambda} = \frac{\vec{S}_1}{\lambda} - \frac{\vec{S}_0}{\lambda}$ от сферы распространения соответствует изменению длины волны.

Таким образом, всякое усреднение интенсивности рассеянных волн, всякое интегрировние в обратной решетке с целью усреднения распределения интенсивности рассеяния для монохроматических волн надо производить только по поверхности сферы распределения.

Однако как в работе Стокса и Вильсона, так и в работах Лауэ и других, усреднение распределения интенсивности в обратной решетке производят вокруг узла обратной решетки (как вне, так и внутри сферы распространения) на касательной плоскости сферы, описанной вокруг начала координат узлом обратной решетки, что совершенно не корректно.

II. Выражение интенсивности (1) перепишется в виде (2), следовательно величины ξ, η и ψ имеют следующие значения:

$$\frac{\vec{S}}{\lambda} = \frac{\vec{S}_1 - \vec{S}_0}{\lambda} = \xi a^* - \eta b^* + \psi c^*, \tag{7}$$

$$\xi = \frac{a\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{\lambda}, \tag{8}$$

$$\eta = \frac{b\,(\cos\beta_1 - \cos\beta_0)}{\lambda}, \tag{9}$$

$$\psi = \frac{c\,(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0)}{\lambda}, \tag{10}$$

где, α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1 и γ_1 — углы между векторами $\vec{S}_0$ и $\vec{S}_1$ и векторами трансляций $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно.

Нетрудно убедится в том, что величины ξ, η и ψ при $\lambda = \text{const}$ не независимы. Действительно, между этими углами существуют известные соотношения

$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1,$$
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

Следовательно, при данном направлении падения интегририрование по одной из величин ξ, η и ψ, предполагая, что две другие постоянные, недопустимо. Для ясности вопроса приведем следующие рассуждения. В рассматриваемом случае для определения области в обратном пространстве, где интенсивность отражения отлична от нуля, мы должны конец вектора $\vec{S}_1$ (направление рассеяния) перемещать во всех направлениях только на сфере распространения (начало оставив в центре этой сферы) и для каждого направления этого вектора, находя величину вектора дифракции $\frac{\vec{S}}{\lambda} = \frac{\vec{S}_1 - \vec{S}_0}{\lambda}$, т. е. величины ξ, η и ψ, определить интенсивность отражения. Практически это осуществляется вращением вектора $\vec{S}_1$ вокруг вектора $\vec{S}_0$ (образование конуса с углом раствора $4\theta_0$) и изменением угла раствора этого конуса (с изменением угла между векторами $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_0$). На рис. 2 и 2а показаны углы вращения φ и изменения раствора конуса $\Delta\theta$. Следовательно, необходимо найти зависимость величин ξ, η и ψ от величин θ и φ и для усреднения произвести интегрирование по θ и φ. Как видно из рис. 8а, область в обратном пространстве, где интенсивность отражения отлична от нуля, представляет из себя полосу поверхности сферы распространения со сферой, описанной узлом обратной решетки. Как раз шириной этой полосы обусловлена ширина кольца Дебая-Шеррера.

Таким образом, полученный вывод в работе Стокса и Вильсона о том, что дифракционная ширина колец Дебая-Шеррера обусловлена только средним значением размеров кристалликов в направлении нормали отражающих плоскостей, результат недостаточно точных расчетов.

§ 2. Дифракционная ширина рефлекса при одном кристаллите

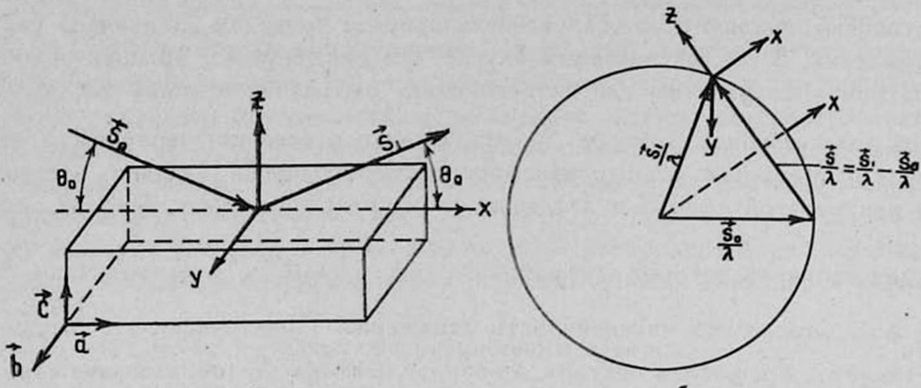
Сначала исследуем зависимость дифракционной ширины рефлекса от размеров облучаемого объема в случае одного маленького кристалла.

Здесь мы должны различать два случая: случай, когда падающий пучок плоскопараллельный и случай, когда или падающий пучок достаточно расходящийся, или кристалл качается.

А. Случай плоско-параллельного падающего пучка

Допустим монохроматическая плоско-параллельная волна в направлении единичного вектора $\vec{S}_0$ падает на кристалл, и мы исследуем интенсивность отражения в направлении единичного вектора $\vec{S}_1$ от плоскостей (001).

На рис. 1а показаны отражающие плоскости (плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), направления трансляций, дифракционных векторов и координатных осей, а на рис. 1б та же самая картина в обратном пространстве.



а б

Рис. 1. а — Отражение рентгеновских лучей точно под углом Вульфа-Брегга. б — Условие отражения в обратном пространстве.

В показанном расположении векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_0$ и при точном выполнении условий Вульфа-Брегга $2d\sin\theta_0=\lambda$ дифракционный тор $\frac{\vec{S}}{\lambda}$ перпендикулярен к оси x и его абсолютная величина равна обратному значению межплоскостного расстояния отражающих плоскостей, $\left|\frac{S}{\lambda}\right|=\frac{1}{d}$. Тогда векторы $\vec{S}_0$ и $\vec{S}_1$ составляют следующие углы с координатными осями X, Y, Z, (с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$):

Таблица 1

	X	Y	Z
$\vec{S}_0$	$\alpha_0=\theta_0$	$\beta_0=\frac{\pi}{2}$	$\gamma_0=\frac{\pi}{2}+\theta_0$
$\vec{S}_1$	$\alpha_1=\theta_0$	$\beta_1=\frac{\pi}{2}$	$\gamma_1=\frac{\pi}{2}-\theta_0$

Однако отражение происходит не только при точном выполнении условия Вульфа-Брегга, но и при некоторых отклонениях от него. Как уже указано в первом параграфе, допустимы только такие отклонения от закона Вульфа-Брегга, при которых конец вектора $\vec{S}_1$ остается на сфере распространения. Конечно, при отклонениях от углов Вульфа-Брегга меняются величины вектора дифракции $\frac{\vec{S}}{\lambda}$ и углов α_1, β_1 и γ_1 (при данном напрвлении падения) и вектор дифракции перестает быть перпендикулярным к оси X.

Изменение направления вектора $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$ в плоскости падения (плоскость XZ) производится изменением угла между вектором $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$

и осью $X(\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, рис. 2). Точка А перемещается до точки В по большой окружности сферы распространения в плоскости падения. Изменение направления вектора $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$ в направлении перпендикулярном плоскости падения, без изменения угла между векторами $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$ и $\frac{\vec{S}_0}{\lambda}$, можно произвести перемещением точки А $\left(\text{конец вектора } \frac{\vec{S}_1}{\lambda}\right)$ по окружности, описываемой концом вектора $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$ на сфере распространения при его $\left(\frac{\vec{S}_1}{\lambda}\right)$ вращении вокруг вектора $\frac{\vec{S}_0}{\lambda}$ без изменения угла между ними. На рис. 2б показано такое перемещение точки А до точки В по ука-

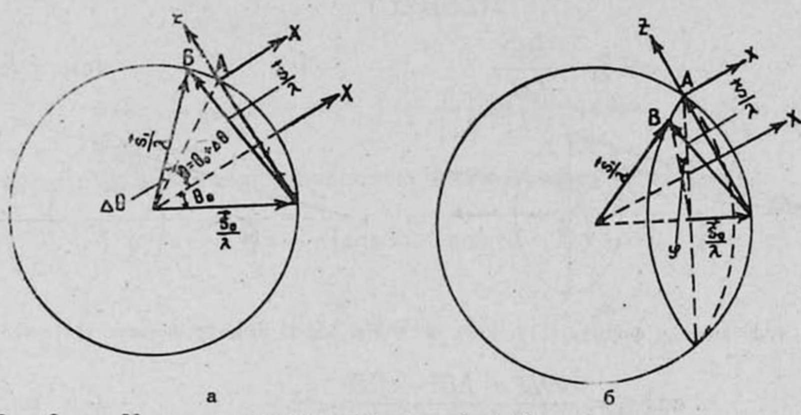


Рис. 2. а — Условие отражения под углом $\theta_0 + \Delta\theta$ в обратном пространстве. б — Расширение дифракционного максимума в направлении нормали в плоскости падения.

занной окружности. Если в первом случае величина перемещения АВ определялась углом $\Delta\theta$, то в последнем случае величина этого перемещения определяется углом φ.

Таким образом, для нахождения угловой области отражения необходимо найти зависимость интенсивности отражения от углов $\Delta\theta$ и φ.

Интенсивность отражения зависит от ξ, η и ψ (см. (2)), а последние зависят от углов α_1, β_1 и γ_1 (см. (8)—(10)). Следовательно, наша задача сводится к нахождению зависимости углов α_1, β_1 и γ_1 от углов $\theta\,(\theta = \theta_0 + \Delta\theta)$ и φ. Для решения этой задачи мы должны взять вектор $\frac{\vec{S}_1}{\lambda}$ в таком положении, чтобы конец этого вектора на сфере распространения имел отличные от нуля значения как для $\Delta\theta$, так и для φ (рис. 3).

С помощью рисунков 4—6 найдя

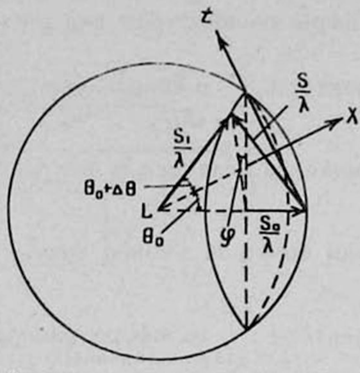


Рис. 3. Расширение дифракционного максимума в направлении нормали отражающих плоскостей, когда отражение происходит под углом $\theta_0 + \Delta\theta$.

$$\cos \alpha_1 = \frac{LB^2 + LC^2 - BC^2}{2(LB)(LC)}, \qquad \text{(см. рис. 4)},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{BC}{LB}, \qquad \text{(см. рис. 5)},$$

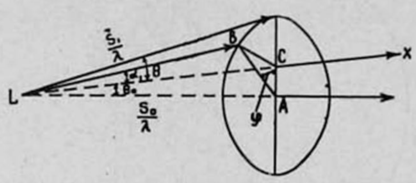


Рис. 4. К выводу формул (11)—(13).

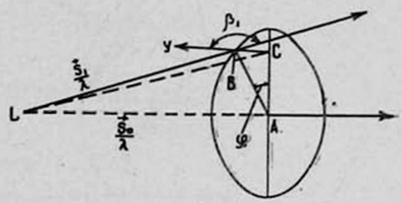


Рис. 5. К выводу формул (11)—(13).

$$\cos \gamma_1 = \frac{DL^2 + LB^2 - DB^2}{2(DL)(LB)}, \qquad \text{(см. рис. 6)},$$

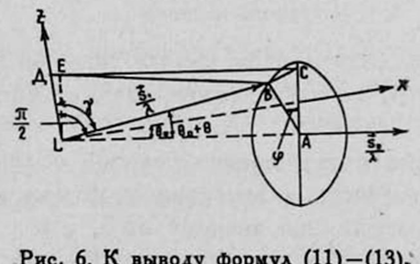


Рис. 6. К выводу формул (11)—(13).

после некоторых преобразований получим

$$\cos \alpha_1 = \cos \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 + \theta) + \sin \theta_0 \cdot \sin(\theta_0 + \theta) \cdot \cos \varphi, \tag{11}$$

$$\cos \beta_1 = \sin(\theta_0 + \theta) \sin \varphi, \tag{12}$$

$$\cos \gamma_1 = [\sin \theta_0 \cos(\theta_0 + \theta) - \cos \theta_0 \cdot \sin(\theta_0 + \theta) \cdot \cos \varphi]. \tag{13}$$

Как видно

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1.$$

Имея в виду (11)—(13), выражения (8)—(10) можем переписать в следующем виде:

$$\xi = \frac{a}{\lambda}[\cos\theta_0 \cos(\theta_0 + \theta) + \sin\theta_0 \sin(\theta_0 + \theta)\cos\varphi - \cos\alpha_0], \qquad (8')$$

$$\eta = \frac{b}{\lambda}[\sin(\theta_0 + \theta)\sin\varphi - \cos\beta_0], \qquad (9')$$

$$\psi = \frac{c}{\lambda}[\cos\theta_0 \sin(\theta_0 + \theta)\cos\varphi - \sin\theta_0 \cdot \cos(\theta_0 + \theta) - \cos\gamma_0]. \qquad (10')$$

Сначала рассмотрим расширение в плоскости падения. Как уже было сказано, расширение рефлекса в плоскости падения описывается изменением угла $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, т. е. величиной $\Delta\theta$ при $\varphi = 0$. В таком случае выражения (8′)—(10′) примут следующий вид:

$$\xi = \frac{a}{\lambda}[\cos\theta - \cos\alpha_0] = \frac{a}{\lambda}[\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - \cos\alpha_0],$$

$$\eta = -\frac{b}{\lambda}\cos\beta_0,$$

$$\psi = \frac{c}{\lambda}[\sin\theta - \cos\gamma_0] = \frac{c}{\lambda}[\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \cos\gamma_0],$$

которые с достаточной точностью можно переписать в виде

$$\xi = \frac{a}{\lambda}[\cos\theta_0 - \cos\alpha_0 - \sin\theta_0\Delta\theta],$$

$$\eta = -\frac{b}{\lambda}\cos\beta_0,$$

$$\psi = \frac{c}{\lambda}[\sin\theta_0 - \cos\gamma_0 + \cos\theta_0\Delta\theta].$$

Если иметь в виду, что $\theta_0 = \alpha_0$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_0 = \frac{\pi}{2} + \theta_0$, то последние выражения примут следующий вид:

$$\xi = -\frac{a}{\lambda}\sin\theta_0\Delta\theta, \qquad (8'')$$

$$\eta = 0, \qquad (9'')$$

$$\psi = \frac{c}{\lambda}\cos\theta_0\Delta\theta + \frac{2c}{\lambda}\sin\theta_0.$$

Так как $2c\sin\theta_0 = m\lambda$, а в выражении интенсивности в аргументе тригонометрической функции входит произведение $\psi\pi$, то в последнем выражении ψ второй член можно опустить, тогда получим

$$\psi = \frac{c}{\lambda}\cos\theta_0\Delta\theta. \qquad (10'')$$

Имея в виду (8″)—(10″), для $J_0(\xi, \eta, \psi)$ из (2) получим

$$J(\xi, 0, \psi) = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \exp\left\{2\pi i\left[m_1 \frac{a}{\lambda}\sin\theta_0 + m_3 \frac{c}{\lambda}\cos\theta_0\right]\Delta\theta\right\}.$$

Из последнего и из (8″)—(10″) видно, что в плоскости падения величины ξ и ψ не независимы друг от друга, и интегрировать выражение интенсивности $J_0(\xi, 0, \psi)$ по ξ, принимая ψ постоянной, или наоборот, нельзя. Действительно, в плоскости падения они могут изменяться только через $\Delta\theta$ и с изменением этой величины не может одна из них остаться постоянной.

Далее, так как выражение интенсивности зависит от $\Delta\theta$ как через ξ, так и ψ, то ширина рефлекса в плоскости падения зависит от размеров кристалла в плоскости падения, т. е. от размеров кристалла в направлениях $\vec{a}$ и $\vec{c}$, между тем, как уже сказано выше, обычно предполагают, что расширение рефлекса в плоскости падения обусловлено размером кристалла только в направлении нормали отражающих плоскостей, т. е. в рассматриваемом случае размером кристалла только в направлении $\vec{c}$.

Теперь перейдем к исследованию расширения рефлекса в направлении нормали плоскости падения. Это расширение можно описать углом φ при $\Delta\theta = 0$.

Тогда величины ξ, η и ψ примут следующий вид:

$$\xi = -\frac{a}{\lambda} 4\sin^2\theta_0 \cos\theta_0 \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\eta = \frac{b}{\lambda}\sin 2\theta_0 \sin\varphi,$$

$$\psi = -\frac{c}{\lambda} 4\sin\theta_0 \cos^2\theta_0 \cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Как видно из последних, расширение рефлексов в направлении нормали плоскости падения зависит от размеров кристалла в трех направлениях, но оно гораздо сильнее зависит от размеров кристалла в направлении нормали плоскости падения (направление $\vec{b}$), чем от двух других направлений: при малых углах синус изменяется гораздо быстрее, чем косинус.

Для более наглядного показания расширения рефлекса детально исследуем зависимость интенсивности отражения от размеров кристалла при различных углах Вульфа-Брегга.

Для исследования расширения рефлекса в плоскости падения выражение интерференционной функции

$$J_0(\xi, \eta, \psi) = \frac{\sin^2(\pi N_1\xi)}{\sin^2(\pi\xi)} \cdot \frac{\sin^2(\pi N_2\eta)}{\sin^2(\pi\eta)} \cdot \frac{\sin^2(\pi N_3\psi)}{\sin^2(\pi\psi)},$$

перепишем в виде (см. (9''))

$$J_0(\xi,\ 0,\ \psi) = N_2^2 \frac{\sin^2(\pi N_1 \xi)}{\sin^2(\pi \xi)} \cdot \frac{\sin^2(\pi N_3 \psi)}{\sin^2(\pi \psi)}$$

и рассмотрим зависимость $J_0(\xi,\ 0,\ \psi)$ от $\Delta\theta$ по (8'') и (10'') для первого порядка отражения Cuk_α излучения от плоскостей (001) кристалла алюминия. Исследуем два случая разных размеров кристалла в плоскости падения.

В первом случае $N_1 = 10^2$, $N_3 = 10^4$, а во втором случае наоборот — $N_1 = 10^4$, $N_3 = 10^2$. На рис. 7а показана зависимость J_0 от $\Delta\theta$ при $N_1 = 10^2$ и $N_3 = 10^4$ (первая кривая) и при $N_1 = 10^4$, $N_3 = 10^2$ (вторая кривая).

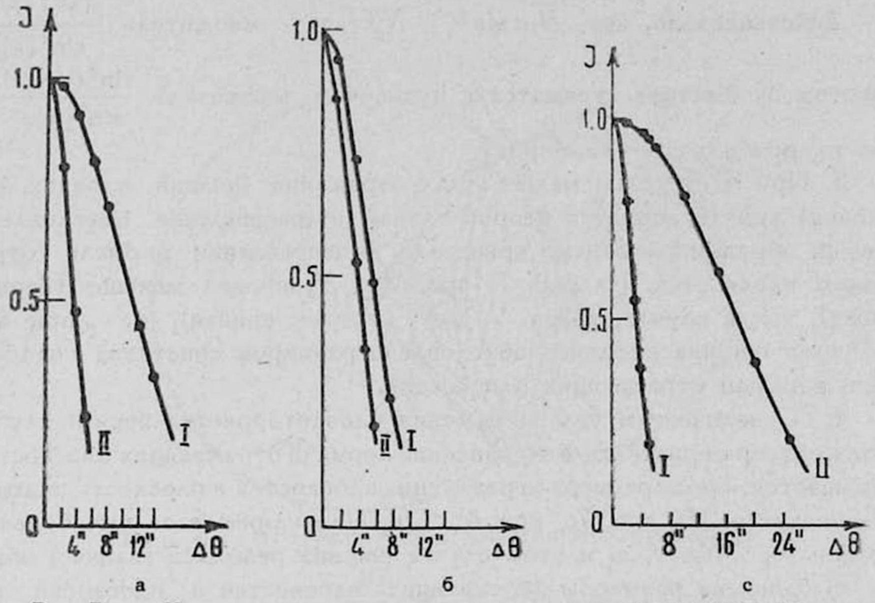


Рис. 7. а — Интенсивность отражения для первого порядка отражения.
б — Интенсивность отражения для 3-го порядка отражения.
с — Интенсивность отражения для 5-го порядка отражения.

Для исследования влияния размеров отражающих плоскостей на расширение рефлексов в зависимости от угла Вульфа-Брэгга построена также кривая для больших углов (для высших порядков отражения). На рис. 7б и 7с показаны третий и пятый порядки отражения соответственно. На всех этих кривых произведение $N_1^2 N_2^2 N_3^2$ принято за единицу.

Эти кривые показывают, что:

1. Ширина рефлекса зависит как от размера кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей (от N_3), так и от размеров отражающих плоскостей в плоскости падения (от N_1).

2. При плоско-параллельном падающем пучке и неподвижном кристалле в случае

$$N_1 \cdot a \sin\theta_0 > N_3 c \cdot \cos\theta_0 \quad \text{или} \quad D = \frac{N_1}{N_3} \frac{a}{c} \operatorname{tg}\theta_0 > 1$$

ширина рефлекса определяется размером отражающих плоскостей в плоскости падения, а в случае

$$N_1 a \sin \theta_0 < N_3 \cdot c \cdot \cos \theta_0 \quad \text{или} \quad D = \frac{N_1}{N_3} \cdot \frac{a}{c} \cdot \operatorname{tg} \theta_0 < 1,$$

она определяется размером кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей. Следовательно, в первом случае с помощью ширины рафлекса определяется размер отражающих плоскостей в плоскости падения, а во втором случае — размер кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей.

Действительно, при $N_1 a \sin \theta_0 > N_3 c \cdot \cos \theta_0$ множитель $\frac{\sin^2(\pi N_1 \xi)}{\sin^2(\pi \xi)}$ с ростом $\Delta\theta$ быстрее стремится к нулю, чем множитель $\frac{\sin^2(\pi N_3 \psi)}{\sin^2(\pi \psi)}$, а во втором случае — наоборот.

3. При достаточно малых углах отражения (низкий порядок отражения) удовлетворяется второй случай и расширение обусловлено главным образом размерами кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей. На рис. 7а при $N_1 < N_3$ ширина меньше (первая кривая), чем в случае, когда $N_1 > N_3$ (вторая кривая), т. е. при малых углах ширина рефлекса обусловлена размером кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей.

4. С увеличением угла отражения удовлетворяется первый случай и роль размера кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей уменьшается, а роль размера отражающих плоскостей в плоскости падения увеличивается. На рис. 7с при $N_1 < N_3$ ширина рефлекса уже больше, чем при $N_1 > N_3$, т. е. в этом случае ширина рефлекса главным образом обусловлена размером отражающих плоскостей в плоскости падения.

B. Случай качающегося кристалла

Теперь рассмотрим случай, когда падающий пучок монохроматический и плоскопараллельный, но кристалл качается вокруг оси, проходящей через точку падения перпендикулярно к плоскости падения. Очевидно, что с точки зрения расширения рефлекса это равносильно случаю, когда кристалл неподвижен, но падающий пучок имеет угловую сходимость, большую, чем угловая область отражения кристалла.

Качание кристалла можно заменить качанием направления падения в плоскости падения вокруг оси качания кристалла.

Пусть направления падения и отражения, соответствующие Вульф-Бреговскому углу θ_0, описываются векторами $\vec{S}_0$ и $\vec{S}_1$, а из-за качания измененные направления падения и отражения описываются векторами $\vec{S}'_0$ и $\vec{S}'_1$. Если углы между векторами $\vec{S}_0$. $\vec{S}_1$ и направлениями X, Y и Z определяются таблицей 1, то тогда углы между век-

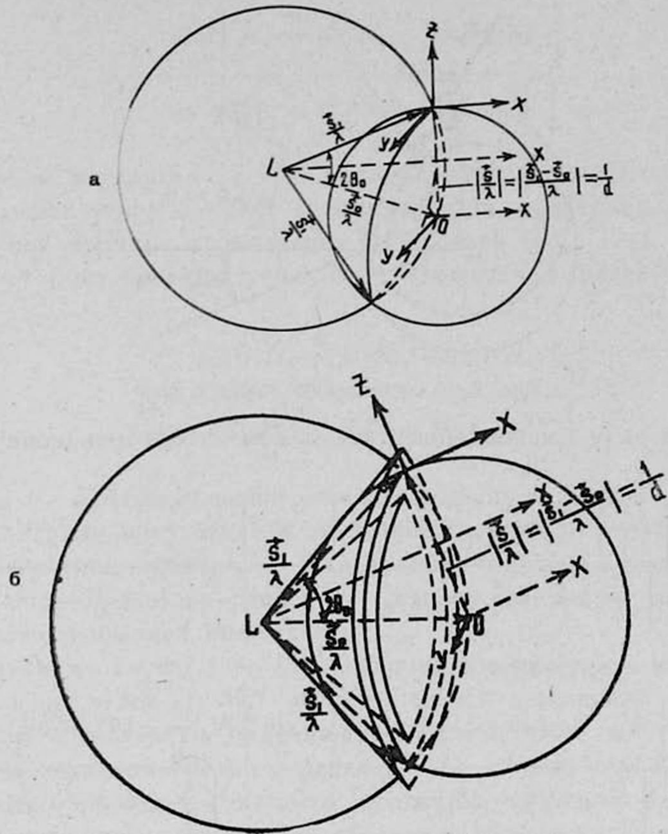


Рис. 8. а, б — К определению ширины спектральной линии.

торами $\vec{S}_0'$, $\vec{S}_1'$ и направлениями X, Y и Z определяются таблицей 2 (обозначения углов см. рис. 9).

Таблица 2

	X	Y	Z
$\vec{S}_0'$	$\alpha_0' = \theta_0 + \Delta\theta_0$	$\beta_0 = \frac{\pi}{2}$	$\gamma_0' = \frac{\pi}{2} + \theta_0 + \Delta\theta_0$
$\vec{S}_0'$	$\alpha_0' = \theta_0 + \Delta\theta_1$	$\beta_1 = \frac{\pi}{2}$	$\gamma_1' = \frac{\pi}{2} - (\theta_0 + \Delta\theta_1)$

$\Delta\theta_0$ — угол качания (изменение направления падения),
$\Delta\theta_1$ — соответствующее изменение угла отражения (рассеяния).

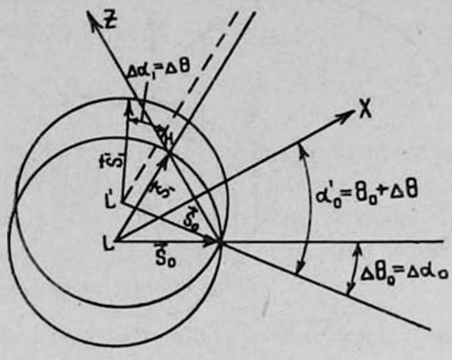


Рис. 9. К составлению таблицы 2.

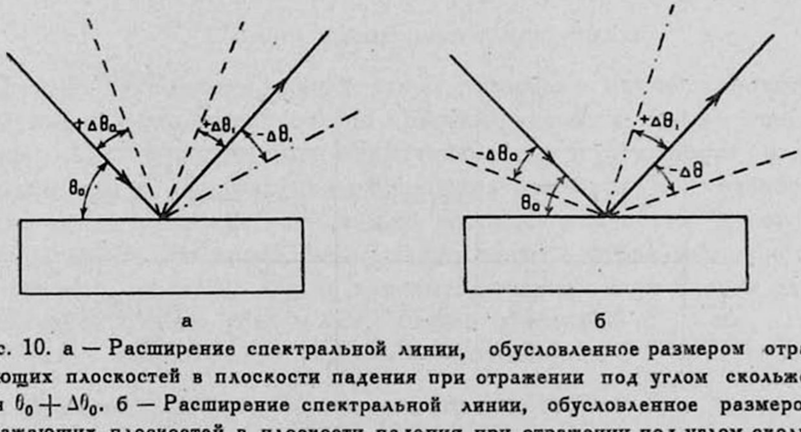
Имея в виду вышесказанное, мы можем интерференционную функцию

$$N_2^2\frac{\sin^2\left[N_1\frac{\pi}{\lambda}a(\cos\alpha_1'-\cos\alpha_0')\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}a(\cos\alpha_1'-\cos\alpha_0')\right]}\cdot\frac{\sin^2\left[N_3\frac{\pi}{\lambda}c(\cos\gamma_1'-\cos\gamma_0')\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}c(\cos\gamma_1'-\cos\gamma_0')\right]}$$

переписать в следующем виде:

$$N_2^2\frac{\sin^2\left[N_1\frac{\pi}{\lambda}a(\Delta\theta_0-\Delta\theta_1)\cdot\sin\theta_0\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}a(\Delta\theta_0-\Delta\theta_1)\cdot\sin\theta_0\right]}\cdot\frac{\sin^2\left[N_3\frac{\pi}{\lambda}c(\Delta\theta_1+\Delta\theta_0)\cdot\cos\theta_0\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}c(\Delta\theta_1+\Delta\theta_0)\cdot\cos\theta_0\right]}.$$

Как видно из последнего, $+\Delta\theta_0$ (увеличение угла скольжения падающего пучка) расширение отраженного пучка в сторону малых углов $(-\Delta\theta_1)$ ограничивается размерами отражающих плоскостей в плоско-



а б

Рис. 10. а — Расширение спектральной линии, обусловленное размером отражающих плоскостей в плоскости падения при отражении под углом скольжения $\theta_0 + \Delta\theta_0$. б — Расширение спектральной линии, обусловленное размером отражающих плоскостей в плоскости падения при отражении под углом скольжения $\theta_0 - \Delta\theta_0$.

сти падения (рис. 10а), т. е. расширение в сторону малых углов ограничивается в основном множителем

$$D_1 = \frac{\sin^2 \left[N_1 \frac{\pi}{\lambda} a \left(\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1\right) \cdot \sin\theta_0 \right]}{\sin^2 \left| \frac{\pi}{\lambda} a \left(\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1\right) \sin\theta_0 \right|} .$$

В этом же случае $(+\Delta\theta_0)$ расширение отраженного пучка в сторону больших углов $(+\Delta\theta_1)$ ограничивается размерами кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей (рис. 10а), т. е. расширение в сторону больших углов огриничивается в основном множителем

$$D_2 = \frac{\sin^2 \left[N_3 \frac{\pi}{\lambda} c \left(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_0\right) \cdot \cos\theta_0 \right]}{\sin^2 \left| \frac{\pi}{\lambda} c \left(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_0\right) \cdot \cos\theta_0 \right|} .$$

При $(-\Delta\theta_0)$ (уменьшение угла скольжения падающего пучка) расширение отраженного пучка в сторону малых углов $(-\Delta\theta_1)$ ограничивается размерами кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей (рис. 10б), т. е. расширение в сторону малых углов в этом случае ограничивается множителем D_2.

В этом же случае $(-\Delta\theta_0)$ расширение отраженного пучка в сторону больших углов $(+\Delta\theta_1)$ ограничивается размерами отражающих плоскостей в плоскости падения, т. е. расширение в сторону больших углов в данном случае ограничивается множителем D_1.

Таким образом, при качании кристалла (качание в направлении падения) расширение отраженного пучка в плоскости падения обусловлено как размерами кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей, так и размерами стражающих плоскостей в плоскости падения.

Если при неподвижном кристалле (и в данном направлении падения) расширение ограничивалось большим размером кристалла в плоскости падения (при средних углах отражения), то в рассмотренном случае (качающийся кристалл) расширение ограничивается малым размером кристалла в плоскости падения.

Здесь мы рассмотрели случай качания направления падения. Однако нетрудно убедиться в том, что при качании кристалла получатся аналогичные результаты.

Выводы

Таким образом, наши исследования показывают, что:

1. В общем случае ширина рефлекса зависит от размеров кристалла в плоскости падения, т. е. как от размеров кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей, так и от размеров отражающих плоскостей в плоскости падения.

2. С уменьшением угла отражения усиливается влияние размеров (в плоскости падения) отражающих плоскостей на ширину реф-

лекса, а с увеличением угла отраження усиливается влияние размеров кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей.

3. При неподвижном монокристалле ширина рефлекса в основном определяется наибольшим размером в плоскости падения.

4. При качающемся монокристалле ширина рефлекса определяется наименьшим размером кристалла в плоскости падения.

Случай поликристалла будет рассмотрен в следующем сообщении.

Ереванский государственный университет Поступила 25.II.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Scherrer*, Nachz. d. Gott. Ges., 98 (1918), Zsigmondys Kolloidch.
2. *Н. Семзков*, ЖРФХО, 1923; Zs. f. Phys., 31, 439 (1924).
3. *M. Laue*, Zs. f. Kristallographie, 64, 115 (1926), Ann. d. Phys , 26, 55 (1936).
4. *B. E. Warren*, Zs. f. Kristallographie 99, 448 (1938).
5. *A. L. Patterson*, Phys. Rev., 56, 972 (1939)..
6. *A. R. Stokes* und *A. J. Wilson*, Proc. Camb. Phil. Soc., 38, 313 (1942); 40, 197 (1944).
7. *F. W. Jones*, Proc. Roy. Soc., A 166, 16 (1938).
8. *R. Brill*, Zs. f. Kristallographie, 68, 387 (1928), 75, 217 (1930).
9. *R. Brill*, *H. Pelzer*, Zs. f. Klistallographie 72, 398 (1929), 74, 247 (1930).
10. *В. А. Колпинский*, ЖЭТФ, 6, 881 (1936)
11. *Г. С. Жданов*, Заводская лаборатория № 9, 566 (1940).
12. *Г. С. Жданов*, Заводская лаборатория № 9, 732 (1940).
13. *G. H. Cameron*, *A. L. Patterson*, American Society for Testing Materials, Symposium on Radiography and X-ray Diffraction, 1937.
14. *З. Г. Пинскер*, Дифракция электронов, Изд-во АН СССР, 1949.
15. *Г. С. Жданов*, *Я. С. Уманский*, Рентгенография металлов, ч. II, ГОНТИ СССР, М.—Л., 1938.
16. *А. Вильсон*, Оптика рентгеновых лучей, Изд-во ин. лит , М., 1951.
17. *Р. Джейс*, Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. Изд-во ин. лит., М., 1950.
18. *А. И. Китайгородский*, Рентгеноструктурный анализ мелкокристаллических и аморфных тел, Изд. техн. теорет. лит., М.—Л., 1952.
19. *А Гинье*, Рентгенография кристаллов, Изд. физ-мат. лит., М., 1961.
20. *П. А. Безирıанян*, *Л. Г. Гаспарян*, ЖТФ в печати.

ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՉԱՓԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄՆԵՐԻ ԼԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ. I

Պ. Հ. ԲԵԶԻՐԳԱՆՅԱՆ, Լ. Գ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Ուսումնասիրված է բյուրեղի չափերի ազդեցությունը ռենտգենյան ճառագայթների դիֆրակցիոն մաքսիմումների լայնության վրա և ցույց է տրված, որ.

1. ընդհանուր դեպքում ռեֆլեքսի լայնությունը կախված է բյուրեղի չափերից՝ ինչպես անդրադարձնող հարթությունների նորմալի ուղղությամբ, այնպես էլ անդրադարձնող հարթությունների չափերից անկման հարթության մեջ,

2. Անդրադարձման փոքր անկյունների դեպքում ռեֆլեքսի լայնությունը կախված է բյուրեղի չափերից անկման հարթության մեջ, իսկ անդրադարձման անկյան մեծացմամբ ռեֆլեքսի լայնությունը որոշվում է բյուրեղի չափերով անդրադարձնող հարթությունների նորմալի ուղղությամբ,

3. անշարժ մոնոբյուրեղի դեպքում ռեֆլեքսի լայնությունը որոշվում է անկման հարթության մեջ բյուրեղի ամենամեծ չափով, իսկ տատանվող մոնոբյուրեղի դեպքում այն որոշվում է բյուրեղի ամենափոքր չափով անկման հարթության մեջ։

THE EFFECT OF THE CRYSTAL SIZES ON THE WIDTH OF X-RAY DIFFRACTION MAXIMA

R. H. BEZIRGANIAN, L. G. GASPARIAN

The effect of the sizes of a crystal on the width of x-ray diffraction maxima is studied. The following results are obtained:

1. In general the width of the maxima depends on the sizes of a crystal in the direction normal to the reflecting planes and on the sizes of the reflecting planes in the plane of incidence.

2. In the case of small angles of reflection the width of the maxima depends strongly on the sizes of the reflecting planes in the plane of incidence, and in increasing the angle of reflection the above width is determined by the sizes of the reflecting planes in the direction normal to the reflecting planes.

3. In the case of a fixed monocrystal the width ot the maxima depends on the maximum size of the crystal in the plane of incidence, while for a swinging monocrystal, the width is determined by the minimum size of the crystal in the plane of incidence.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 364–371 (1970)

О ПРЕДЕЛАХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА С ИНДУЦИРОВАННЫМ ТОКОМ. I

Р. М. АРУТЮНЯН

В рамках полуфеноменологической теории Гинзбурга-Ландау рассматриваются условия термодинамической устойчивости сверхпроводящего цилиндра с индуцированным в нем током.

Толщина стенок цилиндра меньше лондоновской глубины проникновения.

Определяется зависимость критического значения плотности тока от размеров образца.

Как известно, в термодинамике сверхпроводников один из основных вопросов заключается в том, до какого максимального значения тока возможно существование сверхпроводящего состояния. Этот вопрос достаточно хорошо исследован для проволок и пленок с поперечными размерами, меньшими по сравнению с лондоновской глубиной проникновения $\delta_0(T)$ [1, 2, 5]. Из уравнений Гинзбурга-Ландау следует, что вблизи критической температуры T_{kp} для пленок толщиной $2d < \delta(T)$ максимальная величина плотности тока равна $j_0 = 2/3\sqrt{3}$ [1]. Здесь и далее все величины даются в приведенных единицах [1]. Такая же величина максимальной плотности тока получается и для проволок с диаметром $2d < \delta_0$. Рассматривая этот вопрос для проволоки с током, Амбекаокар и Лангер показали, что если пренебречь магнитным полем, обусловленным током, уравнения Гинзбурга-Ландау не имеют решений при $j_0 > 2/3\sqrt{3}$ [2].

Однако при $j_0 = 2/3\sqrt{3}$ свободная энергия F_s проволок и пленок все еще меньше свободной энергии в нормальном состоянии F_{n_0} [3]. С другой стороны, при определении выражения свободной энергии вещества с током, существенное значение имеет учет того факта, что токи являются замкнутыми [4]. С этой точки зрения рассмотрение случая бесконечной пленки и проволоки с током является идеализированным. Поэтому представляет интерес исследовать уравнения Гинзбурга-Ландау и определить максимальное значение плотности тока в случае тонкостенного цилиндра с индуцировонным в нем током.

Известно, что вблизи критической температуры $T_{kp} - T \ll T_{kp}$ свободная энергия F_s сверхпроводника равна [1]

$$F_s = F_{n_0} + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left\{ -|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \vec{H}^2 + \left| \frac{i}{\varkappa} \vec{\nabla}\psi + \vec{A}\psi \right|^2 \right\} dv, \quad (1)$$

где F_{n_0} — свободная энергия в нормальном состоянии, H_{cm} — критическое поле массивного образца, ψ — волновая функция, пропорциональная щели сверхпроводника, $\vec{A}$ — векторный потенциал, а $\varkappa$ — характеристический параметр сверхпроводящего материала.

ψ, $\vec{A}$ определяются из уравнений Гинзбурга и Ландау [1]

$$\left(\frac{i}{\varkappa}\vec{\nabla}+\vec{A}\right)^2\cdot\psi-\psi+\psi^2\psi^*=0, \tag{2}$$

$$-j=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{i}{2\varkappa}(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*)+\vec{A}\psi\psi^*. \tag{3}$$

Прежде чем перейти к цилиндру с током, рассмотрим вкратце, как определяется критическое значение плотности тока с помощью (1), (2), (3) для бесконечной пленки при $2d<\delta_0(T)$. После соответствующей калибровки уравнения (2) и (3) принимают вид [1]

$$\frac{1}{\varkappa^2}\frac{d^2f}{dz^2}=-f+f^3+A^2f, \tag{2a}$$

$$\frac{d^2A}{dz^2}=Af^2. \tag{3a}$$

Здесь f — модуль волновой функции, ось z направлена перпендикулярно поверхности пленки, а ток $\vec{j}$ — по оси x. Поскольку при $2d<\delta_0(T)$ изменением по толщине пленки можно пренебречь, то из (3а), учитывая, что на поверхности пленки при $\pm d$ магнитное поле, обусловленное током, равно H_I, имеем [1]

$$A=\frac{H_I\operatorname{ch}f_0\cdot z}{f_0\operatorname{sh}f_0\cdot d}. \tag{4}$$

Ввиду того, что $f_0=\mathrm{const}$, $d\ll 1$, с помощью (2а) и (4) находим

$$-f_0+f_0^3+j_0^2/f_0^3=0, \tag{5}$$

где $j_0=H_I/d$ — плотность тока в пленке; здесь $j_0=\mathrm{const}$. Уравнение (5) справедливо и при произвольной координатной зависимости плотности тока $\vec{j}$, которое можно получить непосредственно, исключая $\vec{A}$ из (2) и (3). При заданном значении $\vec{j}_0$ уравнение (5) имеет только два положительных решения f_{01}, f_{02} $(f_{01}\leqslant f_{02})$. Минимуму свободной энергии F_s (1) соответствует f_{02} [1, 5]. При решении f_{01} пленка не может находится в термодинамическом равновесии или, иначе говоря, f_{01} не является точкой минимума для F_s [1, 5]. С увеличением j_0 значение f_{02} уменьшается (соответственно f_{01} растет). Максимальная величина плотности тока $j_{0\,кр}$ определяется из условия $\frac{dj}{df}=0$. С помощью (5) находим, что $j_{0\,кр}=2/3\sqrt{3}$. При $j_0>j_{0\,кр}$ уравнение (5) не имеет решений. Для модуля $f_{0кр}$ при $j_{0\,кр}$ имеем [1, 5]

$$f_{0\,кр}^2=2/3 \quad (f_{01}=f_{02}=f_{0\,кр}).$$

Аналогичным образом определяются $f_{0\,кр}$ и $j_{0\,кр}$ для проволоки с током.

Согласно [6, 7] для цилиндра, помещенного во внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$, минимальной является термодинамическая функция

$$\Phi_s = F_s - 2\vec{H}_2 \int_{R_1}^{R_2} \vec{H} dV + \vec{H}_1^2 V_1, \tag{6}$$

где F_s — свободная энергия, определяемая выражением (1), $\vec{H}_1$ — поле внутри цилиндра, R_2, R_1 — соответственно внешний и внутренний радиусы, а V_1 — объем полости цилиндра. Будем считать, что $\vec{H}_2$, $\vec{H}_1$ направлены по оси z цилиндра. Так как вдоль оси z задача однородная, то в выражении (6) по z будем подразумевать единичную длину интегрирования. Поскольку рассматривается цилиндр с толщиной стенок $d = R_2 - R_1$, $(R_2, R_1 \gg d)$, намного меньшей лондоновской глубины проникновения $\delta_0(T)$, то изменением (4) по толщине образца можно пренебречь [7, 9].

В отличие от пленки и проволоки, в случае цилиндра фазу $\varphi(l)$ волновой функции

$$\psi(l) = f(l) \exp[i\varphi(l)]$$

нельзя не учитывать (здесь $l = R \cdot \theta$, где θ угол вокруг оси цилиндра) Ввиду однозначности $\psi(l)$ для фазы $\varphi(l)$ имеем

$$\varphi(l + L) - \varphi(l) = 2\pi n, \tag{7}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, $L = 2\pi R$ — длина поперечного сечения цилиндра. При $f = \text{const}$ решение уравнения (3) имеет вид [7, 9]

$$A = \frac{\hbar cn}{2e\delta_0 R} + \delta_0 \{a\mathrm{I}_1(R) + b\mathrm{K}_1(R)\} \tag{8}$$

и соооветственно

$$H = a\mathrm{I}_0(R) - b\mathrm{K}_0(R), \tag{8a}$$

где K_0, K_1 и I_0, I_1—известные цилиндрические функции (8). Из (8), (8а) и (3) следует, что при $d < \delta_0$, $d < R_1$, R_2 изменением $\vec{j}$ и $\vec{A}$ по толщине цилиндра можно пренебречь. Так как $\vec{A}$ и $\vec{j}$ направлены по l, то в этом случае величину $\vec{j}$ можно определить, непосредственно интегрируя (3) по контуру L,

$$j = \frac{\left(\frac{2\pi}{\varkappa} n - H_2 \cdot S_1\right) f^2}{L + S_1 d \cdot f^2}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что плотность тока j является функцией от числа квантования n, внешнего поля $\vec{H}_2$ и модуля $f(l)$ волновой функции. Поэтому, если в случае пленок или проволок при $f = \text{const}$ и $j = \text{const}$ уравнение (5) решается при заданном j, то в случае цилиндра урав ние (5) следует решить при заданных значениях $H_{2,\, n}$. Действительно, подставляя (9) в (5) имеем

$$-f+f^3+\left(\frac{\frac{2\pi}{\varkappa}n-H_2S_1}{L+S_1\cdot d\cdot f^2}\right)^2\cdot f=0. \tag{10}$$

Соответствующим образом и минимизируемую функцию Φ_s (6) необходимо рассматривать при заданных $H_{2,\, n}$.

Учитывая, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}\vec{H}^2dV=\int\limits_{R_1}^{R_2}\vec{A}\vec{j}\cdot dV+\vec{H}_2\int\limits_{0}^{R_2}\vec{H}dV-H_1^2\cdot V_1, \tag{11}$$

из (1), (6), (11) для Φ_s находим

$$\frac{\Phi_s-F_{n_0}}{H_{cm}^2/4\pi}=\int\limits_{R_1}^{R_2}\left\{-|\psi|^2+\frac{1}{2}|\psi|^4+\left|\frac{i}{\varkappa}\vec{\nabla}\psi+\vec{A}\psi\right|^2\right\}dV+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\vec{A}\cdot\vec{j}\cdot dV-\vec{H}_2\int\limits_{0}^{R_2}\vec{H}\cdot dV. \tag{12}$$

Подставляя $\vec{A}$ из (3) в (12), получаем

$$\frac{\Phi_s-F_{n_0}}{d\cdot H_{cm}^2/4\pi}=\left(-f^2+\frac{1}{2}f^4\right)L+\frac{2\pi n}{\varkappa}\cdot j-\vec{H}_2\int\limits_{0}^{R_2}\vec{H}\cdot dV. \tag{13}$$

Так как нас интересует случай, когда внешнее поле отсутствует ($\vec{H}_2=0$), то для (9), (10) и (13) соответственно имеем

$$j=\frac{\frac{2\pi}{\varkappa}\cdot n\cdot f^2}{L+S_1d\cdot f^2}, \tag{14}$$

$$-f+f^3+\left(\frac{2\pi n}{\varkappa}\right)^2\frac{f}{(L+S_1d\cdot f^2)^2}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\Phi_s-F_{n_0}}{d\cdot H_{cm}^2/4\pi}=\left(-f^2+\frac{1}{2}f^4\right)L+\left(\frac{2\pi n}{\varkappa}\right)^2\frac{f^2}{L+S_1\cdot d\cdot f^2}. \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (15) можно получить из условия $\partial\Phi_s/\partial f=0$. Из (15) видно, что для любых значений n $\partial\Phi_s/\partial f=0$ при $f=0$. Для определения остальных решений (15) рассмотрим две кривые (рис. 1)

$$Y_1=1-f^2,$$

$$Y_2=\left(\frac{2\pi n}{\varkappa}\right)^2\frac{1}{(L+S_1d\cdot f^2)^2}. \tag{17}$$

$-\partial Y_2/\partial f^2$, $Y_2(f^2)$ принимают наибольшие значения при $f=0$.

Из (17) следует, что при $S_1 \cdot d/L > 1 - \left.\frac{\partial Y_2}{\partial f^2}\right|_{f=0} > Y_2(0)$. Поэтому уравнение (16) имеет только один отличный от нуля положительный

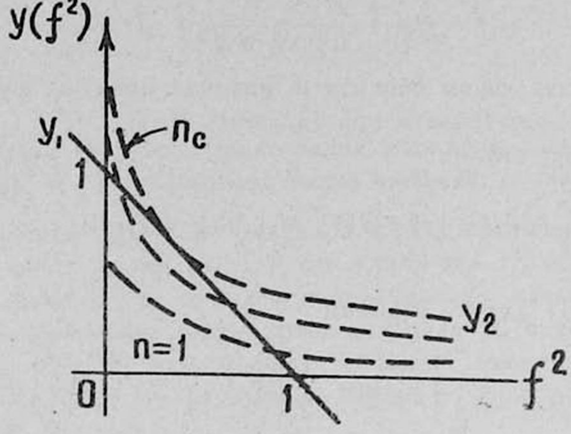


Рис. 1.

корень при таких значениях n, когда $Y_2(0) < 1$. При $Y_2(0) = \left(\frac{2\pi n}{\varkappa}\right)^2 \times$ $\times \frac{1}{L^2} > 1$ кривые Y_1, Y_2 пересекаются при двух значениях f^2. Соответственно уравнение (15) при заданном n имеет два положительных решения. В этом случае на кривых свободной энергии $\Phi_s(f^2)$, кроме минимума появляются и точки максимума (рис. 2). При определенном

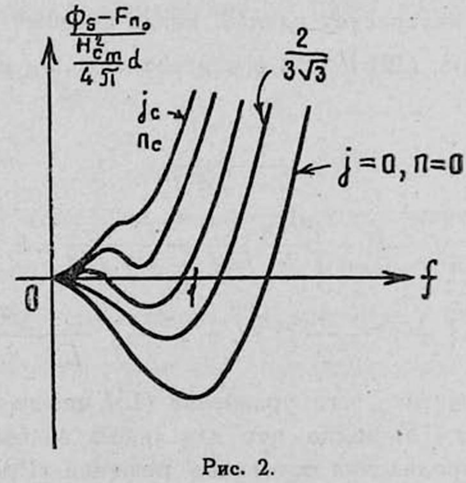


Рис. 2.

значении $n = n_{kp}$ максимум и минимум Φ_s сливаются, что соответствует точке перегиба. Поэтому для $n > n_{kp}$ уравнение (15) не имеет отличных от нуля решений.

Величина n_{kp} определяется из условий

$$\partial\Phi_s/\partial f = 0,$$
$$\partial^2\Phi_s/\partial f^2 = 0. \qquad (18)$$

С помощью (17) и рис. 1 находим, что

$$\frac{2\pi}{\varkappa} n_{kp} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 + \frac{L}{S_1 d}\right)^{3/2} \cdot S_1 \cdot d. \qquad (19)$$

Соответственно при n_{kp} (19) для f^2, j, Φ_s имеем

$$f_{kp}^2 = \frac{2}{3}(1 - L/2\,S_1 d), \qquad (20)$$

$$j_{kp} = \frac{2}{3\sqrt{3}}(1 + L/S_1 d)^{1/2} \cdot (1 - L/2S_1 d), \qquad (21)$$

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2/4\pi} = (1 - L/2S_1 d)\left\{-\frac{4}{9}L - \frac{2}{9}\frac{L^2}{2S_1 d} + \frac{4}{27}S_1 d\,(1 + L/S_1 d)^2\right\}.$$

Из (22) получаем, что при $S_1 d > L$ вблизи n_{kp} $\Phi_s - F_{n_0} > 0$. Поэтому представляет интерес определить, при каком значении числа квантования n цилиндр с током переходит в местабильное состояние. С помощью (15), (16) находим

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2/4\pi} = f^4 \cdot \left\{-\frac{1}{2}L + S_1 d - S_1 d f^2\right\}. \qquad (23)$$

Учитывая, что $\left(\frac{2\pi n}{\varkappa}\right)^2 = (1 - f^2)(L + S_1 d \cdot f^2)^2$, из (23) можно определить, что минимальное значение термодинамической функции положительное, $\min(\Phi_s - F_{n_0}) > 0$, при

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(L \cdot S_1 \cdot d)^{1/2}\left(1 + \frac{L}{2S_1 d}\right) < \frac{2\pi n}{\varkappa} < \frac{2}{3\sqrt{3}}\, d \cdot S_1 \left(1 + \frac{L}{S_1 d}\right)^{3/2}, \qquad (24)$$

и соответственно

$$\frac{2}{3}\left(1 - \frac{L}{2S_1 d}\right) < f_{\min}^2 < 1 - \frac{1}{2}\frac{L}{S_1 d}. \qquad (25)$$

Хотя с увеличением $\min(\Phi_s - F_{n_0})$, число квантования n растет, этого нельзя утверждать относительно плотности тока j. Действительно, из (14), (15) имеем

$$j = f^2 \cdot (1 - f^2)^{1/2}. \qquad (26)$$

Из условия $dj/df = 0$ находим, что максимальное значение j имеет место при $f_{\min}^2 = \frac{2}{3}$ [1, 5]. Поэтому в интервале

$$\frac{2}{3}\left(1 - \frac{L}{2S_1 d}\right) < f_{\min}^2 < 2/3, \qquad (27)$$

с увеличением минимального значения Φ_s величина плотности тока уменьшается. Это становится понятным, если обратиться к уравнению

(5). При заданном j_0 уравнение (5) имеет два положительных решения f_{01}, f_{02} $(f_{01} < f_{02})$.

Если в случае пленок и проволок осуществляются только состояния с f_{02} [1, 5], то согласно (27), в случае цилиндра сверхпроводник может находиться в термодинамическом равновесии и в состоянии с f_{01}. Из (19), (20), (21) следует, что найденные нами критические параметры находятся в зависимости от размеров образца. При $L/S_1d \to 0$ f^2_{kp}, j_{kp} (20, 21) становятся равными соответствующим критическим значениям пленок и проволок, несмотря на то, что при этом термодинамическая функция Φ_s (22) стремится к бесконечности. С увеличением отношения L/S_1d критические значения f^2_{kp}, j_{kp}, Φ_s (23) уменьшаются и при $\dfrac{L}{2S_1d} \to 1$ стремятся к нулю.

Представляет интерес также случай $L/2S_1d > 1$, т. е. когда имеются цилиндры малых размеров $(R_1 \cdot d < \delta_0^2)$, Из соотношений (17) и рис. 1 следует, что в этом случае кривые $Y_1(f^2)$, $Y_2(f^2)$ могут пересекаться только при одном значении f^2. Поэтому для цилиндров таких размеров свободная энергия Φ_s (рис. 2) уже не имеет точек максимумов, а равновесное значение $(\Phi_s - F_{n_0})$ отрицательно для всех решений уравнений Гинзбурга-Ландау.

Так как количество квантованных состояний цилиндра уменьшается с уменьшением параметра $\varkappa$, то из (17) и рис. 1 можно определить тот критический радиус, меньше которого цилиндр из сверхпроводников первого рода, возможно, не имеет ни одного квантового состояния. При $\varkappa \gg 1$ число состояний цилиндра соотвстственно увеличивается. При $2/3 \leqslant f^2_{\min} \leqslant 1$ с увеличением равновесного значения свободной энергии Φ_s плотность тока растет от нуля до максимально возможного значения $2/3\sqrt{3}$. При $0 \leqslant f^2_{\min} \leqslant 2/3$ с увеличением $\min(\Phi_s - F_{n_0})$ плотность тока уменьшается от $2/3\sqrt{3}$ до нуля.

Как было определено, для цилиндров с размерами $L/2S_1d < 1$ возможен только фазовый переход первого рода. В критической точке в этом случае плотность тока j_{kp} определяется выражением (21). При $\dfrac{2}{3}(1 - L/2\,S_1d) \leqslant f^2_{01} \leqslant 2/3$ число квантованных состояний цилиндра порядка $\Delta n \approx \varkappa\delta_0/d$.

Учитывая, что для $j_{kp} \leqslant j_0 \leqslant 2/3\sqrt{3}$ осуществляются состояния как с модулем f_{02}, так и f_{01}, то при $j_{kp} \leqslant j_0$ плотность состояний цилиндра соответствующим образом увеличивается.

Таким образом, если при $0 \leqslant j_0 \leqslant j_{kp}$ число состояний определяется только дискретными решениями f_{02}, то при $j_{kp} \leqslant j_0 \leqslant 2/3\sqrt{3}$ каждое состояние с модулем f_{02} имеет свое парное состояние с модулем f_{01} $(f_{01} < f_{02})$. Соответственно, в этом случае $\Phi_2 < \Phi_1$.

При этом можно показать, что в общем случае парные значения модулей f_{01} и f_{02} одновременно не могут удовлетворить уравнению (5) при одном значении j_0.

Поступила 12.V.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950).
2. *J. S. Langer, V. Ambecaokar*. Phys. Rev. 164, 498 (1967).
3. *J. Bardeen*, Review of modern Physics. 34, 667 (1962).
4. *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат Москва, 1957.
5. *В. Л. Гинзбург*, ДАН СССР, 118, 464 (1958).
6. *В. Л. Гинзбург*, ЖЭТФ, 34, 113 (1958).
7. *В. Л. Гинзбург*, ЖЭТФ, 42, 299 (1962).
8. *М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, Москва, 1958.
9. *Сюй Лун-дао, Г. Ф. Жарков*, ФММ, 16, 820 (1963).

ԻՆԴՈՒԿՏՎԱԾ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԼԱՆԻ ԹԵՐՄՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Գինզբուրգ-Լանդաուի կիսաֆենոմենոլոգիական տեսության շրջանակներում դիտարկվում են գերհաղորդիչ գլանում ինդուկտված հոսանքի թերմոդինամիկական կայունության պայմանները։

Գլանի պատերի հաստությունը փոքր է լոնդոնյան թափանցման խորությունից։ Որոշվում է հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքի կախումը նմուշի չափերից։

ON THE LIMITS OF THERMODYNAMICAL STABILITY OF A SUPERCONDUCTINC CYLINDER WITH INDUCTED CURRENT

R. M. HARUTUNIAN

From the viewpoint of the quasiphenomenological Ginzburg-Landau theory the conditions of the thermodynamic stability of a superconducting cylinder with inducted current is considered.

The thickness of the cylinder walls is less than the Londonian penetration depth. The current density critical value dependence on the sample dimensions is determined.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 372–380 (1970)

О СКАЧКЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ТОНКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ЦИЛИНДРАХ. II

Р. М. АРУТЮНЯН

На основе уравнений Гинзбурга-Ландау исследуется скачок магнитного потока в тонкостенных цилиндрических образцах, помещенных во внешнее магнитное поле.

Показано, что при переходах из одного равновесного состояния в другое модуль волновой функции сверхпроводника проходит через нулевое значение.

Известно, что основным фактором в вопросе устойчивости тока в сверхпроводниках малых размеров являются термодинамические флуктуации в образцах; флуктуации влияют на характер зависимости сопротивления сверхпроводника от температуры и размеров образца [1, 2]. Учет флуктуации дает возможность также понять природу незатухающего тока в сверхпроводящем кольце и оценить время его затухания [1]. Этот вопрос тесно связан с устойчивостью магнитного потока, проходящего через кольцо. Литлом был предложен механизм разрушения устойчивости тока в сверхпроводящем кольце, основанный на изменении магнитного потока через образец. Хотя влияние термодинамических флуктуаций существенно для образцов с поперечными размерами, меньшими по сравнению с длиной когерентности ξ_L и лондоновской глубиной проникновения δ_0 (проволоки, проволочные кольца и т. д.), как будет видно в дальнейшем, такой механизм можно применить соответствующим образом и к сверхпроводящему цилиндру, помещенному во внешнее магнитное поле $\vec{H}_2$.

В [1] рассмотрен случай сверхпроводящего кольца из проволоки диаметром d и длиной L. Так как $d < \delta_0(T)$, изменением параметра упорядочения $\psi(l)$ по толщине проволоки при этом пренебрегается. Изменение $\psi(l)$ по длине проволоки может иметь место вследствие флуктуации как подводимого тепла, внешнего магнитного поля, так и плотности пар на каком-нибудь участке сверхпроводника [1]. Ввиду однозначности $\psi(l)$ вдоль длины кольца для фазы $\varphi(l)$ должно иметь место

$$\varphi(L+l) - \varphi(l) = 2\pi n,$$
$$n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \cdots. \qquad (1)$$

Значением n определяются величины плотности тока $\vec{j}$ и магнитного потока $\vec{G}$, проходящего через кольцо. Следовательно, для определения условия разрушения устойчивости тока в сверхпроводнике существенно знать, при какой флуктуации система совершает переход из состояния n в состояние с n' $(n \neq n')$. Для этого необходимо учесть, что любое изменение $\psi(l)$ происходит непрерывным образом [1]. Рассмотрим, например, значения $\psi = \psi_0$ и $\psi = \psi_1$, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$.

Из вышеуказанного следует, что при переходе от $n = 0$ к $n = 1$ должно иметь место $f_0(l) = f_1(l)$ по всему сверхпроводнику. Здесь f_0 и f_1 соответственно модули $\psi_0(l)$ и $\psi_1(l)$. Однако, если при ψ_0 изменение фазы $\varphi(l)$ по длине образца L равно нулю, то при ψ_1 фаза меняется на 2π. Поэтому, из условий $\psi_0(l) = \psi_1(l)$ и $f_0(l) = f(l)$ следует, что при переходе от $n = 0$ к $n = 1$ модули f_0 и f_1 принимают значение нуль при таком l, при котором происходит скачок фазы $\varphi(l)$ на 2π [1].

Таким образом, необходимым условием изменения n является обращение в нуль модуля f волновой функции ψ, по крайней мере, в одной точке сверхпроводника. Ниже будет показано, что в случае тонкого цилиндра, помещенного во внешнее поле, из уравнений Гинзбурга-Ландау [3] можно получить такое решение для $\psi(l)$, которое удовлетворяет вышеуказанному условию непрерывности при скачке потока через цилиндр. Одновременно будет определен характер изменения плотности тока $\vec{j}$ и показано, что в цилиндре возможно осуществление колебательного процесса, аналогичного рассмотренному в работе [2] для тонкой проволоки.

Известно, что вблизи критической температуры T_{kp} ($|T - T_{kp}| \ll T_{kp}$) свободная энергия F_s сверхпроводника равна [3]

$$F_s = F_{n_0} + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left\{ -|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \vec{H}^2 + \left| \frac{i}{\varkappa} \vec{\nabla}\psi + \vec{A}\psi \right|^2 \right\} dV, \tag{2}$$

где F_{n_0} — свободная энергия вещества в нормальном состоянии, H_{cm} — критическое поле массивного образца, $\vec{A}$ — векторный потенциал, ψ — волновая функция, пропорциональная щели сверхпроводника, а $\varkappa$ — параметр.

ψ и $\vec{A}$ удовлетворяют уравнениям [3]

$$\left(\frac{i}{\varkappa} \vec{\nabla} + \vec{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi^2 \psi^* = 0, \tag{3}$$

$$-\vec{j} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{i}{2\varkappa}(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) + \vec{A}\psi\psi^*. \tag{4}$$

Для круглого цилиндра произвольной толщины d, помещенного во внешнее поле $\vec{H}_2$ параллельно его оси, при $f \approx 1$ решение уравнения (4) имеет вид [4]

$$A = \frac{\hbar c n}{2e\delta_0 R} + \delta_0 \left[a\mathrm{I}_1(R) + b\mathrm{K}_1(R) \right] \tag{5}$$

и соответственно

$$H = a\mathrm{I}_0(R) - b\mathrm{K}_0(R). \tag{6}$$

Здесь I и K известные цилиндрические функции [12], а коэффициенты a и b определяются из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. При $R_2 - R_1 = d < \delta_0$ (где R_1 и R_2 внутренний и внешний радиусы цилиндра) из (5) и (6) следует, что изменением $\vec{A}$ и плотностью тока $\vec{j}$ по толщине цилиндра можно пренебречь. Известно, что при этих условиях минимуму F_s соответствует решение для ψ с постоянным по величине модулем. Тогда j определим, интегрируя (4) по контуру L поперечного сечения цилиндра,

$$j = \frac{(2\pi n/\varkappa - H_2 S_1) f^2}{L + S_1 \cdot d \cdot f^2}. \tag{7}$$

Здесь $S_1 = \pi R_1^2$. При интегрировании учтено, что $\vec{j}$ и $\vec{A}$ постоянные по величине и имеют составляющие только по l, $l = R \cdot \theta$, где θ угол относительно оси z цилиндра. Одновременно исключая A из (3) и (4), имеем

$$\frac{1}{\varkappa^2} \vec{\nabla}^2 f = - f + f^3 + j_0^2/f^3. \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) дают возможность определить величины j и f при заданных H_2 и n. Тогда с помощью (2) можно определить, при каких H_2 в цилиндре происходит переход от n к n'. При $L > S_1 \cdot d \cdot f^2$ плотность тока (7) пренебрежимо мала и можно считать, что внешнее поле $\vec{H}$ полностью проникает внутрь цилиндра. В этом случае имеет место хорошо известный эффект осцилляций критической температуры T_H цилиндра во внешнем поле, наблюденный Литтлом и Парксом [5, 6, 7]. Период осцилляций соответствует проникновению в цилиндр одного кванта потока и определяется из выражения [5, 7]

$$S_1 \cdot \Delta H_2 = G_0 = \frac{hc}{e^*}, \tag{9}$$

где $e^* = 2e$ — заряд пары. Соотношение (9) в приведенных единицах [3] имеет вид

$$S_1 \cdot \Delta H_2 = 2\pi/\varkappa. \tag{9a}$$

Отметим, что все соотношения будут даны в приведенных единицах. При $H_2 \cdot S_1 < \pi/\varkappa$ энергетически более выгодным для сверхпроводника является состояние с $n = 0$, так как при $n = 0$ свободная энергия F_{s_0} меньше свободной энергии F_{s_1} при $n = 1$ [4, 5, 6, 7]. Когда $\pi/\varkappa \leqslant H_2 \times S_1 \leqslant 2\pi/\varkappa$, то более выгодным становится состояние с $n = 1$, так как при этом $F_{s_1} < F_{s_0}$. Таким образом, когда $H_2 S_1 = \pi/\varkappa$ происходит скачок от $n = 0$ к $n = 1$. Следует отметить также, что в эффекте Литтла-Паркса максимальное смещение критической температуры порядка [5]

$$(T_{kp} - T_H)_{\max} \sim T_{kp} \frac{\xi_0 \cdot d}{(2 R_1)^2}.$$

Следовательно, для получения измеримой величины смещения $T_{kp}-T_H$ радиус R_1 должен быть по возможности малым. В опытах Литтла-Паркса $R_1 \sim 0{,}7$ *мк*, $d \sim 350\,A^\circ$, а $(T_{kp}-T_H)$ макс $\sim 0{,}05^\circ\,K$.

Так как мы рассматриваем цилиндр с размерами $d < \delta_0(T)$, $L \ll \ll S_1 \cdot d \cdot f^2$ ($L \sim 10^{-3}$ *см*), то эффект осцилляций должен заметно уменьшиться. В этом случае при $H_2 \cdot S_1 = \pi/\varkappa$ совершается переход от $n=0$ к $n=1$, однако плотностью тока уже нельзя пренебрегать. Из (7) находим, что при $n=0$ и $H_2 \cdot S_1 < \pi/\varkappa$ $j \approx H_2/d$, т. е. ток полностью экранирует внешнее поле H_2. Если

$$\frac{\pi}{\varkappa} < H_2 S_1 < \frac{2\pi}{\varkappa}, \quad \text{то} \quad F_{s_1} < F_{s_0}$$

и система окажется в состоянии с $n=1$, а в цилиндре будет находиться один квант магнитного потока. Следовательно, при $H_2 S_1 = \pi/\varkappa$ в цилиндре будет иметь место непрерывный процесс проникновения и выталкивания одного кванта магнитного потока. Согласно [1, 2] во время этих переходов модуль $f(l)$ волновой функции хотя бы в одной точке на L должен обращаться в нуль. Значение этого модуля найдем из уравнений (4) и (8).

Пренебрегая изменением f по толщине образца, после однократного интегрирования из (8) находим

$$\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{df}{dl}\right)^2 = -f^2 + \frac{1}{2} f^4 - j_0^2/f^2 + C^2. \qquad (10)$$

Выбирая постоянную интегрирования C^2 в виде

$$C^2 = f_0^2 - \frac{1}{2} f_0^4 + j_0^2/f_0^2,$$

где $f = f_{\min}$ (см. рис. 1), получаем

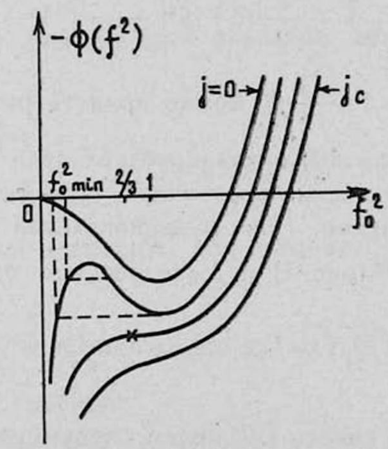


Рис. 1.

$$f^2(l) = f_0^2 + B(j_0, f_0)\, Sn^2\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2}} A^{1/2} l + C_1\right). \qquad (11)$$

Здесь Sn — эллиптический синус Якоби [12],

$$A=\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)+\left\{\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)^2-2(-f_0^2+f_0^4+j_0^2/f_0^2)\right\}^{1/2}.$$

$$B=\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)-\left\{\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)^2-2(-f_0^2+f_0^4+j_0^2/f_0^2)\right\}^{1/2},$$

Постоянная C_1 определяется соответствующим выбором точки $l=0$. Если принять, что $f(0)=f_0$, то $C_1=0$. Таким образом, модуль волновой функции ψ, при данном n, j_0 кроме $f=\mathrm{const}$ может быть также периодически меняющейся в направлении тока функцией координат [2, 11]. Из (11) следует, что $f^2(l)$ меняется от своего минимального значения f_0 до максимального, равного

$$f_{\max}^2=f_0^2+B(f_0,\ j_0).$$

Постоянную f_0 найдем из условия непрерывности функции $f(l)$ по контору L;

$$2F\left(\frac{\pi}{2},\ K\right)=\frac{L}{n'}\frac{A^{1/2}\varkappa}{\sqrt{2}}, \tag{12}$$

где $K^2=B/A$, $T_{n'}=\dfrac{L}{n'}$ — период осцилляции $f(l)$, F — эллиптический интеграл первого рода [12], а n' — число осцилляций модуля. Из (11), (12) следует, что $f(l)$ зависит от n, j_0 и числа осцилляций n'. Задача намного упрощается при $j_0\ll 1$, что соответствует наинизшим квантованным состояниям тока. Так если в эксперементах $L\sim 10^{-3}$ *см* [9, 10], то при $\varkappa\gg 1$ (также при $\varkappa\sim 1/\sqrt{2}$) правая часть (12) по порядку $\geqslant 10^3$. Тогда эллиптический синус можно экстраполировать гиперболическим тангенсом [11],

$$f^2(l)=f_0^2+\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)\mathrm{th}^2\left[\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)\right]l. \tag{13}$$

В этом случае $f_{\max}^2=1-\dfrac{1}{2}f_0^2$ можно принять равным единице ($f_0\sim 0$).

Следовательно, модуль $f(l)$ осциллирует от нуля до единицы. Соответственно для определения постоянной f_0 можно пользоваться следующими соотношениями. Из функциональной зависимисти $\Phi(f)=-f^2+\dfrac{1}{2}f^4-j_0^2/f^2$ (рис. 1) от f следует, что $\partial f/\partial l=0$ (10) при $f_0=f_{\min}$ и $f_{\max}^2=1-\dfrac{1}{2}f_0^2$, где $f_{\max}$ определяется из условия $\partial\Phi/\partial f|_{f=f_{\max}}=0$ (см. рис. 1).

Таким образом, вместо (12) имеем следующие два уравнения:

$$-f_0^2+\frac{1}{2}f_0^4-j_0^2/f_0^2=-f_{\max}^2+\frac{1}{2}f_{\max}^2-j_0^2/f_{\max}^2,$$

$$-f_{\max}^2+f_{\max}^4+j_0^2/f_{\max}^2=0. \tag{14}$$

Из (14) находим

$$j_0^2/f_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 - f_0^2 + f_0^4/4\right). \tag{14a}$$

Для определения зависимости j от A напишем (4) в виде

$$-j/f^2(l) = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\varphi(l)}{\partial l} + A. \tag{15}$$

Так как j и A не зависят от l, а $f^2(l)$ — эллиптическая функция (11, 13), то из (15) следует, что фаза $\varphi(l)$ меняется по l нелинейно. Ввиду непрерывности $\varphi(l)$, при полном обходе контура L фаза φ меняется на $2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$. Учитывая также, что при наименьших значениях n, n' и $j_0 \ll 1$ вместо (11) можно воспользоваться формулой (13), то интегрированием по контуру L из (15) получаем

$$-\frac{jL}{1-\frac{1}{2}f_0^2} - \frac{2\sqrt{2}\cdot n'\cdot j}{\varkappa\cdot f_0\cdot\left(1-\frac{1}{2}f_0^2\right)}\operatorname{arctg}\frac{\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)^{1/2}}{f_0} =$$

$$= -\frac{2\pi}{\varkappa}\cdot n + A\cdot L. \tag{16}$$

Если учесть также (14а), то из (16) следует, что зависимость j от A очень сложная. Однако выражение (16) можно упростить при $j_0 \ll 1$. Тогда (16) принимает вид

$$-\frac{j\cdot L}{f_{\max}^2} = -(n - n'/2)\frac{2\pi}{\varkappa} + A\cdot L, \tag{17}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$,

$n' = 1, 2, 3 \cdots$,

а $f_{\max}^2 = 1 - \frac{1}{2}f_0^2$ — максимальное значение модуля при заданных n, n' и j_0.

Ввиду того, что

$$H_1\cdot S_1 = \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l},$$

где H_1 — поле внутри цилиндра, для величины магнитного потока из (17) находим

$$G = \frac{hc}{2e}\left(n - \frac{n'}{2}\right)\left(1 + \frac{\delta_0^2\cdot L}{S_1 d}\right)^{-1} + H_2\cdot S_1\left(1 + \frac{S_1\cdot d}{L\cdot\delta_0^2}\right)^{-1},$$

или в приведенных единицах

$$G = \frac{2\pi}{\varkappa}\left(n - \frac{n'}{2}\right)(1 + L/S_1 d)^{-1} + H_2\cdot S_1\left(1 + \frac{S_1\cdot d}{L}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Таким образом, уравнения Гинзбурга-Ландау (3, 4) при заданных значениях H_2 и n кроме $f = \text{const}$ допускают также решения в виде (11).

Однако в отличие от $f=\mathrm{const}$ решение (11) зависит также и от количества осцилляций n' модуля. Так как при каждой осцилляции модуль проходит через нуль, то тем самым n' определяет количество точек на L, где $f(l)=0$. Процесс скачка потока путем обращения модуля в нуль тесно связан с вопросом термодинамической устойчивости сверхпроводящего цилиндра в соответствующем состоянии. Поэтому, если при $H_2\cdot S_1=\pi/\varkappa$ цилиндр не может находиться в равновесии в состоянии с модулем (11), то переход от $n=0$ к $n=1$ при этом будет иметь место таким же образом, как и в проволоке или кольце [2]. Для этой цели рассмотрим выражение свободной энергии сверхпроводника. Согласно [4], для цилиндра, помещенного во внешнее поле H_2, минимальной должна быть функция

$$F_S^1=F_S-2\cdot H_2\int\limits_{S_2}H\cdot dS+H_1^2\cdot S_1, \tag{19}$$

где F_S — свободная энергия, определяемая выражением (2). Так как вдоль оси цилиндра задача однородная, то в (19) по z принимаем единичную длину интегрирования. Учитывая, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}H^2dv=\int\limits_{R_1}^{R_2}\vec{j}\vec{A}dv-\vec{H}_1^2\cdot S_1;\quad (\delta_0\cdot\Delta z=1)$$

и принимая во внимание (2), (4), (11), для F_S^1 (19) имеем

$$\frac{F_S^1-F_{n_0}}{d\cdot H_{cm}^2/4\pi}=L\left(f_0^2-\frac{1}{2}f_0^4+j_0^2/f_0^2\right)+\int\limits_{-L/2}^{L/2}\left[2f^2(l)+\right.$$
$$\left.+f^4(l)-\frac{j^2}{f^2(l)}\right]dl+\frac{2\pi}{\varkappa}j_0\cdot n-H_2(H_2+j_0d)\,S_1/d- \tag{20}$$
$$-H_2^2(L+\pi d)-\frac{H_2j_0d}{2}\left(L+\frac{2\pi}{3}d\right).$$

Интегрируя по L и учитывая (13), (14а), из (20) найдем

$$\frac{F_S^1-F_{n_0}}{d\cdot H_{cm}^2/4\pi}=L\left(-f_0^2+\frac{1}{2}f_0^4-j_0^2/f_0^2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{3\varkappa}n'\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)^{3/2}+$$
$$+j_0^2L/f_0^2-\frac{j_0^2\cdot L\cdot\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)}{f_0^4\cdot\left(1-\frac{1}{2}f_0^2\right)}+\frac{2\pi}{\varkappa}n\cdot j_0-$$
$$-\frac{j_0^2\cdot L}{1-\frac{1}{2}f_0^2}-\frac{2\sqrt{2}n'j_0^2}{\varkappa f_0\cdot\left(1-\frac{1}{2}f_0^2\right)}\operatorname{arctg}\frac{\left(1-\frac{3}{2}f_0^2\right)^{1/2}}{f_0}- \tag{21}$$
$$-H_2\cdot(H_2+j_0d)\,S_1/d-H_2^2(L+\pi d)-H_2j_0d\cdot(L+2\pi d/3)/2.$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости относительно $j_0 \sim f_0/\sqrt{2}$ (j_0 порядка $2\pi/\varkappa Sd$ (17) и имея в виду, что $L \ll S \cdot d$, $d < 1$, для F_S^1 (21) окончательно имеем

$$\frac{F_S^1 - F_{n_s}}{d \cdot H_{cm}^2/4\pi} = -\frac{L}{2} - H_2^2(L + S_1/d) + \frac{4\sqrt{2}}{3\varkappa} n' + \frac{2\pi}{\varkappa} \cdot n \cdot j_0 - H_2 S_1 \cdot j_0 - \\ - \frac{n' \cdot \pi}{\varkappa} \cdot j_0. \tag{22}$$

Из (22) следует, что состояние с $f = \mathrm{const}$ энергетически выгоднее по сравнению с состоянием с модулем (11). Так как основной вклад в (22), связанный с током и полем, обусловлен вторым членом, то при переходе из состояния с $f = \mathrm{const}$ в состояние с осциллирующим модулем (11) системе приходится преодолевать энергетический барьер порядка $\frac{4\sqrt{2}}{3\varkappa} d \cdot n' H_{cm}^2/4\pi$. Барьер с наименьшей высотой имеет место при $n' = 1$. Следовательно, в цилиндре наиболее вероятным является такой механизм скачка потока, когда модуль только в одной точке на L становится равным нулю. В этом случае из (17), (18) имеем

$$j_0 = \frac{\frac{2\pi}{\varkappa}\left(n - \frac{1}{2}\right) - H_2 \cdot S_1}{L + S_1 \cdot d},$$

$$G_1 = \frac{2\pi}{\varkappa}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{L}{S_1 d}\right)^{-1} + H_2 S_1 \left(1 + \frac{S_1 d}{L}\right)^{-1}. \tag{23}$$

Из (23) следует, что при $H_2 S_1 \ll \pi/\varkappa$ в состоянии с $n = 0$ и $n' = 0$ ($f = \mathrm{const}$) магнитным потоком G_1 внутри цилиндра можно пренебречь. С увеличением H_2 и переходом от $n' = 0$ к $n' = 1$ в состоянии с $n = 0$ магнитный поток G_1 растет и при $H_2 S_1 = \pi/\varkappa$ достигает величины, равной $\pi/\varkappa$ (или $G_1 = hc/2e^*$).

В этом случае G_1 направлен противоположно $\vec{H}_2$. Когда $H_2 S_1 = \pi/\varkappa$, значения свободной энергии (22) при $n = 0$ и $n = 1$ одинаковы. Поэтому сверхпроводящий цилиндр с одинаковой вероятностью может находиться и в состоянии с $n = 1$. Однако при $n = 1$, $n' = 1$ $G_1 = hc/2e^*$ направлен по $\vec{H}_2$.

Таким образом, переход из состояния с $n = 0$ в состояние с $n = 1$, хотя и происходит при равенстве соответствующих значений $f(l)$ (11) и свободных энергий F_S^1 (22), однако сопровождается резким изменением направления магнитного потока G_1 (23). Соответствующим образом меняется и величина плотности тока (23) в цилиндре. Из этого следует, что при $H_2 S_1 = \pi/\varkappa$ (или $H_2 S_1 = hc/2e^*$) цилиндр в состоянии с осциллирующим модулем (11) не может находиться в термодинамическом равновесии.

Аналогичный вопрос термодинамической неустойчивости для тонкой проволоки с током в состоянии с осциллирующим модулем рассматривался в работе [2], где, в отличие от цилиндра, влиянием магнитного поля пренебрегается, так как диаметр проволоки d намного меньше $\delta_0(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. A. Little*, Phys. Rev. 156, 396 (1967).
2. *J. S. Langel, V. Ambecaokar*, Phys. Rev. 164, 498 (1967).
3. *В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950).
4. *В. Л. Гинзбург*, ЖЭТФ, 42, 299 (1962).
5. *П. Д-Жеен*, Сверхпроводимость металлов и сплавов. Изд-во Мир, М., 1968.
6. *W. A. Little, R. D. Parks*, Phys. Rev. A 133, 94 (1964).
7. *M. Tinkham*, Phys. Rev. 129, 2413 (1964).
8. *В. Л. Гинзбург*, ЖЭТФ, 34, 113 (1958).
9. *B. S. Deaver, W. M. Fairbank*, Phys. Rev. Lett. 7, 43 (1961).
10. *R. Doll, M. Nabauer*, Phys. Rev. Lett. 7, 51 (1961).
11. *Р. М. Арутюнян*, ДАН АрмССР, 46, 3 (1968).
12. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

ԲԱՐԱԿ ՊԱՏԵՐՈՎ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԼԱՆՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀՈՍՔԻ ԹՌԻՉՔԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Դիտարկվում են արտաքին մագնիսական դաշտում տեղադրված բարակ պատերով գլանային նմուշներում մագնիսական հոսքի թռիչքի հարցը Գինզբուրգ-Լանդաուի հավասարումների հիման վրա։

Ցույց է տրված, որ մի հավասարակշռված վիճակից մյուսին անցնելիս գերհաղորդչի ալիքային ֆունկցիայի մոդուլը անցնում է զրոյական արժեքով։

ON THE MAGNETIC FLUX LEAP IN THE THIN SUPERCONDUCTING CYLINDERS

R. M. HARUTUNIAN

On the basis of the Ginzburg-Landau equation, the magnetic flux leap in the cylindrical thinwalled samples placed in the external magnetic field is considered.

It is shown that the wave function modulus of the superconductor passes through the zero value during transitions from one equilibrum state to another.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 381—391 (1970)

УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРЯМЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ, ВЫЗВАННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ И γ-КВАНТАМИ С ЭНЕРГИЕЙ ДО 300 *Мэв*

К. Ш. ЕГИЯН, Г. Л. БОЧЕК, И. А. ГРИШАЕВ, К. В. АЛАНАКЯН, В. И. КУЛИБАБА, М. Л. СИТЕНКО

Приводятся описание и экспериментальные характеристики установки, предназначенной для исследований прямых ядерных реакций, вызванных электронами и γ-квантами с энергией 300 *Мэв*, на линейном ускорителе ЛУ-300 ФТИ АН УССР.

Указаны особенности установки, обусловленные импульсным режимом работы линейного ускорителя электронов.

I. Введение

Исследование структуры ядра остается одной из основных проблем современной физики. В течение последних двух десятилетий наиболее распространенным методом исследования структуры ядра стало квазиупругое рассеяние быстрых протонов на ядрах [1, 2]. Простота механизма реакции квазиупругого $(p, 2p)$ рассеяния, изучаемого методикой совпадения двух конечных протонов, позволяет связать измеряемые параметры реакции с распределением нуклонов по энергии связи, с характером и временем жизни дырочных состояний отдельных оболочек и с импульсным распределением нуклонов на данной оболочке. Реакции типа (p, pd) $(p, p\alpha)$ дают ценную информацию о характере сильных корреляции нуклонов в ядрах [3].

Данные по $(p, 2p)$ реакции обычно интерпретируются на основе импульсного приближения, при котором предполагается, что падающие протоны взаимодействуют с отдельными нуклонами, движущимися в поле остальных частиц в ядре. Так как среднее межнуклонное расстояние в ядрах порядка 2 ферми [4], то для справедливости импульсного приближения энергия первичных протонов должна быть $\geqslant 150$ *Мэв*. Оптимальное значение энергии первичных протонов лежит в интервале $150 \div 400$ *Мэв* [3, 4]. При таких энергиях средний свободный пробег в ядерном веществе как первичного, так и двух вторичных протонов (с энергией 100—200 *Мэв*) меньше размеров ядер. Поэтому многократное рассеяние участвующих в реакции протонов до и после изучаемого элементарного $(p, 2p)$ взаимодействия, проводящее к значительным искажениям волновых функций этих частиц и возбуждению ядер в начальном состоянии, не позволяют получить сведения о глубоких оболочках ядер с $A > 16$. Интерпретация данных, полученных на легких ядрах (с $A \leqslant 16$) требует учета искажения волновых функций трех протонов, что является трудной задачей.

Вышеуказанные соображения относятся так же к реакциям, вызванным другими сильновзаимодействующими частицами.

Более детальные данные об объемном взаимодействии и глубоких состояниях ядер можно получить при помощи высокоэнергичных квантов и электронов. Благодаря слабому взаимодействию, искажением волновых функций этих частиц и возбуждением ядер в начальном состоянии можно пренебречь [4]. Кроме того, теоретическая интерпретация полученных данных облегчена тем, что взаимодействие электромагнитное, и в большинстве случаев можно применять теорию возмущений [3].

Эксперименты по систематическому исследованию прямых ядерных реакций, вызванных γ-квантами, выполнено в основном в области максимальной энергии до 100 *Мэв* [5]. В области $E_{\gamma}=100\div300$ *Мэв* и выше 300 *Мэв* такие эксперементы выполнены в ограниченном количестве [6, 7]. Не проведены систематические исследования всех аспектов этих реакций так, как это сделано для области $(E_{\gamma})_{max}<100$ *Мэв* [5].

Эксперементы по исследованию структуры ядер электронами высоких энергий только начаты [8] и имеют пока предварительный характер.

В настоящей работе приведено описание установки, предназначенной для исследования структуры ядер и характера взаимодействий γ-квантов и электронов с максимальной энергией до 300 *Мэв*.

II. Описание установки

На рис. 1 приведена общая схема установки. Сфокусированный пучок Харьковского линейного ускорителя электронов с энергией до 300 *Мэв* после системы параллельного переноса поступает по ваккуумному электронопроводу в камеру рассеяния, вокруг которой по неподвижной платформе вращаются два магнитных аналазатора, предназначенные для регистрации вторичных частиц в реакции, вызванных γ-квантами или электронами. На продолжении электронопровода после камеры рассеяния расположен монитор вторичной эмиссии для относительного измерения интенсивности пучка электронов. После монитора вторичной эмиссии пучок электронов поглощается могильником из блоков тяжелого бетона.

1. Система формирования пучка. Однократно повернутый пучок после предварительного формирования при помощи трех квадрупольных линз окончательно фокусируется на мишени двумя линзами, расположенными после системы параллельного переноса. Непосредственно после линз окончательной фокусировки установлены корректоры вертикального и горизонтального положения для точной установки пучка в центр мишени. Наблюдение за пучком при фокусировке осуществляется дистанционно при помощи телевизионной установки на сцинтиллирующем экране, устанавливаемом на месте мишени.

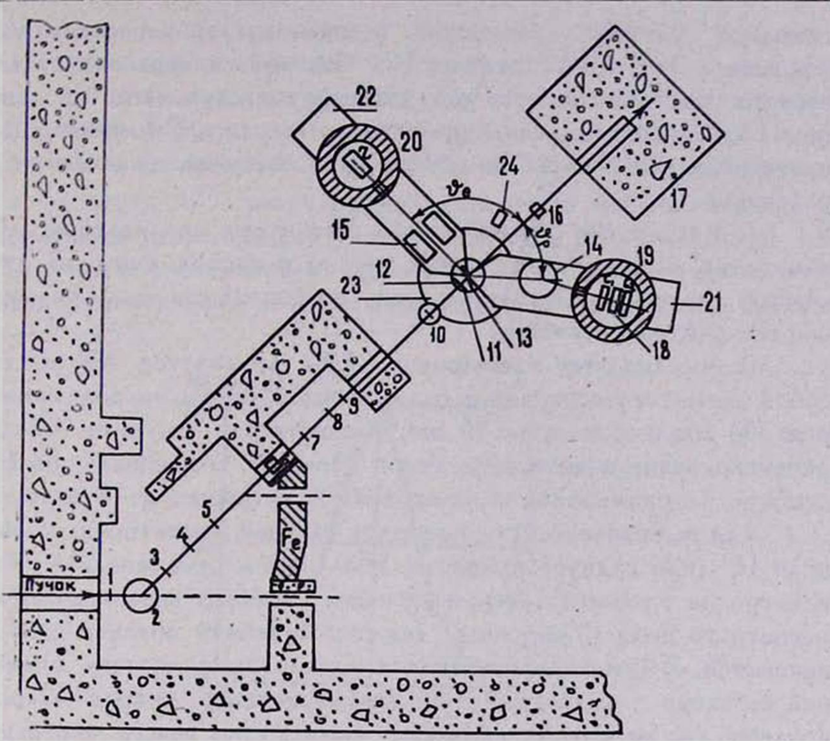


Рис. 1. Схема установки 1, 12— датчики МИИ, 2— поворотный магнит, 3, 4, 5— магнитные линзы предварительной фокусировки, 6— цилиндр Фарадея, 7, 8—магнитные линзы окончательной фокусировки, 9— корректоры, 10— вакуумная система, 11—камера рассеяния. 13—мишень, 14, 15—спектрометры АП и АЭ, 16—МВЭ, 17— могильник, 18— поглотитель, 19, 20—защиты, 21, 22 - подвижные платформы, 23—неподвижная платформа, 24—телеобъектив.

2. Камера рассеяния. Камера рассеяния представляет собой цилиндрический резервуар диаметром 320 *мм* и высотой 300 *мм*, жестко связанный с установкой. На цилиндрической поверхности камеры рассеяния на уровне пучка ускорителя имеются окна для ввода и вывода пучка, для наблюдения за пучком и для вывода вторичных частиц. В камере рассеяния установлены привод мишени, подсветка экрана наблюдения за пучком и датчик магнито-индукционного измерителя интенсивности пучка, электрические выводы которых расположены на крышке камеры. Привод мишени представляет собой диск с шестью ячейками для крепления пяти мишеней и экрана для наблюдения за пучком. Диск вращается вокруг горизонтальной оси при помощи двигателя. Данная мишень или экран устанавливаются под пучок дистанционно. Для обеспечения необходимого угла между нормалью к мишени и осью пучка привод мишени может вращаться вручную вокруг вертикальной оси, проходящей через центр камеры рассеяния и всей установки.

3. Неподвижная платформа. Неподвижная платформа представляет собой массивную стальную круглую плиту диаметром 1580 *мм* и толщиной 240 *мм*, имеющую шесть юстировочных опор, которые обеспечивают установку платформы в горизонтальной плоскости с угловой ошибкой $\lesssim 5\cdot 10^{-3}$ радиан. На боковой поверхности платформы имеется лимб для отсчета углов поворотов двух магнитных анализаторов. Ошибки определения углов не превышают 2,5 минут. В центре платформы установлена подставка для жесткого крепления камеры рассеяния.

4. Магнитные анализаторы. Магнитные анализаторы служат для измерения импульсов вторичных частиц и расположены на двух подвижных платформах, вращающихся по неподвижной платформе вокруг общего центра установки.

а) Анализатор электронов (АЭ). Анализатор АЭ представляет собой магнит естественного охлаждения с круглыми полюсами диаметром 300 *мм* и с зазором 25 *мм*. Конструкция магнита обеспечивает детектирование в интервале углов $30\div 110^\circ$. Линейная область зависимости напряженности поля от тока в катушках до 8 *кэрст*.

Для выбранного угла поворота главной траектории в магнитном поле 18° (при радиусе кривизны 1000 *мм*) и для анализа вторичных электронов с максимальным импульсом 250 *Мэв/с* значение необходимого магнитного поля (5 *кэрстед*) лежит в линейной области кривой намагничивания. В целях ограничения и определения действия полей рассеяния на входе и выходе магнита на расстоянии, равном зазору, установлены два магнитных экрана. В промежутке между экранами и полюсами магнита зависимость напряженности магнитного поля от координаты вдоль главной траектории частиц хорошо описывается линией, что позволяет однозначно определить эффективную границу полюсов [9]. Значение магнитного поля за экранами практически равно нулю.

При расстоянии центра магнита от мешени 500 *мм* и зазоре 25 *мм* светосила анализатора составляет $1{,}17\cdot 10^{-3}$ стерадиан. На расстоянии 1200 *мм* от центра магнита установлен детектор электронов. Предварительная калибровка анализатора АЭ была проведена без детектора при помощи сфокусированного пучка электронов с энергией 250 *Мэв*. Для этого анализатор был установлен по направлению пучка и на расстоянии 780 *мм* от центра магнита снимался отпечаток пучка на стекле в зависимости от тока в катушках. Кривая зависимости отклонения центра пучка повторяет ход кривой намагничивания. Окончательная калибровка АЭ была проведена с детектором при помощи исследования упругого рассеяния электронов на свободном протоне в мишени CH_2.

б) Анализатор протонов (АП). Конструкции анализаторов АП и АЭ аналогичные, за исключением более выгодного расположения намагничивающих катушек в АП. Это приводит к увеличению линейного участка зависимости напряженности магнитного поля от тока намагничивания (до 10 *кэрст.*). Для выбранного угла поворота главной траектории 12° (при радиусе кривизны 1600 *мм*) АП позволяет анализировать импульсы до 500 *Мэв/с*.

При расстоянии центра магнита от мишени 600 *мм* и зазоре 30 *мм* светосила анализатора АП составляет $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ стерадиан. На расстоянии 850 *мм* от центра магнита расположен детектор тяжелых частиц с диаметром 60 *мм*, обеспечивающий анализ частиц без уменьшения светосилы анализатора. Анализатор АП был откалиброван при помощи α источника Po^{210}, расположенного на месте мишени. На рис. 2 приведена кривая разрешающей способности АП, полученная при помощи α источника с диаметром активной части 10 *мм*. Согласно этой кривой экспериментальная разрешающая способность АП на полувысоте $\Delta p/p \approx \pm 15\%$.

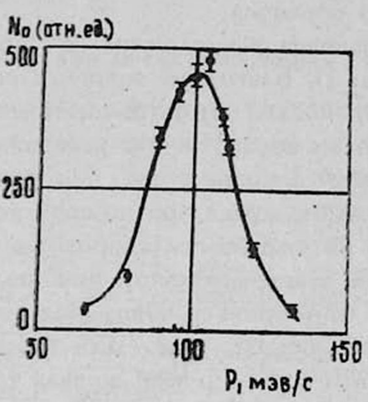


Рис. 2. Кривая разрешающей способности АП. N_α — число α частиц с импульсом p, *Мэв/с*.

5. *Детекторы*. Вторичные электроны детектируются черенковским счетчиком из оргстекла. Детектором тяжелых частиц служат два сцинтилляционных счетчика (C_1C_2), включенные в совпадение. Во всех счетчиках используются быстрые фотоумножители типа ФЭУ-30.

6. *Мониторирование пучка*. Интенсивность пучка электронов измеряется двумя методами — монитором вторичной эмиссии (МВЭ) и магнитоиндукционным измерителем (МИИ) [10]. Выбор двух способов измерения интенсивности обусловлен фоновыми условиями эксперимента. Для того чтобы головка МВЭ не являлась источником добавочного фона, она расположена за камерой рассеяния на расстоянии 2,5 метра.

Магнитно-индукционный измеритель имеет то преимущество по отношению к МВЭ, что датчик МИИ пролетного типа [11] не создает фона вблизи мишени. Кроме того, МИИ является абсолютным прибором, не требующим калибровки по цилиндру Фарадея, использование которого нецелесообразно, так как цилиндр Фарадея является интесивным источником нейтронов. МИИ градуируется импульсным генератором. Относительные ошибки измерения интенсивности пучка обоими методами одинаковы и составляют (3—4)% [10, 12] в области измеряемых средних токов (0,01÷0,3) *мка*.

7. *Вакуум.* Вакуум в электропроводе и в камере рассеяния порядка 10^{-6} *мм рт. ст.* обеспечивается пароструйным насосом. Вакуум в спектрометрах порядка $5 \cdot 10^{-3}$ *мм рт. ст.*

III. Фоновые условия

В экспериментах, проводимых на пучке электронов, надежность полученных данных во многом определяется фоновыми условиями, которые особенно тяжелы в работах на линейных ускорителях с короткой длительностью импульсов тока. Поэтому обычно пучок электронов очищается от сопровождающих γ и нейтронного излучений при помощи параллельного переноса.

Описываемая установка расположена на однократно повернутом пучке ускорителя (рис. 1). Благодаря энергетическим разбросам (10% по основанию спектра), после поворота магнитом, пучок принимает форму ленты в плоскости поворота. На расстоянии 15 *м* (от поворотного магнита до мишени) ширина пучка в горизонтальной плоскости составляет 30 *см*. Сужение пучка при помощи коллиматоров приводит к резкому увеличению интенсивности сопровождающего γ и нейтронного фонового излучения. Следовательно, при подобном расположении установки необходимо формировать пучок без его соприкосновения на различных участках электронопровода. Для этого после поворотного магнита предварительная фокусировка пучка тремя квадрупольными линзами осуществляется так, чтобы не было потерь тока в участках электропровода до мишени (рис. 1). Такая магнитооптическая система формирования пучка достаточно сложна и чувствительна к изменениям параметров пучка (энергия, энергетические разбросы, углы входа, угловые расходимости) и отдельных узлов формирующей системы и требует непрерывного контроля проводки пучка до мишени. В установке применена система контроля проводки пучка на основе сравнения значения тока в двух точках. На рис. 3 приведена блок-схема системы кон-

Рис. 3. Блок-схема системы контроля за проводкой и формированием пучка на мишени.

троля [13]. Выходные сигналы двух датчиков (пролетного типа, расположенные соответственно перед поворотным магнитом и перед мишенью, рис. 1), пропорциональные значениям тока пучка на входе и выходе системы формирования, после усилителей и воротных схем поступают на входы блока сравнения. Амплитуда выходного импульса блока сравнения пропорциональна отношению значений тока пучка в двух точках. Увеличение потери тока в системе формирования, а следовательно, увеличение фона на месте установки контролируется измерением амплитуды выходного импульса блока сравнения как для среднего тока, так и для числа электронов в отдельных импульсах тока. Если амплитуда этого импульса превышает свое экспериментально выбранное значение, при котором фоновые условия еще приемлемы, система сигнализирует, и после этого пучок формируется заново. Из-за сложности системы формирования применение обратной связи не представляется возможным.

IV. Радиотехническая регистрирующая система (РСС)

Радиотехническая регистрирующая система отбирает события, соответствующие исследуемой реакции. На рис. 4 приведена блок-схема РСС. При помощи блока СС—1 отбирается случай совпадения и ос-

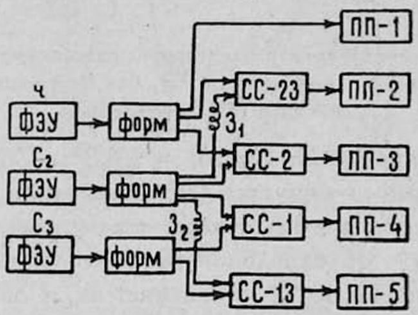


Рис. 3. Блок-схема радиотехнической регистрирующей системы. Задержки $З_1$ и $З_2$ сделаны в виде коаксиальных кабелей (РК—50). ПП—пересчетки.

тановки (см. ниже) тяжелых частиц в сцинтилляторе C_2. Блок СС—2 выбирает совпадения в счетчике C_2 и в черенковском счетчике (Ч). Блоки СС—13 и СС—23 выделяют соответствующие задержанные совпадения. Таким образом, на опыте измеряются число рассеянных электронов (ПП—1), число тяжелых частиц (ПП—4), число электрон-тяжелая частица (*ep*) совпадений (ПП—3), фон при измерении числа тяжелых частиц (ПП—5) и (*ep*) совпадений (ПП—2).

Минимальное разрешающее время всех двухкратных схем совпадений, при котором эффективность регистрации практически 100% $2\tau_p = 10$ *нсек*. Такое большое разрешающее время выбрано во избежание влияния параметров выходного импульса ФЭУ на τ_p (при измерении угловых распределений (*ep*) рассеяния, когда эти импульсы постоянной амплитуды, $2\tau_p$ удается уменьшить до 6,5 *нсек*).

V. Результаты испытаний установки

Установка была испытана при помощи измерений сечения упругого рассеяния электронов на свободном протоне в мишени CH_2. На рис. 5а приведен энергетический спектр электронов, рассеянных под углом 90° при энергии первичных электронов 250 *Мэв*. Кривая представляет собой разность спектров, полученных на CH_2 и C^{12}. Полуширина пика определяет относительные ошибки измерения энергий

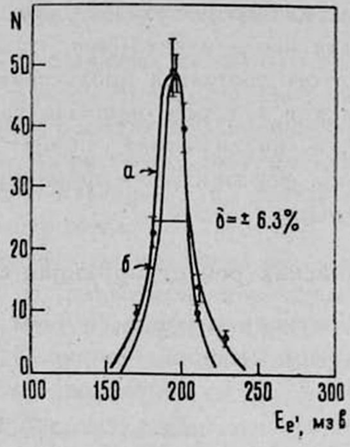


Рис. 5. а) Энергитический спектр электронов, рассеянных под углом 90° на протонах. Спектр измерен при помощи АЭ, без (*ер*) совпадений. б) Тот же спектр с (*ер*) совпадением.

вторичных электронов в АЭ; $(\Delta p/p)_e = \pm 6{,}3\%$. Согласно рис. 5а экспериментальное сечение упругого (*ер*) рассеяния равно $(1{,}15 \pm 0{,}05)$ 10^{-32} *см²/стер*, которое на 8% меньше теоретического [14]. Это отклонение, по-видимому, обусловлено неопределенностью в измерении числа электронов, проходящих через мишень, и ошибками определения телесного угла $\Delta\Omega_e$.

Как было отмечено выше, анализатор АП был откалиброван при помощи α-источника Po^{210}. Экспериментальные относительные ошибки $(\Delta p/p) = \pm 13\%$ совпадают с данными калибровки.

В канале тяжелых частиц, кроме импульса, измеряется также пробег в сцинтилляторе C_2 с ошибками $\pm 0{,}05$ *г/см²*. Измерение пробега с такой точностью в толстом сцинтилляторе (~ 1 *г/см²*) производится следующим образом. Как известно [6], ионизационные потери данной частицы в сцинтилляторе (как и в других поглотителях конечной толщины) имеет максимум, который соответствует остановкам частиц в самом конце сцинтиллятора. При прохождении сквозь сцинтиллятор или при остановке не в конце, $\Delta E < (\Delta E)_{\text{max}}$, где ΔE — энергия, выделенная частицей в сцинтилляторе, $(\Delta E)_{\text{max}}$ зависит от массы частицы и для различных частиц достигает своего значения при различных энергиях (рис. 1 и 2 работы [6]). Очевидно $(\Delta E)^d_{\text{max}} > (\Delta E)^p_{\text{max}} > (\Delta E)^\pi_{\text{max}}$. Если U_d, U_p, U_π — амплитуды выходных импульсов ФЭУ, пропорциональные $(\Delta E)^d_{\text{max}}$, $(\Delta E)^p_{\text{max}}$, $(\Delta E)^\pi_{\text{max}}$ соответветственно, то, устанавливая порог дискриминатора на входе схемы совпадения $U_n = U_p - \Delta U$, мы выбираем остановки частиц тяжелее протона. Ошибки определения пробега определяются малой величиной ΔU и обратно пропорциональны энергии детектируемой частицы. Необходимо отметить, что такой метод определения пробега пригоден для $E < M$, где M — масса покоя частицы, E — кинетическая энергия.

Изменением количества вещества перед сцинтиллятором C_2, изменяем энергию (пробег) частицы. На рис. 6 приведена кривая раз-

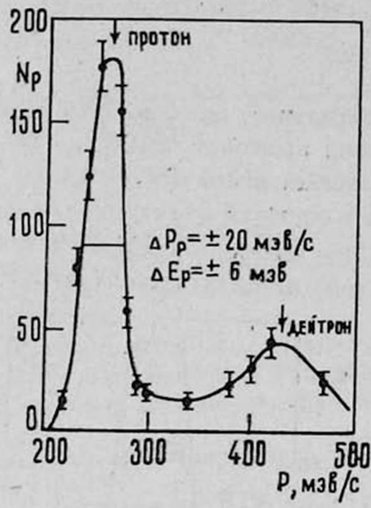


Рис. 6. Кривая разрешающей способности измерения энергии (пробега) в сцинтилляторе C_2. По оси абсцисс расположены значения импульсов частиц на входе C_2 (импульс измерен СП—95 с ошибками $\pm 0{,}5\%$). По оси ординат отложено число частиц, для которых $U_p \geqslant U_n + \Delta U$. ΔU выбирается экспериментально так, чтобы эффективность регистрации была $\approx 100\%$.

решающей способности определения энергии (пробега) протонов указанным способом. Импульсы протонов были измерены при помощи магнитного спектрометра СП—95 [17]. Протоны образовывались в мишени C^{12} пучком электронов с энергией 250 *Мэв*. Относительные ошибки измерения импульсов не превышали $\pm 0{,}5\%$.

Согласно рис. 6 разбросы при измерении энергии в сцинтилляторе C_2 порядка $\pm \sigma$ *Мэв*, что соответствует $\Delta R \approx \pm 0{,}05$ *г/см*^{2} (для протонов). На рис. 6 пик при больших энергиях соответствует дейтонам (приведен только для иллюстрации). Для детектирования только дейтонов необходимо устанавливать $U_p < U_n = V_d - \Delta U$ и т. д. При уменьшении $\Delta R < 0{,}05$ *г/см*^{2} уменьшается эффективность регистрации, по-видимому, из-за флуктуации энерговыделений частицы в сцинтилляторе.

Таким образом, установка позволяет измерять все кинематические параметры двух вторичных частиц ядерной реакции с разбросами, приведенными в таблице.

На рис. 5б приведен спектр электронов из мишени CH_2 (*ep*) совпадений для $\vartheta_e = 90^\circ$, $\vartheta_p = 38^\circ$, $E_e = 250$ *Мэв*, $E_p = 60$ *Мэв*. Полуширина этой кривой $\pm 6\%$. Общее число под пиками 5а и 5б совпадает

Таблица

Интервалы и разбросы измерения параметров двух вторичных частиц в реакциях $A(\gamma p)B$ и $A(e, e'p)B$

	ϑ_e°	ϑ_p°	E_e', *Мэв*	P_p, *Мэв/с*	E_p, *Мэв*
Интервал	30÷110	20÷90	<250	<500	30÷120
Разбросы	±0,5°	±1°	±7%	±13%	±5 *Мэв*

в пределах экспериментальных ошибок. Это доказывает, что эффективность детектирования протонов $\approx 100\%$.

Для значений телесных углов $\Delta\Omega_e = 3{,}1 \cdot 10^{-4}$ *стер* и $\Delta\Omega_p = 1{,}25 \times 10^{-3}$ *стер* загрузки в каналах электронов и тяжелых частиц составляют $N_э^{заг} = 1/сек$, $N_p^{заг} = 10/сек$ при среднем токе первичных электронов 0,16 μa ($\approx 10^{12}$ *эл/сек*) и числа ядер $N_я = 2{,}2 \cdot 10^{22}$. На рис. 7 при-

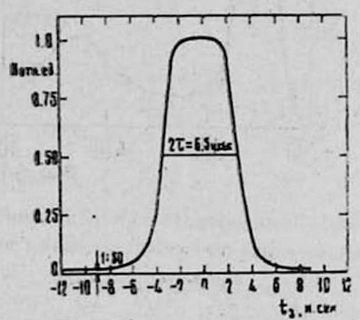


Рис. 7. Типичная кривая задержанных (ep) совпадений на CH_2 для всех схем двойных совпадений.

ведена кривая задержанных (ep) совпадений для вышеуказанных параметров. Согласно кривой $2\tau_p = 6{,}5$ *нсек* ($E_e' = \text{const.}$, $E_p = \text{const.}$, где E_e' — энергия вторичного электрона). Отношение максимума пика к пьедесталу составляет 50:1. Это означает, что установка позволяет исследовать процессы, сечения которых меньше сечения упругого (ep) рассеяния не более чем 50 раз. При этом отношение эффекта к фону 1:1.

В заключение авторы выражают благодарность член-корр. АН СССР А. И. Алиханяну и нач. сектора ЕрФИ профессору В. М. Харитонову за постоянный интерес к работе и неоднократные дискуссии, нач. сектора ФТИ Н. И. Мочешникову за помощь в организации и проведении работ, нач. КБ ЕрФИ Э. В. Тер-Минасяну, ст. инженеру Г. Г. Мамиконяну за проектирование установки, нач. ОП ЕрФИ Р. О. Оганесяну, нач. отдела ЭМ ФТИ АН УССР Н. И. Еремину за изготовление установки, нач. сектора ФТИ АН УССР Л. А. Махненко, нач. установки ЛУ-300 Г. А. Демяненко и всему коллективу установки ЛУ-300 за повседневную помощь при проведении эксперемента, сотрудникам ЕрФИ Г. О. Овсепяну, Д. А. Заргаряну, Л. А. Сарки-

сяну за участие в работах по изготовлению, испытанию установки и при физических измерениях.

Ереванский физический институт,
Физико-технический институт АН УССР

Поступила 17.XII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. *O. Chambarlain* and *E. Segre*, Phys. Rev., 87, 81 (1951).
2. *H. Tyren, Th. A. J. Maris* and *P. Hillman*, Nuovo Cimento, 6, 1507 (1957); *H. Tyren, Th. A. J. Maris* and *P. Hillman*, Nucl. Phys., 7, 10 (1958); *B. Gottschalc* and *K. Strauch*, Phys. Rev. Lett., 5, 107 (1960); *J. P. Garron* at. al. Nucl. Phys., 37, 126 (1962).
3. *В. В. Балашов, Д. В. Мебония*, Изв. АН АрмССР, Физика, 3, 122 (1968).
4. *G. Jacob, Th. Maris*, Rev. Mod. Phys., 38, 121 (1961).
5. *В. Т. Чижов*, ЖЭТФ, 38, 807 (1960).
6. *B. T. Feld* at al., Phys. Rev., 94, 1000 (1954); *J. S. Kim*, at al., Phys. Rev., 129, 1362 (1963).
7. *И. И. Мирошниченко*, Диссертация, ФТИ АН УССР, Харьков, 1969.
8. *U. Amaldi* at al., Phys. Lett., 13, 341 (1964); *U. Amaldi* at al., Phys. Lett., 22, 593 (1966); *U. Amaldi* at al., Phys. Lett., 25B, 24 (1967); *G. Ciofi Degli* Atti. Nucl. Phys., A106, 215 (1968).
9. *Н. Г. Афанасьев, А. В. Высоцкая, В. А. Гольштейн*, ПТЭ, 5, 29 (1963).
10. *К. Ш. Егиян, Г. А. Бочек* и др. Материалы VI итоговой конференции отдела ВЭ по физике высоких энергий и ускорителям, ФТИ АН УССР, Харьков, 69/13, стр. 143, 1969.
11. *Н. И. Мочешников*, Международная конференция по ускорителям, Дубна, 1963, М., Атомиздат, 1964, стр. 965.
12. *Н. Г. Афанасьев, В. В. Киселев* и др. ПТЭ, 4, 29 (1966).
13. *К. Ш. Егиян, Г. А. Бочек* и др. Материалы VI итоговой конференции отдела ВЭ по физике высоких энергий и ускорителям, ФТИ АН УССР, Харьков, 69/13, стр. 11 (1969).
14. *R. Hofstadter*, Rev. Mod. Phys., 28. 214 (1956).

ՄԻՆՉԵՎ 300 ՄէՎ ԷՆԵՐԳԻԱ ՈՒՆԵՑՈՂ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԵՎ γ-ՔՎԱՆՏՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ ՀՐԱՀՐՎՈՂ ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՈՒՂՂԱԿԻ ՌԵԱԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՆԱԽԱՏԵՍՎԱԾ ՍԱՐՔ

Կ. Շ. ԵՂՅԱՆ, Գ. Լ. ԲՈՉԵԿ, Ի. Ա. ԳՐԻՇԱԵՎ, Կ. Վ. ԱԼԱՆԱԿՅԱՆ
Վ. Ի. ԿՈՒԼԻԲԱԲԱ, Մ. Լ. ՍԻՏԵՆԿՈ

Բերված են մինչև 300 ՄէՎ էներգիա ունեցող էլեկտրոնների և γ-քվանտների կողմից հրահրվող միջուկային ուղղակի ռեակցիաների ուսումնասիրման համար նախատեսված սարքի նկարագրությունը և փորձնական բնութագրերը։ Սարքը տեղադրված է ՈՒՍՍՀ ԳԱ Ֆ. Տ. ինստիտուտի ԼՈՒ-300 էլեկտրոնային գծային արագացուցիչի փնջի մեջ։ Նշված են սարքի առանձնահատկությունները, որոնք պայմանավորված են գծային արագացուցիչի աշխատանքի իմպուլսային բնույթով։

ARRANGEMENT FOR INVESTIGATION OF DIRECT NUCLEAR REACTIONS PRODUCED BY ELECTRONS AND GAMMA QUANTA WITH ENERGIES UP TO 300 *MeV*

K. Sh. EGIAN, G. L. BOCHEK, R. A. GRISHAEV, K. V. ALANAKIAN,
V. R. KVLIBABA, M. L. SITENKO

The description and experimental characteristics of the arrangement designed for investigation of direct nuclear reactions produced by electrons and γ-quanta with energies up to 300 *MeV* on the 300 *MeV* Kharkov linear accelerator are given. The peculiarities of the arrangement due to the pulse operation of the electron linear accelerator are pointed out.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ