

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

XXXVIII, № 4

1964

խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների դոկտոր (պատ. խմբագրի անդակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐՉՈՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐԱՎ, շՍՍԻ ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, շՍՍԻ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г. АФРИКЯН, кандидат биологических наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, академик АН АрмССР (отв. редактор), В. О. КАЗАРЯН, доктор биологических наук (зам. отв. редактора), С. А. МИРЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

ОБМЕН

Թ Ո Վ Ա Ն Դ Ս Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

**Մարեմասիկա**

- Վ. Ա. Բաժրյան — Շտաբ-Լիուզիի սպերատորի սպեկտրայ տեղաշարժի ֆունկցիայի մասին . . . . . 183
- Վ. Ա. Զարարյան — Շրջանում անայիտիկ ֆունկցիաների եզրային որոշ հատկությունները . . . . . 199
- Մ. Մ. Չքրաշյան, Հայկական ՍՍԽ ԳԱ ակադեմիկոս, և Ս. Ա. Հակոբյան — Միտոտագ-Լեֆլերի կորիզներով ինտեգրայ ձևափոխությունների տեսության շտաբը . . . . . 207

**Առաձգականության հետաքննում**

- Ս. Ս. Զարգարյան — Ոչ համառանցք բազմանիստ խոռոչ ունեցող շրջանային զլանի սլորումը . . . . . 217

**Առարկայիցիկա**

- Վ. Հ. Համբարձումյան, ակադեմիկոս — Պրոտոր միջավայրում լույսի ցրման ոչ զծային տեսության մի խնդրի մասին . . . . . 233

**Էներգետիկա**

- Գ. Պ. Կումսիաշվիլի — Էներգետիկական սխեմաների ազդեցատների կանոնափորման կայունություն հետազոտություններ . . . . . 231

**Օրգանական Բիոլոգիա**

- Վ. Ի. Իսազուլյանց, Հայկական ՍՍԽ ԳԱ ակադեմիկոս, և Վ. Պ. Սվստուֆել — Մետա-կրեյոլի այլեներյայցումը իդոպրենով կատիոնփոխանակիչ խեմի ԿՄ-2 վրա . . . . . 235

**Գեղագրություն**

- Ս. Ա. Ալեքսանյան — Սրտի պսակաձև անոթների վրա կվտաերոնի անոթալայնիչ ազդեցության մեխանիզմի մասին . . . . . 239

**Բուսաբանություն**

- Ա. Լ. Աբրահամովա և Ի. Ի. Աբրահամով — Մամուռի նոր ցեղ *Lydiaea* Lazar. կովկասի ֆլորայի համար . . . . . 243

**Միջատաբանություն**

- Մ. Ա. Տեր-Կրիզորյան — Ալրափս որդանների (*Homoptera, Coccoidea, Pseudococcidae*) նոր տեսակներ հայաստանից . . . . . 245
- Լ. Վ. Ասևոյզի — *Otiorrhynchus* Germ. սեռի նոր տեսակներ Անդրկովկասից և Հյուսիսային Իրանից . . . . . 261

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

	стр.
<b>Математика</b>	
<i>В. А. Яврян</i> —О функции спектрального сдвига для операторов Штурма—Лиувилля . . . . .	193
<i>В. С. Захарян</i> —О некоторых граничных свойствах функций, аналитических в круге . . . . .	199
<i>М. М. Джрбашян</i> , академик АН Армянской ССР, и <i>С. А. Аюлян</i> —К теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг—Лефлера . . . . .	207
<b>Теория упругости</b>	
<i>С. С. Заргарян</i> —Кручение кругового цилиндра, имеющего несоосную многогранную полость . . . . .	217
<b>Астрофизика</b>	
<i>В. А. Амбарцумян</i> , академик—Об одной задаче нелинейной теории рассеяния света в мутной среде . . . . .	225
<b>Энергетика</b>	
<i>Г. П. Кумсиашвили</i> —Исследование устойчивости регулирования агрегатов в энергетических системах . . . . .	231
<b>Органическая химия</b>	
<i>В. И. Исагулянц</i> , академик АН Армянской ССР, и <i>В. П. Евстафьев</i> —Алкенилирование м-крезола изопреном на катионообменной смоле КУ-2 . . . . .	235
<b>Фармакология</b>	
<i>Р. А. Алексанян</i> —К механизму коронарорасширяющего действия кватерона . . . . .	239
<b>Ботаника</b>	
<i>А. Л. Абрамова</i> и <i>И. А. Абрамов</i> — <i>Lydiaea</i> Lazar. — новый род для флоры югов Кавказа . . . . .	243
<b>Энтомология</b>	
<i>М. А. Тер-Григорян</i> —Новые виды мучнистых червецов ( <i>Homoptera, Coccidae, Pseudococcidae</i> ) из Армении . . . . .	245
<i>Л. В. Арнольди</i> —Новые виды <i>Otiorrhynchus</i> Germ. ( <i>Coleoptera, Curculionidae</i> ) из Закавказья и Сев. Ирана . . . . .	251

В. А. Яврян

О функции спектрального сдвига для операторов  
 Штурма—Лиувилля

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/1 1964)

Пусть  $H_1$  и  $H_2$ —самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве,  $R_\lambda(H_k)$ —резольвента оператора  $H_k$  ( $k=1, 2$ ),  $\rho(H_k)$ —множество регулярных точек  $H_k$ . Через  $S_1$  обозначаем банахово пространство ядерных операторов,  $|A|_1$ —норма оператора  $A$  в  $S_1$ . Обобщая результаты из <sup>(1,2)</sup>, М. Г. Крейн <sup>(3)</sup> установил, что если для некоторого  $\lambda_0 \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$

$$R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) \in S_1, \tag{1}$$

то существует с точностью до постоянного слагаемого единственная вещественная функция  $\xi(t)$ , ( $-\infty < t < \infty$ ), такая, что

$$Sp \{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t) dt}{(t - \lambda)^2} \quad (\lambda \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)). \tag{2}$$

Следуя <sup>(3)</sup>, функцию  $\xi(t)$  назовем *функцией спектрального сдвига*.

В пространстве  $L_2(0, \infty)$  рассмотрим операторы  $H_1$  и  $H_2$ , задающиеся равенствами:

$$H_1 y = -y'', \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$H_2 y = -y'' + q(r)y, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty.$$

Здесь  $q(r)$ —вещественная функция, удовлетворяющая условию:

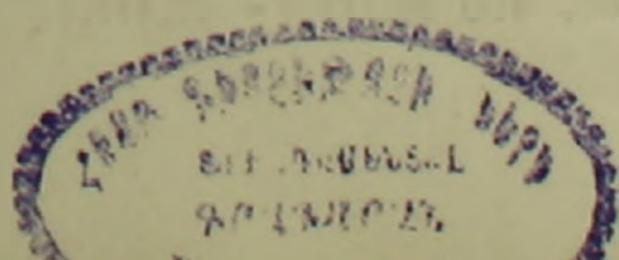
$$\int_0^1 r |q(r)| dr + \int_1^\infty |q(r)| dr < \infty. \tag{3}$$

Пусть  $\psi(r, k)$ —решение следующей задачи:

$$-\psi'' + q\psi - \lambda\psi = 0, \quad \lambda = k^2$$

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi'(0, k) = 1.$$

При предположении (3) имеется асимптотика:



$$\psi(r, k) \sim -\frac{M(k)}{2ik} e^{-ikr}, \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k > 0,$$

$$\psi(r, k) \sim A(k) \sin(kr - \delta(k)), \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k = 0,$$

где

$$M(k) = 1 + \int_0^{\infty} e^{ikr} q(r) \psi(r, k) dr, \quad \text{Im } k \geq 0,$$

$$A(k) = |M(k)|, \quad \delta(k) = \arg M(k), \quad \text{Im } k = 0. \quad (4)$$

Через  $V$  обозначим оператор умножения на  $q(r)$ :  $Vy = q(r)y(r)$ . В работе (4) В. С. Буслаев и Л. Д. Фаддеев доказали, что если

$$\int_0^{\infty} r |q(r)| dr < \infty,$$

то справедливо равенство:

$$\text{Sp} \{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2).$$

Там же указано, что  $M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + VR_\lambda)$ . Однако можно заметить,

что условие  $\int_0^{\infty} r |q(r)| dr < \infty$  не обеспечивает существования определителя, т. е. нельзя утверждать, что  $VR_\lambda \in S_1$ . Более того, может случиться, что  $D(V) \cap D(H_1) = 0$  (см. (5)).

Теорема. Если  $q(r)$  удовлетворяет условию (3), то

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} VR_\lambda^{\frac{1}{2}}), \quad \arg \lambda \neq 0. \quad (5)$$

Доказательство.

Заметим, что  $R_\lambda^{\frac{1}{2}} VR_\lambda^{\frac{1}{2}} \in S_1$ , причем

$$\|R_{-a}^{\frac{1}{2}} VR_{-a}^{\frac{1}{2}}\|_1 \leq \int_0^{\infty} |q(r)| \frac{e^{-2\sqrt{a}r} - 1}{-2\sqrt{a}} dr, \quad a > 0. \quad (6)$$

Здесь, как и в дальнейшем,  $R_\lambda = R_\lambda(H_1)$ .

Доказательство этого факта мы опускаем, так как подобный результат имеется в (5).

Легко видеть далее, что

$$R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) = R_\lambda^{\frac{1}{2}} T_\lambda R_\lambda^{\frac{1}{2}},$$

где

$$T_\lambda = -\left(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} VR_\lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} R_\lambda^{\frac{1}{2}} VR_\lambda^{\frac{1}{2}} \in S_1.$$

Отсюда следует, что  $R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) \in S_1$ .

Нетрудно проверить, что ядра резольвент  $R_\lambda(H_1)$  и  $R_\lambda(H_2)$  соответственно имеют вид:

$$R_\lambda^{(1)}(r, s) = \begin{cases} \frac{\sin kr}{k} e^{iks}, & r \leq s \\ \frac{\sin ks}{k} e^{ikr}, & r \geq s \end{cases}$$

$$R_\lambda^{(2)}(r, s) = \begin{cases} \psi(r, k) \frac{f(s, k)}{f(0, k)}, & r \leq s \\ \psi(s, k) \frac{f(r, k)}{f(0, k)}, & r \geq s, \end{cases}$$

где

$$-f'' + qf - k^2f = 0, \quad f(r, k) \in L_2(0, \infty). \quad \text{Im } k > 0.$$

Дополнительно к (3) предположим теперь, что  $q(r) = 0$  при  $r > r_0$ . Тогда ясно, что

$$f(r, k) = e^{ikr}, \quad r > r_0$$

$$\psi(r, k) = \frac{A(k)}{k} \sin(kr - \delta(k)), \quad r > r_0. \quad (7)$$

Так как

$$R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) \in S_1,$$

то

$$\text{Sp} [R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)] = \int_0^\infty (R_\lambda^{(2)}(s, s) - R_\lambda^{(1)}(s, s)) ds =$$

$$= \int_0^\infty \left( \psi(s, k) \frac{f(s, k)}{f(0, k)} - \frac{\sin ks}{k} e^{iks} \right) ds =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \left( \psi(s, k) \frac{f(s, k)}{f(0, k)} - \frac{\sin ks}{k} e^{iks} \right) ds.$$

Легко видеть, что

$$f\psi = \frac{1}{2k} (f\psi' - f'\psi)',$$

где символы  $\cdot$  и  $'$  означают производные соответственно по  $k$  и  $s$ .

Это равенство заимствовано из доказательства В. С. Буслаева и Л. Д. Фаддеева, с которым автор имел возможность ознакомиться.

Из равенства (7) получаем, что

$$f'(r, k) = ire^{ikr}, \quad f'(r, k) = (i - kr) e^{ikr} \quad r > r_0$$

$$\psi(r, k) = -\frac{M(k)}{2ik} e^{-ikr} (1 + O(e^{ikr})), \quad r \rightarrow \infty$$

$$\psi'(r, k) = \frac{M(k)}{2} e^{-ikr} (1 + O(e^{lkr})), \quad r \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^r \psi(s, k) f(s, k) ds = \frac{M(k)}{2k} ir + \frac{M(k)}{4k^2} - \frac{f(0, k)}{2k} + o(1).$$

Как известно,  $f(0, k) = M(k)$ . Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} &= -\frac{1}{2k} \frac{f(0, k)}{f(0, k)} = \\ &= -\frac{1}{2k} \frac{d}{dk} \ln M(k) = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}). \end{aligned}$$

С другой стороны, из теоремы 2 работы (6) следует, что

$$\text{Sp} \{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{d}{d\lambda} \ln \det(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}).$$

Ясно, что  $\ln M(\sqrt{iy}) \rightarrow 0$ , если  $y \rightarrow \infty$ . Теорема 1 из (6) показывает, что также  $\ln \det(I + R_{iy}^{\frac{1}{2}} V R_{iy}^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$ , если  $y \rightarrow \infty$ . Таким образом, теорема 1 для финитных  $q(r)$  доказана. Пусть  $q(r)$  — любая функция, удовлетворяющая условию (3). Возьмем

$$q_n(r) = \begin{cases} q(r), & r \leq n \\ 0 & r > n \end{cases}, \quad V_n y = q_n(r) y(r).$$

Тогда из уже доказанного следует, что

$$M_n(\sqrt{\lambda}) = \det(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V_n R_\lambda^{\frac{1}{2}}). \quad (8)$$

Из (6) вытекает, что

$$\|R_{-a}^{\frac{1}{2}} (V - V_n) R_{-a}^{\frac{1}{2}}\|_1 \leq \int_a^\infty |q(r)| \frac{1 - e^{-2\sqrt{a}r}}{2\sqrt{a}} dr, \quad a > 0.$$

Отсюда, а также из (4) получаются равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\sqrt{\lambda}) = M(\sqrt{\lambda}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{-a}^{\frac{1}{2}} (V - V_n) R_{-a}^{\frac{1}{2}}\|_1 = 0.$$

Переходя к пределу в (8), получаем (5).

Теорема 1 доказана.

Обозначим через  $\lambda_l (l = 1, 2, \dots)$  точки отрицательного спектра  $H_2$  (они все — собственные значения, сгущающиеся к 0).

Полученная теорема вместе с упомянутой в начале теоремой М. Г. Крейна дает следующий результат:

Теорема 2. При условии (3)

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \delta(\sqrt{\lambda}), & \lambda > 0. \\ - \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_l \delta(t - \lambda_l) dt, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Эта теорема при условии  $\int_0^{\infty} r |q(r)| dr < \infty$  доказана в (4).

Автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну за интерес к этой работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՅԱՎՐՅԱՆ

Շուկում-Լիուվիլի օպերատորի սպեկտրալ եղանակով ֆունկցիայի մասին

$L_{\frac{1}{2}}(0, \infty)$  սարածության մեջ դիտարկվում է  $H_1$  և  $H_2$  օպերատորները, որոնք արվում են հետևյալ հավասարություններով.

$$H_1 y = -y'', \quad y(0) = 0; \quad 0 \leq r < \infty$$

$$H_2 y = -y'' + q(r)y, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leq r < \infty$$

Այստեղ  $q(r)$ -ը իրական ֆունկցիա է, որը բավարարում է (3) պայմանին: Դիցուք  $\psi(r, k)$  հետևյալ խնդրի լուծումն է

$$-\psi'' + q\psi - \lambda\psi = 0 \quad \lambda = k^2$$

$$\psi(0, k) = 1 \quad \psi'(0, k) = 1$$

(3) պայմանի դեպքում գոյություն ունի հետևյալ ասիմպտոտիկան

$$\psi(r, k) \sim -\frac{M(k)}{2ik} e^{ikr}, \quad r \rightarrow \infty \quad \text{Im } k > 0$$

$$\psi(r, k) \sim A(k) \sin(kr - \delta(k)) \quad r \rightarrow \infty \quad \text{Im } k = 0$$

որտեղ՝

$$M(k) = 1 + \int_0^{\infty} e^{ikr} q(r) \psi(rk) dr \quad \text{Im } k \geq 0$$

$$A(k) = |M(k)| \quad \delta(k) = \arg M(k) \quad \text{Im } k = 0$$

(4) աշխատանքում Վ. Ս. Բուսլանը և Լ. Դ. Ֆադեևը ապացուցել են, որ եթե

$$\int_0^{\infty} r |q(r)| dr < \infty,$$

ապա՝

$$S_p \{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}) \quad \lambda \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$$

Այնտեղ նշված է, որ

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + ER_\lambda):$$

Բայց կարելի է նկատել, որ  $\int_0^\infty r |q(r)| dr < \infty$  պայմանը չի բավարարում դետերմինանտի դոմենին:

Նանտի դոմենին

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. եթե  $q(r)$  բավարարում է (3) պայմանին, ապա

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}), \quad \arg \lambda \neq 0.$$

Այս արդյունքը Մ. Գ. Կրեյնի սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիայի մասին թեորեմի հետ տալիս է հետևյալ պնդումը

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \delta(\sqrt{\lambda}) & \lambda > 0 \\ - \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_l \delta(t - \lambda_l) dt & \lambda < 0, \end{cases}$$

որտեղ  $\lambda_l$   $H_2$  սպեկտրի բացասական սպեկտրի կետերն են:

Այդ թեորեմը  $\int_0^\infty r |q(r)| dr < \infty$  պայմանի դեպքում ապացուցված է (4)-ում:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> М. Г. Крейн, Матем. сборник, 33 (75), 3, (1953). <sup>2</sup> И. М. Лифшиц, УМН. 7, № 1 (1952). <sup>3</sup> М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 144, № 2 (1962). <sup>4</sup> В. С. Буслаев и Л. Д. Фаддеев, ДАН СССР, т. 132, № 1 (1960). <sup>5</sup> С. Т. Курода, Journal of the Math. Society of Japan, vol. 12, № 3, July, 1960. <sup>6</sup> В. А. Явряк, ДАН АрмССР, т. XXXVIII, № 1 (1964).

В. С. Захарян

О некоторых граничных свойствах функций,  
 аналитических в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/1 1964)

1°. *Предельные свойства.* Будем рассматривать ограниченные голоморфные функции следующего вида

$$B(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z; a_n),$$

где

$$b(z; a) = \frac{|a|}{a} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \quad (1)$$

$$0 < |a_n| < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

и

$$\sum_1^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty. \quad (3)$$

$B(z; \{a_n\})$  называется произведением Бляшке, а последовательность  $\{a_n\}$ , которая удовлетворяет условиям (2) и (3), — последовательностью Бляшке. Функция  $B(z; \{a_{n_k}\})$  называется подпроизведением для  $B(z; \{a_n\})$ , если  $\{a_{n_k}\}$  подпоследовательность для  $\{a_n\}$ .

Известно, что произведение Бляшке имеет радиальные предельные значения с модулем единица почти всюду на  $C = \{z : |z| = 1\}$ . Тогда в точках, где существуют радиальные граничные значения, будут существовать и угловые пределы (1).

Мы рассмотрим вопрос о касательных пределах для произведения Бляшке. Прежде дадим хорошо известное определение касательного предела.

Пусть имеем множество точек  $z$

$$R(m, \vartheta, \gamma) = \{z : 1 - |z| \geq m |\arg z - \vartheta|^\gamma; 0 < |z| < 1\},$$

где за  $|\arg z - \vartheta|$  принимаем меньшую из дуг на  $C$  между  $\frac{z}{|z|}$  и  $e^{i\vartheta}$ .

Если функция  $f(z)$  определена на  $D = \{z : |z| < 1\}$ , мы скажем, что  $f(z)$  имеет  $T_\gamma$ -предел в точке  $e^{i\theta}$ , если существует такое  $L$ , что для каждого  $m$  ( $m > 0$ ),  $f(z) \rightarrow L$  при  $z \rightarrow e^{i\theta}$  и  $z \in R(m, \theta, \gamma)$ .

Легко видеть, что  $T_1$ -предел существует в том и только в том случае, когда существует классический угловой предел. При  $\gamma > 1$  ситуация изменяется. В работе (2) показано, что для каждого  $\gamma$  ( $\gamma > 1$ ) существует произведение Бляшке, для которого не существует  $T_\gamma$ -предел нигде на  $S$ .

Вопросы о  $T_\gamma$ -пределах для произведений Бляшке рассмотрены в недавней работе Г. Карго (3). В частности, им получены следующие результаты.

**Теорема А.** Пусть  $\{a_n\}$  последовательность Бляшке такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) / |e^{i\theta} - a_n|^\gamma < \infty \quad (4)$$

для некоторого фиксированного  $\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ). Тогда  $B(z; \{a_n\})$  и все его подпроизведения имеют  $T_\gamma$ -предел с модулем единица в точке  $e^{i\theta}$ .

**Теорема В.** Пусть  $\{a_n\}$  последовательность Бляшке, для которой удовлетворяется (4) для некоторого фиксированного  $\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ). Тогда, если  $\gamma \geq 2k$  для некоторого целого положительного  $k$ , то производная порядка  $k$  от  $B(z; \{a_n\})$  и от каждого подпроизведения  $B(z; \{a_{n_k}\})$  имеет  $T_{\gamma/2k}$ -предел в точке  $e^{i\theta}$ .

Мы здесь приведем одну теорему, которая является прямым обобщением другой теоремы Г. Карго и при  $h(t) = t^\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) совпадает с ней.

Для формулировки этой теоремы нам понадобятся некоторые предварительные понятия.

Пусть  $h(r)$  — непрерывная вещественная функция, не убывающая при  $r \geq 0$  и  $h(0) = 0$ . Пусть  $E$  — произвольное ограниченное множество, покрытое некоторой последовательностью кругов  $\{c_n\}_1^\infty$  с радиусами  $\{r_n\}_1^\infty$ . Определим меру

$$M_h(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} h(r_n)$$

для всех таких  $\{c_n\}$ .

Эта мера будет равна нулю в том и только в том случае, когда равна нулю соответствующая мера Хаусдорфа.

В работе (4) дано следующее определение выпуклой емкости, принадлежащей К. Темко.

Пусть  $\{\lambda_n\}$  — выпуклая последовательность и  $\lambda_n \rightarrow 0$ , тогда

$$Q(x) = \sum_0^\infty \lambda_n \cos nx$$

неотрицательная и интегрируемая по Лебегу функция. Следовательно

$$Q(r, x) = \sum_0^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx$$

как пуассоновская сумма от  $Q(\lambda)$  удовлетворяет условию  $Q(r, x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq 2\pi$  и  $0 \leq r < 1$ .

Определение 1. Измеримое по Борелю множество  $E \subset [0, 2\pi]$  имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности  $\{\lambda_n\}$ , если существует мера  $\mu$ , сосредоточенная на  $E$ , для которой функция

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t) d\mu(t)$$

остаётся равномерно ограниченной по  $x$  при  $r \rightarrow 1$ .

В случае отсутствия такой меры  $\mu$ , считаем [выпуклую емкость относительно  $\{\lambda_n\}$  равной нулю.

Определение 2. Условимся говорить, что непрерывная на  $0 < t \leq 1$  функция  $H(t) \geq 0$  принадлежит классу  $C_H$ , если  $H(0) = \infty$ ,

$tH(t) \downarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\int_0^1 \frac{dt}{tH(t)} < \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(u) du = c$ , где  $c \neq 0, \infty$ .

Докажем следующую лемму.

Лемма. Если  $h(t) = \int_0^t H(u) du$  и множество  $B$  имеет  $h(t^{\gamma})$

меру нуль  $\gamma \geq 1$  и  $h(t^{\gamma}) \geq t$ , то выпуклая емкость множества  $B$  относительно последовательности

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$$

равна нулю, если  $H \in C_H$ .

Доказательство. Пусть  $\lambda(u) = \int_u^{\infty} \frac{du}{u^{2-\gamma} H(u^{-\gamma})}$ , тогда  $\lambda_n \sim \lambda(n)$

и множества с нулевой выпуклой емкостью для этих последовательностей совпадают.

По теореме Салема (4) при  $x \rightarrow 0$

$$Q(x) = \sum \lambda_n \cos nx \sim \int_0^{\frac{1}{x}} u |\lambda'(u)| du = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^{1-\gamma} H(u^{-\gamma})} > \frac{1}{\gamma x^{\gamma} H(x^{\gamma})}$$

В работе (5) доказано, что если для множества  $E$  мера  $h(x^{\gamma}) = \frac{1}{Q(x)}$  нуль, то емкость  $\{\lambda_n\}$  тоже нуль. Так как  $h(x^{\gamma}) \geq \frac{c}{\gamma} \frac{1}{Q(x)}$ ,

то лемма доказана.

Будем предполагать, что для любого  $0 < x, y \leq 1$  удовлетворяется следующее условие

$$h(xy) \leq ch(x)h(y). \quad (5)$$

Для этого достаточно, чтобы при предположении существования производных удовлетворялось условие

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \frac{1}{h(x)} \geq 0, \quad (6)$$

так как при условии (6) функция  $\varphi(y) = \frac{h(xy)}{h(y)}$  получает свой максимум при  $y = 1$ .

При выполнении условия (5) скажем, что  $h \in C_h$ , если  $H \in C_H$ , где  $h(x) = \int_0^x H(u) du$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\{a_n\}$  последовательность Бляшке, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(1 - |a_n|) < \infty$$

для некоторого  $h \in C_h$ . Тогда для каждого  $\gamma (\gamma \geq 1)$  и  $h(t^\gamma) > t$  множество

$$E_\gamma = \left\{ e^{i\theta} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_n|)}{|e^{i\theta} - a_n|^\gamma} = \infty \right\}$$

имеет выпуклую емкость нуль относительно последовательности

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}.$$

**Доказательство.** Доказательство проводится аналогично доказательству Г. Карго для случая  $h(t) = t^2$ .

Пусть  $\gamma \geq 1$  фиксированная. Для каждого  $n$  через  $O_n$  обозначим открытую дугу на  $S$  с центром в  $\frac{a_n}{|a_n|}$  и длиной  $(1 - |a_n|)^{1/\gamma}$ . Пусть

$$G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} O_k$$

и  $F_n = S - G_n$ . Ясно, что  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  не имеют общих точек на  $S$  и их соединение совпадает с  $S$ . Пусть

$$E_\gamma \cap F_n = f_n \quad \text{и} \quad E_\gamma \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = G.$$

Докажем, что  $h(t^\gamma)$  мера  $G$  равна нулю.

Так как

$$\bigcup_{k=N}^{\infty} O_k$$

покрывает  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  и для каждого  $N$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} h(1 - |a_k|) = 0,$$

то утверждение очевидно.

Теперь покажем, что  $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$  емкость  $f_n$  равна

нулю.

Пусть  $e^{i\theta}$  любая точка  $F_n$  для  $k \geq n$

$$|e^{i\theta} - a_k| > \frac{1}{\pi} (1 - |a_k|)^{1/\gamma} \quad \text{или} \quad (1 - |a_k|) / |e^{i\theta} - a_k|^\gamma < \pi^\gamma.$$

Предположим, что  $\lambda_n$  емкость  $f_n$  больше нуля. Тогда существует такое единичное распределение  $\mu(\vartheta)$  на  $f_n$ , что

$$\int_{f_n} \frac{d\mu(\vartheta)}{|e^{i\theta} - z|^\gamma H(|e^{i\theta} - z|^\gamma)} < M$$

$M < \infty$  для всех  $z$ .

В частности, для  $k \geq n$  будем иметь

$$\int_{f_n} \frac{1 - |a_k|}{|e^{i\theta} - a_k|^\gamma} d\mu(\vartheta) \leq c \int_{f_n} \frac{h(1 - |a_k|)}{H(1 - |a_k|)} \frac{d\mu(\vartheta)}{|e^{i\theta} - a_k|^\gamma} \ll$$

$$\ll ch(1 - |a_k|) \int_{f_n} \frac{H(|e^{i\theta} - a_k|^\gamma)}{H(1 - |a_k|) |e^{i\theta} - a_k|^\gamma H(|e^{i\theta} - a_k|^\gamma)} d\mu(\vartheta) \ll$$

$$\ll ch(1 - |a_k|) \int_{f_n} H\left(\frac{1 - |a_k|}{|e^{i\theta} - a_k|^\gamma}\right) \frac{d\mu(\vartheta)}{h(|e^{i\theta} - a_k|^\gamma)} \ll c_0 h(1 - |a_k|).$$

Так что

$$\int_{f_n} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|)}{|e^{i\theta} - a_k|^\gamma} \right\} d\mu(\vartheta) \leq c_0 \sum h(1 - |a_k|) < \infty.$$

которое противоречит условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|)}{|e^{i\theta} - a_k|^\gamma} = \infty$$

на  $f_n$ .

Имея в виду доказанную лемму, доказательство теоремы завершено.

Из сопоставления теоремы 1 с теоремами А и В получим теоремы 2 и 3.

Теорема 2. Пусть  $\{a_n\}$  последовательность Бляшке, для которой

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty$$

для некоторого  $h \in C_n$ . Тогда для каждого  $\gamma > 1$ ,  $h(t^\gamma) \geq t$  есть

множество  $E_\gamma$ , выпуклая  $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$  емкость которого

нуль, так что  $B(z; \{a_n\})$ , и все его подпроизведения имеют  $T_\gamma$ -предел с модулем единица в каждой точке  $C - E_\gamma$ .

При  $\gamma = 1$  теорема получена в работе (5).

Теорема 3. Пусть  $\{a_n\}$  последовательность Бляшке, для которой

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

для некоторого  $h \in C_n$ . Тогда для каждого  $\gamma \geq 2k$ ,  $h(t^\gamma) \geq t$ , где  $k$  — целое положительное число, существует некоторое множество

$E_\gamma$ , выпуклая  $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$  емкость которого нуль, так что

производные от  $B(z; \{a_n\})$  и от любого подпроизведения порядка  $k$  имеют  $T_{\gamma/2k}$ -предел в каждой точке  $C - E_\gamma$ .

2°. О сегментном изменении. Говорят, что аналитическая в единичном круге функция имеет конечное сегментное изменение в точке  $e^{i\theta}$  при условии, что прямая, которая соединяет любую внутреннюю точку круга с точкой  $e^{i\theta}$ , отображается этой функцией на спрямляемую кривую.

В работе Г. Карго (6) доказано, что в точке  $e^{i\theta}$  произведение Бляшке  $B(z; \{a_n\})$  и любое его подпроизведение имеют конечное сегментное изменение в том и только в том случае, если выполняется условие (4). Имея в виду это утверждение и теорему 6 из [5], мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть последовательность Бляшке  $\{a_n\}$  удовлетворяет условию

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

для некоторого  $h$ , где  $h' \in C_n$ . Тогда  $B(z; \{a_n\})$  и любое его подпроизведение имеет конечное сегментное изменение в каждой точке  $C$ , кроме, быть может, некоторого множества  $\mathcal{D}$ , внешняя  $h$ -хаусдорфовская мера которого нуль.

3°. Об одном классе голоморфных функций с конечным обобщенным интегралом Дирихле. Пусть  $f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$  аналитично в  $D$  и  $f(0) = 0$ , для которого

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(1-\rho) |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho d\theta < \infty, \quad (7)$$

где  $h \in C_h$ , тогда скажем, что  $f \in S_h$ .

Так как легко видеть, что

$$\int_0^1 h(1-\rho) \rho^{2n-1} d\rho = O\left(\frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то условие (7) эквивалентно условию

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 H\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \quad (8)$$

В работе (5) показано, что произведения Бляшке  $B_h(z)$ , для которых

$$\sum_1^\infty h(1-|a_n|) < \infty, \quad (9)$$

принадлежат классам функций  $S_h$ .

Значит, если последовательность  $\{a_n\}$  такая, что удовлетворяет условию (9), то существует функция  $f$  класса  $S_h$  с нулями на этой последовательности и  $f \neq 0$ .

Множество точек  $\{a_n\}$ , скажем, является множеством единственности для класса  $S_h$ , если из того, что  $f(a_n) = 0$  и  $f \in S_h$ , вытекает, что  $f \equiv 0$ .

В работе (7) Г. Шапиро и А. Шильдса решен следующий вопрос: когда последовательность  $\{a_n\}$  будет множеством единственности для функций класса  $S_h$  при  $h(t) = t^\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ), и получен исчерпывающий ответ. Но для более общего случая, когда в (8) вместо  $H\left(\frac{1}{n}\right)$

стоят почти произвольные коэффициенты  $c_n$ , вопрос не решен.

Легко видеть, что для классов  $S_h$  доказательство приведенное в (7), полностью проходит, и мы получим следующую теорему.

**Теорема 5.** Если  $\varphi(t)$  некоторая непрерывная функция, для которой  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(t) > 0$  ( $t > 0$ ), то существует множество единственности  $\{a_n\}$  для класса  $S_h$ , удовлетворяющее условию

$$\sum_1^\infty h(1-|a_n|) \varphi(1-|a_n|) < \infty.$$

**Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային սրուց հասկումայինները**

Ենթադրենք ունենք  $z$  կետերի հետևյալ բազմությունը

$$R(m, \vartheta, \gamma) = \{z: 1 - |z| \geq m |\arg z - \vartheta|^\gamma, 0 < |z| < 1\},$$

որտեղ որպես  $|\arg z - \vartheta|$  ընդունում ենք  $C$  միավոր շրջանագծի վրա ընկած աղեղների փոքրագույնը, որը միացնում է  $z$  և  $e^{i\vartheta}$  կետերը: Եթե  $f(z)$ -ը որոշված է  $|z| < 1$  շրջանում, կասենք, որ  $f(z)$ -ը  $e^{i\vartheta}$  կետում ունի  $T_\gamma$ -սահման, եթե կա այնպիսի  $L$ , որ ցանկացած  $m(m > 0)$  համար  $f(z) \rightarrow L$  երբ  $z \rightarrow e^{i\vartheta}$  և  $z \in R(m, \vartheta, \gamma)$ :

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թող  $\{a_n\}$  Բլյաշկեի հաջորդականությունը բավարարի հետևյալ պայմանին

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

որտեղ  $h$  ֆունկցիան բավարարում է որոշ պայմանների: Ապա յուրաքանչյուր  $\gamma > 1$  համար դոմինություն ունի մի  $E_\gamma$  բազմություն, որի  $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} \Gamma(k^{-\gamma})}$  ուսուցիչ

ունակությունը զերո է, այնպես որ այդ  $\{a_n\}$  հաջորդականության համար կազմված Բլյաշկեի արտադրյալը ունի  $T_\gamma$ -սահման  $C-E_\gamma$  բազմության յուրաքանչյուր կետում:

Ստացված են նաև այլ ընդհանուր արդյունքներ:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950.  
<sup>2</sup> А. Лоуатер и Г. Пурания, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., 239 (1957). <sup>3</sup> Г. Карго, Canadian Journal of mathematics, vol. XIV, № 2, (1962), 334—348. <sup>4</sup> Н. Барн, Тригонометрические ряды. М., 1961. <sup>5</sup> В. С. Захарян, Изв. АН СССР, серия матем., 27, 4 (1963). <sup>6</sup> Г. Карго, Duke mat. journal, vol. 30, № 1, (1963), 143—149. <sup>7</sup> Г. Шаниро и А. Шилдс, Math. Zetsphr. 80, 217—229 (1962).

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР, и С. А. Акопян

К теории интегральных преобразований с ядрами  
 Миттаг—Лефлера

(Представлено 6/III 1964)

В работе <sup>(1)</sup> была развита теория особых интегральных преобразований, ядром для которых служит функция типа Миттаг—Лефлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (1)$$

Один из основных результатов этой теории может быть сформулирован в виде следующей теоремы, являющейся дальнейшим существенным обобщением теоремы Планшереля о преобразовании Фурье в классе  $L_2(0, \infty)$ .

**Теорема А.** Пусть параметры  $\rho$  и  $\mu$  удовлетворяют условиям

$$\rho \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

и  $g(y)$  произвольная функция из класса  $g(y)y^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. В предположении, что

$$\arg(ix) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при } x \in (0, \infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

на полуоси  $(0, \infty)$  имеем

$$g(y)y^{\mu-1} = \text{l.i.m.}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} y^{\mu-1} \int_{-\infty}^z E_\rho\left(y^{\frac{1}{\rho}}(ix)^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right) (ix)^{\mu-1} f(x) dx, \quad (3)$$

где на всей оси  $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma} e^{-ixy} g(y) y^{\mu-1} dy. \quad (4)$$

2°. При дополнительном условии  $\rho \geq 1$  для любого значения  $\varphi \in \left[ -\frac{\pi}{\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{\rho} \right]$  на полуоси  $(0, +\infty)$  имеет место также равенство

$$\text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} y^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_{\rho} \left( y^{\frac{1}{\rho}} (ix)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi}; \mu \right) (ix)^{\mu-1} f(x) dx = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем было установлено (2), что функции типа

$$x^{\mu-1} E_{\rho} (\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \mu)$$

являются решениями специальных краевых задач на полуоси  $(0, +\infty)$ , аналогичных сингулярной краевой задаче Штурма—Лиувилля, но для определенного оператора содержащей операции дробного интегрирования в смысле Римана—Лиувилля.

В свете этого факта утверждение 1° теоремы А может быть рассмотрено как теорема разложения для сингулярной краевой задачи такого рода, в специальных случаях напоминающей случаи  $\cos$  или  $\sin$  интегралов Фурье—Планшереля.

В настоящей статье устанавливается обобщение теоремы А, соответствующее общему случаю сингулярной краевой задачи для оператора дробного порядка. Вид этого оператора и условия в нуле мы здесь записывать не будем, отсылая читателя к уже цитированной работе (2). Отметим лишь, что установленный здесь результат (теорема 1) является естественным обобщением и аналогом хорошо известного примера (3) разложения для сингулярной краевой задачи

$$y'' - \lambda y = 0,$$

$$y(0) = \sin \alpha, \quad y'(0) = -\cos \alpha,$$

когда в зависимости от знака  $\text{ctg} \alpha$  к интегралу типа Фурье прибавляется также дискретный член, соответствующий отрицательному собственному значению.

1°. Предварительные обозначения и леммы. Пусть параметры  $\rho$  и  $\mu$  такие, что

$$\rho \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}. \quad (1.1)$$

Полагая, что

$$\arg \{i\lambda\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при } \lambda \in (0, \infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при } \lambda \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

введем в рассмотрение следующие функции

$$\Psi^{(\pm)}(x; \lambda) = \left( \sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{\lambda} e^{\mp i \frac{\pi}{4\rho}} \right) e^{\pm i\lambda x}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(\pm)}(x; \lambda) = & \sin \alpha (\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_{\rho} \left( x^{\frac{1}{\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) - \\ & - \frac{\cos \alpha}{\lambda} e^{\mp i \frac{\pi}{4\rho}} (\pm i\lambda)^{\mu+\frac{1}{2\rho}-1} x^{\mu+\frac{1}{2\rho}-1} E_{\rho} \left( x^{\frac{1}{\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{\rho}}; \mu + \frac{1}{2\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

а также функцию

$$\Omega(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 \sin^2 \alpha - \lambda \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4\rho} + \cos^2 \alpha} \quad (1.4)$$

Обозначив далее

$$\Omega_1^{(\pm)}(\lambda) = \sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{\lambda} e^{\mp i \frac{\pi}{4\rho}}, \quad \Omega_2^{(\pm)}(\lambda) = \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\lambda} e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}}, \quad (1.5)$$

имеем

$$\Psi^{(\pm)}(x; \lambda) = \Omega_1^{(\pm)}(\lambda) e^{\pm i\lambda x}, \quad (1.6)$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{\Omega_1^{(+)}(\lambda) \Omega_1^{(-)}(\lambda)} = \frac{1}{|\Omega_1^{(\pm)}(\lambda)|^2} \quad (1.7)$$

Воспользуясь теперь тождествами

$$E_{\rho}(z; \mu) = \frac{1}{2} [E_{2\rho}(z^{\frac{1}{2}}; \mu) + E_{2\rho}(-z^{\frac{1}{2}}; \mu)] \quad (1.8)$$

$$E_{\rho}\left(z; \mu + \frac{1}{2\rho}\right) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2} [E_{2\rho}(z^{\frac{1}{2}}; \mu) - E_{2\rho}(-z^{\frac{1}{2}}; \mu)],$$

которые легко вытекают из определения функции Миттаг—Лефлера, из (1.3) получим

$$\begin{aligned} \Phi^{(\pm)}(x; \lambda) = & \frac{1}{2} \Omega_1^{(\pm)}(\lambda) (\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_{2\rho} \left( x^{\frac{1}{2\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right) + \\ & + \frac{1}{2} \Omega_2^{(\pm)}(\lambda) (\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_{2\rho} \left( -x^{\frac{1}{2\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим еще, что

$$\Omega_1^{(\pm)} \left( e^{\mp i \frac{\pi}{4p}} \operatorname{ctg} \alpha \right) = 0, \quad (1.10)$$

и

$$\Omega_2^{(\pm)} \left( e^{\mp i \frac{\pi}{4p}} \operatorname{ctg} \alpha \right) = 2 \sin \alpha. \quad (1.11)$$

Отнесем теперь к классу  $L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$  функции  $F(\lambda)$ , определенные на всей оси  $(-\infty, \infty)$ , для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda \quad (1.12)$$

существует.

Лемма 1. Если  $x^{\mu-1}f(x) \in L_2(0, \infty)$ , то существуют функции  $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$  такие, что интегралы

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} t^{\mu-1} f(t) \Psi^{(\pm)}(t; \lambda) dt \quad (\sigma > 0) \quad (1.13)$$

сходятся к  $F^{(\pm)}(\lambda)$  в метрике пространства  $L_2^{(2)}$ .

Доказательство. Если обозначить

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} e^{\pm i\lambda t} f(t) t^{\mu-1} dt, \quad (1.14)$$

то по теореме Планшереля существуют пределы в среднем в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma). \quad (1.15)$$

Из (1.6), (1.13) и (1.15) имеем

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \Omega_1^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma), \quad (1.16)$$

откуда в силу (1.7) вытекает равенство

$$|F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2 \Omega(\lambda) = |\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1) - \Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2. \quad (1.17)$$

Из существования пределов в среднем (1.15) и из (1.7) заключаем, что

$$\lim_{\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0, \quad (1.18)$$

откуда следуют существование функции  $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$  и равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0, \quad (1.19)$$

т. е. утверждение леммы.

Отметим также, что из (1.15) и (1.16) следует, что

$$F^{(\pm)}(\lambda) = \Omega_1^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\pm)}(\lambda), \quad (1.20)$$

где

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^\sigma e^{\pm D t} f(t) t^{\mu-1} dt. \quad (1.21)$$

Лемма 2. Справедливы следующие формулы.

а) при  $\text{ctg } \alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu)}{\lambda - e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha} (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda = 0, \quad (1.22)$$

б) при  $\text{ctg } \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu)}{\lambda - e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha} (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda =$$

$$= \pm 2\pi i (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha) E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu). \quad (1.23)$$

Лемма доказывается при помощи контурного интегрирования с использованием того факта (1), что при  $\rho > \frac{1}{2}$  и  $|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}$ ,

$$E_\rho(z; \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

2°. Обобщенные преобразования в классах  $L_2(0, \infty)$  и  $L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$ .

Докажем следующую теорему.

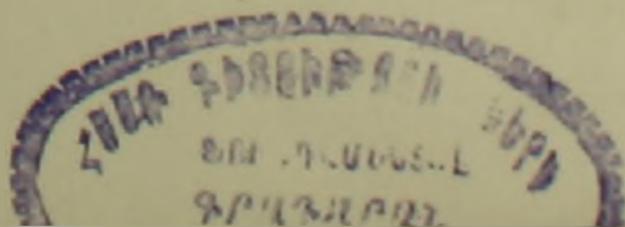
Теорема 1. Если  $f(x)$  — произвольная функция из класса  $f(x) x^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$ , то существуют функции  $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$ , такие, что интегралы

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma \Psi^{(\pm)}(t; \lambda) f(t) t^{\mu-1} dt \quad (\sigma > 0) \quad (2.1)$$

сходятся к  $F^{(\pm)}(\lambda)$  в смысле

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0, \quad (2.2)$$

а) при  $\text{ctg } \alpha \leq 0$



$$\begin{aligned}
 x^{\mu-1} f(x) &= \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(+)}(\lambda) \Phi^{(-)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda = \\
 &= \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(-)}(\lambda) \Phi^{(+)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda, \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

6) при  $\text{ctg } \alpha > 0$

$$\begin{aligned}
 x^{\mu-1} f(x) &= \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(t) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \pm \\
 &\pm \frac{1}{i\rho} \text{Res}_{\lambda = e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы была доказана выше (лемма 1). Переходим к доказательству второй части. Замечая, что

$$\frac{\Omega_2^{(\mp)}(\lambda)}{\Omega_1^{(\mp)}(\lambda)} = 1 + \frac{2 \text{ctg } \alpha e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}}}{\lambda - \text{ctg } \alpha e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}}},$$

из (1.7), (1.9) и (1.1) получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2} x^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho} \left( x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right) (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda + \\
 &+ \frac{1}{2} x^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho} \left( -x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right) (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda + \\
 &+ \text{ctg } \alpha e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} x^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{E_{2\rho} \left( -x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right)}{\lambda - \text{ctg } \alpha e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}}} (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

По теореме А из (1.21) имеем

$$f(x) x^{\mu-1} = \frac{1}{4\pi\rho} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} x^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho} \left( x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right) (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda. \quad (2.6)$$

Взяв в (5)  $\varphi = \pi$  и заменив  $\rho$  через  $2\rho (\geq 1)$ , получим, что на полуоси  $(0, +\infty)$

$$\text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} x^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu) (\mp i\lambda)^{\mu-1} \Phi^{(\pm)}(\lambda) d\lambda = 0. \quad (2.7)$$

а) Если  $\text{ctg } \alpha = 0$  из (2.5) в силу (2.6), (2.7) вытекает утверждение (2.3) теоремы. Если же  $\text{ctg } \alpha < 0$ , то утверждение (2.3) следует из леммы 2 и из (2.6), (2.7).

б) Пусть  $\text{ctg } \alpha > 0$ ; тогда по лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda &= 2\pi\rho x^{\mu-1} f(x) \pm \\ &\pm 2\pi i \text{ctg } \alpha e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} x^{\mu-1} (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\mu-1} \Phi^{(\pm i)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha) \times \\ &\times E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (1.9), (1.10), (1.11) следует тождество

$$\begin{aligned} x^{\mu-1} (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\mu-1} E_{2\rho}(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\mp i e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu) &= \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \Phi^{(\mp)}(x; e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Кроме того, из (1.20) вытекает

$$\Phi^{(\pm)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha) = \frac{F^{(\pm)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)}{\Omega_1^{(\pm)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha)}, \quad (2.10)$$

и легко проверить, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha} (\lambda - e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha) \Omega(\lambda) = \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha}{\Omega_1^{(\pm)}(e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \text{ctg } \alpha) \sin \alpha}. \quad (2.11)$$

Ввиду формул (2.9), (2.10), (2.11) из (2.8) следует утверждение (2.4) теоремы. Теорема полностью доказана.

В специальном случае, когда  $\rho = \frac{1}{2}$  и  $\mu = 1$ , из теоремы 1 следует известный пример (3) разложения, связанный с краевой задачей

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = \sin \alpha, \quad y'(0) = -\cos \alpha.$$

Действительно, теперь будем иметь

$$\Phi^{(+)}(x; \lambda) = \Phi^{(-)}(x; \lambda) \equiv \Phi(x; \lambda) = \sin \alpha \cos \lambda x - \frac{\cos \alpha}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$\Psi^{(\pm)}(x; \lambda) = \left( \sin \alpha \pm i \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) e^{\pm i \lambda x},$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

причем

$$\frac{1}{2} [\Psi^{(+)}(x; \lambda) + \Psi^{(-)}(x; \lambda)] = \Phi(x; \lambda).$$

Поэтому если составить интеграл

$$F(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} \Phi(x; \lambda) f(x) dx = \frac{1}{2} [F^{(+)}(\lambda, \sigma) + F^{(-)}(\lambda, \sigma)],$$

то можем утверждать, что существует функция

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} [F^{(+)}(\lambda) + F^{(-)}(\lambda)] \in L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$$

такая, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda, \sigma) - F(\lambda)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0$$

а) при  $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda,$$

б) при  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ + \frac{1}{i} \operatorname{Res}_{\lambda = i \operatorname{ctg} \alpha} F^{(+)}(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) - \frac{1}{i} \operatorname{Res}_{\lambda = -i \operatorname{ctg} \alpha} F^{(-)}(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda).$$

Но

$$\operatorname{Res}_{\lambda = \pm i \operatorname{ctg} \alpha} F^{(\mp)}(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) = 0.$$

Поэтому получим

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ + \frac{2}{i} \operatorname{Res}_{\lambda = i \operatorname{ctg} \alpha} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) - \frac{2}{i} \operatorname{Res}_{\lambda = -i \operatorname{ctg} \alpha} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda).$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{\lambda = \pm i \operatorname{ctg} \alpha} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) = \\ & = \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2i \sin^2 \alpha} \Phi(x; \pm i \operatorname{ctg} \alpha) F(\pm i \operatorname{ctg} \alpha) = \\ & = \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2i} e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} f(x) dx, \end{aligned}$$

окончательно получим, что при  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$\begin{aligned} f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda) \Phi(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ + 2 \operatorname{ctg} \alpha e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ctg} \alpha} f(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда заменой переменной  $\lambda^2 = \mu$  и в силу четности функции  $F(\lambda)$  приходим к известному примеру (3).

Отметим, что имеет место также обратная теорема, которую мы формулируем без доказательства.

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  — произвольная функция из класса  $L_2(0, \infty)$ , то существуют функции  $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$ , такие, что интегралы

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} f(t) \Phi^{(\pm)}(t; \lambda) dt \quad (\sigma > 0)$$

сходятся к  $F^{(\pm)}(\lambda)$  в смысле

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} |F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0$$

а) при  $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Psi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda,$$

б) при  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Psi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \pm$$

$$\pm \frac{1}{i\rho} \operatorname{Res}_{\lambda = e^{\mp i \frac{\pi}{4\rho}} \operatorname{ctg} \alpha} F^{(\pm)}(\lambda) \Psi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda).$$

**Միասագ-ԼեՖլերի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների  
սեսուրյան շուրջը**

Ենթադրելով, որ  $\Psi^{(\pm)}(x, \lambda)$ ,  $\Phi^{(\pm)}(x; \lambda)$  և  $\Omega(\lambda)$  ֆունկցիաները որոշվում են (1.2), (1.3) և (1.4) բանաձևերով, իսկ  $\rho$  և  $\mu$  պարամետրերը բավարարում են

$$\rho \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$$

պայմաններին, աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ հիմնական թեորեմը:  
Թեորեմ. եթե  $f(x)$ -ը կամայական ֆունկցիա է  $f(x) x^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$  դասից, ապա գոյություն ունեն  $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$  ֆունկցիաները այնպես, որ

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^\sigma \Psi^{(\pm)}(t; \lambda) f(t) t^{\mu-1} dt \quad (\sigma > 0)$$

ինտեգրալները համապատասխանաբար գուգամխում են այդ ֆունկցիաներին հետևյալ իմաստով

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2 \Omega(\lambda) d\lambda = 0,$$

ըստ որում  $(0, +\infty)$  կիսաառանցքի վրա իրավացի են նաև հետևյալ շրջման բանաձևերը՝  
ա) երբ  $\operatorname{ctg} \alpha < 0$

$$x^{\mu-1} f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda,$$

բ) երբ  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$x^{\mu-1} f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \pm$$

$$\pm \frac{1}{i\rho} \operatorname{Res}_{\lambda = e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \operatorname{ctg} \alpha} F^{(\pm)}(\lambda) \Phi^{(\mp)}(x; \lambda) \Omega(\lambda).$$

Հատուկ դեպքում, երբ  $\rho = \frac{1}{2}$ ;  $\mu = 1$  այս թեորեմն իր մեջ, որպես մասնավոր

դեպք պարունակում է

$$y'' = \lambda y = 0$$

$$y(0) = \sin \alpha, \quad y'(0) = -\cos \alpha$$

Եզրային խնդրի հետ կապված հայտնի վերլուծությունը (3):

**ЛИТЕРАТУРА — Ч Р А К Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն**

<sup>1</sup> М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., 19 (1955), 133—190. <sup>2</sup> М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсисян, Труды Московского математического общества, т. 10. 89—179. <sup>3</sup> Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1, гл. IV, М., 1960.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. С. Заргарян

Кручение кругового цилиндра, имеющего несоосную  
 многогранную полость

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 3/1 1964)

Рассмотрим задачу кручения цилиндра, поперечное сечение которого представляет двусвязную область, внутренний контур которого является прямолинейным многоугольником с закругленными углами, а внешний контур — произвольно расположенной по отношению к внутреннему контуру приближенной окружностью.

Предлагаемый в настоящей статье способ отличен от метода Д. И. Шермана (1-3), использованного в (4). Для рассматриваемой двусвязной области, представляющей поперечное сечение цилиндра, строится отображающая функция, реализующая конформное отображение концентрического кольца на эту двусвязную область. Задача кручения кругового цилиндра, имеющего соосную многогранную полость, методом конформного отображения рассмотрена в (5).

1. Пусть функция

$$z = \varrho(w) = D \left( \frac{1}{w} + C_1 w + C_2 w^2 + \dots + C_n w^n + \dots \right) \quad (w = Re^{i\varphi}) \quad (1.1)$$

реализует конформное отображение внутренности единичного круга  $w < 1$  на внешность замкнутой кривой  $\Gamma$  (граница бесконечной односвязной области), причем образом окружности  $|w| = 1$  является сама кривая  $\Gamma$ , а образом окружности  $|w| = R < 1$  независимо от вида  $\Gamma$  при достаточно малых  $R$  — приближенная окружность  $\Gamma_1$ .

Зададимся целью получить отображающую функцию двусвязной области, одна из границ которой совпадала бы с  $\Gamma$ , а другая  $\Gamma_2$ , близкая к окружности, имела бы произвольное по отношению к  $\Gamma$  расположение, отличное от прежней  $\Gamma_1$ . Для этого поступим следующим образом: единичный круг  $|w| \leq 1$ , который с помощью функции (1.1) отображается на внешность замкнутой кривой  $\Gamma$ , отобразим на самого себя известной функцией



Разложим функцию  $G(\zeta_1)$  вне круга  $|\zeta_1| = |a|$  в ряд:

$$G(\zeta_1) = \frac{1 - \bar{a}\zeta_1}{\zeta_1 \left(1 - \frac{a}{\zeta_1}\right)} = \frac{1 - \bar{a}\zeta_1}{\zeta_1} \left(1 + \frac{a}{\zeta_1} + \frac{a^2}{\zeta_1^2} + \dots\right) \\ = B_0^* + B_{-1}\zeta_1^{-1} + B_{-2}\zeta_1^{-2} + B_{-3}\zeta_1^{-3} + \dots + B_{-n}\zeta_1^{-n} + \dots, \quad (1.7)$$

где  $B_0^* = -a$ , а  $B_{-n} = a^{n-1}(1 - a\bar{a})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Внося (1.7) в (1.5) и полагая при этом, что  $B_0 + B_0^* = 0$ , что всегда возможно, окончательно получим:

$$z = \Omega_1(\zeta_1) = D \left( \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-k} \zeta_1^{-k} \right). \quad (1.8)$$

Функция (1.8), определенная в кольце  $|a| < |\zeta_1| \leq 1$ , конформно отображает концентрическое кольцо  $r_0 \leq |\zeta_1| \leq 1$ , где  $r_0 > |a|$ , на двусвязную область, ограниченную кривыми  $\Gamma$  и  $\Gamma_2$ , являющимися образами соответственно окружностей  $|\zeta_1| = 1$  и  $|\zeta_1| = r_0$ . При  $\zeta_1 = a$  эта функция имеет особенность. В практических целях в качестве отображающей функции двусвязной области удобно в функции (1.8) ограничиться полиномом, образованным первыми  $n_1$  несколькими членами правильной и  $n_2$  первыми несколькими членами главной частей ряда (1.8), причем число  $n_2$  непосредственно зависит от радиуса  $r_0$ .

2. Решение задачи свободного кручения призматического стержня двусвязного поперечного сечения сводится к отысканию функции напряжений  $\Psi(x, y)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6)

$$\Delta \Psi = -2 \quad (2.1)$$

из следующих граничных условий

$$\begin{aligned} \text{на } \Gamma_2 \quad \Psi &= 0, \\ \text{на } \Gamma \quad \Psi &= C, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $C$  — постоянная, подлежащая определению.

Представим функцию напряжений  $\Psi(x, y)$  в комплексном виде

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - iz\bar{z}], \quad (2.3)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ;  $\Phi_1(z)$  — комплексная функция кручения.

Пусть полином

$$z = \omega(\zeta) = D \left( \sum_{k=1}^{n_2} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_1} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad \text{где } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

составленный из первых  $n_1$  членов правильной и  $n_2$  первых членов главной частей ряда (1.8), в котором предварительно сделано преоб-

разование  $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta}$  и введены обозначения

$$B_k = D_{-k}, \quad B_{-k} = D_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

отображает кольцо  $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$  на двусвязную область, ограниченную извне кривой  $\Gamma_2$ , являющейся на плоскости  $z$  образом  $|\zeta| = \rho_2$ , а изнутри образом  $|\zeta| = 1$  — кривой  $\Gamma$ .

Подставив (2.4) в (2.2), получим:

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - i\omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}]. \quad (2.6)$$

Голоморфную в области кольца  $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$  функцию  $\Phi(\zeta)$  будем искать в виде:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \text{где } a_k = b_k + ic_k. \quad (2.7)$$

Произведение  $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$ , фигурирующее в (2.6) на линиях  $\rho = \text{const}$  разложим в ряд Фурье

$$\frac{i}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (2.8)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2} |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2} (P_k^2 + Q_k^2) \rho^{2k} + \sum_{k=1}^{n_1} (P_{-k}^2 + Q_{-k}^2) \rho^{-2k} \right],$$

$$\alpha_1 = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-1} (P_k P_{k+1} + Q_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} P_{-k-1} + Q_{-k} Q_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\alpha_n = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-n} (P_k P_{k+n} + Q_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \sum_{k=1}^{n_1-n} (P_{-k} P_{-k-n} + Q_{-k} Q_{-k-n}) \rho^{-(2k+n)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} P_{-k} + Q_{n-k} Q_{-k}) \rho^{n-2k} \right];$$

( $n = 2, 3, \dots, N$ )

$$\beta_1 = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-1} (Q_k P_{k+1} - P_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} Q_{-k-1} - Q_{-k} P_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\beta_n = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-n} (Q_k P_{k+n} - P_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right.$$

$$+ \sum_{-1}^{n_1-n} (P_{-k} Q_{-k-n} - Q_{-k} P_{-k-n}) \rho_2^{-(2k+n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} Q_{-k} + Q_{n-k} P_{-k}) \rho_2^{n-2k} \Big];$$

$$(n = 2, 3, \dots, N),$$

здесь  $D_k = P_k + iQ_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и  $N = n_1 + n_2$ .

При  $\rho = \rho_1 = 1$  коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  будут снабжены сверху индексом (1), а при  $\rho = \rho_2$  — индексом (2).

Подставив (2.7) в (2.6), с учетом (2.8), и удовлетворяя граничные условия (2.2), получим:

$$b_k = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_k = \frac{\alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}},$$

$$b_{-k} = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^k}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k^{(1)} \rho_2^k - \alpha_k^{(2)}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad (2.9)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Для остальных  $k > N$   $b_k = b_{-k} = c_k = c_{-k} = 0$ . Входящая в (2.2) постоянная  $C$  и коэффициент  $a_0$ , не влияющие на напряженное состояние, равны  $C = \alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}$ ,  $a_0 = i\alpha_0^{(2)}$ .

3. Крутящий момент, приложенный к основаниям стержня, равен

$$M = \tau K, \quad (3.1)$$

где  $\tau$  — степень закручивания,  $K$  — жесткость при кручении.

Известно (6), что

$$K = \frac{\mu}{8i} \int_{\gamma} \bar{\omega}(\sigma)^2 \omega(\sigma) d\omega(\sigma) - \frac{\mu}{8i} \int_{\gamma} \omega(\sigma)^2 \bar{\omega}(\sigma) d\bar{\omega}(\sigma) -$$

$$- \frac{\mu}{4} \int_{\gamma} \{\Phi(\sigma) + \bar{\Phi}(\sigma)\} d\omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma), \quad (3.2)$$

где интегрирование производится при движении в положительном направлении по всему контуру кольца  $\gamma$ ,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\sigma$  — граничное значение переменной  $\zeta$ .

Разлагая в (3.2) подынтегральные выражения в ряд по степеням  $\sigma$  и учитывая при этом, что на границе  $\gamma$ , где  $\bar{\sigma} = \rho_j^2$  ( $j=1, 2$ ), выполняются следующие равенства

$$\omega(\sigma) \bar{\omega}\left(\frac{\rho_j^2}{\sigma}\right) = \sum_{-N}^N \lambda_n^{(j)} \sigma^n,$$

где

$$\lambda_0^{(j)} = 2\alpha_0^{(j)}, \quad \lambda_n^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} - i\beta_n^{(j)}) \rho_j^{-n}, \quad \lambda_{-n}^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} + i\beta_n^{(j)}) \rho_j^n; \quad (3.3)$$

$$\bar{\omega} \left( \frac{\rho_j^2}{\sigma} \right) \omega'(\sigma) = \sum_{-(N+1)}^{N-1} A_n^{(j)} \sigma^n,$$

где

$$A_0^{(j)} = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-1} (k+1) \bar{D}_k D_{k+1} \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+1)} \rho_j^{-2(k+1)} \right],$$

$$A_n^{(j)} = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-n-1} (k+n+1) \bar{D}_k D_{k+n-1} \rho_j^{2k} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n_1-n-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+n+1)} \rho_j^{-2(k+n+1)} + \sum_{k=1}^n k D_k \bar{D}_{-(n-k+1)} \rho_j^{-2(n-k+1)} \right]$$

$$[n = 1, 2, \dots (N-1)]$$

$$A_{-1}^{(j)} = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2} k D_k \bar{D}_k \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1} k D_{-k} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right],$$

$$A_{-2}^{(j)} = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-1} k D_k \bar{D}_{k+1} \rho_j^{2(k+1)} - \sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) D_{-(k+1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right]$$

$$A_{-n}^{(j)} = |D|^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_2-n+1} k D_k \bar{D}_{k+n-1} \rho_j^{2(k+n-1)} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n_1-n+1} (k+n-1) D_{-(k+n-1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} - \sum_{k=1}^{n-2} k D_{-k} \bar{D}_{n-k-1} \rho_j^{2(n-k-1)} \right],$$

$$[n = 3, 4, \dots (N+1)]. \quad (3.4)$$

после интегрирования получим:

$$K = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) - \sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) \right] + \\ + \mu\pi \operatorname{Im} \left[ \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(2)} - a_n \lambda_{-n}^{(2)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(1)} - a_n \lambda_{-n}^{(1)}) \right] \quad (3.5)$$

Касательные напряжения, как известно (6), определяются по формуле:

$$\tau_p - i\tau_\theta = \mu\tau \frac{\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [\Phi'(\zeta) - i \overline{\omega(\zeta)} \omega(\zeta)]. \quad (3.6)$$

4. В качестве примера рассмотрим задачу кручения цилиндра, ограниченного извне кривой, близкой к окружности, а изнутри — криволинейным квадратом, центр которого не совпадает с центром окружности. В качестве исходной функции (1.1) ограничимся полиномом

$$z = D \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{6} \omega^3 \right). \quad (4.1)$$

Эта функция, как известно, переводит окружность  $|\omega| = R \leq 0,5$  в кривую  $\Gamma_1$ , близкую к окружности, а окружность  $|\omega| = 1$  — в квадрат с закругленными углами.

Примем в (1.2) параметр  $\alpha = 0,2$  и в (1.1) коэффициент  $D$  действительным. Подставив (1.2) в (4.1), с учетом (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) и (2.5), и в качестве внешней границы  $\Gamma_2$  (рис. 1) принимая образ окружности  $|\zeta| = 2$ , ограничимся следующим полиномом в отображающей функции (1.8):

$$z = \omega(\zeta) = D \left( \sum_{k=1}^{n_2=8} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_1=8} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad (4.2)$$

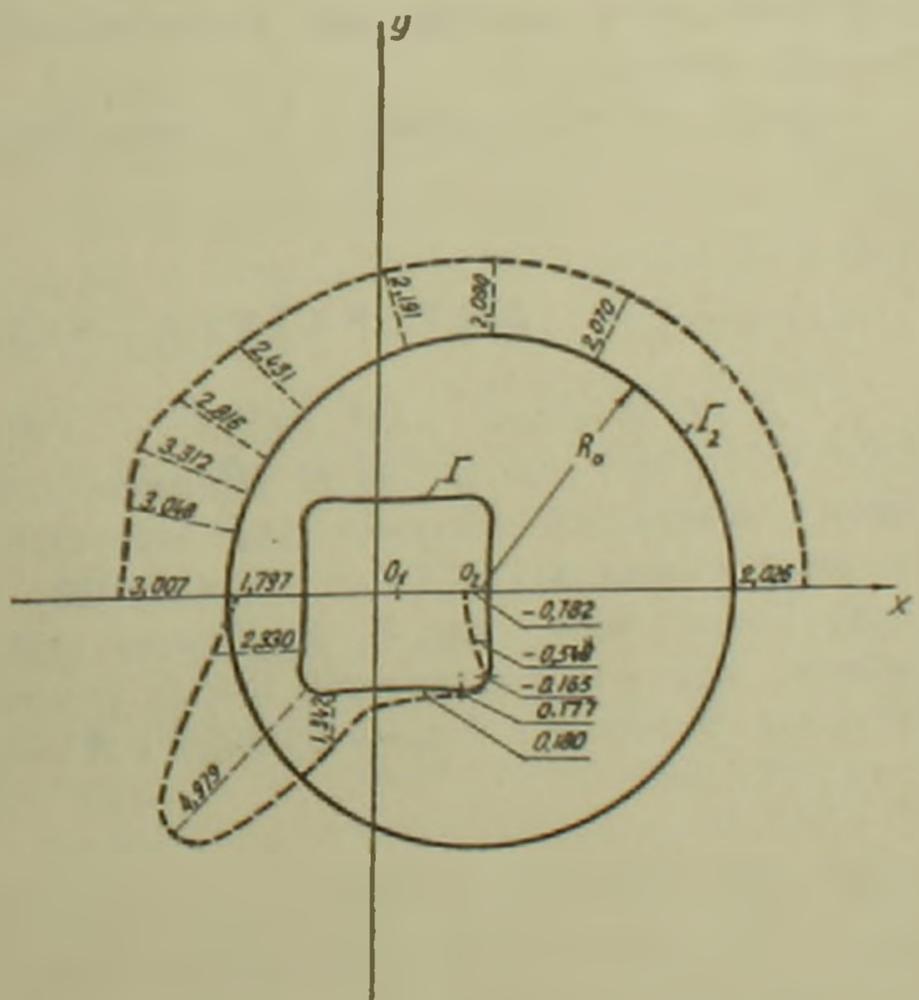
где

$D_1 = 0,96$	$D_{-1} = -0,019\ 201$
$D_2 = 0,192$	$D_{-2} = 0,088\ 319$
$D_3 = 0,038\ 4$	$D_{-3} = -0,111\ 362$
$D_4 = 0,007\ 679$	$D_{-4} = -0,077\ 567$
$D_5 = 0,001\ 536$	$D_{-5} = -0,032\ 471$
$D_6 = 0,000\ 307$	$D_{-6} = -0,011\ 065$
$D_7 = 0,000\ 061$	$D_{-7} = -0,003\ 363$
$D_8 = 0,000\ 011$	$D_{-8} = -0,001\ 842.$

Как видно из построения, с помощью (4.2), по дискретным точкам, кривая  $\Gamma$  представляет собой квадрат с закругленными углами и почти прямыми сторонами с центром в точке  $O_1 (0,189\ 07D, 0)$ , чего и следовало ожидать, так как полином (4.2) на  $|\zeta| = 1$  приближенно, но с высокой точностью аппроксимирует функцию (4.1) на  $|\omega| = 1$ .

Убедимся в том, что кривая  $\Gamma_2$  близка к окружности. Действительно, дискретные точки располагаются по  $\Gamma_2$  — близкой к окружности радиуса  $R_0 = 2,259\ 6 D$  с центром в точке  $O_2 (0,930\ 37 D, 0)$ . За центр круга принята середина отрезка действительной оси, отсекаемого пересечением  $\Gamma_2$  с этой осью. Расстояния от центра до 10 дискретных точек, расположенных в верхней полуплоскости, отличаются от  $R_0$  не более чем на 1,3%.

С другой стороны на окружности  $|\zeta| = 2$  удовлетворяется условие выпуклости кривой  $\Gamma_2$  (?)



Фиг. 1.

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\zeta \omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + 1 \geq 0. \quad (4.3)$$

Следовательно, кривая  $\Gamma_2$  близка к окружности.

Жесткость рассматриваемого поперечного сечения стержня, со- считанная по (3.5), равна  $K = 11,79555 \mu \pi D^4$ .

Принимая за сторону квадрата  $\Gamma$  отрезок действительной оси, отсекаемый кривой  $\Gamma$  от этой оси, получаем, что  $D = 0,59318 a$  ( $a$  — сторона квадрата); следовательно,  $R_0 = 1,34034 a$ .

Эпюры касательных напряжений  $\tau_0$  по контурам сечения приве- дены на фиг. 1.

В заключение отметим, что выбор полинома (4.1) из двух сла- гаемых продиктован ничуть не стремлением избежать отягчающих расчетов, а только лишь с целью иллюстрации способа; при желании число слагаемых в (4.1) можно известным образом увеличить, что приведет к уменьшению радиуса закругления в углах квадрата.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

#### Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

#### Ոչ համառանցք բազմանիս խոռոչ ունեցող եռանյւթի զլանի ոլորումը

Դիտարկվում է երկկապ լայնական կտրվածք ունեցող զլանի ոլորման խնդիրը, որի ներսի եզրը իրենից ներկայացնում է կտրացված անկյուններով բազմանկյունի, իսկ արտաքին եզրը՝ ներքին եզրի նկատմամբ կամայական դասավորութուն ունեցող շրջանա- ղծին բավականաչափ մոտ կոր:

Երկկապ տիրույթների համար առաջարկվում է կոնֆորմ արտապատկերող ֆունկ- ցիայի կառուցման եղանակ, որը համակենտրոն օղակը արտապատկերում է զիտարկվող տիրույթի վրա:

Որպես օրինակ լուծված է ոչ համառանցք բառակուսի խոռոչով զլանի ոլորման խնդիրը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. XIII, № 5 (1948). <sup>2</sup> Д. И. Шерман, ИАН СССР, ОТН, № 7 (1951). <sup>3</sup> Д. И. Шерман, Труды Всесоюзного съезда по теорети- ческой и прикладной механике, Изд. АН СССР, М.—Л., 1962. <sup>4</sup> Ю. А. Амензаде, Ин- женерный журнал АН СССР, т. III, в. 2, 1963. <sup>5</sup> М. И. Найман, Докторская диссер- тация, Госуд. библ. им. В. И. Ленина, 1947. <sup>6</sup> Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954. <sup>7</sup> И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Госиздат физ.-мат. литер., М., 1960.

АСТРОФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, академик

Об одной задаче нелинейной теории рассеяния света  
 в мутной среде

(Представлено 26/III 1964)

В настоящее время все большую актуальность приобретают вопросы нелинейной теории многократного рассеяния света (<sup>1, 2</sup>). Нелинейные задачи возникают, например, при изучении процессов, в которых существенную роль играет обмен энергиями между полями излучения, соответствующими частотам различных спектральных линий атомов среды. Например, один из простейших случаев таких процессов, рассмотренный в (<sup>1</sup>), соответствует среде, состоящей из атомов, имеющих три состояния и три спектральные линии. Однако имеются и такие физические задачи, в которых можно ограничиться рассмотрением излучения только в одной спектральной линии и для которых, тем не менее, при известных условиях (высокая плотность излучения), линейное приближение является недостаточным. Простейшим таким примером является проблема рассеяния монохроматического излучения в атмосферном слое, состоящем из атомов, имеющих два возможных состояния, когда учитывается „отрицательное поглощение“. Характерной чертой нелинейных задач является наличие эффектов просветления и помутнения среды, т. е. изменения оптической толщины.

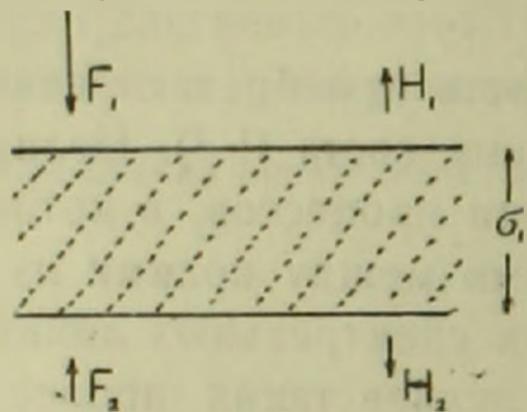
Представляет интерес выяснить, в какой мере методы решения математических задач обычной линейной теории переноса излучения (<sup>3</sup>) могут быть применены в области нелинейных задач.

Для простоты рассмотрим одномерную задачу о рассеянии света в однородной среде конечной толщины. В (<sup>1</sup>) было показано, как эта задача, взятая в линейном приближении, в результате применения метода сложения двух слоев (принцип инвариантности), приводится к сравнительно простым функциональным уравнениям, для которых получаются хорошо известные из обычной теории решения.

С первого взгляда может показаться, что принцип инвариантности не может быть применен в нелинейных задачах, так как оптические свойства (прозрачность и др.) прибавляемого слоя зависят от падающих на него потоков излучения. Однако на примере, рассмотренном в настоящей работе, мы показываем, что эта трудность может быть обойдена.

В нелинейной теории толщина среды должна быть охарактеризована некоторым параметром. В качестве такого параметра оказывается неудобным взять реальную оптическую толщину, ибо вследствие упомянутых выше эффектов просветления и помутнения она оказывается переменной величиной, зависящей от существующего в среде поля излучения. Вместо нее можно использовать в качестве параметра значение оптической толщины, когда интенсивность излучения во всех точках среды стремится к нулю. Будем эту величину называть в дальнейшем *предельной оптической толщиной*.

§ 1 Рассмотрим для простоты следующую одномерную задачу. На две границы среды, обладающей предельной оптической толщиной  $\sigma_1$ , падают потоки излучения  $F_1$  и  $F_2$ . Требуется найти соответствующие выходящие потоки  $H_1$  и  $H_2$  (фиг. 1). При этом нас не будет интересовать природа элементарных актов рассеяния. Будем лишь



Фиг. 1.

считать, что среда имеет одинаковые свойства для лучей, идущих в обоих направлениях. При этом условии будем иметь

$$H_1 = \varphi(F_1, F_2; \sigma_1), \quad (1)$$

$$H_2 = \varphi(F_2, F_1; \sigma_1). \quad (2)$$

Таким образом, среда является как бы „черным ящиком“, свойства которого характеризуются функцией  $\varphi$ . Но в отличие от других „черных ящиков“ мы в этом случае знаем кое-что о его свойствах и, в частности, что среда с толщиной  $\sigma_1 + \sigma_2$  может рассматриваться как сумма двух, правда взаимодействующих, сред с толщинами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Благодаря этому требованию функция  $\varphi$  уже не может быть произвольной функцией от трех аргументов. Она должна подчиняться некоторым условиям, которые мы постараемся отыскать. После этого следует определить функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую найденным условиям.

Используем метод сложения двух слоев. Пусть  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будут предельные оптические толщины этих слоев. Тогда из схемы, представленной на фиг. 2, видно, что в дополнение к (1) и (2) мы будем иметь следующие соотношения:

$$F_2 = \varphi(H_2, F_3; \sigma_2), \quad (3)$$

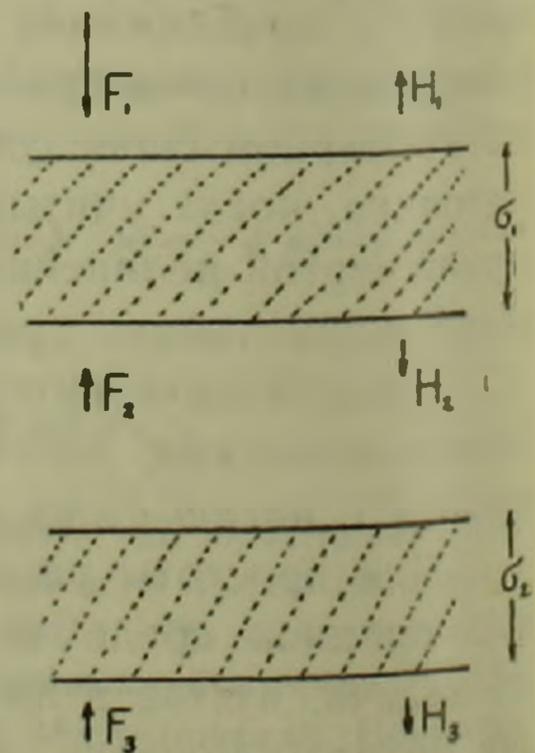
$$H_3 = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2), \quad (4)$$

$$H_1 = \varphi(F_1, F_3; \sigma_1 + \sigma_2), \quad (5)$$

$$H_3 = \varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2). \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (4), имеем:

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2).$$



Фиг. 2.

Подставляя в правую часть вместо  $H_2$  его значение из (2), получаем

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_3, \varphi(F_2, F_1; \sigma_1); \sigma_2). \quad (7)$$

С другой стороны, подставляя (2) в (3), находим

$$F_2 = \varphi(\varphi(F_2, F_1; \sigma_1), F_3; \sigma_2). \quad (8)$$

Пусть решение этого уравнения относительно  $F_2$  будет:

$$F_2 = u(F_1, F_3; \sigma_1; \sigma_2). \quad (9)$$

Функция  $u$  целиком определяется заданием  $\varphi$ . Поэтому мы можем сказать, что, подставляя (9) в (7), мы будем иметь уравнение

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_3, \varphi(u(F_1, F_3; \sigma_1, \sigma_2), F_1; \sigma_1); \sigma_2), \quad (10)$$

обе части которого выражаются через  $\varphi$ . Следовательно, уравнение (10) вместе с определением функции  $u$  из соотношений (8) и (9) есть некоторое весьма своеобразное функциональное уравнение для функции  $\varphi$ .

Попытаемся найти вместо полученного функционального уравнения дифференциальное. Для этого допустим, что  $\sigma_2$  есть малая величина. Тогда уравнение (3) переписется в виде

$$F_2 = F_3 + \alpha(H_2, F_3) \sigma_2. \quad (11)$$

Вводя сюда вместо  $H_2$  его значение из (2), получаем:

$$F_2 = F_3 + \alpha(\varphi(F_2, F_1; \sigma_1), F_3) \sigma_2.$$

С точностью до величин второго порядка малости мы можем в последнем члене заменить  $F_2$  через  $F_3$ . Тогда

$$F_2 = F_3 + \alpha(\varphi(F_3, F_1; \sigma_1), F_3) \sigma_2. \quad (12)$$

С другой стороны, сравнивая (6) с (4), получаем:

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2), \quad (13)$$

а из фиг. 2 имеем

$$H_3 = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2) = H_2 + \alpha(F_3, H_2) \sigma_2. \quad (14)$$

Внося (13) в (12) находим:

$$\varphi(F_3, F_1, \sigma_1 + \sigma_2) = H_2 + \alpha(F_3, H_2) \sigma_2. \quad (15)$$

Подставляя сюда вместо  $H_2$  его значение из (2), можем написать:

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_2, F_1; \sigma_1) + \alpha(F_3, \varphi(F_2, F_1; \sigma_1)) \sigma_2. \quad (16)$$

Внесем, наконец, сюда значение  $F_2$  из (12). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) &= \varphi(F_3 + \alpha(\varphi(F_3, F_1; \sigma_1), F_3) \sigma_2, F_1; \sigma_1) + \\ &+ \alpha(F_3, \varphi(F_3, F_1; \sigma_1)) \sigma_2. \end{aligned} \quad (17)$$

причем, в последнем члене, пренебрегая величинами порядка  $\sigma_2^2$ , мы заменили  $F_2$  через  $F_3$ .

Разлагая по степеням  $\sigma_2$ , отбрасывая члены второго порядка и выше, а также сокращая, мы находим отсюда

$$\frac{\partial \varphi (F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \varphi (F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial F_3} \alpha (\varphi (F_3, F_1; \sigma_1), F_3) + \alpha (F_3, \varphi (F_3, F_1; \sigma_1)). \quad (18)$$

Итак, мы получили нелинейное дифференциальное уравнение для функции  $\varphi$ . Для упрощения переменим обозначения

$$H_3 = \varphi (F_3, F_1; \sigma_1) = z; \quad F_1 = x; \quad F_3 = y; \quad \sigma_1 = \sigma. \quad (19)$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = \frac{\partial z}{\partial y} \alpha (z, y) + \alpha (y, z). \quad (20)$$

При  $\sigma \rightarrow \infty$  наша задача превращается в простую проблему нахождения диффузно отраженного от бесконечно толстого слоя потока  $H_2 = z$ , когда на него падает поток  $F_3 = y$ . Очевидно, что в этом случае  $z$  будет зависеть только от  $y$  и от свойств среды, т. е. формы функции  $\alpha (z, y)$ . Поэтому, принимая во внимание, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  имеем  $\frac{\partial z}{\partial \sigma} = 0$ , получим для задачи диффузного отражения более простое уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y} \alpha (z, y) + \alpha (y, z) = 0. \quad (21)$$

Остановимся сперва на этом случае.

§ 2. Выясним сначала свойства симметрии функции  $\alpha (z, y)$ , характеризующей свойства элементарного слоя и определяемой уравнением (11).

Если допустить, что элементарный слой толщиной  $\sigma_2$  может, с одной стороны, ослаблять падающее и проходящее через него излучение, а с другой стороны, испускать в обе стороны поровну излучение, интенсивность которого зависит от полной плотности излучения, то формулу (11) надо написать в виде

$$F_2 = F_3 - k (F_3 + H_2) F_3 \sigma_2 + g (F_3 + H_2) \sigma_2, \quad (22)$$

где  $k$  и  $g$  суть некоторые функции от аргумента, написанного в скобках. В линейной теории переноса излучения  $g(x)$  просто пропорционально  $x$ , а  $k$  — постоянно.

Сравнивая определение (11) с (22), имеем:

$$\alpha (H_2, F_3) = -k (F_3 + H_2) F_3 + g (F_3 + H_2),$$

или в сокращенных обозначениях

$$\alpha (z, y) = -k (z + y) y + g (z + y) \quad (23)$$

Поэтому уравнение (21) принимает вид:

$$\frac{\partial z}{\partial y} [ky - g] = g - kz,$$

откуда приходим к уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial y} + z = \frac{1}{k} g(z+y) \left( \frac{\partial z}{\partial y} + 1 \right). \quad (24)$$

Введем функцию

$$\int_0^x \frac{g(\xi) d\xi}{k(\xi)} = G(\xi). \quad (25)$$

Находим решение (24) в виде

$$yz = G(y+z) + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Если  $z=0$  при  $y=0$ , то  $C=0$ . Поэтому

$$yz = G(y+z). \quad (26)$$

Отсюда, в частности при  $g(\xi) = \frac{\lambda}{2} k\xi$ , т. е. в линейном случае, когда из поглощенной энергии рассеивается доля  $\lambda$ , имеем:

$$yz = \frac{\lambda}{4} (y+z)^2. \quad (27)$$

Решение этого уравнения дает обычную формулу для „альbedo“

$$\frac{z}{y} = \frac{2 - \lambda - \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda}. \quad (28)$$

Пусть теперь

$$g(\xi) = \frac{\lambda}{2} k(\xi) \frac{a^2 \xi}{a^2 + \xi^2}, \quad (29)$$

где  $a$  — некоторая постоянная, т. е. внесем нелинейность, выражающуюся в том, что при рассеянии элементарным слоем из поглощаемой энергии рассеивается лишь доля

$$\lambda \frac{a^2}{a^2 + \xi^2},$$

т. е. при увеличении плотности энергии  $\xi$  эта доля уменьшается, а доля, приходящаяся на истинное поглощение, возрастает. Тогда

$$G(x) = \frac{\lambda}{4} a^2 \ln \left[ 1 + \frac{x^2}{a^2} \right]$$

и решение имеет вид

$$yz = \frac{\lambda}{4} a^2 \ln \left[ 1 + \frac{(y+z)^2}{a^2} \right], \quad (30)$$

откуда видно, что при увеличении потока  $y$  до бесконечности альbedo  $\frac{z}{y}$  стремится к нулю. Наоборот, при  $y \ll a$  будем иметь для альbedo формулу, совпадающую с (28).

§ 3. В случае слоя конечной оптической толщины следует вернуться к уравнению (20), подставив в него выражение (23) для коэффициента  $\alpha(z, y)$ . Найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} [-k(z+y)y + g(z+y)] + [-k(z+y)z + g(z+y)]. \quad (31)$$

Это уравнение может быть решено известными методами, если только заданы функции  $k(x)$  и  $g(x)$ .

Мы не будем останавливаться здесь на характере решений для разных частных случаев. Очевидно, что эти решения могут быть получены и другими способами, в частности путем интегрирования уравнений, описывающих условия внутри среды. Но нашей задачей было показать что рассматриваемая проблема допускает последовательное применение принципа инвариантности.

Надо, однако, иметь в виду, что применение принципа инвариантности должно принести существенную пользу главным образом при решении сложных задач: многомерных или связанных с наличием нескольких взаимодействующих частот излучения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория  
Академии наук Армянской ССР

#### Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ

### Պղտոր միջավայրում լույսի ցրման ոչ դժային սեռուրյան մի խնդրի մասին

Լույսի բազմապատիկ ցրման ոչ դժային խնդրի միաշափ դեպքում կիրառվում է ինվարիանտության սկզբունքը: Ի տարբերություն դժային դեպքից դիֆուզ անդրադարձման ու թափանցման գործակիցների փոխարեն անհրաժեշտ է դառնում մտցնել անդրադարձման թափանցման մի ֆունկցիա  $\varphi(F_1, F_2)$ , որի համար ստացվում է (10) ֆունկցիոնալ հավասարումը: Այդ ֆունկցիոնալ հավասարումը կարելի է բերել (18) ոչ դժային դիֆերենցիալ հավասարման:

Անվերջ օպտիկական հաստության դեպքում խնդիրը բերվում է (24) հավասարմանը: Նրա լուծումը տալիս է մեզ անդրադարձման ֆունկցիա: Այդ լուծումը արտահայտվում է (26) և (25) բանաձևերով: Մասնավոր դեպքում ստացվում է դժային խնդրի հայտնի լուծումը:

#### ЛИТЕРАТУРА -- ԿՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. А. Амбарцумян, Monthly Notices of RAS, 95, 469. 1935; Ученые записки ЛГУ, 31, 5, 1939. Научные труды, т. 1, стр. 78—102. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.  
<sup>2</sup> А. П. Иванов, Оптика и спектроскопия, 14, 275, 1963. <sup>3</sup> В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гос. изд. тех. теор. лит., 1956. <sup>4</sup> Изв. АН АрмССР, естеств. науки, № 1—2, 1944.

ЭНЕРГЕТИКА

Г. П. Кумсиашвили

Исследование устойчивости регулирования стационарных агрегатов в энергетических системах

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. В. Егназаровым 17/XII 1963)

В инженерных расчетах встречаются трудности, вытекающие из необходимости оперировать с характеристическими определителями очень высоких порядков. Это приводит к тому, что обычные методы теории регулирования не дают возможности получить удобообозримый результат и приводят к необходимости выполнения громоздких вычислений. Исследование устойчивости в энергетических системах можно существенно упростить расчленением общего уравнения движения на несколько приближенно независимых уравнений более низких порядков.

Частным случаем такого подхода является общепринятое рассмотрение динамики энергетических систем по частям, при котором процессы, происходящие в котлах или гидротехнических сооружениях, турбинах, генераторах и электрических сетях рассматриваются изолированно друг от друга. Ранее использовавшееся расчленение энергетической системы основывалось на грубых и не всегда физически ясных предположениях, которые математически эквивалентны случаю, когда отсутствуют какие бы то ни было взаимосвязи между указанными процессами.

Автор, пользуясь приемом, который в математическом отношении является одним из методов малого параметра, расчленяет общее уравнение на отдельные замкнутые уравнения низких порядков в общем случае, при котором существенны взаимодействия между явлениями, ранее рассматривавшимися изолированно. При этом указанные взаимодействия выражаются в замкнутых уравнениях составляющих переходного процесса комбинациями соответствующих параметров, имеющими четкий физический смысл.

Таким образом, исследование сложной системы высокого порядка приближенно сводится к исследованию опять-таки сложной системы, но описываемой несколькими уравнениями низких порядков.

Ниже рассматривается простой, но характерный пример.

Гидроагрегат с нерегулируемым генератором, без уравнительного резервуара, с регулятором скорости с жесткой обратной связью, работающий на шины бесконечной мощности, имеет характеристический определитель:

$$\begin{vmatrix} T_{\delta} T_a p^2 + T_{\delta} K p + S_u & -D_1 \\ T_{\delta} C p & T_s p + M_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где постоянные времени и коэффициенты имеют следующие значения:

$T_{\delta} = \frac{1}{\omega_0} = 0,00318$  сек. — величина, обратная синхронной угловой частоте,  $T_a = 8$  сек. — постоянная инерции ротора,  $K = 8$  — коэффициент саморегулирования агрегата;  $T_s = 4$  сек. — постоянная времени сервомотора,  $D_1 = 1$  — коэффициент в уравнении момента гидротурбины,  $M_2 = 1$  — коэффициент остающейся неравномерности регулятора скорости,  $C = 30$  — коэффициент усиления маятника регулятора скорости.

Рассмотрим три варианта величины синхронизирующей мощности генератора:

$$1) S_u = 2; \quad 2) S_u = 0,2; \quad S_u = 0,02.$$

Возможность отдельного рассмотрения гидромеханических и электромеханических процессов связана с тем, что постоянные в системе уравнений имеют резко различный порядок. Выразим все параметры системы с помощью малого параметра  $m = 0,1$  и эталонов сравнения:

$$T_s = \tau_s, \quad T_a = \frac{1}{m} \tau_a, \quad T_{\delta} = m^3 \tau_{\delta},$$

$$M_2 = \mu_2, \quad D_1 = d_1, \quad K = \frac{1}{m} x, \quad C = \frac{1}{m^2} c,$$

где  $\tau$ ,  $x$ ,  $c$ ,  $d_1$ ,  $\mu_2$  — эталоны сравнения в данном случае порядка единиц.

1) В первом варианте  $S_u = s_u$  и характеристический определитель (1) в новых обозначениях имеет вид:

$$\begin{vmatrix} m^2 \tau_{\delta} \tau_a p^2 + m^2 \tau_{\delta} x p + s_u & -d_1 \\ m \tau_{\delta} c p & \tau_s p + \mu_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Воспользуемся результатами работы (1). При  $m$  малом часть корней уравнения (1) должна быть близка к корням уравнения, получающегося из (2) при  $m = 0$ , после чего приходим к уравнению регулирования скорости турбины

$$T_s p + M_2 = 0. \quad (3)$$

Остальные два корня определителя (1) близки корням известного уравнения электромеханических процессов нерегулируемого генератора:

$$T_{\delta} T_a p^2 + T_{\delta} K p + S_u = 0. \quad (4)$$

Характеристический определитель (1) третьей степени, поэтому нетрудно найти корни ( ) как из самого определителя, так и из уравнений отдельных движений (3) и (4). Сравнивая их, вычисляем погрешность в определении корней характеристического определителя из уравнений отдельных движений. В первом варианте она равна:

$$\varepsilon_1 = 1,2\%, \quad \varepsilon_{2,3} = 1,3\%.$$

Таким образом, при синхронизирующих мощностях порядка единиц применимо общепринятое рассмотрение динамики данной конкретной системы по частям (3).

2) Во втором варианте  $S_u = 0,2$ . Погрешность при определении корней из уравнений (3) и (4) по отношению к корням определителя (1) составляет:

$$\varepsilon_1 = 13\%, \quad \varepsilon_{2,3} = 6\%.$$

Поэтому во втором варианте использование для анализа динамики данной конкретной системы общепринятых уравнений отдельных движений приводит к существенной погрешности.

Применяя метод малого параметра к характеристическому определителю (1) с численными значениями величин, соответствующих второму варианту, получаем следующие приближенные уравнения:

$$(S_u T_s + C T_i) p + S_u M_2 = 0, \quad (5)$$

$$T_a T_i T_s p^2 + (T_a T_i M_2 + T_s T_i K) p + (T_s S_u + T_i C D_1) = 0. \quad (6)$$

Погрешность корней уравнений (5) и (6) равна  $\varepsilon_1 = 1,3\%$ ,  $\varepsilon_{2,3} = 0,1\%$ .

Уравнения (5), (6) являются более общими, чем (3), (4), так как могут быть использованы для анализа рассматриваемой системы не только в режимах, в которых отсутствует взаимодействие между генератором и турбиной, но и для режимов, где такое взаимодействие весьма существенно. Взаимосвязи между указанными процессами выражаются в том, что отдельные замкнутые уравнения содержат общие параметры.

3) В третьем варианте  $S_u = 0,02$ , т. е. имеет место предельный режим работы вблизи границы устойчивости стационарных режимов. Деление характеристического определителя с численными значениями параметров, соответствующих третьему варианту, недопустимо, так как на границе области устойчивости в определителе (1) приходится удерживать члены, содержащие малые параметры высоких порядков.

Таким образом, во втором варианте при расчленении общего характеристического определителя (1) методом малого параметра в уравнениях отдельных движений сохраняются взаимосвязи между составляющими общего процесса, характерные для сложных энергосистем. В общепринятых уравнениях при рассмотрении динамики энергетических систем по частям (3), (4) указанными взаимодействиями пренебрегают.

Применение предложенного подхода особенно эффективно при исследовании динамической системы блоков тепловых электростанций, так как позволяет существенно упростить расчеты и выявить влияние указанных выше взаимодействий на регулирование рассматриваемых объектов.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
электроэнергетики

Գ. Պ. ԿՈՒՄՄԻՍՇՎԻԼԻ

### Էներգետիկական սխեմաների ազդեցությունների կանոնադրման կայունության հետազոտությունը

Հոդվածում դիտվում է բարդ սխեմաների կանոնադրման հարցի հետազոտությունը: Բարձր կարգի ընդհանուր հավասարումները ցածր կարգի մոտավոր հավասարումների սխեմաների տարրալուծելու մեթոդով:

Հետազոտման այդ մեթոդը հնարավորություն է տալիս էներգոսխեմանի ընդհանուր դինամիկան դիտել բոլոր նրա առանձին մասերի, ընդ որում, կախսայում, տուրբինայում, գեներատորում և էլեկտրական ցանցում տեղի ունեցող պրոցեսները դիտվում են որպես միմյանցից անկախ:

Բարձր կարգի հավասարումների սխեմանը տարակարգելու համար հոդվածում օգտագործվում է փոքր պարամետրի մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս ընդհանուր հավասարումները վերածելու առանձին, ցածր կարգի հավասարումների փակ սխեմաների:

Ստացված ափսիս պարզ հավասարումների սխեմաները միմյանց հետ կապվում են ֆիզիկական որոշակի իմաստ ունեցող համապատասխան պարամետրերի միջոցով:

Հոդվածում մշակված տարակարգման մեթոդը առանձնապես արդյունավետ է ջերմային էլեկտրակայանների դինամիկան ուսումնասիրելու համար:

Նախ, է տալիս էապես պարզեցնել հաշվման տեխնիկան և բացահայտել առանձին պրոցեսների ազդեցությունը սխեմանի կանոնադրման վրա:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Կ. А. Картевишвили, Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1957. <sup>2</sup> Н. А. Картевишвили, Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1958. <sup>3</sup> В. Витек, Устойчивость установившихся режимов энергетических систем по отношению к малым возмущениям. Автореферат диссертации, МЭИ, 1958.

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. И. Исагулянц, академик АН Армянской ССР, и В. П. Евстафьев

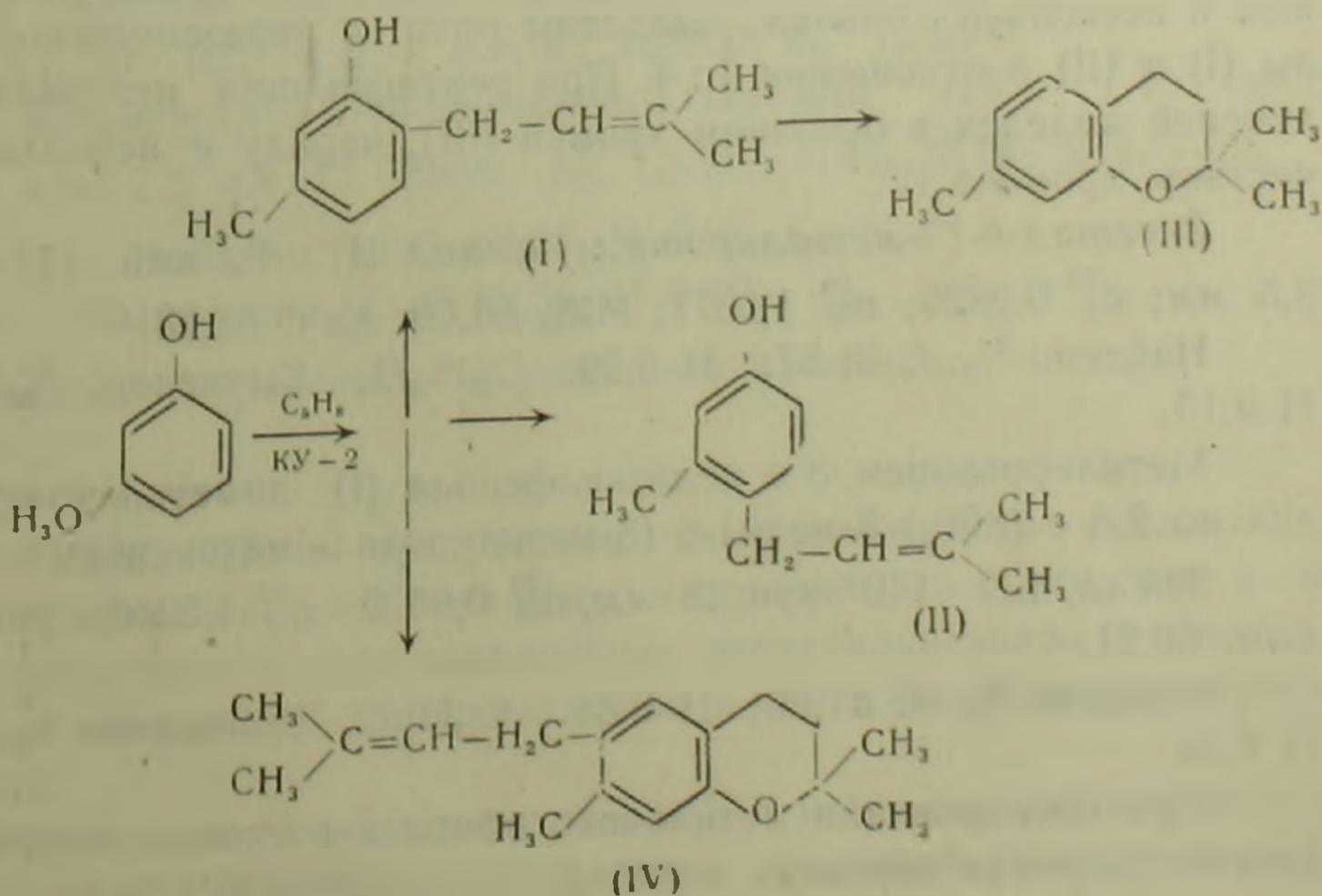
Алкенилирование *m*-крезола изопреном на катионообменной смоле КУ-2

(Представлено 4/X 1963)

В предыдущих работах мы сообщали результаты алкенилирования фенола бутадиеном <sup>(1)</sup>, аллиловым спиртом <sup>(2)</sup> и хлоропреном <sup>(3)</sup>.

Алкенилирование изопреном *m*-крезола ранее не проводилось, а при алкенилировании фенола наилучший выход пентенилфенолов (34%) получен в присутствии 71%-й фосфорной кислоты <sup>(4)</sup>, причем наряду с пентенилфенолами выделено значительное количество продуктов их гидролиза — оксифенилизоамиловых спиртов. Образование последних исключается при проведении реакции в присутствии катионообменной смолы.

Нами при алкенилировании *m*-крезола изопреном в присутствии катионообменной смолы КУ-2 получены 3-метил-6-(3-метилкротил)-фенол (I), 3-метил-4-(3-метилкротил)-фенол (II), 2,2,7-триметилхроман, (III) а также соединение, которому, по-видимому, следует приписать строение 2,2,7-триметил-6-(3-метилкротил-) хромана (IV).



Для доказательства строения пентенилкрезолов (I) и (II) были получены их метиловые эфиры. Окисление последних перманганатом калия привело к соответствующим метоксифталевым кислотам, а при озонировании выделена перекись ацетона.

Циклизацией пентенилфенола (I) на катионообменной смоле получено соединение идентичное хроману (III), выделенному из продуктов реакции. Это доказывает строение хромана (III), так как известно<sup>(5)</sup>, что циклизация *o*-(3-метилкротил-)фенола независимо от условий реакции проходит однозначно.

Выход смеси пентенилфенолов (I) и (II) составляет около 45% от продуктов реакции, или 30% от теоретического, а выход хромана (III) соответственно 25 и 16%.

*Экспериментальная часть.* Смесь 87 г (0,8 моля) *m*-крезола и 27 г безводной катионообменной смолы в водородной форме перемешивалась при 50°C в течение полутора часов. Затем температура была снижена до 40° и к смеси *m*-крезола и катионита прилито 27 г (0,3 моля) изопрена. Реакционная смесь перемешивалась при 40° в течение трех часов, затем температура медленно в течение двух часов повышалась до 70°, и при этой температуре перемешивание продолжалось еще полтора часа.

По окончании реакции катионит отфильтрован и промыт диэтиловым эфиром для полного извлечения катализата. При перегонке катализата под вакуумом получено 29 г (84% от общего количества продуктов реакции, или 56% от теории) моноалкенилированных фенолов, т. кип. 100—140° (2 мм), а соединения, кипящие выше 140° (2 мм), составили 5,5 г (16% от продуктов реакции).

Методика разделения на кислые (растворимые в 20%-м растворе едкого калия) и нейтральные (не растворимые в щелочи) подробно описана нами раньше<sup>(1)</sup>. При ректификации (на колонке эффективностью в 14 теоретических тарелок) кислых соединений, полученных в нескольких опытах, выделены орто- и паразамещенные крезолы (I) и (II) в отношении 1 : 4. При ректификации нейтральных соединений выделен в основном хроман (III), наряду с небольшим количеством хромана IV.

*3-метил-6-(3-метилкротил-)фенол (I).* Т. кип. 117—120° при 3,5 мм;  $d_4^{20}$  0,9826;  $n_D^{20}$  1,5377;  $M_{RD}$  56,09; выч. 55,23.

Найдено %: С 81,87; Н 9,29.  $C_{12}H_{16}O$ . Вычислено %: С 81,77; Н 9,15.

Метилированием 3 г пентенилфенола (I) диметилсульфатом получено 2,8 г (86%) 3-метил-6-(3-метилкротил-)метоксибензола.

Т. кип. 139—140° при 18 мм,  $d_D^{20}$  0,9570;  $n_D^{20}$  1,5240;  $M_{RD}$  60,84; выч. 60,21.

Найдено %: С 81,90; Н 9,54.  $C_{13}H_{18}O$ . Вычислено %: С 82,06; Н 9,54.

При озонировании метилового эфира в растворе хлористого метилена получена перекись ацетона, т. пл. 128—130°<sup>(6)</sup>.

*Окисление 3-метил-6-(3-метилкротил-)метоксибензола.* К 2,7 г эфира прилито 400 мл насыщенного раствора перманганата калия. Полученная смесь перемешивалась шесть часов при комнатной температуре, а затем пять часов при нагревании на водяной бане.

Получено 1,7 г (57%) 2-метокситерефталевой кислоты, т. пл. 274–275° (из воды) (7).

*3-метил-4-(3-метилкротил-)фенол (II).* Т. кип. 131–132° при 3,5 мм,  $d_D^{20}$  0,9900;  $n_D^{20}$  1,5420.  $M_{RD}$  56,08; выч. 55,23.

Найдено %: С 81,60; Н 9,16,  $C_{12}H_{15}O$ .

Вычислено %: С 81,77; Н 9,15.

Метилированием 19 г пентенилкрезола (II) диметилсульфатом получено 16 г (78%) 3-метил-4-(3-метилкротил)метоксибензол.

Т. кип. 112–114 (3 мм)  $d_4^{20}$  0,9455  $n_D^{20}$   $M_{RD}$  61,04; выч. 60,21.

Найдено %: С 82,10; Н 9,79.  $C_{13}H_{18}O$ . Вычислено %: С 82,06; Н 9,54.

При озонировании метилового эфира в растворе хлористого метилена получена перекись ацетона, т. пл. 127–128° [6], а при окислении 2,4 г эфира насыщенным раствором перманганата калия, как описано в яше, получено 1 г (38%) 4-метоксифталевой кислоты, т. пл. 173–176° (из разбавленного водного спирта) (8).

*2,2,7-триметилхроман (III).* Т. кип. 101–103° при 7 мм,  $d_4^{20}$  0,9903;  $n_D^{20}$  1,5243;  $M_{RD}$  54,47; выч. 53,71.

Найдено %: С 81,64; Н 9,18,  $C_{12}H_{16}O$ .

Вычислено %: С 81,77; Н 9,15.

*Циклизация пентенилкрезола (I).* Смесь 2,5 г пентенилкрезола (I) и 0,5 г (20%) катионообменной смолы КУ-2 перемешивалась при нагревании на кипящей водяной бане в течение двух часов. После перегонки получено 1,5 г 2,2,7-триметилхромана (III).

Т. кип. 99–103° при 7 мм.  $d_4^{20}$  0,9900;  $n_D^{20}$  1,5260.

*2,2,7-триметил-6-(3-метилкротил)хроман (IV).* Т. кип. 140–143° при 2,5 мм  $d_4^{20}$  0,9699;  $n_D^{20}$  1,5302;  $M_{RD}$  77,84; выч. 76,42.

Найдено %: С 83,65; Н 9,87,  $C_{17}H_{24}O$ .

Вычислено %: С 83,55. Н 9,90.

Хроман IV не реагирует с реактивом Гриньяра.

## В ы в о д ы

1. Показано, что в присутствии катионообменной смолы КУ-2 м-крезол присоединяется к изопрену, в основном в положение 1–4, образуя смесь орто- и пара-замещенных пентенилкрезолов (в отношении 1 : 4), а также 2,2,7-триметилхроман и более высокомолекулярные соединения.

2. Описаны шесть новых соединений; 3-метил-6-(3-метилкротил)-фенол, 3-метил-4-(3-метилкротил)фенол, 3-метил-6-(3-метилкротил)-

метоксибензол, 3-метил-4-(3-метилкротил)метоксибензол, 2,2,7-триметилхроман, 2,2,7-триметил-6-(3-метилкротил)хроман.

Московский институт нефтехимической  
и газовой промышленности им. академика  
И. М. Губкина

Վ. Ի. ԻՍԱԳՈՒԼՅԱՆՑ ԵՎ Վ. Պ. ԵՎՍՏԱՖԵՎ

**Մետա-կրեզոլի ալկենիլացումը իզոպրենով կատիոնփոխանակիչ  
խեմի ԿՄ-Չ վրա**

Հետազոտված է մետա-կրեզոլի ալկենիլացումը ԿՄ-Չխեմի ներկայությամբ: Ազո-  
ցուցված է, որ մետա-կրեզոլը միանում է իզոպրենին գլխավորապես 1,4 դիրքում և ստաց-  
վում է օրտո և պարապենտենի կրեզոլ (1,4) ինչպես և քիչ քանակությամբ 2, 2, 7-տրի-  
մեթիլսրոման և ուրիշ բարձր մոլեկուլար միացություններ: Ներկա աշխատանքում առ-  
ջին անգամ նկարագրվում է 6 նոր միացություն՝ 3-մեթիլ-6-(3-մեթիլկրոտիլ)ֆենոլ,  
3-մեթիլ-4-(3-մեթիլկրոտիլ) ֆենոլ, 3-մեթիլ-6-(3-մեթիլկրոտիլ)մեթօքսիբենզոլ, 3-մե-  
թիլ-4-(3-մեթիլկրոտիլ)մեթօքսիբենզոլ, 2, 2, 7-տրիմեթիլսրոման և 2, 2, 7-տրիմե-  
թիլ-6-(մեթիլկրոտիլ)սրոման:

**ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> В. И. Исагулянц, В. П. Евстафьев, ХИХ, 36, № 9 (1963). <sup>2</sup> В. И. Исагулянц,  
В. П. Евстафьев, Л. И. Ерошева, ЖОХ, 33, 1694 (1963). <sup>3</sup> В. И. Исагулянц, В. П.  
Евстафьев, ДАН АрмССР, XXXVII, № 5 (1953). <sup>4</sup> А. Р. Бабер, В. С. Бин, J. Am.  
Chem. Soc., 80, 3073 (1958). <sup>5</sup> С. Д. Гырды, В. А. Гофман, J. Org. Chem., 5, 212 (1940).  
<sup>6</sup> А. Байер, Ф. Филизгер, Ber., 33, 858 (1900). <sup>7</sup> С. Шалл, Ber., 12, 828 (1879).  
<sup>8</sup> В. Г. Бентли, Ш. Вайцман, J. Chem. Soc., 91, 103 (1907).

ФАРМАКОЛОГИЯ

Р. А. Алексанян

К механизму коронарорасширяющего действия кватерона

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Миджояном 26/XI 1963)

В проведенных нами ранее исследованиях <sup>(1)</sup> было установлено, что кватерон увеличивает объем крови, оттекающей из коронарного синуса, у наркогизированных уретаном кошек. Положительная клиническая оценка кватерона при лечении коронарной недостаточности послужила основанием А. Л. Миджояну предложить дальнейшее изучение механизма коронарорасширяющего действия препарата.

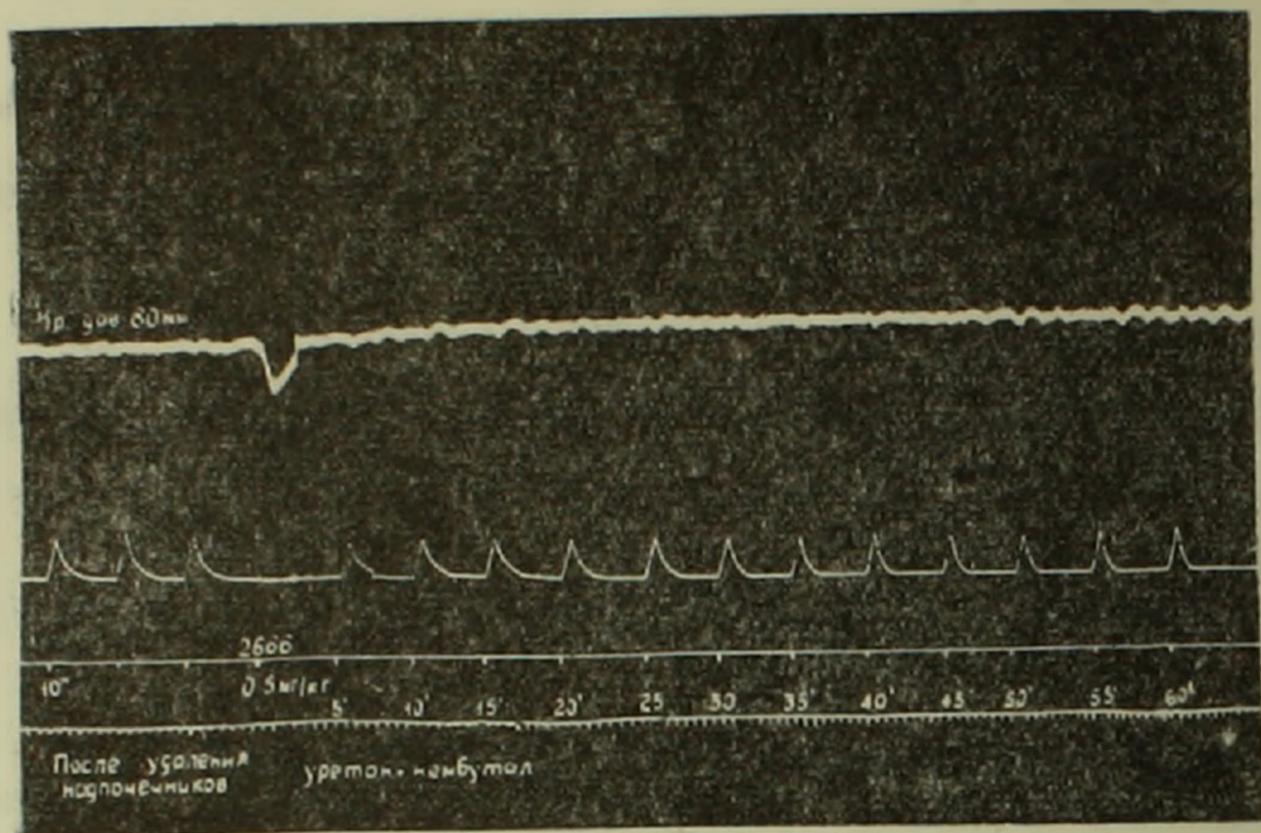
В настоящем сообщении излагаются результаты некоторых сторон механизма коронарорасширяющего действия кватерона. Об объемной скорости коронарного кровотока судили по изменению количества крови, оттекающей из коронарного синуса, по методу, описанному Н. В. Кавериной <sup>(2)</sup>.

Известно, что изменение просвета венечных сосудов зависит от многих факторов: резистентности самих венечных сосудов, состояния симпато-адреналовой системы, нарушения нервной регуляции коронарного кровотока и т. д. Следовательно, коронарорасширяющее действие препарата также должно происходить с участием этих факторов. При постепенном исключении вышеуказанных факторов, способствующих изменению просвета венечных сосудов, было обнаружено, что после удаления надпочечников последующее введение кватерона (в дозе 0,5—1 мг/кг) больше не вызывает расширения коронарных сосудов (фиг. 1).

Наиболее вероятным предположением отсутствия коронарорасширяющего действия кватерона после удаления надпочечников является уменьшение в организме животного катехоламинов, особенно норадреналина, который, как известно, расширяет коронарные сосуды сердца.

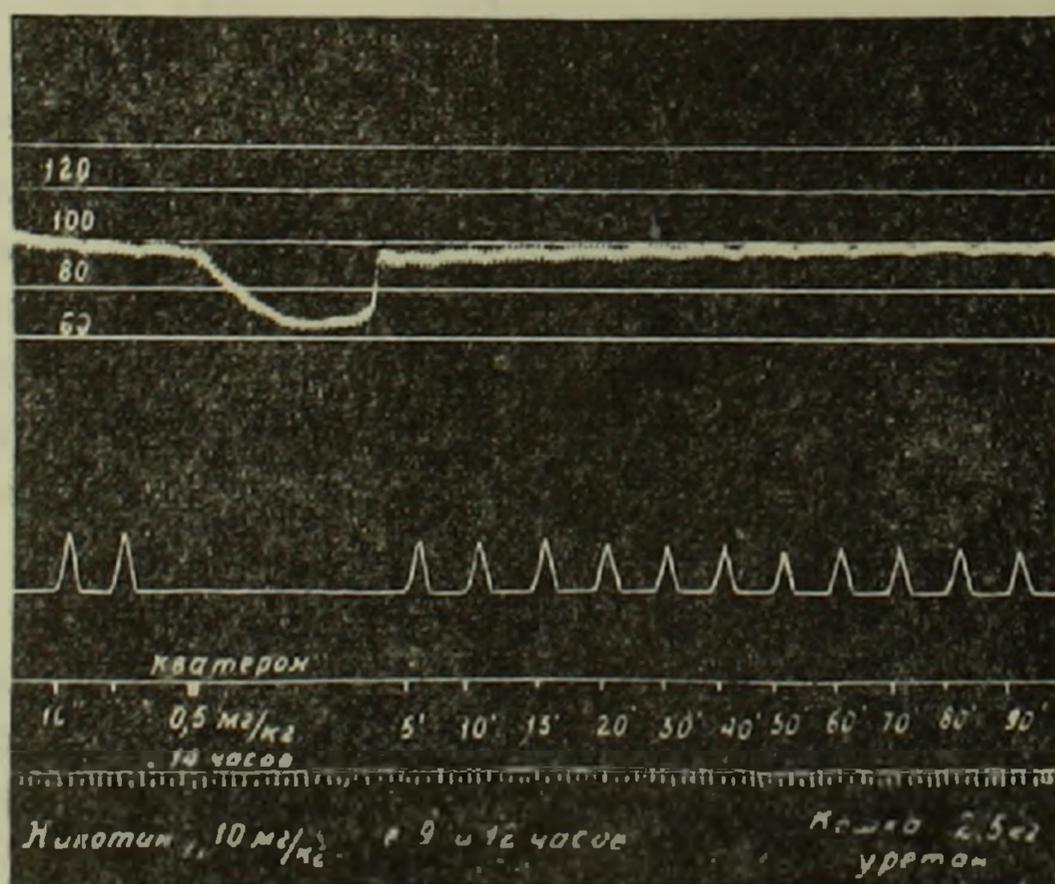
Из литературных данных <sup>(3)</sup> известно, что адреналин и норадреналин выделяются разными клетками мозгового слоя надпочечников и что никотин избирательно угнетает выделение норадреналина из этих клеток, а инсулин избирательно угнетает выделение адреналина <sup>(4)</sup>.

Исходя из этого, мы использовали вышеуказанные средства (никотин и инсулин) в качестве фармакологических анализаторов, пытаясь выяснить, действительно ли под воздействием кватерона происходит выделение катехоламинов из мозгового слоя надпочечников и



Фиг. 1. Отсутствие коронарорасширяющего эффекта кватерона после удаления надпочечников.

Кошка 2,5 кг под уретановым наркозом. Регистрация сверху вниз: кровяное давление; отток крови из коронарного синуса, где высота столбиков соответствует объемной скорости кровотока за 10" — отметка в/в введения веществ и отметка времени.



Фиг. 2. Отсутствие коронарорасширяющего эффекта кватерона после предварительного введения никотина. Обозначения те же, что и на фиг. 1.

какой из указанных катехоламинов способствует расширению сосудов.

Оказалось, что кватерон на фоне действия никотина совершенно не расширяет коронарные сосуды сердца (фиг. 2), в то время как на

фоне инсулина коронарорасширяющий эффект кватерона намного усиливается и удлиняется. Эти наблюдения позволяют предположить, во-первых, что кватерон способствует выделению катехоламинов из мозгового слоя надпочечников, и, во-вторых, что коронарорасширяющий эффект его обусловлен выделением норадреналина, причем при отсутствии адреналина этот эффект намного усиливается.

В литературе имеются также указания (5,6) на то, что при продолжительном действии резерпина происходит высвобождение катехоламинов из естественных резервов в кровь, и после ферментативного расщепления и выделения его организм сильно обедневает норадреналином. Естественно было думать, что если коронарорасширяющий эффект кватерона обусловлен высвобождением норадреналина, то на фоне действия резерпина кватерон не должен был расширять коронарные сосуды сердца.

Оказалось, что кватерон (в дозах 0,5—1 мг/кг) после предварительного введения резерпина не увеличивает объем крови, оттекающей из коронарного синуса. Отсутствие подобного эффекта кватерона на фоне действия резерпина является еще раз подтверждением того, что коронарорасширяющий эффект кватерона обусловлен выделением норадреналина из мозгового слоя надпочечников.

Достоверность полученных данных подтверждается также гистохимическими исследованиями (метод Хилларп и Хекфельт(7)). Принцип этого метода заключается в том, что норадреналин под воздействием перманганата калия окисляется и в микроструктурах мозгового слоя надпочечников появляется желто-коричневое окрашивание.

В наших опытах под влиянием кватерона увеличивается число окрашенных клеток по сравнению с нормой (где их количество весьма незначительное), что свидетельствует об увеличении количества норадреналина.

На основании всего изложенного можно допустить, что под воздействием кватерона происходит высвобождение катехоламинов из мозгового слоя надпочечников, а его коронарорасширяющий эффект обусловлен норадреналином.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Галояну за проведенные гистохимические исследования.

Институт тонкой органической химии  
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

**Սրտի պսակաձև անոթների վրա կվաթերոնի անոթալայնիչ ազդեցության մեխանիզմի մասին**

Հայտնի է, որ սրտի պսակաձև անոթների լուսանցքի փոփոխությունը պայմանավորված է մի շարք գործոններով: Հիրթականուխյամբ բացատրվող այդ գործոնները առանձին-առանձին մեղ հաջողվեց պարզել, որ ուրեթուանով անդդալնացրած կատուների մոտ կերիկամը հեռացնելուց հետո մնացած հալասար պայմաններում կվաթերոնը այլևս չի անցնում կենդանիների սրտի պսակաձև անոթները:

Հետաքրքիր էր պարզել թե կվատերոնի անոթալայնիչ ազդեցութեան բացակայութիւնը պայմանավորված է մակերիկամի միջուկային թե կեղևային մասի հեռացումով, իսկ եթե միջուկային ապա նրա որ հորմոնով:

Համաձայն գրական տվյալների, նիկոտինը ընտրողարար ընկճում է մակերիկամի միջուկային մասի այն բջիջներին, որոնք արտադրում են նորադրենալին իսկ ինսուլինը ընկճում է այն բջիջներին, որոնք արտադրում են ադրենալին: Ըստ որոշ հեղինակների ուսումնասիրությունները ցուցաբերում են, որ օրգանիզմում խիստ սլակասում է նորադրենալինը: Օգտագործելով վերոհիշյալ սլակասարատները իբրև ֆարմակոլոգիական անայիզատորներ մեզ հաջողվեց սլակասել, որ կվատերոնի ազդեցութեան տակ մակերիկամի միջուկային մասի բջիջներից արտազատվում է ադրենալին և նորադրենալին, իսկ նրա անոթալայնիչ ազդեցութիւնը պայմանավորված է նորադրենալինով:

Նորադրենալինի սեկրեցիայի ուժեղացումը կվատերոնի ազդեցութեան տակ հաստատվել է նաև հիստորիմիական հետազոտութեամբ:

#### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> *Н. Е. Аюпян и Р. А. Алексанян*, Фармакол. и токсикол. 1960, 23, № 4, 316—321. <sup>2</sup> *Н. В. Каверина*, Фармакол. и токсикол. 1958, 21, № 1, 39—43. <sup>3</sup> *О. Эрэнке*, Acta Anal. 16. supp. 17, 1952. <sup>4</sup> *О. Эрэнке*, Nature 1955, 175, № 4445, 88. <sup>5</sup> *А. Carlsson, E. Rosengren, A Bertler et J. Nilsson* Psychotropic drugs 1957, 363—372. <sup>6</sup> *В. Р. Вудак, Н. Вейнер, Р. Б. Хаген*, J. Pharmacol. et Exp. Therap. 1960, 130, № 3, 245—250. <sup>7</sup> *Н. А. Хилларп и Б. Хекфельт*, Acta Physiol. scand. 1953, 30, 55.

БОТАНИКА

А. Л. Абрамова и И. И. Абрамов

*Lydiaea* Lazar. — новый род для флоры мхов Кавказа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Л. Тахтаджяном 15/VII 1963)

Несмотря на то, что изучение бриофлоры Армении еще далеко не завершено и появившиеся в печати сведения позволяют составить только самое общее представление о ее видовом составе, при определении сборов мхов последних лет уже выясняются некоторые интересные бриологические факты.

Тщательное исследование напочвенных образцов из окрестностей Еревана позволило нам сначала обнаружить микроскопические стебельки *Phascum cuspidatum* Hedw. с погруженными в перихециальные листья коробочками, а затем отыскать спороносящие экземпляры *Lydiaea Vlasovii* Lazar., таких же микроскопических размеров.

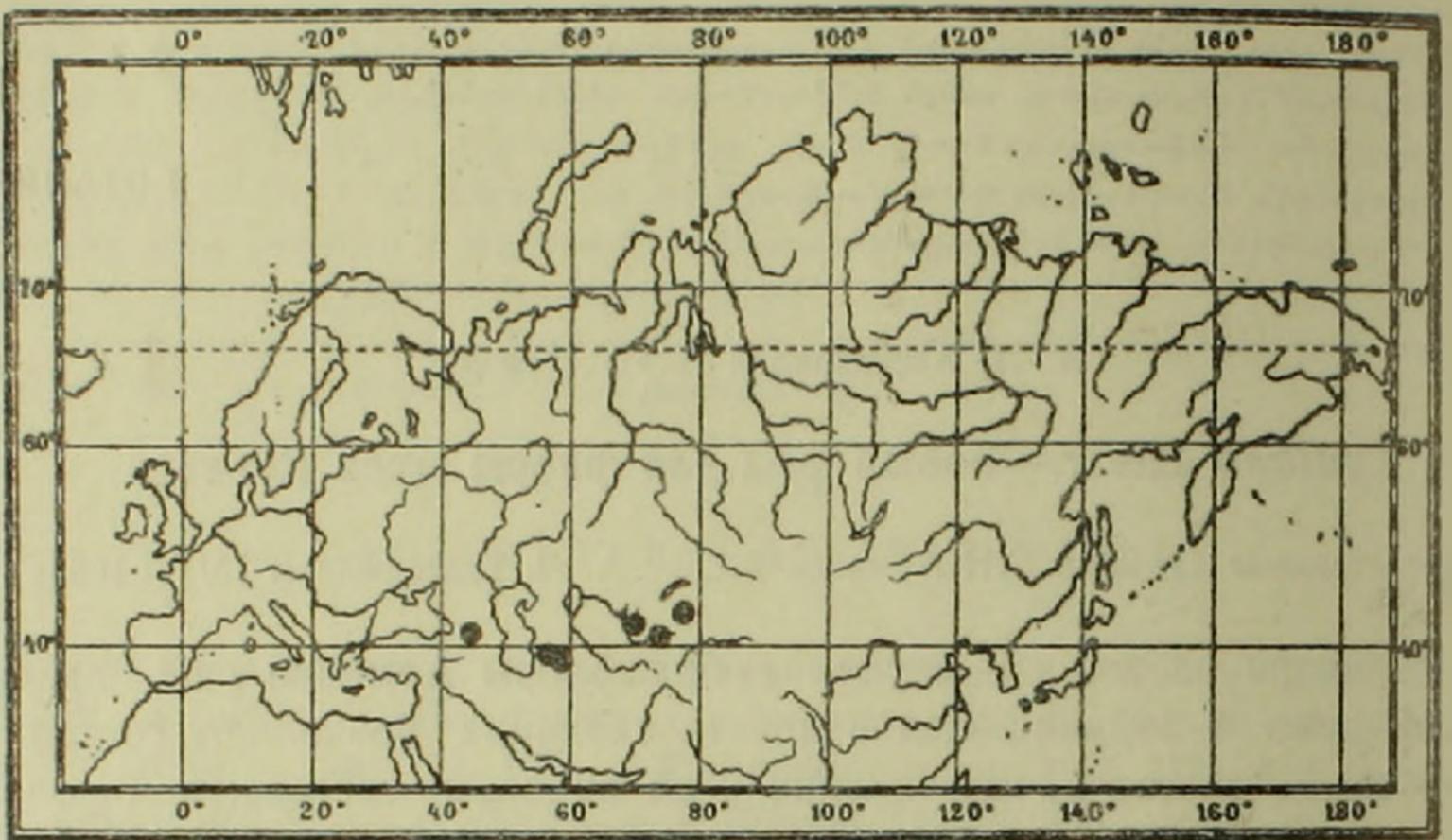
Приводим местонахождение *Lydiaea Vlasovii* Lazar., указываемой нами впервые для Кавказа по сборам из Армении.

Окрестности г. Еревана, с. Канакер Котайкского района, Ботанический сад Академии наук Армянской ССР, на обнаженной почве среди *Artemisia fragrans*, со спорогонами, 3.III 1958, вместе с *Phascum cuspidatum*, собрали А. Г. Абрамян и А. М. Барсегян.

Этот вид, описанный А. С. Лазаренко<sup>(1)</sup> еще в 1938 г. из окрестностей Ашхабада и Ташкента, первоначально был им отнесен к роду *Phascum* Hedw., среди видов которого он заметно выделялся своей мамиллозной структурой клеток листа. Много позже, а именно в 1959 г., А. С. Лазаренко<sup>(2)</sup> обосновал необходимость выделения его в монотипный род *Lydiaea* Lazar. и дополнительно сообщил также о произрастании этого вида в окрестностях г. Ферганы и Алма-Аты. Узкая среднеазиатская приуроченность всех ранее известных местонахождений послужила поводом для того, чтобы *Lydiaea* рассматривалась как родовой эндем засушливых областей Средней Азии. По словам А. С. Лазаренко<sup>(2)</sup>, этот мох, наравне с *Indusiella thianschanica*, оживляет своим морфологическим своеобразием в общем монотонную бриофлору засушливой территории Средней Азии и Казахстана.

Наше уточнение ареала заставляет изменить сложившийся взгляд на характер эндемизма *Lydiaea Vlasovii* и одновременно убедительно

свидетельствует о наличии связей бриофлоры Кавказа и Центральной Азии (фиг. 1). Как известно, Герцог (<sup>3</sup>), исходя из бриологических соображений, уже писал о центральноазиатско-понтийской флористи-



Фиг. 1.

ческой мощности, но в более широкой постановке вопроса. В рассматриваемом же случае мы имеем яркий пример конкретных ботанико-географических связей соседних аридных областей.

Ботанический институт  
им. В. Л. Комарова АН СССР

Մ. Լ. ԱՐՐԱԶԱՄՈՎԱ ԵՎ Ի. Ի. ԱՐՐԱԶԱՄՈՎ

**Մամուլի նոր ցեղ *Lydiaea* Lazar. Կովկասի Ֆլորայի համար**

Հոգվածում նկարագրվում է մամուլի նոր ցեղ Կովկասի Ֆլորայի համար, ինչպես նաև հայաստանում աճող մամուլների օրինակի հիման վրա լուսարանվում են Կովկասի և Կենտրոնական Ասիայի միջև գոյություն ունեցող բուսաաշխարհագրական կապերը:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

<sup>1</sup> А. С. Лазаренко, Журн. Инст. бот. АН УРСР, № 26--27, Київ, 1938. <sup>2</sup> А. С. Лазаренко. Ботан. матер. Отд. споров. раст. Ботан. инст. АН СССР, т. XII, М.—Л., 1959. <sup>3</sup> Th. Herzog. Geographie der Moose, Jena, 1926.

М. А. Тер-Григорян

Новые виды мучнистых червецов (*Homoptera, Coccoidea, Pseudococcidae*) из Армении

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 10/X 1963)

Настоящая статья посвящена описанию двух новых видов мучнистых червецов *Mirococcopsis avetianae* Ter-Grigorian sp. n. и *Mirococcus ashtarakensis* Ter-Grigorian sp. n., паразитирующих на корнях злаков в Армении. Типы новых видов хранятся в коллекциях Зоологического института АН СССР в Ленинграде; паратипы в коллекциях Зоологического института АН Армянской ССР.

*Mirococcopsis avetianae* Ter-Grigorian sp. n. (фиг. 1). Тело взрослой самки удлинено-овальное, желтое, от 1,5 мм до 3,4 мм длины и от 0,8 мм до 1,8 мм ширины. Усики 6—7-члениковые; самый длинный VI членик, затем III, I, II, V, IV; их средняя длина в микронах: I—55, II—45, III—57, IV—28,6, V—35, VI—78; во втором случае последний членик делится на два. Петля хоботковых щетинок достигает примерно линии между тазиками передних ног. Тазики задних ног с группой просвечивающих пор. Бедра в 170 м длины, голени—160 м, лапки—85 м; коготковые пальчики длиннее коготка с расширенной вершиной. Анальное кольцо с наружным и внутренним рядами пор; щетинки в среднем 96 м длины. Анальные дольки не выступают по бокам анального кольца; вершинная щетинка в среднем 180,8 м длины; дорзальная поверхность долек с 3 толстыми щетинками, 56—82 м длины. Многоячеистые железы единично расположены на сегментах головогруди на обеих поверхностях тела; на дорзальной поверхности они образуют по одному поперечному ряду на 1—7-м тергитах брюшка и единично встречаются по бокам 8-го тергита брюшка; на вентральной поверхности образуют по прерванному посередине поперечному ряду на 2—3-м стернитах брюшка, по узкой поперечной полосе на 4—6-м, более беспорядочно и многочисленно расположены на 7—8-м стернитах брюшка, особенно вокруг вагинальной щели. Трехячеистые железы повсеместно расположены на обеих поверхностях тела. Трубочатые железы 4—7 м длины и 2,5—4,7 м ширины, беспорядочно расположены на обеих поверхностях тела. Волоски длинные

и многочисленны, особенно в передней и задней частях вентральной поверхности, где они достигают 95  $\mu$ .

Материал: Армения — Кечутский хребет: Карахачский перевал, на корнях пырея (*Agropyrum sp.*) и костра (*Bromus tectorum L.*), 24/VI 1954. Гукасянский район: на берегу озера Арпи, на корнях овсяницы (*Festuca sp.*), 26/VI 1954, окрестности сел. Гукасян, на корнях чебреца (*Thymus sp.*) и вероники (*Veronica kurdica Bnth.*), 29/VI 1954 (тип). Базумский хребет: Пушкинский перевал, на корнях диких злаков, 18/VI 1959. М. Тер-Григорян, Р. Аракелян.

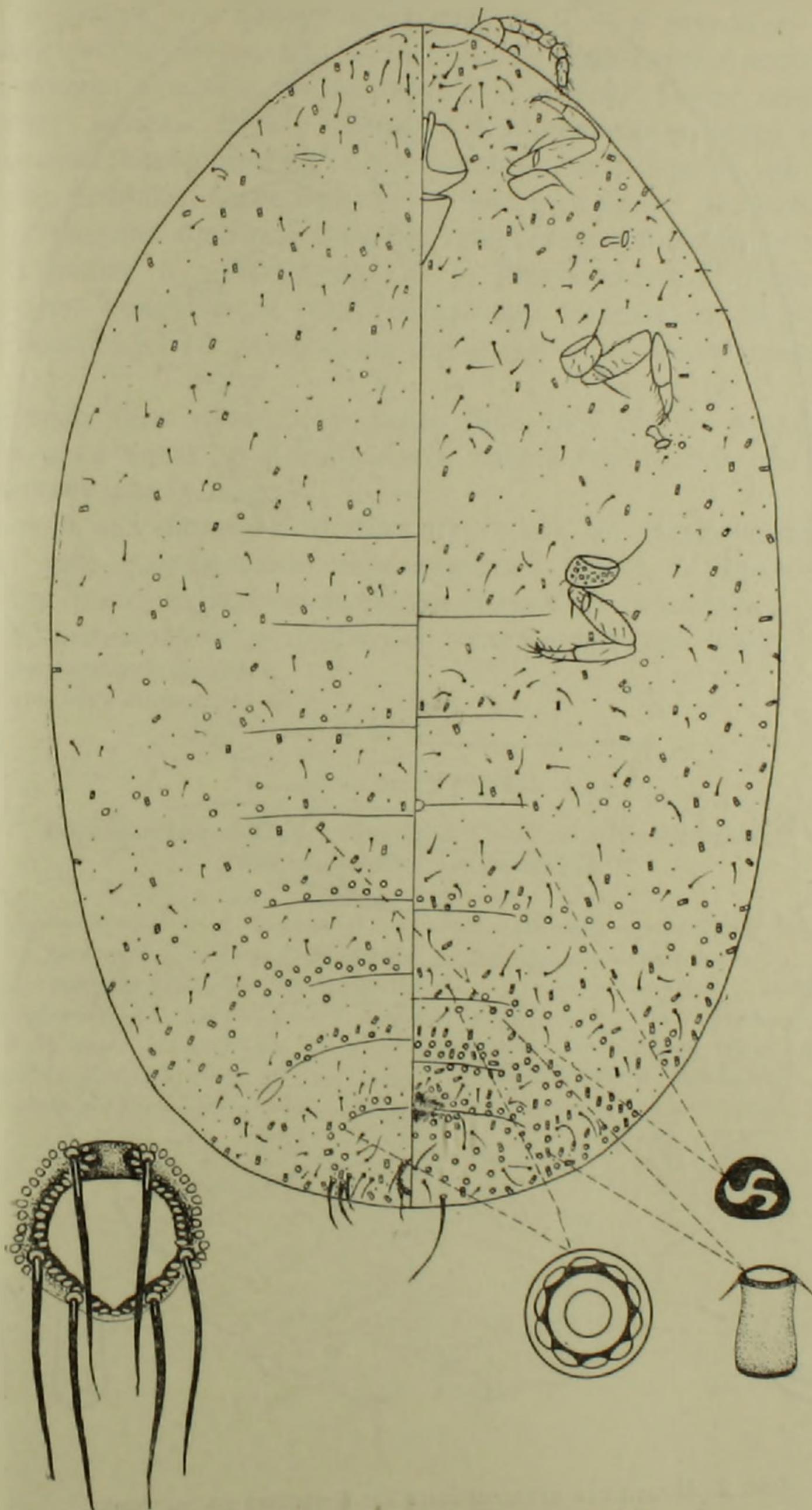
Вид распространен в субальпийской, альпийской и отчасти горно-степной зонах республики, расположенных на высоте до 2000 м над уровнем моря.

Яйцекладка и личинки 1-й стадии отмечены в июне месяце.

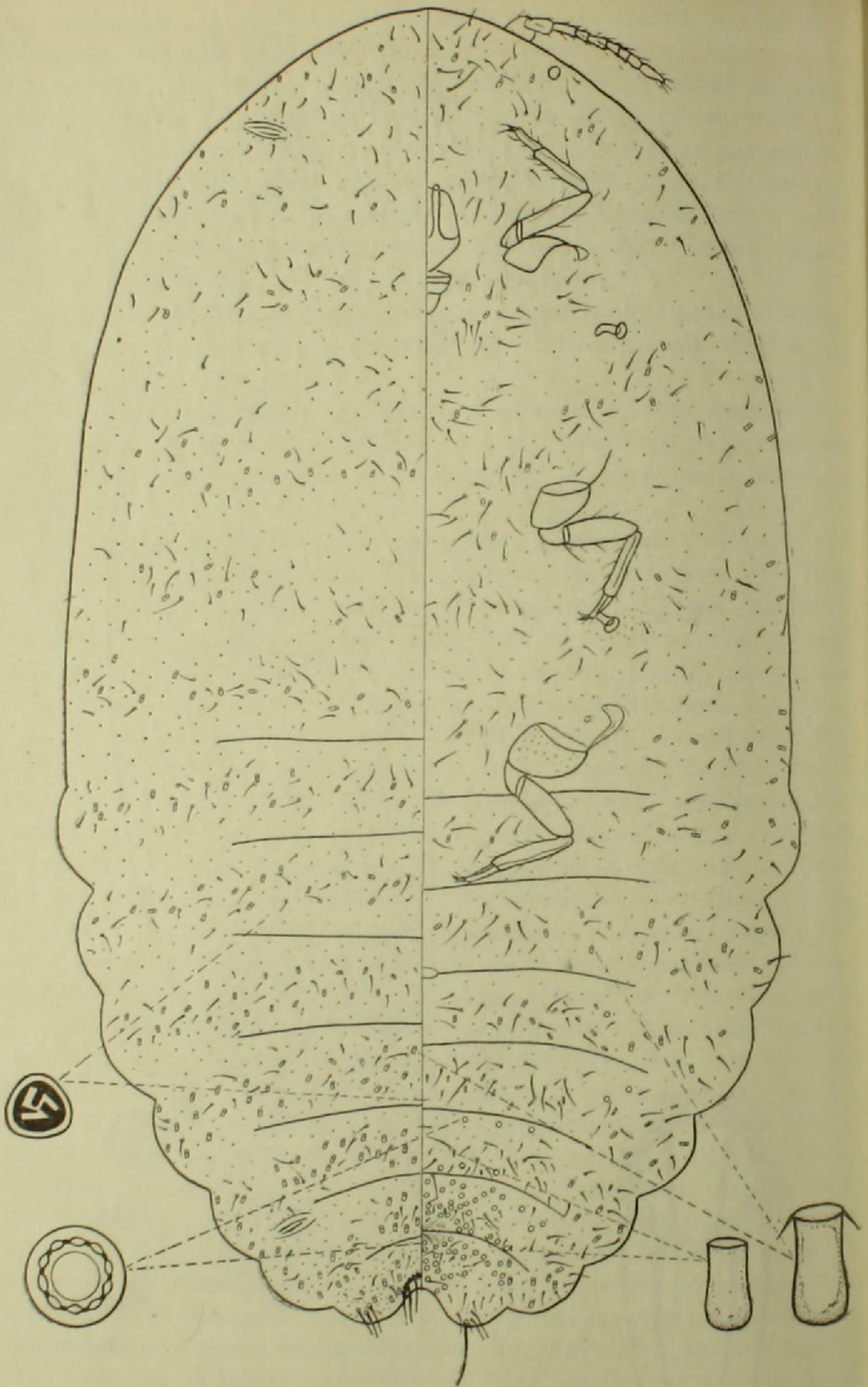
Новый вид близок к *M. stipae* Bogchs., от которого отличается формой тела, расположением многоячеистых и трубчатых желез и другими признаками.

Вид назван именем энтомолога Асмик Седраковны Аветян.

*Mirococcus ashtarakensis* Ter-Grigorian sp. n. (фиг. 2). Тело взрослой самки удлинено-овальное, розоватое, 3,7 мм длины и 1,4 мм ширины. Глаза выпуклые, возле них круглых пор нет. Усики 9-члениковые; самый длинный II членик, затем III; I и IX одинаковой длины, затем V; IV, VI, VII и VIII также одинаковой длины; их средняя длина в микронах: I—50, II—66, III—57,4, IV—40, V—46, VI—40,2, VII—40,5, VIII—40,3, IX—50. Хоботок конусовидный, 2-члениковый; петля хоботковых щетинок достигает линии между передними дыхальцами. Ноги нормально развиты, тазики задних ног с группой просвечивающих пор; бедра и голени одинаковой длины, около 190  $\mu$ , лапки значительно короче их, около 90  $\mu$ , коготок 24  $\mu$  длины, слегка изогнутый, с небольшим зубчиком; тарсальные пальчики короче коготка, с заостренной вершиной; коготковые пальчики длиннее коготка, расширены на вершине. Брюшное устье небольшое, овальное, расположено между 3 и 4-м стернитами брюшка. Анальное кольцо овальное, с наружным и внутренним рядами округлых пор и с щетинками около 48  $\mu$  длины. Анальные дольки расширенные, выступающие по бокам анального кольца, с вершинной щетинкой 152  $\mu$  длины; на месте  $S_{18}$  имеются 3 толстых волоска, около 24  $\mu$  длины. Многоячеистые железы иногда единично встречаются на 1, 4 и 5-м стернигах брюшка, образуют по одному поперечному ряду на передней и задней частях 6-го стернига брюшка, беспорядочно и многочисленно расположены на 7 и 8-м стернигах брюшка, особенно вокруг вагинальной щели; количество желез увеличивается по направлению к заднему концу брюшка. Трехячеистые железы повсеместно имеются на обеих поверхностях тела. Трубчатые железы двух размеров: более крупные, около 11  $\mu$  длины и 5  $\mu$  ширины, на дорзальной поверхности образуют поперечные полосы на всех тергитах тела; количество желез увеличивается по направлению к задним сег-



Фиг. 1. *Micrococcopsis avetianae* Ter-Grigorian sp. n., самка.



Фиг. 2. *Mirococcus ashtarakensis* Ter-Grigorian sp. n., самка.

ментам тела; на вентральной поверхности их меньше, они небольшими группами (по 2—4 железы) встречаются на сегментах головогрудки, образуют по поперечному ряду на 1—4-м стернитах брюшка, группами расположены по бокам 5—7-го стернитов брюшка; количество желез и здесь увеличивается к заднему концу тела; мелкие трубчатые железы 8—9  $\mu$  длины и 3  $\mu$  ширины, имеются только на вентральной поверхности, они единично встречаются на 3 и 4-м стернитах брюшка, беспорядочно и многочисленно расположены на 5—8-м стернитах брюшка. Волоски тела различной длины и толщины, самые длинные и толстые до 110  $\mu$ , расположены в средней части вентральной поверхности тела, остальные волоски от 24  $\mu$  до 60  $\mu$  длины беспорядочно разбросаны повсеместно на обеих поверхностях тела.

Червец был обнаружен нами 16/V 1957 г. на левобережных склонах реки Касах в Аштаракском районе, на стебле под влагалитцем листьев диких злаков.

Новый вид близок к *M. inermis* (Hall), от которого отличается формой тела, отсутствием многоячеистых желез на дорзальной поверхности тела, их расположением только на последних стернитах брюшка, расположением трубчатых желез и другими признаками.

Зоологический институт  
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ՏԵՐ-ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

**Այրափոր որդանների (Homoptera, Coccoidea, Pseudococcidae)  
Նոր տեսակներ Հայաստանից**

Հոդվածում տրվում է Հայաստանում ցորենագգիների արմատների վրա ապրող, փտության համար նոր այրափոր որդանների 2 տեսակի նկարագրությունը:

*Mirococcopsis avetianae* Ter-Grigorian sp. n. որդանը տարածված է սեսպուրիկայի լեռնատափաստանային, սուբալպյան և ալպյան գոտիներում, ծովի մակերևույթից 2000 մ բարձրության վրա, շյուղախոտի, ուռցի և բերենիկեյի արմատների վրա: *Mirococcus ashtarakensis* Ter-Grigorian sp. n. տեսակը հայտնաբերված է Աշտարակի շրջանում, Քասախ գետի ափին, վայրի ցորենագգիների ցողունի վրա, տերևապատյանների տակ:



Л. В. Арнольди

Новые виды *Otiorrhynchus* Germ. (Coleoptera, Curculionidae)  
 из Закавказья и Сев. Ирана

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 10/XI 1963)

В настоящей статье рассмотрены представители только одной группы видов рода *Otiorrhynchus* Germ., выделенные Э. Рейттером в секцию *Hanibotus* Rtt. Секция эта эндемична для иранской провинции, точнее, для ее северной части. Виды, относящиеся к секции *Hanibotus* Rtt., в настоящее время известны из Закавказья и с Эльбурса на восток до г. Демавенд. Они населяют главным образом субальпийскую зону и верхнюю часть пояса нагорных ксерофитов. Все виды встречаются редко и представлены в коллекциях немногими экземплярами.

Секция *Hanibotus* Rtt. характеризуется короткой головотрубкой, расширенной почти от основания, с сильно приподнятой, б. ч. явно отделенной от головной капсулы поперечным вдавлением спинкой. Глаза обычно верхние или почти верхние, т. е. повернуты к фронтальной поверхности головы. Переднеспинка сильно вздутая в бока, всегда сверху пунктированная. Бороздки надкрылий почти не углубленные.

Рейттеру было известно 6 видов, принадлежащих к этой секции. В настоящей работе описывается еще 3 вида, один из которых обитает в Армении, один в Нахичеванской АССР и один в сев. Иране.

*O. (Hanibotus) zajcevi* L. Arnoldi, sp. n. (фиг. 1). Черный, блестящий. Головотрубка на основании менее чем в 2 раза толще ширины лба между глазами. Спинка ее с параллельными сторонами, слабо или умеренно приподнятая и слабо скошенная на вершине.

Переднеспинка умеренно вздутая в бока, с короткой, слабо перетянутой передней частью, не или едва короче своей наибольшей ширины (отношение длина: ширина равно 1:1—1:1,03), на основании нерезко окаймлена. Сверху она в мелкой и разбросанной пунктировке, на боках в мелких зернышках.

Надкрылья почти правильно яйцевидные, с равномерно выпуклыми боками и наибольшей шириной впереди середины; точечные бороздки неглубокие, 1-я наиболее явственная; промежутки в легких

поперечных морщинках и на диске с рашпилевидными точками, сзади с зернышками.

Бока переднеспинки в полуприжатых волосках, надкрылья в торчащих бурых волосках.

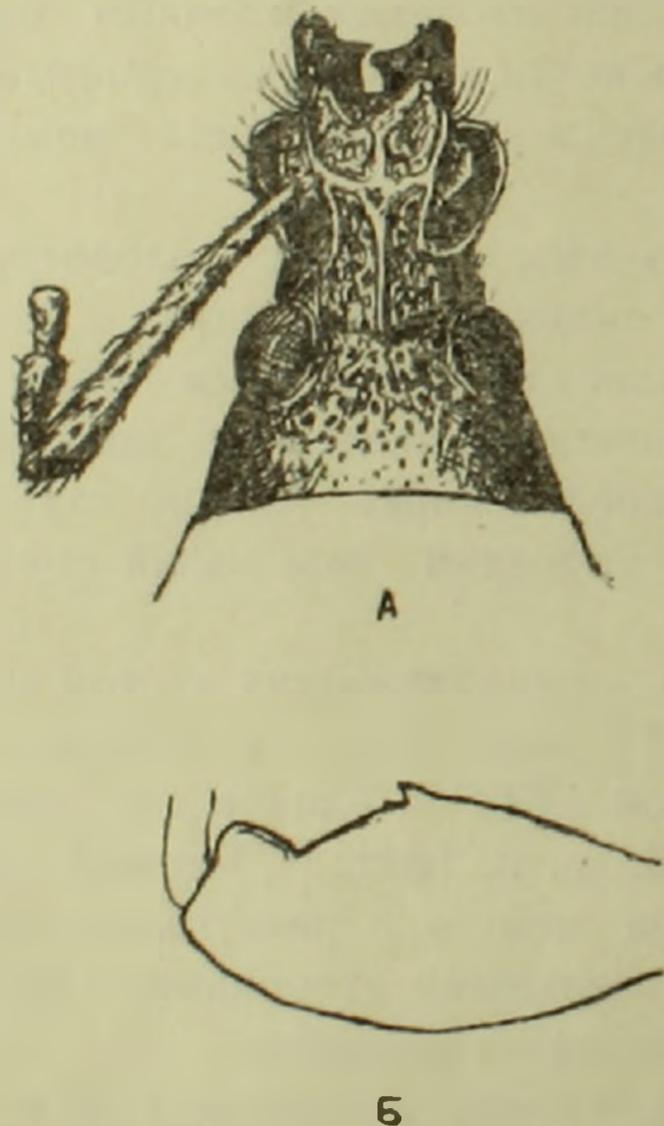
Передние бедра с явственным, двойным, маленьким зубцом, средние и задние невооруженные. Передние голени тонкие, с отчетливым расширением наружного вершинного угла и с 7—8 небольшими шипиками по внутреннему краю. Рукоять усиков слабо изогнутая, умеренно толстая, жгутик короткий, его 1-й членик немного короче 2-го, 4—7 слабо поперечные или округлые, булава тонкая, веретеновидная.

Длина 5,5—6,5 мм (здесь и далее размер дается от заднего конца тела до переднего края глаз, т. е. без головотрубки).

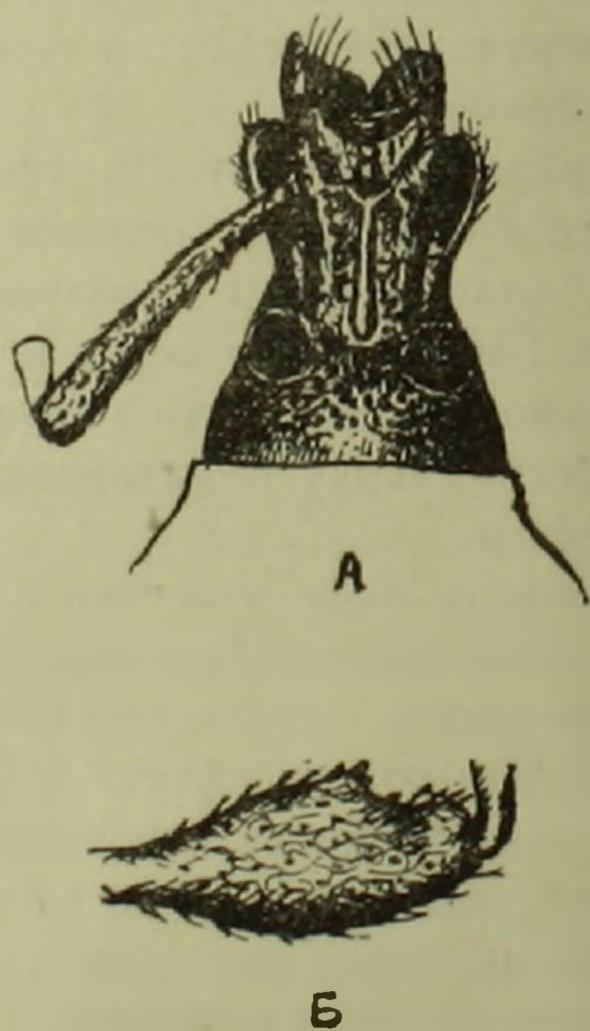
Распространение: горы юго-востока Армянской ССР.

В нашем материале имеется 4 экз. этого вида: 2 с этикеткой Transcaucasus (типы Г. Суворова) и 2 с этикеткой „Эривань, гор. Дарачичаг“. И те и другие без дат и фамилий сборщика.

Вид был намечен, но не описан Г. К. Суворовым. По скульптуре переднеспинки и слабо, но явственно окаймленному основанию ее стоит несколько особняком среди остальных видов секции.



Фиг. 1. *Otiorrhynchus zajcevi* L. Arnoldi sp. nov. А — голова самца; Б — переднее бедро самки.



Фиг. 2. *Otiorrhynchus sunicensis* L. Arnoldi sp. nov. А — голова; Б — переднее бедро.

*O. (Hap.) sunicensis* L. Arnoldi, sp. n. (фиг. 2). Смоляно-черный или буровато-черный, слабо или умеренно блестящий.

Голова с конусовидными висками и толстой, короткой головотрубкой, почти от основания явственно расширенной кпереди. Глаза

почти полностью видны сверху. Они небольшие, умеренно выпуклые, б. м. округлые. Ниже глаз сверху заметны несколько вздутые бока головной капсулы. Лоб несколько уже спинки головотрубки между основаниями усиков, между глазами с поперечным вдавлением, лежит с верхней стороной головотрубки не в одной плоскости. Головотрубка с довольно длинными птеригиями, самое широкое ее место лежит близ вершины птеригий; оно примерно равно длине головотрубки от глаз до передней вырезки. Спинка головотрубки сильно приподнятая с б. м. параллельными краями, на уровне прикрепления усиков резко расширена, а затем снова почти параллельна. Срединный киль довольно резкий, спереди раздвоенный под очень тупым углом; боковые кили в верхней половине головотрубки морщинистые и прерванные грубыми точками, впереди более резкие и цельные. Остатки кукольных мандибулярных придатков выступают вперед острым или округленным углом, иногда довольно длинные. Скульптура на голове грубая, точки на темени округлые, более мелкие, на лбу продолговатые, переходящие иногда в короткие продольные канавки, густые и грубые. Головотрубка в густой, почти сливающейся, продольно-морщинистой пунктировке. Усики с почти прямой или слабо изогнутой, постепенно расширенной к вершине рукоятью, первые два членика почти равной длины, довольно толстые, третий равной длины и ширины, остальные слегка поперечные. Булава заостренно-веретеновидная, маленькая.

Переднеспинка с сильно выпуклыми, закругленными боками, явственно перетянутая перед вершиной; последняя в 1,3 раза уже основания. Наибольшая ширина на середине или едва впереди от нее. Диск в очень густых и крупных пупиллированных точках, промежутки между которыми имеют вид узких перемычек. Вдоль срединной линии очень слабо приподнятое гладкое место спереди и сзади укороченное. На боках переднеспинки точки переходят в довольно высокие зернышки. Основание не окаймленное.

Надкрылья продолговато-яйцевидные, на заднем скате почти отвесно спускающиеся к вершинам. Точечные бороздки едва вдавленные, их точки не крупнее точек переднеспинки, промежутки между точками в бороздках больше половины диаметра точки. На вершинном скате бороздки явно углублены, но точки в них сглаживаются. Промежутки бороздск надкрылий почти совершенно плоские, сзади более узкие и высокие, на заднем скате имеются 1—2-рядные зернышки. Точки на промежутках до вершинного ската неправильно 2—3-рядные, в начале его рашпилевидные. Надкрылья всюду в довольно длинных (более половины ширины промежутка) торчащих буроватых волосках.

Передние ноги немного больше остальных, бедра сильно булаво-видные, снизу с довольно большим двувершинным зубцом и, кроме того, обычно с добавочным зубчиком кнаружи, а иногда и с зернышковидными зубчиками сзади и спереди главного. Голени снаружи прямые, без явственных зернышек по наружному краю, их наружный вер-

шинный угол очень слабо расширен. Совнутри они несут 6—7 острых зубцов. Средние бедра с очень маленьким, но острым зубцом, задние с едва заметным зубчиком.

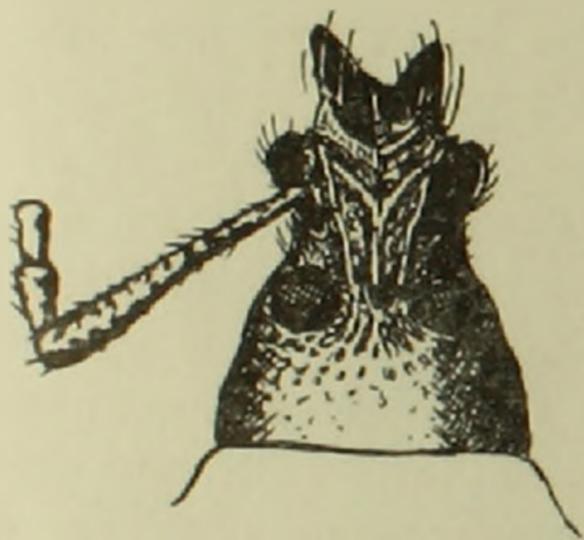
Заднегрудь в слегка поперечных зернышках и поперечных, редких морщинках, 1-й (видимый) стернит брюшка в резких поперечных складочках и отдельных точках близ основания и вдоль заднего края, 2-й в рашпилевидных негустых, остальные в простых точках. Заднегрудь и брюшко в торчащих волосках, ноги также.

Длина 9—10 мм, максимальная ширина 3,8—4 мм.

Описан по 4 экз. (все ♀♀), собранным в горах над Ордубадам на высоте около 2100 м 25/IV 1955 г. (С. М. Хнзорян и А. К. Загуляев).

Вид этот напоминает *O. (Han.) subeques* Rtt., но безусловно является самостоятельным, наиболее крупным представителем секции.

*O. (Han.) iranicus* L. Arnoldi, sp. n. (фиг. 3). Буро-красный или черно-бурый, блестящий. Спинка головотрубки почти параллельно-сторонняя, слабо приподнятая, передний конец ее не скошен, а лишь



Фиг. 3. *Otiorrhynchus iranicus* L. Arnoldi, sp. nov. Голова.

уплощен. Переднеспинка немного длиннее своей ширины. Надкрылья без явственной рашпилевидной скульптуры. Длина 5,8—6,5 мм. В остальном сходен с *O. (H.) brevinasus* Rtt.

Распространение: хребет Эльбурс, субальпийская зона.

Вид очень близок к *O. (H.) brevinasus* Rtt., но отличается значительно меньшими размерами, более слабо выдающейся спинкой головотрубки, более длинной и узкой переднеспинкой и другими отличиями. Имеющийся в нашем материале узкий и длинный ♂, по форме напоминающий виды секции *Zariedus* Rtt., сходен с предполагаемым ♂ *O. brevinasus*.

Вид описан по 3 экз., собранным Глазуновым 29/V—30/VI 1894 на сев. склонах Демавенда и к западу от него, в верховьях р. Лар (урочище Юрде—Ханлархан).

Типы всех трех описанных видов хранятся в коллекции Зоологического института Академии наук СССР в Ленинграде.

Для удобства разграничения видов секции *Hanibotus* Rtt., ниже дается табличка для всех известных видов.

1(4). Основание переднеспинки явственно линейобразно окаймлено, причем кант узкий и приподнятый. Пунктировка переднеспинки мелкая, рассеянная.

2(3). Надкрылья с тонкими неглубокими точечными бороздками, спереди иногда только с рядами мелких точек. Основание переднеспинки незначительно шире вершины (в 1,16—1,18 раза), наибольшая ее ширина почти на середине. 1-й членик жгути-

- ка усиков немного, иногда едва длиннее 2-го. Дл. 5—6,5 мм  
Южн. Закавказье, сев. Иран . . . . . *O. angustifrons* Strl.
- 3(2). Надкрылья с сильными точечными бороздками, точки в них крупные, круглые. Основание переднеспинки заметно шире вершины (в 1,25—1,3 раза), наибольшая ее ширина в задней трети. 1-й чл. жгутика усика заметно длиннее 2-го. Длина 6—7 мм. Долина Аракса . . . . . *O. sulcibasis* Rtt.
- 4(1). Основание переднеспинки не окаймленное или неявственно-окаймленное.
- 5(16). Переднеспинка в грубых и густых точках.
- 6(13). Надкрылья в более или менее длинных торчащих волосках.
- 7(10). Передние голени на наружном краю без явственных зернышек или зубчиков.
- 8(9). Глаза большие, полубоковые, уплощенные. Лоб между глазами несколько шире спинки головотрубки между усиками. Передние бедра с тонким коротким зубчиком, впереди которого часто заметны следы второго. Мельче: 7—8,5 мм. Склоны гор к долине Аракса, Гегамский хр. . . . . *O. eques* Rtt.
- 9(8). Глаза небольшие, умеренно выпуклые, верхние. Лоб между глазами несколько уже спинки головотрубки между усиками. Передние бедра сильно булавовидные, с довольно большим двувершинным зубцом и часто с зубчиком впереди от него. Крупнее: 9—10 мм. Горы над Ордубадам . . . . .  
. . . . . *O. sunicensis* L. Arn. sp. n.
- 10(7). Передние голени на наружном крае с явственными зернышками или мелкими зубчиками.
- 11(12). Надкрылья без явственной рашпелевидной скульптуры на диске. Спинка головотрубки параллельносторонняя, слабо приподнятая, б. м. уплощенная. Переднеспинка немного длиннее своей ширины. Бурый или черно-бурый. Длина 5,8—6,5 мм. Эльбурс . . . . . *O. iranicus* L. Arn. sp. n.
- 12(11). Надкрылья с явственной рашпелевидной скульптурой на диске. Спинка головотрубки узкая, б. ч. слабо, но явственно суженная назад, всегда сильно выдающаяся, приподнятая. Черный, только усики и лапки буроватые. Длина 7,5—8,0 мм. Сев. Иран . . . . . *O. brevinasus* Rtt.
- 13(6). Надкрылья с неявственными или очень короткими волосками, заметными только на боках и сзади.
- 14(15). Спинка головотрубки слегка сходящаяся назад, с острым килем посередине, явственно отделена от лба вдавлением. Надкрылья с короткими, но явственными волосками. Только пришовной ряд точек углублен в бороздку, сзади все бороздки неясные. Промежутки спереди с такой же пунктировкой, как и главные ряды. Длина 6 мм. Массив Арагаца . . . . .  
. . . . . *O. subeques* Rtt.
- 15(14). Спинка головотрубки параллельносторонняя, слабо отделена

от головы. Надкрылья сверху почти голые, только на боках и сзади в редких неясных волосках. Точечные бороздки спереди тонкие, но явственные. Промежутки спереди очень тонко точечные, сзади в мелких зернышках. Длина 7—8 мм. Турция . . . . . *O. semigranulatus* Strl.

16(5). Переднеспинка в сравнительно мелких, разбросанных точках. Спинка головотрубки параллельносторонняя, с явственным, на основании более широким и сглаженным килем. Надкрылья с тонкими точечными бороздками, на промежутках в мелких рашпилевидных точках, обведенных тонкими углубленными линиями, в тонких волосках. Черный, блестящий. Армения. Длина 5,5—6,5 мм . . . . . *O. zajcevi* L. Arn. sp. n.

Зоологический институт  
Академии наук СССР

Լ. Վ. ԱՌՆՈՒԴԻ

*Otiorrhynchus* Germ. սեռի նոր սեսակները Անդրկովկասից և  
Հյուսիսային Իրանից

Հոդվածում նկարագրված են երեք տեսակ ևրկարակնճիթներ, որոնք պատկանում են *Otiorrhynchus* Germ. սեռին *Hanibotus* Reitt. սեկցիային, այլ թվում՝

1. *O. zajcevi* sp. nov. նկարագրված է՝ Ծաղկաձորից և «Անդրկովկասից» երկուական անհատներով:

2. *O. sunicensis* sp. nov. նկարագրված է՝ Օրդուբադից վերև մոտ 2100 մ. բարձրությունից հավաքած 4 էգ անհատներով:

1. *O. iranicus* sp. nov. նկարագրված է՝ Էլբուրսի (Իրան) ենթալպյան զոնայից: Հոդվածի վերջում տրված է *Hanibotus* Rtt. սեկցիայի 9 տեսակների որոշիչ աղյուսակը:

