

ՀԱՄԱՐ ԳԱ
Տեղեկագիր

Ֆ Ի Չ Ի Կ Ա
ФИЗИКА

1969

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Ա. Յ. Ամատունի, Վ. Մ. Հառուրյունյան (պատասխանատու խմբագրի տեղակալ), Գ. Մ. Ղառիբյան (պատասխանատու խմբագիր), Է. Գ. Միրզաբեկյան, Մ. Ե. Մովսիսյան, Է. Գ. Շառոյան, Գ. Ս. Սահակյան, Ռ. Ա. Սարգսյան (պատասխանատու քարտուղար), Հ. Հ. Վաղդապետյան:

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ա. Ս. Ամատунի, В. М. Арутюнян (заместитель ответственного редактора), Г. А. Вартапетян, Г. М. Гарибян (ответственный редактор), Э. Г. Мирзабекян, М. Е. Мовсисян, Г. С. Саакян, Р. А. Сардарян (ответственный секретарь), Э. Г. Шароян.

ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

М. Р. МАГОМЕДОВ

В работе методом функции Грина получено решение уравнений Максвелла в случае двух диспергирующих сред со сферической границей раздела для произвольного распределения источников. Приведены асимптотические выражения для полей. Полученные решения позволяют рассмотреть широкий круг вопросов, начиная от дифракции на сфере произвольного возмущения и кончая электростатическими задачами. В работе рассмотрено также излучение заряда, вращающегося равномерно вокруг диэлектрической сферы.

В ряде работ были рассмотрены излучения, создаваемые заряженными частицами в диспергирующих средах с плоской границей раздела.

В настоящей статье дается решение уравнений Максвелла в случае, когда граница между диэлектриками имеет сферическую форму, а заряды движутся произвольным образом. Вычислена также интенсивность излучения заряда, равномерно вращающегося вокруг диэлектрической сферы.

1. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах в случае одной среды.

Пусть электромагнитные свойства бесконечной среды характеризуются диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$.

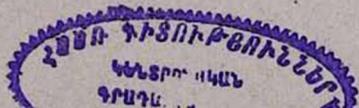
Разложим функции источников и амплитуды полей в интегралы (ряды, если движение периодически) Фурье по времени и запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= \frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \nabla\Phi \\ \mathbf{J}_t &= \mathbf{J} + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \nabla\Phi, \quad \operatorname{div} \mathbf{J}_t = 0, \\ \Delta\Phi &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \end{aligned} \quad (2)$$

МА-Н.896



Как видно из (1) и (2), дивергенция обоих рассматриваемых полей \mathbf{E}' , \mathbf{H} равна нулю во всем пространстве. Поэтому решение уравнений (1) должно иметь вид (см. напр. [1], [2])

$$\mathbf{H} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [f_{lm}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) - \frac{ic}{\omega\mu} \text{rot}(g_{lm}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi))], \quad (3)$$

$$\mathbf{E}' = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [g_{lm}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) + \frac{ic}{\omega\epsilon} \text{rot}(f_{lm}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi))]. \quad (4)$$

В этих выражениях $\mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi)$ означают ортонормированные векторные сферические гармоники:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) &= [l(l+1)]^{-1/2} \mathbf{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad \mathbf{X}_{00} = 0, \\ \int \mathbf{X}_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) d\Omega &= \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \\ Y_{l,-m} &= (-1)^m Y_{lm}^*, \\ \mathbf{L} &= -i[\mathbf{r} \times \nabla], \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения функции $f_{lm}(kr)$ подставим разложение (3) в уравнение для поля \mathbf{H} :

$$(\Delta + k^2) \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot} \mathbf{J}_t.$$

Умножим скалярно обе стороны уравнения на вектор $\mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и проинтегрируем по всем углам. Принимая во внимание коммутационные соотношения

$$\mathbf{L}\Delta = \Delta\mathbf{L}, \quad \mathbf{L}^2\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{L}^2$$

и ортонормированность функций \mathbf{X}_{lm} , получим

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f_{lm} = -\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \text{rot} \mathbf{J}_t d\Omega. \quad (6)$$

Подставляя разложение для \mathbf{E}' в уравнение

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}' = -\frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \mathbf{J}_t$$

и проводя аналогичные вычисления, приходим к уравнению для функции $g_{lm}(kr)$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{lm} = -\frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \int \mathbf{X}_{lm}^* d_t d\Omega. \quad (7)$$

Функция Грина уравнения (6) удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G_f(r|r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r-r'). \quad (8)$$

Решение этого уравнения, регулярное в начале координат и представляющее расходящиеся волны на бесконечности, равно

$$G_f(r|r') = ik j_l(kr') h_l(kr) \vartheta(r-r') + ik j_l(kr) h_l(kr') \vartheta(r'-r), \quad (9)$$

где $\vartheta(x-x')$ равна единице при $x > x'$ и нулю при $x < x'$, $j_l(x)$ и $h_l(x)$ являются сферическими функциями Бесселя и Ханкеля:

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(x).$$

$$h_l(x) \equiv h_l^{(1)}(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} [J_{l+1/2}(x) + iN_{l+1/2}(x)]. \quad (10)$$

Что касается уравнения

$$\Delta \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(r, \vartheta, \varphi, \omega), \quad (11)$$

его решение можно представить в виде

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \varphi_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (12)$$

где φ_{lm} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi_{lm} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int \rho Y_{lm}^* d\Omega. \quad (13)$$

Функция Грина этого уравнения, удовлетворяющая равенству

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G_\Phi(r|r') = -\frac{1}{\varepsilon r^2} \delta(r-r'), \quad (14)$$

в случае бесконечного пространства равна

$$G_\Phi(r|r') = \frac{1}{\varepsilon(2l+1)} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') \right]. \quad (15)$$

Поэтому в рассматриваемом случае имеем:

$$\begin{aligned} f_{lm}(kr) &= \int_0^\infty G_f'(r|r') K_E(r') r'^2 dr', \\ g_{lm}(kr) &= \int_0^\infty G_g(r|r') K_M(r') r'^2 dr', \\ \varphi_{lm}(kr) &= \int_0^\infty G_\Phi(r|r') K_L(r') r'^2 dr', \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_E = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \text{rot } \mathbf{J}_l d\Omega, \quad K_M = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{J}_l d\Omega,$$

$$K_L = 4\pi \int \rho \dot{Y}_{lm}^* g \Omega, \quad G_g = \mu G_f.$$

2. Решение уравнений Максвелла в случае двух сред.

Пусть сфера радиуса a с центром в начале координат характеризуется диэлектрической постоянной $\epsilon_1(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu_1(\omega)$. Значения этих параметров для пространства вне сферы обозначим через $\epsilon_2(\omega)$, $\mu_2(\omega)$.

Частное решение неоднородных уравнений Максвелла в пространствах внутри и вне сферы имеет вид разложений (3) и (4). Для удовлетворения граничным условиям на поверхности сферы к выражениям этого типа необходимо добавить решения однородных уравнений. Поскольку общее решение однородных уравнений представимо в виде (3) и (4), то это эквивалентно добавлению к радиальным решениям f и g или к соответствующим функциям Грина некоторой комбинации независимых решений однородного радиального уравнения.

Вне сферы радиуса a эта комбинация должна соответствовать волнам, движущимся от сферы. Этому условию удовлетворяет функция $h_l^{(1)}(k_2 r) \equiv h_l(k_2 r)$. Внутри сферы регулярной является функция $j_l(k_1 r)$.

Сформулируем еще граничные условия для рассматриваемых функций Грина. Эти условия должны следовать из условий непрерывности тангенциальных составляющих полей и нормальных составляющих индукций на границе раздела диэлектриков.

Принимая во внимание разложение (3), (4) и равенства

$$\text{rot } f_l \mathbf{X}_{lm} = \frac{i\mathbf{n}}{r} [l(l+1)]^{1/2} f_l Y_{lm} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_l) [\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}],$$

$$\mathbf{rL} = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $f_l(r)$ — произвольное решение радиального уравнения, мы приходим к выводу, что на границе раздела должны быть непрерывны выражения

$$G_f, \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dr} (r G_f); \quad G_g, \quad \frac{1}{\mu} \frac{d}{dr} (r G_g); \quad (17)$$

$$G_\Phi, \quad \epsilon \frac{d}{dr} G_\Phi,$$

где G_f , G_g , G_Φ означают функции Грина уравнений (6), (7), (13) в случае двух сред.

Таким образом, поля во всем пространстве в случае двух сред можно определить, построив три функции Грина с граничными условиями (17).

Построение функций Грина радиальных уравнений мы начнем с G_f . В соответствии с вышеизложенным, функция Грина G_f должна иметь вид

$$\begin{aligned}
 G_f = & ik_1 [j_l(k_1 r') h_l(k_1 r) \vartheta(r-r') + j_l(k_1 r') h_l(k_1 r') \vartheta(r'-r) + \\
 & + \beta_E j_l(k_1 r') j_l(k_1 r)] \vartheta(a-r) \vartheta(a-r') + \\
 & + ik_2 \tilde{\beta}_E j_l(k_1 r') h_l(k_2 r) \vartheta(r-a) \vartheta(a-r') + \\
 & + ik_2 [j_l(k_2 r') h_l(k_2 r) \vartheta(r-r') + j_l(k_2 r) h_l(k_2 r') \vartheta(r'-r) + \\
 & + \alpha_E h_l(k_2 r) h_l(k_2 r')] \vartheta(r-a) \vartheta(r'-a) + \\
 & + ik_1 \tilde{\alpha}_E j_l(k_1 r) h_l(k_2 r') \vartheta(a-r) \vartheta(r'-a),
 \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha_E, \tilde{\alpha}_E, \beta_E, \tilde{\beta}_E$ определяются из граничных условий. Из непрерывности G_f и $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dr} (rG_f)$ находим:

$$\Delta_E \alpha_E = j_l(k_2 a) [aj_l(k_1 a)]' - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} j_l(k_1 a) [aj_l(k_2 a)]', \quad (19)$$

$$\Delta_E \beta_E = h_l(k_2 a) [ah_l(k_1 a)]' - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} h_l(k_1 a) [ah_l(k_2 a)]',$$

$$\Delta_E = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} j_l(k_1 a) [ah_l(k_2 a)]' - h_l(k_2 a) [aj_l(k_1 a)]',$$

$$\tilde{\alpha}_E = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{i}{ak_1 \Delta_E}, \quad \tilde{\beta}_E = \frac{i}{ak_2 \Delta_E}, \quad [\ ' = \frac{d}{da} [\],$$

Функция Грина G_g строится аналогичным образом и получается из G_f умножением на $\mu = \mu_1 \vartheta(a-r) + \mu_2 \vartheta(r-a)$ и заменой

$$\alpha_E, \beta_E, \tilde{\alpha}_E, \tilde{\beta}_E \rightarrow \alpha_M, \beta_M, \tilde{\alpha}_M, \tilde{\beta}_M,$$

где

$$\Delta_M \alpha_M = j_l(k_2 a) [aj_l(k_1 a)]' - \frac{\mu_1}{\mu_2} j_l(k_1 a) [aj_l(k_2 a)]', \quad (20)$$

$$\Delta_M \beta_M = h_l(k_2 a) [ah_l(k_1 a)]' - \frac{\mu_1}{\mu_2} h_l(k_1 a) [ah_l(k_2 a)]',$$

$$\Delta_M = \frac{\mu_1}{\mu_2} j_l(k_1 a) [ah_l(k_2 a)]' - h_l(k_2 a) [aj_l(k_1 a)]',$$

$$\tilde{\alpha}_M = \frac{i}{ak_1 \Delta_M}, \quad \tilde{\beta}_M = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{i}{ak_2 \Delta_M}.$$

Нам остается теперь построить функцию G_ϕ в случае двух сред. Для этого к сингулярным решениям вида (15) необходимо добавить решения однородного уравнения. Решение однородного уравнения, регулярное вне сферы, пропорционально $r^{-(l+1)}$. Внутри сферы регулярным является r^l . Поэтому запишем G_ϕ в виде

$$\begin{aligned}
(2l+1) G_{\Phi} = & \frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') + \right. \\
& + \beta_L \frac{1}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^l \left(\frac{r'}{a} \right)^l \left. \right] \vartheta(a-r) \vartheta(a-r') + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_2} \tilde{\beta}_L \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-a) \vartheta(a-r') + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_2} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') + \right. \\
& + \alpha_L \frac{1}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \left(\frac{a}{r'} \right)^{l+1} \left. \right] \vartheta(r-a) \vartheta(r'-a) + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_1} \tilde{\alpha}_L \frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(a-r) \vartheta(r'-a),
\end{aligned} \tag{21}$$

где неопределенные коэффициенты определяются из непрерывности

$$G_{\Phi} \text{ и } \varepsilon \frac{d}{dr} G_{\Phi} \text{ при } r = a$$

и равны

$$\begin{aligned}
\alpha_L = \frac{l(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon}, \quad \tilde{\alpha}_L = \varepsilon_1 \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}, \\
\beta_L = \frac{(l+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}, \quad \tilde{\beta}_L = \varepsilon_2 \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Для получения решения уравнений Максвелла в случае двух сред найденные функции Грина необходимо подставить в (16). При этом возникают интегралы вида

$$\int f_l(kr) X_{lm}^* \cdot \text{rot } J_t d^3x, \quad \int f_l(kr) X_{lm}^* \cdot J_t d^3x,$$

где $f_l(kr)$ какое-либо решение однородного уравнения.

Эти интегралы желательно преобразовать к более удобному виду. Для этого подставим вместо J_t его значение

$$J_t = J + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \nabla\Phi$$

и проинтегрируем по частям.

В результате получим

$$\int f(kr) X_{lm}^* \cdot \text{rot } J_t d^3x = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left[i\omega\rho \frac{d}{dr}(rf) - k^2(rJ) f \right] d^3x, \tag{23}$$

$$\int f(kr) X_{lm}^* \cdot J_t d^3x = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* f \text{div}[r \times J] d^3x.$$

При получении этих равенств отброшены поверхностные интегралы. Это оправдано, если J обладает достаточно хорошими аналитическими свойствами и обращается на бесконечности в нуль быстрее, чем r^{-2} .

Как видно из этих выражений, поля мультиполей магнитного типа (типа g_{lm}) определяются плотностью магнитного момента тока $1/2c [r \times J]$.

Подставляя полученные функции $f_{lm}(kr)$ и $g_{lm}(kr)$ в разложения (3) и (4) с $\varepsilon = \varepsilon_1 \theta(a-r) + \varepsilon_2 \theta(r-a)$, $\mu = \mu_1 \theta(a-r) + \mu_2 \theta(r-a)$, мы получаем решение уравнений Максвелла в случае двух сред. Полученные таким образом поля являются поперечными. Продольная часть поля равна $-\nabla\Phi$, поскольку $E = E' - \nabla\Phi$.

Полученные решения позволяют рассмотреть большой круг вопросов, начиная от дифракции на сферическом препятствии произвольного возмущения и кончая электростатическими задачами. Мы будем в дальнейшем заниматься только вопросами излучения ограниченных распределений источников. Поэтому приведем окончательные выражения для Фурье-компонент полей в волновой зоне

$$k_2 r \gg 1, \quad r \gg d, \quad d = \max r'.$$

Они имеют вид:

$$H = \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{l, m} (-i)^{l+1} \left[A_E X_{lm} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \right)^{1/2} A_M [n \times X_{lm}] \right], \quad (24)$$

$$E = \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} [H \times n].$$

$$A_E = \frac{4\pi k_2 \omega}{ic \sqrt{l(l+1)}} (\alpha_E + \alpha_{1E} \alpha_E + \alpha_{2E} \bar{\beta}_E), \quad (25)$$

$$A_M = \frac{4\pi k_2 \omega \mu_2}{ic^2 \sqrt{l(l+1)}} (\alpha_M + \alpha_{1M} \alpha_M + \alpha_{2M} \bar{\beta}_M),$$

$$\alpha_E = D_E(a, \infty, j_l(k_2 r)), \quad \alpha_{1E} = D_E(a, \infty, h_l(k_2 r)),$$

$$\alpha_{2E} = D_E(0, a, j_l(k_1 r)).$$

Коэффициенты $\alpha_M, \alpha_{1M}, \alpha_{2M}$ выражаются точно таким же образом через D_M , где

$$D_E(r_1, r_2, f_l(kr)) = \int_{r_1}^{r_2} Y_{lm}^* \left[\rho \frac{d}{dr} (r f_l(kr)) + \frac{ik^2}{\omega} (rJ) f_l(kr) \right] d^3x, \quad (26)$$

$$D_M(r_1, r_2, f_l(kr)) = \int_{r_1}^{r_2} Y_{lm}^* f_l(kr) \operatorname{div} [r \times J] d^3x.$$

В заключении этого раздела отметим следующее: при $\varepsilon_1, \mu_1 = \varepsilon_2, \mu_2 = \varepsilon, \mu$ все формулы этого параграфа переходят в соответствующие выражения для случая одной среды; все коэффициенты типа α, β

являются коэффициентами отражения от сферической границы, а $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — коэффициентами прохождения.

3. Излучение заряда, равномерно вращающегося вокруг диэлектрической сферы.

Пусть заряд равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ с циклической частотой ω_0 . Поскольку движение периодически, разложим все величины в ряд Фурье. Для Фурье-компонент плотностей заряда и тока имеем выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{e}_\varphi \frac{vQ}{2\pi b^2} \delta(r-b) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}, \\ \rho(r, \omega) &= \frac{Q}{2\pi b^2 \sin \vartheta} \delta(r-b) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}, \\ \omega &= n\omega_0, \quad v = b\omega_0, \quad b > a. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в интегралы (25) и (26), получим

$$A_E = \frac{4\pi k_2 \omega Q}{ic \sqrt{l(l+1)}} \left[\frac{d}{db} b(j_l(k_2 b) + h_l^{(1)}(k_2 b) \alpha_E) \right] Y_{ln}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \delta_{nm}, \quad (27)$$

$$A_M = \frac{4\pi k_2 \omega Q v \mu_2}{ic^2 \sqrt{l(l+1)}} (j_l(k_2 b) + h_l^{(1)}(k_2 b) \alpha_M) \frac{d}{d\vartheta} Y_{ln}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \delta_{nm}.$$

Выражение $Y_{ln}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ отлично от нуля только при $l-n=2k$, а

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} Y_{ln}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) & \text{— при } l-n=2k+1, \text{ где} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$|H_n|^2 = \frac{1}{k_2^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_E X_{2k+n, n} - i \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \right)^{1/2} A_M \times [n X_{2k+n+1, n}] \right|^2. \quad (28)$$

Интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в элемент телесного угла $d\Omega$ можно вычислить по формуле

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} |H_n|^2 r^2 d\Omega. \quad (29)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

В нерелятивистском приближении $\beta \ll 1$, $n\beta \ll 1$ ряд (28) быстро сходится. Удерживая первый неиз исчезающий член этого ряда, можно получить для интенсивности формулу

$$dI_n = \frac{b^2 Q^2 (n\omega_0)^4 (n\beta \sin \vartheta)^{2n-2} (1 + \cos^2 \vartheta)}{2\pi c^3 2^{2n} \Gamma^2(n+1)} \left[1 + \frac{n(1-\varepsilon)}{n\varepsilon + n + 1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1} \right]^2, \quad (30)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \frac{a}{b} \ll 1.$$

При $a \rightarrow 0$ или $\varepsilon \rightarrow 1$ выражение в квадратных скобках обращается в единицу. При этом формула (29) переходит в известное выражение для интенсивности излучения при равномерном движении по окружности (см., напр. [3]).

Отношение интенсивности излучения при вращении вокруг диэлектрической сферы к интенсивности при вращении в вакууме дается величиной в квадратных скобках.

Рассмотрим теперь ультрарелятивистский случай, когда $1 - \beta^2 \ll 1$. Основную роль в измерении при этом играют гармоники с большими n . Угловое распределение излучения в этом случае резко анизотропно. Используя асимптотические выражения для присоединенных функций Лежандра $P_{2k+n}^n(\cos \vartheta)$, можно показать, что излучение в основном заключено в области углов $\vartheta = \frac{\pi}{2} \pm n^{-\frac{1}{3}}$. Поэтому мы рассмотрим более подробно спектральные распределения излучения. Интегрируя выражение (28) по всем углам и используя формулу (29), получим

$$I_n = \frac{2\omega^2 Q^2}{\pi c} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} R(k) \left| \frac{d}{db} b (j_{n+2k}(k_2 b) + h_{2k+n}(k_2 b) a_E) \right|^2 + 4\beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(k) |j_{n+2k+1}(k_2 b) + h_{n+2k+1}(k_2 b) a_M|^2 \right\}, \quad (31)$$

$$R(k) = \frac{2(n+2k)+1}{(n+2k)(n+2k+1)} \frac{\Gamma(k+1/2) \Gamma(n+k+1/2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1)},$$

$$P(k) = \frac{2(n+2k+1)+1}{(n+2k+1)(n+2k+2)} \frac{\Gamma(k+3/2) \Gamma(n+k+3/2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1)}.$$

Для непосредственного вычисления этих сумм нам пришлось бы брать огромное количество членов, поскольку $k_2 b = n\beta \gg 1$. Поэтому применим здесь технику, развитую В. А. Фоком в работе [4]. Как мы увидим ниже, основную роль в этих суммах играют значения $k \sim n^{1/3}$.

Поэтому имеем:

$$R(k) \approx \frac{2}{n^{3/2}} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)}, \quad P(k) \approx \frac{2}{n^{1/2}} \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)}.$$

$$\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \approx \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{1/2}.$$

После этого мы переходим от суммирования по k к интегрированию по $x = n + 2k$. Далее вводим новую переменную интегрирования t согласно формулам

$$x = k_2 b + \left(\frac{k_2 b}{2}\right)^{1/3} t = k_2 a + \left(\frac{k_2 a}{2}\right)^{1/3} t'$$

и выражаем все функции j , h через функции $v(t)$ и $u(t)$, введенные в работе [4]. В результате, используя для α_E и α_M их значения для случая идеальной проводимости, получим для спектрального распределения интенсивности излучения следующую формулу:

$$I_n = \frac{4\omega_0^2 Q^2}{\pi c} \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} (J_1 + J_2), \quad (32)$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^{-1/2} v'^2(t) F_1(t, y) dt,$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^{1/2} v^2(t) F_2(t, y) dt,$$

$$F_1(t, y) = \left| 1 - \frac{w'(t) v'(t+y)}{v'(t) w'(t+y)} \right|^2,$$

$$F_2(t, y) = \left| 1 - \frac{w(t) v(t+y)}{v(t) w(t+y)} \right|^2,$$

$$t_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1-\beta^2), \quad y = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad w''(t) = tw(t).$$

В этих выражениях через $v(t)$ обозначена функция Эйри. Функция $u(t)$ может быть определена из соотношения

$$u'(t) v(t) - u(t) v'(t) = 1.$$

При $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$V(t) = \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} t^{3/2}}, \quad u(t) = t^{-1/4} e^{2/3 t^{3/2}}.$$

Функции $F_1(t, y)$ и $F_2(t, y)$ обращаются в единицу при $y \gg 1$ (что соответствует отсутствию сферы).

При этом формула (32) дает интенсивность излучения заряда, равномерно движущегося по окружности, и совпадает с формулой (12) работы [5]. В этом случае спектральное распределение имеет максимум при $t_0 \sim 1$, т. е. $n \sim (1-\beta^2)^{-3/2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $y \ll 1$. Разлагая функции $v(t+y)$ и $w(t+y)$ по степеням y и удерживая первый не исчезающий член, получим

$$J_1 \approx y^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{t-t_0} v'^2(t) + u'^2(t)} dt,$$

$$J_2 \approx y^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{1/2}}{v^2(t) + u^2(t)} dt.$$

Таким образом, при $y \gg 1$, т. е. $1 - \frac{a^2}{b^2} \ll 1 - \beta^2$, интенсивность излучения исчезающе мала. Физически этот результат является очевидным, поскольку заряд движется вблизи металлической сферы. Наличие сферы эффективно сказывается при $y \sim 1$ ($1 - \frac{a^2}{b^2} \sim 1 - \beta^2$). При $y \gg 1$ наличием сферы можно пренебречь.

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Гарибяну и И. И. Гольдману за полезные советы и обсуждения результатов.

Ереванский физический институт

Поступила 2.XII.1968

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II., ИИЛ, М, 1958.
2. Дж. Джексон. Классическая электродинамика. Изд. "Мир", 1965.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, М, 1960.
4. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946.
5. Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман. Изв. АН Арм. ССР, 7, 31 (1954).

ՍՖԵՐԻԿ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅՈՎ ՕԺՏՎԱԾ
ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՄԵՋ ԿԱՄԱՅԱՊԵՍ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑՔԵՐԻ ԶԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Մ. Ռ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ

Աշխատանքում Գրինի ֆունկցիաների մեթոդով ստացված է Մաքսվելի հավասարումների լուծումը սֆերիկ բաժանման սահման ունեցող, դիսպերսիայով օժտված երկու միջավայրերի համար, աղբյուրների կամայական բաշխման դեպքում: Ստացված արտահայտությունները թույլ են տալիս ուսումնասիրել էլեկտրոդինամիկական մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծումը դժվար է ստանալ սովորական մեթոդիկալով:

Որպես օրինակ աշխատանքում դիտարկված է դիլեկտորիկ զնդի շուրջը հավասարաչափ պտտվող լիցքի ճառագայթումը:

RADIATION OF ARBITRARILY MOVING CHARGES IN DISPERSING MEDIA WITH A SPHERICAL INTERFACE

M. R. MAGOMEDOV

A solution of Maxwell equations for the case of two dispersing media with a spherical interface by the method of Green's function is obtained for arbitrarily distributed external sources. The asymptotic expressions for the fields are also given. By the solution obtained one may consider numerous problems beginning from diffraction of an arbitrarily given pulse on a sphere to electrostatic problems. The intensity of the radiation for the charge uniformly rotating around the dielectric sphere is also calculated.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

С. Н. СТОЛЯРОВ

В работе выяснено, каким образом сказывается движение среды на виде геометрикооптических решений. Показано, что перемещение среды не влияет на амплитуды волн в приближении геометрической оптики, а изменяет только фазы этих волн. Показано, что в приближении геометрической оптики в неоднородной движущейся среде распространяются навстречу друг другу две независимые волны, частоты которых связаны между собой так же, как при двойном эффекте Доплера, который возникает при отражении от движущихся границ.

В последнее время различным вопросам электродинамики движущихся сред уделяется все больше внимания. Эти вопросы представляют интерес как с точки зрения общей теории, так и с точки зрения ее возможных применений [1, 2, 4] в связи с тем, что уже в настоящее время в средах с нелинейными свойствами возможно движение различных границ раздела с релятивистскими скоростями [3, 4].

В данной заметке мы хотим получить явный вид геометрикооптических решений в электродинамике движущихся сред с помощью решений уравнений Максвелла для конкретного случая равномерно движущейся среды, т. е. когда среда движется со скоростью v сквозь неизменный профиль диэлектрической постоянной $\varepsilon(z)$. Мы желаем также выяснить вопрос, каким образом движение среды сказывается на виде геометрико-оптических решений и на условиях их применимости. В принципе получаемые ниже результаты можно было бы получить с помощью преобразований Лоренца общих выражений для покоящихся сред с медленно-меняющимися параметрами, приведенных в работах [9, 10].

В частности, полученные ниже решения эквивалентны геометрикооптическим решениям для покоящейся среды с $\varepsilon(z, t) = \varepsilon(z + vt)$, но в той системе координат, где профиль волны диэлектрической постоянной покоится. Примером такой среды может являться среда, по которой перемещается мощный световой импульс и свойства которой меняются за счет ее нелинейных эффектов синхронно с перемещением максимума светового импульса. Как известно [3], скорость перемещения максимума такого импульса в усилителе света может быть отличной от скорости света в среде.

Для простоты ищется решение одномерного волнового уравнения

$$[1 - \beta^2 \cdot \varepsilon(z)] \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon(z) - \beta^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{c} \cdot [\varepsilon(z) - 1] \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} -$$

$$-\beta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot \left[\beta \cdot \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right] = 0 \quad (1)$$

для электромагнитной волны $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z, t) \cdot \vec{e}_y$, распространяющейся вдоль оси z , в положительном направлении которой со скоростью $v = c\beta$ перемещается неоднородная среда с $\varepsilon = \varepsilon(z)$ и $\mu = 1$; c — скорость света в вакууме.

Уравнение (1) получено с помощью уравнений Максвелла и уравнений связи Минковского в движущейся среде [5]. При этом в уравнениях связи Минковского вместо постоянной ε введена диэлектрическая постоянная $\varepsilon(z)$, зависящая от координаты z . Это возможно делать потому, что соотношения Минковского получаются путем преобразований Лоренца из известных соотношений между индукциями и полями в покоящейся среде, а последние в случае отсутствия пространственной дисперсии носят локальный характер.

Для покоящейся среды ($\beta = 0$) уравнение (1) переходит в известное волновое уравнение в среде с переменным показателем преломления, а при постоянном ε , не зависящем от координат, из него нетрудно получить дисперсионное уравнение электродинамики движущихся однородных сред [6].

Как и в случае покоящихся сред, решение уравнения (1) ищем в виде ряда последовательных приближений по степеням малой длины волны $\lambda = c/\omega$ [7]:

$$E(z, t) = \left\{ E_0(z) + \frac{c}{\omega} E_1(z) + \frac{c}{\omega^2} E_2(z) + \dots \right\} \exp i \left[\psi(z) - ct \right]. \quad (2)$$

Если подставить это разложение в уравнение (1) и приравнять члены с одинаковыми степенями c/ω , то для искомого величин $\psi(z)$, $E_0(z)$, $E_1(z)$, ... можно получить систему уравнений:

$$\left[1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right] \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 + 2\beta [\varepsilon(z) - 1] \frac{d\psi}{dz} - [\varepsilon(z) - \beta^2] = 0, \quad (a)$$

$$2 \left\{ 1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right\} \frac{d\psi}{dz} + \beta [\varepsilon(z) - 1] \left\{ \frac{dE_0}{dz} + \left[1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right] \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\varepsilon}{dz} \left[1 - \beta \frac{d\psi}{dz} \right] \right\} E_0 = 0, \quad (6)$$

$$2 \left\{ 1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right\} \frac{d\psi}{dz} + \beta [\varepsilon(z) - 1] \left\{ \frac{dE_1}{dz} + \left[1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right] \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\varepsilon}{dz} \left[1 - \beta \frac{d\psi}{dz} \right] \right\} E_1(z) = i \left\{ 1 - \beta^2 \varepsilon(z) \right\} \frac{d^2 E_0}{dz^2} - \beta^2 \frac{d\varepsilon}{dz} \cdot \frac{dE_0}{dz}, \quad (3)$$

.....

Первое уравнение этой системы определяет фазу волны в движущейся неоднородной среде. Для нерелятивистских скоростей оно было найдено в [8].

Решения этого уравнения имеют вид:

$$n_+(z) = \frac{d\psi_+}{dz} = \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_1 = \frac{\mu(z) + \beta}{1 + \beta \cdot \mu(z)}; \quad \psi_+(z) = \int_{z_0}^z n_+(\xi) d\xi; \quad (4)$$

$$n_-(z) = \frac{d\psi_-}{dz} = \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2 = -\frac{\mu(z) - \beta}{1 - \beta \cdot \mu(z)}; \quad \psi_-(z) = \int_{z_0}^z n_-(\xi) d\xi,$$

где $\mu(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$, а z_0 — постоянная интегрирования. Величины $n_+(z)$ и $n_-(z)$ определяют показатели преломления в движущейся неоднородной среде соответственно для волны, бегущей по направлению движения среды (n_+) и против (n_-), (см. [6]). Их отличие от показателя преломления $\mu(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ для покоящейся неоднородной среды связано с увлечением волн движущейся средой.

Из второго уравнения системы (3) с помощью выражений (4) нетрудно также найти амплитуды $E_0^\pm(z)$ этих двух волн. Они имеют вид

$$E_0^\pm(z) = C_\pm / \sqrt{\mu(z)}, \quad (5)$$

где C_\pm — постоянные, определяемые из граничных условий.

Таким образом, в движущейся неоднородной среде в приближении геометрической оптики распространяются две независимые волны вида

$$E^\pm(z, t) = \frac{C_\pm}{\sqrt{\mu(z)}} \cdot e^{i\Phi_\pm(z, t)}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_\pm(z, t) = \frac{\omega}{c} [\psi_\pm(z) - ct].$$

При этом движение среды сказывается на фазах обеих волн и не сказывается на амплитудах.

Выясним условия применимости приближения геометрической оптики в движущейся неоднородной среде. Для этого из третьего уравнения системы (3) найдем следующую поправку $E_1(z)$ к геометрико-оптической амплитуде поля $E_0(\xi)$. В силу равенств (4) и (5) она принимает вид

$$E_1^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(z)}} \int_{z_1}^z \sqrt{\mu(\xi)} \cdot \chi^\pm(\xi) d\xi, \quad (7)$$

где

$$\chi^\pm(\xi) = \pm \frac{iC_\pm}{8(1-\beta^2)\sqrt{\mu(\xi)}} \left\{ \frac{3 + \beta^2\mu^2(\xi)}{\mu^3(\xi)} \left(\frac{d\mu}{d\xi}\right)^2 - \frac{2[1 - \beta^2\mu^2(\xi)]}{\mu^2(\xi)} \frac{d^2\mu}{d\xi^2} \right\},$$

z_1 — постоянная интегрирования, а индексы „+“ и „-“ соответствуют двум независимым волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях оси z .

При $\beta = 0$ выражения для $E_1^\pm(z)$ совпадают с аналогичными выражениями в [7].

Если проинтегрировать выражение (7) по частям, то поправку $E_1(z)$ к геометрико-оптическому приближению можно записать в более удобном виде:

$$E_1^\pm(z) = \mp \frac{iC_\pm}{4\sqrt{\mu(z)}(1-\beta^2)} \left\{ \frac{1-\beta^2\mu^2(\xi)}{\mu^2(\xi)} \frac{d\mu}{d\xi} \Big|_{z_1}^z + \int_{z_1}^z \frac{1-\beta^2\mu^2(\xi)}{2\mu^3(\xi)} \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 d\xi \right\}.$$

Отсюда и из выражения (5) видно, что, как и для покоящихся неоднородных сред, относительная поправка $\delta_\pm(z) = \frac{c}{\omega} E_1^\pm(z)/E_0^\pm$ в разложении (2) будет мала там, где изменение показателя преломления $\mu(z)$ на расстояниях порядка длины волны $\lambda = c/\omega$ много меньше единицы, т. е. $\left| \frac{\lambda}{\mu(z)} \frac{d\mu}{dz} \right| \ll 1$. Движение среды существенным образом сказывается на условии применимости приближения геометрической оптики только при релятивистских скоростях движения среды. Наличие множителя $[1-\beta^2\mu^2(z)]$ в выражении для $E_1(z)$ делает условия применимости менее жесткими по мере приближения скорости движения среды к фазовой скорости распространения волны в ней.

В заключение отметим, что рассмотренная выше задача с точки зрения системы координат $S^{(0)}$, в которой неоднородная среда покоится, эквивалентна задаче о приближении геометрической оптики в системе, где сквозь неподвижную среду со скоростью v перемещается в отрицательном направлении оси z неизменный профиль диэлектрической постоянной $\varepsilon(z^{(0)} + vt^{(0)})^*$. Тогда можно показать, преобразуя по известным формулам преобразований Лоренца от системы S к системе $S^{(0)}$ частоты, волновые векторы и амплитуды электрического поля, что в системе координат $S^{(0)}$, где среда покоится, также имеются в каждой точке две независимые волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси z . Частоты, волновые векторы и амплитуды поля этих волн имеют вид

$$\omega_\pm^{(0)} = \frac{\omega \sqrt{1-\beta^2}}{1 \pm \beta \cdot \mu(\eta)}; \quad k_\pm^{(0)} = \pm \frac{\omega_\pm^{(0)}}{c} \cdot \mu(\eta);$$

$$E_0^\pm = C_\pm^{(0)} / \sqrt{\mu(\eta)} \cdot [1 \pm \beta \mu(\eta)]; \quad C_\pm^{(0)} = C_\pm \sqrt{1-\beta^2}; \quad \eta = z^{(0)} + vt^{(0)}.$$

Видно, что частоты этих двух независимых волн различны и в каждой точке среды η между ними имеет место связь

$$\frac{\omega_-^{(0)}}{\omega_+^{(0)}} = \frac{1 + \beta \cdot \mu(\eta)}{1 - \beta \mu(\eta)}.$$

* Величины, относящиеся к этой системе координат $S^{(0)}$, обозначаются индексом (0) сверху в отличие от величин без индекса, относящихся к системе координат S , в которой неоднородная среда движется со скоростью v в положительном направлении оси z .

Эта связь соответствует двойному эффекту Допплера, который возникает при отражении от движущихся границ раздела.

Поступила 1. IV.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. C. S. Tsai, Appl. Phys. Let., 9, № 11, 400 (1966).
2. B. A. Auld, C. S. Tsai, Jour. Appl. Phys., 38, № 5, 2106 (1967).
3. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, ДАН СССР, 165, № 1, 58 (1965).
4. А. В. Гапонов, А. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 10, № 9—10 (1967).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
6. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме. ГИФМЛ, М., 1960.
8. Н. Н. Критикос, Proc. IEEE, 55, № 3, 442 (1967).
9. А. А. Островский, Изв. высш. учеб. зав., Радиофизика, 4, 293 (1961).
10. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, 226 (1961).

ՇԱՐԺՎՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Ն. ՍՏՈԼՅԱՐՈՎ

Աշխատանքում բացահայտված է, թե ինչպես է անդրադառնում միջավայրի շարժումը երկրաչափաօպտիկական լուծումների ձևի վրա: Ցույց է տրված, որ միջավայրի տեղաշարժը չի ազդում ալիքների ամպլիտուդայի վրա երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության մեջ, այլ փոխում է միայն այդ ալիքների ֆազերը: Ցույց է տրված, որ երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության մեջ շարժվող անհամասեռ միջավայրում տարածվում են իրար հանդիպակաց երկու անկախ ալիքներ, որոնց հաճախականությունները կապված են միմյանց հետ այնպես, ինչպես Դոպլերի կրկնակի էֆեկտի դեպքում, որը առաջանում է շարժվող սահմաններից անդրադարձման դեպքում:

ON APPROXIMATION OF GEOMETRICAL OPTICS IN ELECTRODYNAMICS OF MOVING MEDIA

S. N. STOLIAROV

Influence of motion of a medium on the kind of geometricoptical solutions is found out. It is shown that in the above approximation the translation of a medium makes no effect on the wave amplitudes but changes their phases only.

Two independent waves whose frequencies are interrelated the same way as in the double Doppler effect arising in reflecting from moving boundaries are shown to propagate towards each other in a heterogeneous medium in approximation of geometrical optics.

ПОЛЯ И ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
ПРИ ПРОЛете ЧЕРЕЗ СЛОИСТУЮ СРЕДУ

В. А. АРАКЕЛЯН, Г. М. ГАРИБЯН, Э. А. НАЛБЯН

Рассмотрен пролет заряженной частицы через стопку, состоящую из произвольного числа пластин, разделенных между собой вакуумом. Получены выражения для возникающих при этом полей излучения как внутри стопки, так и вне ее. С помощью этих формул получено общее выражение для полных потерь энергии заряда в стопке, просуммированное по всем пластинкам. Приведены также формулы для энергии излучения в пространствах до и после стопки пластин.

Задача о пролете заряда через пространственно бесконечную среду, состоящую либо из двух родов пластин, либо из среды с периодически плавно меняющимися электродинамическими свойствами, рассматривалась рядом авторов (см. обзор [1]). Значительно меньше работ (см. также [1]) посвящено рассмотрению пролета заряда через стопку, состоящую из произвольного (и, в частности, конечного) числа пластин, разделенных между собой вакуумом. В работе [2] поля излучения, возникающие при этом, были найдены лишь в пространствах до стопки пластин ($z < 0$) и после нее ($z > Na + (N-1)b$). В настоящей работе мы пользуясь до некоторого этапа подходом работы [2], а затем поступая аналогично тому, как это было сделано в [3], получим относительно компактные выражения для полей излучения как вне стопки пластин, так и внутри нее, не сделав никаких приближений. Используя эти выражения для полей, получены формулы для полных потерь энергии, испытываемых зарядом при пролете через стопку пластин, а также для потерь на излучение.

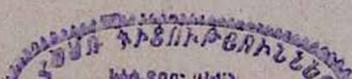
1. Пусть заряженная частица, дбизущая со скоростью $v_z = v > 0$, перпендикулярно пролетает через слоистую среду, состоящую из параллельных пластин с диэлектрической постоянной $\epsilon(\omega)$, магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ и каждой толщины a , причем находятся они друг от друга на расстоянии b в вакууме. Поля заряда как в веществе, так и в вакууме общеизвестны и мы не будем их здесь приводить. Поля излучения в вакууме будем искать в виде [4]

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \int \vec{E}'(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} + \lambda_0 z - \omega t)} d\vec{k},$$

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \int \vec{E}''(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \lambda_0 z - \omega t)} d\vec{k}, \quad (1)$$

где $\lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - x^2$, $\omega = k_z v$, $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z = d\vec{k} \frac{d\omega}{v}$.

ПА-4.896.



Поля излучения в веществе, соответственно, будут иметь вид

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}, t) &= \int \vec{E}'(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} + \lambda z - \omega t)} d\vec{k}, \\ \vec{E}''(\vec{r}, t) &= \int \vec{E}''(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \lambda z - \omega t)} d\vec{k},\end{aligned}\quad (2)$$

где $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - k^2$. Очевидно, что поля с одним штрихом соответствуют волнам, движущимся в положительном направлении оси z (проходящие волны), тогда как с двумя штрихами — в отрицательном направлении оси z (отраженные волны).

Из условия излучения следует, что в пространстве до стопки пластин ($z < 0$) будут присутствовать только отраженные волны, а в области за стопкой ($z > Na + (N-1)b$) будут присутствовать только проходящие волны.

Написав на границах $(m+1)$ пластины условия непрерывности для электрических векторов полного поля, состоящего из поля заряда и поля излучения, мы получим 4 уравнения. Исключив из этих уравнений поля в $(m+1)$ пластине, мы получим следующую связь между тангенциальными Фурье-компонентами $E'_{m,t}(\vec{k}; N)$ и $E'_{m,d}(\vec{k}; N)$ векторов электрических полей излучения в m -ом и, соответственно, в $(m+1)$ -ом отсеках:

$$\begin{aligned}E'_{m+1} &= N_1 E'_m + M_1 E'_m - \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} \frac{e^{i\lambda x}}{2\pi^2} e^{im(a+b)\frac{\omega}{v}} A, \\ E'_{m+1} &= N_2 E'_m + M_2 E'_m + \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} \frac{e^{i\lambda x}}{2\pi^2} e^{im(a+b)\frac{\omega}{v}} C,\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}E'_m &= E'_{m,t}(\vec{k}; N) e^{-iL_m \lambda_0}, \\ E'_m &= E'_{m,d}(\vec{k}; N) e^{iL_m \lambda_0}\end{aligned}\quad (3')$$

($L_m = ma + (m-1)b$ — есть общая длина стопки, состоящей из m пластин).

$$\begin{aligned}M_1 &= -\frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} e^{i\lambda_0 b} G; \quad M_2 = \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} e^{i\lambda_0 b} H; \\ N_1 &= \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} e^{-i\lambda_0 b} F; \quad N_2 = \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} e^{-i\lambda_0 b} G; \\ F &= \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{i\lambda a},\end{aligned}$$

$$H = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right)^2 e^{i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^2 e^{-i\lambda a}; \quad (3'')$$

$$G = \left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) (e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}).$$

Величины A и C определяются из следующих формул:

$$\left. \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right\} = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha e^{\mp i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \beta e^{\pm i\lambda a} + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \gamma e^{\pm ik_z a},$$

$$\left. \begin{array}{l} C \\ D \end{array} \right\} = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha e^{\mp i\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \beta e^{\pm i\lambda a} - \frac{2\varepsilon}{\lambda} \delta e^{\pm ik_z a},$$

причем $\left(k^2 = x^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \frac{+\frac{\varepsilon}{\lambda} \mp \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{-\frac{1}{\lambda} \pm \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu},$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \\ \delta \end{array} \right\} = \frac{-\frac{1}{\lambda_0} \pm \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{+\frac{1}{\lambda_0} \mp \frac{v}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu}.$$

Вместо полей E'_m и E''_m введем новые величины F'_m и F''_m , определяемые соотношениями [2]

$$F'_{m+1} = E'_{m+1} + \alpha'' e^{im(a+b)\frac{\omega}{v}},$$

$$F''_{m+1} = E''_{m+1} + \alpha' e^{im(a+b)\frac{\omega}{v}}, \quad (4)$$

причем α' и α'' выберем так, чтобы связь между F'_{m+1} и F'_m имела бы вид

$$F'_{m+1} = N_1 F'_m + M_1 F''_m,$$

$$F''_{m+1} = N_2 F''_m + M_2 F'_m \quad (5)$$

Для этого, подставляя в (4) значения E'_{m+1} и E''_{m+1} из (3), выразим в полученных формулах E'_m и E''_m через F'_m и F''_m , снова используя (4). Требуя далее, чтобы эти формулы совпали с (5), мы для определения α' и α'' получим систему, состоящую из двух уравнений. Решая ее, будем иметь

$$\alpha'' = \frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} \cdot \frac{e^{ix}}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{T} (A + B e^{i(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}b)}),$$

$$\alpha' = -\frac{\lambda \lambda_0}{4\varepsilon} \cdot \frac{e^{ix}}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{T} (C + De^{-l(\lambda_0 + \frac{\omega}{v})b}), \quad (6)$$

причем

$$T = 1 - 2\zeta e^{-l\tau} + e^{-2l\tau}; \quad \varphi = \frac{\omega}{v}(a+b),$$

$$2\zeta = M_2 + N_1; \quad M_2 N_1 - M_1 N_2 = 1. \quad (7)$$

Таким образом, величины F_m' и F_m'' , в которые входят искомые поля, подчиняются не зависящему от m преобразованию (5) при переходе от одного отсека к соседнему.

2. В этом пункте мы найдем связь отдельно между величинами F_m' с одной стороны и отдельно между величинами F_m'' с другой. Следуя работе [3], рассмотрим три соседних отсека: $m-1$, m и $m+1$. Для этого запишем уравнения (5) с индексом меньшим на единицу:

$$F_m' = N_1 F_{m-1}'' + M_1 F_{m-1}',$$

$$F_m'' = N_2 F_{m-1}' + M_2 F_{m-1}''. \quad (8)$$

Взяв второе из уравнений (5) и последовательно исключая в нем величины с двумя штрихами, с помощью уравнений (8) и используя (7), нетрудно получить

$$F_{m+1}' = 2\zeta F_m' - F_{m-1}'. \quad (9)$$

Соответственно, взяв первое из уравнений (5) и последовательно исключая в нем величины с одним штрихом, с помощью уравнений (8) и используя (7), получим

$$F_{m+1}'' = 2\zeta F_m'' - F_{m-1}''. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) имеют вид рекуррентных соотношений для полиномов Чебышева [5], а следовательно, они должны удовлетворяться полиномами Чебышева либо первого рода $T_m(\zeta)$, либо второго рода $U_m(\zeta)$, либо их линейной комбинацией.

Выбор соответствующего решения однозначно определится условиями излучения. Для этого полагая в (4) $m+1=0$ и $m+1=N$ и учитывая, что $E_0=0$ и $E_N'=0$, получим

$$F_0' = \alpha' e^{-l\tau}; \quad F_0'' = E_0 + \alpha'' e^{-l\tau},$$

$$F_N' = E_N' + \alpha' e^{l(N-1)\tau}; \quad F_N'' = \alpha'' e^{l(N-1)\tau}. \quad (11)$$

3. Определим сначала тангенциальные Фурье-компоненты электрических векторов полей излучения, движущихся вдоль отрицательного направления оси z , в произвольном m -ом отсеке. Для этого установим связь между величинами F_m' и F_0' . Подставляя в уравнения (8) $m=1, 2, 3, \dots$, исключая в них члены с одним штрихом и учитывая граничные условия (11), легко можно найти следующую последовательность выражений:

$$\begin{aligned}
 F_1^* &= N_1 F_0^* + M_1 \alpha' e^{-l\varphi}, \\
 F_2^* &= (2\zeta N_1 - 1) F_0^* + 2\zeta M_1 \alpha' e^{-l\varphi}, \\
 F_3^* &= [(4\zeta^2 - 1) N_1 - 2\zeta] F_0^* + (4\zeta^2 - 1) M_1 \alpha' e^{-l\varphi}, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

В полученных формулах выражения 2ζ , $4\zeta^2 - 1$, \dots являются полиномами Чебышева второго рода $U_m(\zeta)$. Следовательно, исходя из вышеприведенной последовательности выражений, мы для F_m^* можем написать следующую общую формулу:

$$F_m^* = [U_{m-1}(\zeta) N_1 - U_{m-2}(\zeta)] F_0^* + M_1 \alpha' e^{-l\varphi} U_{m-1}(\zeta), \quad (12)$$

причем $m=0, 1, \dots, N$. Написанное выражение правильно учитывает условия излучения, если иметь в виду, что

$$\begin{aligned}
 U_2(\zeta) &= -1, \quad U_{-1}(\zeta) = 0, \quad U_0(\zeta) = 1, \\
 U_1(\zeta) &= 2\zeta, \dots
 \end{aligned}$$

Таким образом, для F_m^* , в согласии с вышеуказанным, получено выражение, состоящее из суперпозиции полиномов Чебышева второго рода $(m-2)$ и $(m-1)$ порядков.

Величину F_0^* можно определить из того же уравнения (12) при $m=N$, учитывая, что $F_N^* = \alpha'' e^{i(N-1)\varphi}$, как это следует из (11). Тогда для F_0^* будем иметь

$$F_0^* = \frac{e^{-l\varphi}}{Q_N} (\alpha'' e^{iN\varphi} - \alpha' M_1 U_{N-1}), \quad (13)$$

где

$$Q_N = U_{N-1} \cdot N_1 - U_{N-2} \quad (13')$$

(здесь и в дальнейшем аргумент ζ полиномов U_m опускается). Подставляя (13) в (12), получим следующее выражение для F_m^* :

$$F_m^* = \frac{e^{-l\varphi}}{Q_N} [\alpha'' e^{iN\varphi} Q_m - \alpha' M_1 U_{N-m-1}]. \quad (14)$$

Подстановка (4) и (3') в выражение (14) для F_m^* даст значение тангенциальной Фурье-компоненты вектора электрического поля излучения, движущегося вдоль отрицательного направления оси z , в произвольном m -ом отсеке стопки, состоящей из N пластин:

$$F_{m,t}^*(\vec{k}; N) = \frac{e^{-l\varphi + iL_m \lambda_0}}{Q_N} [\alpha'' (e^{iN\varphi} Q_m - e^{im\varphi} Q_N) - \alpha' M_1 U_{N-m-1}]. \quad (15)$$

В частности, подставляя в формулу (15) значение $m=0$, можно получить тангенциальную Фурье-компоненту вектора электрического поля излучения в пространстве до стопки пластин (отраженную волну):

$$E_{0,t}^*(\vec{k}; N) = \frac{e^{-l\varphi - i\lambda_0 b}}{Q_N} [\alpha'' (e^{iN\varphi} - Q_N) - \alpha' M_1 U_{N-1}]. \quad (16)$$

Можно показать, что формула (16) совпадает с формулой (7), полученной в работе [2], при подстановке в (16) выражения для $U_m(\zeta)$ в следующем виде

$$U_m(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}} [(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})^{m+1} - (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})^{m+1}].$$

4. Теперь определим поля излучения, движущиеся вдоль положительного направления оси z . Предварительно найдем связь между F'_N и F'_{N-n} . Для этого последовательно подставляя в уравнения (8) $m = N, N-1, N-2, \dots$, используя соотношения (11) и исключая члены с двумя штрихами, получим

$$\begin{aligned} F'_{N-1} &= N_1 F'_N - \alpha'' N_2 e^{i(N-1)\varphi}, \\ F'_{N-2} &= (2\zeta N_1 - 1) F'_N - \alpha'' 2\zeta N_2 e^{i(N-1)\varphi}, \\ F'_{N-3} &= [(4\zeta^2 - 1) N_1 - 1] F'_N - \alpha'' (4\zeta^2 - 1) N_2 e^{i(N-1)\varphi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F'_{N-n} = Q_n F'_N - \alpha'' U_{n-1} N_2 e^{i(N-1)\varphi}. \quad (17)$$

Полагая в последней формуле $N-n=m$, получим

$$F'_m = Q_{N-m} F'_N - \alpha'' U_{N-m-1} N_2 e^{i(N-1)\varphi}. \quad (18)$$

Таким образом, зная F'_N , мы можем определить F'_m .

Для определения F'_N положим в уравнении (18) $m=0$ и используем первую пару граничных условий (11).

Тогда для F'_N получим

$$F'_N = \frac{e^{-i\varphi}}{Q_N} (\alpha'' U_{N-1} N_2 e^{iN\varphi} + \alpha') \quad (19)$$

и соответственно F'_m запишется в виде

$$F'_m = \frac{e^{-i\varphi}}{Q_N} [\alpha' Q_{N-m} + \alpha'' U_{m-1} N_2 e^{iN\varphi}]. \quad (20)$$

Наконец, выражая F'_m через поля, получим (используя (4))

$$E'_{m,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{i(N-1)\varphi - iL_m\lambda_0}}{Q_N} [\alpha' (e^{-iN\varphi} Q_{N-m} - e^{i(m-N)\varphi} Q_N) + \alpha'' N_2 U_{m-1}]. \quad (21)$$

Полагая в формуле (21) $m=N$, можно получить поле излучения в пространстве за стопкой пластин:

$$E'_{N,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{i(N-1)\varphi - iLN\lambda_0}}{Q_N} [\alpha' (e^{-iN\varphi} - Q_N) + \alpha'' U_{N-1} N_2]. \quad (22)$$

Нетрудно и в этом случае показать, что выражение (22) для $F'_{N,t}$ совпадает с формулой (8) работы [2].

Для полноты отметим, что если воспользоваться для F_m^r и F_m^i формулами (14) и (20) и подставить их в правые части уравнений (5), то эти последние уравнения дадут для F_{m+1}^r и F_{m+1}^i выражения, совпадающие с (14) и (20), с m , замененным на $m+1$.

5. Наконец, получим выражения для полей излучения в самих пластинках. Для этого достаточно воспользоваться условиями непрерывности полных полей на границах пластин. В результате для тангенциальных Фурье-компонент векторов электрических полей излучения в m -ой пластинке получим формулы

$$\begin{aligned} \underline{E}_{m,t}(\vec{k}; N) &= \frac{\lambda e^{iLm\lambda}}{2\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) F_m^r + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) F_m^i - \right. \\ &- e^{i(m-1)\varphi} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha'' + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha' + \frac{eix}{2\pi^2} \alpha e^{i\frac{\omega}{v}a} \right] \Big\}; \\ \underline{E}'_{m,t}(\vec{k}; N) &= \frac{\lambda e^{-iLm\lambda}}{2\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) F_m^r + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) F_m^i - \right. \\ &- e^{i(m-1)\varphi} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha'' + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \alpha' + \frac{eix}{2\pi^2} \beta e^{i\frac{\omega}{v}a} \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (23)$$

6. Вычислим работу, производимую полем излучения над заряженной частицей за все время ее пролета. Нетрудно получить для нее выражение

$$\begin{aligned} W &= e \int_{-\infty}^0 \vec{E}_{0,n}(t) \cdot \vec{v} dt + e \sum_{m=1}^N \int_{\frac{(m-1)(a+b)}{v}}^{\frac{Lm}{v}} (\vec{E}_{m,n}(t) + \vec{E}'_{m,n}(t)) \cdot \vec{v} dt + \\ &+ e \sum_{m=1}^{N-1} \int_{\frac{Lm}{v}}^{\frac{m(a+b)}{v}} (\vec{E}'_{m,n}(t) + \vec{E}_{m,n}(t)) \cdot \vec{v} dt + e \int_{\frac{LN}{v}}^{\infty} \vec{E}'_{N,n}(t) \cdot \vec{v} dt, \end{aligned}$$

где первое слагаемое есть работа, производимая до стопки пластин, второе—работа внутри пластинок, третье—работа в отсеках, четвертое—работа за стопкой пластин. Индекс n обозначает нормальную составляющую полей, а сами поля взяты в точке, где находится частица, т. е. при $\rho=0$ и $z=vt$.

Интегрируя по t и переходя в этом выражении от нормальных Фурье-компонент к тангенциальным, с помощью условий поперечности

$$\begin{aligned} \lambda_0 E'_{m,n}(\vec{k}; N) + \chi E'_{m,t}(\vec{k}; N) &= 0, \quad \lambda \underline{E}'_{m,n}(\vec{k}; N) + \chi \underline{E}'_{m,t}(\vec{k}; N) = 0, \\ -\lambda_0 E_{m,n}(\vec{k}; N) + \chi E_{m,t}(\vec{k}; N) &= 0, \quad -\lambda \underline{E}_{m,n}(\vec{k}; N) + \chi \underline{E}_{m,t}(\vec{k}; N) = 0 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 W = & ie \int_{\lambda_0}^x \frac{x}{\left(\lambda_0 + \frac{\omega}{v}\right)} E_{0,t}(\vec{k}; N) d\vec{k} + ie \sum_{m=1}^N \int \frac{x}{\lambda} \left\{ \frac{e^{i\left(\lambda - \frac{\omega}{v}\right)a} - 1}{\lambda - \frac{\omega}{v}} \times \right. \\
 & \times e^{i(m-1)(a+b)\left(\lambda - \frac{\omega}{v}\right)} \cdot \underline{E}_{m,t}(\vec{k}; N) + \frac{e^{-i\left(\lambda + \frac{\omega}{v}\right)a} - 1}{\lambda + \frac{\omega}{v}} \times \\
 & \times e^{-i(m-1)(a+b)\left(\lambda + \frac{\omega}{v}\right)} \underline{E}_{m,t}(\vec{k}; N) \left. \right\} d\vec{k} + \\
 & + ie \sum_{m=1}^{N-1} \int \frac{x}{\lambda_0} \left\{ \frac{e^{i\left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)b} - 1}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}} e^{iL_m\left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)} E_{m,t}(\vec{k}; N) + \right. \\
 & + \frac{e^{-i\left(\lambda_0 + \frac{\omega}{v}\right)b} - 1}{\lambda_0 + \frac{\omega}{v}} e^{iL_m\left(\lambda_0 + \frac{\omega}{v}\right)} E_{m,t}(\vec{k}; N) \left. \right\} d\vec{k} - ie \int \frac{x}{\lambda_0 \left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)} \times \\
 & \times e^{iL_m\left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)} E_{N,t}(\vec{k}; N) d\vec{k}.
 \end{aligned}$$

В полученной формуле объединим первый и последний члены, а также первую и вторую суммы, предварительно отделив из первой суммы N -ый член. Воспользовавшись формулами (3), (4) и (23), получим

$$\begin{aligned}
 W = & ie \int \frac{x}{\lambda_0} \left\{ \frac{E_{0,t}(\vec{k}; N)}{\lambda_0 + \frac{\omega}{v}} - \frac{E_{N,t}(\vec{k}; N)}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}} e^{iL_N\left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)} \right\} d\vec{k} + \\
 & + ie \int x \left[\left(\xi_1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0} \cdot \frac{e^{i\lambda_0 b} - e^{i\frac{\omega}{v} b}}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}} \right) \left((\alpha'' U_{N-1} N_2 e^{iN\varphi} + \alpha') \frac{e^{-iN\varphi}}{Q_N} - \alpha' \right) - \right. \\
 & - \frac{e^{ixN}}{2\pi^2} L e^{i\frac{\omega}{v} a} \left. \right] d\vec{k} + ie \sum_{m=1}^{N-1} \int x \{ \xi_1 F'_m e^{-i(m-1)\varphi} + \xi_2 F''_m e^{-i(m-1)\varphi} - \\
 & - \xi_1 \alpha' - \xi_2 \alpha'' \} d\vec{k}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\xi_1 = \frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{e^{-i\frac{\omega}{v} a} - e^{-i\lambda a}}{\lambda - \frac{\omega}{v}} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right) + \frac{e^{-i\frac{\omega}{v} a} - e^{i\lambda a}}{\lambda + \frac{\omega}{v}} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0} \cdot \frac{e^{i\lambda_0 b} - e^{i\frac{\omega}{v}b}}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}}, \\
 \xi_2 = & \frac{1}{2\varepsilon} \left[e^{-i\frac{\omega}{v}a} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda_0 a}}{\lambda - \frac{\omega}{v}} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) + e^{-i\frac{\omega}{v}a} \frac{e^{i\lambda a} - e^{i\lambda_0 a}}{\lambda + \frac{\omega}{v}} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \right] + \\
 & + \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0} \cdot \frac{e^{-i\lambda_0 b} - e^{i\frac{\omega}{v}b}}{\lambda_0 + \frac{\omega}{v}}, \\
 L = & e^{-i\frac{\omega}{v}a} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda_0 a}}{\lambda - \frac{\omega}{v}} \beta + e^{-i\frac{\omega}{v}a} \frac{e^{i\lambda a} - e^{i\lambda_0 a}}{\lambda + \frac{\omega}{v}} \alpha.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Для вычисления суммы, имеющейся в (24), подставим в нее выражения F'_m и F''_m из (20) и (14). Само суммирование нетрудно произвести, если записать полиномы Чебышева второго рода в виде

$$U_m(\zeta) = \frac{e^{i(m+1)\theta} - e^{-i(m+1)\theta}}{2i \sin \theta},$$

где $\sin \theta = \sqrt{1 - \zeta^2}$. Наконец, подставим в (24) выражения для $E'_{0,t}(\vec{k}; N)$ и $E''_{N,t}(\vec{k}; N)$ из (16) и (22). После достаточно длинных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 W = & ie \int \frac{\lambda e^{-i\varphi}}{Q_N T} \left\{ \alpha' (U_{N-2} - e^{-i\varphi} U_{N-1} + e^{-iN\varphi}) \left[\xi_1 (e^{-i\varphi} - M_2) - \xi_2 M_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{T}{\lambda_0} \frac{e^{i\lambda_0 b}}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}} \right] + \alpha'' (U_{N-2} - e^{i\varphi} U_{N-1} + e^{iN\varphi}) \left[\xi_1 N_2 + \xi_2 (N_1 - e^{-i\varphi}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{T}{\lambda_0} \frac{e^{-i\lambda_0 b}}{\lambda_0 + \frac{\omega}{v}} \right] + (\xi_1 \alpha' + \xi_2 \alpha'') e^{i\varphi} \cdot T U_{N-2} \right\} d\vec{k} + \\
 & + ie \int x \left\{ \frac{e^{ix}}{2\pi^2} \frac{\lambda_0}{4\varepsilon} e^{-i\lambda_0 b} \frac{U_{N-1}}{Q_N} \left[\frac{A}{\lambda_0 \left(\lambda_0 + \frac{\omega}{v} \right)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - D e^{i\frac{\omega}{v}a} \left(\xi_1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0} \frac{e^{i\lambda_0 b}}{\lambda_0 - \frac{\omega}{v}} \right) \right] - N \frac{e^{ix}}{2\pi^2} \frac{L}{2x} e^{i\frac{\omega}{v}a} - \right. \\
 & \left. - (N-1)(\xi_1 \alpha' + \xi_2 \alpha'') \right\} d\vec{k}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Причем, полиномы Чебышева U_m зависят от величины ζ , определяемой формулой (7). Для проверки формулы (26) можно рассмотреть следующие частные случаи. Полагая $N=1$, получим формулу для одной пластинки (см. [6]). При $b=0$ имеем случай одной пластинки с толщиной Na . При $b=\infty$ выражение (26) переходит в выражение для одной пластинки, умноженное на N . При $a=0$, также как при $N=0$, получаем $W=0$.

7. В заключение приведем формулу для количества электромагнитной энергии черенковского и переходного излучений, испускаемых заряженной частицей в слоистой среде, за все время ее пролета через плоскость, перпендикулярную оси z и находящуюся в пространстве за стопкой пластин:

$$S'_N = \frac{4\pi^2}{v^2 c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} |E'_{N,t}(\vec{k}; N)|^2 \omega^2 d\omega d\Omega, \quad (27)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta \cdot 2\pi$, $\chi = \frac{\omega}{c} \sin \theta$, а Фурье-компонента электрического поля определяется формулой (22).

Для аналогичного потока электромагнитной энергии, но испущенного в отрицательном направлении оси z в пространстве до стопки пластин будем иметь

$$S'_0 = \frac{4\pi^2}{v^2 c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} |E'_{0,t}(\vec{k}; N)|^2 \omega^2 d\omega d\Omega, \quad (28)$$

где Фурье-компонента электрического поля определяется формулой (16).

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР,
Ереванский физический институт

Поступила 11.VIII.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Г. Басс и В. М. Яковенко, УФН, 86, 189 (1965).
2. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
3. J. A. Fleck, Jr. Journ. Appl. Phys, 34, 2997 (1963).
4. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
5. Д. С. Кузнецов, Специальные функции, Москва, 1965.
6. Г. М. Гарибян, М. П. Лорикян, ДАН АрмССР, 40, 21 (1965).

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ԱՆՅՆՈՂ ԼԻՑԷՆՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ
ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ԿՈՐՈՒՍՏԸ ԵՎ ՃԱՌԱԳԱՅԹՎԱԾ ԴԱՇՏՆԵՐԸ

Վ. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Գ. Մ. ՂԱՐԻՅԱՆ, Է. Հ. ՆԱԼՅԱՆ

Դիտարկված է լիցքավորված մասնիկի անցումը շերտավոր միջավայրով, որը բաղկացած է միմյանցից վահողումով բաժանված կամավոր թվով շերտերից: Ստացված են ճառագայթված դաշտերի արտահայտությունները ինչպես շերտավոր տեղամասում, այնպես էլ նրանցից դուրս:

Այդ բանաձևերի օգնությամբ ստացվել է շերտավոր միջավայրում լիցքի էներգիայի կորուստի համար ընդհանուր արտահայտություն:

Բերված են բանաձևեր ինչպես մինչ շերտավոր տեղամասը ճառագայթված էներգիայի համար, այնպես էլ շերտավոր տեղամասից հետո:

RADIATION AND ENERGY LOSSES OF A CHARGED PARTICLE TRAVERSING A LAYERED MEDIUM

V. A. ARAKELIAN, G. M. GARIBIAN, E. A. NALIAN

The passage of a charged particle through an arbitrary number of material layers which are separated by vacuum spaces is considered. The expressions for fields of radiation generated both inside and outside a stack of plates are derived. With the help of these formulas the expression for total energy losses of a charge in a stack of plates is also derived.

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНА В НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИИ $SU(6)$

В. А. ДЖРБАШЯН

Получены выражения для магнитной восприимчивости χ_p и поляризации f_p протона в схеме нарушенной симметрии $SU(6)$. При полях $H \ll 3 \cdot 10^{19}$ гаусс эти выражения совпадают с соответствующими выражениями в $SU(2)$ и согласуются с экспериментом. При $H \gg 3 \cdot 10^{19}$ гаусс и $\mu_p H/kT \rightarrow \infty$ в рассматриваемой теории намагничение протона $I_p = \chi_p H$ равно $1,52 N \mu_p$, в то время как $SU(2)$ дает $N \mu_p$. Максимальное отклонение поляризации протона от предсказания $SU(2)$ составляет 30%.

Приведены также точные выражения для χ_p и f_p , получающиеся в ненарушенной $SU(6)$.

Из рассмотрения следует, что любые ненарушенные или нарушенные симметрии приведут для максимального значения намагничения протона, достигающегося при насыщении, к величине отличной от $N \mu_p$, если в одном супермультиплете протон будет содержаться вместе с частицей, квантовые числа которого разрешают иметь магнитный момент перехода между ними.

1. В в е д е н и е

В ненарушенной симметрии $SU(2)$ в соответствии с действительностью два состояния протона имеют одинаковую массу. В этой схеме связанные с магнитным моментом протона такие наблюдаемые величины как магнитная восприимчивость χ_p и поляризация f_p согласуются с результатами измерений при доступных на эксперименте ограниченных значениях магнитных полей.

В то же время эта простая симметрия не может предсказать значение магнитного момента перехода $\langle p | M_z | N^{*+} \rangle$, наблюдаемого на эксперименте. Для объяснения последнего необходимо привлечь более сложные симметрии.

Одним из естественных обобщений $SU(2)$ является $SU(6)$ симметрия. Она хорошо объясняет отношение магнитных моментов нейтрона и протона и ряд других эффектов, доступных измерению [1]. Однако количественного согласия с измеренным значением $\langle p | M_z | N^{*+} \rangle$ к настоящему моменту не получено.

Магнитная восприимчивость протона в схеме ненарушенной $SU(6)$ симметрии [2, 3], в отличие от значения этой величины в схемах ненарушенных $SU(2)$ и $SU(3)$ симметрий, не согласуется с экспериментом. Поскольку массы 56 частиц, образующих известное представление барионов в $SU(6)$, разные, естественно, больше прав* на сравне-

* Отметим, однако, что малая поправка на разность масс в отношении μ_n/μ_p действует в сторону ухудшения согласия с экспериментом.

ние с экспериментом имеет нарушенная $SU(6)$, где эта разность учтена.

В параграфе 2 настоящей статьи рассмотрена магнитная восприимчивость протона в первом неиз исчезающем приближении по $\mu_p H/kT$ и $\mu_p H/(\mathcal{M}_N - \mathcal{M}_p)$. Показано, что в нарушенной $SU(6)$ вклад резонанса N^{*+} пропорционален параметру $\mu_p H/(\mathcal{M}_N - \mathcal{M}_p) = H/3 \cdot 10^{19}$. Таким образом в этой схеме получается согласие с измеренным значением [4] магнитной восприимчивости протона, поскольку при использованных полях этот параметр очень мал.

В параграфе 3 приведены точные выражения для магнитной восприимчивости и поляризации протона. При $\mu_p H \ll \mathcal{M}_N - \mathcal{M}_p$ эти выражения в первом приближении совпадают с теми, что дает $SU(2)$.

Отличие сложных симметрий от $SU(2)$ будет порядка вклада $SU(2)$ лишь при полях $\sim 3 \cdot 10^{19}$ гаусс.

В случае нарушенной $SU(6)$ при $H \gg 3 \cdot 10^{19}$ гаусс и $H\mu_p/kT \rightarrow \infty$ намагниченность протона $I_p = \chi_p H$ получается в полтора раза больше его значения, вычисленного в классике, $SU(2)$ и $SU(3)$ и соответствующего ориентации всех протонов по направлению магнитного поля.

В параграфе 3 рассмотрена также поляризация протона во внешнем магнитном поле. Максимальное отличие этой величины в нарушенной $SU(6)$ от результата $SU(2)$ получается при $\mu_p H/kT = 1,5$ и равно 3% .

2. Магнитная восприимчивость протона в первом приближении

Тот факт, что частицы, принадлежащие представлению 56 группы $SU(6)$, обладают разными массами, в первом приближении учитывается добавлением в гамильтониан взаимодействия, оставляющего без изменения квантовые числа s, s_z, Y, I, I_z .

Следовательно, при вычислении магнитной восприимчивости [2, 3] протона

$$\chi_p = \frac{N \sum_m \langle p, m | M_z \exp[-W/kT] | p, m \rangle}{H \sum_m \langle p, m | \exp[-W/kT] | p, m \rangle}, \quad (2.1)$$

в нарушенной симметрии $SU(6)$ в качестве волновых функций мы должны использовать волновые функции ненарушенной симметрии $SU(6)$. Разность масс частиц проявится в двух выражениях.

1) В матричных элементах оператора магнитного момента

$$\langle p, m | M_z | p, m \rangle = \sqrt{3} \mu_p \left\langle \frac{1}{2} m, 10 \left| \frac{1}{2} m \right. \right\rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle p, m | M_z | N^{*+}, m \rangle = \langle N^{*+}, m | M_z | p, m \rangle = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \mu^* \times \\ \times \left\langle \frac{3}{2} m, 10 \left| \frac{1}{2} m \right. \right\rangle, \quad (2.3)$$

фактор μ^* не совпадает с магнитным моментом протона μ_p . Связь между ними мы получим, следуя Бегу и Пайсу [5], предположив, что оператор M_z обратно пропорционален массе.

Однако в рассматриваемом случае магнитного момента перехода (2.3) эта связь однозначно* установится, если принять

$$M_z = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}^{-1} M_z^{(0)} + M_z^{(0)} \mathfrak{M}^{-1}), \quad (2.4)$$

где \mathfrak{M} есть оператор массы, а $M_z^{(0)}$ оператор, совпадающий по своим трансформационным свойствам с оператором [2, 3] проекции магнитного момента в ненарушенной $SU(6)$.

Таким образом, получим

$$\mu^* = \frac{\mathfrak{M}_p}{\frac{1}{2}(\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_N)} \mu_p = 0,86 \mu_p. \quad (2.5)$$

Использованный при выводе (2.5) подход Бега и Пайса [5] допускает погрешность по крайней мере в 2,5%.

Далиц и Сутерленд определили μ^* несколько иным путем. Предположив, что формфактор для магнитного момента перехода зависит от переданного импульса как магнитный формфактор нуклона, они нашли $\mu^* = 0,79 \mu_p$. Это значение в пределах допущенных неточностей в обоих подходах близко к значению (2.5), которое и будет использовано в дальнейшем.

2) Более существенным является учет оператора массы в гамильтониане \mathcal{W} .

В нарушенной $SU(6)$ мы должны писать

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2, \quad (2.6)$$

где \mathcal{W}_1 — оператор массы с собственными значениями \mathfrak{M}_p и \mathfrak{M}_N , равными массе протона и резонанса N^{*+} , а \mathcal{W}_2 — по-прежнему оператор взаимодействия с магнитным полем, $\mathcal{W}_2 = -M_z H$.

Ограничиваясь первым исчезающим приближением по $H M_z / kT$, для знаменателя (2.1) имеем

$$\sum_m \langle p, m | \exp[\mathcal{W}\tau] | p, m \rangle \cong \sum_m \langle p, m | (1 - H\tau M_z) \exp[\mathcal{W}_1\tau] | p, m \rangle = \\ = \sum_m \langle p, m | (1 - H\tau M_z) | p, m \rangle \exp[\mathfrak{M}_p \tau] = 2 \exp[\mathfrak{M}_p \tau]. \quad (2.7)$$

* Этот вид необходим с целью сохранения эрмитовости:

$$\langle p, m | M_z | N^{*+}, m \rangle = \langle N^{*+}, m | M_z | p, m \rangle^*.$$

В (2.7) обозначено

$$-1/kT = \tau. \quad (2.8)$$

Для вычисления числителя (2.1) необходимо учесть, что операторы W_1 и W_2 не коммутируют. Последнее проявляется в том, что в используемом представлении W_1 диагонален, в то время как W_2 имеет недиагональные матричные элементы.

Оставляя в выражении $[(W_1 + W_2)\tau]^n$ лишь член линейный относительно $W_2\tau$, мы получим

$$\sum_m \langle p, m | M_z \exp [W\tau] | p, m \rangle \cong \sum_m \langle p, m | M_z [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\tau^n}{n!} W_1^r W_2 W_1^{n-r-1}] | p, m \rangle. \quad (2.9)$$

Здесь мы должны подставить:

$$W_1^{n-r-1} |p, m\rangle = |p, m\rangle \mathfrak{X}_p^{n-r-1}. \quad (2.10)$$

$$W_2 |p, m\rangle = -H(|p, m'\rangle \langle p, m'| M_z |p, m\rangle + |N^{*+}, m'\rangle \langle N^{*+}, m'| M_z |p, m\rangle) \times \quad (2.11)$$

$$\times \langle N^{*+}, m'| M_z |p, m\rangle, \quad (2.12)$$

$$W_1^r |p, m'\rangle = |p, m'\rangle \mathfrak{X}_p^r, \quad (2.13)$$

$$W_1^r |N^{*+}, m'\rangle = |N^{*+}, m'\rangle \mathfrak{X}_N^r. \quad (2.13)$$

Воспользовавшись также матричными элементами (2.2) и (2.3), мы получим числитель (2.1) в виде суммы двух членов:

$$\sum_m \langle p, m | M_z \exp [W\tau] | p, m \rangle \cong S_1 + S_2, \quad (2.14)$$

где

$$S_1 = -H \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}_p^{n-1} \frac{\tau^n}{n!} n \langle p, m | M_z | p, m'\rangle \langle p, m' | M_z | p, m \rangle = \\ = -H\tau 2\mu_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathfrak{X}_p \tau)^{n-1}}{(n-1)!} = -2\mu_p^2 H\tau \exp [\mathfrak{X}_p \tau], \quad (2.15)$$

$$S_2 = -H \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\tau^n}{n!} \mathfrak{X}_N^r \langle p, m | M_z | N^{*+}, m'\rangle \times \\ \times \langle N^{*+}, m' | M_z | p, m \rangle \mathfrak{X}_p^{n-r-1} = -\frac{16}{9} H\mu^{*2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\tau^n}{n!} \mathfrak{X}_N^r \mathfrak{X}_p^{n-r-1} \quad (2.16)$$

Сумма по r в (2.16) есть сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\mathfrak{X}_N}{\mathfrak{X}_p} \right)^r = \frac{1 - \left(\frac{\mathfrak{X}_N}{\mathfrak{X}_p} \right)^n}{1 - \frac{\mathfrak{X}_N}{\mathfrak{X}_p}}. \quad (2.17)$$

Теперь легко суммировать по n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \mathfrak{M}_p^{n-1} = \mathfrak{M}_p^{-1} \{-1 + \exp[\mathfrak{M}_p \tau]\}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left(\frac{\mathfrak{M}_N}{\mathfrak{M}_p} \right)^n \mathfrak{M}_p^{n-1} = \mathfrak{M}_p^{-1} \{-1 + \exp[\mathfrak{M}_N \tau]\}. \quad (2.19)$$

Обозначая разность масс

$$\mathfrak{M}_N - \mathfrak{M}_p = \Delta \mathfrak{M}, \quad (2.20)$$

из (2.16—2.19) для S_2 получим

$$S_2 = \frac{16}{9} H \mu^{*2} (\Delta \mathfrak{M})^{-1} \exp[\mathfrak{M}_p \tau] \{1 - \exp[\Delta \mathfrak{M} \tau]\}. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.7), (2.14), (2.15) и (2.21) в определение магнитной восприимчивости протона (2.1), получим

$$\chi_p = \frac{N \mu_p^2}{kT} \left\{ 1 + \frac{8}{9} \frac{kT}{\Delta \mathfrak{M}} \left(\frac{\mu^*}{\mu_p} \right)^2 \left\{ 1 - \exp[-\Delta \mathfrak{M}/kT] \right\} \right\}. \quad (2.22)$$

Если в (2.22) разность масс $\Delta \mathfrak{M}$ устремить к нулю, то с учетом (2.5) получим несогласующуюся с экспериментом магнитную восприимчивость протона [2, 3] в ненарушенной $SU(6)$.

Поскольку в действительности параметр $\frac{k}{\Delta \mathfrak{M}} = 2,9 \cdot 10^{-13} \text{ град}^{-1}$ очень мал, то при обычных температурах в (2.22) останется лишь первый член, совпадающий с предсказанием $SU(2)$.

Таким образом, результат нарушенной $SU(6)$ (2.22) согласуется с экспериментом ($T \sim 1^\circ$).

3. Точные выражения для магнитной восприимчивости и поляризации протона

Если наряду с матричными элементами (2.2—2.3) воспользоваться также матричным элементом M_z по состояниям резонанса N^{*+}

$$\langle N^{*+}, m | M_z | N^{*+}, m \rangle = \sqrt{\frac{5}{3}} \mu^{**} \left\langle \frac{3}{2} m, 10 \left| \frac{3}{2} m \right. \right\rangle, \quad (3.1)$$

где

$$\mu^{**} = \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_N} \mu_p = 0,76 \mu_p, \quad (3.2)$$

то, аналогично рассмотренному в параграфе 2 первому приближению, можно вычислить любой член в разложении магнитной восприимчивости (2.1).

Суммируя все полученные приближения, придем к точному выражению для χ_p в нарушенной симметрии $SU(6)$:

$$\chi_p = \frac{N\mu_p}{H} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \left\{ 2m \operatorname{ch} c(\alpha, \tau, m) + \right. \\ \left. + \left\{ 2m b^{-1/2}(\alpha, m) + 0,81 \frac{1+1,5\alpha m}{|1+1,5\alpha m|} [1-b^{-1}(\alpha, m)]^{1/2} \right\} \times \right. \\ \left. \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} [\operatorname{ch} c(\alpha, \tau, m) + b^{-1/2}(\alpha, m) \operatorname{sh} c(\alpha, \tau, m)] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} c(\alpha, \tau, m) \right\} \exp[-1,25 \alpha m \Delta \mathcal{M} \tau] \\ \times \frac{\exp[-1,25 \alpha m \Delta \mathcal{M} \tau]}{\exp[-1,25 \alpha m \Delta \mathcal{M} \tau]} \quad (3.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \frac{\mu_p H}{\Delta \mathcal{M}} \quad (3.4)$$

$$b(\alpha, m) = 1 + 2,63 \left(\frac{\alpha}{1 + 1,5 \alpha m} \right)^2, \quad (3.5)$$

$$c(\alpha, \tau, m) = -(0,5 + 0,75 \alpha m) b^{1/2}(\alpha, m) \Delta \mathcal{M} \tau. \quad (3.6)$$

Величины $\Delta \mathcal{M}$ и τ определены в (2.20) и (2.8).

В (3.3) мы имеем два параметра:

$$\frac{\mu_p H}{\Delta \mathcal{M}} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\mu_p H}{kT} = \alpha.$$

Нетрудно убедиться, что формула (2.22) с учетом (2.5) получится из (3.3) как сумма первых членов разложения по α и по α . То есть сделанное в параграфе 2 приближение соответствует случаю $\alpha \ll 1$ и $\alpha \ll 1$.

При $\alpha \ll 1$, что соответствует магнитным полям $H \ll 3 \cdot 10^{10}$ гаусс, χ_p в нарушенной $SU(6)$ (3.3) в первом приближении совпадает с χ_p в $SU(2)$: $\chi_p = N\mu_p \operatorname{th} \alpha$.

Наибольшее отличие от $SU(2)$ проявляется при $\alpha \gg 1$. Тогда (3.3) сводится к

$$\chi_p = \frac{N\mu_p}{H} \frac{2,16 \operatorname{sh} 1,52 \alpha + 0,16 \operatorname{sh} 0,27 \alpha}{1,42 \operatorname{ch} 1,52 \alpha + 0,58 \operatorname{ch} 0,27 \alpha} \quad (3.7)$$

При $\alpha \ll 1$ в первом приближении по α из (3.7) получим

$$\chi_p = \frac{N \langle p | \mathcal{M}^2 | p \rangle}{3kT}, \quad (3.8)$$

что полностью аналогично соответствующим [2, 3] результатам $SU(2)$, $SU(3)$ и ненарушенной $SU(6)$. Отличие состоит в том, что в (3.8) мы должны подставить квадрат магнитного момента протона в нарушенной симметрии $SU(6)$, равный

$$\langle p | M^2 | p \rangle = 3\mu_p^2 \left[1 + \frac{8}{9} \left(\frac{\mu^*}{\mu_p} \right)^2 \right] = 3\mu_p^2 (1 + 0,66). \quad (3.9)$$

В противоположном предельном случае $a \rightarrow \infty$ из (3.7) следует максимальное значение магнитного момента единицы объема в нарушенной симметрии $SU(6)$:

$$I_{p \max} \equiv N \langle p | M_z | p \rangle_{\max} \equiv (\gamma_p H)_{\max} = 1,52 N \mu_p. \quad (3.10)$$

Результат (3.10) в полтора раза больше того значения, что дают классика, $SU(2)$ и $SU(3)$. Значению $N \mu_p$ соответствует легко интерпретируемый случай ориентации всех N протонов по направлению магнитного поля.

Заметим, что точное рассмотрение ненарушенной симметрии $SU(6)$ приводит для магнитной восприимчивости протона к выражению

$$\gamma_p = \frac{N \mu_p}{3H} \frac{10 \operatorname{sh} \frac{5}{3} a + \operatorname{sh} \frac{1}{3} a}{2 \operatorname{ch} \frac{5}{3} a + \operatorname{ch} \frac{1}{3} a}, \quad (3.11)$$

частный случай которого при $a \ll 1$ рассмотрен в [2, 3].

Из (3.11) следует, что насыщение в ненарушенной $SU(6)$ также имеет отличный от обычного смысл: $(\gamma_p H)_{\max} = \frac{5}{3} N \mu_p$.

Наряду с рассмотренным эффектом, $SU(6)$ дает вклад также в эффект поляризации протонов:

$$f_p = \frac{\sum_m \langle p, m | s_z | p, m \rangle}{\frac{1}{2} \sum_m \langle p, m | \rho | p, m \rangle}. \quad (3.12)$$

В случае ненарушенной симметрии получается

$$f_p = \frac{2 \operatorname{ch} \frac{5}{3} a - \operatorname{sh} \frac{1}{3} a}{2 \operatorname{ch} \frac{5}{3} a + \operatorname{ch} \frac{1}{3} a}, \quad (3.13)$$

в то время как нарушенная $SU(6)$ дает

$$f_p = \frac{2 \sum_{m=\pm \frac{1}{2}} [\operatorname{ch} c(a, \tau, m) + b^{-1/2}(a, m) c(a, \tau, m)] \times \sum_{m=\pm \frac{1}{2}} [\operatorname{ch} c(a, \tau, m) + b^{-1/2}(a, m) \operatorname{sh} c(a, \tau, m)] \times \times \exp[-1,25 a m \Delta \mathcal{M} \tau]}{\times \exp[-1,25 a m \Delta \mathcal{M} \tau]} \quad (3.14)$$

Здесь использованы обозначения (3.4–3.6).

При $\alpha \ll 1$ выражение (3.14) совпадает с предсказанием $SU(2)$:

$$f_p = \text{th } \alpha.$$

При $\alpha \gg 1$ оно сводится к формуле

$$f_p = \frac{1,42 \text{ sh } 1,52\alpha - 0,58 \text{ sh } 0,27\alpha}{1,42 \text{ ch } 1,52\alpha + 0,58 \text{ ch } 0,27\alpha}. \quad (3.16)$$

Кривая (3.16) при малых α совпадает с (3.15), затем идет несколько ниже и опять совпадает с (3.15) при больших α . Максимальное отличие, равное 3%, получается при $\alpha = 1,5$.

Автор выражает благодарность Б. В. Струминскому и Р. А. Сардаряну за полезные замечания.

Ереванский физический институт

Поступила 11.VI.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. Morpurgo, in the „Proceedings of the 14th International Conference on High-Energy Physics. Vienna 1968“, Copyright 1968, by CERN, Genève.
2. В. А. Джрбашян, Преприят Ереванского физического института ЕРФИ—ТФ—1 (68).
3. В. А. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, Физика, 3, 408 (1968).
4. Н. Ф. Рамзей в „Экспериментальной ядерной физике“, том 1, под ред. Э. Сегре, М., 1955, стр. 302.
5. М. А. В. Вег, A. Pais. Phys. Rev., 137, 6B, B1514 (1965).

ՊՐՈՏՈՆԻ ՄԱԳՆԵՒՄԱԿԱՆ ԸՆԿԱԼՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԲԵՎԵՌԱՑՈՒՄԸ SU (6) ԽԱԽՏՎԱԾ ՍԻՄԵՏՐԻԱՑՈՒՄ

Վ. Հ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ստացված են արտահայտություններ պրոտոնի մագնիսական ընկալության γ_p և բևեռացման f_p համար խախտված SU (6) սիմետրիայի սխեմայում: $H \ll 3 \cdot 10^{19}$ գաուս դաշտերի դեպքում այդ արտահայտությունները համընկնում են SU (2) սխեմայում համապատասխան արտահայտությունների հետ և համապատասխանում են էքսպերիմենտին: Երբ $H \gg 3 \cdot 10^{19}$ գաուսից և $\gamma_p H/kT \rightarrow \infty$ դիտարկվող տեսությունում միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտը պրոտոնի համար հավասար է $I_p = \gamma_p H = 1,52 N \gamma_p$, մինչդեռ SU (2) տալիս է $N \gamma_p$:

Պրոտոնի բևեռացման առավելագույն շեղումը SU (2)-ի նախատեսածից կազմում է 3%: Բերված են նաև γ_p -ի և f_p -ի համար ճշգրիտ արտահայտություններ, որոնք ստացվում են լիախտված SU (6)-ում:

Դիտարկումից հետոս է, որ ցանկացած լիախտված կամ խախտված սիմետրիաներ կրերեն պրոտոնների միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտի (հազցման ժամանակ հասնող) առավելագույն արժեքի համար $N \gamma_p$ -ից տարբեր մեծության, եթե միևնույն սուպերմոլտիպլետում պարունակվեն պրոտոն և մի այլ մասնիկ, որի բվանտային թվերը թույլ են տալիս ունենալ նրանց միջև անցման մագնիսական մոմենտ:

MAGNETIC SUSCEPTIBILITY AND POLARIZATION OF
PROTON IN THE BROKEN SYMMETRY $SU(6)$

V. A. DJRBASHIAN

Expressions for the magnetic susceptibility χ_p and polarization f_p of proton in the scheme of broken symmetry $SU(6)$ are obtained. In the case of an external field of $H \ll 3 \cdot 10^{19}$ gauss these expressions coincide with the corresponding ones in $SU(2)$ and are in agreement with the experiment.

When $H \gg 3 \cdot 10^{19}$ gauss and $\mu_p/kT \rightarrow \infty$ the magnetic moment per unit-volume $I_p = \chi_p H$ for proton is $1,52 N \mu_p$ in the theory under consideration, while $SU(2)$ gives $N \mu_p$.

The maximal deviation of the proton polarization from the prediction of $SU(2)$ is 30%.

The exact expressions for χ_p and f_p , obtained in unbroken $SU(6)$ are also given.

Any arbitrary broken or unbroken symmetries will lead to the magnitude differing from $N \mu_p$ for maximal value (reached in case of saturation) of the magnetic moment per unit-volume for proton, if the same supermultiplet will contain the proton with another particle characterized by quantum numbers, allowing to have the transition magnetic moment between them.

К ВОПРОСУ О ЛАВИННОЙ ИНЖЕКЦИИ В КОМПЕНСИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Г. М. АВАКЬЯНЦ, В. М. АРУТЮНЯН

Рассматривается влияние ударной ионизации глубоких акцепторных центров, расположенных в нижней половине запрещенной зоны полупроводника (ближе к валентной зоне), на вольт-амперную характеристику структуры с запирающим тыловым контактом и инжектирующим переходом.

Механизм ударной ионизации примесей, создающих глубокие уровни в запрещенной зоне полупроводников, все чаще привлекается в последнее время для объяснения хода вольт-амперной характеристики (ВАХ) приборов (в том числе и для объяснения наличия участка отрицательного сопротивления (ОС) на ВАХ, управляемого током), вольт-яркостных характеристик и неоднородности (полосатости) свечения электролюминесцентных приборов на основе компенсированных Si [1—3], CdS [4], ZnS [5—7] и многих других материалов.

Все исследователи единодушны в мнении, что ударная ионизация имеет место в области сильного поля, т. е. в области с напряженностью электрического поля большей, чем средняя напряженность поля в базе прибора. „Концентрация“ электрического поля достигается различными путями, мы же предполагаем в нашей модели наличие запирающего, обедненного носителями слоя (барьер типа Мотта—Шоттки либо обратно смещенный р—п-переход).

Рассматривается влияние ударной ионизации глубоких акцепторных центров, расположенных в нижней половине запрещенной зоны (ближе к валентной зоне), на ВАХ полупроводниковой структуры с инжектирующим и запирающим контактами. Нам известна только одна теоретическая работа [8], объясняющая наличие участка ОС ударной ионизацией глубоких центров, но, как уже обсуждалось в [9], результаты этой работы представляются нам ошибочными.

Постановка задачи

Схематический вид рассматриваемой структуры дан на рис. 1а. Структура отлична от рассматриваемой в [10] наличием в базе компенсирующих глубоких акцепторных уровней, расположенных в нижней половине запрещенной зоны полупроводника (подобных In, Ta, Ni, Co, Zn и др. в Si [11], например). База п-типа для удобства рассмотрения делится на две части. Во второй области, примыкающей к запирающему тыловому контакту (обратно смещенному р—п-переходу), напряженность электрического поля превышает критическую и имеет место размножение носителей вследствие ударного выброса электронов с глубоких центров в зону проводимости. Рожденные в области

умножения носители тока „растаскиваются“ полем в разные стороны. Инжектируемые в I область электроны обеспечивают в последней режим двойной инжекции. Первая область считается „длинной“. т. е. ее

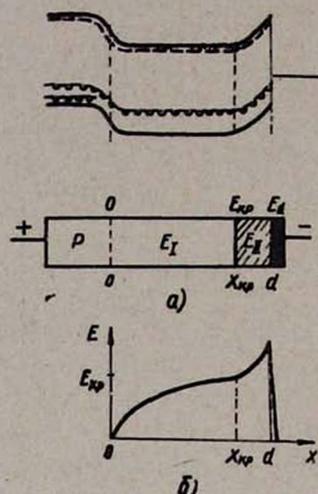


Рис. 1. Энергетическая диаграмма и схематическое изображение рассматриваемой структуры (а) и распределение напряженности электрического поля по базе (без соблюдения масштаба) (б).

толщина $x_{кр}$ предполагается заметно превышающей диффузионную длину дырок. На границе этих областей принято равенство напряженностей электрического поля и их производных по координате.

Следует указать, что в наших расчетах не принята во внимание возможность шнурования тока, которая в ряде случаев может оказать существенное влияние на вид ВАХ.

Падение напряжения в первой области

Методом итерации из основных уравнений (уравнений Пуассона, непрерывности и токовых уравнений) в дрейфовом приближении в [12] получено уравнение для напряженности электрического поля при прохождении тока через полупроводниковую структуру с двойной инжекцией, где имеются мелкие донорные примеси с концентрацией N_g и глубокие акцепторные центры, расположенные в нижней половине запрещенной зоны, с концентрацией N_0 . Такое расположение уровня обеспечивает интенсивный тепловой заброс электронов на него из валентной зоны. Здесь возможна область токов выше области закона Ома, когда число инжектированных носителей превышает число равновесных, но остается меньшим p_1 , где p_1 —эффективная плотность свободных дырочных состояний (электронов) в валентной зоне, „приведенная“ к уровню ловушек [13].

В этой области токов имеет место уменьшение времени жизни дырок.

В пренебрежении малыми членами упомянутое выше уравнение сводится к следующему:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \frac{e}{DE} \left(\frac{j}{e^2 u_n^2 E^2 N_g} + N \right) \frac{dE}{dx} + \frac{e}{DE} \frac{\theta j^2}{e^2 u_n^2 E^2 u_p \tau_{p0} p_1} = 0. \quad (1)$$

Здесь E — напряженность электрического поля, x — координата, $D = \frac{\varepsilon}{4\pi}$, где ε — диэлектрическая постоянная; $N = N_g - N_0$; $\theta = \frac{\beta'}{\beta}$ — отношение коэффициентов рекомбинации электронов и дырок на глубокий уровень, $\tau_{p0} = \frac{1}{\beta N_0}$. Остальные обозначения обычные.

Полагаем член со 2-й производной, возникающий при учете объемного заряда, большим члена с 1-й производной.

Нелинейное дифференциальное уравнение (1) не поддается такому тщательному анализу, как в [10]. Можно только предположить, что принятие ненулевого граничного условия на границе между первой и второй областями приведет, как и в [10], к отсечке в закономерности $j \sim V^{\frac{3}{2}}$ (см. формулу (14) в [12]), полученной для исследуемого случая в [12] при условии нейтральности и при нулевых граничных условиях и являющейся аналогом квадратичной закономерности (14) в [10].

Здесь будет рассматриваться случай, когда ток течет через первую область при наличии в ней заметного объемного заряда (т. е. случай, подобный случаю $\bar{A}_1 < 1$, $-\bar{A}_2 < 1$ в [10], где вольт-амперная характеристика первой области близка к вертикали). Тогда (1) сводится к

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\theta j^2}{eD u_n^2 u_p \tau_{p0} p_1 E^3} = 0. \quad (2)$$

Приняв в качестве граничных условий

$$E = 0, \quad x = 0 \quad \text{и} \quad E = E_{кр}, \quad x = x_{кр}, \quad (3)$$

имеем для напряженности электрического поля в первой области E_1

$$E_1 = E_{кр} \sqrt{\frac{x^2}{x_{кр}^2} \left(1 - \frac{2j}{j_1} \right) + \frac{2j}{j_1} \cdot \frac{x}{x_{кр}}}, \quad (4)$$

где

$$i_1 = \frac{F_{кр}^2}{x_{кр}} \sqrt{\frac{Deu_n^2 u_p \tau_{p0} p_1}{\theta}}. \quad (5)$$

Падение напряжения на I области

$$V_1 = \frac{1}{2} E_{кр} x_{кр} \frac{1 - \frac{j}{j_1}}{1 - \frac{2j}{j_1}} \left[1 - \frac{\left(\frac{j}{j_1}\right)^2 \ln\left(\frac{2j_1}{j} - 2\right)}{\left(1 - \frac{j}{j_1}\right) \sqrt{1 - \frac{2j}{j_1}}} \right] = \frac{1}{2} E_{кр} x_{кр} \frac{1 - \frac{j}{2j}}{1 - \frac{j}{j_1}} \quad (6)$$

Более подробный расчет (с учетом члена с $N \frac{dE}{dx}$) показывает, что V_1 лежит в пределах $\frac{1}{2} E_{кр} x_{кр} \leq V_1 < \frac{3}{4} E_{кр} x_{кр}$. В дальнейшем ограничимся результатами (6).

Из выражения для производной $\frac{dE_1}{dx}$ в плоскости $x = x_{кр}$

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{x_{кр}} = \frac{E_{кр}}{x_{кр}} \left(1 - \frac{j}{j_1} \right) \quad (7)$$

и (6) следует, что наше рассмотрение не годится для токов, больших или близких к $\frac{1}{2} j_1$; иначе ударная ионизация в плоскости $x = x_{кр}$ погаснет.

Из уравнения Пуассона и уравнения для токов при учете (7) получим величину электронной составляющей тока $j_n(x_{кр})$ в $x = x_{кр}$:

$$j_n(x_{кр}) = kj - \mu, \quad (8)$$

где

$$k \equiv \frac{b \left(1 + \frac{N_0}{p_1} \right) + \frac{u_n E_{кр}^2 D}{x_{кр} j_1}}{1 + b + b \frac{N_0}{p_1}}; \quad \mu = \frac{eu_n E_{кр} \left(\frac{DE_{кр}}{ex_{кр}} - N \right)}{1 + b + b \frac{N_0}{p_1}} \quad (9)$$

Здесь $b = \frac{u_n}{u_p}$.

Область умножения

С началом ударной ионизации глубоких центров важнейшими кинетическими процессами становятся полевой выброс электронов с глубокого акцепторного центра и конкурирующий с ним, вследствие близкого расположения уровня к валентной зоне, тепловой заброс электронов из валентной зоны на уровень (рис. 2). Тогда концентрация заполненных электронами глубоких центров N_- будет

$$N_- = \frac{\beta p_1 N_0}{\beta p_1 + \gamma_p p + \gamma_n n} \quad (10)$$

Здесь γ_p и γ_n — коэффициенты ударной ионизации центра дырки и электронами соответственно; p и n — концентрации дырок и электронов. Запись N_- в виде (10) справедлива для $p < p_1$. Предпола-

гая, что во второй области имеет место насыщение дрейфовых скоростей, и приняв для упрощения $v_p = v_n = v$ и $\gamma_p = \gamma_n = \gamma$, имеем из (10) при условии, что

$$\beta p_1 > \frac{\gamma j}{ev}, \quad (11)$$

$$N_g - N_- = N + \frac{\gamma j N_0}{ev \beta p_1}. \quad (12)$$

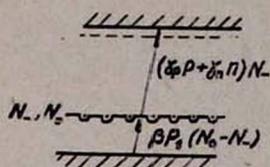


Рис. 2.

Уравнения непрерывности и Пуассона записываются так:

$$\frac{dj_n}{dx} = - \frac{\gamma j N_-}{v}, \quad (13)$$

$$\frac{D}{e} \frac{dE}{dx} = p - n + N + \frac{\gamma j N_0}{ev \beta p_1}. \quad (14)$$

Вначале рассмотрим следующий вариант полевой зависимости коэффициента ударной ионизации γ

$$\gamma = \gamma_0 \exp(\lambda E). \quad (15)$$

Продифференцировав (14) по координате и используя (13), где N_- на основании (10) и (11) заменим на N_0 , имеем уравнение для напряженности электрического поля в области умножения:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \frac{j N_0 \gamma \lambda}{D v \beta p_1} \frac{dE}{dx} - \frac{2 \gamma j N_0}{D v^2} = 0. \quad (16)$$

При выполнении неравенства

$$\frac{2 x_{кр} \beta p_1}{v} < 1 - \frac{j}{j_1} \quad (17)$$

получаем

$$\frac{dE}{dx} - \frac{j N_0 \gamma}{D v \beta p_1} = C_1, \quad (18)$$

где C_1 — постоянная интегрирования — определяется из условия равенства $\frac{dE}{dx}$ для обеих областей базы в плоскости $x = x_{кр}$ и равна

$$C_1 = \frac{E_{кр}}{x_{кр}} \left(1 - \frac{j}{j_1} \right) - \frac{j}{j_2}; \quad j_2 \equiv \frac{D v \beta p_1}{\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})}. \quad (19)$$

Тогда (18) примет вид

$$\frac{dE}{dx} = \frac{E_{кр}}{x_{кр}} \left(1 - \frac{j}{j_1}\right) - \frac{j}{j_2} + \frac{j}{j_2} \exp[\lambda(E - E_{кр})]. \quad (20)$$

Из (13) имеем

$$j_n(d) - j_n(x_{кр}) = -\frac{\gamma_0 j N_0}{v} \int_{x_{кр}}^d \exp(\lambda E) dE. \quad (21)$$

Воспользовавшись (20), получим

$$\frac{\gamma_0 j N_0}{v} \int_{x_{кр}}^d \exp(\lambda E) xE = \frac{j_3}{j} \left\{ \lambda(E_d - E_{кр}) + \ln \left| 1 - \frac{j x_{кр}}{j_2 E_{кр}} \left(1 - \frac{j}{j_1}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \exp[-\lambda(E_d - E_{кр})] \right| \right\}, \quad (22)$$

$$j_3 \equiv \frac{D\beta p_1}{\lambda}. \quad (23)$$

Любопытно заметить, что если считать логарифмический член в (22) малым по сравнению с $\lambda(E_d - E_{кр})$ и пренебречь им, получатся результаты, соответствующие выбору в (18) $C_1=0$, т. е. (14) можно записать в виде

$$\frac{D}{e} \frac{dE}{dx} = \frac{\gamma j N_0}{e v \beta p_1}, \quad (24)$$

что равносильно условию

$$|p - n + N| < \frac{\gamma j N_0}{e v \beta p_1} \quad (25)$$

в (14) или выполнению неравенства

$$\left| \frac{E_{кр}}{x_{кр}} \left(1 - \frac{j}{j_1}\right) - \frac{j}{j_2} \right| < \frac{j}{j_2} \exp[\lambda(E_d - E_{кр})]. \quad (26)$$

Ниже полагаем, что это имеет место. Тогда из (22), (24), (8) и (9) и приняв $j_n(d)$ равной плотности электронного тока на границе полупроводника с металлом j_{n0} , имеем

$$E_d - E_{кр} = \frac{1}{\lambda j_3} (kj - \mu - j_{n0}), \quad (27)$$

$$d - x_{кр} = \frac{v}{\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})} \cdot \frac{j_3}{j} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{kj - \mu - j_{n0}}{j_3} \right] \right\}. \quad (28)$$

Для напряженности электрического поля и падения напряжения в слое умножения получаем

$$E_{II} = E_{кр} - \frac{1}{\lambda} \ln \left| 1 - \frac{j}{j_3} \frac{\gamma_0 N_0}{v} (x - x_{кр}) \exp \lambda(E_{кр}) \right| \quad (29)$$

$$V_{II} = \frac{j_3 v}{j_{i0} N_0 \exp(\lambda E_{кр})} \left\{ E_{кр} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left[\lambda E_{кр} + 1 + \frac{k}{j_3} (j - j_{\min}) \right] \exp \left[-\frac{k}{j_3} (j - j_{\min}) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$j_{\min} \equiv \frac{\mu + j_{n0}}{k}. \quad (30)$$

Здесь j_{\min} плотность тока, выше которой имеют место проведенные ранее расчеты.

Выражение (30) описывает участок ОС. Согласно (28) ширина области умножения уменьшается с ростом тока.

Выбор точной формы зависимости γ от поля в настоящее время затруднен из-за отсутствия теоретического расчета вероятности ударной ионизации глубоких центров в запрещенной зоне, аналогично проведенным для ударной ионизации типа зона-зона и мелкий уровень-зона [14]. Можно только догадываться о форме зависимости γ от E . Наряду с (15), наиболее вероятны зависимости

$$\gamma = AE \exp \left(-\frac{B}{E} \right); \quad (32)$$

$$\gamma = AE \exp \left(-\frac{C}{E^2} \right). \quad (33)$$

Выбор γ в виде (32) приводит к следующим результатам:

$$d - x_{кр} = \frac{v}{AE_{кр} N_0} \cdot \frac{j_4}{j} \left[\text{Ei} \left(\frac{B}{E_{кр}} \right) - \text{Ei} \left(\frac{B}{E_{кр}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k(j-j_{\min})}{j_4}} \right) \right], \quad (34)$$

$$V_{II} = \frac{v}{AN_0} \cdot \frac{j_4}{j} \left[\text{Ei} \left(\frac{B}{E_{кр}} \right) - \text{Ei} \left(\frac{B}{E_{кр}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k(j-j_{\min})}{j_4}} \right) \right] \left[1 + \frac{k(j-j_{\min})}{2j_4} \right]. \quad (35)$$

Здесь $\text{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция [15] от вещественного положительного аргумента z ;

$$j_4 \equiv D \beta p_1 E_{кр}. \quad (36)$$

При выборе γ в виде (33) получим результаты, аналогичные (34) и (35), если в последних скобку с интегральными показательными функциями заменить на величину

$$\frac{1}{2} \left[\text{Ei} \left(\frac{C}{E_{кр}^2} \right) - \text{Ei} \left(\frac{C}{E_{кр}^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{k(j-j_{\min})}{j_4} \right]^2} \right) \right].$$

Численный расчет по (35) и аналогичный для (33) показывает наличие участка ОС при $j > j_{\min}$.

Заметим, что приведенные выше результаты для слоя умножения имеют место при превышении заряда, созданного в результате ударного выброса с глубоких уровней, над зарядом eN , т. е. при токах

$$j \gg j_5 \equiv \frac{ev\beta p_1 N}{\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})}. \quad (37)$$

Следует заметить, что ток срыва j_5 в нашем случае может быть намного меньшим тока срыва $j_3 = evN_g$ в [10], т. е. в рассмотренной здесь структуре с глубокими акцепторными центрами участок ОС может начаться заметно раньше, чем в полупроводнике, где имеет место ударная ионизация типа зона-зона [10].

Рассмотрим ВАХ при меньших плотностях тока, когда все же имеет место умножение. Оставляя в правой части (14) только N и воспользовавшись (13) и (15), получаем:

$$d - x_{кр} = \frac{D}{eN\lambda} \ln \left[1 + \frac{keNv\lambda}{D\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})} \left(1 - \frac{j_{\min}}{j} \right) \right], \quad (38)$$

$$V_{II} = \frac{DE_{кр}}{eN\lambda} \ln \left[1 + \frac{keNv\lambda}{D\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})} \left(1 - \frac{j_{\min}}{j} \right) \right] \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\lambda E_{кр}} \ln \left[1 + \frac{kev\lambda N}{D\gamma_0 N_0 \exp(\lambda E_{кр})} \left(1 - \frac{j_{\min}}{j} \right) \right] \right\}. \quad (39)$$

Закономерности (38) и (39) имеют смысл при

$$j_{\min} < j < j_5.$$

Заметим, что зависимость толщины слоя умножения от тока слабая и ВАХ при сравнительно больших токах асимптотически приближается к вертикали.

ВАХ структуры. Обсуждение результатов

При очень малых токах базу прибора можно представить в виде обедненного слоя Шоттки и остальной части, представляющей из себя омическое сопротивление при прохождении тока. Для слоя Шоттки имеем ВАХ в виде

$$j = \sqrt{\frac{2e^3 u_n^2 n_0^2 N}{D}} V. \quad (40)$$

Здесь n_0 — концентрация электронов на вершине барьера.

Воспользовавшись результатами (6), (30), (35), (39) и (40), можно описать ВАХ всей структуры. Имеет смысл подытожить все результаты для каждой из областей. ВАХ слоя умножения представлена на рис. 3 характеристикой в, цифры указывают номер соответствующей формулы в тексте, описывающей данную закономерность. ВАХ I области представлена на рис. 3 характеристикой а. Нетрудно убедиться, просуммировав эти характеристики, что на ВАХ всей структуры возможно наличие участка ОС, управляемого током, связанного, согласно

(28) или (34), с сжатием слоя умножения с ростом тока. Последнее обеспечивает положительную обратную связь, необходимую для наличия участка ОС (с ростом тока ширина слоя умножения уменьшается, что приводит в свою очередь к уменьшению падения напряжения на этом слое. По поводу физики происхождения ОС см. [10]). Пола-

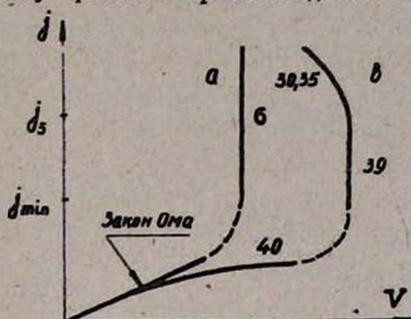


Рис. 3. Схематическое изображение вольт-амперной характеристики I области (а) и II области (в). Цифры указывают номер соответствующей формулы в тексте, описывающей данную закономерность.

гая, согласно (6), падение напряжения на I области близким к $\frac{1}{2} E_{кр} x_{кр}$, можно утверждать, что ток срыва близок к j_5 (37), а напряжение срыва приблизительно определяется суммой (6) и (39) при $j = j_5$. Малым напряжениям и токам срыва и возможности выбора уравнения I области в форме (2) благоприятствует точная компенсация $\left(\frac{N}{N_g} \ll 1\right)$ при заметных концентрациях N_0 и N_g , не слишком большие p_1 и $x_{кр}$ и $\lambda E_{кр} > 1$.

Таким образом, характерной чертой ОС в такой структуре является резкий рост тока срыва ($j_{ср} \sim p_1$) при практически постоянном напряжении срыва с ростом температуры.

Напомним, что все проведенные здесь расчеты имеют смысл при токах, удовлетворяющих условиям (5), (11) и $p < p_1$, позволяющему записать N_- в виде (10).

Подводя итоги, следует подчеркнуть, что осуществляемый в структуре в результате умножения характер двойной инжекции иной, чем в случае инжекции из $n^+ - n$ -перехода:

1) Нет максимума напряженности электрического поля внутри базы. Распределение поля отличается своей равномерностью по базе (рис. 1, б).

2) Электронный ток, в отличие от „чистой“ двойной инжекции, нигде не достигает значения, равного полному току, и с этой точки зрения можно говорить об определенной блокировке электронного тока со стороны слоя умножения.

Участок ОС может возникнуть на ВАХ структуры лишь за счет сжатия слоя умножения с ростом тока. Время жизни в результате инжекции не растет.

Проведенный здесь расчет для pnR -структуры легко распространить на структуры типа pnR , p^+np^+ и n^+pn^+ .

Наиболее интересными для сравнения теории с экспериментом являются экспериментальные данные, полученные в [1—3]. Интересно, что в [1, 2] наблюдалась до срыва закономерность $j \sim \sqrt{V}$, а при достижении полей $(1-2) \cdot 10^4$ в/см имел место участок ОС на ВАХ.

Однако для окончательного решения о применимости развитой теории к структурам, описанным в [1—2], необходимы дополнительные данные, в частности, по температурной зависимости ВАХ.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 25.II.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S. K. Chandhi, K. E. Mortenson, J. N. Park, Proc. IEEE, 53, 734 (1965); IEEE Trans. Electron Device, 13, 515 (1966).
2. B. L. Frensur, IEEE Trans. Convent Rec., 11, 28 (1963).
3. T. Fukami, K. Homma, Japan. J. Appl. Phys., 2, 535 (1963).
4. M. Simhony, R. Williams, A. Willis, J. Appl. Phys., 39, 152 (1968).
5. А. Г. Гольдман, Г. А. Жолкевич, Н. П. Лазарь, В. П. Дудник, Изв. АН СССР, сер. физ., 30, 593 (1966); ДАН СССР, с. ф.—м. н., 171, 555 (1966).
6. Н. А. Власенко и др., Оптика и спектроскопия, 16, 642 (1964); 18, 3, 467 (1965).
7. В. Пайпер, Ф. Вильямс, УФН, 70, 621 (1960); М. В. Фок, УФН, 72, 467 (1960); 75, 259 (1961); Г. Хениш, Электролюминесценция. Изд. „Мир“. М., 1964.
8. M. Kimata, K. Kant, Japan. J. Appl. Phys., 4, 737 (1965).
9. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян, ФТП, 3, 7, 960 (1969).
10. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 2, 71 (1969).
11. E. Schibli, A. G. Milnes, Mater. Sci. Eng., 2, 173 (1967).
12. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян, ДАН АрмССР, 46, 228 (1968).
13. С. М. Рывкин, Фотоэлектрические явления в полупроводниках, стр. 133, ФМ, М., 1963.
14. G. A. Baraff, Phys. Rev., 128, 2507 (1962); Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 48, 1692 (1965), 37, 713 (1959); В. А. Чуенков, ФТТ, сб. ст., 2, 200 (1959); ФТП, 2, 353 (1968).
15. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лем, Специальные функции. Изд. „Наука“. М., 1964.

ԿՈՄՊԵՆՍԱՑՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻԶՆԵՐՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԻՆՃԵԿՑԻԱՅԻ
ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Գ. Մ. ԱՎԱԿՅԱՆՑ, Վ. Մ. ԱՐՄԵՅՅՈՒՆՅԱՆ

Ուսումնասիրվում է դեպի վախճանային դոնա շեղված խորը ակցեպտորային մակարդակների հարվածային իոնիզացիայի աղբյուրային թիկունքային կոնտակտի մոտ աղբատացած շերտ ունեցող կիսահոդեչային p-n ուղղիչի վերտամպերային բնութագրի վրա Ցույց է տրված, որ այստեղ կարող է առաջանալ բացասական դիմադրության տեղամաս:

ON THE PROBLEM OF AVALANCHE INJECTION IN
COMPENSATED SEMICONDUCTORS

G. M. AVAKIANTS AND V. M. HARUTUNIAN

A structure having a depletion layer on the part of the rear contact and deep acceptor centres lying nearby the valence band in the forbidden band has been studied. Beginning with some critical field density in this layer center-conduction zone type impact ionization takes place.

It has been shown, that a negative differential resistance region on the current-voltage characteristic can appear.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В $n\mu n$ и $p\pi p$ СТРУКТУРАХ

Г. М. АВАКЬЯНЦ, В. М. АРУТЮНЯН

Проведено теоретическое исследование прохождения тока через симметричные $n\mu n$ и $p\pi p$ структуры, изготовленные на основе полупроводников, компенсированных примесями, создающими глубокие уровни в запрещенной зоне. Рассчитана статическая вольт-амперная характеристика, получены выражения для тока и напряжения срыва, показано наличие задержки раскомпенсации в базе и уменьшения времени жизни дырок с ростом тока.

Впервые вопрос о лавинной инжекции в полупроводниках был поднят Ганном [1]. Им был рассмотрен обратно-смещенный $n^+ i$ переход без учета падения напряжения на i -базе, которое оказывается существенным в случае „длинного“ полупроводника ($d > L_p$, где d —ширина i -области, L_p —диффузионная длина дырок). Вопросы, связанные с прохождением тока через $n^+ pn^+$, $n\pi n$, $p^+ pp^+$, $p\pi p$ структуры, были предметом теоретических исследований в [2—4] (в [2] приведена литература по дальнейшим вслед за [1] исследованиям по лавинной инжекции).

На опыте неоднократно наблюдались участки отрицательного сопротивления (ОС) на статических вольт-амперных характеристиках (ВАХ) симметричных структур типа $n^+ nn^+$, $p^+ pp^+$, $p\pi p$, $n\mu n$, все области которых имели один и тот же тип проводимости, но различную степень легирования. В частности, ОС есть в структурах $p\pi p$ и $n\mu n$ на основе компенсированных полупроводников (ниже в скобках указана примесь, дающая глубокие уровни в запрещенной зоне полупроводника): $Si (Co)$ [7], $Si (Ni)$ [8], $Si (Au)$ [9], $Si (Fe)$ [10], $Si (Cu)$ [10, 11]; $Ge (Au)$ [12]; $GaAs (Mn)$ [13]; $CdS (P)$ [14]; в достаточно толстых пленках на основе оксидов Ti , Ta , Nb [17—19], B [20], где также авторами предполагается наличие глубоких уровней в запрещенной зоне. Вместе с тем в указанных работах не дается объяснение полученных опытных данных, что, видимо, связано с отсутствием, насколько нам известно, теоретических исследований по подобным структурам с длинной базой, для которой исключается явление прокола.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с формированием участка ОС на ВАХ одной из подобных структур ($p\pi p$), изготовленных на основе компенсированных полупроводников. Предполагается, что вследствие ионизации типа зона—зона или глубокий уровень—зона в обратно-смещенном переходе имеет место умножение носителей, вследствие чего из слоя умножения в базу структуры инжектируются в заметном количестве неосновные носители тока. Таким образом, в базе, на которой падает практически все приложенное

напряжение (пренебрегается падением напряжения на антизапорных контактах n^+ и p^- и „коротких“ слоях n и p типа), осуществляется режим двойной инжекции. До начала умножения из-за слабой инжекции основных носителей из прямо смещенного перехода на ВАХ должна быть омиическая закономерность (или близкая к ней).

О формировании участка отрицательного сопротивления

Предполагается, что объемный заряд обратно-смещенного перехода кончается в некоторой точке, где напряженность поля равна E^* . В этом случае падение напряжения в базе вне области объемного заряда имеет следующий вид

$$V = F(j, d - x_1) + E^*(j)(d - x_1), \quad (1)$$

где $d - x_1$ — размеры квазинейтральной части базы, F — некая функция от плотности тока j и размеров базы, V — падение напряжения на квазинейтральной части базы.

С дальнейшим ростом тока в базу диода со стороны прямосмещенного перехода может внедряться более низкоомная область, например, область с увеличенным временем жизни. ВАХ тогда можно представить в виде

$$V = F'(j, d - x_2) + F(j, x_2 - x_1) + E^*(j)(x_2 - x_1). \quad (2)$$

Здесь $d - x_2$ — размеры низкоомной области.

По поводу зависимости E^* от тока можно сказать следующее. E^* не может уменьшаться с током после начала двойной инжекции, ибо это вызовет затухание поля в слое умножения и, следовательно, затухание самого умножения (мы исключаем сейчас из рассмотрения эффект сжатия слоя умножения из-за нарастания в нем объемного заряда, вызванного размножением — точка x_1 неподвижна).

Тогда возможны следующие варианты характеристик. После закона Ома согласно (1) мы имеем участок с положительным сопротивлением. Если E^* не зависит от тока, то как только низкоомная область начнет внедряться в базу с началом двойной инжекции, из-за уменьшения с током координаты x_2 может появиться ОС, когда третий член в (2) будет уменьшаться с током быстрее, чем будут расти два остальных. В этом случае срыв наблюдается сразу после участка закона Ома. Предполагается, что падение напряжения на слое умножения незначительно по сравнению с падением на квазинейтральной части базы. Если же E^* растет с током, то здесь возможны два вида ВАХ: 1) с участком резкого роста тока до срыва, если падение напряжения имеет место в основном на слое умножения, и последующим участком ОС за счет уменьшения с током второго или третьего члена в (2); 2) вертикали до срыва не будет, если падение напряжения на слое умножения меньше падения на базе. После закона Ома срыв наступит за счет внедрения низкоомной области.

Полному расчету поддается вариант, согласно которому падение напряжения на квазинейтральной области базы определяется первыми двумя членами в (2).

По нашему мнению, в рассматриваемых структурах ОС не может быть связано с увеличением времени жизни неосновных носителей, инжектируемых из слоя умножения, непосредственно у слоя умножения. Это увеличение в действительности может достигаться за счет инжекции с прямосмещенного перехода, ударная ионизация же играет пассивную роль инжектора носителей.

Невозможно появление ОС и за счет смены одинарной инжекции на двойную в структурах, где все области однотипны. В этом случае инжекция неосновных носителей тока происходит из обратно-смещенного перехода и поэтому наименьшая напряженность поля имеет место на границе квазинейтральной области с областью объемного заряда. Поле E^* при этом, конечно, меньше критической напряженности электрического поля, с которой начинается умножение в обратно-смещенном переходе, т. е. распределение напряженности электрического поля по базе имеет „провал“ на границе квазинейтральной части базы и объемного заряда. Для этого необходимо, чтобы время омической релаксации было меньше времени пролета. Поле E^* может лишь расти после срыва, поэтому смена одинарной инжекции на двойную не может сопровождаться срывом. Время жизни может увеличиться в слое размножения, но это мало что изменит, ибо в слое умножения рекомбинацией носителей пренебрегается.

Расчет вольт-амперной характеристики

В принятой нами для расчета $p^+ \pi p^+$ структуре средняя π -область представляет из себя перекомпенсированный n -тип полупроводника, т. е. наряду с мелкими донорами с концентрацией N_d в ней имеются глубокие акцепторные уровни с концентрацией N_a , расположенные в нижней, примыкающей к валентной зоне, половине запрещенной зоны. Такое расположение акцепторного уровня позволяет пренебречь тепловыми забросами электронов с этого уровня в зону проводимости.

В этом приближении концентрация глубоких центров, заполненных электронами, равна

$$N_- = \frac{p_1 + \theta n}{p_1 + \theta n + p} N. \quad (3)$$

В дальнейшем принято условие квазинейтральности. Тогда концентрации электронов n и дырок p соответственно равны (в чисто дрейфовом приближении):

$$n = k \left(n_0 + \frac{\Delta N_+}{b} \right), \quad (4)$$

$$p = k (n_0 - \Delta N_+). \quad (5)$$

Здесь $\Delta N_+ = N_g - N_-$; $k = \frac{b}{b+1}$; $n_0 = \frac{j}{e u_n E}$; b — отношение подвижности электронов u_n к подвижности дырок u_p ; $\eta = \frac{\langle v_n \tau_n \rangle}{\langle v_p \tau_p \rangle}$ — отношение скоростей рекомбинации электронов и дырок, p_1 — плотность состояний в валентной зоне, уровень Ферми совпадает с положением глубокого акцептора.

Из (3–5) имеем

$$\Delta N_+ = \frac{N_g p - \delta_0 N_g (p_1 + \theta n)}{p_1 + \theta n + p}. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \delta_0 = \frac{N - N_g}{N_g}.$$

Из условия квазинейтральности

$$n = p + \frac{N_g p - \delta_0 N_g (p_1 + \theta n)}{p_1 + \theta n + p} \quad (7)$$

следует уравнение для p

$$p^2 + [N_g - n + p_1 + \theta n] - (p_1 + \theta n) (n + \delta_0 N_g) = 0. \quad (8)$$

Считая в (8) член с p^2 малым, имеем

$$p = \frac{(p_1 + \theta n) (n + \delta_0 N_g)}{N_g - n + p_1 + \theta n}. \quad (9)$$

Выписанное соотношение справедливо, пока $p \ll [N_g + p_1 - n \cdot (1 - \theta)]$. В дальнейшем, согласно (4), в (15) можно будет n заменить на приближенное значение n_0 . Составим теперь уравнение для напряженности электрического поля E . На основании (9), с использованием приближения $\frac{dn}{dE} \approx -\frac{n}{E}$, получим ($\theta < 1$)

$$\frac{d}{dE} (pE) = \frac{p_1 \delta_0 N_g - (\theta n + p) n}{N_g - n + p_1}. \quad (10)$$

Согласно статистике Шокли—Рида для уровня, расположенного вблизи валентной зоны, скорость рекомбинации дырок [5]

$$\frac{p - p_0}{\tau_p} = \frac{np - n_i^2}{(p + p_1) \tau_n^0 + (n + n_1) \tau_p^0} \approx \frac{pn}{p_1 + \theta n} \cdot \frac{1}{\tau_n^0}. \quad (11)$$

Было принято, что $n_1, p \ll p_1$.

Тогда уравнение непрерывности примет вид ($p_0 = p_1 \delta_0$)

$$[p_1 \delta_0 N_g - (\theta n + p) n] \frac{dE}{dx} = -\frac{n (n + \delta_0 N_g)}{u_p \tau_n^0}, \quad (12)$$

а после подстановки выражения (9) для p и сохранения в последнем в знаменателе лишь наибольшего члена N_g можно записать его в виде

$$\left\{ p_1 \delta_0 N_g - n^2 \left[(1 + \delta_0) \theta + \frac{p_1 + \theta n}{N_g} \right] \right\} \frac{dE}{dx} = - \frac{n (n + \delta_0 N_g)}{u_p \tau_n^0}. \quad (13)$$

В приближении малых токов (13) можно переписать в виде

$$p_1 \delta_0 N_g \frac{dE}{dx} = - \frac{n (n + \delta_0 N_g)}{u_p \tau_n^0}. \quad (14)$$

Для предельного случая $\delta_0 N_g > n$, заменяя в (14) n на n_0 , имеем при граничном условии $E=0$, $x=d$

$$E = \sqrt{\frac{2j (d-x)}{e u_n u_p \tau_n^0 p_1}}. \quad (15)$$

Соответствующее падение напряжения на области $x_1 d$

$$V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2j (d-x_1)^3}{e u_n u_p \tau_n^0 p_1}}. \quad (16)$$

Теперь приняв обратное неравенство ($\delta_0 N_g < n$), что соответствует несколько большим токам, вместо (15) и (16) имеем

$$E = \sqrt[3]{\frac{3 j^2 (d-x)}{e^2 u_n^2 u_p \tau_n^0 p_1 \delta_0 N_g}}, \quad (17)$$

$$V = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3 j^2 (d-x_1)^4}{e^2 u_n^2 u_p \tau_n^0 p_1 \delta_0 N_g}}. \quad (18)$$

Для случая сильных токов, что означает принятие неравенства

$$n^2 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1 + \theta n}{N_g} \right] > p_1 \delta_0 N_g, \quad (19)$$

уравнение (13) принимает вид

$$n \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1 + \theta n}{N_g} \right] \frac{dE}{dx} = \frac{\delta_0 N_g + n}{u_p \tau_n^0}, \quad (20)$$

или после замены n на n_0 и отбрасывания малого члена $\frac{\theta n}{N_g}$

$$\frac{\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g}}{1 + \frac{e u_n \delta_0 N_g E}{j}} \frac{dE}{dx} = \frac{1}{u_p \tau_n^0}. \quad (21)$$

Интегрируя это уравнение с граничным условием $x=0$, $E=0$, находим

$$E(x) = \frac{j}{e u_n \delta_0 N_g} \left[\exp \left(\frac{e u_n \delta_0 N_g x}{j u_p \tau_n^0 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right]} \right) - 1 \right], \quad (22)$$

т. е. поле E уменьшается с ростом тока, что означает формирование ОС. Таким образом, при токах, определяемых неравенством (19), из

прямо-смещенного перехода начинает вступать в базу область с ОС. Соответствующее (22) падение напряжения в области $0x_1$ будет

$$V = \frac{j}{eu_n \delta_0 N_g} \left[\frac{2}{\alpha} \exp(\alpha x_1) - x_1 \right], \quad (23)$$

где

$$\alpha = \frac{\delta_0 N_g eu_n}{ju_p \tau_n^0 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right]}. \quad (24)$$

Из равенства (см. (19))

$$n^2 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right] = p_1 \delta_0 N_g \quad (25)$$

можно найти напряженность поля в точке x_1

$$E = \frac{j \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right]^{\frac{1}{2}}}{eu_n \sqrt{p_1 \delta_0 N_g}}. \quad (26)$$

Предположив, что (19) наступает раньше, чем нарушается $\delta_0 N_g > n$, для поля E в области $x_1 < x < d$ имеем решение (15), а для падения напряжения — (16).

Из (22) и (26) получаем ($\alpha x_1 < 1$)

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\theta (1 + \delta_0) \delta_0 N_g}{p_1} + \delta_0}. \quad (27)$$

Таким образом, x_1 пропорционально току и с ростом последнего область (22) все больше внедряется в базу (заметим, что для отыскания x_1 нельзя приравнять, например, (15) и (26), так как мы не получим в этом случае x_1 , растущего с током). Считая, что все внешнее напряжение практически приходится на область $x_1 < x < d$, оценим напряжение срыва. Для этого надо обратиться к (16) и найти ток срыва

из условия $\frac{dV}{dj} = 0$. Имеем

$$j_{\text{ср}} = \frac{eb N_g \sqrt{\delta_0} \theta d}{4 \tau_p^0 \left[\frac{\theta (1 + \delta_0) N_g}{p_1} + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{N_g}{p_1}. \quad (28)$$

Здесь $\tau_p^0 = \theta \tau_n^0$. Падение напряжения на структуре в момент срыва найдем, подставляя (28) в (16):

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d^2}{u_p \tau_p^0} \cdot \left[\frac{N_g}{p_1} \cdot \frac{\delta_0 \theta}{\left(1 + \delta_0 + \frac{p_1}{\theta N_g} \right)^3} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (29)$$

Напряжение срыва будет определяться (29) лишь в случае достаточно широкой π -области, когда падением напряжения на слое умножения можно пренебречь. Обратимся теперь к случаю, когда в качестве

формулы для ВАХ структуры следует использовать формулу (18). Ток срыва лишь коэффициентом отличается от (28)

$$j_{\text{ср}} = \frac{ebN_g \sqrt{\delta_0} \theta d}{3\tau_p^0 \left[\frac{\theta (1 + \delta_0) N_g}{p_1} + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{N_g}{p_1}, \quad (30)$$

а соответствующее напряжение срыва равно

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{d^2}{u_p \tau_p^0} \left[1 + \frac{\theta (1 + \delta_0) N_g}{p_1} \right]^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{N_g \theta}{p_1}. \quad (31)$$

В случае заметного падения напряжения на слой умножения оно должно быть приплюсовано к (31) с тем, чтобы получить более точное выражение для $V_{\text{ср}}$.

Если $\alpha x_1 > 1$, то для x_1 получаем следующее приближенное выражение:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \sqrt{\delta_0 + \frac{\theta (1 + \delta_0) \delta_0 N_g}{p_1}}. \quad (32)$$

Действуя в дальнейшем аналогично предыдущему, найдем следующие формулы для тока и напряжения срыва. Если срыв наступает при $x_1 = \frac{1}{4} d$ (см. выше),

$$j_{\text{ср}} = \frac{eb\delta_0 N_g d}{4\tau_n^0 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right] \ln \sqrt{\delta_0 + \frac{\theta (1 + \delta_0) \delta_0 N_g}{p_1}}}, \quad (33)$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3 j_{\text{ср}}^2 (d - x_1)^4}{e^2 u_n^2 u_p \tau_n^0 p_1 \delta_0 N_g}}, \quad (34)$$

$$\text{а из } x_1 = \frac{1}{3} d$$

$$j_{\text{ср}} = \frac{eb\delta_0 N_g d}{3\tau_n^0 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1}{N_g} \right] \ln \sqrt{\delta_0 + \frac{\theta (1 + \delta_0) \delta_0 N_g}{p_1}}}, \quad (35)$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2 j_{\text{ср}} (d - x_1)^3}{e u_n u_p \tau_n^0 p_1}}. \quad (36)$$

Интересно отметить отличие в температурных зависимостях $j_{\text{ср}}$ и $V_{\text{ср}}$ для различных приложений (см. формулы (28), (29), (30), (31), (33), (34), (35) и (36)). В частности, из (28) или (30) при выполнении неравенства $\frac{\theta N_g}{p_1} \ll 1$ имеем резкое увеличение $j_{\text{ср}}$ с понижением температуры, а из (33) или (35) при $\frac{\theta N_g}{p_1} > 1$ следует постоянство плотности тока срыва в определенном интервале температур.

О природе отрицательного сопротивления

Остановимся на физике срыва. Выясним, может ли быть в нашем случае задержка раскомпенсации при прохождении тока. Условие нейтральности можно записать в следующем виде:

$$\Delta n = \Delta p + p_{cv} - n_{cv}. \quad (37)$$

Здесь Δn и Δp — избыточные (по сравнению с равновесными) концентрации электронов и дырок, p_{cv} и n_{cv} — концентрации дырок и электронов, захваченных на глубокий уровень.

Из определения p_{cv} и n_{cv} следует

$$p_{cv} = \frac{\theta n_1 + p}{p + p_1 + \theta(n + n_1)} N_{-}^{(0)}, \quad (38)$$

$$n_{cv} = \frac{p_1 + \theta n}{p + p_1 + \theta(n + n_1)} \delta_0 N_g. \quad (39)$$

Задержка в раскомпенсации будет иметь место, если условие нейтральности можно записать приближенно в виде

$$p_{cv} = n_{cv}. \quad (40)$$

При небольших токах (38) и (39) можно записать в нашем случае так:

$$p_{cv} = \frac{p}{p_1} N_{-}^{(0)}; \quad n_{cv} = \delta_0 N_g. \quad (41)$$

Если Δn будет меньше $n_{cv} = \delta_0 N_g$, то будет иметь место задержка в раскомпенсации. Именно такие неравенства были приняты при выводе (20). В этом случае $p \sim p_0 = p_1 \delta_0$ и, следовательно, $\Delta p \approx 0$, а $\Delta n \sim n$ и меньше $\delta_0 N_g$.

Итак, действительно, при малых токах имеет место задержка в раскомпенсации. Она способствует накоплению напряжения на π -базе структуры, не давая наступить сильной модуляции сопротивления ее. Интересно отметить, что в том же приближении время жизни электронов постоянно

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{p}{(p + p_1) \tau_n^0 + (n + n_1) \tau_p^0} = \frac{p}{p_1 \tau_n^0} = \frac{\delta_0}{\tau_n^0} = \text{const}. \quad (42)$$

С дальнейшим ростом тока время жизни электронов уменьшается с током

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{p}{p_1 \tau_n^0} = \frac{n}{N_g \tau_p^0}. \quad (43)$$

Уменьшается и время жизни дырок. Этот процесс является другой причиной, ведущей к накоплению напряжения на базе. ОС появляется тогда, когда в силу одного из неравенств $\delta_0 < 1$ или $\theta < 1$ задержка раскомпенсации прекращается и наступает значительная модуляция сопротивления базы, ведущая к падению напряжения на ней (теперь для поддержания тока требуются меньшие напряжения). Кажется, чем

меньше будет θ , тем скорее можно ожидать появление ОС за счет механизма увеличения времени жизни. Запишем более точное (с сохранением в (11) члена с p) выражение для τ_n , чем (11), так как именно наличие члена с p ведет в дальнейшем к увеличению времени жизни при $\theta < 1$. Тогда

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{n}{(p_1 + \theta n) \left[1 + \frac{n + \delta_0 N_g}{N_g} \left(1 + \frac{n - p_1}{N_g} \right) \right]} \cdot \frac{1}{\tau_n^0}. \quad (44)$$

Вместо уравнения (12) теперь имеем

$$\left\{ p_1 \delta_0 N_g - n^2 \left[\theta (1 + \delta_0) + \frac{p_1 + \theta n}{N_g} \right] \right\} \frac{dE}{dx} = - \frac{1}{u_p \tau_n^0} \times \\ \times \frac{n [\delta_0 N_g + n] N_g}{(N_g - n + p_1) \left[1 + \frac{n + \delta_0 N_g}{N_g} \left(1 + \frac{n - p_1}{N_g} \right) \right]}. \quad (45)$$

Отсюда хорошо видно, что значение θ не накладывает ограничений на характер решений этого уравнения, пока уровень инжекции является низким ($n < N_g$), т. е. решения остаются прежними, хотя теперь учтены процессы, ведущие к увеличению времени жизни. С увеличением времени жизни нужно считаться при наступлении раскомпенсации.

Как показано в [6], возможен также случай, когда со стороны прямо включенного перехода начнет внедряться область $j \sim V^2$, имеющая место при полной раскомпенсации материала базы. Координата точки базы x_2 , являющаяся границей области $j \sim V^2$, определяется выражением [6]

$$x_2 = \frac{j_n^0 N_g b}{2e [(b+1) \sqrt{4k\nu p_1 N_g + b N_g}]^2}, \quad (46)$$

где $\nu \approx 2 \div 3$. С другой стороны, координата точки x_1 , определяющей границу области с локальным ОС, входящей в базу также со стороны прямосмещенного механизма, дается выражением (27). Сравнивая x_1 и x_2 , мы можем отдать предпочтение тому или иному варианту. Если $x_2 > x_1$, то ОС возникает за счет внедрения в базу области $j \sim V^2$, которая в [6] связывается с предварительным увеличением времени жизни. Требование $x_2 > x_1$ сводится к неравенству

$$\frac{b^2 N_g^2}{2[(b+1) \sqrt{4k\nu p_1 N_g + b N_g}]^2} > \frac{\theta}{V \delta_0} \sqrt{\frac{\theta N_g}{p_1}} \left[1 + \delta_0 + \frac{p_1}{\theta N_g} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (47)$$

из которого хорошо видно, что механизм, связанный с внедрением в базу области с полной раскомпенсацией материала, будет иметь место при малых θ . Следует заметить, что x_2 в [6] было получено без учета процесса рекомбинации электронов при определении N_- и в этом отношении (46) и (47) должны быть уточнены.

С понижением температуры выполнение (47), при прочих равных условиях, затруднено. При низких температурах, видимо, должен преобладать механизм, связанный с внедрением в базу области с локальным ОС.

Обсуждение результатов

Выше остались вне рассмотрения случаи:

1) Когда уровень расположен ближе к зоне проводимости или у середины запрещенной зоны;

2) Относящиеся к формированию заметного объемного заряда, когда уже нельзя пользоваться условием квазинейтральности и последнее должно быть заменено на уравнение Пуассона;

3) Сильного поля, когда подвижности и коэффициенты рекомбинации становятся функциями напряженности электрического поля.

Вместе с тем сделанное в настоящей работе пренебрежение падением напряжения в области объемного заряда обратно-смещенного перехода по сравнению с падением напряжения в остальной части базы позволяет думать, что изложенная выше теория может быть приложена к случаю обычной двойной инжекции. Развита в работе для $p-p$ структур теория легко может быть перенесена на случай $p-n$ структур.

В литературе имеется заметное число экспериментальных работ по подобным структурам (см. напр. [7—20]). Мы ограничимся здесь лишь качественным сравнением опытных данных с проведенными выше расчетами. Действительно, как это обсуждалось выше, в [7—9, 15] наблюдается заметный участок закона Ома до срыва. Вместе с тем в [16—20] часто наблюдался участок резкого роста тока с напряжением ($j \sim V^n$, где n меняется от 6 до 9). Любопытно, что база в последних работах была тонкой и все напряжение падает, по-видимому, на слой умножения. Во всех перечисленных работах наблюдался заметный участок ОС на ВАХ, характеристики были симметричными.

ОС наблюдалось при комнатных температурах (кроме [12]), напряжения срыва для всех структур находились в диапазоне 10—60 в, токи срыва, естественно, очень различаются для различных материалов (например, если в [19] $j_{ср} \sim 10^{-5} \frac{a}{\text{см}^2}$, то в [8] $j_{ср} \approx 8 \frac{a}{\text{см}^2}$, причем в [8] напряженность поля в базе у срыва была равна $1,7 \cdot 10^4$ в/см).

Резкий рост напряжения срыва с понижением температуры наблюдался на опыте в структуре с двойной инжекцией, изготовленной на основе перекомпенсированного кадмием Si [21], а постоянство тока срыва с изменением температуры наблюдалось в приборах на основе Si, компенсированного Ni [22].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. V. Gunn. *Prog. Phys. Soc.*, 69 B, 781 (1956); *Progr. in Semicond.*, 2, 213 (1957).
2. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. *Изв. АН АрмССР, Физика*, 4, 71 (1969).
3. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. *Изв. АН АрмССР, Физика*, (в печати).
4. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. *Изв. АН АрмССР, Физика* (в печати).
5. Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. *ДАН АрмССР*, 46, 228 (1968).
6. Ю. А. Абрамян. *Диссертация*, 1969. Ереван.
7. S. K. Ghandhi, K. E. Mortenson, J. N. Park. *ТИИЭР*, 53, 734 (1965).
8. S. K. Ghandhi, K. E. Mortenson, J. N. Park. *IEEE. Trans. ED-13*, 515 (1966).
9. B. L. Frensuga. *IEEE Intern. Convent. Rec.*, 11, 28 (1963).
10. Ямасита Акио, Танака Масару. Японск. патент кл. 99 (5) ГО, № 26209.
11. Ямасита Акио. Японск. патент кл. 99 (5) ГО, № 20342.
12. M. Kimata, M. Iida. *Japan J. Appl. Phys.*, 7, 177 (1968).
13. K. Weiser, M. Drougard, R. Fern. *J. Phys. Chem. Solids*, 28, 171 (1967); *Sol. St. Electron.* 10, 109 (1967).
14. W. W. Anderson, J. T. Mitchell. *Appl. Phys. Lett.*, 12, 334 (1968).
15. J. N. Park, K. Rose, K. E. Mortenson, *J. Appl. Phys.*, 38, 5343 (1967).
16. А. Г. Гольдман, Г. А. Жолкевич, Н. П. Лазарь, В. П. Дудник. *Изв. АН СССР, сер. физ.* 30, 593 (1966); *ДАН СССР, с.ф.—м.н.*, 171, 555 (1966).
17. K. L. Chopra. *J. Appl. Phys.*, 36, 184 (1965).
18. М. М. Некрасов, Г. И. Бодан. в сб. *Полупроводниковая техника и микроэлектроника*, Киев, 1966, стр. 99.
19. F. Argall. *Sol. St. Electron.*, 11, 535 (1968).
20. C. Feldman, W. A. Gutierrez *J. Appl. Phys.*, 39, 2474 (1968).
21. Г. М. Авакьянц, Э. Н. Адамян, Р. С. Барсеян, С. О. Тарумян, *Изв. АН АрмССР, Физика* (в печати).
22. Г. М. Авакьянц, С. В. Минасян, О. А. Оганесян, *ДАН АрмССР* (в печати).

ՐԱՅԱՍԱԿԱՆ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆԸ $n\nu n$ ԵՎ $p\pi p$ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐՈՒՄ

Գ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆՑ, Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Կատարված է արգելված տիրույթում խոր մակարդակների ստեղծվող խառնուրդներով կոմպենսացված կիսահաղորդչային նյութերով հոսանքի անցման տեսական հետազոտությունը:

Ստացված են արտահայտություններ պոկման լարման և հոսանքի համար, ցույց է տրված բաղալում ապակոմպենսացիայի ուղացման առկայությունը:

NEGATIVE RESISTANCE IN $n\nu n$ AND $p\pi p$ STRUCTURES

G. M. AVAKIANTS AND V. M. HARUTJUNIAN

A theoretical investigation of passage of current in symmetric $n\nu n$ and $p\pi p$ -structures made on the basis of semiconductors, compensated with impurities, providing deep levels to the forbidden band has been carried out. Analytic expressions for breakdown current and voltage have been derived, as well as the presence of delay of discompensation in the base has been shown.

УЛУЧШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХРЕЗОНАТОРНОГО КВАНТОВОГО УСИЛИТЕЛЯ ПУТЕМ МОДУЛЯЦИИ ЧАСТОТЫ НАКАЧКИ

Л. Э. АБРАМЯН, Р. М. МАРТИРОСЯН, Е. Г. СТЕПАНЯН

Приводятся экспериментальные результаты измерений характеристик двухрезонаторного квантового усилителя с модулированной по частоте накачкой. Показано, что модуляция частоты накачки приводит к улучшению статических и динамических характеристик усилителя.

Высокая регенеративность резонаторных квантовых парамагнитных усилителей (КПУ) приводит к появлению ряда нестабильностей в них.

Относительные нестабильности коэффициента усиления $\frac{\delta G_0}{G_0}$ с флуктуациями добротности активного вещества (которые, в свою очередь, связаны с флуктуациями магнитного поля, частоты и мощности накачки и температурой образца) для однорезонаторного усилителя и для двухконтурного усилителя со входным пассивным резонатором даются [1] выражением

$$\frac{\delta G_0}{G_0} = G_0^{1/2} \left[\frac{\delta Q_b^0}{Q_b^0} + \frac{\delta Q_{cb}}{Q_{cb}} \right], \quad (1)$$

где G_0 — коэффициент усиления по мощности,

Q_b^0 — добротность активного вещества,

Q_{cb} — добротность связи резонатора с входной линией.

Видно, что малые флуктуации добротности δQ_b^0 и δQ_{cb} приводят к существенно большим флуктуациям усиления.

Так как изменения добротности связи можно свести к минимуму, применив достаточно жесткие конструкции, то флуктуации усиления квантовых усилителей определяются флуктуациями добротности активного вещества.

Слабая регенерация при взаимодействии излучения с веществом в режиме бегущей волны приводит к большой стабильности усилителей бегущей волны. В этом случае относительные нестабильности коэффициента усиления даются выражением

$$\frac{\delta G_0}{G_0} = \frac{\delta Q_b^0}{Q_b^0} \ln G_0. \quad (2)$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что небольшие флуктуации добротности активного вещества в резонаторных квантовых усилителях приводят к сравнительно большим нестабильностям, чем в квантовых усилителях бегущей волны.

В работе [2] был предложен метод улучшения характеристик квантового усилителя бегущей волны путем модуляции частоты накач-

ки. Сущность предложенного метода заключается в том, что если частоту накачки модулировать со скоростью, превышающей скорость релаксации $1/T$, то этим можно исключить влияние флуктуации частоты накачки на разность населенностей сигнального перехода.

В настоящей работе экспериментально был проверен предложенный метод на двухрезонаторном квантовом усилителе на рубине сантиметрового диапазона.

Усилитель представлял двухрезонаторную систему с входным пассивным контуром. Конструкция входного контура позволяла перестройку резонансной частоты контура в широких пределах. Активный контур представлял из себя посеребренный рубиновый параллелепипед с размерами $16,5 \times 11, 4 \times 6,25$ мм. Размеры были выбраны так, чтобы в резонаторе возбуждался низкий тип колебания H_{011} с учетом анизотропии диэлектрической постоянной рубина. Кристалл использовался в совмещенном варианте (угол между постоянным магнитным полем и осью кристалла $54,74^\circ$).

В качестве источника сигнала накачки использовался клистронный генератор; частота сигнала накачки составляла ~ 23000 МГц, мощность изменялась от 2 мвт до 300 мвт.

Диапазон электронной перестройки клистрона составлял порядка 180—200 МГц. При модуляции дрейф частоты клистрона находился в пределах ± 100 МГц.

Модуляция частоты клистрона осуществлялась подачей пилообразного напряжения на отражатель клистрона от генератора, частота которого изменялась от нескольких десятков герц до 20 КГц. Время релаксации T в рубине составляет примерно $10^{-1} - 10^{-3}$ сек, соответственно частота модуляции выбиралась в пределах 10—20 КГц.

Измерения относительной нестабильности коэффициента усиления проводились в двух режимах работы накачки—при модуляции частоты и при постоянном значении частоты накачки. При модуляции частоты накачки с частотой 15 КГц нестабильность коэффициента усиления составляла примерно 0,15 дБ при коэффициенте усиления 18 дБ. При том же усилении, но с постоянной накачкой нестабильность составляла примерно 0,6—0,8 дБ.

Сравнение этих результатов показывает, что модуляция частоты накачки приводит к заметному улучшению стабильности коэффициента усиления двухрезонаторного квантового усилителя. При измерениях генератор накачки питался от обычных блоков питания, выпускаемых промышленностью. Специальных мер по стабилизации частоты не принималось.

Модуляция частоты накачки, кроме улучшения динамических характеристик, может привести также к улучшению статических характеристик КПУ—к расширению полосы пропускания и увеличению коэффициента инверсии. Последнее обстоятельство можно объяснить следующим образом. В работах [3, 4, 5] указывалось на то, что полоса пропускания двухрезонаторных КПУ сильно зависит от соотноше-

ния разности нормальных частот резонаторов и ширины линии сигнального перехода. Оптимальное значение полосы пропускания получилось при определенном значении параметра α , характеризующего соотношение

$$\alpha = \frac{f_1 - f_2}{\Delta f_L}, \quad (3)$$

где f_1, f_2 — соответствующие нормальные частоты связанных резонаторов,

Δf_L — ширина линии сигнального перехода.

(α одновременно характеризует степень связи между резонаторами).

При больших значениях α усиление резко падает вследствие того, что на краях линии разность населенностей резко падает и соответственно уменьшается коэффициент инверсии. Последнее обстоятельство связано с тем, что при монохроматической накачке не удается равномерно насыщать линию перехода накачки. Насыщение перехода накачки происходит по закону

$$\Delta n = \Delta n_0 \frac{1}{1 + kP}, \quad (4)$$

где Δn_0 — начальная разность населенностей перехода накачки,

P — мощность накачки,

k — коэффициент, определяющийся шириной линии, вероятностью перехода и т. д.

Как видно из (4), при постоянной мощности накачки на разных участках линии сигнального перехода избыток населенностей на верхнем уровне различен, т. е. коэффициент инверсии различен на различных участках линии сигнального перехода. Этот эффект особенно сильно должен проявляться, если линии имеют неоднородное уширение. Если функцию формы резонансной линии $g(f)$ определить как сумму всех функций формы отдельных спиновых пакетов, то известно, что при неоднородном уширении возбуждение отдельного спина, имеющего определенную резонансную частоту, не передается другим спинам, имеющим несколько иные резонансные частоты, лежащие в пределах ширины линии. Отметим, что часто для достижения широкополосности КПУ преднамеренно расширяют линию ЭПР введением некоторой неоднородности во внешнее постоянное магнитное поле.

При модуляции частоты накачки в пределах, больших ширины линии, возбуждение передается всем спиновым пакетам равномерно за время меньшее, чем время спин-решеточной релаксации, и соответственно линия насыщается равномерно и коэффициент инверсии в пределах ширины линии остается почти постоянным.

Изменяя величину α , получали различные значения полосы пропускания усилителя. При изменении полосы пропускания изменяется коэффициент усиления. Параметр α в экспериментах изменялся от 0,4

до 1,5, т. е. нормальные частоты были разнесены больше, чем на ширину линии. Если при постоянной частоте накачки при больших значениях α усиление исчезало, то при модулированной подкачке усиление еще наблюдалось.

Значения параметра α определялись измерением нормальных частот контуров. Эти измерения проводились при помощи сигнального свипгенератора и точного волномера. Все экспериментальные измерения проводились при температуре образца 4,2°К.

В таблице приведены экспериментальные результаты измерений коэффициента усиления и полосы пропускания.

$f_1 - f_2$ (МГц)	α	Модуляция частоты накачки		Частота накачки постоянна	
		G_0 (дБ)	Δf (МГц)	G_0 (дБ)	Δf (МГц)
3,0	0,4	23	15	20	10
40	0,5	20	20	18	15
56	0,7	18	30	15	26
80	1	12	35	10	30
100	1,2	9	45	8	35
120	1,5	7	50	6	45

Из таблицы видно, что при модуляции частоты накачки имеет место увеличение как коэффициента усиления, так и полосы пропускания.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 11.VII.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. В. Карлов, А. А. Маненков, Квантовые усилители, ВИНТИ, Москва, 1966.
2. R. D. Ray, Proc. IEEE, 53, 318 (1965).
3. R. L. Kyhl, R. A. McFarlane, M. W. Strandberg, Proc. IRE, 50 1608 (1962).
4. A. W. Nagy, G. E. Friedman, Proc. IRE 50, 2505 (1962).
5. Р. М. Мартиросян, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 9, 2094 (1964)

ԵՐԿՈՒՆԶՈՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՈՒՃԵՂԱՑՈՒՑԻՉԻ ԲՆՈՒԹԱԳԾԵՐԻ
ԼԱՎԱՑՈՒՄԸ ՄՂՄԱՆ ՀԱՃԱԽԱՅԻՆ ՄՈԴՈՒՆՅԱՅԻՆ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Լ. Է. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ե. Գ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Կատարելով երկրորդ օրոգիական հետազոտությունները, համախառն ազդու-
յալից, լավացվել են ուժեղացուցիչի դինամիկ և ստատիկ բնութագրերը: Այդ ճանապարհով հա-
շտվել է ուժեղացման գործակիցի կայունությունը մեծացնել մոտ երեք անգամ: Ստացվել է
թողարկման շերտի լայնացում և ուժեղացման գործակիցի մեծացում: Երևելիք բացատրված է
կլանման դժի ոչ համասեռ լայնացմամբ, որը բերում է նրա անհամասեռ հազեցմանը մղման
աղղանշանի ազդեցության տակ:

IMPROVED DOUBLE-CAVITY MASER PERFORMANCE THROUGH PUMPE MODULATION

L. E. ABRHAMIAN, R. M. MARTIROSIAN E. G. STEPANIAN

Double-cavity maser performance is investigated through pumpe modulation.

It is shown that pumpe modulation improves dynamical and statcal characteristics of a double-cavity maser.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն

Մ. Խ. Մագամեդով. Աֆերիկ բաժանման սահման ունեցող դիսպերիայով օժտված միջավայրերի մեջ կամայական շարժվող լիցքերի ճառագայթումը	271
Ս. Ն. Ստոլյարով. Շարժվող միջավայրերի էլեկտրադինամիկայում կրկրաչափական օպտիկայի մոտավորության մասին	282
Վ. Հ. Առաֆեյան, Գ. Մ. Ղարիբյան, Է. Հ. Նալյան. Շերտավոր միջավայրով անցնող լիցքավորված մասնիկի էներգիայի կորուստը և ճառագայթված դաշտը	287
Վ. Հ. Զրբաշյան. Պրոտոնի մագնիսական ընկալությունը և բևեռացումը խախտված SU (6) սիմետրիայում	293
Գ. Մ. Ավագյանց, Վ. Մ. Հարությունյան. Կոմպենսացված կիսահաղորդիչներում հարվածային ինժեկցիայի հարցի վերաբերյալ	307
Գ. Մ. Ավագյանց, Վ. Մ. Հարությունյան. Բացասական դիմադրությունը $n \cdot n$ և $p \cdot p$ կոնցիվածքներում	318
Լ. Է. Արբանամյան, Ն. Գ. Ստեփանյան, Ռ. Մ. Մառտիրոսյան. Երկուդղոնատրային բլանտային ուժեղացուցիչի բնութագրի լավացումը մղման համախառնության մոդուլացիայի օգնությամբ	329

СО Д Е Р Ж А Н И Е

М. Р. Магомедов. Излучения произвольно движущихся зарядов в диспергирующих средах со сферической границей раздела	271
С. Н. Столяров. О приближении геометрической оптики в электродинамике движущихся сред	282
В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян, Э. А. Налъян. Поля и потери энергии заряженной частицы при пролете через слоистую среду	287
В. А. Джрбашян. Магнитная восприимчивость и поляризация протона в нарушенной симметрии SU (6)	298
Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. К вопросу о лавинной инжекции в компенсированных полупроводниках	307
Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян. Отрицательное сопротивление в $n \cdot n$ и $p \cdot p$ -структурах	318
Л. Э. Абрамян, Р. М. Мартиросян, Е. Г. Степанян. Улучшение характеристик двухрезонаторного квантового усилителя путем модуляции частоты накачки	329