

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXXVIII, № 2

1964

խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Լ. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Հ.
ՀԱՍԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների դոկտոր (պատ. խմբագրի տե-
ղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ րդ-
րակից-անդամ, Ս. Հ. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ
րդրակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Ո. Մ.
ՍԱՊՈՆԶՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ րդրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
ЛФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, чл.-корресп.
АН АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН, доктор биологических наук
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

62

Մաքեմաթիկա

- Ս. Գ. Հովսեփյան — Բազմանդամային գործակիցներով որոշ շիֆերենցիալ հա-
վասարումների համար Կոշու խնդրի մոտավոր լուծման մասին 63
- Ռ. Վ. Համբարձումյան — Ազդանշանների զտումը իմպուլսների հոսքից . . . 71

Կիրառական մաքեմաթիկա

- Ռ. Ս. Մինասյան — Բաղադրյալ ուղղանկյան զուգահեռանիստում ջերմության
կայունացած տարածման մի խնդրի մասին 77

Մեխանիկա

- Ս. Ա. Համբարձումյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Ս. Մ. Դուր-
գարյան — Փոփոխական ջերմային դաշտում գտնվող փոքր կորույթյուն ունեցող օր-
թոտրոպ թաղանթների տատանումների մասին 87

Գեոմեխանիկա

- Գ. Ի. Տեր-Ստեփանյան — Շերտերի գլուխների կեռածույան մեխանիզմի մասին 93

Ֆիզիկա

- Խ. Պ. Բաբայան, Ն. Լ. Դրիզորով, Է. Ա. Մամիջանյան և Վ. Յ. Շեստոպյուրով —
Բարձր էներգիայով սժտված նուկլիոնների կլանման վազքի որոշումը մթնոլորտում 101

Տեղական ֆիզիկա

- Ս. Լ. Տեր-Միքայելյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ — Իմպուլսային
լազերի ինտենսիվության հաշվարկը 105

Ինժեներական սելամոլոգիա

- Ն. Կ. Կարապետյան — Հայկական լեռնաշխարհի և Փոքր Կովկասի երկրաշար-
ժերի էներգետիկ բնութագրումը 111

Կիրառական ագրոօդերևութաբանություն

- Հ. Հ. Փախչանյան — Դաշտերից կատարվող գոլորշիացման որոշման մեթոդիկա 119

Ֆիզիսոլոգիա

- Հ. Գ. Բակլևազյան և Բ. Ա. Հարությունյան — Պարանոցային սիմպատիկ և
թափառող ներվերի ազդեցությունը կեղևի ուղղակի պատասխանների վրա 123

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- С. Г. Овсепян* — О приближенном решении задачи Коши для некоторых дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами 65
- Р. В. Амбарцумян* — Об обнаружении сигналов в потоке импульсов 71

Прикладная математика

- Р. С. Минасян* — Об одной задаче установившегося распределения тепла в составном прямоугольном параллелепипеде 77

Механика

- С. А. Амбарцумян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, и *С. М. Дургарян* — О колебаниях ортотропной полой оболочке, находящейся в переменном температурном поле 87

Геомеханика

- Г. И. Тер-Степанян* — О механизме образования загиба голов пластов 93

Физика

- Х. П. Бабаян, Н. Л. Григоров, Э. А. Мамиджаниян и В. Я. Шестоперов* — Высотный ход нуклонов высокой энергии в атмосфере 101

Теоретическая физика

- М. Л. Тер-Микаелян*, чл.-корр. АН Армянской ССР — Расчет интенсивности импульсного лазера 105

Инженерная сейсмология

- Н. К. Карапетян* — Энергетическая характеристика землетрясений Армянского нагорья и Малого Кавказа 111

Прикладная агрометеорология

- Г. Г. Пахчаниян* — Методика определения испарения с полей 119

Физиология

- О. Г. Баклаваджян и Б. А. Арутюнян* — Влияние шейного симпатического и блуждающего нервов на прямые ответы коры 125

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О приближенном решении задачи Коши для некоторых
дифференциальных уравнений с полиномиальными
коэффициентами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/XI 1963)

В этой заметке изучается вопрос о построении приближенного решения корректно поставленных задач Коши для некоторых систем линейных дифференциальных уравнений, причем приближенные решения строятся так, что их сходимость к точному решению становится следствием корректности задачи.

Рассмотрим уравнение

$$M(t)u - L(t, x)u = f(t, x) \quad (1)$$

при начальных условиях:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x), \quad (2)$$

где

$$M(t) = \sum_{k=0}^m a_k(t) \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad a_m(t) \neq 0,$$

$$L(t, x) = \sum_{k=1}^s \sum_{i_0+|i|=k} b_{i_0, i}(t, x) \frac{\partial^k}{\partial t^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}},$$

$$i_0 < m, \quad b_{i_0, i}(t, x) = \sum_{k=1}^{s_{i_0, i}} b_k(t) q_k^{(i)}(x).$$

Теорема. Пусть $f(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i(t) p_i(x)$, $a_k(t)$, $b_k(t)$, $c_i(t)$

непрерывные функции, $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$, $p_i(x)$ и $q_k^{(i)}(x)$ полиномы, причем $q_k^{(i)}(x)$ степени не выше $|i| - 1$. Тогда решение задачи (1), (2) можно свести к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $M(t)v(t) = h(t)$.



В самом деле, пусть $v_i(t)$ решение следующей задачи Коши

$$M(t)v(t) = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } k \neq i \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (4)$$

Составим функцию

$$v(t, x) = \sum_{i=0}^{m-1} v_i(t) \varphi_i(x),$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (2).

Пусть A оператор, который сопоставляет каждой непрерывной функции $h(t)$ решение $u(t)$ следующей задачи Коши

$$M(t)u(t) = h(t),$$

$$\left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Составим функцию

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^N A c_i(t) p_i(x).$$

Легко видеть, что функция $u_0(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$Mu_0(t, x) = f(t, x) \quad (5)$$

и начальным условиям (2). Легко видеть далее, что $L(t, x)u_0(t, x)$ имеет вид

$$L(t, x)u_0(t, x) = \sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)}(t) p_i^{(1)}(x),$$

где $c_i^{(1)}(t)$ непрерывные функции от t .

Рассмотрим теперь функцию

$$u_1(t, x) = \sum_{i=1}^{N_1} A c_i^{(1)}(t) p_i^{(1)}(x) = AL(t, x)u_0(t, x),$$

которая удовлетворяет уравнению

$$M(t)u_1(t, x) = L(t, x)u_0(t, x)$$

и нулевым начальным условиям.

Пусть $L(t, x)u_1(t, x) = \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)}(t) p_i^{(2)}(x)$ и пусть l максимум степеней полиномов $p_i^{(1)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N_1$), тогда $p_i^{(2)}(x)$ будут полиномами степени не выше $l-1$.

Положим по определению

$$u_k(t, x) = AL(t, x)u_{k-1}(t, x),$$

тогда будем иметь

$$L(t, x) u_k(t, x) = \sum_{l=1}^{N_{k+1}} c_l^{(k+1)}(t) p_l^{(k+1)}(x).$$

Легко видеть по индукции, что $c_l^{(k+1)}(t)$ непрерывные функции, а $p_l^{(k+1)}(x)$ полиномы степени не выше $l - k$, кроме того, $u_k(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$M(t) u_k(t, x) = L(t, x) u_{k-1}(t, x) \quad (6)$$

и нулевым начальным условиям.

Учитывая (5) и (6) легко показать, что функция

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{l+1} u_k(t, x)$$

является решением задачи (1), (2).

В самом деле,

$$Mu = \sum_{k=0}^{l+1} Mu_k = Mu_0 + \sum_{k=1}^{l+1} Mu_k = f(t, x) + \sum_{k=1}^{l+1} Lu_{k-1} = f(t, x) + \sum_{k=0}^l Lu_k,$$

$$Lu = \sum_{k=0}^{l+1} Lu_k = \sum_{k=0}^l Lu_k,$$

поскольку $Lu_{l+1} = 0$.

$u(t, x)$ удовлетворяет также и начальным условиям, поскольку $u_0(t, x)$ удовлетворяет этим условиям, а остальные $u_k(t, x)$ удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Таким образом, если нам известна требуемая точность и характер корректности данной задачи Коши, то аппроксимируя правые части и начальные условия полиномами, мы можем построить иско-мое приближенное решение путем решения задачи Коши только для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения.

Например, для гиперболических уравнений второго порядка

$$L_1 u = u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u_t + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au = f$$

характер корректности задачи Коши можно получить из хорошо известного энергетического неравенства (см., например, (1))

$$\int_{Q_t} (u^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt \leq c(t) \left[\int_{\dot{Q}_t} (L_1 u)^2 dx dt + \int_{\Omega_0} (u^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \right]$$

справедливое для любой функции $u \in W_2^2(Q_t)$, где Q_t — усеченный конус с гладкой пространственно ориентированной боковой поверхностью, нижнее основание Ω_0 которого лежит в плоскости $t = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Требование непрерывности функций от t , входящих в уравнение (1), достаточно для решений соответствующих за-

дач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и построения функций $u_k(t, x)$ с вышеуказанными свойствами, однако это требование непрерывности не является необходимым для применимости теоремы.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (7)$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi_0(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

Известно существование и единственность решения этой задачи (2).

Обозначим через ν степень полинома $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$. Легко получить, что $v_0(t) = 1$, $v_1(t)$ можно взять равным нулю, поскольку она умножается на $\varphi_1(x) = 0$,

$$Ac_k^{(k)}(t) = \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2}, \quad u_k(t, x) = \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2} \Delta^k \varphi_0(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$u_0(t, x) = \varphi_0(x)$. Следовательно, решением этой задачи будет функция

$$u(t, x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2} \Delta^k \varphi_0(x),$$

где τ — целое число больше $\frac{\nu}{2}$.

Замечание 2. Если все члены оператора $L(t, x)$ содержат хотя бы одно дифференцирование по некоторому x_r , т. е. если $i_r \geq 1$, то достаточно потребовать чтобы $q_k^{(i)}(x)$ были полиномами от x , степени не выше $i_r - 1$ с достаточно гладкими коэффициентами, зависящими от остальных переменных. В этом случае такое расширение условий относится также к правым частям и начальным функциям.

Замечание 3. Этим же методом, при аналогичных ограничениях можно решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(t) \vec{u} - \sum_{k=1}^{\tau} \sum_{|i|+|j|=k} B_{i,j}(t, x) \frac{\partial^k \vec{u}}{\partial t^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \vec{\Phi}(t, x),$$

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x).$$

**Քաղմանդամային գործակիցներով որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների
համար կոշու խնդրի մոտավոր լուծման մասին**

Աշխատության մեջ ղիտարկվում է բաղմանդամային գործակիցներով որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների համար կոշուկա ղրված կոշու խնդրի մոտավոր լուծման հարցը: Մոտավոր լուծումները կառուցվում են աշխատ, որ նրանց ղուղամիտությունը ղառնում է խնդրի կոշուկության հետևանք:

(1), (2) կոշու խնդրի համար աղացուցվում է հետևյալ թևորեմը:

$$\text{Թևորեմ — Եթև} \quad f(t, x) = \sum_{l=1}^N c_l(t) p_l(x), \quad a_k(t), b_k(t) \text{ և } c_l(t) \quad \text{ֆուկ-}$$

ցիաներն աճընդհատ են, $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), p_l(x) \text{ և } q_k^{(i)}(x)$ -երը բաղմանղամներ են, ընղ որում $Q_k^{(i)}(x)$ -երը $|i| = 1$ -իղ ոշ բարձր առաիճանի, աղա (1), (2) կոշու խնդրի լուծումը կարելի է բերել հետևյալ սղորական դիֆերենցիալ հավասարման $M(t)v(t) = h(t)$ համար կոշու խնդրի լուծմանը:

Այն ղեպքում, երբ (1), (2) կոշու խնղիրը ղրված է կոշուկա և մեղ հայտնի է կոշուկության ընույթը, աղա մոտարկելղղ աջ մասը և սկղրնական սղյմանները բաղմանղամներղղ, կարող ենք կառուցել որոնելի մոտավոր լուծումը տղած ճշտությունը, լուծելղղ միայն կոշու խնղրի համաղղատաղղալան սղորական դիֆերենցիալ հավասարման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ О. А. Ладыженская, ДАН СССР, 102, № 1 (1955). ² Ф. Т. Барановский, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 6, 19 (1960).

Р. В. Амбарцумян

Об обнаружении сигналов в потоке импульсов

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 6/1 1964)

§ 1. *Постановка задачи и некоторые предварительные замечания.* Пусть стационарный поток импульсов Π является суммой (наложением) двух независимо протекающих составляющих потоков импульсов S и N .

$$\Pi = S + N.$$

Импульсы, принадлежащие потоку S , будем условно называть сигналами, а импульсы, принадлежащие потоку N , — шумами.

Часто встречается следующая ситуация: наблюдателю известны моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$ появления всех импульсов суммарного потока Π за интервал наблюдения $(0, t)$, но ему неизвестно, какому именно из составляющих потоков — S или N — принадлежит каждый из этих импульсов.

Возникает задача принятия решения: используя знание статистических характеристик потоков S и N и результаты наблюдения $t_1, t_2, \dots, t_n$, отнести каждый из наблюденных импульсов к сигналам или к шумам. Принятие конкретного решения очевидным образом эквивалентно выбору некоторого элемента $\bar{\delta}$ в пространстве Δ всех двоичных последовательностей $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \bar{\delta}$. Между тем, данное наблюдение $t_1, \dots, t_n$ порождает некоторую вероятностную меру $P(\bar{\delta})$ в пространстве Δ , которая отвечает различным возможностям действительного расположения сигналов и шумов при наблюдении.

Используя подход к данному вопросу в духе теории игр, будем предполагать заданными две цены a и b , выплачиваемые за ошибки двух родов, которые могут появиться после принятия решения.

Функция

$$\sum_{\bar{\delta} \in \Delta} \rho(\bar{\delta}', \bar{\delta}) P(\bar{\delta}), \quad \bar{\delta}' \in \Delta, \quad (1.1)$$

где

$$\rho(\bar{\delta}, \bar{\delta}') = \sum_{i=1}^n \xi_i; \quad \xi_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta'_i = \delta_i \\ a, & \text{если } \delta'_i = 1, \delta_i = 0 \\ b, & \text{если } \delta'_i = 0, \delta_i = 1 \end{cases}$$

представляет собой средний суммарный убыток от принятия решения $\bar{\delta}'$.

Теорема 1. Пусть

$$p_i = \sum_{\bar{\delta}_i=1} P(\bar{\delta}).$$

Минимум функции (1.1) достигается на векторе $\bar{\delta}^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_n^*)$, где

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i > \frac{a}{a+b} \\ 0, & \text{если } p_i < \frac{a}{a+b} \end{cases}.$$

Доказательство. Воспользовавшись свойством математического ожидания M , получаем

$$\sum_{\bar{\delta} \in \Delta} p(\bar{\delta}', \bar{\delta}) P(\bar{\delta}) = M p(\bar{\delta}', \bar{\delta}) = \sum_{i=1}^n M \xi_i.$$

Так как p_i имеет смысл вероятности того, что $\xi_i = 1$, то выбор $\bar{\delta}^*$ способом, указанным в условии теоремы, минимизирует каждое из слагаемых $M \xi_i$. Это доказывает теорему.

Таким образом, для принятия оптимального решения оказывается существенным лишь знание вектора вероятностей $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

В последующих пунктах излагается метод его нахождения.

§ 2. Одно характеристическое свойство вектора вероятностей $\bar{p}$. Во избежание некоторых легко обходимых трудностей, значительно обременяющих, однако, изложение, будем предполагать далее, что $P(\bar{\delta})$ отличны от нуля для всех $\bar{\delta} \in \Delta$.

Пусть из множества натуральных чисел, меньших $n+1$, выбраны два непересекающихся подмножества

$$\begin{aligned} I &= \{i_1, \dots, i_r\}, \quad 0 \leq r \leq n \\ J &= \{j_1, \dots, j_s\}, \quad 0 \leq s \leq n-r \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пару $(I, J) = \varepsilon$ будем называть индексом ε .

Каждому индексу ε сопоставим подмножество Δ_ε элементов пространства Δ

$$\Delta_\varepsilon = \{\bar{\delta}; \delta_m = 1, \text{ если } m \in I, \text{ и } \delta_m = 0, \text{ если } m \in J\},$$

Пусть

$$p_\varepsilon = \sum_{\bar{\delta} \in \Delta_\varepsilon} P(\bar{\delta}).$$

Далее, каждому индексу ε сопоставим n переменных $x_1^1, \dots, x_1^n$.

Пусть $\bar{x}_\varepsilon = (x_1^1, \dots, x_1^n)$.

Если задан индекс ε , определяемый множествами (2.1), для которых $r+s \leq n$, то с каждым $k \subset I \cup J$ и меньшим $n+1$ свяжем два других индекса

$$\begin{aligned} k\varepsilon &= (\{i_1, \dots, i_r, k\}, J), \\ k\varepsilon &= (I, \{j_1, \dots, j_s, k\}). \end{aligned}$$

Через θ обозначим индекс, для которого $r + s = 0$.

Рассмотрим систему векторных уравнений

$$\bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_{k\varepsilon} x_\varepsilon^k + \bar{x}_{k\varepsilon} (1 - x_\varepsilon^k), \quad (2.2)$$

где а) ε пробегает все индексы, для которых $r + s < n - 1$;

б) при фиксированном ε k пробегает все натуральные значения, меньшие $n + 1$ и не входящие $I \cup J$;

и начальное условие

$$x_\varepsilon^m = \begin{cases} 1, & \text{если } m \in I \\ 0, & \text{если } m \in J \\ P_{m_1}/P_\varepsilon, & \text{если } m \in I \cup J \end{cases} \quad (r + s = n - 1), \quad (2.3)$$

которое задает вектора $\bar{x}_\varepsilon$ для всех тех индексов ε , для которых $r + s = n - 1$.

Теорема 2. Система (2.2) имеет, и притом единственное, решение, подчиненное начальному условию (2.3). Вектор вероятностей $\bar{p}$ совпадает с $\bar{x}_\theta$.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что вектора $\bar{x}_\varepsilon$ с компонентами

$$x_\varepsilon^m = \begin{cases} 1, & \text{если } m \in I \\ 0, & \text{если } m \in J \\ P_{m_1}/P_\varepsilon, & \text{если } m \in I \cup J, \end{cases}$$

удовлетворяют уравнению (2.2) и начальному условию (2.3.). Равенство $\bar{p} = \bar{x}_\theta$ очевидно. Единственность этого решения будет показана в следующем пункте.

Начальные условия (2.3), как показано на важном примере в § 4, выписываются с легкостью.

Отметим, что система (2.2) при $n > 2$ и произвольных начальных условиях (даже аналогичных условиям (2.3), вообще говоря, не имеет решения.

§ 3. Нахождение вектора $\bar{x}_\theta$. В этом пункте мы будем придерживаться терминологии ⁽²⁾. Множество всех индексов A служит множеством вершин графа (A, Γ) , если положить

$$\Gamma_\varepsilon = \begin{cases} \{k\varepsilon; 0 < k < n + 1, k \in I \cup J\} \cup \{k\varepsilon; 0 < k < n + 1, k \in I \cup J\}, \\ r + s < n, \\ \emptyset & r + s = n. \end{cases}$$

Для нахождения вектора $\bar{x}_\theta$ достаточно выделить некоторый подграф (B, Γ_B) графа (A, Γ) , выбрав какое-нибудь подмножество индексов B , удовлетворяющее требованиям:

а) $\emptyset \in B$,

б) если $\varepsilon \in B$ и $r + s < n - 1$, то множество $\Gamma_B \varepsilon = \Gamma \varepsilon \cap B$ состоит ровно из четырех индексов ${}^k \varepsilon, {}_k \varepsilon, {}^l \varepsilon, {}_l \varepsilon, k \neq l$,

в) если $\varepsilon \in B$ и $r + s = n - 1$, то $\Gamma_B \varepsilon = \emptyset$.

Действительно, рассмотрим подсистему системы уравнений (2.2)

$$\begin{aligned} \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_k x_\varepsilon^k + \bar{x}_k (1 - x_\varepsilon^k), \\ \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_l x_\varepsilon^l + \bar{x}_l (1 - x_\varepsilon^l), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где а) ε пробегает все индексы из B , для которых $r + s < n - 1$,

б) ${}^k \varepsilon, {}_k \varepsilon, {}^l \varepsilon, {}_l \varepsilon \in B$.

Начальное условие (2.3) определяет все вектора $\bar{x}_\varepsilon, \varepsilon \in \Gamma_B^{n-1} \emptyset$.

Пусть зафиксирован $\varepsilon \in \Gamma_B^{n-2} \emptyset$. Тогда для этого ε в системе (3.1) найдется пара векторных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_k x_\varepsilon^k + \bar{x}_k (1 - x_\varepsilon^k), \\ \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_l x_\varepsilon^l + \bar{x}_l (1 - x_\varepsilon^l). \end{aligned}$$

Соответствующая система $2n$ линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_\varepsilon^1, \dots, x_\varepsilon^n$ совместна (согласно теореме 2) и имеет единственное решение, так как определитель автономной системы

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^l &= p_{lk_\varepsilon} / p_{k_\varepsilon} x_\varepsilon^k + p_{l_\varepsilon} / p_{k_\varepsilon} (1 - x_\varepsilon^k), \\ x_\varepsilon^k &= p_{kl_\varepsilon} / p_{l_\varepsilon} x_\varepsilon^l + p_{k_\varepsilon} / p_{l_\varepsilon} (1 - x_\varepsilon^l), \end{aligned}$$

отличен от нуля вследствие допущения, что $P(\bar{\delta}) \neq 0$ для всех $\bar{\delta} \in \Delta$.

Этот же прием позволяет, после того как найдены все $\bar{x}_\varepsilon, \varepsilon \in \Gamma_B^z \emptyset, 0 < z \leq n - 2$, единственным образом определить все $\bar{x}_\varepsilon, \varepsilon \in \Gamma_B^{z-1} \emptyset$. Эта процедура, таким образом, позволяет найти $\bar{x}_\emptyset$.

Заметим, что так как для любого $\varepsilon \in A$ можно построить содержащее его множество B , удовлетворяющее условиям а, б, в, то предшествовавшее рассуждение доставляет отсутствовавшее доказательство единственности в теореме 2.

§ 4. Нахождение начальных условий (2.3) для одного класса потоков П. Предположим, что в формуле

$$\Pi = S + N,$$

поток сигналов S является потоком Пальма (поток с ограниченным последствием) ⁽¹⁾, а поток шумов N является потоком Пуассона.

Пусть $F(u)$ — функция Пальма для потока S ; λ — интенсивность потока N .

Будем предполагать, что существует $f(u) = -F'(u)$, причем

$$f(u) > 0, 0 < u < t.$$

Последнее условие гарантирует выполнение соотношения $P(\bar{\delta}) > 0$ при любом $\bar{\delta} \in \Delta$.

Величина P_m/p в формуле (2.3) является условной вероятностью того, что импульс, пришедший в момент времени t_m , является в действительности сигналом при условии, что принадлежность всех остальных $n-1$ импульсов известна.

При сделанных предположениях формула Байеса для вероятностей гипотез дает следующее выражение для этой условной вероятности

$$\frac{P_m}{p} = \left[\begin{array}{ll} \frac{f(\tau_1)f(\tau_2)}{\lambda f(\tau_1 + \tau_2) + f(\tau_1)f(\tau_2)}, & \text{если } \min_{i \in I} i < m < \max_{i \in I} i \\ \frac{F(\tau_1)f(\tau_2)}{\lambda F(\tau_1 + \tau_2) + F(\tau_1)f(\tau_2)}, & \text{если } m < \min_{i \in I} i \\ \frac{f(\tau_1)F(\tau_2)}{\lambda F(\tau_1 + \tau_2) + f(\tau_1)F(\tau_2)}, & \text{если } m > \max_{i \in I} i \\ \frac{F(\tau_1)F(\tau_2)}{\lambda \int_0^{\infty} F(u)du + F(\tau_1)F(\tau_2)}, & \text{если множество } I \text{ пусто.} \end{array} \right.$$

Величины τ_1 и τ_2 в указанных четырех случаях предыдущей формулы имеют смысл

$$\tau_1 = t_m - t_{\max_{i \in I, i < m} i}; \quad \tau_2 = t_{\min_{i \in I, i > m} i} - t_m, \quad \text{если } \min_{i \in I} i < m < \max_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m; \quad \tau_2 = t_{\min_{i \in I, i > m} i} - t_m, \quad \text{если } m < \min_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m - t_{\max_{i \in I, i < m} i}; \quad \tau_2 = t - t_m, \quad \text{если } m > \max_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m; \quad \tau_2 = t - t_m, \quad \text{если множество } I \text{ пусто.}$$

Важным при получении этой формулы является тот факт, что моменты появления сигналов, когда поток S является потоком с ограниченным последствием, а поток шумов N — потоком Пуассона, являются точками регенерации для потока Π .

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

Ազդանշանների գոտմը իմպուլսների հոսքից

Ենթադրենք, որ իմպուլսների Π հոսքը հանդիսանում է երկու բաղադրիչ հոսքերի գումար (վերադրում):

$$\Pi = S + N$$

որտեղ S -ը հանդիսանում է Պարիսի, իսկ N -ը Պուասսոնի հոսք:

Անվանենք S հոսքի իմպուլսները ազդանշաններ, իսկ N հոսքի իմպուլսները՝ աղմուկներ:

Ենթադրենք, որ հայտնի են $(0, t)$ միջակայքում խմուլայինների երևան գալու $t_1, \dots, t_n$ մոմենտները, սակայն հայտնի չէ խմուլայիններից որոնք են հանդիսանում ազդանշաններ: Մյուս կողմից, թող մեզ հայտնի լինի ազդանշանների հոսքը բնորոշող Պալմի ֆունկցիան, ինչպես նաև ազմունկների հոսքի ինտենսիվությունը:

Հոգիածում առաջարկված է ազդանշանները ազմունկներից դաելու օդախմուլ եղանակ՝ կորուստների ֆունկցիան (1.1) միմիամյանելու իմաստով: Ցույց է տրվում, որ հաջորդաբար լուծելով վերջավոր թվով հանրահաշվային դժային հավասարումները՝ վերջավոր սխառեմները, հնարավոր է գտնել պայմանական հավանականությունները p_i , որ t_i մոմենտին երևան եկած խմուլային ազդանշան է հանդիսանում: $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ վեկտորի հայտնի լինելը բավական է խնդիրը լուծելու համար:

Այն դեպքի համար, երբ Պալմի ֆունկցիան ունի $f(u)$ ածանցյալ և ամենուրեք $(0, t)$ միջակայքում $f(u) > 0$, ապացուցվում է այդ սխառեմների լուծման գոյությունը և միակությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

¹ А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Матем. ин-та АН, 49 (1955), стр. 1—123. ² К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962.

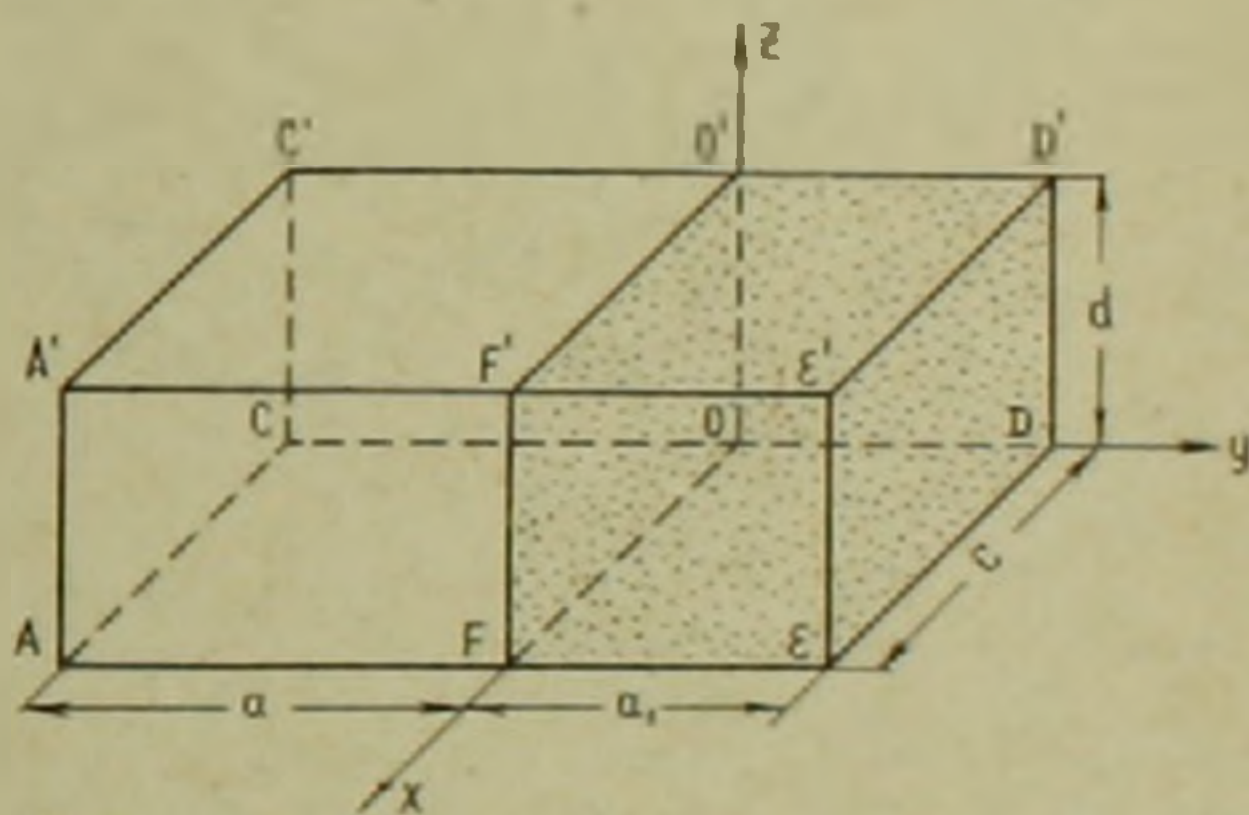
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной задаче установившегося распространения тепла в
 составном прямоугольном параллелепипеде

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9/XII 1963)

В настоящей работе приводится эффективное решение задачи установившегося распространения тепла в неоднородном прямоугольном параллелепипеде, составленном из двух сред с различными теплофизическими характеристиками (фиг. 1), когда на части границы $ODD'O'$, $EDD'E'$ и $FEE'F'$ происходит теплообмен с окружающей средой, а на остальной части границы задано распределение температуры. Предполагаем, что внутри параллелепипеда имеются источники тепла.



Фиг. 1.

Обозначим через $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ соответственно функции распределения тепла в параллелепипеде при $y \leq 0$ и при $y \geq 0$. Тогда функции $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$, как известно⁽¹⁾, будут удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda_1} Q_1(x, y, z) \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

и граничным условиям

$$U_1(0, y, z) = R_1^{(1)}(y, z), \quad U_1(c, y, z) = R_2^{(1)}(y, z).$$

$$-\frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 [P_1(y, z) - U_2(0, y, z)];$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=c} = h_2 [P_2(y, z) - U_2(c, y, z)],$$

$$U_1(x, -a, z) = T_1(x, z); \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=a_1} = h_0 [T_2(x, z) - U_2(x, a_1, z)], \quad (2)$$

$$U_1(x, y, 0) = S_1^{(1)}(x, y); \quad U_1(x, y, d) = S_2^{(1)}(x, y),$$

$$U_2(x, y, 0) = S_1^{(2)}(x, y); \quad U_2(x, y, d) = S_2^{(2)}(x, y),$$

а также условиям сопряжения на поверхности раздела

$$U_1(x, 0, z) = U_2(x, 0, z), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3)$$

Здесь λ_i — коэффициент теплопроводности i -й среды; $Q_i(x, y, z)$ — интенсивность тепловыделения; h_0, h_1, h_2 , а также T_2, P_1, P_2 — соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды у граней $EDD'E'$; $ODD'O'$ и $FEE'F'$.

Относительно функций Q_i, P_i и T_2 предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию, что касается функций $S_i, R_i^{(1)}$ и T_1 , то предполагаем, что они непрерывны в соответствующих областях и что

$$R_1^{(1)}(y, 0) = S_1^{(1)}(0, y); \quad R_1^{(1)}(y, d) = S_2^{(1)}(0, y); \quad R_1^{(1)}(-a, z) = T_1(0, z);$$

$$R_2^{(1)}(y, 0) = S_1^{(1)}(c, y)$$

$$R_2^{(1)}(y, d) = S_2^{(1)}(c, y); \quad R_2^{(1)}(-a, z) = T_1(c, z);$$

$$S_1^{(1)}(x, -a) = T_1(x, 0); \quad S_2^{(1)}(x, -a) = T_1(x, d).$$

Разложим предварительно функции $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ в ряд по $\sin \alpha_k z$:

$$U_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(i)}(x, y) \sin \alpha_k z \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{d}, \quad U_k^{(i)}(x, y) = \frac{2}{d} \int_0^d U_i(x, y, z) \sin \alpha_k z dz.$$

Умножив уравнение (1) на $\frac{2}{d} \sin \alpha_k z dz$ и проинтегрировав от 0 до d , для $U_k^{(i)}(x, y)$ получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k^{(i)}}{\partial y^2} - \alpha_k^2 U_k^{(i)} = -\frac{2}{d} \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \int_0^d Q_i(x, y, z) \sin \alpha_k z dz + \right. \\ \left. + \alpha_k [S_1^{(i)}(x, y) - (-1)^k S_2^{(i)}(x, y)] \right\} = q_k^{(i)}(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом граничные условия и условия сопряжения для функций $U_k^{(1)}(x, y)$ и $U_k^{(2)}(x, y)$, согласно (2) и (3), будут

$$U_k^{(1)}(0, y) = R_{k1}^{(1)}(y); \quad U_k^{(1)}(c, y) = R_{k2}^{(1)}(y),$$

$$-\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 [P_{k1}(y) - U_k^{(2)}(0, y)],$$

$$\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=c} = h_1 [P_{k2}(y) - U_k^{(2)}(c, y)],$$

(2')

$$U_k^{(1)}(x, -a) = T_{k1}(x); \quad \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=a_1} = h_0 [T_{k2}(x) - U_k^{(2)}(x, a_1)];$$

$$U_k^{(1)}(x, 0) = U_k^{(2)}(x, 0); \quad \lambda_1 \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_2 \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3')$$

где

$$P_{ki}(y) = \frac{2}{d} \int_0^d P_i(y, z) \sin \alpha_k z dz,$$

$$R_{ki}(y) = \frac{2}{d} \int_0^d R_i^{(1)}(y, z) \sin \alpha_k z dz, \quad T_{ki}(x) = \frac{2}{d} \int_0^d T_i(x, z) \sin \alpha_k z dz.$$

Разложим далее $U_k^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2$) в ряды по $\sin \gamma_j x$:

$$U_k^{(i)}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{jk}^{(i)}(y) \sin \gamma_j x, \quad (6)$$

где

$$\gamma_j = \frac{j\pi}{c}; \quad f_{jk}^{(i)}(y) = \frac{2}{c} \int_0^c U_k^{(i)}(x, y) \sin \gamma_j x dx.$$

Умножая уравнение (5) на $\frac{2}{c} \sin \gamma_j x dx$ и интегрируя от 0 до c , для $f_{jk}^{(i)}(y)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$f_{jk}^{(i)'}(y) - (\alpha_k^2 + \gamma_j^2) f_{jk}^{(i)}(y) = \frac{2}{c} \left\{ \int_0^c q_k^{(i)}(x, y) \sin \gamma_j x dx - \right. \\ \left. - \gamma_j \int_0^d [R_1^{(i)}(y, z) - (-1)^j R_2^{(i)}(y, z)] \sin \alpha_k z dz \right\} = q_{jk}^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Здесь через $R_1^{(2)}(y, z)$ и $R_2^{(2)}(y, z)$ обозначены неизвестные значения функции $U_2(x, y, z)$ на гранях $ODD'O'$ и $FEE'F'$: $R_1^{(2)}(y, z) = U_2(0, y, z)$; $R_2^{(2)}(y, z) = U_2(c, y, z)$. Краевые условия для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$, согласно (2') и (3'), будут

$$f_{jk}^{(1)}(-a) = T_{jk}^{(1)}; \quad f_{jk}^{(1)}(0) = f_{jk}^{(2)}(0); \quad \lambda_1 f_{jk}^{(1)'}(0) = \lambda_2 f_{jk}^{(2)'}(0), \quad (8)$$

$$f_{jk}^{(2)'}(a_1) - h_0 f_{jk}^{(2)}(a_1) = h_0 T_{jk}^{(2)};$$

где

$$T_{jk}^{(1)} = \frac{2}{c} \int_0^c T_{kl}(x) \sin \gamma_j x dx.$$

Удовлетворяя краевым условиям (8), для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$ получим следующие выражения

$$\begin{aligned} f_{jk}^{(1)}(y) = & \frac{1}{L_{jk}(-a)} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_{jk}(y+a) \left[2h_0 T_{jk}^{(2)} - \frac{2}{\gamma_{jk}} \int_0^{a_1} q_{jk}^{(2)}(t) M_{jk}(t) dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^0 q_{jk}^{(1)}(t) L_{jk}(t) dt \right] + L_{jk}(y) \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_a^y q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk}(t+a) dt \right] \right\}, \\ f_{jk}^{(2)}(y) = & \frac{2}{L_{jk}(-a)} \left\{ N_{jk}(y) \left[h T_{jk}^{(2)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^{a_1} q_{jk}^{(2)}(t) M_{jk}(t) dt \right] + \right. \\ & + M_{jk}(y) \left[\lambda T_{jk}^{(1)} - \frac{\lambda}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk}(t-a) dt - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^y q_{jk}^{(2)}(t) N_{jk}(t) dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения

$$\gamma_{jk} = \sqrt{\alpha_k^2 + \gamma_j^2}; \quad \lambda = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}; \quad M_{jk}(y) = \gamma_{jk} \operatorname{ch} \gamma_{jk}(a_1 - y) + h_0 \operatorname{sh} \gamma_{jk}(a_1 - y),$$

$$N_{jk}(y) = \lambda \operatorname{ch} \gamma_{jk} a \operatorname{sh} \gamma_{jk} y + \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \operatorname{ch} \gamma_{jk} y, \quad (10)$$

$$L_{jk}(y) = (\lambda + 1) M_{jk}(-y) + (\lambda - 1) M_{jk}(y).$$

В выражения (9) для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$ входят, как было отмечено выше, неизвестные функции $R_{k1}^{(2)}(y, z)$ и $R_{k2}^{(2)}(y, z)$. Прежде чем перейти к их определению, заметим следующее: вследствие неоднородности граничных условий для $U_k^{(1)}(x, y)$ и $U_k^{(2)}(x, y)$, ряды (6) обладают медленной сходимостью — коэффициенты $f_{jk}^{(1)}(y)$ их с возрастанием индекса j убывают со скоростью $\frac{1}{j}$. Для усиления сходимости рядов (6) выделим выражения

$$w_k^{(1)}(x, y) = \left(1 - \frac{x}{c}\right) R_{k1}^{(1)}(y) + \frac{x}{c} R_{k2}^{(1)}(y),$$

обуславливающие слабую сходимость рядов (6). Разлагая эти выражения в ряд по $\sin \gamma_j x$ и прибавляя и вычитывая их из выражений (6), будем иметь

$$U_k^{(1)}(x, y) = w_k^{(1)}(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{jk}^{(1)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(1)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(1)}(y)}{\gamma_j c} \right] \sin \gamma_j x. \quad (11)$$

Ряды (11) обладают усиленной сходимостью — члены их убывают с возрастанием индекса j со скоростью $\frac{1}{j^2}$.

Перейдем теперь к определению неизвестных функций $R_{k1}^{(2)}(y)$ и $R_{k2}^{(2)}(y)$. Для этого выполним граничные условия (2') для функции $U_k^{(2)}(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + h_1 c) R_{k1}^{(2)}(y) - R_{k2}^{(2)}(y)}{c} - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \left[f_{jk}^{(2)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(2)}(y)}{\gamma_j c} \right] = h_1 P_{k1}(y), \\ & - \frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (1 + h_2 c) R_{k2}^{(2)}(y)}{c} + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \gamma_j \left[f_{jk}^{(2)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(2)}(y)}{\gamma_j c} \right] = h_2 P_{k2}(y). \end{aligned} \quad (12)$$

Умножим каждое из уравнений (12) на $\varphi_l(y) dy$, где $\varphi_l(y) = \sqrt{\frac{2(\zeta_l^2 + h_0^2)}{a_1(\zeta_l^2 + h_0^2) + h_0}} \sin \zeta_l y$ — собственные функции краевой задачи

$$\varphi''(y) + \zeta_l^2 \varphi(y) = 0; \quad \varphi(0) = \varphi'(a_1) + h_0 \varphi(a_1) = 0. \quad (13)$$

а собственные числа ζ_l являются корнями уравнения $\zeta \cos \zeta a_1 + h_0 \sin \zeta a_1 = 0$.

Принимая во внимание (7) и (8), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} n_{lk}^{(s)} &= \frac{\zeta_l^2}{\zeta_{lk}^2 + (h_1 + h_2) \zeta_{lk} \operatorname{cth} \zeta_{lk} c + h_1 h_2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{V \lambda + 1 c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+s}] G_{lk}^{(s)} - [1 - (-1)^{j+s}] (h_1 - h_2)}{\gamma_{jk}^2 + \zeta_l^2} m_{jk} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \varphi_l'(0)} [G_{lk}^{(s)} \rho_{lk}^{(s)} - (h_1 - h_2) \rho_{lk}^{(s+1)}] \right\} \quad (s = 1; 2). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения



$$n_{lk}^{(s)} = \frac{\zeta_l^2}{\varphi_l'(0)} \int_0^{a_1} [R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^s R_{k2}^{(2)}(y)] \varphi_l(y) dy,$$

$$\zeta_{lk} = \sqrt{a_k^2 + \zeta_l^2}; \quad m_{jk} = \frac{\sqrt{\lambda + 1}}{2} \gamma_j c f_{jk}^{(2)}(0),$$

$$G_{lk}^{(s)} = 2\zeta_{lk} \frac{\operatorname{ch} \zeta_{lk} c + (-1)^s}{\operatorname{sh} \zeta_{lk} c} + h_1 + h_2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho_{lk}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta_{lk} c} \int_0^c \left[h_0 \varphi_l(a_1) T_{k2}(x) - \frac{2}{d} \int_0^{a_1} q_k^{(2)}(x, y) \varphi_l(y) dy \right] & \\ \left[\operatorname{sh} \zeta_{lk} (c - x) - \right. & \\ \left. - (-1)^s \operatorname{sh} \zeta_{lk} x \right] dx + \int_0^{a_1} [h_1 P_{k1}(y) - (-1)^s P_{k2}(y)] \varphi_l(y) dy. & \end{aligned}$$

В свою очередь m_{jk} , согласно (9) и (15), определяются посредством $n_{lk}^{(s)}$ из следующих соотношений

$$\begin{aligned} m_{jk} = \frac{\sqrt{\lambda + 1} \gamma_j c}{2L_{jk}(-a)} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \frac{\gamma_j}{c} \frac{M_{jk}(0)}{\gamma_{jk}} \times \right. & \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l'^2(0) \frac{[1 - (-1)^j] n_{lk}^{(1)} + [1 + (-1)^j] n_{lk}^{(2)}}{\zeta_l^2 (\zeta_l^2 + \gamma_{jk}^2)} + & \\ + \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \left[h_0 T_{jk}^{(2)} - \frac{2}{\gamma_{jk}} \int_0^{a_1} \int_0^c q_k^{(2)}(x, y) M_{jk}(y) \sin \gamma_j x dx dy \right] + & \\ + \lambda M_{jk}(0) \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk} (t + a) dt \right] \Bigg\}. & \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, для определения $n_{lk}^{(s)}$ и m_{jk} получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14) и (16). Для исследования разрешимости этих систем рассмотрим предварительно суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений. Обозначим через $\varkappa_{lk}^{(s)}$ сумму модулей коэффициентов l -го уравнения системы (14), а через τ_{jk} — сумму модулей коэффициентов j -го уравнения системы (16). Пользуясь легко получаемой формулой разложения

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l'(0) \varphi_l(x)}{\zeta_l^2 (\zeta_l^2 + \gamma^2)} = \frac{1}{\gamma^2} \left[1 - \frac{h_0 x}{1 + h_0 a_1} - \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma (a_1 - x) + h_0 \operatorname{sh} \gamma (a_1 - x)}{\gamma \operatorname{ch} \gamma a_1 + h_0 \operatorname{sh} \gamma a_1} \right],$$

$$(0 \leq x \leq a_1) \quad (17)$$

имеем

$$\tau_{jk} = \frac{2\gamma_j^2 \operatorname{sh} \gamma_{jk} a}{\sqrt{\lambda+1} \gamma_j^3 L_{jk}(-a)} \left[\gamma_{jk} (\gamma_{jk} \operatorname{sh} \gamma_{jk} a_1 + h_0 \operatorname{ch} \gamma_{jk} a_1) - \frac{h_0 M_{jk}(0)}{1 + h_0 a_1} \right] < \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}. \quad (18)$$

Легко получаем также, что $\tau_{jk}^{(s)} < \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}$. С другой стороны, из (15) и (16) видно, что свободные члены систем, оставаясь ограниченными в своей совокупности, стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{\gamma_{jk}}$ и $\frac{1}{\zeta_{jk}}$.

Согласно общей теории бесконечных систем⁽²⁾, системы (14) и (16) имеют единственное ограниченное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Как легко видеть, m_{jk} и $n_{jk}^{(s)}$ соответственно убывают со скоростью $\gamma_{jk}^{-\frac{1}{2}}$ и $\zeta_{jk}^{-\frac{1}{2}}$. В самом деле, обозначив $m_{jk} = \gamma_{jk}^{-\frac{1}{2}} \mu_{jk}$, $n_{jk}^{(s)} = \zeta_{jk}^{-\frac{1}{2}} \eta_{jk}^{(s)}$, для неизвестных μ_{jk} и $\eta_{jk}^{(s)}$ получим после некоторых преобразований вполне регулярные системы линейных уравнений, свободные члены которых, оставаясь ограниченными в своей совокупности, стремятся к нулю со скоростью $\gamma_{jk}^{-\frac{1}{2}}$ и $\zeta_{jk}^{-\frac{1}{2}}$. Согласно⁽²⁾, полученные системы имеют единственное ограниченное решение, откуда и следует наше утверждение.

Подставляя значение $f_{jk}^{(1)}(y)$ в (6) и (4) и используя (14), (15) и (16), а также выделяя выражения, обуславливающие слабую сходимость, после несложных преобразований окончательно получим для $U_1(x, y, z)$ следующее выражение

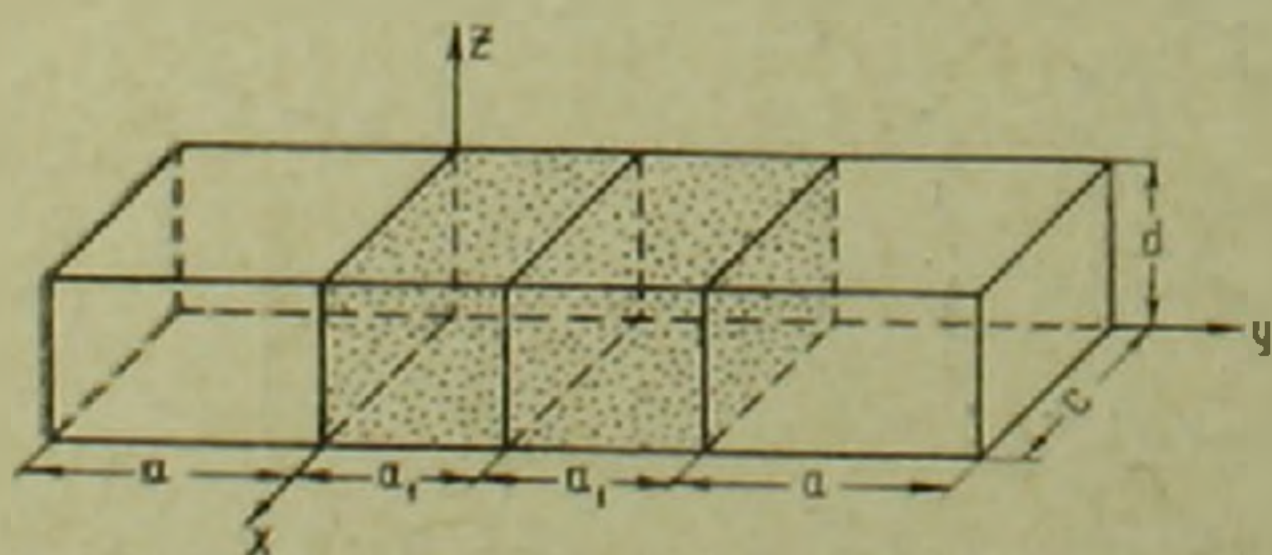
$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) = & \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left[S_1^{(1)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_1^{(1)}(0, y) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{c} S_1^{(1)}(c, y) \right] + \frac{z}{d} \left[S_2^{(1)}(x, y) - \left(1 + \frac{x}{c}\right) S_2^{(1)}(0, y) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{c} S_2^{(1)}(c, y) \right] + \left(1 - \frac{x}{c}\right) R_1^{(1)}(y, z) + \frac{x}{c} R_2^{(1)}(y, z) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \gamma_{jk} (y+a)}{\operatorname{sh} \gamma_{jk} a} \left[\frac{2m_{jk}}{\sqrt{\lambda+1} \gamma_j c} + \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk} t dt \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\operatorname{sh} \gamma_{jk} y}{\operatorname{sh} \gamma_{jk} a} \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^y q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk} (t+a) dt \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\alpha_k d} [S_{j1}^{(1)}(y) - (-1)^k S_{j2}^{(1)}(y)] - \frac{2}{\gamma_j c} [R_{k1}^{(1)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(1)}(y)] + \\
& + \frac{4}{\alpha_k \gamma_j c d} [S_1^{(1)}(0, y) - (-1)^j S_1^{(1)}(c, y) - (-1)^k S_2^{(1)}(0, y) + \\
& + (-1)^{j+k} S_2^{(1)}(c, y)] \Big\} \sin \alpha_k z \sin \gamma_j x. \quad (19)
\end{aligned}$$

Для $U_2(x, y, z)$ аналогичным образом получим

$$\begin{aligned}
U_2(x, y, z) = & \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left[S_1^{(2)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_1^{(2)}(0, y) - \right. \\
& - \frac{x}{c} S_1^{(2)}(c, y) \Big] + \frac{z}{d} \left[S_2^{(2)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_2^{(2)}(0, y) - \right. \\
& - \frac{x}{c} S_2^{(2)}(c, y) \Big] + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh } \gamma_{jk} y}{M_{lk}(0)} \left[h_0 T_{jk}^{(2)} - \right. \right. \\
& - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^{a_1} \int_0^c q_k^{(2)}(r, t) M_{jk}(t) \sin \gamma_j r dr dt \Big] + \\
& + \frac{M_{jk}(y)}{M_{jk}(0)} \left[\frac{2m_{jk}}{V\lambda + 1 \gamma_j c} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^y \int_0^c q_k^{(2)}(r, t) \text{sh } \gamma_{jk} t \sin \gamma_j r dr dt \right] - \\
& - \frac{2}{\alpha_k d} [S_{j1}^{(2)}(y) - (-1)^k S_{j2}^{(2)}(y)] + \frac{4}{\alpha_k \gamma_j c d} [S_1^{(2)}(0, y) - (-1)^j S_1^{(2)}(c, y) - \\
& - (-1)^k S_2^{(2)}(0, y) + (-1)^{j+k} S_2^{(2)}(c, y)] \Big\} \sin \alpha_k z \sin \gamma_j x + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l'(0) \varphi_l(y)}{\zeta_l^2 \text{sh } \zeta_{lk} a_1} [(n_{lk}^{(1)} + n_{lk}^{(2)}) \text{sh } \zeta_{lk} (a_1 - x) + \\
& + (n_{lk}^{(1)} - n_{lk}^{(2)}) \text{sh } \zeta_{lk} x] \sin \alpha_k z. \quad (20)
\end{aligned}$$

Задаваясь геометрическими размерами параллелепипеда, а также значениями величин λ_l , h_l и функций Q_l , $R_l^{(1)}$, P_l , T_l , S_l , из (14) и



Фиг. 2.

(16) получим оценки m_{jk} и $n_{lk}^{(s)}$ сверху и снизу, после чего способом, изложенным в (3), найдем из (19) и (20) значения $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ с избытком и недостатком.

В заключение отметим некоторые из частных случаев.

а) Если $h_0 = 0$, то, аналитически продолжая, получим трехслойный параллелепипед, симметричный относительно плоскости $y = a_1$

(фиг. 2). б) Если $h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$, бесконечные системы линейных уравнений (14) и (16) вырождаются в равенства и решение совпадает с решением, получаемым обычным способом. в) При $a \rightarrow \infty$ имеем полубесконечную составную призму. г) Если $\lambda_1 = \lambda_2$, получаем однородный параллелепипед.

Заметим, что в случае плоского распределения тепла аналогичная задача при $h_0 = h_1 = h_2$ и для однородной среды была решена в работе (⁴).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Հաղորդիչ ուղղանկյան զուգահեռանախառն ջերմության կայունացած տարածման մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է երկու տարբեր նյութերից կազմված անհամասեռ ուղղանկյուն զուգահեռանախառն ջերմության կայունացած տարածման խնդիրը, երբ արտաքին մակերևույթի մի մասում (այն է՝ $ODD'O'$, $EDD'E'$ և $FEE'F'$ -ի վրա) տեղի ունի ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ, իսկ մնացած մասում տրված է ջերմության բաշխումը, ենթադրվում է, որ զուգահեռանախառն ներսը զոյություն ունի ջերմարտադրություն:

Խնդրի լուծումը տրվում է արագ զուգամիտող կրկնակի շարքերի միջոցով, որոնց հաստատուն գործակիցները որոշվում են լիովին սեղույթաբանական անվերջ սխառեմներից: Դիտարկվում են որոշ մասնավոր դեպքեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1952. ² Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962. ³ Р. С. Минасян, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, XI, 3 (1958). ⁴ Р. С. Минасян, ПММ, XVI, 3, 1952.

МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и С. М. Дургарьян

О колебаниях ортотропной пологой оболочки,
 находящейся в переменном температурном поле

(Представлено 31/X 1963)

1. Рассматривается задача так называемых свободных колебаний весьма пологой ортотропной оболочки положительной гауссовой кривизны и постоянной толщины h , находящейся в поле действия высоких температур. Аналогичная задача для ортотропной пластинки в одном частном случае рассмотрена в работе ⁽¹⁾.

Предполагается, что оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат α, β, γ , материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, параллельные координатным поверхностям ⁽²⁾.

Считается, что температура оболочки $T = T(\gamma, t)$ удовлетворяет начальному ($t = t_0$) и поверхностным условиям, а также уравнению теплопроводности. В первом приближении считаем, что от температуры нагрева зависят только модули упругости $E_\alpha = E_1(T)$, $E_\beta = E_2(T)$, модуль сдвига $G_{\alpha\beta} = G_{12}(T)$ и коэффициенты линейного расширения $a_\alpha = a_1(T)$, $a_\beta = a_2(T)$ ⁽³⁻⁵⁾.

При выводе основных уравнений принимаются гипотезы Кирхгоффа—Лява ⁽⁶⁾ и Ф. Неймана ⁽⁷⁾, а также следующие дополнительные предположения ^(2, 6):

а) в первых двух уравнениях равновесия (движения) можно пренебречь членами N_α/R_α и N_β/R_β ($1/R_\alpha = 1/R_1$, $1/R_\beta = 1/R_2$ — главные кривизны срединной поверхности; N_α, N_β — поперечные силы), а также инерционными силами, обусловленными тангенциальными перемещениями;

б) в выражениях, связывающих компоненты изгибной деформации (κ_1, κ_2, τ) с перемещениями, можно сохранить лишь члены, содержащие нормальное перемещение w ;

в) первые два уравнения неразрывности и шестое уравнение равновесия удовлетворены тождественно;

г) коэффициенты первой квадратичной формы A и B при дифференцировании ведут себя как постоянные;

д) система координат выбрана так, что выполняется сильное неравенство $AB/R_1R_2 \ll 1$.

2. Из обобщенного закона Гука, используя гипотезы Кирхгофа — Лява и Ф. Неймана, для расчетных напряжений имеем (2, 3, 7, 8)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + \gamma (B_{11}x_1 + B_{12}x_2) - \beta_1 T, \\ \sigma_2 &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + \gamma (B_{12}x_1 + B_{22}x_2) - \beta_2 T, \\ \tau_{12} &= B_{66}\omega + 2\gamma B_{66}\tau, \end{aligned} \right\}$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2},$$

$$B_{66} = G_{12}, \quad \beta_i = B_{1i}a_1 + B_{2i}a_2 \quad (i = 1, 2),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_2}, \quad \omega = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$x_1 = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_2 = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta},$$

$u = u(x, \beta, t)$, $v = v(x, \beta, t)$, $w = w(x, \beta, t)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки; $\nu_1 = \nu_{12}$, $\nu_2 = \nu_{21}$ — коэффициенты Пуассона.

Выпишем уравнения движения и неразрывности деформаций для рассматриваемого случая при отсутствии внешних сил

$$B \frac{\partial T_1}{\partial x} + A \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad B \frac{\partial S}{\partial x} + A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} - m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

(m^* — масса оболочки, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности)

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} + \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_2}{R_1} = 0. \quad (2.2)$$

Для тангенциальных сил ($T_x = T_1$, $T_y = T_2$, $S_{x\beta} = S_{\beta x} = S$) и для моментов ($M_x = M_1$, $M_\beta = M_2$, $H_{x\beta} = H_{\beta x} = H$) имеем (2, 3, 8)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 - C_{1T}, \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{12}x_1 + K_{22}x_2 - C_{2T}, \\ S &= C_{66}\omega + 2K_{66}\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + D_{11}x_1 + D_{12}x_2 - K_{1T}, \\ M_2 &= K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + D_{12}x_1 + D_{22}x_2 - K_{2T}, \\ H &= K_{66}\omega + 2D_{66}\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где жесткости $C_{ij} = C_{ij}(T)$, $K_{ij} = K_{ij}(T)$, $D_{ij} = D_{ij}(T)$, температурные усилия и моменты $C_{iT} = C_{iT}(T)$, $K_{iT} = K_{iT}(T)$ выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} d\gamma, & K_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} \gamma d\gamma, & D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} \gamma^2 d\gamma, \\ C_{1T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_1 T d\gamma, & K_{1T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_1 T \gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

3. Введем, как обычно, функцию напряжений φ по формулам

$$T_1 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad S = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

По формулам (2.3) можно выразить компоненты тангенциальной деформации ε_1 , ε_2 , ω через функцию напряжений φ , а затем по (2.4) через ту же функцию напряжений можно выразить моменты M_1 , M_2 , H .

Внеся значения ε_1 , ε_2 , T_1 , T_2 , M_1 , M_2 , H , выраженные через функцию напряжений, в третье уравнение движения (2.1) и в уравнение неразрывности деформаций (2.2), для определения искомых функций w и φ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}^0 - D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{D_{12}^0 - D_{12} + 2(D_{66}^0 - D_{66})}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ & + \frac{D_{22}^0 - D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{d_{21}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \frac{d_{11} + d_{22} - 2d_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ & + \frac{d_{12}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \frac{1}{B^4} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ & \frac{A_{22}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \frac{2A_{12} + A_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{A_{11}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} + \frac{d_{21}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \\ & + \frac{d_{11} + d_{22} - 2d_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{d_{12}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \\ & - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{C_{22}}{\Omega}, & A_{22} &= \frac{C_{11}}{\Omega}, & A_{66} &= \frac{1}{C_{66}}, & A_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Omega}, \\ \Omega &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2, & d_{11} &= \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega}, & d_{22} &= \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega}, \\ d_{12} &= \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega}, & d_{21} &= \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega}, & d_{66} &= \frac{K_{66}}{C_{66}}, \\ D_{11}^0 &= \frac{K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11}}{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{22}^0 &= \frac{K_{12}^2 C_{11} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{22}}{\Omega}, & D_{66}^0 &= \frac{K_{66}^2}{C_{66}}, \\ D_{12}^0 &= \frac{K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

В последующем будем рассматривать случай, когда температура не изменяется по толщине оболочки $T = T(t)$.

В этом случае, как это легко заметить из (2.5) и (3.2), имеем

$$K_{ij} = K_{17} = d_{ij} = D_{ij}^0 = 0.$$

Тогда из (3.1) получим следующие уравнения задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{A B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \\ + \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{A_{22}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2A_{12} + A_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{A_{11}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \\ - \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

4. Рассмотрим поперечные колебания прямоугольной в плане, свободно опертой по всему контуру весьма пологой ортотропной оболочки.

Граничными и начальными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} w = T_1 = M_1 = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0 \text{ и } \beta = b, \\ w = T_2 = M_2 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \text{ и } \alpha = a, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$w = w_0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \alpha = a/2, \quad \beta = b/2. \quad (4.2)$$

Очевидно, граничным условиям (4.1) удовлетворим, полагая

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) \sin(\pi n \alpha / a) \sin(\pi m \beta / b), \\ \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}(t) \sin(\pi n \alpha / a) \sin(\pi m \beta / b). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Подставив значения w и φ в исходные уравнения (3.3), для $F_{nm}(t)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F_{nm}(t) = \\ = - \left(\frac{ABab}{\pi} \right)^2 \frac{A^2 a^2 m^2 / R_1 + B^2 b^2 n^2 / R_2}{B^4 b^4 n^4 A_{22} + A^2 B^2 a^2 b^2 n^2 m^2 (2A_{12} + A_{66}) + A^4 a^4 m^4 A_{11}} f_{nm}(t), \end{aligned}$$

а для определения функции $f_{nm}(t)$ получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\ddot{f}_{nm}(t) + \delta^2 \psi_{nm}(t) f_{nm}(t) = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\delta^2 = \frac{B_{11}(t_0) h}{12m^* g A a} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} \psi_{nm} = & \frac{B_{11}(t)}{B_{11}(t_0)} \cdot \frac{g}{Aa} \left\{ \left(\frac{\pi h}{Aa} \right)^2 \left[n^4 + 2 \left(\nu_2 + 2 \frac{B_{66}(t)}{B_{11}(t)} \right) \left(\frac{Aam}{Bb} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B_{22}(t)}{B_{11}(t)} \left(\frac{Aam}{Bb} \right)^4 \right] + \right. \\ & \left. + 12(1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{Aa}{\pi} \right)^2 \left(A^2 a^2 m^2 k_1 + B^2 b^2 n^2 k_2 \right)^2 \left[\frac{B_{11}(t)}{B_{22}(t)} \left(\frac{Bbn}{Aa} \right)^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{E_1(t)}{G_{12}(t)} - 2\nu_1 \right) (ABabnm)^2 + (Aam)^4 \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Для многих задач δ^2 является большим числом. В связи с этим решение уравнения (4.4) находим методом асимптотического интегрирования (2. 6).

Интегралы уравнения (4.4) будем искать в виде (в дальнейшем индексы n, m опускаем)

$$f = \Phi(t; \delta) e^{i\omega(t)}, \quad (4.5)$$

где $\Phi(t; \delta) = \Phi_0(t) + \delta^{-1} \Phi_1(t) + \delta^{-2} \Phi_2(t) + \dots$ — функция интенсивности, а $\omega(t)$ — функция изменчивости.

Внеся (4.5) в (4.4) и соответствующим образом сгруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \Phi_0 (\psi + \dot{\omega}^2) + \delta [2\dot{\Phi}_0 \dot{\omega} + \Phi_0 \ddot{\omega} + \Phi_1 (\psi + \dot{\omega}^2)] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0} \delta^{-n} [\ddot{\Phi}_n + 2\dot{\Phi}_{n+1} \dot{\omega} + \Phi_{n+1} \ddot{\omega} + \Phi_{n+2} (\psi + \dot{\omega}^2)] \right\} e^{i\omega} = 0, \end{aligned}$$

откуда при $\Phi_0 \neq 0$ будем иметь

$$\psi + \dot{\omega}^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$2\dot{\Phi}_0 \dot{\omega} + \Phi_0 \ddot{\omega} = 0, \quad (4.7)$$

$$\ddot{\Phi}_n + 2\dot{\Phi}_{n+1} \dot{\omega} + \Phi_{n+1} \ddot{\omega} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

Решив (4.6), для функции изменчивости будем иметь

$$\omega_1 = i \int \sqrt{\psi} dt + C_1, \quad \omega_2 = -i \int \sqrt{\psi} dt + C_2. \quad (4.9)$$

Внеся (4.9) в (4.7), найдем функцию интенсивности в нулевом приближении

$$\Phi_0 = C_1 \psi^{-1/4},$$

а каждое последующее приближение найдется из уравнения (4.8).

Таким образом, в нулевом приближении для f будем иметь

$$f = \psi^{-1/2} \left[C_1 \exp \left(i\delta \int V \bar{\psi} dt \right) + C_2 \exp \left(-i\delta \int V \bar{\psi} dt \right) \right], \quad (4.10)$$

где значения постоянных интегрирования с помощью (4.3) найдутся из условий (4.2).

5. Рассмотрим два частных случая, ограничившись в разложениях (4.3) первыми членами ($n = m = 1$).

а) Пусть $\psi_{nm}(t)$ в уравнении (4.4) постоянна и равна единице. Тогда из (4.10) для функции f в нулевом приближении найдем

$$f = C_1 \exp(i\delta t) + C_2 \exp(-i\delta t),$$

что совпадает с точным решением уравнения $\ddot{f} + \delta^2 f = 0$.

б) Пусть $\psi_{nm}(t) = 1 - \lambda t$. Тогда из (4.10) для функции f в нулевом приближении найдем

$$f = (1 - \lambda t)^{-1/2} \left\{ C_1 \cos \left[\frac{2\delta}{3\lambda} (1 - \lambda t)^{3/2} \right] + C_2 \sin \left[\frac{2\delta}{3\lambda} (1 - \lambda t)^{3/2} \right] \right\},$$

что совпадает с результатами, полученными в ⁽¹⁾ при асимптотическом представлении бесселевых функций, входящих в точное решение уравнения (4.4) при $\psi_{nm}(t) = 1 - \lambda t$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ ԵՎ Ս. Ս. ԴՈՒՐԳԱՐՅԱՆ

Փոփոխական ջերմային դաշտում գտնվող փոքր կորուսյուն ունեցող
օրոշրոյ քաղանքների հաճախումների մասին

Դիտարկվում է փոքր կորուսյուն ունեցող օրոշրոյ թաղանթների տատանումների խնդիրը, երբ թաղանթը դտնվում է փոփոխական ջերմային դաշտում, և թաղանթի նյութի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկությունները կախված են թաղանթի ջերմաստիճանից:

Յույց է տրված, որ նշված խնդիրը բերվում է (4.4) փոփոխական դործակից ունեցող դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը մեծ թվով խնդիրների համար ինտեգրվում է անմիջապես եղանակով:

Դիտարկված են երկու մասնավոր օրինակներ, որոնք ցուցադրում են առաջարկված մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
- ² С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, ГИФМЛ, М., 1961.
- ³ С. М. Дургарьян, Инженерный журнал, 2, вып. 3, 1962.
- ⁴ Б. Е. Гейтвуд, Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам, ИИЛ, М., 1959.
- ⁵ И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах, Госатомиздат, 1962.
- ⁶ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, ГИИТЛ, М., 1953.
- ⁷ В. Новацкий, Вопросы термоупругости, Издательство АН СССР, М., 1962.
- ⁸ С. А. Амбарцумян, Известия АН АрмССР (физ.мат., естеств. и техн. науки), т. V, № 6 (1952).

Г. И. Тер-Степанян

О механизме образования загиба голов пластов*

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 14/IX 1963)

1. Загиб голов пластов горных пород представляет собой широко-распространенное явление, с которым встречаются в областях, сложенных складчатыми горными сооружениями. Это явление заключается в крючкообразном изгибании голов круто падающих пластов вниз по склону. Характерным признаком этого вида деформации является постепенный переход деформированных участков в подстилающие ненарушенные круто падающие пласты.

Иногда геологи ищут объяснение загибу голов пластов в тектонических процессах — в образовании складчатости, которая позже была срезаена денудацией примерно по оси складки. Подобные допущения усложняют представление о геологическом строении и могут привести к ошибочным выводам в отношении тектоники местности.

Загиб голов пластов относится к большой группе еще недостаточно дифференцированных медленных гравитационных движений на склонах. К этой группе относятся также описанные различными авторами явление сдвига в долину, пластические оползни, медленное оползание, образование пloyчатой слоистости, движение наносов и многие другие проявления ползучести склонов.

Ход процесса загиба голов пластов и характер возникающих деформаций зависят от времени и ряда факторов, определяющих напряженное состояние склона и реологические свойства пород. Среди них выделяются: мощность покровных образований, высота и крутизна склона и тип слагающих его пород. Загиб голов пластов протекает весьма медленно; это время может измеряться сотнями и тысячами лет. Поэтому должны существовать условия, содействующие не только образованию этих деформаций, но и их сохранению. Морские трансгрессии, понижение базиса эрозии, энергичная денудация и т. п. — все эти процессы ведут к уничтожению поверхностных толщ, могущих содержать деформированные пласты. Поэтому их отсутствие в геологическом разрезе или обнажении

* Доклад на XIV Международном colloquium по геомеханике в сентябре 1963 г. в Зальцбурге (Австрия).

еще не указывает, что не было условий, в которых мог бы образоваться загиб голов пластов.

2. Если мощность наносных покровных образований на склоне невелика, то механизм образования загиба голов пластов связывается с движением поверхностного плаща. Как известно, в расположенной у поверхности склона толще горных пород, в пределах активной зоны выветривания, происходят медленные гравитационные движения, вызванные сезонными изменениями температуры, влажности и фазового состояния поровой воды. Такие движения покровной толщи носят различные названия — почвенная солифлюкция, сезонная ползучесть, движение наносов, поверхностная ползучесть и др. С глубиной амплитуда колебаний перечисленных факторов убывает, соответственно уменьшается и градиент скорости этих движений.

Если мощность покровных рыхлых пород меньше, чем глубина активной зоны сезонных колебаний, то головы круто падающих коренных пород находятся в сфере влияния указанных сезонных факторов, и продукты выветривания коренных пород в процессе поверхностной ползучести увлекаются вниз по склону. В протекании этого процесса основное значение имеют не столько сезонные колебания напряженного состояния, сколько сезонные изменения сопротивления грунта. Образующийся этим путем загиб голов пластов переходит в расположенную над ним область поверхностной ползучести рыхлых отложений склона.

3. Если мощность покровного слоя на склоне превышает глубину активной зоны выветривания, то сезонные движения поверхностного плаща не могут иметь отношения к загибу голов пластов. В этом случае действует другой механизм образования загиба голов. Такого рода деформация представляет собой проявление широко распространенного в горных странах процесса глубинной ползучести склонов. Она является результатом длительного воздействия касательных напряжений, величина которых недостаточна для того, чтобы вызвать быстро протекающее обрушение при срезе, но достаточна для того, чтобы вызвать медленные деформации ползучести.

Вид и скорость деформации сдвига грунта определяются значениями коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу $\operatorname{tg} \theta$, представляющего собой отношение касательных напряжений τ , действующих на площадку деформирования к величине приведенных эффективных нормальных напряжений $H + \sigma'$, действующих на ту же площадку (")

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma}{H + \sigma'} = \frac{\tau}{H + \sigma - u}, \quad (1)$$

где

$$H = c' \operatorname{ctg} \varphi', \quad (2)$$

c' и φ' — параметры полного сопротивления сдвигу τ_f , выраженного через эффективные напряжения,

$$\tau_f = c' + \sigma' \operatorname{tg} \varphi', \quad (3)$$

σ — нормальные напряжения, действующие на площадку деформирования, и

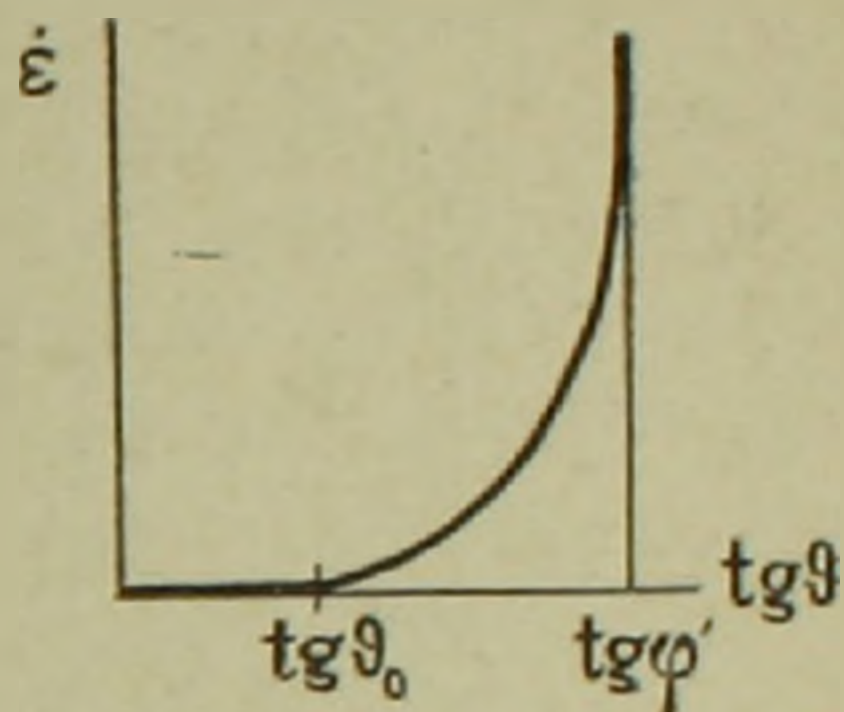
u — поровое давление.

Зависимость между величиной коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу $\operatorname{tg} \theta$ и скоростью относительной деформации $\dot{\varepsilon}$, достигнутой к определенному времени после приложения касательных напряжений, мы приближенно выражаем степенной кривой (фиг. 1):

$$\dot{\varepsilon} = \lambda (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0)^n, \quad (4)$$

где λ — коэффициент текучести грунта;

$$\lambda = \frac{H + \sigma'}{\eta}, \quad (5)$$



Фиг. 1.

η — коэффициент вязкости грунта;

$\operatorname{tg} \theta_0$ — наибольшее значение коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу, при котором еще не происходит деформации ползучести.

Величина коэффициента вязкости грунта η увеличивается со временем и зависит от напряженного состояния грунта. При $n = 1$ и $\eta = \text{const}$ уравнение (4) соответствует Бингамову телу.

При небольшой длительности действия касательных напряжений грунт может находиться в одной из следующих трех фаз, в зависимости от величины коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу:

фаза жесткости, при $0 < \operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} \theta_0$; здесь длительных деформаций не происходит;

фаза ползучести, при $\operatorname{tg} \theta_0 < \operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} \varphi'$; здесь деформации ползучести происходят с убывающей скоростью, так как по уравнениям (4) и (5) при увеличении η уменьшаются λ и $\dot{\varepsilon}$;

фаза пластичности, при $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi'$; здесь удовлетворяется условие пластичности Мора — Терцаги (уравнение 3).

При большой длительности действия касательных напряжений фаза ползучести переходит в фазу жесткости или в фазу пластичности.

4. Тело склона является неравномерно напряженным. Соответственно в нем наблюдается сложное распределение значений коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу $\operatorname{tg} \theta$. С другой стороны, в зависимости от степени выветрелости породы и ее реологических свойств, распределение значений порога $\operatorname{tg} \theta_0$ также является неравномерным. Существенным является соотношение между величинами $\operatorname{tg} \theta$ и $\operatorname{tg} \theta_0$ в каждой точке тела склона. В зависимости от состояния напряжений в теле склона могут быть выделены зоны, в которых грунт находится в одной из указанных трех фаз: жесткости, ползучести и пластичности. Границы этих зон не являются постоянными, а изменяются в зависимости от колебаний напряженного состояния и от времени.

Сравнительно простым случаем является ползучесть покровного слоя, залегающего на плоской, параллельной склону поверхности контакта с коренными породами. Этот случай называется плоскостной глубинной ползучестью склона.

Если мощность изучаемого слоя невелика по сравнению с высотой склона, то можно пренебречь влиянием концевых участков и ввести упрощающее представление о плоском откосе бесконечной длины, обладающим одинаковым вертикальным разрезом в любом месте склона. Величина коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу в этом случае составит (2)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p_r \sin \beta}{H - u + p_r \cos \beta} \quad (6)$$

где p_r — полное вертикальное напряжение, действующее на параллельную откосу площадку, и

β — угол наклона склона.

Из уравнения (6) можно видеть, что величина мобилизованного сопротивления сдвигу с глубиной увеличивается; соответственно увеличивается и деформация сдвигу. Границы зон параллельны склону.

Скорость плоскостной глубинной ползучести покровного слоя мощностью h определяется из выражения

$$v = \int_{h_r}^h \lambda (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0)^n dz,$$

где h_r — положение нижней границы зоны жесткости.

Градиент скорости этих движений в однородных грунтах возрастает с глубиной и при плоскостной глубинной ползучести достигает своего максимума на контакте с коренными породами.

При переходе в подстилающие плотные коренные породы все величины, входящие в формулу скорости глубинной ползучести изменяются. Коэффициент вязкости η материала увеличивается на несколько порядков, и хотя величина H (уравнение 2) также увеличивается, в общем коэффициент текучести λ существенно уменьшается (уравнение 5). Вследствие увеличения H уменьшается величина мобилизованного сопротивления сдвигу $\operatorname{tg} \theta$ (уравнение 1). В одних случаях $\operatorname{tg} \theta$ делается меньше $\operatorname{tg} \theta_0$, и в этих случаях не происходит длительных деформаций пород. В других случаях величина мобилизованного сопротивления сдвигу в верхних горизонтах коренных пород может превышать значение $\operatorname{tg} \theta_0$, и тогда будет происходить вековая глубинная ползучесть склона, скорость которой на несколько порядков ниже скорости ползучести покровного грунта. С глубиной величина $\operatorname{tg} \theta_0$ увеличивается вследствие ослабления влияния выветривания, и здесь при $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0$ происходит затухание глубинной ползучести. Отсюда видно, что наибольшее значение вековой глубинной ползучести обнаруживают породы непосредственно у контакта с покров-

ными отложениями. Поэтому головы пластов изгибаются крючкообразно вниз по склону (фиг. 2).

Образующийся этим путем загиб голов пластов постепенно переходит в расположенную над ним область плоскостной глубинной ползучести склона. Примером такого сочетания может являться загиб голов выветрелых эльбогенских гранитов у Штирна на Карпатах.

5. Если мощность захваченного деформациями слоя соизмерима с высотой склона, то должна быть рассмотрена значительно более сложная задача распределения напряжений в коротком склоне.

Строгого аналитического решения этой задачи в замкнутом виде не существует, и для практических целей могут применяться численные методы, например метод конечных разностей, осуществляемый на электронных счетных машинах. Для качественного анализа могут также применяться методы фотоупругости.

В теле склона располагается область повышенных значений коэффициента мобилизованного сопротивления сдвигу. Там, где эта величина превышает $\operatorname{tg} \theta_0$, образуется зона вековой глубинной ползучести склона. Если пласты коренных пород падают в глубь склона или стоят на головах, то внешним проявлением глубинной ползучести является загиб голов этих пластов. Такие явления отмечены во многих горных странах—на Кавказе, в Альпах, на Карпатах и др. Такой же механизм имеют и „гравитационные структуры“ в долине р. Шаркратма в северо-восточной Фергане в Киргизии (³).

6. Особенностью механизма образования загиба голов круто падающих пластов является перераспределение касательных напряжений по поверхности деформирования. Допустим, что поверхность деформирования параллельна склону. Среднее касательное напряжение τ_a по параллельному склону сечения АА, расположенному на глубине z , составляет (фиг. 2)

$$\tau_a = [\gamma h + \gamma_r(z - h)] \sin \beta, \quad (7)$$

где γ и γ_r —объемный вес грунта и горной породы соответственно.

Эти касательные напряжения вызывают деформации ползучести различных пластов, пересекаемых поверхностью деформирования. Из условий непрерывности среды следует, что скорость деформирования любого пласта на всем протяжении поверхности деформирования должна быть одинаковой, если пренебречь его сжимаемостью. Так как жесткие H и мягкие W пласты характеризуются различными реологическими кривыми (фиг. 3), то отсюда следует, что касательные напряжения неравномерно распределяются по поверхности деформирования; при этом должно соблюдаться равенство

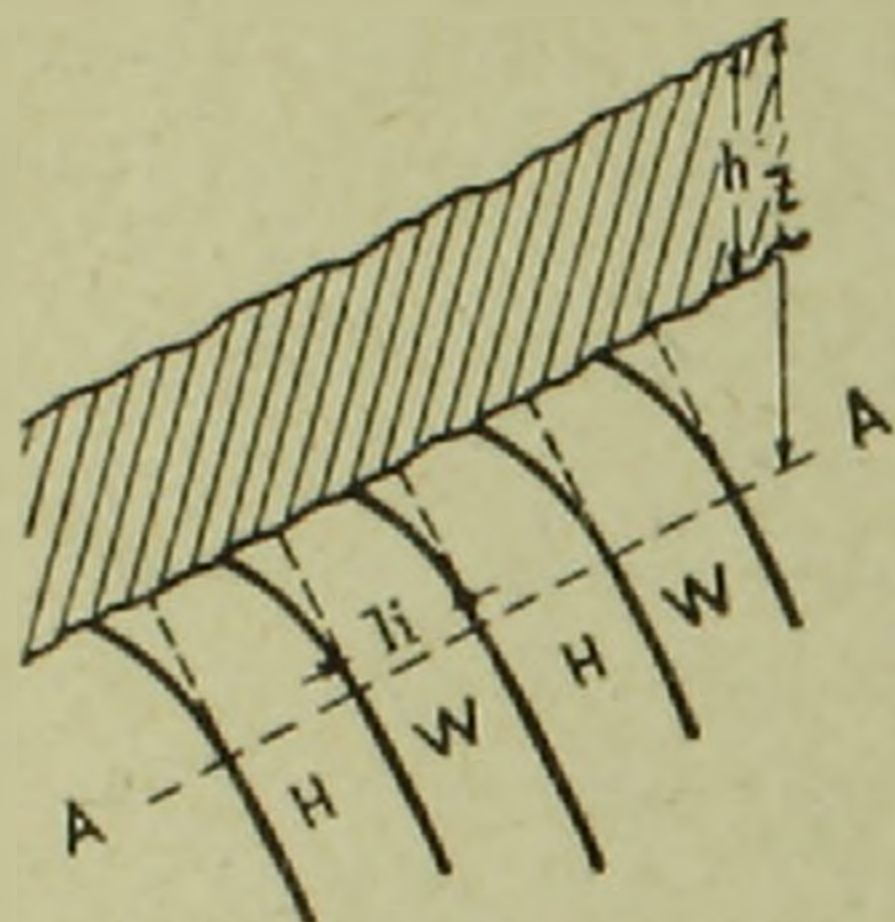
$$\tau_a \Sigma l_i = \Sigma \tau_i l_i,$$

где τ_i —касательное напряжение в i -том слое мощностью l_i .

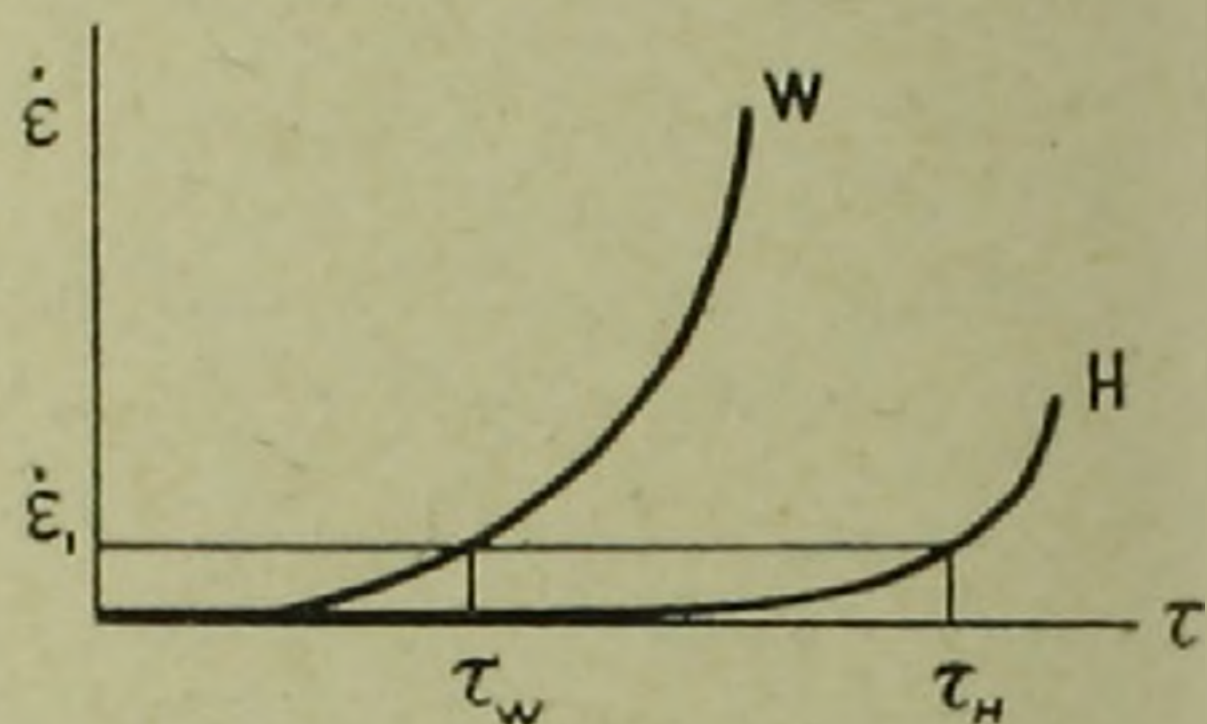
Вначале касательные напряжения концентрируются в жестких пластах и последовательно раскалывают их. Разрушение жестких

пластов вызывает соответствующее перераспределение касательных напряжений, в результате которого в работу вовлекаются более мягкие пласты. В дальнейшем в них развиваются длительные деформации ползучести. Если поверхность деформирования не параллельна склону, то выражение (7) принимает другой вид; однако перераспределение касательных напряжений происходит и в этом случае.

Особый интерес представляет сочетание оползней скальных пород с загибом голов подстилающих пластов. В теле склона, при усилении действия оползнеобразующих факторов возникают и разви-

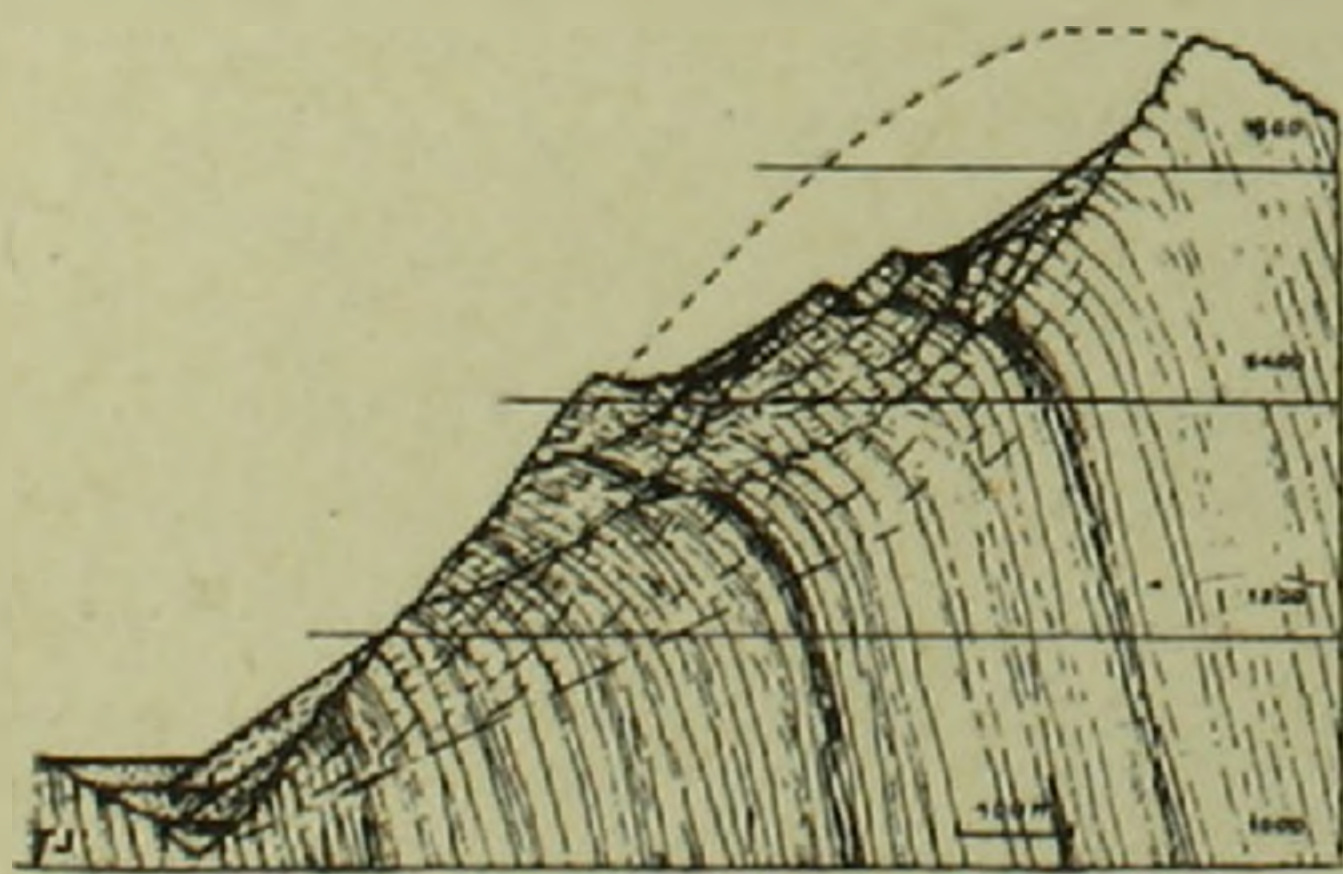


Фиг. 2.



Фиг. 3.

ваются островообразные зоны пластичности, приуроченные к потенциальной поверхности скольжения ⁽²⁾. Как выше, так и ниже этой поверхности происходят деформации ползучести круто падающих пластов коренных пород, в результате которых нормальная к плоскости деформирования прямая принимает S-образную форму. После того как на склоне происходит оползень, расположенные над поверхностью скольжения породы (верхняя часть буквы S) претерпевают новые, значительно большие по величине деформации и смещения,



Фиг. 4.

вследствие чего они теряют или существенно изменяют свою ориентацию. Наоборот, деформированные в процессе глубинной ползучести горные породы, расположенные ниже поверхности скольжения (нижняя часть буквы S), не изменяют своего положения, и возникший в них загиб голов пластов полностью сохраняется. Пример такого сочетания загиба голов пластов, расположенных ниже поверхности сколь-

жения, и оползня пород, расположенных выше этой поверхности (фиг. 4), наблюдался в одной альпийской долине ⁽¹⁾.

7. Изложенные выше выводы имеют качественный характер. Для возможности количественного подхода к анализу загиба голов пластов необходимы результаты реологических исследований горных пород и изучение природного напряженного состояния склонов. Это позволит составить уравнения ползучести горных склонов и определить загиб голов расчетным методом.

Значительный интерес представляет обратная задача—определение реологических характеристик горных пород по результатам натурных измерений, используя, таким образом, природный феномен большого масштаба, в котором процесс протекал в течение геологического времени.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ի. ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ՇԵՐՏԵՐԻ ԳՐԱԴԻԵՆՏԻ ԿԵՆԱԾՈՒՄԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱԻ ՄԱՍԻՆ

Հանքերի խորքային սողի հետևանքով տեղի է ունենում լեռնային ապառների դիք շերտերի գրադիենտի կենաձև ծուռում: Այդ դեֆորմացիաների բնույթը սահմանվում է սահի մորթի դաշված դիմադրությամբ և ապառների ուղղաձիգական հատկություններով: Նկարագրվում են լանդի մարմնում շերտերի գրադիենտի տարրեր ձևերի կենաձևման առաջացման մեխանիզմը և նրանց զուգակցությունը ծածկույթային փխրուն նստվածքների խորքային սահի տարրեր առաջինների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ж. Талобр, Механика горных пород, М., 1960, фиг. 13. ² Г. И. Тер-Степанян, О длительной устойчивости склонов, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961. ³ С. С. Шульц, О гравитационных (массовых) движениях в Тянь-Шане. Изд. Кирг. фил. АН СССР, Фрунзе, 1947, в. 6, с. 85—96.

ФИЗИКА

Х. П. Бабаян, Н. Л. Григоров, Э. А. Мамиджаниян и В. Я. Шестоперов

Высотный ход нуклонов высокой энергии в атмосфере

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 25/IX 1963)

При исследовании характеристик взаимодействий нуклонов высокой энергии с веществом особое значение имеет определение пробега поглощения нуклонов в веществе — $L_{н.п.}$.

Настоящая работа посвящена определению $L_{н.п.}$ в атмосфере. В последнее время многими авторами и разной экспериментальной методикой (ионизационные камеры ⁽¹⁾, стопки фотоэмульсий ⁽²⁾) был определен пробег поглощения ядерно-активных частиц с энергией $\geq 10^{12}$ эв в атмосфере. По данным работ ⁽¹⁻²⁾, $L_{н.я.а.} \sim 125$ г/см². Нами был определен $L_{н.я.а.}$ из высотного хода молодых атмосферных ливней (м.а.л.). Выполненные нами расчеты показали, что в глубине атмосферы пробег поглощения ядерно-активной компоненты определяется только поглощением нуклонной компоненты — $L_{н.я.а.} = L_{н.п.}$ —, несмотря на то, что доля $\pi^\pm$ -мезонов в глубине атмосферы среди частиц с энергией $\geq 10^{12}$ эв может достигать 40% и более от потока нуклонов.

Работа была выполнена на высотах 200 и 3250 м над уровнем моря с установкой, параметры которой подробно описаны в ряде работ (напр., ⁽³⁾).

Установка имела рабочую площадь 10 м² и состояла из шести рядов ионизационных камер (I—VI), длиной 330 см и диаметром 10 см каждая. Камеры V и VI рядов находились под свинцовыми фильтрами, толщина которых в разных сериях опытов варьировалась так, чтобы один из этих рядов находился под слоем свинца толщиной 3 см. (По камерам этого ряда велся отбор ливней). Ряды камер I—IV находились под комбинированным фильтром из графита и свинца. В индивидуальных камерах можно было измерять ионизацию, эквивалентную прохождению по диаметру от ~ 200 до ~ 70.000 релятивистских частиц.

Измерение ионизации в камерах производилось только при возникновении управляющего сигнала, запускавшего систему опроса всех камер и регистрации амплитуд ионизационных импульсов.

Для выработки управляющего сигнала требовалось, чтобы в камерах V и VI рядов одновременно возникла ионизация (суммарная

по ряду), превосходящая 85 ± 0 релятивистских частиц. Из всех случаев срабатывания установки были отобраны такие события, когда в верхнем ряду камер, находящемся под слоем свинца толщиной 3 см суммарная ионизация по ряду $I_0 \geq 1,2 \cdot 10^4$ частиц. При этом не менее 60% ионизации, зарегистрированной всем рядом, было сосредоточено в m камерах, где $m \leq 6$ для высоты 3250 м и ≤ 4 для высоты 200 м. (На причине неодинаковых критериев отбора на разных высотах мы остановимся далее).

Ось ливня мы определяли как место с максимальной величиной ионизации под слоями свинца толщиной в 2—4 см. Камеры V ряда позволяли найти координату оси ливня в одной плоскости, а камеры VI ряда — в другой, так как оси камер обоих рядов были взаимно перпендикулярны.

Чтобы уменьшить ошибку в определении энергии ливня и, следовательно, дискриминацию в их числе, связанную с падением оси ливня близко к краю установки, отбирались только те ливни, оси которых находились от краев установки на расстояниях больших чем $\frac{m}{2} 10 \text{ см}$.

По нашим оценкам, толчок в I_0 релятивистских частиц в ряду камер под 3 см свинца вызывался электронно-фотонной компонентой с энергией $1,4 \cdot 10^8 I_0$ эв (т. е. при $I_0 = 1,2 \cdot 10^4$ частиц $E_{э.ф.} = 1,7 \cdot 10^{12}$ эв).

Всего было зарегистрировано 279 ливней на высоте 3250 м и 37 ливней на высоте 200 м над уровнем моря.

Зная число ливней $N(m; \geq I_0)$ с данным m , упавших за известное время наблюдения на площадь $S(m)$, можно определить абсолютную частоту ливней — $\nu(m; \geq I_0)$ —, создающих под 3 см Pb суммарную ионизацию $I_0 \geq 1,2 \cdot 10^4$ частиц. $\nu(m \leq 6, I_0 \geq 1,2 \cdot 10^4 \text{ частиц}) = (12,3 \pm 0,74) \times 10^{-10} \text{ см}^{-2} \text{сек}^{-1}$ для высоты 3250 м и $\nu(m \leq 4, I_0 \geq 1,2 \cdot 10^4 \text{ частиц}) = (0,74 \pm 0,12) \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-2} \text{сек}^{-1}$ для высоты 200 м.

Как видно из вышеприведенных данных, при переходе от уровня моря к высоте 3200 м, интенсивность отобранных ливней возрастает в 14—16 раз, т. е. растет с высотой так же, как растет интенсивность ядерной компоненты космических лучей.

Проведенный анализ экспериментальных данных показал, что м.а.л. зарождаются в одном акте взаимодействия в ограниченном слое атмосферы над установкой. Причем толщина эффективного слоя, в котором они генерируются, определяется энергией регистрируемых м.а.л. и условием их регистрации (числом камер m , на которые падает заданная доля энергии м.а.л.). Поэтому, при фиксированных значениях $E_{э.ф.}$ и m , изменение с глубиной атмосферы частоты регистрируемых м.а.л. будет определяться только пробегом $L_{п.я.л.}$.

Для получения пробега поглощения потока ядерно-активных частиц, генерирующих м.а.л., нужно в экспериментальные данные

измеренной на двух высотах интенсивности γ внести следующие поправки.

1. Поправку на различное угловое распределение м.а.л. на уровне моря и высоте гор

$$N_{\text{м.а.л.}}(\geq E_{\text{э.ф.}}, x, \theta) d\omega = N_{\text{м.а.л.}}(\geq E_{\text{э.ф.}}, x, 0) \cos^n \theta d\omega, \quad (1)$$

где $n = \frac{x}{L_{\text{п.я.а.}}}$. С учетом геометрии установки полное число регистрируемых на данной глубине м.а.л. будет равно:

$$N_{\text{м.а.л.}}(\geq E_{\text{э.ф.}}, x, m) = \frac{2\pi}{n+2} N_{\text{м.а.л.}}^0(\geq E_{\text{э.ф.}}, x, m) = \frac{A(E_{\text{э.ф.}})}{n+2} e^{-\frac{x}{L_{\text{п.я.а.}}}}, \quad (2)$$

где $N_{\text{м.а.л.}}^0(\geq E_{\text{э.ф.}}, x, m)$ — число м.а.л. с энергией $\geq E_{\text{э.ф.}}$ на глубине x , падающих на установку в вертикальном направлении в единице телесного угла. Заменяя n на $\frac{x}{L_{\text{п.я.а.}}}$, получим:

$$\frac{N_{\text{м.а.л.}}(\geq E_{\text{э.ф.}}, x_1, m)}{N_{\text{м.а.л.}}(\geq E_{\text{э.ф.}}, x_2, m)} = \frac{\frac{x_2}{L_{\text{п.я.а.}}} + 2}{\frac{x_1}{L_{\text{п.я.а.}}} + 2} e^{\frac{(x_1-x_2)}{L_{\text{п.я.а.}}}} \quad (3)$$

2. Поправку на различную плотность атмосферы на уровнях моря и гор, что приводит к несколько различной доле энергии, регистрируемой в виде м.а.л. Поэтому мы отобрали ливни, в которых более 60% ионизации в камерах под 3 см Рb содержится в ≤ 4 камерах на высоте 200 м и в ≤ 6 камерах на высоте 3250 м над уровнем моря. Но и при выполнении этого условия еще не будет достигнута полная идентичность установок и системы отбора на разных высотах. При одинаковой функции пространственного распределения потока энергии для ливня с данной энергией $E_{\text{э.ф.}}$ и m , одинаковые энергии м.а.л. будут падать на площади установок S на уровне моря и $\left(\frac{1000 \text{ г/см}^2}{700 \text{ г/см}^2}\right)^2 S$ на высоте гор. Наши измерения проводились с установкой одной и той же площади $S = 10 \text{ м}^2$ на обеих высотах. Поэтому на высоте гор в некоторых м.а.л. (с не очень круто спадающей функцией пространственного распределения плотности потока энергии) часть энергии $E_{\text{э.ф.}}$ мы недомеряли и, следовательно, занижали число м.а.л. с данной энергией $E_{\text{э.ф.}}$. Как показал анализ экспериментальных данных, поправка на общее число м.а.л. с $m \leq 6$ составляет 7,4%. Экспериментально определенная частота м.а.л. с $m \leq 6$ на высоте 3250 м над уровнем моря равна $(12,3 \pm 0,74) \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$; с поправкой в 7,4% она будет равна $(13,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$.

3. Поправку на вклад μ -мезонов в толчки в V и VI рядах камер, имитирующие м.а.л.

Уже один тот факт, что частота м.а.л. растет в $14 \div 16$ раз от уровня моря до высот гор, показывает, что μ -мезоны в процессе образования м.а.л. играют небольшую роль. Как показал сделанный нами анализ экспериментальных данных, вклад мюонов в отобранные события на высоте 3250 м не превышает 1% всех м.а.л. На уровне же моря вклад μ -мезонов в генерацию событий, имитирующих молодые атмосферные ливни, составляет 15%. Следовательно, с поправкой на мюоны истинное число м.а.л. на уровне моря $N_{\text{м.а.л.}}(E_{\text{э.ф.}} > 1.7 \cdot 10^{12} \text{ эв}, m \leq 4) = (6,4 \pm 1,2) \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$ ($\nu(m \leq 4, I_0 > 1,2 \times 10^4 \text{ частиц}) = (7,4 \pm 1,2) \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$).

С учетом указанных поправок, пользуясь выражением (3), получим $L_{\text{н.н.}} = L_{\text{н.н.}} = 109 \pm 8 \text{ г/см}^2$.

Т. е. пробег поглощения в нижних слоях атмосферы нуклонов с энергией $E > 2 \cdot 10^{12} \text{ эв}$ равен $109 \pm 8 \text{ г/см}^2$.

Если пробег для взаимодействия $L_{\text{вз}}$ нуклонов в атмосфере равен 80 г/см^2 , то $L_{\text{н.н.}} = 109 \text{ г/см}^2$ соответствует среднему коэффициенту неупругости нуклонов $\bar{K} = 0,5$. Если $L_{\text{вз}} = 90 \text{ г/см}^2$, то $\bar{K} = 0,6$.

Институт физики ГКАЭ (Ереван) НИИЯФ, МГУ,

Ереванский государственный университет

Խ. Պ. ԲԱԲՈՅԱՆ, Ն. Լ. ԳՐԻԳՈՐՈՎ, Է. Ա. ՄԱՍԻՋԱՆՅԱՆ ԵՎ Վ. Յ. ՇԵՍՏՈՊՅՈՐՈՎ

Քաղնի էներգիայով օժտված նուկլոնների կլանման վազերի ուղեւորւմ
մթնոլորտում

Նրիտանաւոր յթնոլորտային հեղեղների ուղեւորւմը ծովի մակերևութի
և նրանից 3200 մ. բարձրության վրա, հնարավորութիւն է տալիս որոշելու $E > 1,7 \cdot 10^{12}$
է. վ. էներգիայով օժտված նուկլոնների կլանման վազեր յթնոլորտի ստորին շերտերում
 $L_{\text{ն.ն.}} = 109 \pm 8 \text{ գ/սմ}^2$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ О. И. Довженко, Г. Т. Зацепин., Е. А. Мурзина, С. И. Никольский, В. И. Яковлев. Труды Международной конференции по космическим лучам, т. II, стр. 144, М., 1960. ² Дж. Дьюти, С. М. Фишер, П. К. Фаулер, А. Каддаура, Д. Х. Перкинс, К. Пинкау. Труды Международной конференции по космическим лучам, т. I, стр. 28, М., 1960. ³ Н. Л. Григоров, М. А. Кондратьева, А. И. Савельева, В. А. Собиняков, А. В. Подгурская, В. Я. Шестоперов, Труды Международной конференции по космическим лучам, т. I, стр. 122, М., 1960.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. Л. Тер-Микаелян, чл.-корр. АН Армянской ССР

Расчет интенсивности импульсного лазера

(Представлено 11/X 1963)

Несмотря на большое внимание, которое в последние годы уделяется лазерам, имеющаяся теоретическая интерпретация происходящих в них процессов является недостаточной. Процессы, связанные с интенсивностью лазерного излучения, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для интенсивности, обсуждению которых посвящена отдельная работа⁽¹⁾.

В настоящей заметке дан наглядный расчет интенсивности импульсного излучения. Отметим, что ввиду резкой направленности лазерного излучения задачу с большой степенью точности можно рассматривать как одномерную.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задана перенаселенность

$$\Delta(t) = \Delta_0,$$

где

$$\Delta(t) = n_2(t) - n_1(t), \quad (1)$$

где n_2 и n_1 число атомов в 1 см^3 , находящихся в возбужденном и в стационарном состоянии. Вопрос, каким образом создана перенаселенность, нас сейчас не интересует. Важно, чтобы действием внешнего источника возбуждения можно было бы пренебречь начиная с момента $t \geq 0$, т. е. с того момента, когда начинает образовываться лазерная вспышка. Тут нужно сделать одно существенное замечание. Как мы увидим ниже, время, характерное для лазерной вспышки порядка наибольшей из двух величин (при $\nu\Delta_0 \gg \Sigma_0$)

$$t_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\sigma\nu\Delta_0} \ln \frac{\nu\Delta_0}{2\Sigma_0} \quad \text{и} \quad t'_{\text{эф}} \sim \frac{L}{(1-r)\nu} \quad (\text{обозначения см. ниже}).$$

За это время $1/2$ всей энергии, запасенной за счет перенаселенности атомных уровней, излучается. Если энергия, подводимая накачкой, за этот промежуток времени мала по сравнению со всей излучаемой энергией, то излучение имеет импульсный характер. Если

энергия накачки компенсирует потери за эти промежутки времени, то мы приходим к непрерывному режиму. Ниже мы будем заниматься импульсным режимом.

Пусть генерирующий образец имеет длину L и произвольное поперечное сечение и пусть на торцы образца, плоскости которых строго перпендикулярны оси образца, нанесены отражающие покрытия с коэффициентами отражения r_1 и r_2 для левого и правого торца соответственно. Не уменьшая общности рассуждений, примем $r_1 = 1$. Пусть в момент $t = 0$ задано инициирующее излучение интенсивности Σ_0 . Интенсивность определена как число квантов, проходящих (параллельно оси образца) в момент t , в 1 секунду через площадку в 1 см^2 , расположенную в точке x . Начальное излучение может быть либо излучением, вводимым извне, либо представляет собою случайные кванты люминесценции, излученные точно в направлении, параллельном оси образца. Очевидно, что частота инициирующего излучения должна действовать резонансным образом на переходы $2 \rightleftharpoons 1$. Расчеты, приведенные ниже, показывают, что характеристика лазерной вспышки слабо зависит от Σ_0 . Поэтому конкретное задание величины Σ_0 несущественно.

Рассмотрим усиление начальной интенсивности квантов в процессе их движения в образце. Пусть первоначальные инициирующие кванты (или внешнее инициирующее излучение) заключены в некотором объеме и имеют плотность $\Sigma_0(x)/v$, где v есть скорость света в образце.

Нам необходимо рассчитать, сколько квантов в каждый момент времени подходит к правому торцу. Зная это число, обозначаемое через $\Sigma(t)$, и умножив его на $(1 - r - \alpha)$, мы получим выход интенсивности в зависимости от времени и других параметров (α — характеризует величину потерь в отражающем слое). Пусть в начале процесса кванты с плотностью $\Sigma_0(x)/v$ находятся для определенности у правого торца и двигаются вправо. Они могут выйти из образца с вероятностью $(1 - r - \alpha)$, либо отразиться с вероятностью r от правой стенки обратно в образец, пройти его, отразиться от левой стенки и вновь подойти к правому торцу. Этот процесс продолжается аналогичным образом многократно, вплоть до полного выхода всего образовавшегося в образце излучения через правую стенку. Время, необходимое кванту для одного прохода (в оба конца), равно $\Delta t = \frac{2L}{v}$. При прохождении толщины dx вдоль направления оси x интенсивность квантов меняется согласно уравнению

$$\frac{d\Sigma(x)}{dx} = (z_1 - z_0) \Sigma(x). \quad (2)$$

z_0 — есть коэффициент поглощения, учитывающий все процессы квантов, кроме резонансных процессов, $z_1 = \Delta(x, t) \sigma$ — есть коэффициент

вынужденного поглощения и вынужденного испускания квантов, σ — соответствующий поперечник. Решение (2) в предположении, что все величины слабо меняются на длине образца, т. е. время порядка $2L/v$, можно записать следующим образом:

$$\Sigma(x) \sim \Sigma(0)(1 + (z_1 - z_0)x). \quad (3)$$

Очевидно, что должно выполняться соотношение

$$(z_1 - z_0)l \ll 1. \quad (4)$$

Таким образом, прирост интенсивности у правого торца за время $\frac{2L}{v}$, т. е. за время, соответствующее одному двойному прохождению,

есть

$$\Sigma\left(\frac{2L}{v} + t\right) - \Sigma(t) = 2\Sigma(t)L(z_1 - z_0). \quad (5)$$

Если считать, что при каждом акте отражения от правой стенки часть энергии теряется из-за выхода интенсивности и только $r\Sigma$ отражается и участвует в дальнейшем процессе, то в формуле (2) нужно учесть этот факт, добавив к истинным процессам поглощения, равным $z_0\Sigma(t)$, еще потерю интенсивности за счет выхода излучения (при каждом двойном пробеге образца) через правый полупрозрачный торец, равную $\Sigma(t)(1 - r)$. Отметим, что коэффициент отражения может зависеть от времени, что соответствует переменной добротности резонатора. Чтобы получить соответствующее дифференциальное уравнение, нужно предположить, что интенсивность за время $\frac{2L}{v}$ меняется настолько слабо, что левую часть (5) можно заменить на дифференциал. Это предположение будет оправдано ниже. Тогда мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = v\Sigma(z_1 - z), \quad (6)$$

где

$$z = z_0 + \frac{1 - r}{2L},$$

в коэффициент z_1 — входит вторая неизвестная функция времени, перенаселенность Δ . Поэтому необходимо составить еще одно уравнение. Его мы найдем, приравняв убыль возбужденных атомов за счет вынужденного излучения, прибыли в интенсивности за счет вынужденно испущенных квантов

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{1}{2} \left[\Delta\left(t + \frac{2L}{v}\right) - \Delta(t) \right] + \frac{2L}{v} \frac{n_2}{\tau} \right\} = \\ & = \frac{1}{v} \left[\Sigma\left(t + \frac{2L}{v}\right) - \Sigma(t) \right] + z\Sigma(t) \frac{2L}{v}, \end{aligned}$$

или

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial t} - \frac{n_2}{\tau} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \kappa \Sigma(t). \quad (7)$$

Член $\frac{n_2}{\tau}$ описывает убыль квантов за счет спонтанных процессов. Уравнения (6) и (7) по физическому содержанию соответствуют уравнениям для полного числа фотонов в резонаторе (^{2,3}). Мы будем рассматривать процессы, продолжительность которых значительно меньше времени люминесценции. Поэтому членом $\frac{n_2}{\tau}$ можно пренебречь. Из (6) и (7) найдем уравнение для Δ

$$\frac{\partial^2 \ln \Delta}{\partial t^2} = v \sigma_{21} \frac{\partial \Delta}{\partial t} - \kappa v \frac{\partial \ln \Delta}{\partial t}. \quad (8)$$

Примем, что κ от времени не зависит. Интегрируя и определяя константу из начальных условий (при $t = 0$; $\Sigma = \Sigma_0$; $\Delta = \Delta_0$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \Delta &= v \sigma (\Delta - \Delta_0) - \kappa v \ln \frac{\Delta}{\Delta_0} - 2 \Sigma_0 \sigma \\ \int_{\Delta_0}^{\Delta(t)} \frac{d \ln \Delta}{v \sigma (\Delta - \Delta_0) - \kappa v \ln \frac{\Delta}{\Delta_0} - 2 \Sigma_0 \sigma} &= t. \end{aligned} \quad (9)$$

Зная значения $\Delta = \Delta(t)$, мы по формуле (10) (которая получается из (6), (7) и первого интеграла уравнения) найдем $\Sigma(t)$

$$\Sigma(t) - \Sigma(0) = \frac{v}{2} [\Delta_0 - \Delta(t)] - \frac{\kappa v}{2 \sigma_{21}} \ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(t)} \quad (10)$$

при $t \rightarrow \infty$, $\Sigma(t) \rightarrow 0$, в то время как $\Delta(\infty)$ остается конечной, хотя и экспоненциально малой. Между Δ_0 и $\Delta(\infty)$ имеется соотношение

$$\Delta_0 - \Delta(\infty) - \frac{\kappa}{\sigma_{21}} \ln \frac{\Delta_0}{\Delta(\infty)} = -\frac{2}{v} \Sigma_0, \quad (11)$$

которое тоже является следствием первого интеграла уравнения (8). Условие генерации соответствует требованию, чтобы производная $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$ была положительная при $t = 0$. Это дает

$$\sigma_{21} \Delta(0) \geq \kappa_0 + \frac{1 - r}{2l}. \quad (12)$$

Условие максимума интенсивности соответствует $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0$, или согласно (6) условию

$$\Delta_{21}(t) = \frac{\kappa}{\sigma_{21}} \quad (13)$$

подстановка в (10) дает:

$$\Sigma_{\max} = \Sigma(0) + \frac{v}{2} \left(\Delta_0 - \frac{z}{\sigma_{21}} \right) - \frac{zv}{2\sigma_{21}} \ln \frac{\Delta(0) \sigma_{21}}{z}. \quad (14)$$

До максимума $z < z_1$ и для оценки зависимости $\Sigma(t)$ от времени можно положить в уравнения (6) и (9) $z = 0$. Тогда мы получим из (9) $\Delta(t)$ и из (10), $\Sigma(t)$

$$\Sigma(t) = \frac{\frac{v\Delta_0}{2} + \Sigma_0}{-\frac{v\Delta_0}{2\Sigma_0} \exp\{-\sigma_{21}(v\Delta_0 + 2\Sigma_0)t\} + 1}. \quad (15)$$

Заметим, что Σ_0 можно практически всегда пренебречь по сравнению с $v\Delta_0$. В обратном случае (далеко за максимумом) $z_1 \ll z$, и мы получим, что $\Sigma(t)$ изменяется согласно закону

$$\Sigma(t) \sim \exp(-vzt). \quad (16)$$

Еще раз подчеркнем, что время эффективного нарастания и спада лазерного излучения должно быть много больше времени пробега образца, чтобы на длине L образца величины слабо изменялись. С другой стороны, $t_{\text{эф}}$ и $t'_{\text{эф}}$ должны быть значительно меньше времени люминесценции, чтобы спонтанными распадами за время вспышки можно было пренебречь. Наконец, укажем, что существует некоторый предел для увеличения мощности лазерной вспышки (без изменения полной энергии импульса) при уменьшении времени вспышки (например, с помощью изменения добротности). Ясно, что эффективное увеличение мощности будет происходить до тех пор, пока длительность выпуска излучения будет больше наибольшего из двух эффективных времен. В противном случае либо не все возбужденные атомы успеют высветиться, либо образовавшееся излучение не успеет выйти из резонатора.

Мы рассмотрели случай образования одного всплеска излучения. На практике накачка обычно осуществляется импульсной лампой, время свечения которой порядка миллисекунд. За это время может образоваться много всплесков лазерного излучения, поскольку мы предполагали, что время лазерного процесса много меньше времени люминесценции, которая по случайным обстоятельствам для рубина порядка времени люминесценции.

Чтобы учесть дополнительное изменение перенаселенности за счет накачки, нужно в левую часть равенства (7) добавить величину $2w_{13}n_1$, которая характеризует прибыль перенаселенности из-за действия внешнего источника. Мы, естественно, считаем, что все атомы, возбужденные с уровня 1 на какой-либо промежуточный уровень, моментально (т. е. за время значительно меньшее времени вспышки) переходят на рабочий уровень.

Ясно, что если энергия, подводимая накачкой, за время всплеска лазера мала по сравнению с излученной энергией, то мы имеем дело

с серией, вообще говоря, отдельных всплесков или пиков излучения. В противном случае кривая зависимости интенсивности лазерного излучения от времени будет похожей на соответствующую кривую вспышки импульсной лампы, на которую наложены колебания, соответствующие отдельным всплескам лазерного излучения. Их можно рассчитать, линеаризировав уравнения (6) и (7). Чем больше интенсивность накачки, чем больше добротность резонатора, тем уже и меньше по величине отдельные пики лазерного излучения на общей кривой лазерного излучения. По-видимому, эксперимент качественно согласуется с этими выводами (^{1,5}). Уравнение (8), которому подчиняется перенаселенность, в этом случае несколько изменится и с учетом зависимости Δ , как от внешней накачки так и от спонтанных процессов, примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \ln \Delta}{\partial t^2} - v_3 \frac{\partial \Delta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \ln \Delta}{\partial t} - \left(N_0 w_{13} - \frac{N_0}{\tau} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + \\ + \frac{v}{\Delta} (\sigma \Delta - \kappa) \left[(N_0 - \Delta) w_{13} - \frac{N_0 + \Delta}{\tau} \right] + \frac{\partial w_{13}}{\partial t} \left(1 - \frac{N_0}{\Delta} \right) = 0, \quad (17)$$

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

Խմբույթային լազերի ինտենսիվության հաշվարկը

Տրված է իմպուլսային լազերային ճառագայթման ինտենսիվության հաշվարկի համար հաճախությունների ակնյալ արտածումը:

Քերված են արտահայտություններ սեղանատրի մեջ բարորակության դեպքում ճառագայթման ինտենսիվության հաշվարկի համար:

Արդյունքներից (9, 15, 16 բանաձևերը) հետևում է, որ կուտակման սեփմում լազերի իմպուլսային ճառագայթումը բնորոշող ժամանակները հետևյալ մեծությունների կարգի են՝

$$t_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\sigma v \Delta_0} \ln \frac{v \Delta_0}{2 \Sigma_0} \quad \text{և} \quad t'_{\text{эф}} \sim \frac{l}{(1 - r) v}$$

Այդ ժամանակների ընթացքում, սեղանատրի բարորակության ակնթարթային մեծացման դեպքում, կուտակված ամբողջ էներգիայի կեսը ճառագայթվում է լազերային թռիկման ձևով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Л. Тер-Микаелян, А. Л. Микаэлян. ДАН СССР, 1963 г. (в печати).
- ² H. Stutz, de Mars. „Quantum Electronics Columbia University“, New-York, 1960.
- ³ А. М. Прохоров. Радиотехника и электроника, 6, 1073, 1963. ⁴ П. Воли, Г. Кемени, Journal of Applied Physics, 34, 956, 1963. ⁵ П. Г. Мейман, Nature, 187, 4736, 493; 1960. Brit. Commun and Electronics, 7, 9, 674, 1960.

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Н. К. Карапетян

Энергетическая характеристика землетрясений
Армянского нагорья и Малого Кавказа

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 30 VII 1962)

С целью изучения сейсмичности Армянского нагорья и Малого Кавказа нами сделана попытка оценить энергию всех землетрясений этой области. Для исследуемого района установлена зависимость между балльностью I и магнитудой M землетрясения:

$$M = 0,47 I + 1,66. \quad (1)$$

Эту формулу можно представить также в виде:

$$I = 2,13 M - 3,53. \quad (2)$$

Согласно Гутенбергу и Рихтеру ⁽¹⁾ между энергией E и магнитудой M землетрясения существует зависимость:

$$\lg E = 11,8 + 1,5 M. \quad (3)$$

Подставляя в это последнее уравнение значение M из формулы (1), получим:

$$\lg E = 14,29 + 0,71 I. \quad (4)$$

Для Большого Кавказа Е. Ф. Саваренским и Э. А. Джибладзе ⁽²⁾ эта зависимость получена в виде:

$$\lg E = 13,5 + I. \quad (5)$$

В целях массовой классификации по энергии землетрясений Армянского нагорья и Малого Кавказа составлена энергетическая шкала, которая состоит из 10 классов. Энергия землетрясения каждого последующего класса больше энергии предыдущего класса в 10 раз. Первый класс соответствует энергии 10^{14} эрг или же $K = \lg E = 14$. Следовательно, десятый класс будет соответствовать энергии 10^{23} эрг или же $K = \lg E = 23$. Используя формулы (3) и (4), определены значения магнитуды M и балльности I для отдельных классов. Установлена также предельная дальность регистрации.

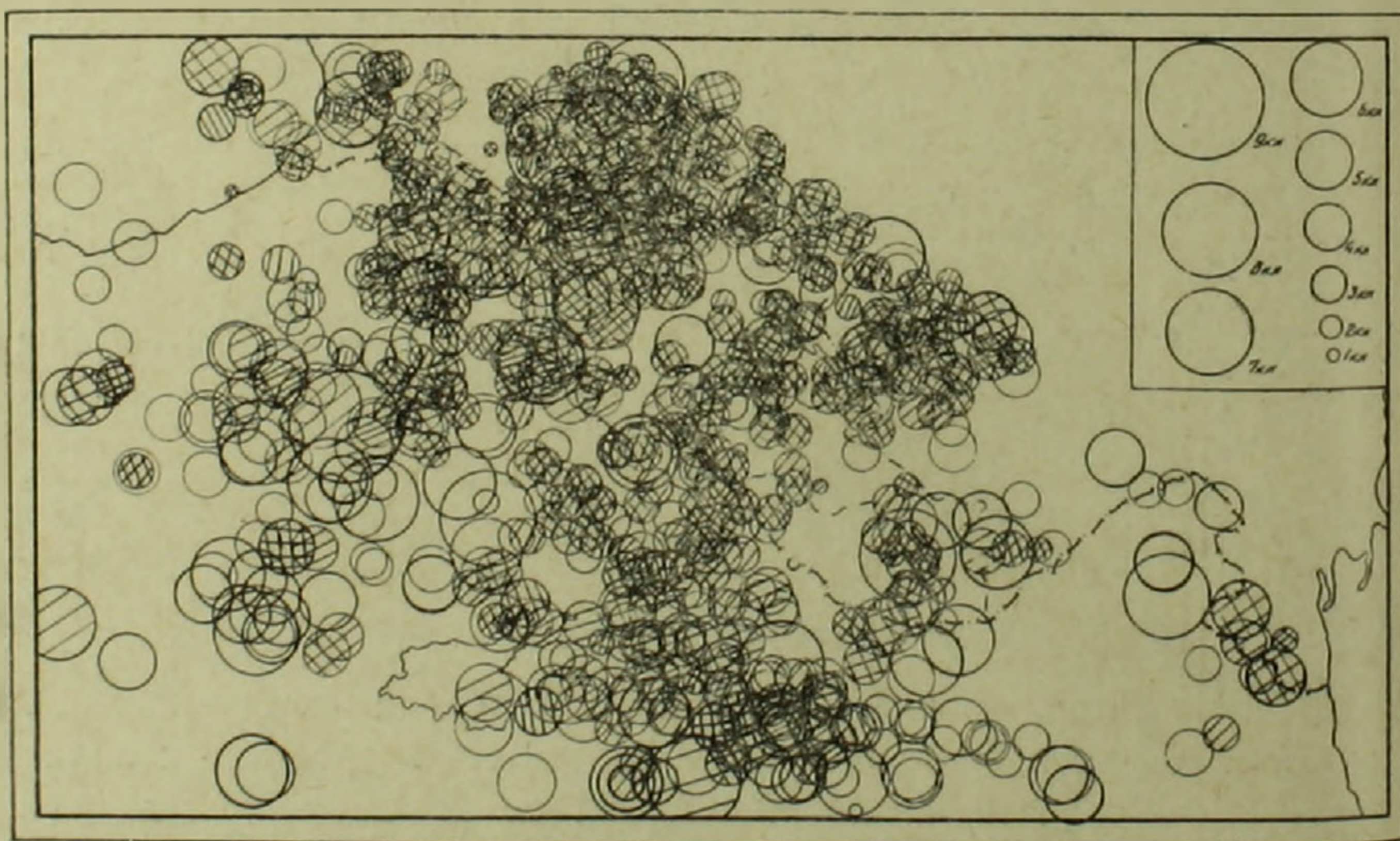
В табл. 1 приведена энергетическая шкала со значениями магнитуды, силы землетрясения в баллах и предельной дальностью регистрации.

Таблица 1

№ класса	Десятичный логарифм энергии, вы- раженной в эргах	Магнитуда M	Сила земле- трясения в баллах	Предельная дальность регистрации, км
1	14	$1\frac{1}{2} < M < 2$	1	100
2	15	$2 < M < 2\frac{3}{4}$	2	200
3	16	$2\frac{3}{4} < M < 3\frac{1}{2}$	3	400
4	17	$3\frac{1}{2} < M < 4$	4	800
5	18	$4 < M < 4\frac{1}{4}$	5—6	3200
6	19	$4\frac{1}{4} < M < 5\frac{1}{2}$	7	6400
7	20	$5\frac{1}{2} < M < 6$	8	—
8	21	$6 < M < 6\frac{3}{4}$	9—10	—
9	22	$6\frac{3}{4} < M < 7\frac{1}{2}$	11	—
10	23	$7\frac{1}{2} < M$	12	—

Предельная дальность регистрации дана только для первых шести классов, так как практически начиная с 7-го энергетического класса землетрясение может быть записано всеми станциями мира и понятие о дальности регистрации теряет свой смысл.

С помощью составленной шкалы проведена классификация по энергии всех землетрясений исследуемого района и построена карта эпицентров землетрясений с оценкой энергии, представленная на фиг. 1.



Фиг. 1.

На карте радиус окружности эпицентра условно пропорционален энергии землетрясения, т. е. при увеличении энергии в 10 раз радиус окружности удваивается. Двусторонней штриховкой отмечены эпицентры землетрясений, координаты которых определены с ошибкой, не превышающей 25 км, односторонней — 50 км. Полыми кругами отмечены эпицентры, положение которых определено с погрешностью, большей 50 км.

В советской части рассматриваемой области выделены семь сейсмоактивных зон: Ахалкалакская, Ереванская, Ленинакано-Туманянская, Кировабадская, Зангезурско-Карабахская, Черноморско-Батумская и Талышская. Из общего числа (918) землетрясений I энергетического класса для всей рассматриваемой области Армянского нагорья и Малого Кавказа за период с 1899 г. по 1960 г. эпицентры 873 землетрясений расположены в Ахалкалакской зоне. Здесь находится и основная часть (1721 из общего числа 1887) землетрясений 2-го энергетического класса. Наряду со слабыми землетрясениями в этой зоне имеются также эпицентры сильных землетрясений. В остальных сейсмоактивных зонах в пределах Советского Союза в основном расположены эпицентры землетрясений 2 и 3 класса. За рубежом находятся эпицентры землетрясений более высоких классов.

В табл. 2 приведены абсолютные значения выделившейся энергии за период времени с 1951 г. по 1960 г. как во всей исследуемой области, так и в отдельных зонах, имеющих разные площади. В этой же таблице даны значения относительной энергии, то есть доли в суммарной энергии, выделившейся в советской части исследуемого района и во всей области, а также указаны значения средней плотности сейсмической энергии, выделившейся на площади в 1 км^2 в течение часа. Вследствие некоторого произвола в оконтуривании выделенных зон и приближенности методов оценки энергии землетрясений цифры, указанные в табл. 2, имеют несколько ориентировочный характер.

Средняя плотность энергии землетрясений, то есть количество энергии, выделявшейся ежечасно с каждого квадратного километра площади, при предположении о равномерном распределении этой энергии в пространстве и во времени может служить в какой-то мере энергетической характеристикой исследуемого района. Величины средней плотности энергии исследуемой территории Армянского нагорья и Малого Кавказа, советской зоны, а также зарубежной зоны, как видно из табл. 2, примерно одинаковые (несколько большая (941) у зарубежной зоны и несколько меньшая (842) у советской зоны, по сравнению со всей областью (909). Следовательно, в этом смысле территории советской и зарубежной зон исследуемого района равнозначны.

Наибольшая средняя плотность энергии наблюдается в Ахалкалакской зоне. В Ереванской и Ленинакано-Туманянской зонах одинаковая, а в Зангезурско-Карабахской зоне примерно такая же. Кировабадская зона обладает очень большой величиной средней плотности энергии землетрясений.

Как видно из табл. 2, в советской части исследуемого района за период времени с 1951 г. по 1960 г., то есть за последнее десятилетие, выделилось в 2,5 раза меньше энергии, чем в зарубежной части, в то время как по количеству происшедших землетрясений эта зона превосходит зарубежную более чем в 8 раз. Половина всей выделившейся в советской части энергии приходится на Ахалкалак-

З о н а	Количество емлегресе- ний	Площадь зоны, км ²	Энергия в джоулях
Вся область	4080	277 500	2 183 142 · 10 ⁷
Советская часть	3635	85 625	622 682 · 10 ⁷
Зарубежная часть	445	191 875	1 560 460 · 10 ⁷
Ахалкалакская	3357	20 625	336 537 · 10 ⁷
Ленинканно-Туманянская	66	11 250	4 638 · 10 ⁷
Ереванская	45	9 400	3 951 · 10 ⁷
Зангезурско-Карабах- ская	30	13 125	3 792 · 10 ⁷
Кировабадская	109	10 625	137 683 · 10 ⁷
Талышская	6	6 250	21 210 · 10 ⁷
Черноморско-Батум- ская	22	13 750	114 871 · 0 ⁷

Таблица 2

Процент от энергии, выделенной на террито- рии всего исследуемого района	Процент от энергии, выделенной на террито- рии советской части ис- следуемого района	Средняя плот- ность энергии зем-ний дж/час, км ²
—	—	909
28,52	—	842
71,48	—	941
15,42	54,05	1889
0,21	0,74	48
0,18	0,63	49
0,17	0,61	33
6,31	2,11	1500
0,97	3,41	393
5,26	18,45	967

скую зону. В Ереванской, Ленинакано-Туманянской и Зангезурско-Кирабахской зонах за указанный период выделилось примерно одинаковое количество энергии. Энергия землетрясений Кировабадской зоны более чем в 10 раз превосходит суммарную энергию этих трех зон.

На фиг. 2 представлены графики распределения энергии по годам во всей рассматриваемой области, в советской и зарубежной частях, а также в Ахалкалакской зоне землетрясений за период с 1951 г. по 1960 г. Согласно этим графикам во всем исследуемом районе, а также в зарубежной части максимальное количество энергии выделилось в 1952 г., в советской части и в Ахалкалакской зоне землетрясений максимальное количество энергии выделилось в 1959 г.

Между логарифмом числа землетрясений (n) и магнитудой (M) или логарифмом энергии (E) землетрясений существует прямая зависимость (³):

$$\lg n = a - bM. \quad (7)$$

По предложению Ю. В. Ризниченко выражения (7) названы графиками повторяемости. С помощью этих графиков возможно определение периодов повторения в исследуемом районе землетрясений различной балльности. Знание периода повторения сильных (7, 8, 9 баллов) землетрясений, очевидно, может иметь существенное значение при изучении сейсмичности и сейсмическом районировании данной территории.

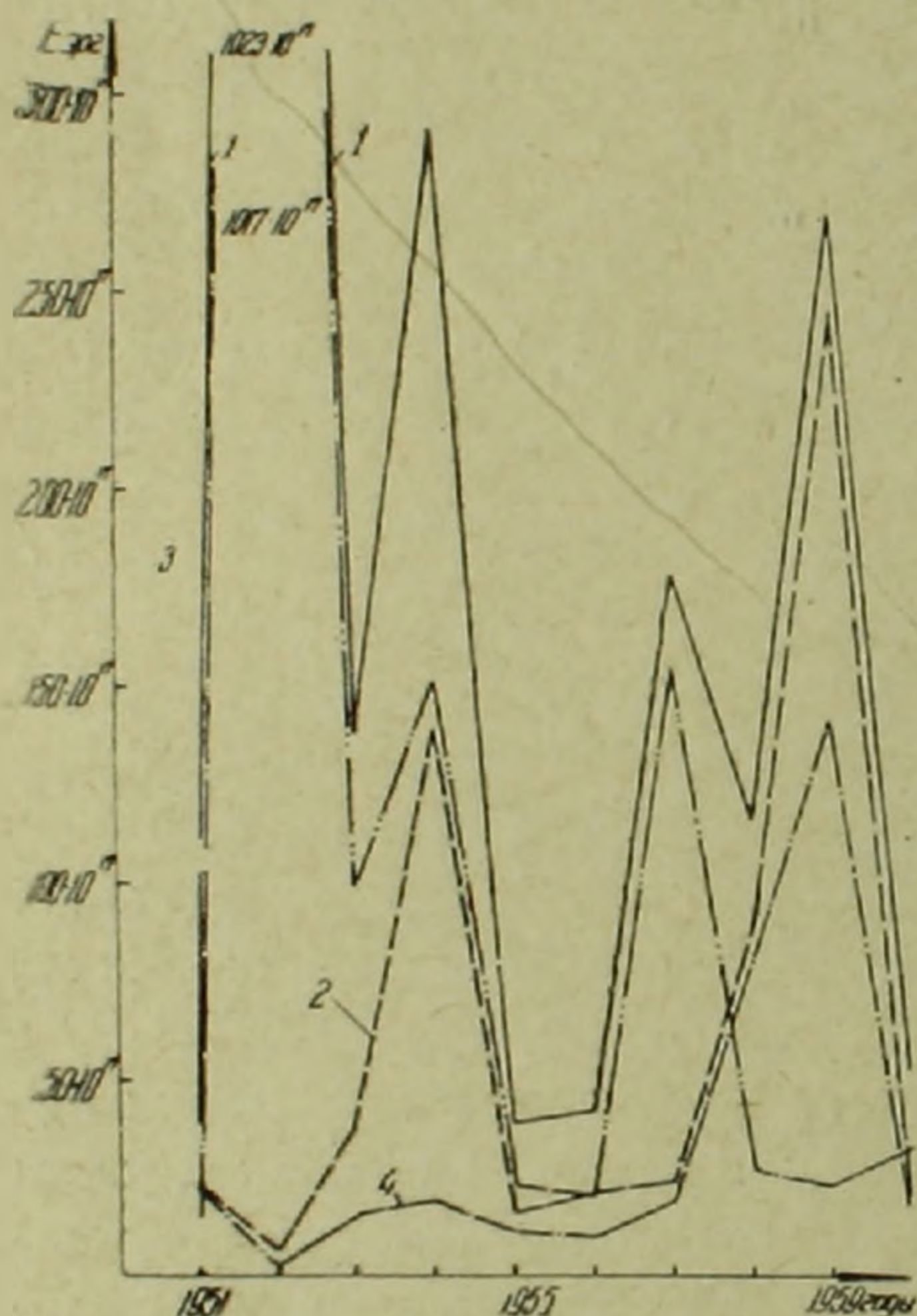
Графики повторяемости нами получены для всей территории Армянского нагорья и Малого Кавказа и также для советской части исследуемого района. Построенные графики повторяемости нормированы по площади и по времени. За единицу площади принята площадь 1000 км², а за единицу времени — 1 год.

Для всей рассматриваемой области построены три графика повторяемости. Первый график (прямая 4 на фиг. 3) получен при использовании данных сейсмических наблюдений над землетрясениями с 1 по 8 энергетический класс за период с 1932 г.—1960 г., то есть с начала организации региональной сети сейсмических станций на Кавказе. При построении второго графика (прямая 3 на фиг. 3) использованы данные наблюдений над землетрясениями с 1 по 7 энергетический класс за время с 1951 г. по 1960 г., то есть периода, который характеризуется наибольшей достоверностью сейсмического материала для исследуемого района.

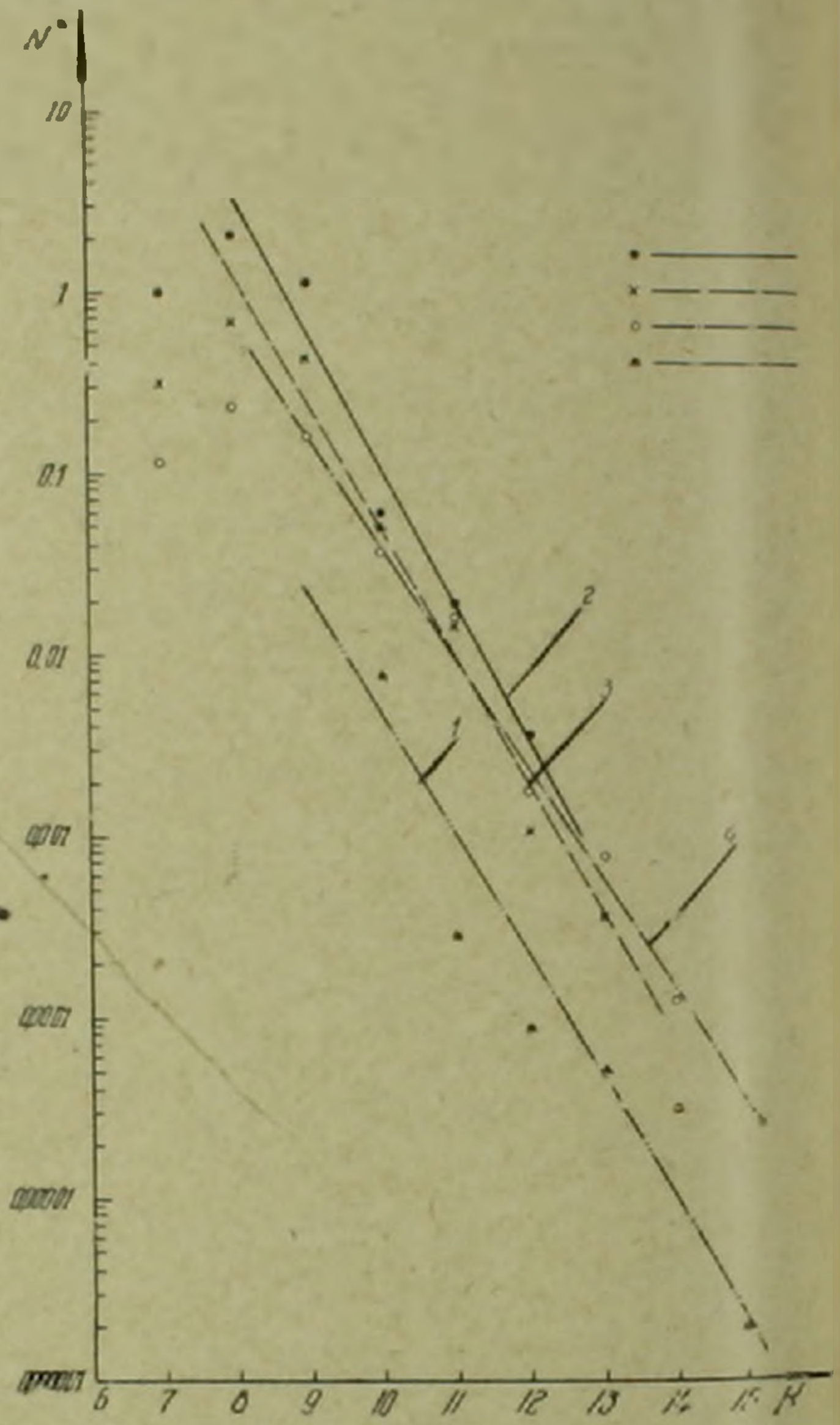
Представляло интерес для территории Армянского нагорья и Малого Кавказа построение графика повторяемости с привлечением материала, содержащего достаточно полные сведения о разрушительных землетрясениях прошлых столетий, и сравнение его с указанными выше двумя графиками повторяемости, построенными по материалам в основном не сильных землетрясений и за меньший период времени. С этой целью была произведена оценка балльности всех землетрясений прошлого, затем по выше описанной энергетической шкале определена энергия. Использованы сведения о землетрясениях

с начала нашей эры по 1931 г., то есть почти за 19,5 столетий ^(4,5). Кроме макросейсмических наблюдений, были привлечены также инструментальные данные. График представлен на фиг. 3 (прямая 1).

В табл. 3 приведены значения углов наклона графиков γ и значения единицы сейсмической ак-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

тивности A_{10} . За единицу сейсмической активности принято среднее годовое число землетрясений с энергией, равной 10^{10} дж, приходящееся на площадь 1000 км^2 . Все три графика, как видно из табл. 3, имеют практически одинаковый угол наклона, а по уровню сейсмической активности третий график резко отличается от первых двух графиков повторяемости.

Таблица 3

Исследуемый район	Площадь, км^2	Период наблюдений	A_{10}	γ
Армянское нагорье и Малый Кавказ	277,500	1951—1960 10 лет	0,048	0,69
Советская зона	85,625	1951—1960 10 лет	0,102	0,74
Армянское нагорье и Малый Кавказ	277,500	0—1931 1931 год	0,0043	0,67
Армянское нагорье и Малый Кавказ	277,500	1932—1960 29 лет	0,039	0,61

По приведенным значениям γ и A_{10} первых двух графиков определена повторяемость сильных землетрясений.

Для всего исследуемого района период повторения в среднем (по двум графикам) 7 балльных землетрясений получился равным 20 лет, 8-балльных—80 лет и 9-балльных—380 лет.

При построении графика повторяемости для советской зоны исследуемого района использованы наблюдения над землетрясениями с первого по шестой энергетический класс за период с 1951 г. по 1960 г. (прямая 2 на фиг. 3).

Полученные значения γ и A_{10} приведены в табл. 3. Угол наклона графика в этом случае несколько больше, чем для всей территории Армянского нагорья и Малого Кавказа.

Для этого района получены периоды повторяемости 7, 8 и 9 балльных землетрясений соответственно 25, 130 и 720 лет.

Графики повторяемости для отдельных сейсмоактивных зон не построены вследствие малочисленности происшедших в этих зонах землетрясений.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ն. Կ. ԿԱՐԱՄԵՏՅԱՆ

Հայկական լեռնաշխարհի և Փոքր Կովկասի երկրաշարժերի էներգետիկ բնութագրումը

Աշխատանքում փորձ է արված գնահատել Հայկական լեռնաշխարհի և Փոքր Կովկասի երկրաշարժերի էներգիան: Այդ նպատակով ստացված է երկրաշարժի բալլի և մագնիտուդայի միջև եղած կապը (բանաձև 1), ուսումնասիրվող տիրույթի համար ստացված է նաև երկրաշարժի բալլի և էներգիայի առնչությունը (4): Օգտագործելով ստացված հավասարումները կատարված է ուսումնասիրվող շրջանի բոլոր երկրաշարժերի էներգիայի գնահատումը 1899—1960 թ. մասանականի ճյուղի համար և կազմված բարտեղ, որը բերված է նկ. 1: Նկ. 2 տված է էներգիայի բաշխումը բոլոր տարիների վերջին տաս տարվա ընթացքում: Կատարված են կրկնողությունների դրաֆիկները Հայկական լեռնաշխարհի և Փոքր Կովկասի ամբողջ տիրույթի և սովետական դոնայի համար (նկ. 3): Այդ դրաֆիկները թույլ են տալիս որոշել ուժեղ երկրաշարժերի կրկնողությունը տվյալ տերիտորիայում: Ստացված կրկնողության դրաֆիկների համաձայն Հայկական լեռնաշխարհում և Փոքր Կովկասում 9-բալլանոց երկրաշարժեր կարող են լինել 380 տարի մեկ անգամ, 8-բալլանոց երկրաշարժեր 80 տարի, իսկ 7-բալլանոց երկրաշարժեր 20 տարի մեկ անգամ: Ուսումնասիրվող տերիտորիայի սովետական մասում 9-բալլանոց երկրաշարժերի կրկնողությունը ստացվել է 720 տարի, 8-բալլանոց երկրաշարժերի—30 տարի, իսկ 7 բալլանոց երկրաշարժերի կրկնողությունը ստացվել է—25 տարի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Б. Гутенберг, Н. Рихтер, Magnitude and energy of earthquakes. Ann. geofis., 9, № 1, 1956. ² Е. Ф. Саваренский и Э. А. Джигладзе, О сейсмичности Большого Кавказа, Известия АН СССР, серия геофизическая, 1956, № 5. ³ Ю. В. Ризниченко, Об изучении сейсмического режима, Известия АН СССР, серия геофизическая, 1958, № 9. ⁴ В. А. Степанян, Краткая хронология наиболее значительных землетрясений в исторической Армении и в прилегающих районах, Ереван, Изд. Арм. филиала АН СССР, 1942. ⁵ Е. И. Бюс, Сейсмические условия Закавказья, Часть I и II, Тбилиси, 1948, 1952.

ПРИКЛАДНАЯ АГРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

Г. Г. Пахчанян

Методика определения испарения с полей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Агаджаняном 1/X 1963)

Изучению закономерностей испарения с полей посвящен ряд работ (1-4 и др.), однако для горных условий этот вопрос изучен сравнительно мало. Ниже излагается методика определения испарения с различных полей и приводятся результаты расчета по этой методике.

Известно, что изменение влагосодержания изолированного почвенного монолита dV за некоторый промежуток времени dt при отсутствии осадков r и орошения q_0 , описывается уравнением

$$\frac{dV}{dt} = -E, \quad (1)$$

где E —скорость испарения.

Решая совместно уравнение (1) с известным уравнением (4)

$$E = E_0 b (V - V_0) \quad (2)$$

и интегрируя, получим:

$$V - V_0 = (V_n - V_0) \exp \left(-b \int_0^t E_0 dt \right). \quad (3)$$

где E_0 —испаряемость, определяемая по данным измерений на ближайшей метеорологической станции (5); V_0 —содержание непродуктивной влаги в почвенном монолите; b —параметр; V_n —начальное влагосодержание почвенного монолита. Значение V_n можно определить как из условия

$$V_n = V_{\text{мин}}, \quad (4)$$

где $V_{\text{мин}}$ —наименьшая полевая влагоемкость почвенного монолита, которая имеет место при сходе снежного покрова, так и по данным измерений влажности почвы на агрометеорологических станциях, а также методом выбора (5).

Значения $V_{\text{мин}}$ и V_0 для различных почв Армянской ССР получены на основании данных измерений, выполненных некоторыми

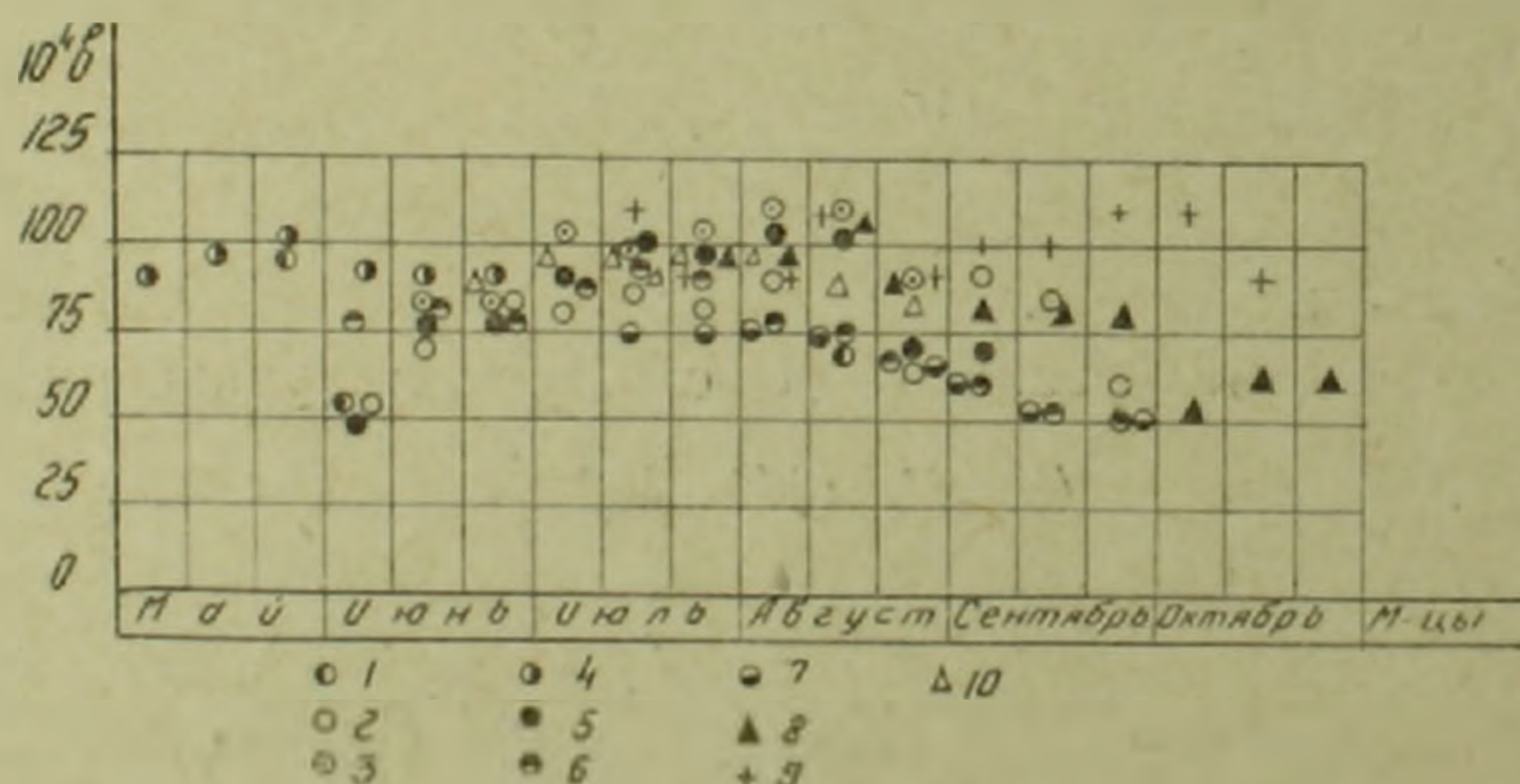
учреждениями республики (АрмНИИГиМ, Армянский сельскохозяйственный институт, УГМС АрмССР и др.).

Значения продуктивной части наименьшей полевой влагоемкости ($V_{\text{ппв}} - V_0$) в метровом слое почвы для некоторых пунктов Арагацского массива и Араратской долины приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Значение ($V_{\text{ппв}} - V_0$) в мм						
Пункты	Ереван	Егвард	Апаран	Маралик	Артик	Октемберян
$V_{\text{ппв}} - V_0$	275	240	233	230	184	254

Параметр b зависит как от фазы развития сельскохозяйственных культур, так и от мощности корнеобитаемой зоны h . Зависимость b от h для основных мощностей корнеобитаемой зоны выражается следующим образом: если при $h = 0,50$ м, $b = 0,010$, то при h , равном 0,70 м и 1,0 м, b равно 0,0067 и 0,0046 соответственно. Значения h для различных сельскохозяйственных культур приведены в работе (4). Среднедекадные значения параметра b при $h = 0,50$ м, для различных сельскохозяйственных культур и различных моментов времени представлены на фиг. 1. Соединив между собой соответствующие точки,



Фиг. 1. Изменение параметра b во времени для различных сельскохозяйственных культур.

Обозначения: 1—озимая пшеница, Мартуни, 1957; 2—табак Уджан, Мартуни, 1957; 3—яровая пшеница, Норатус, 1958; 4—трава разная, Севан, 1957; 5—озимая пшеница, Севан, 1958; 6—эспарцет, Масрик, 1960; 7—ячмень, Артаниш, 1960; 8—виноград первого года плодоношения, Паракар, 1961; 9—виноград, Ереван 1961; 10—Альпийские луга, Амзачиман, 1962.

получим ход изменения b во времени. Заметим, что в начале вегетации значения b постепенно возрастают и после смыкания растительного покрова почвы этот процесс прекращается. Смыкание, например, зерновых культур, судя по опыту, наступает при фазе выхода в трубку. Далее, значения параметра b остаются неизменными до наступ-

ления полной спелости, после чего быстро убывают, достигая начальной величины. Продолжительность вегетационного периода с возрастанием абсолютной высоты местности H увеличивается. Соответственно с этим увеличивается продолжительность между отдельными фазами развития сельскохозяйственных культур. Данные по фазам этого раз-

вития имеются в работе (7). Теперь, зная величины $(V_n - V_0)$ и $b \int_0^t E_0 dt$, можно получить количественное изменение $(V_n - V_0)$ в промежутке времени между моментами выпадения осадков или подачи оросительной воды, т. е. — величину испарения.

Прибавив к имеющейся влажности почвы сумму $(r + q_{ор})$ и вычитав поверхностный сток $q_{пов.}$, получим влажность почвы в данный момент времени. Принимая ее равной $(V_n - V_0)$, можно определить величину испарения с полей, которое будет иметь место до следующего выпадения осадков. Если указанная сумма превышает величину $V_{пов.}$, то их разность рассматривается как просачивание $q_{пр.}$ и в дальнейшем в расчет не принимается. Значение поверхностного стока и его изменение во времени можно получить по гидрографу реки, выделяя соответствующим образом поверхностную и подземную составляющие речного стока (8). Приток влаги в почвенный монолит из нижележащих слоев почв $q_{прит.}$, можно оценить, сравнивая влажность почвы в испарителе с влажностью почвы в том месте, откуда брался почвенный монолит, когда была произведена смена почвы в испарителе.

Опыты, проведенные не на орошаемых полях, при глубоком залегании уровня грунтовых вод показали, что величина $q_{прит.}$ в течение вегетационного периода близка к нулю. Судя по результатам экспериментов, испарение с сомкнутого растительного покрова равняется испаряемости, когда продуктивная влажность почвы корнеобитаемой зоны в каждом десятисантиметровом слое равна или больше 20 мм. Это означает, что если $(V_n - V_0)$ в метровом слое почвы равно 240 мм, то из этого количества влаги 40 мм будет расходоваться на испарение с интенсивностью $E = E_0$. Значение параметра b для почвы, лишенной растительного покрова, определялось по данным почвенных испарителей, установленных в Ереване, Мартуни, Севане и Яныхе. Значения b для перечисленных пунктов получились равными 0,003; 0,005; 0,0055 и 0,0075 соответственно. Исходя из изложенного выше и принимая $q_{прит.} = q_{пов.} = 0$, $\Delta t = 15$ дней, а также имея, что величина $(V_{пов.} - V_0)$ в метровом слое почвы равна 240 мм, вычислялось испарение с орошаемых полей Араратской долины. Некоторые результаты расчета приведены в табл. 2. В этой таблице для сравнения приведены также результаты работы (9). Сравнение результатов показало, что если каким-то образом учесть несоответствие в количестве по-

Испарение с некоторых полей и сравнение

Культура	Исходные данные	м-цы эп-ти	IV	V	VI	VII	VIII
		$r \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	33	38	26	15	7
		$E_0 \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	106	154	170	178	165
Виноград	$h = 1,0 \text{ м}$ $V_{\text{нпв.}} - V_0 = 240 \text{ мм}$ $V_{\text{н}} - V_0 = 220 \text{ мм}$ $H = 900 \text{ м}$	$q_{\text{ор}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	60	50	2×50	3×50	2×50
		$r + q_{\text{ор}}$	93	88	2×63	2×82	2×54
		b	0,003	0,003	0,010	0,010	0,010
		$\frac{b}{2} E_0$	0,15	0,25	0,38	0,39	0,36
		$E \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	37	45	133	138	137
		$q_{\text{пр}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	71	45	—	—	—
Озимая пшеница	$h = 0,7$ $V_{\text{нпв.}} - V_0 = 170 \text{ мм}$ $V_{\text{н}} - V_0 = 140 \text{ мм}$ $H = 900 \text{ м}$	$q_{\text{ор}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	90	85	—	—	—
		$r + q_{\text{ор}}$	123	123	26	15	7
		b	0,010	0,010	0,010	0,003	0,003
		$\frac{b}{2} E_0$	0,96	0,52	0,58	0,27	0,25
		$E \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	89	122	126	22	18
		$q_{\text{пр}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	24	—	—	—	—
Люцерна	$h = 0,7 \text{ м}$ $V_{\text{нпв.}} - V_0 = 170 \text{ мм}$ $V_{\text{н}} - V_0 = 170 \text{ мм}$ $H = 900 \text{ м}$	$q_{\text{ор}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	80	80	2×80	2×80	2×80
		$r + q_{\text{ор}}$	113	118	186	175	167
		b	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
		$\frac{b}{2} E_0$	0,25	0,36	0,42	0,45	0,41
		$E \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	77	112	114	130	120
		$q_{\text{пр}} \frac{\text{мм}}{\text{мес.}}$	12	7	54	45	47

Таблица 2

полученных результатов

IX	X	XI	XII	I—II	III	Сумма за год	Сумма за вегетационный период	Сумма за ве- гетационный пе- риод по дан- ным (%)
11	22	26	16	54	28	276	—	—
126	64	34	28	22	72	1119	—	—
2 50	—	50	—	—	—	610	560	—
2 55	22	76	16	54	28	885	711	—
0,010	0,010	0,010	0,003	—	0,003	—	—	—
0,28	0,12	0,05	0,05	—	0,11	—	—	—
97	38	12	12	22	22	693	625	—
—	—	22	9	27	18	192	136	—
95	90	—	—	—	—	360	360	364
106	112	26	16	54	28	636	429	475
0,003	0,010	0,006	0,003	—	0,003	—	—	—
0,19	0,22	0,10	0,04	—	0,11	—	—	—
13	50	22	10	22	22	516	424	508
—	—	32	27	29	18	130	68	—
2 80	—	—	—	—	—	800	800	714
171	22	26	16	54	28	1076	1022	825
0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	—	—
0,31	0,116	0,085	0,070	—	0,080	—	—	—
100	58	26	22	20	61	840	820	786
71	—	—	—	—	—	236	236	—

ступающей влаги за вегетационный период в виде осадков или оросительной воды в других рассматриваемых случаях, то расхождение между испарением, определенным различными методами, не превышает 10%.

Нужно учесть, что приведенная расчетная схема испарения с полей пригодна только в том случае, если рост растений протекает нормально.

В заключение отметим, что приведенная расчетная схема может быть применена как для прогноза влажности почвы полей, так и для установления норм орошения для различных сельскохозяйственных культур.

Институт водных проблем
Академии наук Армянской ССР

2. 2. ՓԱԽՉԱՆՅԱՆ

Գրառերից կատարվող գոլորշիացման որոշման մեթոդիկա

Հոդվածում բերված են վերջին վեց տարիների ընթացքում կատարված հետազոտությունների արդյունքները գաղտերից կատարվող գոլորշիացման ուսումնասիրության վերաբերյալ, որոնք կատարվել են Հայկական ՍՍՌ ԳԱ ջրային պրոբլեմների ինստիտուտի կողմից, Հայաստանի տարրեր շրջաններում:

Այդ հետազոտությունները հնարավորություն են տալիս ուսումնասիրելու տարրեր գաղտերից կատարվող գոլորշիացման մեծության փոփոխությունը կախված ինչպես տեղի ռադիո-թարանական (E_0) և ադրոհիդրոլոգիական ($V_{\text{հուս}}, V_0, q_{\text{пов}}$) պայմաններից, այնպես և բույսի տեսակից (R) և նրա զարգացման փազերի (n) փոփոխությունից:

Գաղտերից կատարվող գոլորշիացման մեծության որոշման այս եղանակը հնարավորություն է տալիս ոչ միայն որոշելու ուսողման հորմաները գյուղատնտեսական կուլտուրաներ, տարրեր պայմաններում, այլև գուշակելու հողի խոնավության փոփոխությունը:

Հոդվածում բերված հաշվային սխեման կիրառելի է միայն այն դեպքում, երբ բույսի զարգացումն ընթանում է նորմալ ձևով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ ՈՒ Ն

¹ А. М. Алпатыев, Влагооборот культурных растений, Л., 1954. ² А. С. Комторициков, Метеорология и гидрология, № 4, 1954. ³ А. Р. Константинов, Труды ГГИ, вып. 81, 1960. ⁴ А. И. Будаговский, Труды III Всес. гидр. съезда, т. III, 1959. ⁵ М. И. Будыко, Тепловой баланс земной поверхности, Л., 1956. ⁶ П. К. Тер-Захарян, А. Ф. Радько, Режим орошения с/х культур в условиях Араратской равнины, Ереван, 1957 (на армянском языке). ⁷ Агроклиматический справочник по АрмССР, Л., 1961. ⁸ З. В. Джорджио, Межень на реках Средней Азии, МТО, 1957. ⁹ С. А. Хачатурян, Основы орошения полевых культур в АрмССР, Ереван, 1959.

ФИЗИОЛОГИЯ

О. Г. Баклаваджян и Б. А. Арутюнян

Влияние шейного симпатического и блуждающего
 нервов на прямые ответы коры

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. И. Карамяном 30 VI 1963)

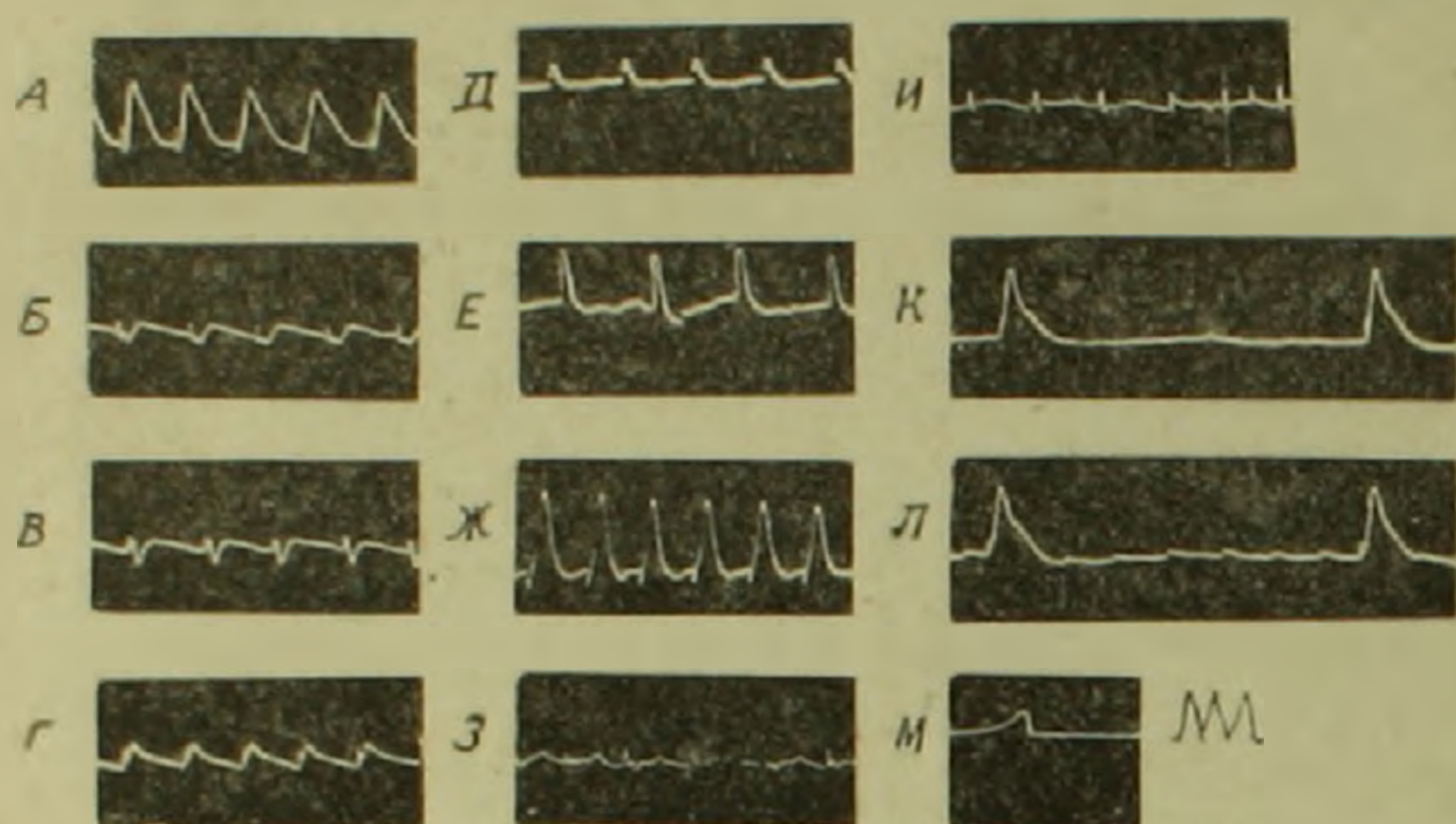
Вопрос о влиянии симпатической нервной системы на электрическую активность мозга в последние годы привлекает внимание многих исследователей. В ряде работ, проведенных методом электроэнцефалографии (¹⁻⁴), изучено влияние раздражения шейного симпатического нерва (ш. с. н.) и экстирпации верхних шейных симпатических узлов на ЭЭГ. Данный вопрос в последнее время изучается и при помощи метода вызванных потенциалов (⁵⁻⁷). В связи с возрастающим интересом к функции симпатической нервной системы представляет определенный интерес изучение влияния вегетативной нервной системы также на прямые ответы (П. О.) коры мозга.

Опыты ставились на кошках под легким хлоралозовым наркозом. Раздражение головного конца шейного симпатического и блуждающего нервов производили при помощи прямоугольных стимулов, длительностью 0,5 мсек. и частотой 20—25 гц. Для раздражения нервов применялись электроды конструкции Д. С. Саркисяна, которые заранее фиксировались на шее животного и обеспечивали постоянную влажность и температуру. П. О. коры вызывались раздражением поверхности коры стимулами из импульсного генератора с радиочастотным выходом при помощи биполярных электродов. Ответы коры регистрировались с экрана катодного осциллографа. Получены следующие результаты.

Прямые ответы коры, вызванные одиночным раздражением коры (напряжение раздражающего тока 5—7 в, частота 1—2 гц) представляют собой отрицательное отклонение потенциала продолжительностью 15—20 мсек. и амплитудой 500—1000 мкв. После начального отрицательного потенциала иногда регистрируется небольшая следовая положительность. Характеристика описанных нами П. О. совпадает с литературными данными.

Частотное раздражение ш. с. н. (20—25 гц) в течение 60 сек. не вызывает заметных изменений П. О. коры ни во время, ни после выключения раздражения.

Исходя из литературных данных, указывающих на то, что влияние симпатической нервной системы выявляется легче на утомленных тест-объектах (*), нами проведена серия экспериментов с изучением влияния частотного раздражения ш. с. н. на П. О., заранее „утомленные“ частотным раздражением коры (10 гц). При раздражении коры с частотой 10 гц наблюдается постепенное уменьшение амплитуды П. О. (фиг. 1, А, Б)



Фиг. 1. Влияние раздражения ш. с. н. на П. О. коры. А — П. О. вызванные раздражением коры с частотой 10 гц. А — П. О. в начале раздражения; Б — „утомленные“ П. О. на 15—20 сек. раздражения; В — реверсия потенциалов П. О. на 30—40 сек. раздражения; Г — частичное восстановление исчезнувшего отрицательного компонента под влиянием раздражения ш. с. н.; Д — „утомленные“ П. О. на 20 секунде раздражения коры; Е — эффект ш. с. н. на 30 сек. его раздражения; Ж — П. О. изолированной коры в начале частотного раздражения; З — „утомленные“ П. О. изолированной коры на 15 сек. раздражения; И — отсутствие влияния ш. с. н. на „утомленные“ П. О. изолированной коры; К — П. О., вызванные одиночным раздражением коры (1—2 гц); Л — на 60 секунде раздражения ш. с. н.

М — масштаб усиления — 500 мкв, время — 50 мсек.

ленного потенциала значительно ниже амплитуды тех потенциалов, которые восстанавливаются под воздействием симпатического нерва. Вышеописанный эффект ш. с. н. проявляется на 30—40 секунде от начала его частотного раздражения и обладает длительным последствием (1—2 мин.).

С целью выяснения механизмов влияния ш. с. н. на П. О. коры в серии опытов данный вопрос изучался на препаратах с изолированной корой. Результаты этих опытов позволяют прийти к заключению, что наблюдаемое нами влияние по всей вероятности нейрогенное. Так, оказалось, что на изолированной коре утомленные П. О. не восстанавливаются под влиянием длительного раздражения ш. с. н. (фиг. 1, Ж, З, И).

Для более полного понимания влияния вегетативной нервной системы на деятельность коры мозга нами были предприняты опыты

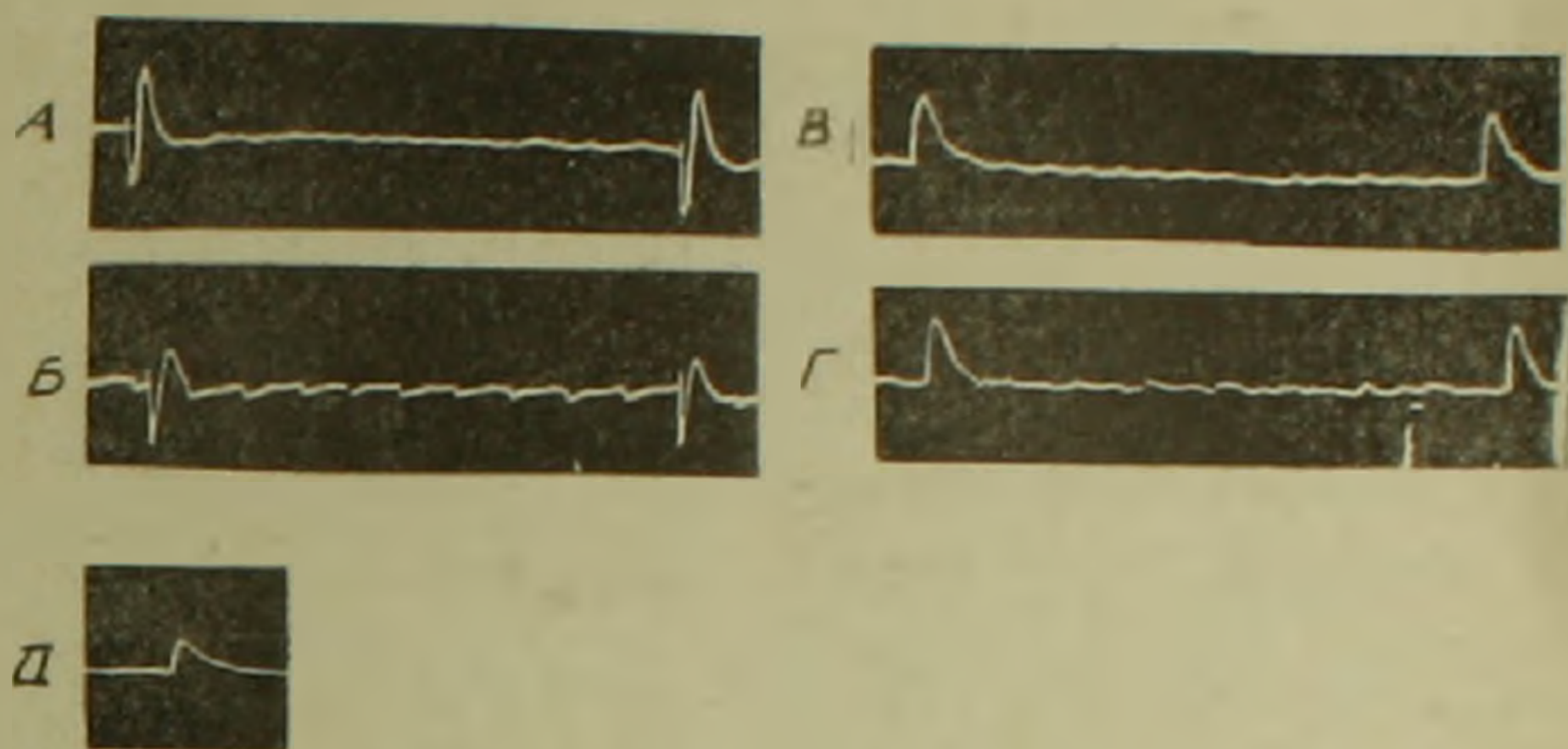
вплоть до исчезновения отрицательного компонента и в ряде случаев реверсия в сторону положительности (фиг. 1, В) (*). На этом фоне длительное раздражение ш. с. н. приводит к частичному восстановлению исчезнувшего во время утомления отрицательного потенциала П. О. (фиг. 1, Д, Е). Аналогичное влияние ш. с. н. наблюдается и в случае, когда в результате частотного раздражения коры происходит реверсия П. О. (фиг. 1, Г). Следует отметить, что в некоторых случаях появление отрицательного компонента П. О. наблюдается и спонтанно после длительной тетанизации коры (75—80 сек.) (фиг. 1, Б). Однако это явление наблюдается редко, и амплитуда восстановленного потенциала значительно ниже амплитуды тех потенциалов, которые восстанавливаются под воздействием симпатического нерва.

также с раздражением блуждающего нерва. Раздражение краниального конца перерезанного блуждающего нерва (20—25 гц) не влияет заметно на „утомленные“ П. О. коры. На П. О., полученные раздражением частотой 1—2 гц, блуждающий нерв оказывает выраженное угнетающее влияние. Ответы уменьшаются почти на 50% своей первоначальной величины (фиг. 2, А, Б). Таким образом, эффект, полученный от раздражения блуждающего нерва противоположен эффекту ш.с.н.

Так же, как и в случае раздражения ш.с.н., эффект блуждающе-

го нерва проверяли на изолированной коре. Эти контрольные опыты показали, что на П. О. изолированной коры блуждающий нерв не оказывает заметного влияния (фиг. 2, В, Г.).

Вопрос о механизме влияния вышеуказанных вегетативных нервов на кору весьма сложный. Большой скрытый период эффекта указывает на опосредованное влияние симпатического нерва на кору. На основе литературных данных (¹⁰⁻¹¹) и предварительных экспериментальных данных, полученных в наших опытах, можно заключить следующий вероятный механизм этого влияния, а именно, импульсы из шейного симпатикуса приводят в активность гипофизодиэнцефалические взаимоотношения. Таким образом, первично активированный гипофиз может проявить гуморальное влияние на гипоталамические ядра, а последние в свою очередь нервными путями на кору мозга. О том, что конечное звено этого пути нейрогенное говорят опыты с изолированной корой. Результаты, полученные с раздражением ш.с.н., показывают, что в определенных условиях можно выявить влияние ш.с.н. на электрическую активность коры мозга. О влиянии ш.с.н. на корковую деятельность в литературе имеются данные, полученные по методу условных рефлексов. Так, еще в 1930 г. Э. А. Асратяном (¹²) установлено влияние ш.с.н. на условнорефлекторную деятельность коры мозга. Блуждающий нерв проявляет антагонистический эффект в сравнении с симпатическим нервом. На основании опытов с изолированной корой нужно полагать, что и здесь эффект является нейрогенным.



Фиг. 2. Влияние раздражения блуждающего нерва (20—25 гц) на П. О. коры. А— прямые ответы при раздражении коры с частотой 2 гц; Б— уменьшение П. О. на 60 сек. раздражения блуждающего нерва; В— прямые ответы изолированной коры; Г— на 60 сек. раздражения блуждающего нерва; Д— масштаб усиления 500 мкв. Время— как на фиг. 1.

**Պարանոցային սիմպատիկ և թափառող ներվերի ազդեցությունը
կեղևի ուղղակի պատասխանների վրա**

Ստումնասիրվել է պարանոցային սիմպատիկ և թափառող ներվերի հաճախակի զեր-
դրաման ազդեցությունը (20—25 հց) կեղևի ուղղակի պատասխանների վրա: Կեղևի ուղ-
ղակի պատասխանները ստացվել են կեղևը զրգուելով 1—2 և 10 հց. հաճախականությամբ:

Հաստատված է, որ պարանոցային սիմպատիկ ներվի երկարատև զրգուումը բերում
է բացասական պոտենցիալի մասնակի վերականգնմանը, որ բնկնվել էր կեղևը 10 հց,
զրգուելու հետևանքով:

Էֆեկտի յատենտ շրջանը կազմում է 20—30 վրկ: Իդուացված կեղևի պրե-
պարատից էֆեկտի բացակայումը ցույց է տալիս նրա նեյրոգեն բնույթը: Հետզհետե ուղ-
ղակի պատասխանների վերականգնումը բացատրվում է պարանոցային սիմպատիկ ներվի
ազապտադիոն-տրոֆիկ ազդեցությամբ կեղևի ֆունկցիոնալ վիճակի վրա:

Պարանոցային թափառող ներվի հաճախակի զրգուումը ճնշում է ուղղակի պատաս-
խանները, որոնք առաջացել են կեղևի մեկական զրգուումից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Т. Н. Соллертинская, ДАН СССР, 112, 1, 167 (1957). ² А. М. Алексанян и Р. С. Арутюнян, ДАН СССР, 125, 1, 236, (1959). ³ А. Н. Карамян, Сб.: Проблемы эволюции функций и энзимохимии процессов возбуждения, Медгиз, 1961. ⁴ О. Г. Баклаваджян, С. А. Арутюнян, I Всесоюзн. совещ. по вопросам физиологии вегет. нервн. системы и мозжечка, Ереван, 1961. ⁵ Ван—Тай—Ань и М. Г. Белехова, Физиол. журн. СССР, 47, 1, 19, 1961. ⁶ О. Г. Баклаваджян и С. А. Арутюнян, Физиол. журн. СССР, 48, 7, 806, 1962. ⁷ В. Б. Швырков, Бюлл. экспер. биол. и мед., 54, 9, 3, 1962. ⁸ А. Г. Гинецинский, Русск. физиол. журн., 6 1—3, 198, 1923. ⁹ А. Н. Ройтбак, Биоэлектрические явления в коре больших полушарий, Тбилиси, 1955. ¹⁰ М. Г. Дурмишьян, О механизмах эффектов афферентных раздражений, Медгиз, 1955. ¹¹ А. В. Тонких, Вопросы физиологии вегетативн. нервн. системы и мозжечка, Ереван, 1963. ¹² Э. А. Асратян, Арх. биол. наук, 30, 2, 243, 1930.

