

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXXVI, № 3

1963

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գի-
տությունների բեկնաձու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԴԱ քղրակից-անդամ, Վ. Հ.
ԶԱՆԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՉԱԶԱՐՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների դոկտոր (պատ. խմբագրի տե-
ղակալ), Գ. Մ. ՂԱՐԻՅԱՆ, ֆիզիկա-մա-
թեմատիկական գիտությունների դոկտոր,
Ս. Հ. ՄԻՐՉՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-ան-
դամ, Ս. Ս. ՍԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԴԱ ակա-
դեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ ԳԱ ա-
կադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԴԱ
ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ.
ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԴԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР, Г. М. ГАРИБЯН, доктор фи-
зико-мат. наук, М. М. ДЖРБАШЯН, ака-
демик АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН, доктор биологических наук
(зам. отв. редактора), С. А. МИР-
ЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, О. М.
САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР,
В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

Մարեմասիկա

- Հ. Մ. Մարտիրոսյան—Մի քանի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների սպեկտրի մասին
- Ն. Ի. Պեցկո—Պրոեկտիվ մետրիկան և կոմպլեքս թվերը
- Ս. Մ. Սարգսյան—Ոչ դժային աջ մասերով կոշի-Ռիմանի սիստեմների լուծումների մի շարք հատկություններ
- Ա. Վ. Պետրոսյան—Խանգարումների նկատմամբ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունությունը որոշ հարցեր

Մեխանիկա

- Մ. Ա. Զադոյան—Ոլորման ժամանակ կոնական ձողի սողալը, որի նյութը օժտված է չկայունացված անհամասեռություններով

Ֆիզիկա

- Մ. Ռ. Մազումեդով—Երկու դիսպերսիոն միջավայրերում ալիքային համասարման Գրինի ֆունկցիան
- Յան Շի—Սպինային ալիքների սպեկտրի մասին

Երկրաբանություն

- Յու. Ա. Լեյե—Ղափանի հանքադաշտի վերին բալուխ հրաբխային ապարատի և նրա հետ կապված մոլիբդենիտի երևակման մասին

Ռադիոերկրաբանություն

- Ռ. Խ. Ղուկասյան—Երիտասարդ ինտրուզիաների բացարձակ հասակի որոշումը Rb—Sr մեթոդով Հայկական ՍՍՌ Մեղրու պլուտոնի օրինակով

Ստատիստիկա

- Ս. Պ. Բալյան—Նոր տվյալներ Հայաստանի հնադույն ստատիստիկականների մասին

Պալեոնոստրադիա

- Վ. Թ. Հակոբյան—Հայկական ՍՍՌ ուշկավճային նոր փորոտանիներ

Կենսաբանություն

- Մ. Խ. Զալլախյան, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ա. Մեհրաբյան, Ն. Ա. Կարապետյան և Ն. Լ. Քալաշյան—Աճման ակտիվությունների ազդեցությունը սուլուլոյտի աճման և պալարիկների առաջացման վրա

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Математика	
<i>Р. М. Мартиросян</i> —О спектре некоторых несамосопряженных операторов	129
<i>Н. Д. Пецко</i> —Проективные мероопределения и комплексные числа . . .	137
<i>С. Ц. Саркисян</i> —Свойства решений систем Коши—Римана с нелинейными правыми частями	141
<i>А. В. Петросян</i> —Некоторые вопросы помехоустойчивости функций алгебры логики	147
Механика	
<i>М. А. Задоян</i> —Ползучесть при кручении круглого конического стержня, материал которого обладает свойством нестационарной неоднородности	153
Физика	
<i>М. Р. Магомедов</i> —Функция Грина для волнового уравнения в случае двух диспергирующих сред	157
<i>Ян Ши</i> —О спектре спиновых волн	163
Геология	
<i>Ю. А. Лейе</i> —О верхнебайосском вулканическом аппарате и связанном с ним проявлении молибденита из Кафанского рудного поля	169
Радиогеология	
<i>Р. Х. Гукасян</i> —Определение абсолютного возраста молодых интрузивов Rb—Sr методом на примере Мегринского плутона Армянской ССР	173
Стратиграфия	
<i>С. П. Бальян</i> —Новые данные о древнем оледенении Армении	179
Палеонтология	
<i>В. Т. Акопян</i> —Новые позднемеловые гастроподы Армянской ССР . . .	183
Биология	
<i>М. Х. Чайлахян</i> , чл.-корр. АН Армянской ССР, <i>А. А. Меграбян</i> , <i>Н. А. Карапетян</i> и <i>Н. Л. Каладжян</i> —О действии ростовых активаторов на образование клубеньков и рост растений люцерны	189

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре некоторых несамосопряженных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/X 1962)

В заметке приводится ряд теорем о спектре несамосопряженных возмущений самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида.

Пусть A — несамосопряженный (неограниченный) линейный оператор в гильбертовом пространстве H . Следуя Денфорду, будем говорить, что точка $\lambda = \lambda_0$ является точкой непрерывного спектра оператора A , если λ_0 не является собственным значением этого оператора и многообразие $(A - \lambda_0 E) D_A$, где D_A — область определения оператора A , всюду плотно и незамкнуто.

Следующее предложение является обобщением теоремы 1 из заметки автора (1).

Теорема 1. Пусть R_λ — резольвента несамосопряженного линейного оператора A (неограниченного) в гильбертовом пространстве H и S — ограниченный линейный оператор (несамосопряженный). Точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра оператора $T = A + S^2$, если существует такая последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, для которой

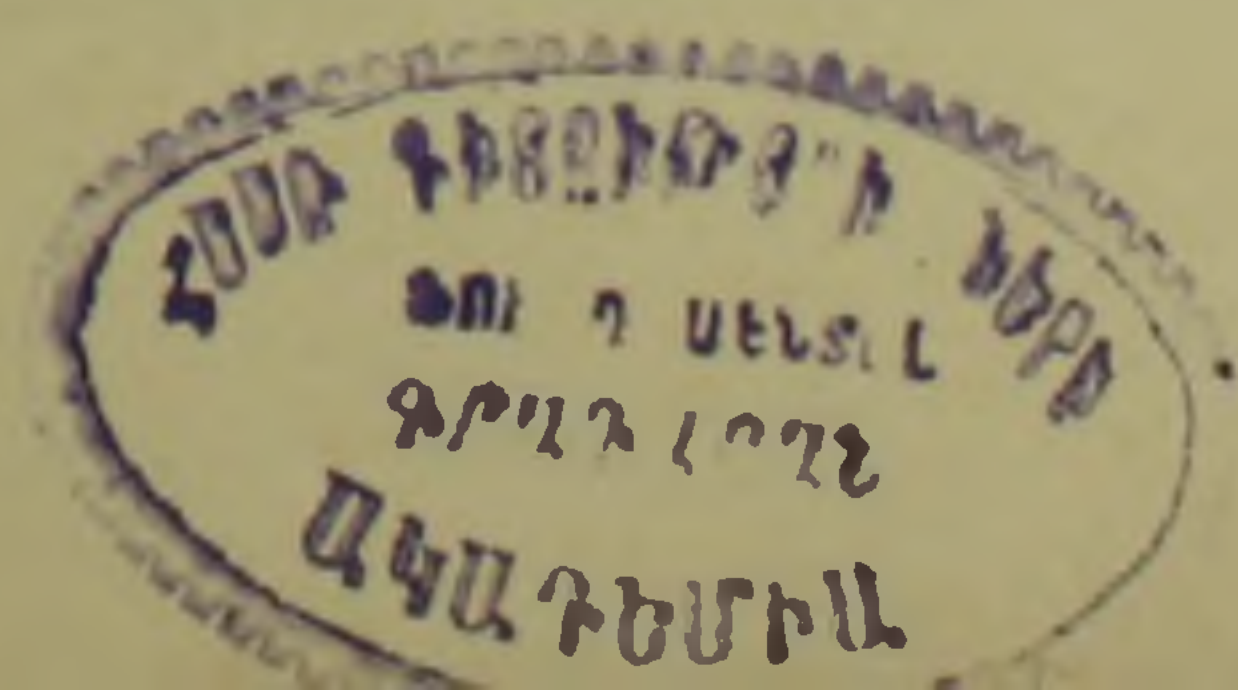
$$\sup \|(\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n}\| < \infty \quad (1)$$

и

$$\limsup \|SR_{\lambda_n}S\| = q < 1. \quad (2)$$

Регулярная точка $\lambda = \lambda_0$ оператора A остается регулярной точкой оператора $T = A + S^2$, если $\|SR_{\lambda_0}S\| < 1$.

Замечание. Если A — нормальный оператор (т. е. D_A плотно в H и $AA^* = A^*A$), то, как известно, $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{d_\lambda}$, где d_λ — расстояние от λ до спектра оператора A . Поэтому в этом случае условие (1) можно снять и потребовать, чтобы (2) имело место для последовательности λ_n , приближающейся к λ_0 , в направлении, не касательном к спектру оператора A в точке λ_0 , точнее, для последовательности λ_n , для которой



$$\sup \frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{d_{\lambda_n}} < \infty.$$

Обозначим, далее, через E_n все n -мерное вещественное евклидово пространство. Пусть K_n — многообразие всех финитных неограниченно дифференцируемых комплексных функций, определенных на E_n . Определим на K_n дифференциальный оператор произвольного порядка m с постоянными коэффициентами формулой

$$Au = \sum_{0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad u \in K_n, \quad (3)$$

или, короче,

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad u \in K_n, \quad (4)$$

где

$$P(s) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}. \quad (5)$$

Здесь коэффициенты $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ предполагаются вещественными постоянными. Очевидно, оператор A симметрический. Как показано в (1), в пространстве $L_2(E_n)$ индексы дефекта оператора A ($D_A = K_n$), определенного формулой (4), равны (0,0). В дальнейшем под оператором

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad u \in \Omega_n, \quad (6)$$

будем понимать замыкание оператора (4) и через Ω_n будем обозначать область его определения. Легко видеть, что спектр оператора A чисто непрерывен и совпадает с множеством значений полинома $P(s)$, когда s пробегает все пространство E_n .

Доказательство приводимых в этой заметке теорем существенно опирается на следующие леммы.

Лемма 1. В $L_2(E_n)$ оператор умножения на комплекснозначную непрерывную функцию $q(x)$, стремящуюся к нулю на бесконечности, A — вполне непрерывен, где самосопряженный оператор A определен формулой (6).

Лемма 2. Пусть комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ ограничена и $q(x) \in L_2(E_n)$. Пусть, далее, R_λ — резольвента оператора A , определенного формулой (6). Тогда норма оператора $qR_\lambda q$, состоящего в том, что функция $u \in L_2(E_n)$ умножается на $q(x)$, к произведению qu применяется оператор R_λ и полученный результат вновь умножается на $q(x)$, допускает оценку

$$\|qR_\lambda q\| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sup \left| \int_E \frac{e^{-i(t, x)} dt}{P(t) - \lambda} \right| \|q\|^2. \quad (7)$$

Чтобы сформулировать следующую лемму, предположим, что полином $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = P(s_1^2 + \dots + s_n^2), \quad (8)$$

где $P(r^2)$ — произвольный полином от одной переменной $r^2 = s_1^2 + \dots + s_n^2$. Тогда спектр оператора

$$Au = P(-\Delta)u, \quad u \in \Omega_n, \quad (9)$$

определяемого таким же образом, как и более общего вида оператор (6), чисто непрерывен и состоит из тех и только тех λ , для которых при некотором $r^2 \geq 0$ имеем $P(r^2) - \lambda = 0$. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_k$ — все различные друг от друга неотрицательные нули полинома $2rP'(r^2) = \frac{d}{dr}P(r^2)$. Положим $\lambda_k = P(r_k^2)$ и через Λ будем обозначать совокупность этих λ_k

$$\Lambda = \{\lambda_k : \lambda_k = P(r_k^2), \quad 2r_kP'(r_k) = 0\}. \quad (10)$$

Лемма 3. Пусть R_λ — резольвента оператора A , определенного формулой (9), а комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad C = \text{const}. \quad (11)$$

Пусть, далее, λ_0 — точка спектра оператора A и $\lambda_0 \in \Lambda$, где множество Λ определено формулой (10). Тогда некоторая окрестность точки λ_0 в комплексной плоскости разбивается спектром оператора A на две области G_1 и G_2 и оператор $qR_\lambda q$, рассматриваемый в одной из них (например, в G_1), допускает аналитическое продолжение по λ в другую область ($\lambda \in G_2$).

Замечание. Заметим, что точки множества Λ для оператора $qR_\lambda q$ могут оказаться точками ветвления. Пусть, например, полином $P(t)$ от одной переменной t имеет вид $P(t) = t^2$, т. е. $Au = -u''$ на всей вещественной оси. Тогда, как легко видеть, оператор $qR_\lambda q$ имеет вид

$$qR_\lambda qu = - \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} q(t) u(t) dt$$

и не допускает аналитического продолжения через точку $\lambda = 0$. Ясно, что при этом множество Λ состоит из этой единственной точки $\lambda = 0$.

Ниже мы будем предполагать, что полином $P(s)$ с вещественными коэффициентами, определенный формулой (5), удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{|s| > R} |P(s)| = \infty. \quad (12)$$

Мы будем интересоваться характером спектра возмущенного оператора вида $Tu = Au + qu$, $u \in \Omega_n$, где функция $q(x)$ — комплекснозначная. Следующая теорема носит общий характер и в некотором

смысле обобщает известный результат В. Б. Лидского ⁽²⁾ для возмущенного оператора Лапласа.

Теорема 2. Пусть оператор A определен формулой (6) и удовлетворяет условию (12), а $q(x)$ — комплекснозначная непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Тогда весь спектр оператора A содержится в спектре возмущенного оператора $Tu = Au + qu$, $u \in \Omega_n$. Точки спектра оператора T лежащие вне спектра оператора A , могут быть лишь собственными значениями конечной кратности, не имеющими предельных точек вне спектра оператора A .

Чтобы сформулировать следующие теоремы, необходимо наложить дополнительные ограничения на оператор A . Мы будем предполагать, что оператор A определен формулой (9), где полином $P(r^2)$ имеет вещественные коэффициенты. Условие (12), очевидно, выполняется.

Теорема 3. Пусть самосопряженный оператор A определен формулой (9), а множество Λ — формулой (10). Пусть, далее, комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad C = \text{const.} \quad (13)$$

Тогда собственные значения оператора $Tu = Au + qu$ (включая и те, которые лежат на спектре оператора A) могут сгущаться лишь к точкам множества Λ и к бесконечности.

Доказательство опирается на следующие два предложения. Если через Φ_λ обозначить оператор, существующий согласно лемме 3 в некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ и совпадающий с оператором $\sqrt{q} R_\lambda \sqrt{q}$ для тех λ из этой окрестности, которые лежат в верхней полуплоскости, а для остальных λ из этой окрестности совпадающий с аналитическим продолжением оператора $\sqrt{q} R_\lambda \sqrt{q}$, то оператор Φ_λ вполне непрерывен в полной окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. С другой стороны, если λ_0 принадлежит спектру оператора A и является собственным значением оператора $Tu = Au + qu$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (E + \sqrt{q} R_{\lambda_0 + i\tau} \sqrt{q}) v = 0 \quad (\text{Im } \tau = 0)$$

при некотором v , $\|v\| > 0$.

Теорема 4. Пусть самосопряженный оператор A определен формулой (9) и пусть степень многочлена $P(r^2)$ больше размерности n нечетномерности пространства E_n . Если ограниченная, измеримая, комплекснозначная функция $q(x)$ суммируема, то весь дискретный спектр оператора $Tu = Au + qu$ (включая собственные значения, лежащие на спектре оператора A) ограничен, причем вне некоторого круга комплексной плоскости с центром в начале координат спектр оператора T чисто непрерывен и совпадает со спектром оператора A .

Доказательство основано на лемме 2 и равномерном по x стремлении к нулю интеграла

$$\int_{E_n} \frac{e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)}}{P(t_1^2 + \dots + t_n^2) - \lambda} dt$$

при стремлении $|\lambda|$ к бесконечности.

Заметим, что теорема 4 еще не дает возможности утверждать, что дискретный спектр оператора $Tu = Au + qu$ конечен, даже если $q(x)$ удовлетворяет условию (13) теоремы 3. Это связано с тем, что точки множества Λ могут оказаться предельными для собственных значений оператора T . Даже в простейшем случае полигармонического оператора, когда множество Λ состоит из единственной точки $\lambda = 0$, не ясно, как можно обойти возникающие здесь трудности путем сколько-нибудь общих соображений. Тем не менее, в этом случае дискретный спектр оказывается конечным. Например, для бигармонического оператора в трехмерном пространстве справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть измеримая и определенная на всем трехмерном евклидовом пространстве E_3 функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \text{const.}$$

Тогда множество собственных значений (включая и положительные) оператора $Tu = \Delta \Delta u + qu$ конечно. Остальная часть спектра оператора T чисто непрерывна и состоит из всех точек положительной полуоси, не являющихся собственными значениями оператора T .

При доказательстве используется аппарат Фредгольма в несколько видоизмененной форме. Именно, пусть измеримая функция $\Phi(x, y)$ ограничена, а $q(x) \in L(E)$, $q(x) \in L_2(E)$, где E — неограниченная область евклидова пространства. Тогда ряд

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n,$$

определяющий знаменатель Фредгольма для ядра $\Phi(x, y)q(y)$, сходится на всей λ -плоскости и если $D(\lambda_0) \neq 0$, то уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_E K(x, y) u(y) dy, \quad u \in L_2(E),$$

где $K = \Phi q$,

имеет лишь тривиальное решение в пространстве $L_2(E)$.

Մի բանի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների սպեկտրի մասին

Աշխատանքի հիմնական արդյունքները բերվում են հետևյալին.

Թեև ուրեմ 1: Դիցուե՛ք R_{λ} -ն հիլբերտյան տարածության մեջ ոչ ինքնահամալուծ փակ գծային անսահմանափակ A օպերատորի ռեզոլվենտան է և S -ը ստիմանափակ գծային օպերատոր է (ոչ ինքնահամալուծ) A օպերատորի անընդհատ սպեկտրին պատկանող λ_0 կետը մնում է $T = A + S^2$ օպերատորի անընդհատ սպեկտրի կետ, երբ գոյություն ունի այնպիսի λ_n հաջորդականություն, որի համար

$$\sup \| (\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n} \| < \infty,$$

$$\limsup \| S R_{\lambda_n} S \| = q < 1.$$

A օպերատորի $\lambda = \lambda_0$ ռեզոլվյար կետը մնում է T օպերատորի ռեզոլվյար կետ, երբ

$$\| S R_{\lambda_0} S \| < 1.$$

Այնուհետև նշանակենք E_n -ով n — հաժիանի իրական էվկլիդյան տարածությունը. Դիցուե՛ք K_n -ը E_n -ում սահմանված բոլոր ֆինիտ աֆերջ գիֆերենցիալ կոմպլեքս ֆունկցիաների բազմությունն է: Մահմանենք K_n -ում հաստատուն գործակիցներով կամայական m կարգի գիֆերենցիալ օպերատոր հետևյալ բանաձևով

$$Au = P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u, \quad u \in K_n, \quad (1)$$

որտեղ

$$P(s) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n < m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}, \quad (2)$$

և $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ գործակիցները իրական հաստատուններ են:

Հեղինակի աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ հետադոմող օպերատորի գիֆերենցիալ ինդեքսը հավասար է $(0, 0)$ և այդ իսկ պատճառով A օպերատորի առկա հետևանք (1) բանաձևով որոշված օպերատորի ինքնահամալուծ բնղլայնումը

$$Au = P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u, \quad u \in \Omega_n, \quad (3)$$

և Ω_n -ով կնշանակենք նրա որոշման տիրույթը: Մենք նաև կենթադրենք, որ (2) բանաձևով որոշվող $P(s)$ բազմանդամը բավարարում է

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{|s| > R} |P(s)| = \infty \quad (4)$$

պայմանին:

Վերջապես, եթե $P(s)$ բազմանդամը ունի

$$P(s) = P(s_1^2 + \dots + s_n^2) \quad (5)$$

տեսք, որտեղ $P(r^2)$ -ն $r^2 = s_1^2 + \dots + s_n^2$ փոփոխականի կամայական բազմանդամն է: ուսումնասիրենք Λ բազմանդամը, սահմանված հետևյալ կերպ: Դիցուե՛ք $r_1, \dots, r_k$ -ն երբևէ

$\frac{d}{dr} P(r^2)$ բազմանդամի իրարից տարբեր ոչ բացասական արժատներն են: Նշանակենք

Λ -ով λ_k -երի համախումբը, որտեղ $\lambda_k = P(r_k^2)$.

Թեորեմ 2: Դիցուք A օպերատորը սահմանված է (3) բանաձևով և բավարարում է (4) պայմանին, իսկ $q(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է զրոյի ձգտող և կոմպլեքս արժեքներ ընդունող: Այդ դեպքում A օպերատորի ամբողջ սպեկտրը բնորոշվում է $Tu = Au + qu$, $u \in Q_A$, օպերատորի սպեկտրի մեջ: T օպերատորի սպեկտրի կետերը, որոնք չեն պատկանում A օպերատորի սպեկտրին, կարող են հանդիսանալ միայն վերջավոր պատիկություն ունեցող սեփական արժեքներ, որոնք չունեն սահմանային կետեր A օպերատորի սպեկտրից դուրս:

Թեորեմ 3: Դիցուք A օպերատորը սահմանված է (3) բանաձևով և $P(s)$ բազմանդամը ունի (5) տեսքը, դիցուք այնուհետև կոմպլեքս արժեք ընդունող, չափելի $q(x)$ ֆունկցիան որևէ $\varepsilon > 0$ -ի դեպքում բավարարում է

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad C = \text{const.},$$

սահմանին:

Այդ դեպքում $Tu = Au + qu$ օպերատորի սեփական արժեքները (ներառյալ և A օպերատորի սպեկտրին պատկանողները) կարող են խտանալ միայն Λ բազմության կետերում կամ անվերջում:

Թեորեմ 4: Դիցուք A ինքնահամալուծ օպերատորը որոշված է (3) բանաձևով, իսկ $P(s)$ բազմանդամը ունի (5) տեսքը: Դիցուք այնուհետև $P(r^2)$ բազմանդամի կարգը E_n կենտրոնականի տարածության չափողականությունից մեծ է: Եթե $q(x)$ -ը սահմանափակ չափելի կոմպլեքս արժեքներ ընդունող հանրագումարելի ֆունկցիա է, ապա $Tu = Au + qu$ օպերատորի ամբողջ դիսկրետ սպեկտրը (ներառյալ և A օպերատորի սպեկտրի վրա գտնվող սեփական արժեքները) սահմանափակ է, ընդ որում կոմպլեքս հարթության որոշ շրջանից դուրս, որի կենտրոնը սկզբնակետումն է, T օպերատորի սպեկտրը զուտ անընդհատ է և համընկնում է A օպերատորի սպեկտրին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ի Ի Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Р. М. Мартиросян, ДАН АрмССР, т. XXXIV, № 2 (1962). ² В. Б. Лидский, ДАН СССР, т. 112, № 6 (1957).

МАТЕМАТИКА

Н. Д. Пецко

Проективные мероопределения и комплексные числа

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 26/XI 1962)

Применению комплексных чисел трех видов — обычных комплексных чисел $a + bi$ ($i^2 = -1$), двойных чисел $a + be$ ($e^2 = 1$), дуальных чисел $a + b\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$) — ко всевозможным двумерным пространствам с проективной метрикой посвящена работа И. М. Яглома ⁽¹⁾. В настоящей работе результаты работы ⁽¹⁾ обобщаются на широкий класс пространств с проективной метрикой произвольной размерности.

1. Всякая прямая линия n -мерного эллиптического пространства S_n ⁽²⁾, стр. 151) пересекает его мнимый абсолют, совпадающий с абсолютом комплексного пространства $S_n(i)$ ⁽²⁾, стр. 159), в двух мнимосопряженных точках. Если мы будем различать ориентацию прямых пространства S_n , то получим, что *многообразие ориентированных прямых пространства S_n взаимно однозначно изображается точками абсолюта комплексного пространства $S_n(i)$* . При этом группа движений пространства S_n изображается подгруппой группы движений пространства $S_n(i)$, переводящей в себя пространство S_n , погруженное в $S_n(i)$ в виде многообразия действительных точек.

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости S_2 на комплексной проективной прямой, т. е. изображению самой плоскости S_2 на расширенной плоскости комплексного переменного ⁽²⁾, стр. 416—420 и 484—486).

2. В n -мерном гиперболическом пространстве $'S_n$ ⁽²⁾, стр. 151) все прямые, за исключением изотропных прямых (т. е. прямых, касающихся абсолюта), делятся на два класса: *эллиптические прямые* — прямые, не пересекающиеся с абсолютом, и *гиперболические прямые* — прямые, пересекающие абсолют в двух точках.

Всякая эллиптическая прямая пространства $'S_n$ пересекает его абсолют в двух мнимосопряженных точках. Но мнимые точки абсолюта вместе с его действительными точками составляют абсолют пространства $S_n(i)$. Поэтому *многообразие ориентированных эллиптических прямых пространства $'S_n$ взаимно однозначно изобра-*

жаются точками абсолюта комплексного пространства $S_n(i)$, отличными от точек абсолюта пространства 1S_n , погруженного в пространство $S_n(i)$ в виде многообразия действительных точек. При этом группа движений пространства 1S_n изображается подгруппой группы движений пространства $S_n(i)$, переводящей в себя пространство 1S_n .

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости 1S_2 положительной кривизны на комплексной проективной прямой, т. е. интерпретации Пуанкаре плоскости Лобачевского на плоскости комплексного переменного ((²), стр. 421—423 и 484—487).

3. Всякая гиперболическая прямая пространства 1S_n пересекает его абсолют в двух действительных точках, которые можно изобразить одной точкой абсолюта гиперболического пространства ${}^1S_n(e)$, над двойными числами $a + be$, $e^2 = +1$. Поэтому многообразие ориентированных гиперболических прямых пространства 1S_n взаимно однозначно изображается точками абсолюта двойного пространства ${}^1S_n(e)$, отличными от точек абсолюта пространства 1S_n , погруженного в пространство ${}^1S_n(e)$ в виде многообразия действительных точек. При этом группа движений пространства 1S_n изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(e)$, переводящей в себя пространство 1S_n .

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости Лобачевского на двойной проективной прямой, т. е. изображению плоскости 1S_2 положительной кривизны на расширенной плоскости двойного переменного ((²), стр. 420—423 и 484—487).

4. Так как n -мерное евклидово пространство R_n может быть получено предельным переходом и из эллиптического пространства S_n и из гиперболического пространства 1S_n , причем прямые пространства R_n получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и гиперболических прямых пространства 1S_n , а многообразия ориентированных прямых пространства S_n и ориентированных гиперболических прямых пространства 1S_n , как мы видели, взаимно однозначно изображаются точками абсолютов пространства $S_n(i)$, которое можно рассматривать как пространство ${}^1S_n(i)$ и пространство ${}^1S_n(e)$, то ориентированные прямые пространства R_n можно изобразить точками абсолюта гиперболического пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$ над дуальными числами $b + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$. Тогда многообразие ориентированных прямых евклидова пространства R_n взаимно однозначно изображается парами точек абсолюта дуального пространства Лобачевского ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящимися друг в друга преобразованием $\xi^0 = \bar{\xi}^0$, $\xi^{\alpha} = -\bar{\xi}^{\alpha}$ ($\alpha > 0$). При этом группа движений пространства R_n изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящей в себя многообразие точек, удовлетворяющих условию $\xi^0 = \bar{\xi}^0$, $\xi^{\alpha} = -\bar{\xi}^{\alpha}$ ($\alpha > 0$).

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости R_2 на дуальной проективной прямой, т. е. на плоскости дуального переменного, предложенному И. М. Ягломом (¹).

5. В n -мерном квазиэллиптическом пространстве S_n^I (³) все прямые делятся на три класса: эллиптические прямые первого рода — прямые, не пересекающиеся с абсолютной плоскостью, эти прямые пересекают абсолютный конус в двух точках, эллиптические прямые второго рода — прямые, целиком лежащие на абсолютной плоскости, эти прямые пересекают абсолютную квадрику в двух точках, и евклидовы прямые — прямые, пересекающие абсолютную плоскость в одной точке.

Так же, как в случае пространства S_n , показывается, что *многообразие ориентированных эллиптических прямых первого рода пространства S_n взаимно однозначно изображается точками абсолютного конуса комплексного пространства $S_n^I(i)$, отличными от точек вершинной плоскости абсолютного конуса*. При этом группа движений пространства S_n^I изображается подгруппой группы движений пространства $S_n^I(i)$, переводящей в себя пространство S_n^I , погруженное в пространство $S_n^I(i)$ в виде многообразия действительных точек.

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости, соответствующей евклидовой плоскости, R_2 по принципу двойственности на комплексной проективной прямой, т. е. обычному представлению плоскости R_2 на плоскости комплексного переменного.

Вершинная плоскость абсолютного конуса пространства S_n^I , т. е. абсолютная плоскость этого пространства, представляет собой эллиптическое пространство S_{n-1-1} . Поэтому *многообразие ориентированных эллиптических прямых второго рода пространства S_n^I взаимно однозначно изображается точками абсолютной квадрики пространства $S_n^I(i)$, т. е. точками абсолюта пространства $S_{n-1-1}(i)$* .

6. Квазиэллиптическое пространство S_n^I может быть получено предельным переходом и из эллиптического пространства S_n и из гиперболического пространства ${}^I S_n$, причем эллиптические прямые пространства S_n^I получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и эллиптических прямых пространства ${}^I S_n$, а евклидовы прямые пространства S_n^I получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и гиперболических прямых пространства ${}^I S_n$. Так как многообразия ориентированных прямых пространства S_n и ориентированных гиперболических прямых пространства ${}^I S_n$ взаимно однозначно изображаются точками абсолютов пространств $S_n(i)$, которые можно рассматривать как пространство ${}^I S_n(i)$ и пространство ${}^I S_n(l)$, то ориентированные евклидовы прямые пространства S_n^I можно изо-

-бразить точками абсолюта дуального гиперболического пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$. Это изображение уже не может быть взаимно однозначным, так как точки абсолюта пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$ зависят от $2(n-1)$ действительных параметров, а евклидовы прямые пространства S_n^l зависят от $2(n-1)-l$ действительных параметров. Будем называть l -цепями многообразия точек абсолюта пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, координаты ξ^a которых имеют вид $x^a + \varepsilon y_0^a$, где x^a — произвольные действительные числа, y_0^a — постоянные действительные числа, а координаты $\bar{\xi}_0^a$ — постоянные дуальные числа. Эти многообразия l -мерны, так как $l+1$ чисел x^a связаны одним условием нормирования. Тогда многообразие ориентированных евклидовых прямых квазиэллиптического пространства S_n^l взаимно однозначно изображаются l -цепями на абсолюте дуального пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$. При этом группа движений пространства S_n^l изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящей в себя многообразие точек, удовлетворяющих условию

$$\xi^a = \bar{\xi}^a, \quad \xi^u = -\bar{\xi}^u.$$

Коломенский педагогический институт

Ն. Դ. ՊԵՅԿՈ

Պրոեկտիվ մետրիկան և կոմպլեքս բվերը

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ n -չափանի էլիպտիկան տարածություն, կողմնորոշված ուղիղների, n -չափանի հիպերբոլական տարածություն կողմնորոշված էլիպտիկան և հիպերբոլական ուղիղների, n -չափանի էվկլիդյան տարածություն կողմնորոշված ուղիղների և n -չափանի քվադրէլիպտիկան տարածություն կողմնորոշված էլիպտիկան և էվկլիդյան ուղիղների բաղադրանքները փոխմիարժեք պատկերվում է համապատասխանաբար n -չափանի կոմպլեքս ոչ էվկլիդյան տարածություն (սուսին երկու դեպքում), n -չափանի կրկնակի և դուալ հիպերբոլական տարածություն, n -չափանի կոմպլեքս քվադրէվկլիդյան տարածություն և l -շղթաների դուալ n -չափանի հիպերբոլական տարածություն բացարձակի վրա:

Այս արդյունքի մասնավոր դեպքը՝ երբ $n=2$ համառարարոր է ոչ էվկլիդյան, էվկլիդյան և քվադրէլիպտիկան հարթությունների բաղադրանքները կոմպլեքս, կրկնակի և դուալ փոփոխականների միջոցով արդեն հայտնի մեկնարանությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. М. Яглом, Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 7, 1947, стр. 276—318. ² Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии, М., 1955. ³ Б. А. Розенфельд, Квазиэллиптические пространства. Труды Московского математического общества, т. 8, 1959, стр. 49—70.

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

Свойства решений систем Коши—Римана
с нелинейными правыми частями

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/XII 1962)

Разнообразные задачи математики и механики приводят к изучению свойств решений систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка более общих, чем система Коши—Римана.

Один из важных классов таких систем составляют системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = f_1(x, y, u, v), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = f_2(x, y, u, v), \quad (1)$$

или в векторном обозначении

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f(z, w), \quad (1)^*$$

где

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad f = f_1 + if_2$$

известные функции.

Однако, в то время как системы вида (2) с линейными правыми частями

$$\frac{\partial w}{\partial z} = Aw + B\bar{w} \quad (2)$$

(где A, B — известные функции от z) весьма хорошо изучены и в работах И. Н. Векуа, Л. Берса и др. развитая весьма полная их теория, системы вида (1) с нелинейными правыми частями еще не изучены.

В настоящей работе для некоторых простейших случаев нелинейных систем вида (1) устанавливается ряд свойств решений, аналогичных свойствам решений систем вида (2), а также указываются примеры явлений, связанных с нелинейностью.

1°. Здесь мы рассмотрим системы вида

$$\frac{\partial w}{\partial z} = Aw^2 + Bw\bar{w} + C\bar{w}^2, \quad (3)$$

где коэффициенты A, B, C — функции переменной z , заданные в некоторой области G и принадлежащие к $L_p(G)$ $p > 2$.

Будем говорить, что $w(z)$ является обобщенным решением системы (3) в окрестности точки z_0 , если в некоторой окрестности G_0 этой точки w обладает обобщенными производными в смысле Соболева ⁽¹⁾, которые суммируемы со степенью $p > 1$ и удовлетворяют системе (3) почти везде в G_0 . Если w удовлетворяет системе (3) в окрестности каждой точки области G , исключая, быть может, точек некоторого дискретного относительно G множества G_w , то будем говорить, что w является обобщенным решением системы (3) в области G . Множество G_w , которое содержит лишь изолированные точки, вообще говоря, зависит от выбора w . Если G_w — пустое множество, то обобщенное решение w будем называть регулярным решением системы (3) в области G . Но так как из суммируемости обобщенных производных следует непрерывность функции в G ⁽¹⁾, то регулярное в области G решение непрерывно в G и удовлетворяет системе (3) почти везде в G .

Для решений систем (3), регулярных в G , имеет место.

Теорема 1 (аналог теоремы Карлемана). *Если для регулярного решения $w(z)$ системы (3) существует точка $z_0 \in G$, являющаяся предельной точкой для нулей $w'(z)$, то $w(z) \equiv 0$ в G .*

Эта теорема доказывается немного измененным методом Карлемана.

2°. Приведем теперь одно интегральное представление регулярных решений системы (3) в G .

Лемма 1. Пусть w — регулярное в G решение системы (3) и пусть

$$A_0(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\bar{w}}{w} + C(z) \frac{\bar{w}^2}{w^2}, & \text{если } w'(z) \neq 0 \quad z \in G, \\ A(z) + B(z) + C(z), & \text{если } w(z) = 0 \quad z \in G. \end{cases}$$

В таком случае функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{w(z)} + \omega(z), \quad \text{где } \omega(z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_G \frac{A_0(t) d\sigma}{t-z}, \quad (4)$$

является мероморфной в области G . Из леммы 1 сразу следует

Теорема 2. *Всякое регулярное в G решение системы (3) представимо в виде*

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z) - \omega(z)}, \quad (5)$$

где $\varphi(z)$ — мероморфная в G функция, а $\omega(z)$ — функция вида (4) и, наоборот, всякая функция вида (6), где $\varphi(z)$ — мероморфная в G , а $\omega(z)$ имеет вид (5), является регулярным решением системы (3).

В частности, если $B \equiv C \equiv 0$, то формула (5) принимает следующий вид

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z) + \frac{1}{\pi} \int_G \int \frac{A(t) d\bar{z}}{t-z}}. \quad (6)$$

Обобщенное решение системы (3) в области G является регулярным решением в $G - G_w$, где G_w дискретное относительно G множество. Следовательно, обобщенное решение системы (3) в области G имеет вид (5), где функция $\varphi(z)$ в точках G_w имеет любые изолированные особенности.

Точка z_0 расширенной плоскости $z = x + iy$, в окрестности $0 < |z - z_0| < r$ которой обобщенное решение системы (3) $w(z)$ непрерывно, называется устранимой особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z)$ существует и конечен, полюсом, если $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z)$ существует и равен бесконечности, существенно особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z)$ не существует.

3°. Здесь мы приведем некоторые свойства решений систем (3).

Теорема 3 (аналог теоремы Сохоцкого). Если z_0 — существенно особая точка обобщенного решения $w(z)$ системы (3) в G , то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_k \rightarrow z_0$, такая, что $\lim_{z_k \rightarrow z_0} w(z) = A$.

Теорема 4 (аналог теоремы Лиувилля). Если w регулярное в открытой плоскости E решение системы (3) и $\left| \frac{1}{w} \right|$ ограничено на всей (открытой) плоскости, то $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{C - \omega(z)}, \quad (7)$$

где $C = \text{const}$, $\omega(z)$ — функция (4)

Функции вида (7) можно назвать обобщенными постоянными. В отличие от линейных систем, решения систем (3) могут равномерно стремиться к бесконечности при приближении к границе области. Это показывает следующий пример. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -w^2. \quad (8)$$

Ясно, что $w = \frac{2}{zz-1}$ является регулярным решением системы (8) в единичном круге, но тем не менее $w(z)$ стремится равномерно к бесконечности при z , стремящемся к единичной окружности.

4°. Здесь рассматривается система вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a_0(z) \sqrt{w}, \quad (9)$$

где $a_0(z)$ — заданная функция переменной z в некоторой области G , принадлежащая к $L_p(G)$, $p > 2$.

Регулярные и обобщенные решения системы (9) определяются так же, как и для системы (3), но для простоты мы здесь ограничимся рассмотрением лишь тех решений этой системы, которые в окрестности G_0 точки $z_0 \in G$ представляют собой квадрат непрерывных в G_0 однозначных функций. Под $\sqrt{w}$ мы будем понимать именно такую функцию. Приведем теперь одно представление обобщенных решений системы (9).

Лемма 2. Пусть w — обобщенное решение системы (9) с коэффициентом $a_0 \in L_p(G)$ в области G . В таком случае функция

$$\varphi(z) = \sqrt{w(z)} - \omega(z), \quad (10)$$

где

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_G \frac{a_0(t)}{t-z} d\sigma, \quad (10')$$

является однозначной аналитической в области G всюду, за возможным исключением множества G_w особых точек w^* .

Теорема 5. Всякое обобщенное решение системы (9) в области имеет вид

$$w(z) = [\varphi(z) + \omega(z)]^2, \quad (11)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая всюду в G , кроме, может быть, изолированных особенностей, функция, а $\omega(z)$ — функция вида (10') в G и, наоборот, всякая функция вида (11), где $\varphi(z)$ — аналитическая (с изолированными особенностями) функция, а $\omega(z)$ — функция вида (10') в G , является обобщенным решением системы (9).

4°. Следующий пример показывает, что теорема Карлемана для регулярных решений систем вида (9) неверна. В самом деле, рассмотрим систему

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2\sqrt{w}. \quad (12)$$

Ясно, что функция $w(z) = (z - \bar{z})^2$ является регулярным решением системы (12) в области G , содержащей некоторый отрезок оси Oy , но тем не менее нули $w(z)$ заполняют этот отрезок.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 6. Если $a_0(z)$ — голоморфная функция в G , $w(z)$ является регулярным решением системы (9) и нули $\frac{\partial \sqrt{w}}{\partial z}$ имеют в G предельную точку, то $w(z) \equiv 0$ ***.

* Если $w(z)$ — регулярное решение, то $\varphi(z)$ — голоморфная функция в области G .

** В этом условии нельзя заменить $\frac{\partial \sqrt{w}}{\partial z}$ на $\frac{\partial w}{\partial z}$, так как $\frac{\partial w}{\partial z}$ может обращаться в нуль на кривых. Это видно из примера решения $w = (z + \bar{z})^2$ системы (9) при $a_0(z) = 2$.

Теорема 7. Если $a_0(z)$ — аналитическая функция двух действительных переменных x и y ($x + iy = z$) в G , $w(z)$ — регулярное решение системы (9) в этой области и $w(z) = 0$ на множестве, имеющем внутреннюю точку, то $w(z) \equiv 0$ в G .

Для произвольных непрерывных функций в области G теоремы 6 и 7 неверны. В самом деле, пусть $a_0(z) = 0$ в G_0 , $a_0 \neq 0$ в $G - G_0$ и непрерывная в G функция. Из (11) ясно, что регулярное решение $w(z)$ системы $\frac{\partial w}{\partial z} = a_0(z) \sqrt{w}$ в G равно нулю в G_0 и не равно нулю в $G - G_0$.

Следуя М. Б. Балку⁽¹⁾, введем теперь понятие точек сгущения порядка n для произвольного множества E' точек.

Пусть E' — произвольное множество точек, ξ — какая-либо точка (не обязательно из E'), l — луч $\arg(z - \xi) = \alpha$, исходящий из ξ . Множество E' назовем сгущающимся к точке ξ вдоль луча l , если в E' содержится такая последовательность точек $\{z_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(z_n - \xi) = \alpha$. Пусть теперь a — произвольная прямая, проходящая через точку ξ . Множество E' назовем сгущающимся к точке ξ вдоль прямой a , если оно сгущается к ξ хотя бы вдоль одного из лучей, на которые разбивается прямая a точкой ξ .

Точку ξ назовем точкой сгущения порядка n для множества E' , если E' сгущается к точке ξ не менее, чем вдоль n различных прямых.

Теорема 8. Пусть $a_0(z)$ — голоморфная функция в области G и пусть $w(z)$ — регулярное решение системы (9) в той же области G . Если $w(z)$ обращается в нуль на множестве $F' \subset G$, имеющем в G точку сгущения порядка 2, то $w(z) \equiv 0$ в G .

5°. Если изолированные особенности решения системы (9) классифицировать так же, как для решений систем (3), то оказывается, что имеет место теорема, аналогичная теореме Сохоцкого.

Обобщается также несколько классических теорем.

Теорема 9 (принцип максимума). Если $a_0(z) \in L_{p,2}(G)$, $p > 2$ и $w(z)$ — регулярное решение системы (9), непрерывное в G , то

$$w(z) \leq |\bar{M} + \max_{t \in \Gamma} |\overline{w(t)}||^2, \quad z \in G + \Gamma, \quad (13)$$

где Γ — граница области G , $\bar{M}$ — положительная постоянная, которая зависит исключительно от a_0 и p .

Теорема 10 (аналог теоремы Лиувилля). Если $a_0 \in L_{p,2}(E)$ и регулярное во всей (открытой) плоскости решение $w(z)$ системы (9) ограничено*, то $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = |c + \varphi(z)|^2, \quad (14)$$

где c — постоянная величина.

* В отличие от линейных систем регулярное решение может быть и обращается в нуль в некоторой фиксированной точке z_0 плоскости.

Функции вида $|c + \omega(z)|^2$ мы назовем обобщенными постоянными (при $a_0(z) \equiv 0$ правая часть (14), очевидно, равна постоянной). Введем также понятие обобщенного полинома и обобщенной рациональной функции. Функцию вида (11) мы будем называть обобщенной рациональной функцией, если $\sqrt{\omega(z)}$ имеет конечное число полюсов на расширенной плоскости. В таком случае в формуле (11) функция $\varphi(z)$ есть рациональная функция, полюсы которой совпадают с полюсами соответствующей обобщенной рациональной функции. Если обобщенное решение системы (9) имеет единственный полюс $z = \infty$, то его будем называть обобщенным полиномом. В таком случае порядок полюса будем называть степенью обобщенного полинома. Обобщенные полиномы нулевой степени будут обобщенными постоянными.

Теорему 10 можно обобщить следующим образом.

Теорема 11. Если $\omega(z)$ — регулярное решение системы (9) с коэффициентом $a_0(z) \in L_{p,2}(E)$ в E и $\sqrt{\omega} = O(|z|^n)$ вблизи точки $z = \infty$, где n — целое неотрицательное число, то $\omega(z)$ есть обобщенный полином n .

Настоящая работа выполнена под руководством Б. В. Шабата, которому автор приносит глубокую благодарность.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ծ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ոչ գծային ազդանշանային հոսք-Ռիմանի սխեմաների լուծումները
մի շարք հասկացություններ

Գրառելիքում է հետևյալ տիպի սխեմաները

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = A\omega^2 + B\omega\bar{\omega} + C\bar{\omega}^2,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = a\sqrt{\omega},$$

որտեղ A, B, C, a — ֆունկցիաներ են z փոփոխականից կամայական G -տիրույթում: Գտնված են մի շարք կլասիկ թեորեմների (Ստրոգոց, Լիուվիլի և այլն) տեսակները այդ սխեմաների լուծումների դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. ² Н. А. Векун, Обобщенные аналитические функции, М., 1950. ³ М. Б. Балк, К теории полианалитических функций, Тезисы докладов Пятой всесоюзной конференции по теории функций, Ереван, 1960.

МАТЕМАТИКА

А. В. Петросян

Некоторые вопросы помехоустойчивости функций
 алгебры логики

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 18 XII 1962)

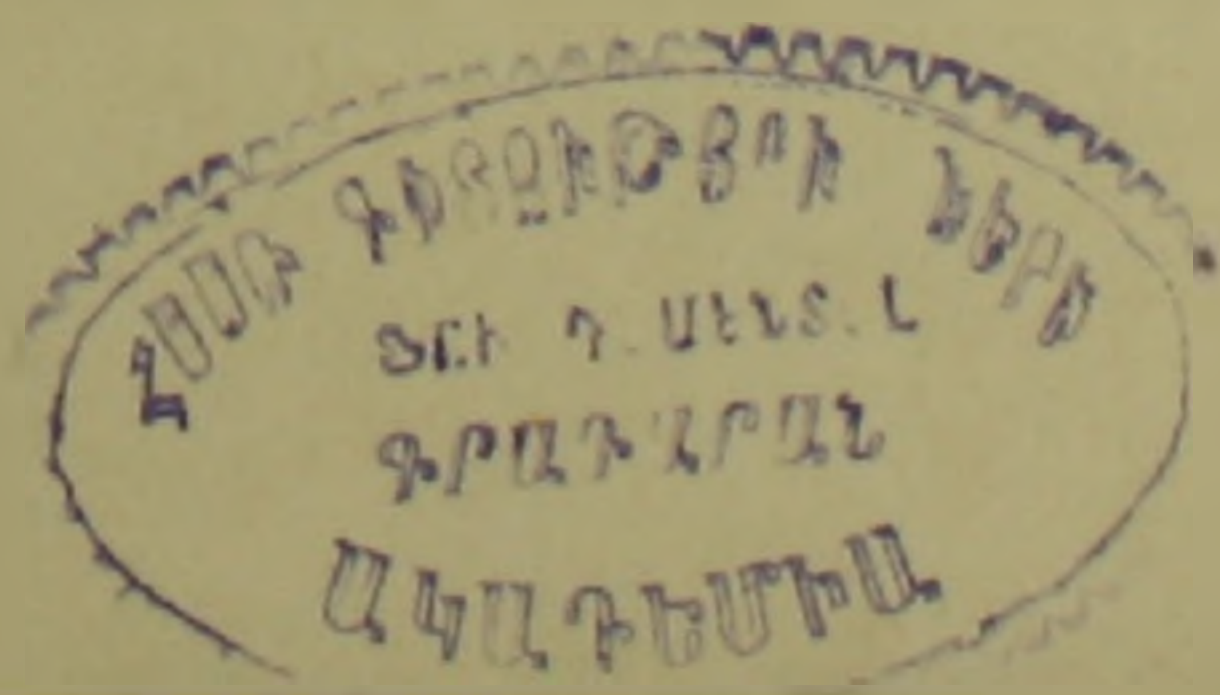
Вопросы передачи и переработки информации приобретают все большее значение для всех областей современной науки и техники. Понятие „информация“ математически уточняется в работе К. Шеннона ⁽¹⁾. Эта же работа явилась основой создания теории передачи информации при наличии помех. В работе Хемминга ⁽²⁾ показано, что передаваемую информацию можно кодировать так, чтобы помехи, возникающие при передаче, почти не влияли на результат передачи. Теоретическая возможность этого была доказана и в работе ⁽³⁾.

Однако до выхода работы Неймана ⁽³⁾ не рассматривались вопросы переработки информации с точки зрения ее помехоустойчивости. В работах ⁽³⁾ и ⁽⁴⁾ доказано, что для любой переработки информации можно создать устройства, перерабатывающие информацию при наличии помех, сколь угодно надежно.

Так как переработку информации можно описать функциями алгебры логики, то в настоящей работе рассматриваются вопросы переработки информации функциями алгебры логики с точки зрения их помехоустойчивости. Далее будет показано, что с любой функцией алгебры логики связана некоторая непрерывная функция, характеризующая помехоустойчивость данной функции, что помехоустойчивость всех функций алгебры логики (без избытка) имеет один и тот же порядок малости, что помехоустойчивость функции можно увеличить только введением избыточности.

В конце работы доказывается, что для любой функции алгебры логики можно строить другую функцию алгебры логики с избытком, перерабатывающую информацию так же, как и данная функция, но обладающую помехоустойчивостью более высокого порядка.

Предположим, что задана некоторая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и предположим, что схема S_f , которая имеет n входных каналов и один выходной канал, реализует данную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Внутренняя структура и состав схемы S_f нас не будут интересовать.



Числом ε ($0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$) в дальнейшем будет обозначаться вероятность ошибки самой схемы S_f . Аналогично работе (3), обозначим верхние грани вероятностей того, что входные линии передают ложные импульсы, соответственно через $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ($0 \leq \eta_i < 1$). В дальнейшем, иногда, вместо n -разрядного двоичного набора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем употреблять число i , равное двоичному числу с теми же разрядами, т. е. $i = x_1 + x_2 2 + \dots + x_n 2^{n-1}$, и вместо того, чтобы писать $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, просто напомним $f(i)$. Предположим, что вероятность появления

набора i на входе схемы S_f равна p_i ($p_i > 0, \sum_{i=1}^{2^n-1} p_i = 1$). При таких

обозначениях верхняя граница вероятности ложного импульса на выходе схемы S_f будет:

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon) \left[\sum_{\substack{\text{по всем } \mu \text{ и } \nu \\ f(\mu)=1, f(\nu)=0}} \left(p_\mu \eta_1^{a_{\mu, \nu}^1} \eta_2^{a_{\mu, \nu}^2} \dots \eta_n^{a_{\mu, \nu}^n} + \right. \right. \\ \left. \left. + p_\nu \eta_1^{a_{\nu, \mu}^1} \eta_2^{a_{\nu, \mu}^2} \dots \eta_n^{a_{\nu, \mu}^n} \right) \right], \quad (1)$$

где $a_{i,j}^s$ есть сумма по модулю 2 s -тых разрядов наборов i и j , а

$$\eta_s^a = \begin{cases} \eta_s & \text{если } a = 1 \\ 1 - \eta_s & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Если ввести более наглядное обозначение $P(f = \alpha \rightarrow f = \beta)$, которое является вероятностью того, что значение функции равно α , но после искажения входных величин значение функции превращается в β , то для $\eta(\varepsilon)$ получим такую формулу

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon) [P(f = 1 \rightarrow f = 0) + P(f = 0 \rightarrow f = 1)], \quad (2)$$

или то же самое

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon) \eta(0).$$

Доказательства формул (1) и (2) не приводятся ввиду их громозкости.

Функция $\eta(\varepsilon)$ показывает, насколько ненадежна схема S_f при наличии помех на входах и в самой работе схемы S_f . В случае, когда схема работает абсолютно надежно, т. е. $\varepsilon = 0$, функция $\eta_f(\varepsilon)$ показывает, как сильно зависит значение данной функции f от ее аргументов. Иначе говоря, $\eta_f(0)$ характеризует помехоустойчивость данной функции алгебры логики при данном распределении значений ее аргументов, независимо от осуществляемой ее схемы.

Определение 1. $\eta_f(0)$ назовем функцией помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с заданным распределением $p_0, p_1, \dots, p_{2^n-1}$.

Из формулы (1) видно, что $\eta_f(0)$ является суммой слагаемых вида

$$p_m \eta_{m_1} \eta_{m_2} \cdots \eta_{m_s} (1 - \eta_{m_{s+1}}) \cdots (1 - \eta_{m_n}),$$

причем при $p_i \neq 0$ и малых $\eta_i \left(\eta_i \ll \frac{1}{n} \right)$ главным членом этого выражения является $p_m \eta_{m_1} \eta_{m_2} \cdots \eta_{m_s}$. Число s назовем порядком данного слагаемого, если $p_i \neq 0$, в противном случае порядок данного слагаемого примем равным $+\infty$.

Определение 2. Минимальный порядок слагаемых в выражении $\eta_f(0)$ назовем порядком помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, с заданным распределением $p_0, p_1, \dots, p_{2^n-1}$.

Определение 3. n -разрядный двоичный набор β назовем активным набором по i -ому аргументу для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если при инвертировании i -той позиции в наборе β получается такой набор γ , для которого $f(\gamma) \neq f(\beta)$.

Обозначим все активные наборы по i -тому аргументу для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik_i}$.

Определение 4. Активностью i -того аргумента функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с данным распределением вероятностей $p_0, p_1, \dots, p_{2^n-1}$ назовем число $\omega_i = p_{\alpha_{i1}} + p_{\alpha_{i2}} + \cdots + p_{\alpha_{ik_i}}$.

В случае, когда $p_i = \text{const}$, получим:

$$\omega_i = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{по всем } \beta} [f(\beta) \oplus f(\gamma)] \text{ (где } \gamma \text{ отличается от } \beta \text{ } i\text{-той позицией)}^*.$$

Ясно, что ω_i может равняться нулю либо тогда, когда i -тый аргумент функции не имеет активных наборов, т. е. i -тый аргумент фиктивен, либо если вероятности, соответствующие активным наборам, равны нулю. Чем больше активность данного аргумента, тем больше его влияние на изменение значения функции. Отсюда ясно, что помехоустойчивость функции существенно должна зависеть от активностей ее аргументов. Следующая теорема уточняет эту связь.

Теорема 1. Линейная часть функции $\eta_f(0)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \eta_i.$$

Доказательство. Из формулы (1) видно, что линейные члены получаются из таких p и η , которые отличаются друг от друга только одним разрядом, т. е. только по активным по какому-либо аргументу наборам.

Если α_{ij} есть j -тый активный набор по i -тому аргументу, то в сумму (1) входит слагаемое вида

$$p_{\alpha_{ij}} (1 - \eta_1) \cdots (1 - \eta_{i-1}) \eta_i (1 - \eta_{i+1}) \cdots (1 - \eta_n).$$

* В этом частном случае понятие активности совпадает с понятием, введенным Ш. Е. Бозояном.

Сумма членов соответствующих всем активным наборам по i -тому аргументу равна:

$$(p_{\tau_{i1}} + p_{\tau_{i2}} + p_{\tau_{i3}} + \dots + p_{\tau_{ik_i}}) [(1 - \tau_{i1}) \dots (1 - \tau_{i-1}) \tau_i (1 - \tau_{i+1}) \dots \dots (1 - \tau_n)].$$

Отсюда следует, что коэффициент при τ_i есть ω_i . Ясно, что другие слагаемые не могут содержать τ_i линейно. Проводя те же рассуждения для всех аргументов, получим утверждение теоремы.

Определение 5. Функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1, \dots, p_{2^n-1}$ назовем функцией без избытка, если $p_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$).

Теорема 2. Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ без избытка и не постоянна, то ее порядок помехоустойчивости равен единице.

Доказательство. Так как функция не постоянна, то для нее существует по крайней мере один аргумент, имеющий активные наборы, и так как функция без избытка, то существует хотя бы один аргумент, для которого $\omega_i \neq 0$. Вследствие этого из теоремы 1 непосредственно следует теорема 2.

Следствие. Для того чтобы порядок помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ был отличным от единицы, необходимо и достаточно, чтобы $p_i = 0$ для всех i активных хотя бы по одному аргументу.

Если обозначить через $d(i, j)$ расстояние между наборами i и j (²), то можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Если порядок помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ больше r , то для любых i и j , для которых $p_i \neq 0$, $p_j \neq 0$ и $f(i) \neq f(j)$ имеет место соотношение $d(i, j) \geq 2r + 1$.

Доказательство. Если порядок помехоустойчивости функции больше r , то все члены в формуле (1) до r -того порядка включительно равны нулю. Отсюда следует, что для любого i , для которого $p_i \neq 0$, и для всех α , для которых $d(i, \alpha) \leq r$, имеет место равенство $f(i) = f(\alpha)$. То же самое имеет место для j . Отсюда следует, что $d(i, j) \geq 2r + 1$, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 4. Если функция задана только на наборах α , для которых $p_\alpha \neq 0$, причем так, что удовлетворяются условия теоремы 3, то можно эту функцию доопределить так, чтобы ее порядок помехоустойчивости был больше r .

Доказательство. Из формулы (1) видно, что функцию надо доопределить таким образом, чтобы ближайший нуль функции находился от единицы (для которого $p_\alpha \neq 0$) не ближе чем на расстояние r , и наоборот. Но это можно сделать, так как расстояние между заданными единицами и нулями функции, по условию теоремы, больше $2r$.

Теорема 5. Для любой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с заданным распределением $p_0, p_1, \dots, p_{2^n-1}$ и любого целого числа $k > 0$ можно построить такую функцию $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ с порядком помехоустойчивости не менее k так, чтобы при соответствующим образом подстановке $x_1, x_2, \dots, x_n$ на место аргументов $y_1, y_2, \dots, y_m$ получить $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана таблично. Эту таблицу расширим повторением, некоторые из столбцов для аргументов до тех пор, пока нули и единицы данной функции будут находиться на расстоянии не менее чем $2k + 1$. После этого будут выполняться условия теоремы 4. Но тогда мы из теоремы 4 получим доказательство теоремы 5.

Ереванский государственный университет.

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Խանգարումների նկատմամբ քառաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունության որոշ հարցեր

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ տրամաբանական հանրահաշվի յուրաքանչյուր ֆունկցիայի հետ կապված է մի անընդհատ ֆունկցիա, որը բնորոշում է վերջինիս կայունությունը խանգարումների նկատմամբ: Այնուհետև ցույց է տրվում, որ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունությունը կարելի է բարձրացնել միայն նրանց մեջ հավելյուկ մտցնելու օգնությամբ, որ ցանկացած ֆունկցիայի համար կարելի է կառուցել մի նոր ֆունկցիա, որը խանգարումների նկատմամբ օժտված լինի ցանկացած շափով բարձր կայունությամբ և կատարի նույն դերը, ինչ որ տրված ֆունկցիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. Шеннон, Статистическая теория передачи электрических сигналов, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953. ² Р. Хемминг, Сб., Коды с обнаружением и исправлением ошибок. ИЛ, М., 1956. ³ Дж. Нейман, Вероятностная логика, Сб. статей, Автоматы, ИЛ, М., 1955. ⁴ Э. Ф. Мур и К. Э. Шеннон, Надежные схемы из ненадежных реле, Кибернетический сборник, 1, ИЛ, М., 1960.

М. А. Задоян

**Ползучесть при кручении круглого конического стержня,
 материал которого обладает свойством
 нестационарной неоднородности**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 18/XI 1962)

Вопросы установившейся ползучести при кручении круглых стержней переменного диаметра, в том числе конических стержней и оболочек, в случае однородных материалов исследованы в монографии Л. М. Качанова (¹) и в работе Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна (²).

Ниже рассматривается задача неуставившейся ползучести при кручении круглого конического стержня, материал которого обладает переменными во времени и по координатам механическими свойствами. Такая неоднородность может возникать, например, при воздействии на материал облучения нестационарным потоком нейтронов, гамма-лучей и т. д.

Принимая сферическую систему координат r, θ, z (фиг. 1), введем предположение, что механические свойства материала конуса меняются по θ и t .

Положим, как в обычной теории кручения круглых стержней переменного диаметра, что

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$

а компоненты τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ не зависят от z и суть функции от r, θ, t .

Исходя из теории ползучести наследственного типа, соотношения между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвигов для рассматриваемого случая неоднородности возьмем в виде

$$\Phi(\theta, t) \varepsilon_i^m(r, \theta, t) = \sigma_i(r, \theta, t) + \int_0^t \sigma_i(r, \theta, \tau) N(\theta, t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где

$$N(\theta, t, \tau) = \Omega(\theta, t) K(t, \tau)$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2}, \quad m = \text{const.}$$

Функции $\Phi(\theta, t)$ и $\Omega(\theta, t)$ учитывают характер неравномерного протекания ползучести в стержне и определяются из экспериментов.

Связь между компонентами напряжений и деформаций сдвигов имеет вид

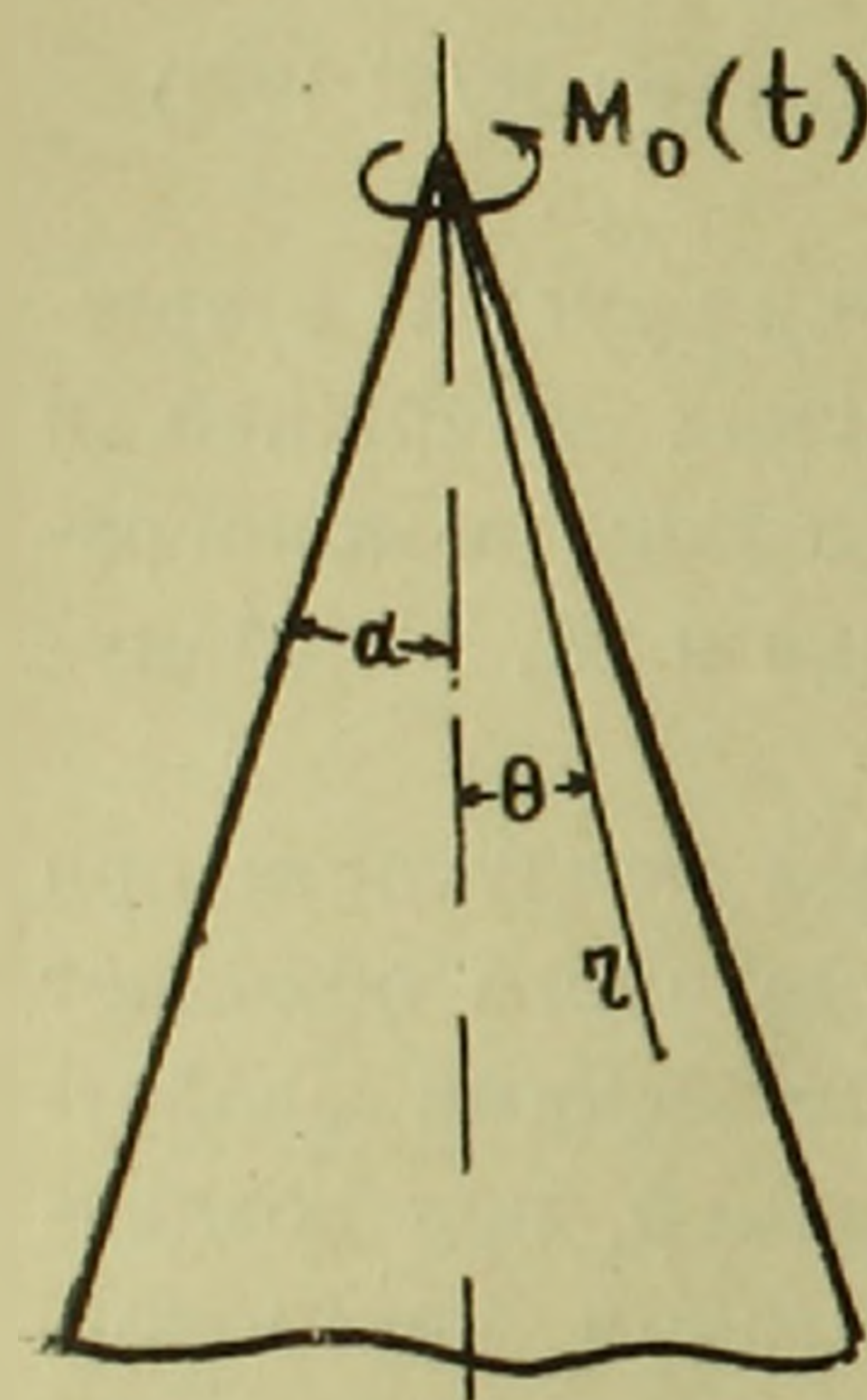
$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\varepsilon_l}{\sigma_l} \tau_{r\varphi}, \quad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{\varepsilon_l}{\sigma_l} \tau_{\theta\varphi}. \quad (2)$$

Следуя В. В. Соколовскому⁽³⁾, как в задаче пластического кручения конического стержня, принимаем

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, \theta, t), \quad \tau_{\theta\varphi} = 0. \quad (3)$$

Тогда из соотношений

$$2\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} - \frac{U_\varphi}{r} \text{ctg } \theta = 0 \quad (4)$$



Фиг. 1.

следует дифференциальное уравнение совместности

$$\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \theta} = \gamma_{r\varphi} \text{ctg } \theta. \quad (5)$$

Из дифференциального уравнения для нашей задачи

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{r} \tau_{r\varphi} = 0 \quad (6)$$

имеем

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^3} \chi(\theta, t), \quad (7)$$

где $\chi(\theta, t)$ — некоторая неизвестная функция от θ и t .

Учитывая, что $\tau_{\theta\varphi} = 0$, $\gamma_{\theta\varphi} = 0$, из (1) и (7) получим

$$\gamma_{r\varphi} = r^{-\frac{3}{m}} \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}}. \quad (8)$$

Подставляя $\gamma_{r\varphi}$ в дифференциальное уравнение совместности (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}} = \\ = \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}} \text{ctg } \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда

$$\chi(\theta, t) + \int_0^t \chi(\theta, \tau) N(\theta, t, \tau) d\tau = C^m(t) \Phi(\theta, t) \sin^m \theta, \quad (10)$$

где $C(t)$ — произвольная функция от t .

Из (8) и (10) имеем

$$r = \frac{C(t) \sin \theta}{r^m}. \quad (11)$$

Условие равенства главного момента усилий, действующих в произвольном сечении $r = \cos \theta$, заданному значению крутящего момента $M_0(t)$ в вершине стержня дает

$$\int_0^{\pi/2} \chi(\theta, t) \sin^2 \theta d\theta = \frac{M_0(t)}{2\pi}. \quad (12)$$

Умножая обе части равенства (10) на $\frac{\sin^2 \theta}{\Omega(\theta, t)}$ и интегрируя по θ от нуля до $\pi/2$, получим

$$C^m(t) = \frac{1}{2\pi J_0(t)} \int_0^t M_0(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{1}{J_0(t)} \int_0^{\pi/2} \frac{\chi(\xi, t) \sin^2 \xi d\xi}{\Omega(\xi, t)}, \quad (13)$$

где

$$J_0(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\Phi(\theta, t)}{\Omega(\theta, t)} (\sin \theta)^{2-m} d\theta. \quad (14)$$

Подставляя значение $C^m(t)$ из (13) в соотношение (10) и используя при этом равенство (12), получим уравнение (4, 5)

$$\chi(\theta, t) + \int_0^t N(\theta, t, \tau) \chi(\theta, \tau) d\tau = F(\theta, t) + \int_0^{\pi/2} M(\xi, \theta, t) \chi(\xi, \tau) d\xi, \quad (15)$$

где

$$F(\theta, t) = \frac{\Phi(\theta, t) \sin^m \theta}{2\pi J_0(t)} \left[M_0(t) + \int_0^t M_0(\tau) K(t, \tau) d\tau \right],$$

$$M(\xi, \theta, t) = \frac{\Phi(\theta, t) \sin^m \theta \sin^2 \xi}{J_0(t)} \left[\frac{1}{\Omega(\xi, t)} - 1 \right]. \quad (16)$$

Из (10) и (12) при $t = 0$ следует, что

$$\chi(\theta, 0) = \frac{M_0(0)}{2\pi J(0)} \Phi(\theta, 0) \sin^m \theta, \quad (17)$$

где

$$J(t) = \int_0^{\pi} \Phi(\theta) (\sin \theta)^{2+m} d\theta. \quad (18)$$

Применив метод последовательных приближений, как в (4, 5), найдем точное решение полученного интегрального уравнения

$$\chi(\theta, t) = F(\theta, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(\theta, t), \quad (19)$$

где M и N соответственно интегральные операторы Фредгольма и Вольтерра

$$MQ = \int_0^{\pi} M(\xi, \theta, t) Q(\xi, t) d\xi, \quad NQ = \int_0^t N(\theta, t, \tau) Q(\theta, \tau) d\tau. \quad (20)$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ոլորման ժամանակ կոնական ձողի սողքը, որի նյութը օժտված է չկայունացված անհամասեռությամբ

Հիմնվելով լարումների և դեֆորմացիաների ստատիսթիստիկաների միջև սողքի ժառանգականության տիպի կապակցությունից (1), ստատիստիկորեն է կոնական անհամասեռ ձողի սողքը՝ ոլորման ժամանակ (1) կապակցության մեջ $\Phi(\theta, t)$ և $\Omega(\theta, t)$ ֆունկցիաները բնորոշում են նյութի անհամասեռությունը և բնութագրում են, որ փորձից հայտնի են

Հետևելով Վ. Վ. Սոկոլովսկուն¹ (1), ինչպես կոնի պլաստիկական ոլորման խնդրի ժամանակ, բնությունն արդյոք տարրեր միայն r, τ բաղադրիչը: Այդ դեպքում համասեռացված չկայուն համասեռություններից ստացվում է

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\chi(\theta, t)}{r^3}$$

որտեղ $\chi(\theta, t)$ որոշելի ֆունկցիա է θ -ից և t -ից կախված: Օգտվելով (5) համասեռության պայմանից և (1) ասինքությունից, $\chi(\theta, t)$ -ի համար ստանում ենք (10) վոլտերի տիպի ինտեգրալ հավասարումը, որտեղ բացի $\chi(\theta, t)$ -ից պարունակում է $C(t)$ անհայտ ֆունկցիան: Կիրառելով (12) պայմանը, $C(t)$ -արտահայտում ենք $\chi(\theta, t)$ -ի միջոցով: Տեղադրելով $C(t)$ -ի արժեքը (10) հավասարման մեջ ստանում ենք (15), կրկնակի կորիզով հավասարումը: Այդ հավասարման լուծումը, ինչպես մեր նախորդ հոդվածներում (4, 5) արվում է հաջորդական մոտեցման եղանակով:

$$\chi(\theta, t) = F(\theta, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(\theta, t)$$

Այստեղ $E(\theta, t)$ ազատ անդամն է, M և N համապատասխանաբար ֆրեդհոլմի և վոլտերի սպերաատորներն են (20):

Անհամասեռ ձողի ոլորման ժամանակ փոփոխման է ենթարկվում ոչ միայն դեֆորմացիան ինչպես համասեռի դեպքում այլև լարումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. М. Качанов, Теория ползучести, Физматгиз, М., 1960. ² Н. Х. Арутюнян и М. М. Манукян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIV, № 4 (1961). ³ В. В. Соколовский, Теория пластичности, ГИТТЛ, М.-Л., 1950. ⁴ М. А. Задоян, Известия АН СССР, (ОТН), Механика и машиностроение, № 4, 1961. ⁵ М. А. Задоян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIV, № 4 (1961).

М. Р. Магомедов

Функция Грина для волнового уравнения в случае двух диспергирующих сред

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. И. Алиханяном 4/XI 1962)

В предыдущей работе ⁽¹⁾ были получены асимптотические выражения для вектор-потенциала поля движущейся заряженной частицы при наличии двух диспергирующих сред. В настоящей статье дается строгий вывод точных решений волнового уравнения для вектор-потенциала поля в случае двух диспергирующих сред.

Для решения поставленной задачи вспомним, что решение уравнения для Фурье-компоненты вектор-потенциала, удовлетворяющее нулевым граничным условиям на бесконечности, записывается в виде:

$$\vec{A}_w = \frac{1}{C} \int \vec{j}_w(\vec{r}') G_k(\vec{r}/\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1)$$

где $G_k(\vec{r}|\vec{r})$ — функция Грина. В случае одной бесконечной среды ее можно выбрать в виде расходящейся сферической волны (что соответствует выбору запаздывающего потенциала ⁽²⁾):

$$g_h(R) = \frac{e^{ikhR}}{R}, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega), \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (2)$$

Обратимся теперь к построению функции Грина в случае двух сред. Первую среду будем характеризовать диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$, а вторую $\varepsilon_2(\omega)$.

Выберем систему координат так, чтобы плоскость xOy совпадала с границей раздела сред, а ось z была направлена из первой среды во вторую.

Для построения $G_R(\vec{r}/\vec{r}')$ рассмотрим отдельно два случая.

а) Источник находится в первой среде, т. е. $z' < 0$. Если бы первая среда занимала все пространство, то функция Грина определялась бы формулой (2) с $\varepsilon = \varepsilon_1(\omega)$. Однако в рассматриваемом случае она занимает только полупространство $z < 0$. Поэтому выражение (2) с $\varepsilon = \varepsilon_1(\omega)$ необходимо умножить на функцию $\vartheta(-z)$, которая равна единице при $z < 0$ и нулю при $z > 0$, и учесть еще наличие границы раздела сред. Для этого добавим к $g_{k_1}(R) \vartheta(-z)$ решение однородного уравнения, не имеющее особенностей в области $z < 0$. В качестве решения возьмем выражение

$$\vartheta(-z) \propto \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1}, \quad (3)$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \uparrow \varepsilon_1(\omega), \quad R_1 = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2},$$

α — произвольный коэффициент.

Ясно, что этот член не имеет особенностей при $z < 0$, $z' < 0$ и поэтому является решением однородного уравнения. Сумма вышеуказанных двух членов дает поле в полупространстве $z < 0$. Очевидно, однако, что в полупространстве $z > 0$ тоже должно существовать некоторое поле, так как в противном случае мы не сможем удовлетворить граничным условиям.

Это поле мы запишем в виде:

$$\vartheta(z) \tilde{\beta}' e^{ik_2 R} / R. \quad (4)$$

Как видно из этого выражения, оно не имеет особенностей при $z > 0$. Поэтому поле единичного источника в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$\vartheta(-z) e^{ik_1 R} / R + \alpha \vartheta(-z) e^{ik_1 R_1} / R_1 + \vartheta(z) \tilde{\beta}' e^{ik_2 R} / R. \quad (5)$$

б) Источник находится во второй среде, т. е. $z' > 0$. В этом случае мы поступаем совершенно так же, как и в первом случае. В результате получается выражение, отличающееся от (5) только заменой

$$\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2, \quad \vartheta(-z) \leftrightarrow \vartheta(z).$$

Для определения коэффициентов (5) воспользуемся интегральным представлением сферических волн (см. формулы 17, § 18 ⁽³⁾)

$$e^{ikR} / R = \frac{i}{2\pi} \int e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} + i\lambda |z-z'|} \frac{d\vec{z}}{\lambda}, \quad (6)$$

где $\vec{z}$, $\vec{q}$ — компоненты $\vec{k}$ и $\vec{r} - \vec{r}'$ в плоскости xy . Применяя эту формулу ко всем членам в выражении (5) и к аналогичному выражению при $z' > 0$ и, для простоты, сохраняя обозначения коэффициентов*, запишем поле при $z' < 0$ в виде:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \left\{ \vartheta(-z) \int e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} + i\lambda_1 |z-z'|} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} + \vartheta(-z) \int \alpha e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} - i\lambda_1 (z+z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} + \right. \\ \left. + \vartheta(z) \int \tilde{\beta}' e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} + i\lambda_2 (z-z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

а при $z' > 0$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \left\{ \vartheta(z) \int e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} + i\lambda_2 |z-z'|} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} + \vartheta(z) \int \alpha e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} + i\lambda_2 (z+z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} + \right. \\ \left. + \vartheta(-z) \int \tilde{\beta}' e^{i\vec{z} \cdot \vec{q} - i\lambda_1 (z-z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

* При таком переходе вторые и третьи члены в нижеписанных формулах не перестают удовлетворять однородному уравнению для функции Грина.

Из самого построения этих выражений видно, что они в отдельности должны удовлетворять граничным условиям и что полная функция Грина равна их сумме.

При определении коэффициентов в (7) и (8) мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда плотность тока имеет только компоненту, нормальную к границе раздела сред. Тогда вектор-потенциал будет иметь только компоненту A_z , через которую тангенциальные компоненты полей выражаются в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\vec{H}_{\omega\varphi} = -\frac{\partial A_{\omega z}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{E}_{\omega r} = -\frac{c}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 A_{\omega z}}{\partial \varphi \partial z} \vec{e}_r, \quad (9)$$

где $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_r$ — единичные векторы вдоль направлений φ и r . Непрерывность тангенциальной составляющей магнитного поля, согласно первому из двух уравнений (9) и формуле (1), эквивалентна непрерывности функции Грина при $z = 0$, т. е.

$$G_k(z < 0)|_{z=0} = G_k(z > 0)|_{z=0}, \quad (10a)$$

а непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля, согласно второму из уравнений (9) и формуле (1), эквивалентна выполнению равенства

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} G_k(z < 0)|_{z=0} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} G_k(z > 0)|_{z=0}. \quad (10b)$$

При этом принято во внимание, что $\frac{\partial A}{\partial \varphi} \sim A$ с точностью до коэффициента, не зависящего от свойств среды. Условия, аналогичные (10), должны выполняться и при $z' > 0$. Используя эти граничные условия, получим следующие выражения для коэффициентов в (7) и (8):

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{\varepsilon_2 \lambda_1 + \varepsilon_1 \lambda_2}, \quad \tilde{\beta}' = \tilde{\beta} e^{i\lambda_2 z' - i\lambda_1 z'}, \quad \tilde{\beta} = \frac{2\varepsilon_2 \lambda_2}{\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1}. \quad (11)$$

Коэффициенты α и β , где $\beta' = \beta e^{i\lambda_2 z' - i\lambda_1 z'}$, получаются из α и $\tilde{\beta}$ взаимной перестановкой индексов 1 и 2.

Подставляя найденные значения коэффициентов в (7) и (8) и группируя члены с одинаковыми $\vartheta(z)$ функциями, получим функцию Грина:

$$G_k(\vec{r}/\vec{r}') = \frac{i}{2\pi} \left\{ \vartheta(-z') \int e^{i(\vec{r} \cdot \vec{q} + \lambda_1(z-z'))} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} + \right. \\ \left. + \vartheta(-z') \int \alpha e^{i(\vec{r} \cdot \vec{q} - \lambda_1(z+z'))} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} + \vartheta(z') \int \beta e^{i(\vec{r} \cdot \vec{q} - \lambda_1 z + \lambda_2 z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_1} \right\}, \quad z < 0 \quad (12)$$

$$G_k(\vec{r}/\vec{r}') = \frac{i}{2\pi} \left\{ \vartheta(z') \int e^{i(\vec{r} \cdot \vec{q} + \lambda_2(z-z'))} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} + \right.$$

$$+ \vartheta(z') \int \tilde{\alpha} e^{i(\vec{z} \cdot \vec{q} + \lambda_2(z+z'))} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} + \vartheta(-z') \int \tilde{\beta} e^{i(\vec{z} \cdot \vec{q} + \lambda_2 z - \lambda_1 z')} \frac{d\vec{z}}{\lambda_2} \Big\} \quad z > 0 \quad (13)$$

В этих выражениях удобно перейти к угловым переменным. В выражении (12) положим

$$k_x = k_1 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad k_y = k_1 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \lambda_1 = k_1 \cos \vartheta. \quad (14)$$

После этого его можно привести к виду:

$$G_k(\vec{r} | \vec{r}') = \vartheta(-z') g_{k_1}(R) + \vartheta(-z') J_\alpha + \vartheta(z') J_\beta, \quad z < 0, \quad (15)$$

где

$$g_{k_1}(R) = e^{ik_1 R} / R,$$

$$J_\alpha = \frac{ik_1}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(u_1) e^{-ik_1(z+z')\cos\vartheta} \alpha(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (16)$$

$$J_\beta = \frac{ik_1}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(u_1) e^{-ik_1 z \cos \vartheta + ik_2 z'} \beta(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$\alpha = \frac{\lambda_1 \varepsilon_2 - \lambda_2 \varepsilon_1}{\lambda_1 \varepsilon_2 + \lambda_2 \varepsilon_1}, \quad \beta = \frac{2\varepsilon_1 \lambda_1}{\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1}, \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - k_2^2}, \quad (17)$$

$$u_1 = qk_1 \sin \vartheta, \quad z = k_1 \sin \vartheta.$$

$H_0^{(1)}(u)$ — функция Ханкеля первого рода. Под контуром Γ понимается контур, изображенный на фиг. 1.

В выражении (13) положим

$$k_x = k_2 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad k_y = k_2 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \lambda_2 = k_2 \cos \vartheta \quad (18)$$

и приведем его к виду:

$$G_k(\vec{r} | \vec{r}') = \vartheta(z') g_{k_2}(R) + \vartheta(z') J_{\tilde{\alpha}} + \vartheta(-z') J_{\tilde{\beta}}, \quad z > 0 \quad (19)$$

$$g_{k_2}(R) = e^{ik_2 R} / R,$$

$$J_{\tilde{\alpha}} = \frac{ik_2}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(u_2) e^{ik_2(z+z')\cos\vartheta} \tilde{\alpha}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

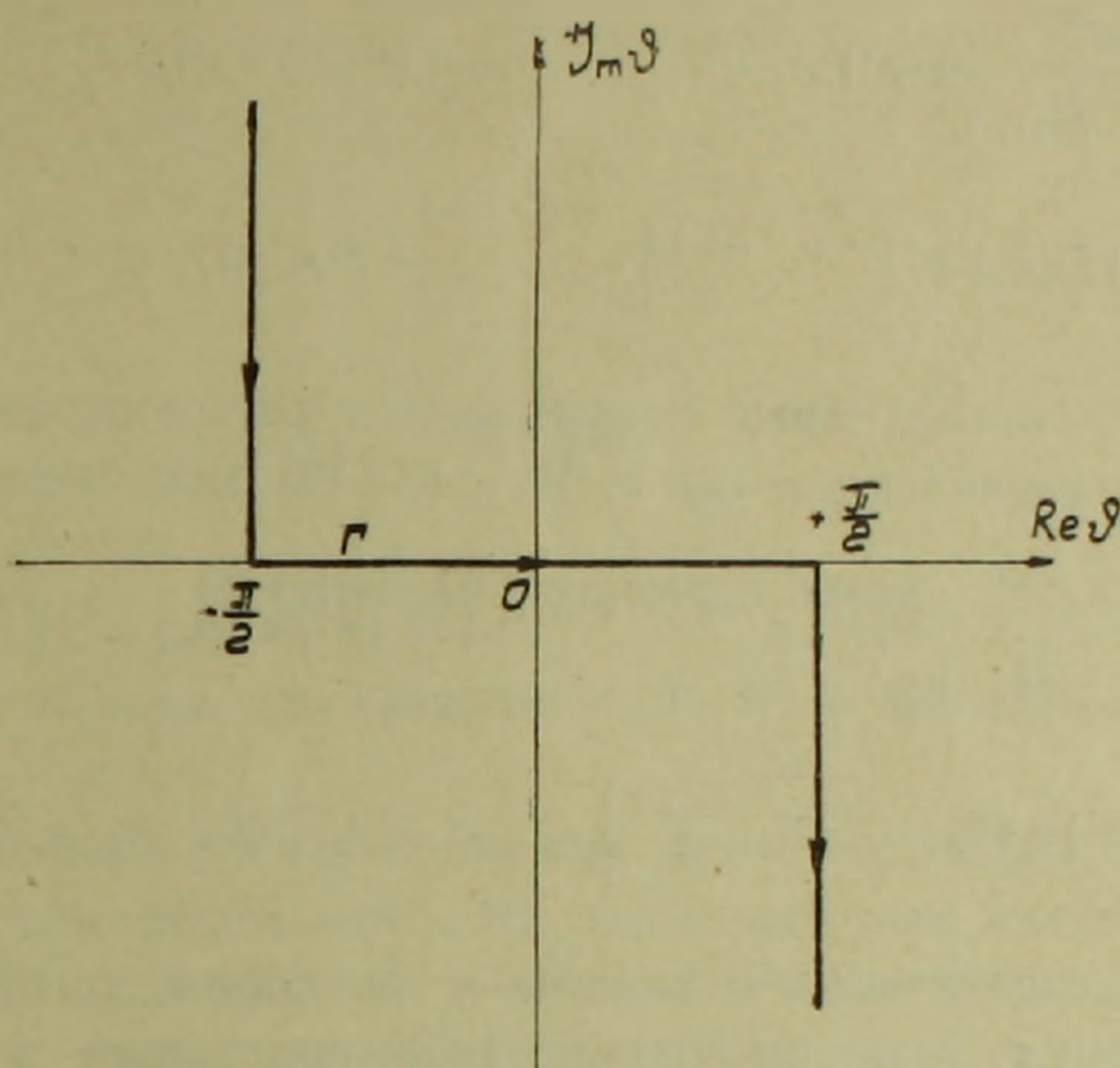
$$J_{\tilde{\beta}} = \frac{ik_2}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(u_2) e^{ik_2 z \cos \vartheta - ik_1 z'} \tilde{\beta}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (20)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\lambda_2 \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_2}{\lambda_2 \varepsilon_1 + \lambda_1 \varepsilon_2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{2\varepsilon_2 \lambda_2}{\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1}. \quad (21)$$

$$u_2 = qk_2 \sin \vartheta, \quad z = k_2 \sin \vartheta.$$

Выражения (15) и (19) полностью определяют функцию Грина для волнового уравнения для случая, когда плотность тока имеет только компоненту, нормальную к границе раздела сред.

Для получения вектор-потенциала достаточно подставить эту функцию Грина в формулу (1). Например, для заряда, движущегося по оси z со скоростью $V(t)$, будем иметь:



Фиг. 1.

$$A_{\omega t} = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \{ \vartheta(-z') g_{k_1}(R) + \vartheta(-z') J_2 + \vartheta(z') J_3 \} e^{i\omega t} dt, \quad (22)$$

$$z < 0, \quad z' = z(t)$$

и аналогичное выражение при $z > 0$.

Что касается скалярного потенциала, то при необходимости его можно получить из условия Лоренца:

$$\varphi_{\omega} = \frac{c}{i\omega\epsilon} \operatorname{div} \vec{A}_{\omega}. \quad (23)$$

Формулы (15) и (16) являются точными. Однако во многих случаях полезны также их асимптотические оценки. Для получения последних воспользуемся асимптотическим представлением функций Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(u) \simeq \sqrt{\frac{1}{\pi u}} e^{iu - i\frac{\pi}{4}}, \quad u \gg 1.$$

Кроме этого, предположим, что выполняется условие

$$d \ll R_0 \cos \vartheta_0, \quad d = \max \rho', \quad (24)$$

где ρ' — проекция радиуса-вектора заряда $\vec{r}'$ на плоскость xu , $R_0 = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $\rho = R_0 \sin \vartheta_0$, $z = \pm R_0 \cos \vartheta_0$ (в зависимости от того, в какой среде определяется поле). После этого применим ко всем членам в выражениях (15) и (19) метод перевала.

Интегралы типа J подробно исследованы в ⁽¹⁾. В первом приближении вместо (15) получаем:

$$G_k(\vec{r}/\vec{r}) = \frac{e^{ik_1 R_0}}{R_0} \left\{ \vartheta(z') e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' - \lambda_1 z')} + \vartheta(-z') \alpha(\vartheta_0) e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' + \lambda_1 z')} + \right. \\ \left. + \vartheta(z') \beta(\vartheta_0) e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' - \lambda_2 z')} \right\}, \quad z - z' < 0, \quad z < 0. \quad (25)$$

Здесь ϑ_0 — угол, составляемый направлением распространения волны с отрицательным направлением оси z . Вместо (19) получается выражение:

$$G_k(\vec{r}/\vec{r}) = \frac{e^{ik_2 R}}{R} \left\{ \vartheta(z') e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' + \lambda_2 z')} + \vartheta(z') \tilde{\alpha}(\vartheta_0) e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' - \lambda_2 z')} + \right. \\ \left. + \vartheta(z') \tilde{\beta}(\vartheta_0) e^{-i(\vec{x} \vec{\rho}' + \lambda_1 z')} \right\}, \quad z - z' > 0, \quad z > 0, \quad (26)$$

где ϑ_0 — угол, составляемый волновым вектором с положительным направлением оси z . Если выражение (25) подставить в формулу (1), то мы получим формулу, совпадающую с (3), полученной в работе ⁽¹⁾.

Условие применимости этих выражений, вытекающее из использования асимптотики функций Ханкеля, метода перевала и условия (24) заключается в выполнении неравенства:

$$R_0 \gg \frac{1}{z \sin \vartheta_0} + \frac{d}{\sin \vartheta_0}, \quad (27)$$

где z равно $k_1 \sin \vartheta$, при $z < 0$ и $k_2 \sin \vartheta_0$ при $z > 0$.

Автор выражает свою глубокую признательность Г. М. Гарибяну за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Физический институт ГКАЭ

Մ. Ռ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ

Երկու դիսպերսիոյ միջավայրերում ալիքային հաճախարուման Գրինի ֆունկցիան

Գրինի ֆունկցիայի միջոցով ստացված են անհամասեռ ալիքային հաճախարումաների լուծումը էլեկտրամագնիսական դաշտի վեկտորական և սկալյար պոտենցիալների համար երկու կիսաանվերջ դիէլեկտրիկներից բաղկացած միջավայրում:

Հանդամանորեն դիտարկված է դիէլեկտրիկների բաժանման սահմանին հոսանքների ուղղահայացության դեպքը: Բերված է նաև լուծումների ասիմպտոտիկ ձևը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. М. Гарибян, М. Р. Магомедов, ДАН АрмССР., т. XXXVI, № 2 (1963).
² Ф. М. Морс, Г. Фашбах, Методы теоретической физики, т. I, ИИЛ М, 1958. ³ Л. М. Береховских, Волны в слоистых средах, Академиздат, 1957.

Ян Ши

О спектре спиновых волн

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 26/XI 1962)

Энергетический спектр спиновых волн исследовался многими авторами как классическим методом, так и методом квантовой механики^(1,2). При этом исследовался в основном спектр вблизи магнитного насыщения, что имеет место лишь для длинных волн и при низких температурах.

В настоящей работе с помощью метода двухвременных функций Грина⁽³⁾ мы получим формулу для энергетического спектра спиновых волн с учетом геометрии кристаллической решетки, пригодную в широком интервале температур.

1. Пусть гамильтониан спиновой системы ферромагнетика состоит из членов зеемановской, обменной и дипольной энергий:

$$H = -\mu H \sum s_f^z - \frac{1}{2} \sum_{f \neq g} J_{fg} \mathbf{s}_f \mathbf{s}_g + \frac{1}{2} \sum_{f \neq g} D_{fg} [\mathbf{s}_f \mathbf{s}_g - 3(\mathbf{e}_{fg} \mathbf{s}_f \mathbf{e}_{fg} \mathbf{s}_g)], \quad (1)$$

где μ — магнетон Бора; H — статистическое внешнее поле; $\mathbf{s}_f$ — спиновый оператор электрона в узле f ; J_{fg} — обменный интеграл;

$\mathbf{e}_{fg} = \frac{\mathbf{r}_{fg}}{|\mathbf{r}_{fg}|}$; D_{fg} — коэффициент дипольного взаимодействия:

$$D_{fg} = \frac{\mu^2}{|\mathbf{r}_{fg}|^3}. \quad (2)$$

Переходя от спиновых операторов к операторам Паули $b_f, b_f^\dagger$ ⁽⁴⁾, имеем

$$\begin{aligned} H = & -N\mu H + \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B}) + 2 \sum_{f, g} \{F_{fg} b_g + \text{к. с.}\} + \\ & + \sum_{f, g} \{A_{fg} b_f^\dagger b_g + 2C_{fg} b_f b_g + (\mu H - \bar{A} - \bar{B}) n_f + \text{к. с.}\} - \\ & - 4 \sum_{f, g} \{F_{fg} b_f n_g + \text{к. с.}\} + 2 \sum_{f, g} (A_{fg} + B_{fg}) n_f n_g, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A_{fg} = -J_{fg} + \frac{1}{2} D_{fg} [3(e_{fg}^z)^2 - 1],$$

$$B_{fg} = -\frac{3}{2} D_{fg} [3(e_{fg}^z)^2 - 1],$$

$$C_{fg} = -\frac{3}{4} D_{fg} (e_{fg}^x - ie_{fg}^y)^2,$$

$$F_{fg} = -\frac{3}{2} D_{fg} e_{fg}^z (e_{fg}^x - ie_{fg}^y),$$

$$\bar{A} = \sum_{f, g} A_{fg}, \quad \bar{B} = \sum_{f, g} B_{fg}.$$

N — число узлов в решетке.

Вводя функцию Грина

$$G_{fg}^{(1)} \equiv \langle\langle b_f | b_g^+ \rangle\rangle, \quad G_{fg}^{(2)} \equiv \langle\langle b_f^+ | b_g^+ \rangle\rangle$$

и принимая обычную аппроксимацию

$$\langle\langle n_g b_g | b_h^+ \rangle\rangle \rightarrow \bar{n}_f G_{gh}^{(1)},$$

получаем замкнутую систему уравнений для Фурье-образцов $G_k^{(i)}$ ⁽²⁾, откуда нетрудно найти их полюса, которые определяют энергетический спектр спиновых волн:

$$E_k = \left\{ \left[2\mu H - 2\sigma \sum_r J_r (e^{irk} - 1) + \mu^2 \sigma \sum_r r^{-3} (3e_z^2 - 1) (e^{irk} + 2) \right]^2 - \right. \\ \left. - 9\mu^4 \sigma^2 \sum (rr')^{-3} (e_x - ie_y)^2 (e'_x + ie'_y)^2 e^{i(r+r')k} \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$; $e_x = r_x/r$, $r = |\mathbf{r}|$; суммирование проводится по всем узлам решетки $g \neq f$; а $\sigma = 1 - 2\bar{n}$ — относительный спин системы, которой определяется по формуле ⁽³⁾

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \text{cth} \frac{E_k}{\vartheta} dk, \quad (6)$$

где ϑ — абсолютная температура, помноженная на постоянную Больцмана.

2. Рассмотрим общую формулу спектра (5) отдельно для двух областей $\mathbf{k}$ -пространства: $k \ll \frac{1}{a}$ и $k \sim \frac{1}{a}$; (a — постоянная решетки). При

этом будем предполагать, что рассматриваемое ферромагнитное тело имеет форму эллипсоида с осями, параллельными координатным осям.

Случай $k \ll \frac{1}{a}$.

В этом случае, за исключением области малых, но не нулевых k ($k \sim \frac{1}{R}$, R — размер эллипсоида), переходя в (5) от суммирования к интегрированию, мы получаем

$$E_0 = 2\mu \sqrt{[H + M(N_k - N_z)][H + M(N_y - N_z)]}, \quad k=0 \quad (7)$$

$$E_k = 2\mu \sqrt{\left[H - MN_z + \frac{M}{\mu^2} \tilde{J}_k \right] \left[H - MN_z + \frac{M}{\mu^2} \tilde{J}_k + 4\pi M \sin^2 \theta_k \right]}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{R} \ll k \ll \frac{1}{a},$$

где N_z — фактор размагничивания эллипсоида; $M = \mu \pi n$ — средняя намагниченность образца при данной температуре;

$$\tilde{J}_k = v \sum J_r (1 - e^{irk}) \quad (9)$$

($v = \frac{V}{N}$); $\theta_k = \arcsin \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} / k \right)$ — угол между направлением волнового вектора k и направлением статического магнитного поля (осью z).

Полученные формулы (7) и (8) соответствуют классическим формулам Киттеля и Херринга—Киттеля. В отличие от известных формул для E_0 и E_k , полученных в приближении спиновых волн, в формулах (7) и (8) M — намагниченность при данной температуре, а не при абсолютном нуле. Кроме того, заметим, что в (8) „поле обменных сил“ прямо пропорционально M .

Случай $k \sim \frac{1}{a}$.

В этом случае суммы в (5) нельзя заменить интегралами. Если ввести обозначения

$$v \sum r^{-3} (3e_z^2 - 1) e^{irk} + 8\pi/3 = P_k \quad (10)$$

$$3v \sum r^{-3} (e_x - ie_y)^2 e^{irk} = Q_k,$$

то (5) можно записать в виде

$$E_k = \mu M \sqrt{(2H_i/M + 2\tilde{J}_k(\mu^2 + P_k)^2 - Q_k^2)}. \quad (11)$$

Значения P_k и Q_k нетрудно вычислить для трех типов кубической решетки⁽⁴⁾. Результаты расчета даны в табл. 1.

Полученный спектр спиновых волн на всем интервале значений волнового вектора от 0 до π/a представлен на фиг. 1. Там же показаны кривые, соответствующие формуле Херринга—Киттеля. Мы видим, что в области малых k ($ka \ll 1$) оба спектра практически совпадают.

Следует отметить, что хотя магнитное диполь-дипольное взаимодействие намного слабее по сравнению с обменным взаимодействием, но оно является анизотропным, в то время как обменное взаимодействие изотропно. Это приводит к тому, что спектр спиновых волн становится анизотропным даже без учета магнитокристаллографической анизотропии.

Таблица 1

Значения членов P_k и Q_k в формуле (11) для трех типов кубической решетки: простая (п.), гранецентрированная (г. ц.) и объемноцентрированная (о. ц.)

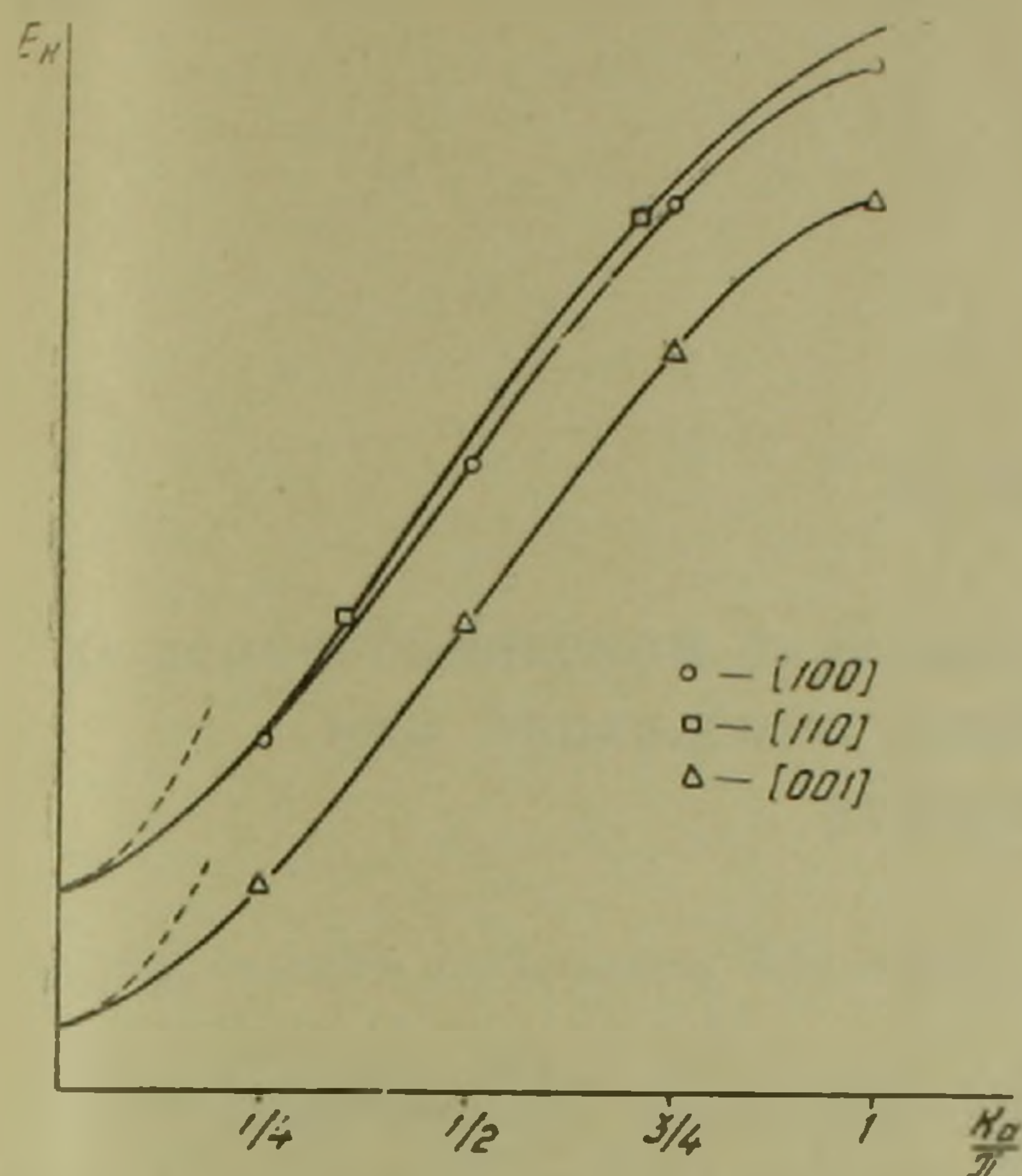
Направление волнового век- тора k	ka	P_k			Q_k		
		п.	г. ц.	о. ц.	п.	г. ц.	о. ц.
[001]	$\pi/4$	-0,20	0,56	0,92	0	0	0
	$\pi/2$	-0,66	1,96	3,76	0	0	0
	$3\pi/4$	-1,13	3,42	6,80	0	0	0
	π	-1,33	4,05	8,38	0	0	0
[101]	$\sqrt{2}\pi/4$	6,19	6,60	6,39	6,57	5,34	5,80
	$\sqrt{2}\pi/2$	5,97	7,71	6,66	7,20	2,01	5,16
	$3\sqrt{2}\pi/4$	5,76	9,51	6,93	7,80	3,40	4,35
	$\sqrt{2}\pi$	5,71	9,86	7,04	8,01	5,81	4,01
[100]	$\pi/4$	12,65	12,29	12,11	12,84	11,72	11,19
	$\pi/2$	12,88	11,59	11,02	13,56	9,63	7,26
	$3\pi/4$	13,12	10,86	9,17	14,25	7,44	2,36
	π	13,22	10,55	8,38	14,55	6,50	0
[110]	$\sqrt{2}\pi/4$	12,76	11,94	10,19	11,04	11,75	12,29
	$\sqrt{2}\pi/2$	13,17	9,72	11,82	6,90	8,53	11,61
	$3\sqrt{2}\pi/4$	13,58	6,12	11,28	2,16	3,10	10,91
	$\sqrt{2}\pi$	13,72	4,05	11,06	0	0	10,62

В частности, вырождение при $\theta_k = \text{const}$, имеющее место для малых k , снимается в области больших k . На фиг. 1 показано, когда k направлено по [001], для $k \parallel [100]$ и $k \parallel [110]$ (в обоих случаях $\theta_k = \pi/2$) мы имеем разные значения E_k в области $k \sim 1/a$. Это обстоятельство также хорошо видно из табл. 1. То же самое происходит при других значениях θ_k .

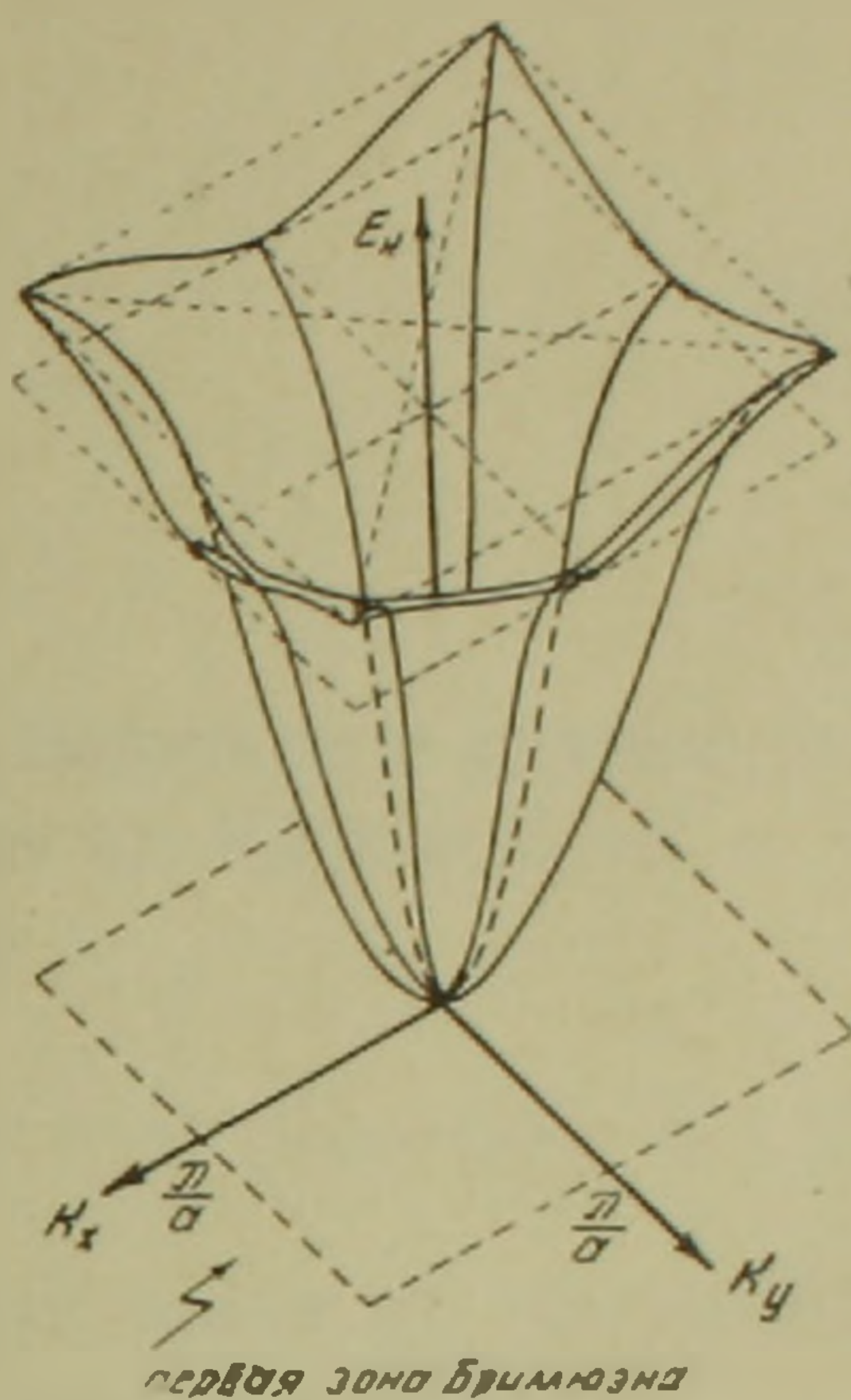
Для того чтобы дать наглядное представление спектра, на фиг. 2 показано E_k в зависимости от значения и ориентации k , лежащей в плоскости (001). Если в области малых k ($ka \ll 1$) поверхность E_k обладает цилиндрической симметрией (вырождение при $\theta_k = \pi/2$), то по мере возрастания k ($ka \sim 1$) цилиндрическая симметрия нарушается и поверхность становится „волнистой“.

Правда, крайне короткие спиновые волны быстро затухают. Но как показывает оценка в работе (5), при низких температурах их с

существование вполне реально. Тогда знание их спектра весьма полезно для понимания поведения ферромагнетика в полях очень коротких электромагнитных излучений (инфракрасная область).



Фиг. 1. Зависимость E_k от k для направлений $[001]$ $[100]$ $[110]$ в случае простой кубической решетки. Пунктирная линия — спектр по формуле Херринга—Киттеля.



Фиг. 2. Схематическое изображение поверхности E_k для k , лежащих в плоскости (001) в случае простой кубической решетки.

Автор выражает свою сердечную благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряну и С. В. Тябликову за помощь и постоянный интерес к работе.

Физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

ՅԱՆ ՇԻ

Սպինային ալիքների սպեկտրի մասին

Գրինի երկթամանակային ֆունկցիաների մեթոդով ստացված է բանաձև ֆերոմագնետիկում սպինային ալիքների սպեկտրի համար, հաշվի առնելով դիպոլ-դիպոլային փոխազդեցությունը ալիքային վեկտորի θ -ից մինչև π/a բոլոր արժեքների համար. բանաձևը պիտանի է ջերմաստիճանների լայն տիրույթի համար:

Երկար ալիքների ($k \ll 1/a$, a — ցանցի հաստատունն է) և ցածր ջերմաստիճանների սահմանային դեպքում ստացված բանաձևը հանդեպում է կիսատեղի և թերինդ-կիսատեղի հայտնի արտահայտություններին, իսկ կարճ ալիքների դեպքում ($k \sim 1/a$) մեր բանաձևը հաշվի է առնում բյուրեղային ցանցի երկրաչափական կառուցվածք և նշում է $\Omega_k = \text{const}$ ալիքների մեծ զանգվածը, որը տեղի ունի երկար ալիքների տիրույթում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Дж. Ван Краненденк и Дж. Ван Флек, Rev. Mod. Phys. **30**, 1 (1958). ² А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтор, М. И. Качанов, УФН, **71**, 534 (1960). ³ Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР, 126, 53 (1959). ⁴ М. Кохен и Ф. Кэффер, Phys. Rev. **99**, 1128 (1955). ⁵ Е. Н. Яковлев, ФТТ, **4**, 1589 (1962).

Ю. А. Лейе

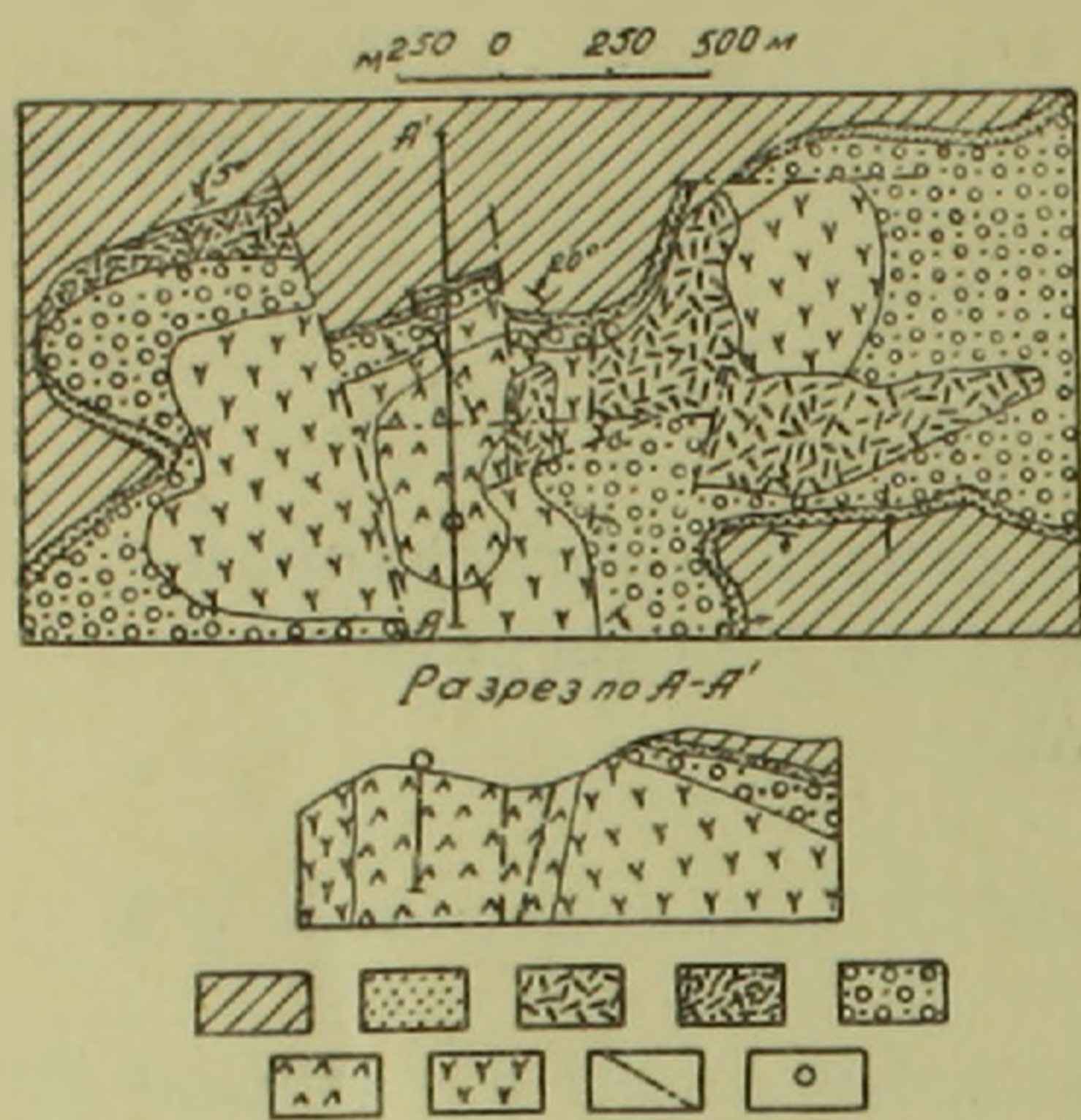
О верхнебайосском вулканическом аппарате и связанном с ним проявлении молибденита из Кафанского рудного поля

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магакьяном 19/X 1962)

Связь медно-колчеданного и полиметаллического оруденения Кафанского рудного поля с очагом среднеюрского вулканизма в настоящее время подтверждается многочисленными фактами (размещение промышленных рудных тел и гидротермально измененных пород типа вторичных кварцитов исключительно в пределах ниже-среднеюрского тектонического яруса; совпадение фаций глубинности оруденения и крайних дифференциатов среднеюрского вулканизма, представленных субвулканическими телами кварцевых порфиров; ясная „структурно-литологическая форма связи“ ⁽¹⁾ оруденения и упомянутых кварцевых порфиров, выражающаяся в использовании магмой и рудоносными растворами одних и тех же путей (разрывных нарушений) для своего проникновения; резко различное поведение разрывных рудоконтролирующих структур в нижнем и верхнем тектонических ярусах, позволяющее говорить о том, что формирование этих структур в основном было завершено в доверхнеюрское время; геохимическая близость рудовмещающих среднеюрских пород и руд; наличие четко выраженной гипогенной горизонтальной зональности руд и измененных пород, выражающейся в закономерной смене рудных формаций и фаций вторичных кварцитов к востоку от Саяд-Дашского хребта, где наиболее интенсивно проявлены субвулканические тела кварцевых порфиров ⁽²⁾; текстурно-структурные и минералогические особенности руд и др.), однако собственно экструзивные тела кварцевых порфиров, т. е. тела, выполняющие вулканические жерла ⁽³⁾, до сих пор для среднеюрского вулканизма Южной Армении не описаны.

В этой связи представляет интерес выход интенсивно измененных кварцевых порфиров, установленный в последние годы в западной части рудного поля (участок Дзорастан). Здесь секущее тело кварцевых порфиров (верхнебайосский возраст которых был доказан ранее ⁽⁴⁾), в отличие от всех других выходов, не контролируется разрывным нарушением, но проявляет явные признаки диапиризма по-

отношению к вмещающим породам. В плане это тело имеет неправильно-овальную форму (фиг. 1), длинная ось которого составляет более 500 м, короткая—около 300 м. Контакты описываемого тела с вмещающими породами очень резкие, крутопадающие. В некоторых местах отмечается падение контакта внутрь тела, что в последнее



Фиг. 1. Геологическая карта района верхнебайосского вулканического аппарата. В верхнем ряду (слева направо): туфоконгломераты (1_3^{oxf-km}), грубозернистые туфопесчаники (1_3^{oxf}), кварцевые альбитофиры экструзивные, кварцевые альбитофиры эффузивные, туфопесчаники верхней осадочной серии (1_2^{bj}). В нижнем ряду: кварцевые порфиры, кварц-плагиоклазовые порфириты (1_2^{bj}), разрывные нарушения, скважина, вскрывшая проявление молибденита.

ных крыльях поднятия, образовалось сквозное поперечное нарушение. Кроме того, через весь участок, в его центральной части, проходит продольное нарушение, которое обычно приурочивается к сводовым частям поднятий (⁵). Таким образом, взаимное расположение и характер разрывных нарушений не оставляют сомнения в том, что возникли они на диапировом поднятии, имевшем форму овала.

Породы, слагающие жерло, представлены эруптивными брекчиями кварцевых порфиров, превращенных во вторичные кварциты. Обломки в этих брекчиях резко преобладают над цементом, в результате чего соприкасаются друг с другом. Цементирующий материал представлен теми же кварцитизированными кварцевыми порфирами. В результате интенсивного изменения углы обломков, слагающих брекчии, сглаживаются и приобретают округлую форму, а порода в целом напоминает конгломерат. Микроскопическое изучение многочисленных шлифов подтвердило принадлежность породы к кварцевым

время подтверждается также данными буровой разведки и позволяет говорить не только о цилиндрической, но и о конической, сужающейся книзу, форме залегания. Признаки диапиризма проявляются в наблюдаемых здесь складчатых и разрывных нарушениях. Описываемое жерло залегает в центре куполовидной складки, несколько вытянутой в широтном направлении и четко фиксирующейся, на фоне моноклинали, по падению вмещающих жерло пород радиально, во все стороны от последнего. Разрывные нарушения, развитые на этой складке, еще больше подчеркивают ее диапировую природу. Это нормальные поперечные и продольные сбросы, судя по крутым углам падения которых можно заключить, что они возникли за счет трещин отрыва. Наибольшим развитием здесь пользуются радиальные сбросы. В западной части (фиг. 1), видимо, от слияния двух радиальных трещин, первоначально расположенных на различ-

порфирам. В относительно слабо измененных образцах порода обнаруживает порфировую структуру с аллотриоморфнозернистой основной массой, состоящей из кварц-полевошпатового вещества и микролитов плагиоклаза. Во вкрапленниках плагиоклаз (олигоклаз-альбит) в призматических зернах полисинтетически сдвойникованных; калиевый полевой шпат в изометричных, или таблитчатых, зернах, нередко в сростках с кварцем и плагиоклазом; кварц в изометричных, сильно трещиноватых и нередко корродированных зернах.

Полевые шпаты и основная масса обычно интенсивно пелитизированы, серицитизированы и окварцованы.

Наиболее измененные разности, первоначальный состав которых угадывается только по наличию кварцевых „глазков“, представляют собой вторичные кварциты с примесью (в различных количествах) водных алюмосиликатов, видимо каолинита (диккита), галлуазита, возможно пиррофиллита и др. В этих случаях структура породы тонкозернистая или порфиробластовая с микрогранобластовой основной массой. Основная ткань породы представляет собой тонкозернистый агрегат кварца с примесью бесцветного изотропного алюмосиликата. На фоне этой массы, помимо зерен первичного кварца, выделяются мелкие (до 3 мм) желваки алюмосиликата, которые придают породе порфировый облик. Кроме изотропных скоплений, встречаются также агрегаты со сферолитовым строением. Промежутки между зернами кварца и сферолитовыми алюмосиликатами выполнены бесцветными чешуйчатыми индивидами с низким преломлением и двупреломлением. Рудный минерал, в шлифах, представлен пиритом и гидроокислами железа (в образцах, взятых с поверхности).

Примерно в центральной части описанного экструзивного тела была пробурена вертикальная скважина, которая свыше 200 м прошла по брекчированным вторичным кварцитам, выполняющим жерло, и в них же была остановлена. При просмотре керна этой скважины, помимо интенсивной вкрапленности пирита, отмеченной на отдельных участках, на глубине 180 м Л. В. Оганесяном был обнаружен прожилок молибденита. Этот прожилок, мощностью в 0,5—1,0 мм и только в участках раздува достигающий 3—3,5 мм, проходит почти параллельно оси скважины (под углом в 15—20°) и характеризуется сильной извилистостью, местами приспособляясь к контакту обломков и цементирующей массы брекчий или к контакту участков в различной степени измененных, а местами пересекая их.

Первый молибденит из Кафанского рудного поля, безусловно заслуживающий самого тщательного изучения и описания, для нас интересен тем, что он обнаружен в жерле верхнебайосского вулкана. Это является еще одним подтверждением парагенетической связи оруденения Кафанского рудного поля со среднеюрским вулканизмом, ибо в данном случае мы имеем типичную собственно жерловую структуру месторождения⁽³⁾, обусловленную „...проникновением рудоносных растворов по путям вулканических продуктов в жерлах...“

(⁶), тогда как до сих пор для Кафана были известны лишь внежер-
ловые, линейно-трещинные структуры (³). Показательно также, с
точки зрения концентрической зональности оруденения, идущей, для
месторождений данного типа, от центров вулканизма, что в описан-
ном жерле было встречено именно молибденовое, а не медное или по-
лиметаллическое проявление. Одновременно нужно отметить, что
пространственно оно связано с более высокотемпературной фацией
вторичных кварцитов (⁷), тогда как медное и полиметаллическое ору-
днения пространственно тяготеют соответственно к монокварцитовой
или кварцево-серицитовой и серицитовой и алунитовой фациям вто-
ричных кварцитов.

Научно-исследовательский горнометаллургический
институт СХХ Армянской ССР

ՅՈՒ. Ա. ԼԵՅԵ

Ղափանի հանքադաշտի վերին բալուխի հրաբխային ապարատի և նրա հետ կապված մոլիբդենիտի երևակման մասին

Ղափանի հանքադաշտի պղինձ-կոլչեղանային և բազմամետաղային հանքայնացման կապը
միջին յուրայի հրաբխային ոչախի հետ այժմ հաստատվում է բազմաթիվ փաստերով. բալ-
ւինչև այժմ տիպիկ էքստրուզիվ մարմիններ (3) Հարավային Հայաստանի միջին յուրայի
վուլկանիզմի համար չեն նկարագրված: Հողվածում բերվում է վերին բալուխի հասակի կվարցա-
յին պորֆիրների հրաբխային ապարատի նկարագրությունը: Նշված ապարտների ելքի պատ-
կանելիությունը կոկորդային ֆացիային ապացուցվում է նրա տեղադրման ձևով, դիապիրա-
յին ծագման պրեթածե ծալքի, նորմալ վարնետրների առկայությամբ, վերջիններիս նման կա-
ռուցվածքներին հատուկ փոխադարձ դասավորությամբ, ինչպես նաև հրաբխային կոկորդ-
կազմող ապարների բնույթով, որոնք ներկայացված են երկրորդական կվարցիտների վերածված
կվարցային պորֆիրների էրուպտիվ բրեկչիաներով:

Այդ էքստրուզիվում փորված հորատանցքի կերնի դիտման ժամանակ Լ. Վ. Հովհաննիս-
յանը գտել է մոլիբդենիտի երակիկ: Ղափանի հանքադաշտում մոլիբդենիտի առաջին հայտնա-
գործումը, այն էլ էքստրուզիվ մարմնում, հեղինակի կարծիքով, հանդիսանում է հրաբխակա-
նության հետ հանքայնացման կապը հաստատող ևս մեկ ապացույց, բանի որ այն իրենից ներ-
կայացնում է հանքավայրերի տիպիկ կոկորդային կառուցվածք, որոնց առաջացումը կապված
է «...հրաբխային կոկորդները լցնող ապարտներում հանքային լուծույթների թափանցմամբ...»
(6): Մոլիբդենիտի հայտնաբերումը հատկապես հրաբխի կոկորդում բացատրվում է նաև հան-
քայնացման հորիզոնական գոնայականության առկայությամբ, որ նման տիպի հանքավայրերի
համար բնորոշ է վերջինիս կոնցենտրիկ դասավորությունը հրաբխային կենտրոնների շուրջը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. Н. Котляр, Сборник научных трудов МИЦМЗ, № 25, Металлургиздат, 1955. ² В. Н. Котляр, А. Л. Додин, Цветные металлы, № 7, 1937. ³ В. Н. Котляр, Изв. ВУЗов, Геология и разведка, № 9, 1960. ⁴ Ю. А. Лейе, ДАН АрмССР, т. XXIX, № 3 (1959). ⁵ В. В. Белоусов, Основные вопросы геотектоники, Госгеолтехиздат, 1954. ⁶ В. Н. Котляр, ЗВМО, ч. ХСІ, вып. 4, 1952. ⁷ Н. И. Наковник, Изв. АН СССР, сер. геол., № 1, 1947.

РАДИОГЕОЛОГИЯ

Р. Х. Гукасян

**Определение абсолютного возраста молодых интрузивов
Rb—Sr методом на примере Мегринского плутона
Армянской ССР**

(Представлено академиком АН Армянской ССР К. Н. Паффенгольцем 29/XI 1962)

Важнейшим моментом определения абсолютного возраста геологических формаций калий-аргоновым методом является сохранность радиогенного аргона в минералах, так как при оценке возраста предполагается, что весь образовавшийся аргон в течение геологической истории минерала сохранился в кристаллической решетке и были исключены какие-либо его потери.

Различные наложенные геологические процессы, сопровождающиеся повышением температуры и перекристаллизацией (метаморфизм, явление метасоматоза и т. д.), могут вызвать потерю аргона, что, естественно, приводит к занижению возраста. Существуют многочисленные геологические критерии, которые следует использовать при оценке предположения о сохранности аргона. Однако не всегда возможно только геологическими данными однозначно решить вопрос сохранности радиогенного аргона в минерале. Более надежным доказательством этого является согласованность возрастов, полученная калий-аргоновым методом на различных геологически одновозрастных минералах. По мнению некоторых американских исследователей (¹), это является достаточно хорошим доказательством сохранности аргона в минерале, если при комнатной температуре не происходит диффузии аргона по кристаллической решетке минерала. Однако не всегда удается найти сосуществующие слюды, лучший материал для определения возраста магматических образований калий-аргоновым методом, а калиевые полевые шпаты, как правило, теряют часть своего радиогенного аргона (в среднем 25—30%) и, следовательно, дают заниженные результаты по сравнению со слюдой. Поэтому определения возраста калий-аргоновым методом желательно контролировать каким-либо другим методом.

Геохимическое родство калия и рубидия (рубидий изоморфно замещает калий в калиевых минералах) позволяет определить воз-

раст калиевых минералов двумя независимыми методами — К — Аг и Rb — Sr. Совпадение цифр возраста по этим двум методам будет наилучшим доказательством сохранности радиогенного аргона и надежности полученного значения возраста.

Rb — Sr метод определения возраста, предложенный В. М. Гольдшмидтом еще в 1937 году, получил большое распространение лишь в последние годы. Это было вызвано экспериментальными трудностями, с которыми связано точное определение малых количеств рубидия и стронция. Получение меченых атомов и появление метода изотопного разбавления значительно расширили аналитические возможности точного определения этих элементов, что послужило толчком для развития рубидий-стронциевого метода.

В связи с этим мы сделали попытку определить абсолютный возраст некоторых молодых (третичных) интрузивных пород Мегринского плутона Армянской ССР рубидий-стронциевым методом и сопоставить полученные данные с данными абсолютного возраста калий-аргонового метода. Объектом для этого исследования служили слюды из пегматитов щелочных пород Мегринского интрузивного комплекса, широко развитых в метаморфической толще палеозоя в районе сел. Шеачидзор. Исходя из общих геохимических принципов, пегматитовые слюды должны содержать мало обычного (нерадиогенного) стронция, что весьма важно при определении возраста этим методом. В одном случае определен возраст биотита из монцонитовых пород плутона района пос. Каджаран.

Содержание аргона определялось обычным объемным методом на приборе Хлопина—Герлинга. Доля радиогенного Ar^{40} в общем измеренном аргоне устанавливалась на масс-спектрометре типа МС-2 двухлучевым методом измерений. Содержание калия определялось химическим ускоренным перхлоратным методом, разработанным М. Л. Яценко и Э. С. Варшавской в лаборатории геологии докембрия АН СССР.

Содержание Rb^{87} и Sr^{87} определялось методом изотопного разбавления. В качестве индикаторов использовались растворы чистых солей RbCl и $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$, соответственно обогащенные изотопами Rb^{87} и Sr^{84} . Титр этих растворов определялся как весовым путем, так и методом изотопного разбавления, с использованием в качестве стандартов растворов обычных солей рубидия и стронция с точно известной концентрацией. Химическая подготовка образца для масс-спектрометрических измерений подробно описана Э. К. Герлингом с сотр. (2) и Г. В. Овчинниковой (3). Измерение рубидия и стронция производилось на масс-спектрометре типа МИ-1305, однолучевым методом измерений. Для изотопного анализа рубидия использовался обычный одноленточный источник, вольфрамовая ленточка которого перед нанесением образца отжигалась в вакууме и проверялась на масс-спектрометре на отсутствие в ней рубидия. Для изотопного анализа стронция использовался двухленточный источник, одна из лент которого служила испарителем вещества, а другая ионизатором.

Полученные аналитические данные, необходимые для вычисления K—A и Rb—Sr возрастов, приведены в табл. 1 и 2. В табл. 2 приводится также содержание обычного Sr, процент радиогенного Sr^{87} от общего Sr и доля радиогенного Sr^{87} в суммарном Sr^{87} .

Таблица 1

№ обр.	‰ K	$\text{K}^{40} \text{ z/z} \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{Ar}^{40} \text{ радиог.}}{\text{Ar}^{40} \text{ суммар.}}$	$\text{Ar}^{40} \text{ рад. см/z} \times 10^{-6}$	$\text{Ar}^{40} \text{ рад. z/z} \times 10^{-9}$	$\text{Ar}^{40}/\text{K}^{40} \times 10^{-3}$
81	$8,16 \pm 0,08$	9,96	0,490	11,93		
	$8,16 \pm 0,08$	9,96	0,485	11,52		
	$8,16 \pm 0,08$	9,96	0,690	12,62		
				ср. $12,02 \pm 0,40$	21,50	2,16.
126—М	$8,41 \pm 0,09$	10,26	0,651	$11,55 \pm 0,46$		
	$8,41 \pm 0,09$	10,26	0,350	$12,60 \pm 0,63$		
				ср. $12,08 \pm 0,52$	21,60	2,11
125—Б	$7,51 \pm 0,08$	9,16	0,580	$11,25 \pm 0,60$	20,20	2,20.
125—М	$8,24 \pm 0,08$	10,05	0,325	$11,50 \pm 1,00$	20,60	2,05.
1	$7,25 \pm 0,07$	8,84	0,345	7,28		
	$7,25 \pm 0,07$	8,84	0,430	8,28		
	$7,56 \pm 0,08$	9,22	0,330	$7,87 \pm 0,61$		
				ср. $7,81 \pm 0,35$	13,96	1,55.

Ошибка определения радиогенного Ar^{40} складывается из ошибки объемного измерения всего аргона и ошибки масс-спектрометрической поправки на воздушный аргон. Ошибка масс-спектрометрической поправки сильно зависит от количества воздушного аргона в пробе. При содержании в пробе около 75‰ воздушного аргона эта ошибка достигает уже 12‰ (если $\text{Ar}^{40}/\text{Ar}^{36}$ отношение эталона измерено с точностью $\pm 1\%$, а образца с точностью $\pm 2,5\%$). При содержании радиогенного аргона-40 в пробе около 50‰ эта ошибка сравнительно небольшая — примерно $\pm 3,5\%$. Погрешность объемного измерения общего аргона составляет примерно $\pm 3\%$. Точность определения содержания калия в слюдах оценивается $\pm 1—1,5\%$. Общая ошибка определения возраста в среднем составляет $\pm 10\%$.

Таблица 2

№ обр.	Навеска в г		‰ Rb^{87}	Sr обыч. $\text{z/z} \times 10^{-6}$	‰ Sr^{87} рад. 10^{-5}	‰ Sr рад. от общ. Sr	$\frac{\text{Sr}^{87} \text{ рад.}}{\text{Sr}^{87} \text{ сумм.}}$
	для Rb	для Sr					
81	0,10	20,0	$0,0324 \pm 0,0004$	9,57	$2,10 \pm 0,25$	2,15	0,239
126—М	0,10	5,0	$0,0409 \pm 0,0005$	2,20	$2,30 \pm 0,16$	9,49	0,597
125—М	0,10	2,0	$0,0388 \pm 0,0004$	4,77	$2,10 \pm 0,13$	4,22	0,386
1	0,10	2,0	$0,0155 \pm 0,0002$	3,57	0,682	1,87	0,210

Оценка погрешности определения рубидия показала, что точность определения рубидия составляет около $\pm 1,5\%$. Что касается точности определения радиогенного Sr^{87} , то здесь ошибка возрастает с увеличением содержания обычного Sr в образце. Однако, как показала Г. В. Овчинникова (³), при работе методом изотопного разбавления при содержании радиогенного Sr^{87} около $0,5\%$ от общего Sr погрешность определения радиогенного Sr^{87} равна еще $\pm 15\%$. При содержании радиогенного Sr^{87} от общего Sr около 2% эта ошибка составляет всего $\pm 5-6\%$. Согласно Л. Калпу (¹), возвратные данные, полученные на образцах с большим содержанием обычного Sr , малонадежны, вследствие изменения изотопного состава Sr в природе. Указывая на то, что первоначальная изотопная распространенность Sr^{87} в гранитах и гранитных пегматитах за последние 3 млрд. лет, вероятно, изменилась на 3% , Л. Калп делает вывод, что в тех образцах, где содержание радиогенного Sr^{87} от общего Sr ниже 25% , колебания изотопного состава обычного Sr являются серьезным источником ошибок при определении радиогенного Sr^{87} . Как видно из табл. 2, в наших образцах содержание радиогенного Sr^{87} от общего Sr максимально достигает $9,49\%$ (обр. № 126—М), что значительно ниже указанного Калпом предельного значения. Однако здесь следует указать, что для молодых геологических образований эти колебания изотопного состава обычного Sr не могут быть источником больших погрешностей, так как при вычислении содержания радиогенного Sr^{87} используется изотопный состав современного стронция. Точность определения возраста по Rb-Sr методу составляет примерно $\pm 10\%$.

Вычисление возрастов производилось по формулам

$$t_{\text{K-Ar}} = \frac{1}{\lambda_e + \lambda_\beta} \ln \left(1 + \frac{\lambda_e + \lambda_\beta}{\lambda_e} \frac{\text{Ar}^{40}}{\text{K}^{40}} \right) \quad \text{и} \quad t_{\text{Rb-Sr}} = \frac{\% \text{ Sr}^{87} \text{ рад}}{\% \text{ Rb}^{87} \cdot \lambda},$$

где $\lambda_e = 5,5 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ — константа электронного захвата K^{40}

$\lambda_\beta = 4,72 \times 10^{-10} \text{ год}^{-1}$ — константа β распада K^{40}

$\lambda = 1,39 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ — константа β распада Rb^{87} .

Принятое нами значение λ_e получено Э. К. Герлингом (⁴) геохимическим методом и мало отличается от общепринятого в настоящее время значения $\lambda_e = 5,85 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ (полагают, что это значение отличается от истинного значения в пределах $\pm 5\%$). Для вычисления количества K^{40} исходили из установленного Ниром отношения $\text{K}^{40} = 1,22 \times 10^{-4} \text{ г/г K}$ (весовые проценты). Значение константы распада Rb^{87} $\lambda = 1,39 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ в настоящее время считается наиболее надежным. Это значение получено Олдричем, Везериллом и др. в 1956 году (⁵) геохимическим путем с помощью метода изотопного разбавления. В этом же году Хустером и Раушем (⁶) такое же значение получено непосредственно счетным методом. В 1959 году Г. В. Овчинниковой (³) получено значение $\lambda = 1,38 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$, что хо-

...согласуется с предыдущими двумя определениями. Изотопная распространенность $Rb^{87} = 0,283 \text{ з/з } Rb$.

Полученные нами значения возраста сведены в табл. 3. Как видно из таблицы, значения возраста по двум методам, в пределах экспериментальной ошибки, находятся в замечательном согласии. Сходимость результатов, полученных этими двумя различными методами, является довольно убедительным доказательством отсутствия потерь как радиогенного аргона, так и стронция за время, истекшее с момента кристаллизации этих минералов. В противном случае, т. е. при наличии утечки, следовало ожидать, что скорости миграции таких совершенно различных атомов, как Ar^{40} и Sr^{87} , были бы различны.

Таблица 3

№	Название минерала	Место взятия	Возраст в млн. лет	
			K—Ar	Rb—Sr
81	Мусковит из турмалин-мусковитовых пегматитов	Западная окраина с. Шванидзор	39 ± 2	46 ± 5
126—М	Мусковит из нефелино-сиенитовых пегматитов	с. Шванидзор, разв. Тегут	38 ± 3	41 ± 3
125—Б	Биотит из биотит-мусковитовых пегматитов	" "	40 ± 3	—
125—М	Мусковит из биотит-мусковитовых пегматитов	" "	37 ± 4	39 ± 3
1	Биотит из монцонитов	пос. Каджаран, каменоломня	28 ± 3	31

Полученное значение возраста по многим шкалам геологического времени, в частности по шкале, принятой IX сессией комиссии по определению абсолютного возраста геологических формаций, соответствует верхнему эоцену, что указывает на верхнеэоценовый возраст начала формирования Мегринского плутона (первая фаза внедрения).

Первые результаты определения возраста третичных пород Мегринского плутона Rb—Sr методом показывают на принципиальную возможность применения этого метода для определения возраста молодых магматических образований.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессору Э. К. Герлингу и М. Л. Ященко за ценные советы, указания и помощь при выполнении настоящей работы, а также Дж. Мкртчян, принимавшей участие в химической обработке двух образцов.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Н. Н. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Երիտասարդ ինժեներականների բաղադրակ հասակի որոշումը Rb—Sr մեթոդով Հայկական ՍՍՀ Մեղրու պլուտոնի օրինակով

Երկրաբանական ֆորմացիաների բաղադրակ հասակի որոշման K—Ar մեթոդի հիմնական հանգամանքներից մեկը ռադիոգեն արգոնի պահպանվածությունն է միներալների

մեջ, քանի որ հասակի զնահատման ժամանակ ենթադրվում է, որ K^{40} սաղխակաթիվ բաշխումից ստացւած արդոնք ամբողջութեամբ մնացել է միներալի բյուրեղական ցանցում: Տարբեր երկրաբանական պրոցեսներ՝ կապված ջերմաստիճանի բարձրացման և վերաբյուրեղացման հետ կարող են առաջ բերել, երբեմն նշանակալի չափի, արդոնի կորուստ, որը բնականորաբար հանդեպնում է հասակի ցածրացմանը: Գոյութեան ունեն երկրաբանական բնույթի մի շարք չափանիշներ, որոնք անհրաժեշտ է օգտագործել արդոնի պահպանվածութեան ենթադրութեանը զնահատելու ժամանակ: Սակայն, միայն երկրաբանական տվյալներով, միշտ չէ, որ հնարավոր է միարժեք որոշել սաղխոցեն արդոնի պահպանվածութեան աստիճանը միներալում: Այդ պատճառով էլ ցանկալի է և անհրաժեշտ, K —մեթոդով հասակի որոշումը վերահսկել հասակի որոշման մի սրեւ ալ մեթոդով: Կախով և սուբիդիումի գեոքիմիական մերձավորութեանը (սուբիդիումը իզոմորֆ տեղակալում է կալիումի մին կալիումային միներալներում) հնարավորութեան է տալիս կալիումային միներալների հասակը որոշել երկու անկախ մեթոդով՝ K — Ar և Rb — Sr : Բացարձակ հասակի որոշման Rb — Sr մեթոդը լայն տարածում է ստացել միայն վերջին տարիներում, որը կապված է նշակիր առումների ստացման և իզոտոպային խառնման մեթոդի երկան զարգացման:

Ելնելով վերը նշվածից, փորձ է արված մի քանի երկատար (երրորդական հասակի) ինտրուզիվ ապառների K — Ar հասակը վերահսկել բացարձակ հասակի որոշման Rb — Sr մեթոդով: Առումնասիրութեան են ենթարկվել Մեզրու ինտրուզիվ կոմպլեքսի ալկալային ապառների պեգմատիտների փայլարները, որոնք լայն տարածում ունեն Շվանիձոր գյուղի շրջակայքի պալեոգոյան հասակի մետամորֆային ճերատախմբում: Համաձայն գեոքիմիական ընդհանուր սկզբունքների պեգմատիտային փայլարները պետք է պարունակեն քիչ սովորական (ոչ սաղխոցեն) ստրոնցիում, որը շատ կարեւոր է Rb^{87} քայքայման արդյունքի՝ սաղխոցեն Sr^{87} աննշան քանակները մեծ ճշտութեամբ որոշելու համար:

Արդոնի որոշումը կատարվել է ծավալային մեթոդով Խլոպինի—Գերլինգի սարքավորման վրա: Մաղիոցեն արդոնի քանակը ընդհանուր արդոնի մեջ որոշվել է $MC-2M$ մասն-սպեկտրոմետրի միջոցով: Կալիումի քանակը որոշվել է պերիյուրատային մեթոդով:

Rb^{87} և Sr^{87} քանակութեանը որոշվել է իզոտոպային խառնման եղանակով $MM-130$ մասն-սպեկտրոմետրի միջոցով: Որպես ինդիկատորներ օգտագործվել են $RbCl$ և $Sr(NO_3)_2$ մաքուր աղեր, համապատասխանաբար հարստացված Rb^{87} և Sr^{84} իզոտոպներով:

Երկու մեթոդներով ստացված հասակի տվյալները, փորձի սխալի պայմաններում գտնվում են հիանալի համաձայնութեան մեջ, որը սաղխոցեն արդոնի պահպանվածութեան և ստացված թվերի հաստատութեան բավականին համոզեցուցիչ ապացույց է:

Ստացված թվերը, ըստ բացարձակ տարեթվարկման գեոքրոնոլոգիական մի շարք աղյուսակների, համապատասխանում են վերին էոցենին, որը քույր է ալիա Մեզրու ինտրուզիվ զանգվածի ձևավորման վերին էոցենային հասակը լեբզրման տուջին ֆազային:

Մեզրու ինտրուզիվ զանգվածի օրինակով Rb — Sr մեթոդով երրորդական ժամանակաշրջանի ապառների հասակի որոշումը ցույց է տալիս, որ այդ մեթոդը սկզբունքորեն հնարավոր է կիրառել երկատար (մագմատիկ ֆորմացիաների) հասակը որոշելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ E. B. Gast. Дж. Л. Калл и Л. Е. Мюнг, Trans. Am. Geophys. Union, 39, 1958.
- ² Э. К. Герлинг, М. Л. Яценко, Л. К. Левский, Г. В. Овчинникова, Геохимия, № 6, 1958.
- ³ Г. В. Овчинникова, Геохимия, № 5, 1960.
- ⁴ Э. К. Герлинг, Геохимия, № 4, 1956.
- ⁵ Л. Т. Олдрич, Г. В. Везерилл, Г. Р. Тулмон, Г. Л. Девис, Phys. Rev., 103, 1956, стр. 1045—1047.
- ⁶ Л. Т. Олдрич и Г. В. Везерилл, Ann. Rev. Nuc. Sci., 8, 1958.

СТРАТИГРАФИЯ

С. П. Бальян

Новые данные о древнем оледенении Армении

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. С. Мкртчяном 14 XI 1962)

Вопросу о древнем оледенении Армянского нагорья и Малого Кавказа посвящено много исследований, причем о характере, числе и границах его распространения имеются разноречивые представления.

К. Н. Паффенгольц⁽¹⁾, А. Л. Рейнгарт⁽²⁾, Л. А. Варданянц⁽³⁾, А. А. Габриелян⁽⁴⁾, А. Т. Аслanian, С. П. Бальян^(5,6) указывают на наличие следов многократных оледенений. Другие исследователи: Б. Л. Личков⁽⁷⁾, Н. В. Думитрашко⁽⁸⁾, Г. К. Габриелян⁽⁹⁾, Е. А. Нефедьева⁽¹⁰⁾, Б. А. Антонов⁽¹¹⁾ и др. считают, что высокогорные районы Армении подверглись только одному оледенению, которое имело карово-долинный характер. В дальнейшем Н. В. Думитрашко несколько изменила свою точку зрения, допуская возможность средне-четвертичного оледенения.

Спорным узлом в решении вопроса древнего оледенения долгое время служили крупные вулканические массивы Арагац и Гегамское нагорье. К. Н. Паффенгольц и А. Л. Рейнгарт здесь установили два различных по возрасту и типу оледенения. Первое, соответствующее риссу, имело покровный характер, а второе — вюрмское — было приурочено к глубоким долинам и водосборным воронкам, т. е. оледенение имело карово-долинный характер.

Проведенные в последние годы крупномасштабные картировочные работы четвертичных отложений, сопровождаемые бурением и горными выработками, привели нас к заключению о неоспоримости наличия следов двух различных по типу оледенений.

На Арагаце установлено, что оледенение рисского времени покрывало обширные площади вершин и привершинного плато, опускаясь до абсолютных высот — 2200 м на севере и 2500 м на юге. Следы этого оледенения четко сохранились на водораздельном плато в виде размытых, однако еще мощных (местами превышающих 50 м) типичных морен. Они имеют широкое развитие.

Более свежие следы последнего (вюрмского по времени) оледенения, которые морфологически совершенно четко выделяются в троговых долинах в виде конечных, береговых, донных морен и экзар-

рационных форм — лестниц каров, ригелей, трогов, бараньих лбов и пр.

Морфологический анализ указанных форм свидетельствует о 4-5 фазах стадияльного отступления горно-долинных ледников. Следует еще отметить, что, кроме морфологически выраженных следов двухкратного оледенения, имеются также мощные валунно-галечные покровы флювиогляциального генезиса раннечетвертичного возраста, развитые в предгорьях, подобно фациям моласс. Это свидетельствует о возможности наличия древнечетвертичного оледенения.

Следы многократного оледенения аналогично Арагацу и Гегамскому нагорью установлены также на Сюникском, Варденисском вулканическом нагорьях и высокогорных зонах Мокрых гор, Зангезурского и Айоцзорского хребтов.

Что касается остальных областей складчатых цепей Малого Кавказа, имеющих среднюю абсолютную высоту не выше 2500—2800 м (например, Севанский, Арегунийский, Базумский, Памбакский хребты и др.), то у большинства исследователей установилось определенное представление, что они в четвертичный период находились в основном ниже снеговой линии и не были подвергнуты оледенению.

В настоящее время в результате геоморфологических исследований в бассейнах рек Памбак, Акстев, Масрик получены новые данные о наличии следов среднечетвертичного (возможно и нижнечетвертичного) оледенения на вышеуказанных горных массивах.

В долине правого притока реки Акстев—Фролова балка имеются весьма характерные по морфологии и фациям моренные отложения, мощность которых, судя по данным буровых скважин, достигает 60 м.

Моренный язык протягивается вверх по долине на протяжении около двух километров, шириной 200—250 м и состоит из валунно-галечных накоплений с супесчано-суглинистым заполнителем. Величина валунов варьирует в широких пределах от 3—4 м до 50—60 см в диаметре. Петрографический состав материала морены более или менее однороден; состоит главным образом из гранитоидов и частично нефелиновых сиенитов, принесенных из расположенных в 7—8 км западнее интрузивных массивов Гилут—Теж-лер в бассейне верховья Памбак. В основном морена состоит из гранитной дресвы, хорошо окатанных галек, состоящих из различных эффузивных пород, слагающих соседние с интрузиями горные сооружения. Морена имеет очень плотное сложение, местами сильно сцементирована железистыми растворами минеральных вод, циркулирующих в них. Выходы источников в этой сбросовой долине в нижнечетвертичный период были значительными.

Описывая характерные свойства морены в долине Фролова балка, следует упомянуть, что исследовавшие этот район геологи допустили ошибку, приняв эту морену за пластовую гранитоидную интрузию, что, конечно, с мереной ничего общего не имеет.

Остановимся теперь на вопросе о возрасте морены. Фролова балка по своей морфологии представляет собой зрелую долину. Она является частью древней долины Памбака, дно которой протягивалось по направлению с СЗ на ЮВ, соединяя Гамзачиманскую котловину через Фролову балку и Казачий бугор с верховьем реки Дзыкнагет (западнее Семеновского перевала).

В структурном плане здесь проходит ундулирующая синклинальная складка, осложненная продольными и диагональными сбросами. По этой зоне довольно хорошо прослеживаются высокие уровни речных террас и древних денудационных (отчасти экзаррационных) ступеней, деформированных последующими дизъюнктивными нарушениями. На указанных уровнях местами сохранились фрагменты галечников.

Уровень экзаррации выделяется на высоком склоне горы Тежелер в виде широкого, сильно разрушенного днища кара на высоте 3050 м; далее, проходя перевальную седловину, он врезается в интрузивный массив Гилут и, постепенно понижаясь, переходит в контуры древней долины в виде высоких уступов трога на отметках 2500—2200 м и, наконец, сливается с конечной моренной грядой Фроловой балки.

В период формирования пятой (среднечетвертичной) террасы в результате омоложения ряда сбросовых нарушений происходит перестройка в направлении стока главной речной артерии Палеопамбака. Врезанием р. Акстев в поперечную антиклинальную складку на участке Фиолетово—Дилижан закладывается в дальнейшем глубокое ущелье антецедентно-эпигенетического типа. В результате перехвата реки Палеопамбак на участке Фиолетово—Дилижан морена Фроловой балки, соответствующая по возрасту 5—6 террасам, т. е. средне-нижнечетвертичной, остается изолированной и предохраняется от дальнейшей эрозии.

Ереванский государственный университет

Ս. Պ. ԲԱԼՅԱՆ

Նոր տվյալներ Հայաստանի հնագույն սառցապատման մասին

Հայկական լեռնաշխարհի հնագույն սառցապատմանը, նրանց բնույթի, տարածման ասանակների մասին գոյություն ունեն տարբեր կարծիքներ:

Սառամնասիրողների մի խումբ գտնում է, որ Հայաստանի բարձր լեռնային շրջանները շրրորդական ժամանակաշրջանում ենթարկվել են տարբեր բնույթի մի քանի սառցապատման:

Մի այլ խումբ կողմնակից է հոփտային բնույթի շրրորդական միայն մեկ սառցապատման:

Վերջին ժամանակներս կատարած գեոմորֆոլոգիական և շրրորդական հետազոտությունները խոշոր մասշտաբի հանույթային աշխատանքները ապացուցում են, որ Հայաստանի հարթավայրի բարձրավանդակի խոշոր լեռնազանգվածներ՝ Արագածը, Գեղամա, Վարդենիսի լեռները, Սյունիքի բարձրավանդակը ենթարկվել են առնվազն երկու տարբեր բնույթի սառցապատման. առաջինը՝ լեռնածածկույթային, միջին շրրորդական և երկրորդը՝ լեռնահոփտային, վերին շրրորդական:

Ստացված են նոր տվյալներ Փամբակ, Աղստեփ, Մասրիկ գետերի ավազաններում միջին չորրորդականի սառցադառաման հետքերի վերաբերյալ:

Համաձայն մինչև օրս գոյություն ունեցող կարծիքների, Փորր Կովկասի լեռնաշղթաների այն խումբը, որը գտնվում է 2500—2800 մետր բարձրություններից ցածր մակարդակների վրա, երբեք էլ սառցադառամների չի ենթարկվել:

Մեր կողմից հայտնաբերված միջին չորրորդականի տիպիկ մորենային կուտակումները հերոլոֆո-րակայում (Աղստեփ—Փամբակ գետերի ավազանում) և Սոթքի լեռնանցքի շրջանում (Մասրիկ գետի ավազան) ապացուցում են, որ Փորր Կովկասի միջին բարձրությամբ լեռները չորրորդականում նույնպես ենթարկվել են զգալի սառցադառամների:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ե Ո Ւ Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

III

¹ К. Н. Паффенгольц, Зримо, ч. LX, вып. 2, 1931; „Геология Армении“, геол. изд., М.-Л., 1918. ² А. Л. Рейнгард, „Природа“, № 3, 1939. ³ Л. А. Барданыц, Постплиоценовая история Кавказско-Черноморско-Каспийской области, АН АрмССР, Ереван, 1948. ⁴ А. А. Габриелян, ДАН АрмССР, т. IV, № 2 (1946). ⁵ А. Т. Асланян, С. П. Бальян, Бюлл. МОИП, отд. геол., т. XXVIII, № 6, 1953. ⁶ С. П. Бальян, Геология АрмССР, том I (геоморфология), Ереван, 1962. ⁷ Б. Л. Личков, Труды СОПС СССР, серия Закавказ., т. I, вып. 3, 1931. ⁸ Н. В. Думитрашко, Труды Ин-та геогр. АН СССР, вып. 43, 1949, вып. 47, 1959. ⁹ Г. К. Габриелян, „Природа“, № 9, 1950, изв. ВГО, т. XXXII, вып. 2, 1950. ¹⁰ Е. Н. Нефедьева, Труды Ин-та геогр. АН СССР, вып. 47, 1950. ¹¹ Б. А. Антонов, Труды Ин-та геогр. АН АзССР, т. II, Баку, 1953, ДАН АзССР, т. IX, № 5, (1953).

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

В. Т. Акопян

Новые позднемеловые гастроподы Армянской ССР

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. С. Мкртчяном 14/XII 1962)

Среди наших сборов гастропод из верхнемеловых отложений бассейна р. Веди и Базумского хребта в период 1959—1961 гг. оказалось большое число (свыше 100) экземпляров, которые принадлежат к новому роду внутри семейства Actaeonellidae Pchelincev.

Рассматриваемый новый род имеет большое сходство с родом *Trochactaeon* по форме раковины, характером соединения оборотов, формой устья и особенностями внутренней спиральной складчатости, на основании которого их можно объединить в одно подсемейство Trochactaeoninae subfam. nov.).

Ниже приводится описание только четырех видов нового рода, из которых три являются новыми, а четвертый до настоящего времени был известен из нижнего сенона Южной Африки.

ОТРЯД OPISTHOBANCHIA

Семейство ACTAEONELLIDAE PCHELINCEV, 1954

Подсемейство TROCHACTAEONINAE SUBFAM. NOV.

Род *Purpuractaeon* Hacobjan gen. nov.

Типичный вид—*Purpuractaeon pchelincevi* Hacob. gen. et sp. nov.

Нижний сенон. Армянская ССР.

Диагноз. Раковина конусообразная или овально-коническая средних и крупных размеров. Обороты значительно или сильно объемлющие и соединяются лестницеобразно. Последний оборот составляет половину или больше половины общей длины раковины. Шов малоуглубленный. Характерным является наличие скульптуры, представленной крупными бугорками на верхнем крае оборотов. Устье удлиненное, узкое, расширяющееся в нижней своей части, с 3 внутренними спиральными складками на столбике.

Обоснование выделения рода. Новый род от единственного близкого рода *Trochactaeon* легко отличается наличием скульптуры, выраженной довольно крупными бугорками у верхнего края оборотов.

Видовой состав. Кроме типичного вида, к роду *Purpuractaeon* относятся *P. vediensis* sp. nov., *P. conicus* sp. nov., *P. globulosus*

sp. nov. (in coll.), *P. basumensis*. sp. nov. (in coll.), а также известные в литературе *Actaeonella cretacea* Müller, *A. beyrichi* Drescher, *A. (Trochactaeon) woodsi* Rennie, *Tornatella lamarkii* Keferst (в изображении Гольдфусса).

Время существования и географическое распространение. Нижний сенон. Южная Африка, Германия, Армянская ССР.

Purpuractaeon pcelincevi H a c o b j a n gen. et sp. nov.*

Табл. 1, фиг. 3—5.

Оригиналы № 2/105 и 3/105, 18/105. Музей Института геологических наук АН Армянской ССР, Ереван.

Материал. Около 40 экземпляров хорошей сохранности из двух местонахождений.

Описание. Раковина довольно крупная, конически овальных очертаний, состоит из 5—7 сильно объемлющих оборотов с вершинным углом спирали в 100°. Она на три четверти сложена последним оборотом, ширина которого достигает высоты раковины. Наибольшая ширина последнего оборота наблюдается у его верхнего края, несколько ниже от малоуглубленной шовной линии. Наличие околошовной площадки обуславливает лестничный характер соединения оборотов друг с другом. Верхний край оборотов резким перегибом суживается к шовной линии.

Скульптура представлена крупными бугорками, расположенными у верхнего края оборотов. Число их на полном обороте составляет 8—9. Иногда на боковой поверхности раковины видны штрихи нарастания.

Высокое устье заострено вверху и камеровидно расширено в нижней части. В его полость вдаются 3 внутренние спиральные складки, расположенные на столбике.

Размеры типичного экземпляра (в мм)

Высота раковины	74,7
Высота последнего оборота	56,1
Ширина последнего оборота	54,6

Обоснование выделения вида. Новый вид от *Purpuractaeon woodsi* (Rennie) (1, 1930, стр. 232, табл. XXVII, фиг. 17—20) отличается более открытым вершинным углом спирали, большей относительной шириной и более крупными размерами раковины, меньшим числом бугорков на поверхности оборотов.

Близкие к рассматриваемому виду формы описаны Гольдцанфелем из нижнего сенона Германии под названием *Actaeonella cretacea* Müller (2, 1887—88, стр. 82, табл. VII, фиг. 11, 14—16). Следует отметить, что из этих форм к виду Мюллера (3, 1851, стр. 17, табл. III, фиг. 21) можно относить только маленький экземпляр (фиг. 14), а остальные (фиг. 11, 15—16), характеризующиеся более открытым вершинным углом спирали, большой относительной высотой и вогнутостью последнего оборота и своеобразной скульптурой, пред-

* Вид назван в честь проф. В. Ф. Пчелинцева.

ставляют самостоятельный вид. Последний отличается от описываемого вида вогнутостью оборотов и иным характером скульптуры.

Время существования и географическое распространение. Нижний сенон. Армянская ССР.

Местонахождение. Армянская ССР, Вединский район., с. Енгиджа—38 экз., Степанаванский район, с. Куйбышев (левый берег р. Желтой)—2 экз. Конгломераты нижнего сенона.

Purpuractaeon vediensis H a c o b j a n gen. et sp. nov*.

Табл. II, фиг. 1—3.

1936. *Actaeonella (Trochactaeon) woodsi* R e n n i e. New Lamellibranchia and Gastropoda from the upper cretaceous of Pondoland, стр. 232, табл. XXVIII, фиг. 21 (поп фиг. 17—20).

Оригиналы № 1/105, 4/105, 5/105. Музей Института геологических наук АН Армянской ССР. Ереван.

Материал. 19 экз. хорошей сохранности из одного местонахождения.

Описание. Раковина крупная удлиненно-овальных очертаний, на шесть десятых слагается последним оборотом, ширина которого равна его высоте. Вершинный угол спирали на начальных 5 оборотах более открытый (110°), а на последующих оборотах значительно уменьшается (около 50°). Площадка лестничного соединения оборотов очень узкая. Наибольшая ширина оборотов расположена несколько ниже их верхнего края. К шовной линии последний оборот суживается резким перегибом, а к нижнему концу оборота суживание происходит постепенно. Скульптура выражена 7—8 крупными бугорками, образующими ряд у верхнего края оборотов. К последнему обороту бугорки постепенно сглаживаются и исчезают. На поверхности оборотов видны и штрихи нарастания. Устье удлиненное, высокое, внизу камеровидно расширенное с тремя внутренними спиральными складками столбика и валикообразным вздутием на внешней губе.

Размеры типичного экземпляра (в мм)

Высота раковины 90,3

Высота последнего оборота 56,8

Ширина последнего оборота 57,1

Обоснование выделения вида. Рассматриваемый вид от вышеописанного *Purpuractaeon pcelincevi* sp. nov. отличается удлиненно-овальными внешними очертаниями раковин, сравнительно мало объемлющими оборотами, меньшей относительной высотой последнего оборота.

Время существования и географическое распространение. Нижний сенон. Африка и Армянская ССР.

Местонахождение. Армянская ССР, Вединский район, сел. Енгиджа. Конгломераты нижнего сенона.

* Вид назван по месту нахождения его остатков.

Purpuractaeon conicus H a c o b j a n gen. et sp. nov*.

Табл. I, фиг. I.

Оригинал № 15/105. Музей Института геологических наук АН Армянской ССР. Ереван.

Материал. 9 экземпляров довольно хорошей сохранности из одного местонахождения.

Описание. Раковина средних размеров, овально-конических очертаний, состоит из 5—6 сильно объемлющих оборотов. Завиток очень низкий, едва выступающий над последним оборотом, слагающим около девяти десятых высоты раковины. Вершинный угол спирали составляет 130°, образующая конуса вогнутая, а на некоторых экземплярах завиток почти плоский. Максимальной ширины последний оборот достигает у своего верхнего края, который крутым перегибом прилегает к шовной линии. Боковая поверхность по направлению к закругленному концу устья постепенно суживается.

Скульптура представлена рядом крупных бугорков, расположенных на верхнем крае оборотов. Число их на полном обороте достигает 7. Редко наблюдаются тонкие штрихи нарастания.

Устье удлиненное, узкое, внизу расширенное с тремя внутренними складками столбика.

Размеры типичного экземпляра (в мм)

Высота раковины 52,1

Высота последнего оборота 45,2

Ширина последнего оборота 45,5

Обоснование выделения вида. От *Purpuractaeon pcelincevi* sp. nov. и *P. woodsi* (Rennie) (1, 1930, стр. 232, табл. XXVIII, фиг. 17—20) рассматриваемый вид отличается формой раковины, более открытым вершинным углом спирали, сравнительно высоким и широким последним оборотом, очень низким завитком. Этими же признаками, а также отсутствием вогнутости на средней части оборотов и характером скульптуры новый вид легко отличается от экземпляров, описанных Гольцапфелем под названием *Actaeonella cretacea* M ü l l e r (2, 1887—1888, стр. 82, табл. VII, фиг. 11, 15, 16).

Время существования и географическое распространение. Нижний сенон. Армянская ССР.

Местонахождение. Южный склон г. Ерах у с. Енгиджа Вединского р-она Армянской ССР. Конгломераты нижнего сенона.

Purpuractaeon woodsi (Rennie)

Табл. I, фиг. 2, Табл. II, фиг. 4—5.

1906. *Actaeonella (Trochactaeon)* sp. Woods. The cretaceous Fauna of Pondoland, стр. 328, табл. XLI, фиг. 1.

1930. *Actaeonella (Trochactaeon) woodsi* Rennie. New Lsmellibranchia and Gastropoda from the upper cretaceous of Pondoland, стр. 232, табл. XXVIII, фиг. 17—20 (non фиг. 21).

* Вид назван по форме раковины.

Оригиналы № 20/105, 25/105, 26/105. Музей Института геологических наук АН Армянской ССР, Ереван.

Материал. 6 экземпляров довольно хорошей сохранности из двух местонахождений.

Описание. Раковина небольшая, узкая, конически-овальных, несколько цилиндрических очертаний, состоит из 5—6 высоких сильно объемлющих оборотов. Завиток предыдущих оборотов широкий с вершинным углом спирали в 75—85°. Образующая конуса прямая. Околошовная площадка лестницеобразно соединяющихся оборотов узкая. Последний оборот высокий и составляет около восьми десятых общей длины раковины. Наибольшей ширины он достигает у своего верхнего края, откуда резко перегибается к шовной линии. Редко на средней части последнего оборота наблюдается слабая вогнутость. Скульптура выражена 9—12 бугорками, образующими ряд у верхнего края оборотов. На некоторых экземплярах от бугорков начинаются ясно выраженные поперечные ребра, которые протягиваются к нижнему краю последнего оборота. Устье высокое, узкое с тремя внутренними спиральными складками, помещенными на столбике.

Размеры (в мм)

Высота раковины	37,1
Высота последнего оборота	29,1
Ширина последнего оборота	20,7

Обоснование выделения вида. Ренье к описываемому виду наряду с типичными формами отнес также экземпляр (1, 1930, табл. XXVIII, фиг. 21), который несомненно принадлежит к *P. vediensis* sp. nov. От рассматриваемого вида *P. beyrichi* (Drescher) (4, 1863, стр. 237, табл. 9, фиг. 1), описанный из нижнего сенона Германии, отличается более округлыми и мало цилиндрическими очертаниями раковины и меньшим числом бугорков на верхнем крае оборотов. От вышеописанного *P. pcelincevi* sp. nov. рассматриваемый вид отличается менее открытым вершинным углом спирали, сравнительно узким последним оборотом, более многочисленными, но не крупными бугорками.

Время существования и географическое распространение. Нижний сенон. Южная Африка, Армянская ССР.

Местонахождение. Армянская ССР, Степанаванский р-он, с. Куйбышев (левый берег р. Желтой)—5 экз., Вединский район, с. Енгиджа—1 экз. Конгломераты нижнего сенона.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Վ. Թ. ՀԱՎՈՐՅԱՆ

Հայկական ՍՍՌ-ում հիմնականում հոր հանքային

Հայկական ՍՍՌ-ի վերին և ստորին հիմնականում զրահաներում 1959-61 թթ. հեղինակի կողմից կատարված հասանելի աղբյուրներում մանրամասն ուսումնասիրության մասնակի նրան-ցին հաջորդում է հարուստ ֆաունա, որի մենագրական մշակումը հնարավորություն է

տալիս փորձանիքների բաղաժիթ հայտնի տեսակների հետ միասին ուսանձնացնել նաև նոր տեսակներ, որոնք պատկանում են *Purpuractaeon* նոր սեռին:

Ներկա հոդվածում արվում է նոր սեռի բնութագիրը և նրան վերադրվող հետևյալ տեսակների համառոտ նկարագրությունը:

1. *Purpuractaeon pcelincevi* H a c o b j a n gen. et sp. nov. (ընդունվում է որպես սեռի բնորոշ տեսակ), աղյ. I, նկ. 3, 4, 5.

2. *Purpuractaeon vediensis* H a c o b j a n gen. et sp. nov., աղյ. II, նկ. 1, 2, 3.

3. *Purpuractaeon conicus* H a c o b j a n gen. et sp. nov., աղյ. I, նկ. 1.

4. *Purpuractaeon woodsi* (Rennie), աղյ. II, նկ. 3, 5, նոր սեռը բնորոշ է ստորին սենոնյան հասակի ապարների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ J. Rennie, New Lamellibranchia and Gastropoda from the Upper Cretaceous of Pondoland (with on Appendix on some Species from the Cretaceous of Zululand). Ann. S. Afr. Mus., v. 28, 1930. ² E. Holzapfel, Die Mollusken der Aachener Kreide. Palaeontographica, Bd. 34, Stuttgart, 1887—1888. ³ J. Muller Monographie der Petrefacten der Aachener Kreideformation. Bonn, 1851. ⁴ K. Drescher, Ueber die Kreidebildungen der Gegend von Löwenberg. Zeitschr. d. deutsch. Geol. Ges., Bd. 15, 1863. ⁵ H. Woods, The Cretaceous Fauna of Pondoland. Ann. S. Afr. Mus., v. 4, pt. 7, 1906.

ТАБЛИЦА I

Фиг. 1а, 1б — *Purpuractaeon conicus* H a c o b j a n gen. et sp. nov. Раковина типичного экземпляра № 15/105, нат. вел. Армянская ССР, Велинский р-он, с. Енгиджа. Нижний сенон. Сборы В. Т. Акопяна, 1961;

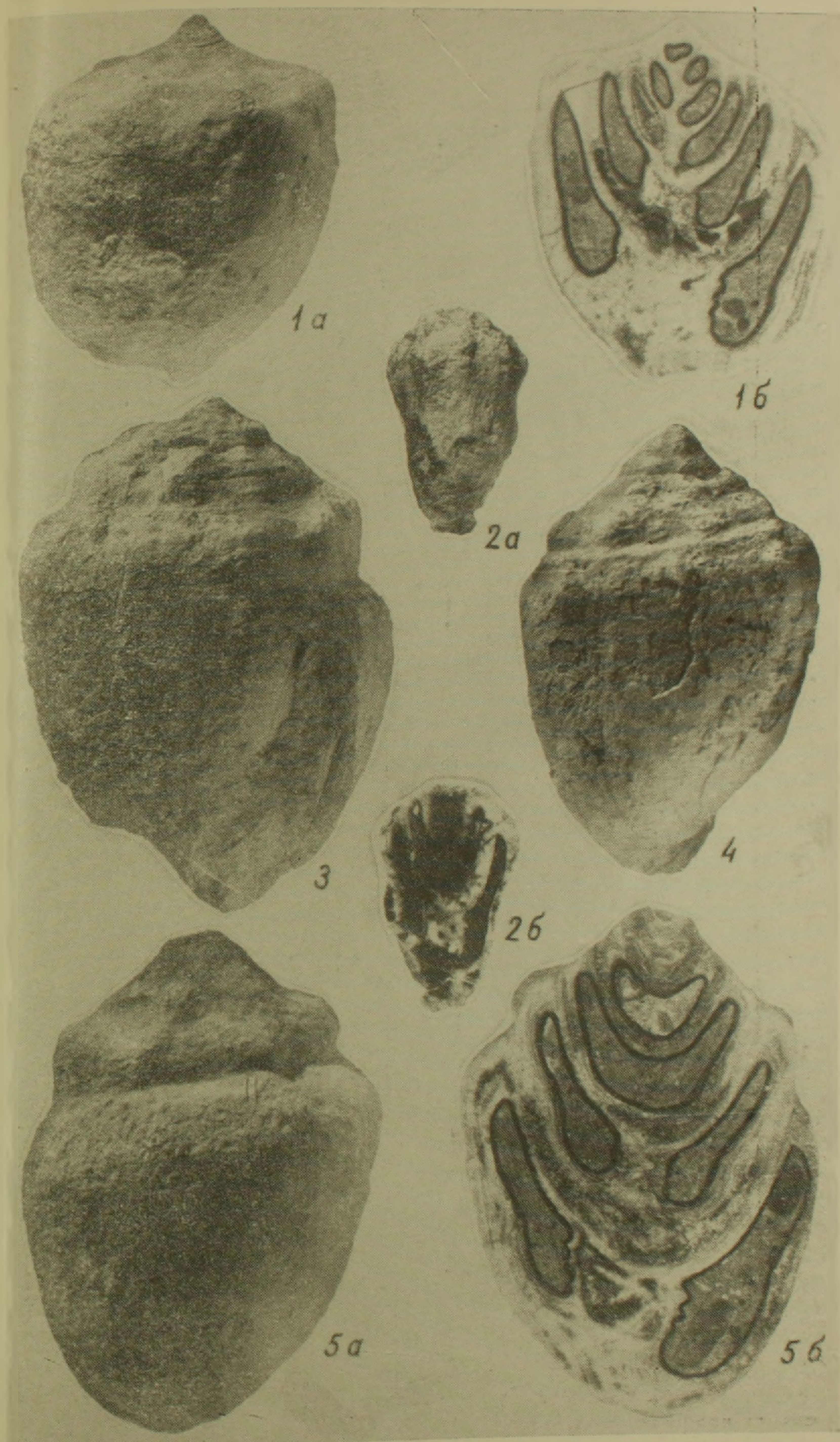
фиг. 2а, 2б — *Purpuractaeon woodsi* (Rennie). Раковина экземпляра № 20/105, нат. вел. Армянская ССР, Степанаванский р-он, с. Куйбышев. Нижний сенон. Сборы В. Т. Акопяна, 1959;

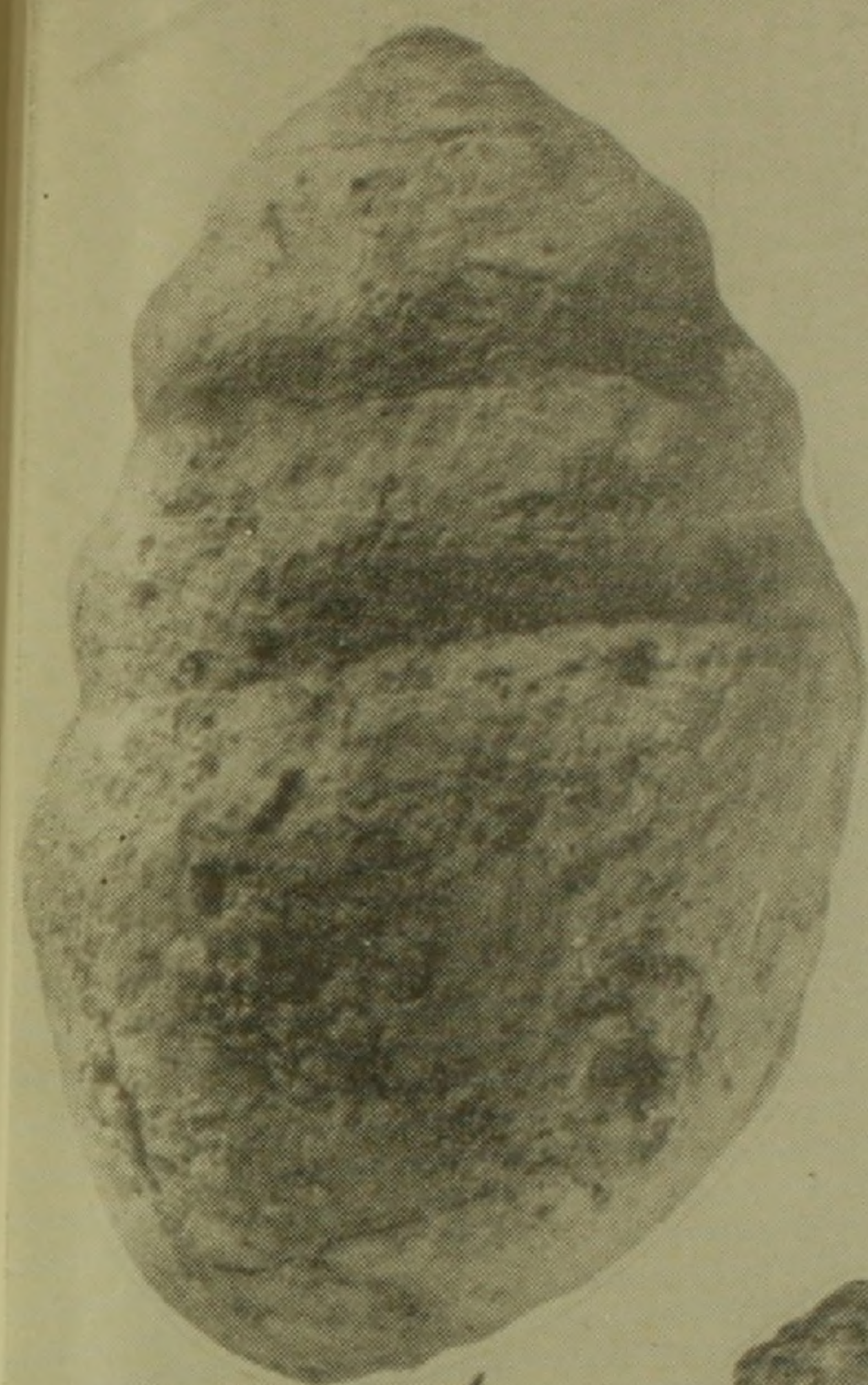
фиг. 3—5 — *Purpuractaeon pcelincevi* H a c o b j a n gen. et sp. nov. 3—раковина экземпляра № 2/105, нат. вел.; 4—раковина экземпляра № 18/105, нат. вел.; 5а—5б—раковина типичного экземпляра № 3/105, нат. вел. Армянская ССР, Велинский р-он, с. Енгиджа. Нижний сенон. Сборы В. Т. Акопяна, 1961.

ТАБЛИЦА II

Фиг. 1—3 *Purpuractaeon vediensis* H a c o b j a n gen. et sp. nov. 1—раковина типичного экземпляра № 4/105; нат. вел.; 2—раковина экземпляра № 1/105, нат. вел. 3а, 3б—раковина экземпляра 5/105, нат. вел. Армянская ССР, Велинский р-он, с. Енгиджа. Нижний сенон. Сборы В. Т. Акопяна, 1961;

фиг. 4—5 — *Purpuractaeon woodsi* (Rennie). 4а, 4б—раковина экземпляра № 25/105, нат. вел.; 5—раковина экземпляра 26/105, нат. вел. Армянская ССР, Степанаванский р-он, с. Куйбышев. Нижний сенон. Сборы В. Т. Акопяна, 1959.





1



2



4a



4b



3a



5



3b

БИОЛОГИЯ

М. Х. Чайлахян, чл.-корр. АН Армянской ССР, А. А. Меграбян,
 Н. А. Карапетян и Н. Л. Каладжян

О действии ростовых активаторов на образование клубеньков
 и рост растений люцерны

(Представлено 15/VII 1962)

Действие ростовых активаторов типа гетероауксина и гиббереллина на рост растений имеет свои специфические черты: гетероауксин в большей мере стимулирует образование и рост корней, косвенным образом влияя на рост надземных органов, тогда как гиббереллин в первую очередь влияет на рост надземных органов и в меньшей мере на рост корней.

При изучении влияния этих активаторов на процесс образования клубеньков на корнях бобовых растений было установлено, что обработка растений гиббереллином или существенным образом не изменяет, или даже вызывает депрессию в образовании клубеньков (¹⁻⁴). В нашей предыдущей работе (⁵), наряду с гиббереллином испытывалось также действие гетероауксина и было показано, что в отличие от гиббереллина обработка растений гетероауксином приводит к усилению образования клубеньков и роста корней, в связи с чем повышается сырой и сухой вес надземных органов растений в целом.

В целях проверки действия гетероауксина и гиббереллина на бобовые растения в полевых условиях, в 1961 году нами проводился опыт с люцерной на территории опытного участка Института микробиологии Академии наук Армянской ССР. Растения выращивались на делянках размером 14,5 кв. метров и обрабатывались путем опрыскивания растворами ростовых активаторов. Схема опыта состояла из четырех вариантов: 1) гетероауксин 0,01%, 2) гиббереллин 0,01%, 3) гетероауксин 0,005% и гиббереллин 0,005% и 4) контроль, вода. Поскольку каждый вариант имел четыре повторности, весь опыт занимал 16 делянок общей площадью 232 кв. метров.

Семена люцерны до посева дезинфицировались раствором сулемы в разведении 1:1000 в течение одного часа, затем многократно промывались стерильной водой. После этого они заражались суспензией соответственного штамма клубеньковых бактерий люцерны и высевались на делянках. Опрыскивание растений растворами гетероауксина,

гиббереллина и водой было начато за месяц до цветения и было произведено в три срока с недельными промежутками.

В течение опыта проводились фенологические наблюдения и промеры роста растений. В фазе цветения перед первым укосом со всех делянок были взяты пробы по 10 растений и был произведен учет высоты растений, сырого и сухого веса надземных частей и корней, число и вес клубеньков. В таблице приводятся все эти данные, как средние из четырех повторностей, т. е. из 40 растений (10 растений $\times$ 4 повторности). Кроме того, в таблице приводятся данные по урожаю люцерны всех трех укосов, произведенных в течение летнего периода вегетации.

Таблица 1

Влияние ростовых активаторов на рост, образование клубеньков и урожай растений

Варианты опыта	Высота растений в см	Сухой вес 10 растений			Образование клубеньков у 10 растений		Урожай с 1 грядки в кг			
		надземных органов	корней	общий	число	вес в г	первый укос	второй укос	третий укос	общий
Контроль	62	20,1	8,5	28,6	154	0,38	18,0	29,7	23,5	71,2
Гетероауксин 0,01%	70	27,3	8,4	35,7	207	0,70	24,0	33,8	28,6	86,4
Гиббереллин 0,01%	71	22,3	6,7	29,0	158	0,32	24,7	28,1	25,5	78,3
Гетероауксин 0,005% и гиббереллин 0,005%	66	23,4	8,0	31,4	180	0,49	21,0	28,9	27,9	77,8

Данные таблицы показывают, что при опрыскивании растений люцерны растворами гетероауксина и гиббереллина рост растений в высоту усиливается, но вес надземных органов и растений в целом значительно увеличивается только при действии гетероауксина. Так, если сухой вес 10 контрольных растений в период цветения равняется 28,6 г, то при обработке гетероауксином вес повышается до 35,7 г, а в вариантах с гиббереллином и смесью гиббереллина и гетероауксина соответственно 29,0 и 31,4 г.

В таком же соотношении оказалось и образование клубеньков на корнях растений: в контроле число клубеньков на 10 растений было 154 и вес 0,38 г, при воздействии на растения гетероауксином число клубеньков увеличилось до 207 и вес до 0,70 г. В варианте со смесью гетероауксина и гиббереллина было небольшое усиление процесса образования клубеньков, а в случае воздействия отдельно взятым гиббереллином этот процесс проходил примерно так же, как и у контрольных растений.

Учет урожая показал, что во всех вариантах опыта второй укос является наиболее урожайным. Общий урожай трех укосов в среднем на делянку в контроле был 71,2 кг, в варианте с гетероауксином он повысился до 86,4 кг, а в других вариантах повышение урожая против контроля было меньше — 78,3 и 77,8 кг.

Результаты проведенного опыта показали, что в полевых условиях опрыскивание растений люцерны растворами гетероауксина приводит к усилению процессов роста и образования клубеньков и к увеличению веса растений и общего урожая. Опрыскивание растений растворами гиббереллина не способствовало процессу образования клубеньков, но привело к увеличению веса и общему повышению урожая, как это было в опытах Г. Б. Бабаян и С. А. Карагулян (6).

В течение вегетационного сезона следующего 1962 года на том же опытном участке проводился учет урожая люцерны пяти укосов и образования клубеньков на корнях растений с целью выяснения последствий ростовых активаторов, поскольку в этом году опрыскивания растений гетероауксином и гиббереллином не производились. Эти данные приводятся в табл. 2.

Таблица 2

Последствие ростовых активаторов на образование клубеньков и урожай растений

Варианты опыта	Урожай 1 грядки в кг						Образование клубеньков у 10 растений	
	первый укос	второй укос	третий укос	четвертый укос	пятый укос	общий	число	вес
Контроль	33,1	37,4	32,8	31,4	22,4	157,1	95	0,12
Гетероауксин 0,01%	39,8	40,6	36,7	33,7	24,1	174,9	156	0,20
Гиббереллин 0,01%	35,0	35,8	32,9	31,1	22,8	157,6	126	0,16
Гетероауксин 0,005% и гиббереллин 0,005%	35,3	38,4	32,6	30,1	20,8	157,2	84	0,12

Эти данные показывают, что последствие гетероауксина на следующий год вегетации сказывается в весьма отчетливой форме, сохраняется более усиленный процесс образования клубеньков и повышение урожая люцерны во всех пяти укосах. Последствие гиббереллина не сказалось на увеличении урожая растений, как это было в первый год, когда производилось непосредственное опрыскивание растений водным раствором гиббереллина.

Таким образом, положительное действие и последствие гетероауксина на увеличение урожая люцерны можно объяснить и прямым его влиянием на усиление ростовых процессов и косвенным влиянием через стимуляцию процесса образования клубеньков.

Институт микробиологии
Академии наук Армянской ССР

Մ. Խ. ԶԱՅՆԱՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵՂՐԱԲՅԱՆ, Ն. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ ԵՎ Ն. Լ. ԲԱՆՍՅՅՆ

Օճման ալկիլատորների ազդեցությունը աուվույթի աճման և պալարիկների առաջացման վրա

1961 թվին, բույսերի վեգետացիայի շրջանում, Հայկական ՍՍՏ Գիտությունների ակադեմիայի Միկրոբիոլոգիայի ինստիտուտի փորձադաշտի տերիտորիայում. դրվել են

փորձեր գեներալաուքսինի, գիրերելինի և նրանց խառնուրդի ազդեցությունը, առօրյա րերքի և պալարադոյացման վրա, պարզելու ուղղությունը: Փորձը տարվել է սրտկման մեթոդով:

Պարզվել է, որ գեներալաուքսինի ազդեցությամբ ուժեղանում է բույսերի աճը, պալարիկների առաջացումը և մեծանում է բույսերի ընդհանուր բերքը:

Գիրերելինի ազդեցությամբ չի ուժեղանում սրալարիկների առաջացման պրոցեսը, սակայն խթանվում է բույսերի աճը և ստացվում է բույսերի ընդհանուր բերքի ոչ մեծ հավելում: Հետևյալ տարին միանգամայն որոշակիորեն արտահայտվում է գեներալաուքսինի հետազդեցությունը, ինչպես պալարիկների դոյացման, այնպես և առօրյա րերքի բարձրացման վրա:

Ենթադրվում է, որ գեներալաուքսինի դրական ազդեցությունը կապվում է ինչպես նրա ուղղակի ազդեցությամբ աճման պրոցեսների ուժեղացման վրա, նույնպես և անուղղակի ազդեցությամբ բույսերի արմատների վրա՝ պալարիկների, առաջացման պրոցեսի խթանման միջոցով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ը Ն Բ Ր Ժ Յ Ո Ւ Ն

¹ Մ. Մ. Флетчер, Дж. У. Алкоры, Дж. С. Раймонд, Nature, 182, 4045, 1319 (1958). ² А. У. Галстон, Nature, 183, 4560, 545 (1959). ³ М. Г. Мес, Nature, 184, 4704, 2035 (1959). ⁴ Г. А. Турбер, Дж. Р. Дуглас и А. У. Галстон, Nature, 181, 4615, 2035 (1958). ⁵ М. Х. Чайлахян, А. А. Меграбян, Н. А. Карапетян и Н. Л. Каладжян, Известия АН АрмССР (биол. науки, 14, 12, 25 (1961). ⁶ Г. Б. Бабаян и С. А. Карагулян, ДАН АрмССР, 31, 2, 91 (1960).

