

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXXII, № 4

1961

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս,
Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ քղթակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ (պատ. խմբագրի
աեղակալ), Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ
ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՌ ԳԱ
ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՌ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր):

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик АН
АрмССР, Г. С. ДАВТЯН, академик АН
АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, академик
АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН (зам. отв. редактора), С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

Ի Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

Մաթեմատիկա

- Ա. Վ. Զաքարյան—Զորս չափի տարածության մեջ երկչափ մակերևույթների կորության տեսության մասին 177
- Ս. Ն. Սերգելյան, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս, և Ա. Ա. Թալալյան—Կետային խրդվող ֆունկցիաների մի դասի մասին 183

Առաձգականության թեստություն

- Ա. Ն. Բաբյույան—Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի մասին 189
- Վ. Ս. Սարգսյան—Սիմետրիկ կտրվածքով անիզոտրոպ սլրիկմայածն ձողի ծոման կենտրոնի բանաձևի մասին 197

Ֆիզիկա

- Հ. Ս. Մերգելյան—Հիցքավորված հոսանքատար լարի ճառագայթումը շարժվող միջավայրում 205
- Ա. Գ. Ղարապյոզյան—2-տիտանի և T—3, T—4, BT—5, T—6, T—8 տիտանի միահալվածքների ջերմաօտիճանահաղորդականությունը և էլեկտրադիմադրությունը 213

Ֆիզիոլոգիա

- Լ. Ս. Ղամբարյան և Ի. Ռ. Մադատովա—Գլխուղեղի մեծ կիսագնդերի փոխադրեցության շուրջը կոշտուկային մարմնի հատման դեպքում 219

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Математика	
<i>А. В. Чакмазян</i> —К теории кривизны двумерных поверхностей четырех- мерного пространства	177
<i>С. Н. Мергелян</i> , академик АН АрмССР, и <i>А. А. Талалян</i> —Об одном классе точечно-разрывных функции	183
Теория упругости	
<i>А. А. Баблоян</i> — Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала	189
<i>В. С. Саркисян</i> — О формуле центра изгиба анизотропного призматиче- ского стержня с симметричным сечением	197
Физика	
<i>О. С. Мергелян</i> —Излучение заряженной токонесущей нити в движущей- ся среде	205
<i>А. Г. Карагезян</i> —Температуропроводность и электросопротивление α -ти- тана и титановых сплавов Т—3, Т—4, ВТ—5, Т—6, Т—8	213
Физиология	
<i>Л. С. Гамбарян</i> и <i>И. Р. Мадатова</i> —О путях взаимодействия больших полушарий головного мозга при полной перерезке мозолистого тела	219

А. В. Чакмазян

К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 7/II 1961)

Пусть

$$r = r(u^1, u^2)$$

параметрическое уравнение произвольной двумерной поверхности X_2 , вложенной в евклидово E_4 . Если X, Y единичные и взаимно-перпендикулярные нормальные векторы поверхности, то ее основные деривационные уравнения имеют вид

$$\nabla_j r_i = h_{ij} X + K_{ij} Y, \quad (1)$$

где

$$h_{ij} = -\partial_i r \partial_j X = X \nabla_j r_i, \quad k_{ij} = -\partial_i r \partial_j Y = Y \nabla_j r_i; \quad \text{а } \nabla$$

символ ковариантного дифференцирования во внутренней связности X_2 . Рассмотрим тензор

$$P_{ijke} = (\nabla_i r_j) (\nabla_k r_e) = h_{ij} h_{ke} + K_{ij} K_{ke}^*$$

и соответствующую дифференциальную форму

$$P_{ijke} du^i du^j du^k du^e = (h_{ij} du^i du^j)^2 + (K_{ij} du^i du^j)^2. \quad (A)$$

Пусть на X_2 задана кривая Γ уравнением

$$u^i = u^i(s).$$

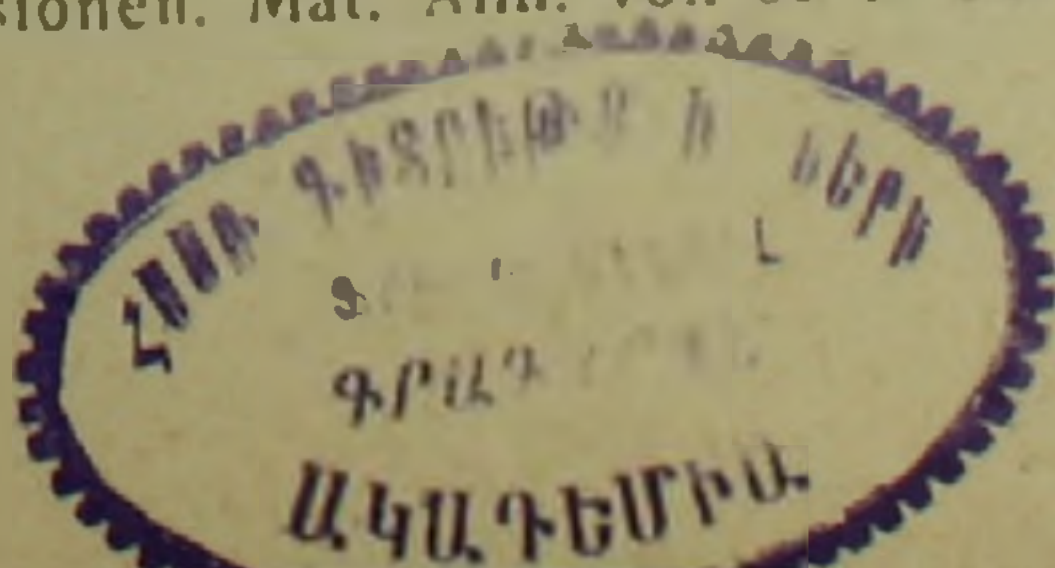
Единичный касательный вектор кривой в точке M будет

$$t = r^1 = r_i v^i, \quad \text{где } v^i = \frac{du^i}{ds}.$$

Дифференцируя по натуральному параметру s и пользуясь уравнением (1), получаем

$$r'' = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y + \frac{\delta(v^i)}{ds} r_i.$$

* Этот тензор рассматривал Коммерель в работе Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Mat. Ann. vol. 60 str 548—596.



Проекцию вектора кривизны r'' на нормальную плоскость мы назовем *вектором нормальной кривизны* кривой Γ и обозначим через $\bar{\kappa}$. По определению имеем

$$\bar{\kappa} = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y. \quad (2)$$

Длину вектора $\bar{\kappa}$ мы будем называть *нормальной кривизной* и обозначим через κ , тогда

$$\kappa = \sqrt{(h_{ij} v^i v^j)^2 + (k_{ij} v^i v^j)^2}.$$

Имея в виду (A), получаем

$$\kappa = \sqrt{\frac{P_{ijkc} du^i du^j du^k du^c}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}. \quad (3)$$

С другой стороны, по формулам Френе

$$r'' = kn,$$

где k —кривизна кривой Γ в точке M , а n —единичный вектор главной нормали.

Умножив обе части этого равенства скалярно на $\bar{\kappa}$, получаем

$$k \cos \theta = \sqrt{(h_{ij} v^i v^j)^2 + (k_{ij} v^i v^j)^2} \quad \text{или}$$

$$k \cos \theta = \sqrt{\frac{P_{ijkc} du^i du^j du^k du^c}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}, \quad (4)$$

где θ —угол между векторами n и $\bar{\kappa}$.

Если точка M на поверхности X_2 задана, коэффициенты P_{ijkc} , g_{ij} имеют вполне определенные значения. В этом случае правая часть (4) зависит только от отношения дифференциалов $du^1:du^2$.

Назовем *нормальным сечением* поверхности в точке M кривую пересечения поверхности с нормальной гиперплоскостью, т. е. с гиперплоскостью, проведенной через нормальную плоскость в точке M . Нормальное сечение вполне определяется заданием своего касательного вектора t .

Полученное нормальное сечение Γ_0 имеет с кривой Γ общую касательную в точке M поверхности. Если обозначим кривизну Γ_0 через k_0 , то из (4) получим

$$k_0 = \sqrt{\frac{P_{ijkc} du^i du^j du^k du^c}{(g_{ij} du^i du^j)^2}}. \quad (5)$$

Так как Γ и Γ_0 имеют общий касательный вектор, то правые части формул (4) и (5) будут одинаковы, так что

$$k \cos \theta = k_0 \quad \text{или} \quad R = R_0 \cos \theta,$$

где R и R_0 —радиусы кривизны соответственно Γ и Γ_0 .

$$R = \frac{1}{k}, \quad R_0 = \frac{1}{k_0}.$$

Итак, радиус кривизны произвольной кривой на поверхности X_2 в данной точке равен радиусу кривизны нормального сечения Γ_0 , взятому в той же точке и с той же касательной, умноженному на косинус угла θ между соприкасающейся плоскостью Γ и гиперплоскостью нормального сечения Γ_0 .

Допустим, что X_2 может быть дополнена до гиперполосы так, что ее естественная нормализация будет одновременно и двойственной ⁽¹⁾, и исследуем (5), считая, что точка на поверхности остается неподвижной, а касательная нормального сечения вращается в касательной плоскости поверхности.

В нашем случае главные направления тензоров h_{ij} , k_{ij} совпадают ⁽²⁾, и мы назовем их главными направлениями поверхности в точке M . Известно ⁽³⁾, что всякий симметричный тензор второй валентности определяется с помощью главных ортов и главных значений. Если орты главных направлений обозначим через a_i , $\bar{a}_i$, то

$$h_{ij} = \sigma_1 a_i a_j + \sigma_2 \bar{a}_i \bar{a}_j,$$

$$k_{ij} = \tau_1 a_i a_j + \tau_2 \bar{a}_i \bar{a}_j,$$

где (σ_1, σ_2) , (τ_1, τ_2) — главные значения тензоров h_{ij} , k_{ij} соответственно.

Разложим единичный касательный вектор v^i нормального сечения в данной точке по главным направлениям

$$v^i = a^i \cos \varphi + \bar{a}^i \sin \varphi.$$

Подстановка этого выражения в (2) дает

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \cos^2 \varphi + \bar{x}_2 \sin^2 \varphi, \quad (6)$$

где

$$\bar{x}_1 = \sigma_1 X + \tau_1 Y, \quad \bar{x}_2 = \sigma_2 X + \tau_2 Y.$$

Это аналог формулы Эйлера для двойственно-нормализованной X_2 , вложенной в E_4 .

Назовем $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ главными векторами кривизны поверхности.

Очевидно, что норма x вектора x выразится так:

$$x = \sqrt{(\sigma_1^2 + \tau_1^2) \cos^4 \varphi + 2(\sigma_1 \sigma_2 + \tau_1 \tau_2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (\sigma_2^2 + \tau_2^2) \sin^4 \varphi}. \quad (7)$$

Можно доказать, что векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ и величины $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}$, $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ не зависят от выбора векторов X и Y . Теперь выясним геометрический смысл коэффициентов $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}$, $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ в формуле (7).

Положив $\varphi = 0$, мы приводим вектор v^i в совпадение с a_i и получаем нормальное сечение с касательной, идущей по первому глав-

ному направлению. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получим нормальное сечение с касательной, идущей во втором главном направлении. Обозначим кривизну первого нормального сечения через κ_1 , а второго — через κ_2 .

Тогда соответственно при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ из формулы (7) получаем

$$\kappa_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}, \quad \kappa_2 = \sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}. \quad (8)$$

Назовем главными сечениями такие нормальные сечения в данной точке поверхности, касательные к которым идут по главным направлениям, а их кривизны κ_1 , κ_2 — главными кривизнами в данной точке поверхности. В силу (8) формула (7) принимает вид

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 \cos^4 \varphi + 2K \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \kappa_2^2 \sin^4 \varphi},$$

где K — Гауссова кривизна внутренней геометрии поверхности X_2 .

Легко видеть, что между главными кривизнами κ_1 и κ_2 , полной кривизной K и следами $(^3) S = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ и $S^* = g^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}$ тензоров h_{ij} и k_{ij} , соответственно имеет место соотношение

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = S^2 + S^{*2} - 2K.$$

Назовем асимптотическим в данной точке поверхности X_2 направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль в этой точке. Для обращения k_0 в нуль необходимо и достаточно, чтобы числитель дроби $(^5)$ обратился в нуль. Следовательно,

$$P_{ijke} du^i du^j du^k du^e = 0 \quad \text{или} \quad (h_{ij} du^i du^j)^2 + (k_{ij} du^i du^j)^2 = 0.$$

Из последнего следует, что действительные асимптотические направления должны одновременно удовлетворять условиям

$$h_{ij} v^i v^j = 0 \quad \text{и} \quad k_{ij} v^i v^j = 0.$$

При этом, если существуют два действительных асимптотических направления, то $h_{ij} = \lambda k_{ij}$. Это значит, что двумерная двойственно нормализованная X_2 лежит в E_3 . Таким образом, больше двух действительных асимптотических направлений поверхность иметь не может.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ՉԱԲՍԱԶՅԱՆ

**Չորս չափի տարածության մեջ երկչափ մակերևույթների կորության
սեւումբյան մասին**

Այս հաղորդումը նվիրված է երկչափ X_2 մակերևույթի ուսումնասիրությանը, որը բնկղծված է չորս չափի եվկլիդյան E_4 տարածությունում: Ընդհանուր դեպքում ցույց է տրվում Մենեյի թեորեմի ընդհանրացումը մակերևույթին պատկանող կորի կորություն համար:

Երկչափ նորմալացված մակերևույթի համար ստացված է էյլերի բանաձևը:

$$x = x_1 \cos^2 \varphi + x_2 \sin^2 \varphi,$$

որտեղ՝

$$x_1 = \sigma_1 X + \tau_2 Y, \quad X_2 = \sigma_2 X + \tau_2 Y;$$

Ապացուցվում է, որ x_1 և x_2 վեկտորները և $\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_2^2}$ ու $\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}$ մեծությունները կախված չեն X և Y վեկտորների ընտրությունից: Ստացված է գլխավոր x_1 , x_2 կորությունների, լրիվ K կորություն և h_{ij} ու k_{ij} տենզորների հետքերի համար հետևյալ առնչությունը՝

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 + S^{*2} - 2K:$$

Ահմանվում է մակերևույթի ասիմպտոտական ուղղությունը: Ասիմպտոտական ուղղությունը որոշելու համար ստացվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$(h_{ij} du^i du^j)^2 + (K_{ij} du^i du^j)^2 = 0:$$

Պարզվում է, որ այդ մակերևույթի ասիմպտոտական ուղղություններն կլինեն իրական, երբ X_2 ընկղմված է E_3 -ում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР т. XXIX, № 1 (1959). ² А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР, т. XXX № 4 (1959). ³ А. П. Норден, Теория поверхностей, 1956.

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян, академик АН Армянской ССР, и А. А. Талалян

Об одном классе точечно-разрывных функций

(Представлено 9/III 1961)

В работе М. В. Келдыша ⁽¹⁾ рассматривается проблема Бэра для окружности: *какие функции могут быть представлены на окружности $|z| = 1$ в виде предела сходящейся и равномерно ограниченной на $|z| = 1$ последовательности полиномов.*

В этой работе установлено, что для разрешимости проблемы Бэра достаточно выполнение условий:

1°. Функция $f(t)$ ограничена и точечно-разрывна на любом совершенном подмножестве окружности.

2°. Для любого целого $n \geq 0$

$$\int_{|t|=1} f(t) t^n dt = 0$$

3°. Мера множества точек разрыва $f(t)$ равна нулю.

Первые два условия являются, очевидно, и необходимыми условиями разрешимости.

Третье условие в теореме М. В. Келдыша связано с методом исследования и, вообще говоря, не представляет необходимое условие.

Имеется предположение, что необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы Бэра состоит в выполнении условий 1° и 2°, однако это до сих пор не доказано.

В настоящей заметке мы устанавливаем предложение, которое позволяет несколько усилить теорему М. В. Келдыша, но вопрос о полном решении проблемы Бэра для круга по-прежнему остается открытым.

Теорема. Если $f(t)$ определена и ограничена на окружности $|t| = 1$, точечно-разрывна на любом совершенном подмножестве окружности и эквивалентна нулю, то существует последовательность полиномов $P_n(t)$, обладающая свойствами:

$$1^\circ. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = f(t), \quad |t| = 1$$

$$2^\circ. \quad |P_n(t)| < C, \quad n \geq 1, \quad |t| = 1.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь действительные функции $f(t)$ с отмеченными свойствами.

Допустим сначала, что множество $E^{(0)}$ точек, в которых $f(t)=0$, имеет тип F_σ . В силу того, что $f(t)$ принадлежит первому классу, множество

$$E^{(1)} = E(f(t) > 0) + E(f(t) < 0)$$

имеет тип F_σ , следовательно, окружность $\Gamma: |t|=1$ можно представить в виде

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k,$$

где A_k, B_k — замкнутые множества, причем

$$A_k \in E^{(L)}, \quad B_k \in E^{(0)}.$$

Множества

$$E_n = \sum_{k=1}^n A_k \quad \text{и} \quad F_n = \sum_{k=1}^n B_k, \quad n \geq 1$$

замкнуты и не имеют общих точек, поэтому число r_n , равное расстоянию между ними, положительно.

Если $\varphi_n(t)$ означает последовательность непрерывных на Γ функций, сходящихся к $f(t)$, то можно считать, что

$$\max_{|t|=1} |\varphi_n(t)| = \sup_{|t|=1} |f(t)| = M_f.$$

Из рассуждений, изложенных в ⁽¹⁾ следует, что любому $n \geq 1$ отвечает полином $Q_n(z)$, удовлетворяющий условиям

$$|\varphi_n(t) - Q_n(t)| < \varepsilon_n, \quad t \in E_n$$

$$|Q_n(t)| < \varepsilon_n \quad \text{вне } \varepsilon_n\text{-окрестности множества } E_n$$

$$|Q_n(t)| \leq M_f + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n < r_n$, $\varepsilon_n < M_f$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Это доказывает теорему в случае, когда $E^{(0)}$ — множество типа F_σ .

Рассматривая общий случай, число M выберем так, чтобы

$$-M < f(t) < M$$

и разобьем сегмент $[-M, M]$ на 2^n равных частей точками

$$c_0^{(n)} = -M < c_1^{(n)} < \dots < c_{2^n-1}^{(n)} = 0 < \dots < c_{2^n}^{(n)} = M.$$

Пусть

$$A_k^{(n)} = E(c_{k-1}^{(n)} < f(t) < c_k^{(n)}), \quad 1 \leq k \leq 2^n - 1,$$

$$A_0^{(n)} = E(f(t) < c_1^{(n)}), \quad A_{2^n}^{(n)} = E(f(t) > c_{2^n-1}^{(n)}).$$

Поскольку $f(t)$ принадлежит первому классу, все множества $A_k^{(n)}$ являются множествами типа F_σ , причем

$$\text{mes } A_{2^{n-1}}^{(n)} = 2\pi$$

$$\text{mes } A_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 2^{n-1}. \quad (1)$$

Окружность Γ представляется в виде суммы множеств типа F_σ

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{2^n} A_k^{(n)}.$$

Известно, что в этом случае Γ может быть представлена в виде конечной суммы множеств типа F_σ попарно без общих точек. Действительно, если замкнутые множества $F_{k,i}^{(n)}$, сумма которых равна $A_k^{(n)}$, расположить в последовательность

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \dots,$$

то $\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ и каждое из F_m будет принадлежать одному из множеств $A_k^{(n)}$, $0 \leq k \leq 2^n$.

Пусть

$$E_1 = F_1, \quad E_m = F_m - F_m(F_1 + F_2 + \dots + F_{m-1}).$$

Множества E_m попарно не имеют общих точек и являются разностью замкнутых множеств, следовательно E_m — множества типа F_σ . Сумма E_m по всем m , для которых $F_m \in A_k^{(n)}$, представляет множество $B_k^{(n)}$ типа F_σ , причем

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{2^n} B_k^{(n)}, \quad B_k^{(n)} \in A_k^{(n)}, \quad B_i^{(n)} B_j^{(n)} = 0, \quad i \neq j.$$

Из (1) следует, что

$$\text{mes } B_{2^{n-1}}^{(n)} = 2\pi$$

$$\text{mes } B_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 2^{n-1}.$$

Функцию $f_n(t)$ определим следующим образом:

$$f_n(t) = c_k^{(n)}, \quad t \in B_k^{(n)}, \quad 0 \leq k \leq 2^n.$$

Всюду на окружности Γ будем иметь

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{2M}{2^{n-1}}.$$

Положим

$$\varphi_1(t) = f_1(t), \quad \varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t), \quad n > 1.$$

Множество $E(\varphi_n(t)=0)$ является конечной суммой множеств типа F , и поэтому имеет тип F_σ , следовательно, согласно доказанному выше частному случаю теоремы, существует последовательность полиномов $P_{n,k}(t)$, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{n,k}(t) = \varphi_n(t), \quad |t| = 1,$$

$$|P_{n,k}(t)| \leq 2M_{\varphi_n}, \quad |t| = 1.$$

Но

$$\sup_{|t|=1} |\varphi_n(t)| < \frac{12M}{2^n},$$

поэтому

$$\max_{|t|=1} |P_{n,k}(t)| \leq \frac{24M_f}{2^n}, \quad k \geq 1.$$

Пусть

$$P_n(z) = P_{1,n}(z) + P_{2,n}(z) + \dots + P_{n,n}(z).$$

Если m выбрано так, что

$$\frac{24M}{2^m} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

то при любом $n > m$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n P_{k,n}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t| = 1,$$

и

$$|f(t) - P_n(t)| \leq \sum_{k=1}^m |\varphi_k(t) - P_{k,n}(t)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

если $n > n(t, \varepsilon)$.

Кроме того, всюду на Γ

$$|P_n(t)| \leq 24M_f$$

откуда и следует справедливость утверждения.

Сравнивая его с теоремой М. В. Келдыша, приходим к следующему заключению.

Следствие. Если 1° $f(t)$ --ограниченная функция на Γ , точечно разрывная на любом совершенном подмножестве окружности,

$$2^\circ. \int_{|t|=1} f(t) t^k dt = 0, \quad k \geq 0,$$

3°. Значения $f(t)$ можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы полученная функция была ограниченной функцией первого класса, почти всюду непрерывной на окружности, то для $f(t)$ проблема Бэра разрешима.

Ереванский университет

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

ԿԵՏԱՅԻՆ-ԽՂՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ՎՍՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ներկա հոդվածում ասպացուցվում է հետևյալ թեորեմը, եթե $f(z)$ ֆունկցիան որոշված է ու սահմանափակ է Γ շրջանագծի վրա, կետային-խղվող է Γ -ի յուրաքանչյուր կտարյալ ենթաբազմության վրա և համարյա ամենուրեք հավասար է զերոյի, ապա $f(z)$ ֆունկցիան հնարավոր է ներկայացնել որպես z հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականության սահման:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. В. Келдыш, О последовательностях полиномов, ограниченных в совокупности, Математич. сборник, т. 42, 1935, стр. 719—724.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 6/IV 1961)

Осесимметричной деформацией анизотропных тел занимались С. Г. Лехницкий⁽¹⁻³⁾, Эллиотт⁽⁴⁾, Чакраворти⁽⁵⁾ и другие. В этих работах в основном рассматривались частные случаи нагружения. В работах же, где рассматривались случаи более общего нагружения, некоторые из граничных условий удовлетворяются в интегральной форме.

В настоящей работе дано точное решение задачи осесимметричной деформации круглого цилиндра радиусом R и высотой h из трансверсально-изотропного материала, когда на торцах цилиндра заданы нормальные и касательные напряжения, а на боковой поверхности касательное напряжение и радиальное перемещение.

Рассматриваемая задача может быть использована для получения решения некоторых задач об изгибе толстых круглых плит^(3,6).

При решении задачи мы пользуемся формулами Эллиотта—Чакраворти, однако считаем нужным отметить, что указанные формулы путем простых преобразований могут быть получены из ранее опубликованных работ С. Г. Лехницкого^(1,2).

За ось z цилиндрической системы координат примем ось изотропии цилиндра. Начало координат поместим на одном торце цилиндра. При осесимметричной деформации формулы для напряжений и перемещений, выраженные через две „гармонические“ функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$, имеют вид^(4,5):

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r},$$

$$w = k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

$$\sigma_r = -\frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) - c_{44} \left[(1 + k_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (1 + k_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right],$$

$$\sigma_0 = \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) +$$

$$+ \left[(k_1 c_{13} - \nu_1^2 c_{12}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{13} - \nu_2^2 c_{12}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

$$\sigma_z = (k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2},$$

$$\tau_{rz} = c_{44} \left[(1 - k_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + (1 + k_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} \right],$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.$$

Здесь ν_1^2 и ν_2^2 — корни характеристического уравнения

$$c_{11} c_{44} \nu^4 + [c_{13} (c_{13} + 2c_{44}) - c_{11} c_{33}] \nu^2 + c_{33} c_{44} = 0, \quad (2)$$

а значения k_1 и k_2 , соответствующие значениям ν_1^2 и ν_2^2 , определяются из условия

$$\frac{c_{44} + k(c_{13} + c_{44})}{c_{11}} = \frac{k c_{33}}{(c_{13} + c_{44}) + k c_{44}} = \nu^2. \quad (3)$$

Функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_1^2 \varphi_1 + \nu_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_2^2 \varphi_2 + \nu_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Легко показать, что корни уравнения (2) не могут быть чисто мнимыми. В зависимости от свойства материала они и значение k , определенные из условия (3), могут быть либо действительными, либо сопряженными комплексными числами. Тогда из (1) и (4) следует, что выражения для напряжений и перемещений всегда принимают действительные значения.

Для определенности во всех случаях мы предположим, что действительные части ν_1 и ν_2 положительны, т. е.

$$\operatorname{Re} \nu_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \nu_2 > 0.$$

Для изотропного тела, когда

$$c_{11} = c_{33} = \lambda_1 + 2\mu_1, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda_1, \quad c_{44} = \mu_1, \quad (5)$$

где λ_1 и μ_1 коэффициенты Ламе, из (2) и (3) получим

$$\nu_1 = \nu_2 = k_1 = k_2 = 1. \quad (5')$$

В остальных случаях корни уравнения (2) не равны между собою. Следовательно, различны и корни уравнения (3).

Решая уравнения (4) методом разделения переменных, для функции $\varphi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) получим следующую фундаментальную систему:

$$\varphi_i(r, z) = \begin{cases} [AI_0(\nu_i \lambda r) + BK_0(\nu_i \lambda r)] [C \sin \lambda z + D \cos \lambda z] \\ \left[A_1 \operatorname{sh} \frac{\mu z}{\nu_i} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\mu z}{\nu_i} \right] [C_1 J_0(\mu r) + D_1 Y_0(\mu r)] \end{cases}, \quad (6)$$

где λ и μ — произвольные действительные параметры.

Отметим, что функции

$$z, \ln r, z \ln r, \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2} \quad (6')$$

также являются решениями уравнений (4). Здесь I_i , K_i — функции Бесселя i -го порядка от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, а J_i и Y_i — функции Бесселя первого и второго рода с действительным аргументом.

В силу (6) и (6') функции φ_i ищем в виде (6)

$$\begin{aligned} \varphi_i(r, z) = & a_i z + b_i \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} I_0(\nu_i \lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(i)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_i} + C_k^{(i)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_i} \right) J_0(\mu_k r), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (7)$$

где μ_k — корни уравнения $J_1(\mu_k R) = 0$, а $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$.

Подставляя значения $\varphi_i(r, z)$ из (7) в (1) и используя условие (3), для напряжений и перемещений получим следующие выражения

$$\begin{aligned} u(r, z) = & r(b_1 + b_2) + \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1 A_k^{(1)} I_1(\nu_1 \lambda_k r) + \nu_2 A_k^{(2)} I_1(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k \cos \lambda_k z - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_1(\mu_k r), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(r, z) = & a_1 k_1 + a_2 k_2 - 2z \left(\frac{b_1 k_1}{\nu_1^2} + \frac{b_2 k_2}{\nu_2^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} k_1 I_0(\nu_1 \lambda_k r) + \\ & + A_k^{(2)} k_2 I_0(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k \cos \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k_1}{\nu_1} B_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{k_1}{\nu_1} C_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{\nu_2} B_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \frac{k_2}{\nu_2} C_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_0(\mu_k r), \quad (9) \end{aligned}$$

$$v_z(r, z) = -c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1 (1 + k_1) A_k^{(1)} I_1(\nu_1 \lambda_k r) + \nu_2 (1 + k_2) A_k^{(2)} I_1(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k^2 \sin \lambda_k z -$$

$$-c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1} B_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_1}{\nu_1} C_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_2}{\nu_2} B_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + \frac{1+k_2}{\nu_2} C_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k^2 J_1(\mu_k r), \quad (10)$$

$$\sigma_z(r, z) = -2c_{44}[(1+k_1)b_1 + (1+k_2)b_2] - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} [\nu_1^2 (1+k_1) A_k^{(1)} I_0(\nu_1 \lambda_k r) + \\ + \nu_2^2 (1+k_2) A_k^{(2)} I_0(\nu_2 \lambda_k r)] \lambda_k^2 \cos \lambda_k z + c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+k_1) B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \right. \\ \left. + (1+k_1) C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + (1+k_2) B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + (1+k_2) C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right] \mu_k^2 J_0(\mu_k r), \quad (11)$$

$$\sigma_r(r, z) = -(c_{11} - c_{12})(b_1 + b_2) + 2c_{44} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} b_1 + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} b_2 \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(1)} \left[c_{44} (1+k_1) I_0(\nu_1 \lambda_k r) - \nu_1 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_1 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] + \right. \\ \left. + A_k^{(2)} \left[c_{44} (1+k_2) I_0(\nu_2 \lambda_k r) - \nu_2 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_2 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] \right\} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z + \\ + \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k J_1(\mu_k r) - \\ - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_1}{\nu_1^2} C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \right. \\ \left. + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k^2 J_0(\mu_k r). \quad (12)$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(r, h) = f_1(r) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_0(\mu_k r) \\ \sigma_z(r, 0) = f_2(r) &= d'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k J_0(\mu_k r) \\ \tau_{rz}(r, h) = f_3(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k J_1(\mu_k r) \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_4(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} e'_k J_1(\mu_k r) \end{aligned} \right\} (0 \leq r \leq R) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}(R, z) = f_5(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin \lambda_k z \\ u(R, z) = f_6(z) &= f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \lambda_k z \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq h) \quad (13)$$

Здесь мы допускаем, что функция f_6 непрерывна, а f_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}(0, z) = u(0, z) = 0. \quad (14)$$

Условиями (13) и (14) полностью определяются все напряжения и перемещение u . Перемещение же w определяется с точностью до постоянной $a_1 k_1 + a_2 k_2$. Для определения последней предполагаем, что перемещения w на окружности $r = R, z = 0$ боковой поверхности цилиндра равны нулю

$$w(R, 0) = 0. \quad (15)$$

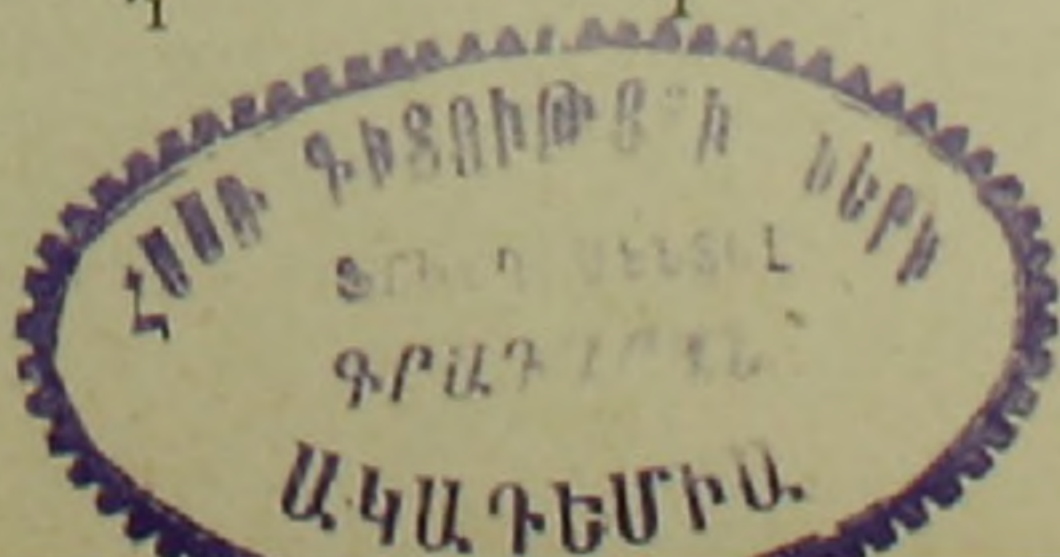
Легко видеть, что условия (14) удовлетворяются тождественно.

Удовлетворив же условиям (13) и (15), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (7), получаем ряд соотношений. При получении этих соотношений пользуемся разложениями Фурье-Дини (7) функций $I_0(\nu_i \lambda_k r)$ и $\frac{1}{r} I_1(\nu_i \lambda_k r)$ по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$, где μ_k — корни уравнения $J_1(xR) = 0$.

Принимая во внимание, что для трансверсально изотропного материала $\nu_1 \neq \nu_2$ и $k_1 \neq k_2$, из указанных обоих соотношений для постоянных интегрирования получаем их значения.

Подставляя найденные значения коэффициентов в (7), для функций $\varphi_i(r, z)$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) = & a_1 z + b_1 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_1^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + k_2) c_{44} \lambda_k f_k + g_k I_0(\nu_1 \lambda_k r)}{(k_1 - k_2) c_{44} \nu_1 \lambda_k^2 I_1(\nu_1 \lambda_k R)} \cos \lambda_k z - \\ & - \frac{1}{(1 + k_1) c_{44}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^2 \Delta_k} \left\{ e'_k \left[\nu_1 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nu_2 \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} + \nu_1 \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] + \right. \\ & + \alpha'_k \left[\operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \frac{\nu_1}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] - \\ & \left. - \alpha_k \left[\frac{\nu_1}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \operatorname{ch} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] - \right. \end{aligned}$$



$$- e_k \left[\nu_1 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \nu_1 \operatorname{sh} \frac{\mu_k (h - z)}{\nu_1} - \right. \\ \left. - \nu_2 \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} \right] \Bigg\}, \quad (16)$$

где

$$(k_2 - k_1) b_2 = \frac{1}{R c_{44}} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k} - \frac{d_0 + d'_0}{4 c_{44}} - (1 + k_1) \frac{f_0}{R}, \\ (k_1 - k_2) b_1 = \frac{1}{R c_{44}} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k} - \frac{d_0 + d'_0}{4 c_{44}} - (1 + k_2) \frac{f_0}{R}, \\ \alpha_k = d_k + \frac{2}{(k_1 - k_2) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p N_{kp}}{[\nu_1^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2] [\nu_2^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2]}, \\ \alpha'_k = d'_k + \frac{2}{(k_1 - k_2) R J_0(\mu_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p N_{kp}}{[\nu_1^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2] [\nu_2^2 \lambda_p^2 + \mu_k^2]}, \quad (17) \\ N_{kp} = (\nu_2^2 - \nu_1^2) c_{44} (1 + k_1) (1 + k_2) \mu_k^2 \lambda_p f_p + g_p \{ (k_2 - k_1) \nu_1^2 \nu_2^2 \lambda_p^2 + \\ + [\nu_2^2 (1 + k_2) - \nu_1^2 (1 + k_1)] \mu_k^2 \}, \\ \Delta_k = 2 - 2 \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\mu_k h}{\nu_2} + \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1 \nu_2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2}.$$

Для получения $\varphi_2(r, z)$ достаточно в формуле (16) индексы 1 и 2 при коэффициентах a , b , k , ν заменить соответственно на 2 и 1.

При удовлетворении граничных условий получается также следующее соотношение:

$$d'_0 - d_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda_k},$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси цилиндра.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ն. ԲՍԲԼՈՅԱՆ

Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի մասին

Հոդվածում արվում է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ նյութի իզոտրոպիայի հարթութիւնները ուղղահայաց են գլանի առանցքին, իսկ եզրային պայմանները արված են հետևյալ ձևով. գլանի հիմքերի վրա հայտնի են լարումները, իսկ կողմնային մակերևույթի վրա՝ շոշափող լարումները և սաղիալ տեղափոխումները:

Դիտված խնդիրը կարող է ոգտագործվել կլոր հաստ սալերի ծուխն մի քանի խնդիրների լուծումներն ստանալու համար: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է շարքերով՝ բոլոր Բեսսելի և Էռանկյունաչափական ֆունկցիաների, որոնց գործակիցները որոշվում են եզրային պայմաններով:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Г. Лехницкий, Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида ПММ, т. 4, вып. 3 (1940). - С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, ГИТТЛ, М.—Л., 1950. ² С. Г. Лехницкий, Изгиб трансверсально-изотропной толстой плиты. „Всесоюзное совещание по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики“. Тезисы докладов, Тбилиси, 1961, 41—43. ³ Г. А. Эллиотт, Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. „Proc. Camb. Phil. Soc.“, 44, 1948, 522—533. ⁴ Ж. Г. Чакраворти, On the distribution of stress in an infinite circular cylinder..., Bull. Cal. Math. Soc., vol. 48, No. 4, 1956, 163—169. ⁵ Б. Л. Абрамян и А. А. Баблоян, „Известия АН АрмССР“, (серия ф.-м. наук), том XI, № 4, 95—106 (1958). ⁶ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. Часть I. Госизиздат, М., 1949.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

О формуле центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным сечением

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/IV 1961)

Задача об определении центра изгиба изотропного тела при помощи двух функций комплексного переменного исследована Р. Капильдео⁽¹⁾. Та же задача при помощи функций Сен-Венана и Прандтля решена В. В. Новожиловым⁽²⁾.

В настоящей работе рассматривается задача об определении центра изгиба анизотропного (неортоотропного) призматического стержня с симметричным поперечным сечением. Доказано, что для решения этой задачи достаточно знать только функцию напряжения (функция Прандтля) при кручении анизотропного стержня.

В качестве приложения полученной формулы решена задача об определении положения центра изгиба анизотропного призматического стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля В. П. Ветчинкина⁽³⁾.

1. Рассмотрим призматический стержень с симметричным поперечным сечением, ограниченный кривыми

$$y = f(x), \quad (1.1)$$

$$y = -f(x).$$

Здесь $f(x)$ имеет необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x .

Поместим начало координат в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем геометрическую ось стержня за ось z , а оси x и y совместим с главными осями инерции сечения. Примем далее, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P , направленной по оси y .

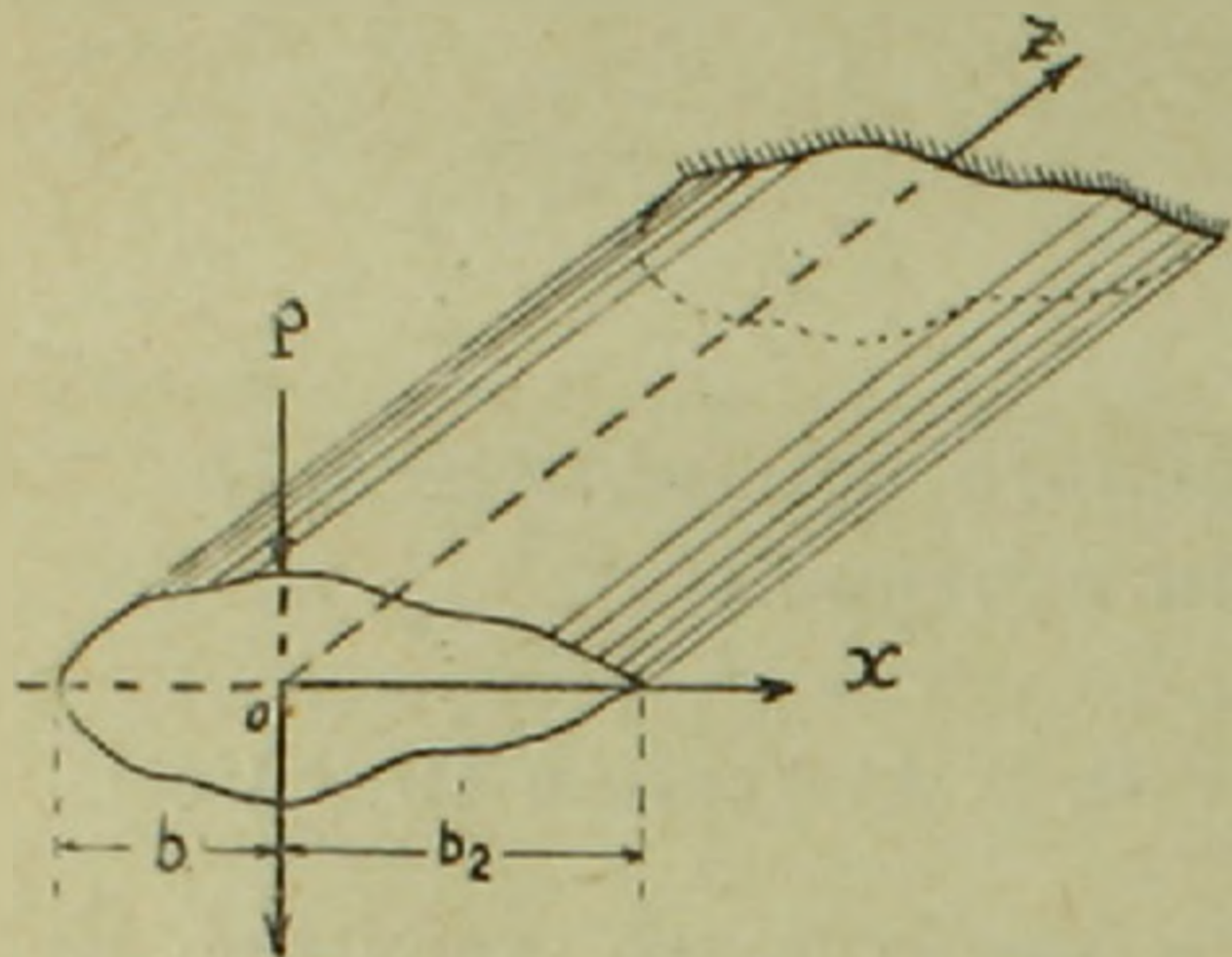
Тогда напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_z = -\frac{P}{I} \cdot zy,$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P}{2I} \cdot [y^2 - f^2(x)]. \quad (1.2)$$

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений при изгибе, I — момент инерции относительно главной оси x .

Как известно (⁴), задача об изгибе призматического стержня, имеющего только одну плоскость упругой симметрии, нормальную к



Фиг. 1.

оси (т. е. неортотропную), сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными с неразделяющимися переменными

$$L(\Psi) = F(x, y, a_{ij}) \quad (1.3)$$

с граничным условием на контуре s

$$\Psi|_s = \frac{P}{2I} \cdot \int_0^s (y^2 - f^2) dx = 0, \quad (1.4)$$

где

$$L = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} \cdot a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \quad a_{45} = a_{54}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

$$F(x, y, a_{ij}) = -\frac{P}{I} \left[2a_{13}x + (a_{36} + a_{45})y + \frac{a_{44}D_x f^2}{2} \right] - 2\vartheta, \quad (1.5)$$

a_{ij} — упругие постоянные, ϑ — постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины.

Закручивания не будет, если точка приложения силы совпадет с центром изгиба. В этом случае, полагая $\vartheta = 0$, координата $\bar{x}$ центра изгиба определяется так

$$\bar{x} = \frac{1}{P} \cdot \iint_2 (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{yz} \cdot x) dx dy,$$

или, имея в виду (1.2), интегрируя по частям, находим

$$\bar{x} = -\frac{2}{P} \cdot \iint_2 \Psi d\Omega - \frac{1}{2I} \cdot \iint_2 [y^2 - f^2(x)] x dx dy. \quad (1.6)$$

Если предполагать, что неортотропный стержень деформируется скручивающими моментами, тогда функция напряжения Φ (функция Прандтля) удовлетворяет следующему уравнению (⁵)

$$L(\Phi) = -2 \quad (1.7)$$

и условию на контуре поперечного сечения

$$\Phi|_s = 0. \quad (1.8)$$

Поставим задачу: определить положение центра изгиба, имея

только функцию напряжений при кручении Φ , не решая задачи об изгибе, т. е. не решая уравнения (1.3).

Для этого достаточно показать, что входящий в (1.6) интеграл $\iint_{\Omega} \Psi d\Omega$ можно выразить через интеграл от функции Φ . С этой целью составим следующее скалярное произведение

$$(\Phi, L(\Psi)) = \iint_{\Omega} \Phi L(\Psi) d\Omega. \quad (1.9)$$

Для выражения (1.9) применим вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} (\Phi, L(\Psi)) = & - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_s \Phi \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \cos(\nu, \hat{x}_i) ds. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $(\nu, \hat{x}_i)$ — угол между осью Ox_i и внешней нормалью данного замкнутого контура.

Контурный интеграл, стоящий в выражении (1.10), есть нуль по условию (1.8). Следовательно, (1.10) примет вид

$$(\Phi, L(\Psi)) = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.11)$$

С другой стороны, учитывая (1.3), скалярное произведение можно представить так

$$\iint_{\Omega} \Phi \cdot F(x, y, a_{ij}) d\Omega = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.12)$$

Теперь составим такое выражение

$$(\Psi, L(\Phi)) = \iint_{\Omega} \Psi L(\Phi) d\Omega,$$

которое, принимая формулы Грина и учитывая (1.4), легко видеть, примет вид

$$(\Psi, L(\Phi)) = - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.13)$$

Принимая во внимание (1.7), из (1.13) находим

$$2 \iint_{\Omega} \Psi d\Omega = \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} a_{i+3, k+3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega. \quad (1.14)$$

Учитывая $a_{45} = a_{54}$, при помощи выражений (1.12) и (1.14) устанавливаем

$$-2 \iint_{\Omega} \Psi d\Omega = \iint_{\Omega} \Phi \cdot F d\Omega. \quad (1.15)$$

Далее, пользуясь (1.15) и (1.5), для определения положения центра изгиба из (1.6) находим следующую формулу:

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \left\{ \iint_{\Omega} \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}D_x f^2] dx dy + \right. \\ \left. + \iint [y^2 - f^2(x)] x dx dy \right\}$$

или, интегрируя последнее выражение по y и подставляя значение

$$I = \frac{2}{3} \int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx, \text{ окончательно получим}$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}D_x f^2] dx dy + \\ + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^3(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx}. \quad (1.16)$$

В частном случае, для определения положения центра изгиба ортотропного стержня, у которого плоскости упругой симметрии перпендикулярны к главным осям инерции поперечных сечений ($a_{36} = a_{45} = 0$, $a_{44} = \frac{1}{G_{23}}$, $a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}$), из (1.16) получим

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot \left[\frac{D_x f^2}{G_{23}} - \frac{4\nu_{31}x}{E_3} \right] dx dy + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^3(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx}. \quad (1.17)$$

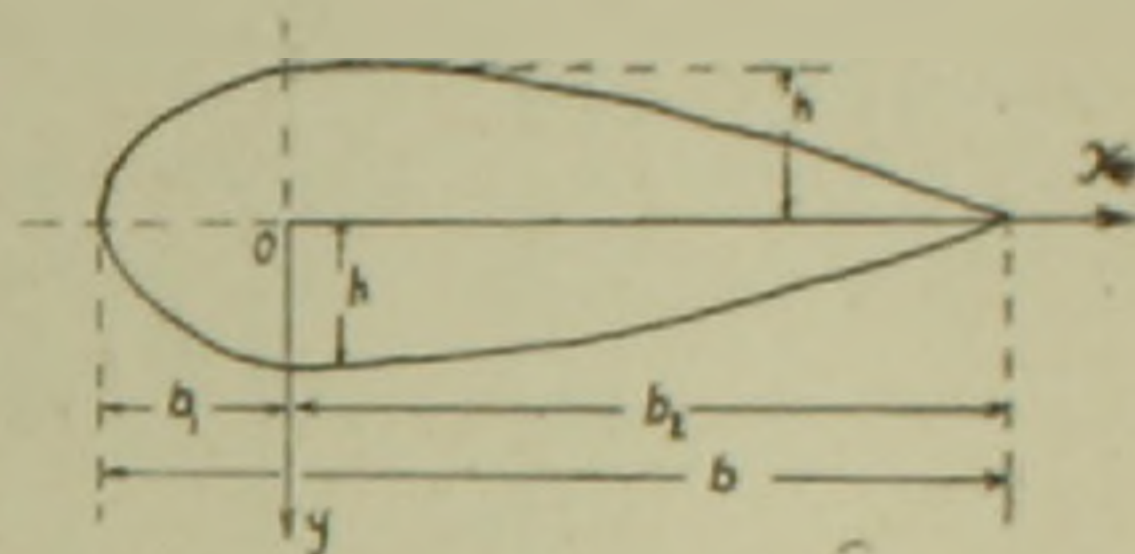
А для определения центра изгиба изотропного стержня с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν ($\nu_{31} = \nu_{32} = \nu$, $E_3 = E$, $G_{23} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$), находим

$$\bar{x} = \frac{1}{EI} \iint_V \Phi \cdot [2vx - (1 + \nu) D_x f^2] dx dy + \frac{\int_{-b_1}^{b_2} x f^2(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_2} f^2(x) dx} \quad (1.18)$$

2. *Определение центра изгиба анизотропного стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля.* Пусть сечением стержня является профиль Ветчинкина, т. е. сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол (фиг. 2)

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{x + b_1}{b} \cdot (b_2 - x)}, \quad (2.1)$$

где
$$a = \frac{3\sqrt{3} \cdot h}{2}.$$



Фиг. 2.

Величины b_1 и b_2 определяются из условий, что начало координат совпадает с центром тяжести

$$b_1 = b \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}, \quad b_2 = b \cdot \left[1 - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} \right]$$

или, пользуясь известной формулой гамма-функции $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, находим

$$b_1 = \frac{3}{7} \cdot b, \quad b_2 = \frac{4}{7} \cdot b.$$

Предположим, что точка приложения силы совпадает с центром изгиба. Так как рассматривается удлиненный профиль, то $\lambda = \frac{h}{b}$ естественно будет малым параметром.

Тогда уравнение (2.1) можно написать в более удобном виде

$$y^2 - \lambda^2 \varphi^2(x) = 0, \quad (2.2)$$

где
$$\varphi(x) = c(x + b_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_2 - x), \quad c = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{b}}. \quad (2.2)$$

Решая дифференциальное уравнение (1.7) при условии (1.8) методом малого параметра, для функции Φ получим ⁽⁶⁾

$$\Phi(x, y) = \frac{\lambda^2 \varphi^2 - y^2}{a_{55}} + \lambda^2 \cdot \frac{a_{44}}{a_{55}^2} \cdot \left\{ (\lambda^2 \varphi^2 - y^2) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{D^2 \varphi^2}{2} + \frac{y \cdot a_{45} D^3 \varphi^2}{3a_{55}} \right] + \dots \} \quad (2.3)$$

Подставляя выражение для функции напряжения из (2.3) в (1.16), интегрируя сначала по y , а потом в полученных интегралах вводя новую переменную так $x = bz - b_1$, получим эйлеровый интеграл первого порядка (бета-функция), затем, применяя формулы приведения $B(\alpha, \beta)$ и выполняя ряд громоздких преобразований, находим

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \frac{b}{B\left(\frac{5}{2}, 4\right)} \left\{ \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) \cdot \left[B\left(\frac{7}{2}, 4\right) - \frac{B\left(\frac{5}{2}, 2\right) \cdot B\left(\frac{5}{2}, 4\right)}{B\left(\frac{3}{2}, 2\right)} \right] - \right. \\ & - \lambda^2 \cdot \frac{12a_{13}a_{44}}{11a_{55}^2} \cdot \left[\frac{B\left(\frac{3}{2}, 4\right) \cdot B\left(\frac{5}{2}, 2\right)}{B\left(\frac{3}{2}, 2\right)} - B\left(\frac{5}{2}, 4\right) \right] + \\ & \left. + \lambda^4 \cdot \frac{4a_{44}}{3315a_{55}^3} \cdot B\left(\frac{3}{2}, 5\right) \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] \right\} + \dots \end{aligned}$$

Принимая во внимание значения бета-функции, окончательно для определения центра изгиба рассматриваемого неортотропного стержня с сечением в виде удлиненного авиационного профиля получается такая формула

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -\frac{4b}{91} \cdot \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{44}}{77a_{55}^2} + \\ & + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{44}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

что совпадает с результатом, полученным в работе (7) иным способом.

Грифс и Тейлор (8) при помощи приближенного метода определили положение центра изгиба для изотропного призматического стержня с удлиненным профилем. По их формуле, дающей преуменьшенное значение координаты центра изгиба (т. е. ее нижнюю оценку), для авиационного профиля получается

$$\bar{x}_{\text{гр.}} = -\frac{4b}{91}. \quad (2.5)$$

Л. С. Лейбензон (9) приближенным методом получил следующее выражение для положения центра изгиба рассматриваемого профиля (ортотропного)

$$\bar{x}_L = -\frac{4b}{91} \cdot \left(1 + \frac{4G_{13}\nu_{13}}{E_3} \right), \quad (2.6)$$

которое является преувеличенным по сравнению с точным.

Таким образом, учитывая (2.5), (2.6) и (2.4), находим

$$\bar{x} = \bar{x}_a - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{41}}{77a_{55}^2} + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{41}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots \quad (2.7)$$

или

$$\bar{x} = \left(1 + \frac{4G_{13}v_{13}}{E_3} \right) \cdot \bar{x}_{\text{гп}} - \lambda^2 \cdot \frac{48a_{13}a_{41}}{77a_{55}^2} + \\ + \lambda^4 \cdot \frac{32a_{41}}{585a_{55}^3} \cdot [45a_{44}a_{55} + 7a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \dots \quad (2.8)$$

Итак, из полученной формулы (2.7) или (2.8) видно, что первое слагаемое совпадает с выражением центра изгиба для ортотропного авиационного профиля, а в остальных слагаемых, особенно в последнем, выявляется влияние неортотропности.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Սիմետրիկ կտրվածքով անիզոտրոպ պրիզմայան հողի ծովան կենտրոնի բանաձևի մասին

Իզոտրոպ մարմնի ծովան կենտրոնի որոշման խնդիրը, առանց լուծելու ծովան խնդիրը, կոմպլեքս փոփոխականի երկու ֆունկցիաներով ուսումնասիրել է Ո. Կապիլ-դեոն⁽¹⁾:

Այնուհետև նույն խնդիրը Սեն-Վենանի և Պրանգտլի ֆունկցիաների ոգնոթյամբ լուծել է Վ. Վ. Նովոժիլովը⁽²⁾:

Ներկա աշխատանքում ստացված է նոր բանաձև սիմետրիկ ընդլայնական կտրվածքով անիզոտրոպ (ոչ օրիտրոպ) պրիզմայան հողերի ծովան կենտրոնի որոշման համար: Ցույց է տրված, որ այդ խնդրի լուծման համար բավական է ունենալ անիզոտրոպ ձողերի ոլորման լարումների ֆունկցիան (Պրանգտլի ֆունկցիան):

Որպես կերասուբյուռն ստացված բանաձևի՝ լուծված է երկարացված ափսոսանքով պրոֆիլով (Վ. Պ. Վեստինկինի⁽³⁾ ափսոսանքով պրոֆիլը) անիզոտրոպ պրիզմայան հողի ծովան կենտրոնի խնդիրը: Այդ արդյունքը համեմատված է այլ եղանակներով լուծված նույն խնդրի արդյունքների հետ⁽⁷⁻⁹⁾:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ P. Капильдео, „Flexure with shear centres, a general treatment with complex variable“ Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, 49, № 2, 308—318. ² В. В. Новожилов, Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958. ³ В. П. Ветчинкин, Теория гребных винтов. М., 1926 (лиггр.) стр. 453. ⁴ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. Госиздат технико-теоретической литературы. М.—Л., 1950. ⁵ W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig—Berlin (Teubner), 1928. ⁶ В. С. Саркисян, „Известия АН АрмССР“ (серия физ.-мат. наук), том XII, № 2 (1959). ⁷ В. С. Саркисян, „Известия АН АрмССР“ (в печати). ⁸ А. А. Грифс и Б. Б. Тейлор. R. В М., 399, 1917, appendix. ⁹ Л. С. Лейбензон, Собрание трудов, том I, изд. АН СССР, М., 1951.

О. С. Мергелян

Излучение заряженной токонесущей нити в движущейся среде

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 31/1 1961)

Рассмотрено переходное излучение заряженной нити, несущей ток, при прохождении через движущуюся среду с границей раздела, а также излучение в безграничной движущейся среде и при движении параллельно границе раздела сред. При решении граничных задач был использован метод, предложенный в ⁽¹⁾.

§ 1. *Излучение в движущейся среде при отсутствии границы раздела.* Излучение заряженной токонесущей нити в покоящейся среде было рассмотрено А. И. Морозовым ⁽⁴⁾, также в ^(3, 5, 6). Ниже будет рассмотрено излучение такой нити в движущейся среде. Пусть среда с постоянными ϵ и μ движется со скоростью $u = u_x$. Нить, имеющая заряд линейной плотности ρ_0 и несущая ток j_0 , движется со скоростью $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_z)$, оставаясь при своем движении параллельной оси y . Введем штрихованную систему координат, связанную со средой. В ней нить имеет скорость $\vec{v}' = \vec{v}'(v'_x, v'_z)$. Решениями уравнений Максвелла в штрихованной системе координат являются интегралы Фурье ⁽³⁾

$$\vec{E}'(\vec{\rho}', t') = \int \vec{E}'(\vec{x}') \exp \{ i(\vec{x}' \vec{\rho}' - \omega' t') \} d\vec{x}', \quad (1)$$

где $\vec{x}' = \vec{x}'(k'_x, k'_z)$, $\omega' = \vec{x}' \vec{v}'$, $\vec{\rho}'$ — радиус-вектор в плоскости (x', z') , а Фурье-компоненты имеют вид ⁽³⁾

$$\vec{E}'(\vec{x}') = \frac{i\rho_0}{\pi\epsilon} \frac{\frac{\omega' \vec{v}'}{c^2} \epsilon\mu - \vec{x}'}{x'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} \epsilon\mu} \quad \text{и т. д.} \quad (2)$$

В лабораторной системе координат решениями уравнений поля будут интегралы Фурье

$$\vec{E}(\vec{\rho}, t) = \int \vec{E}(\vec{x}) \exp \{ i(\vec{x} \vec{\rho} - \omega t) \} d\vec{x}, \quad (3)$$

где $\vec{x} = \vec{x}(k_x, k_z)$, $\omega = \vec{x} v$, $\vec{r}$ — радиус-вектор в плоскости (x, z) , $\vec{E}(\vec{x})$ и $\vec{x}$ получаются соответственно из $\vec{E}'(\vec{x}')$ и $\vec{x}'$ преобразованиями Лоренца.

$$1. \quad v = v_z, \quad \omega = k_z v, \quad v'_x = -u, \quad v'_z = v \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Для Фурье компонент полей получим*

$$E_x(\vec{x}) = \frac{i\rho_0}{\pi\varepsilon} \frac{(\beta^2\varepsilon\mu - 1)k_x - \frac{u\omega}{c^2}(\varepsilon\mu - 1)}{(1 - \beta^2) \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \lambda^2 \right)},$$

$$E_y^j(\vec{x}) = \frac{i j_0}{\pi c} \frac{\mu\omega}{(1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \lambda^2 \right)},$$

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2(1 - \beta^2)} (k_x u - \omega)^2 - k_x^2. \quad (4)$$

Индекс j означает, что поля вызваны током в нити. Интегрирование по k_x сводится к взятию вычета в точке $k_x = \frac{\omega}{v} a_{1,2}$,

где

$$a_{1,2} = \frac{1}{\beta^2\varepsilon\mu - 1} \left\{ \frac{uv}{c^2} (\varepsilon\mu - 1) \pm \right.$$

$$\left. \pm (1 - \beta^2)^{1/2} \left[\frac{v^2}{c^2} \varepsilon\mu - 1 + \beta^2\varepsilon\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right\},$$

индексу 1 соответствует знак $+$, а индексу 2 знак $-$. Излучение имеет место при

$$\frac{v^2}{c^2} \varepsilon\mu - 1 + \beta^2\varepsilon\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) > 0. \quad (5)$$

Угол θ , составляемый вектором $\vec{x}$ с осью z , определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = a_{1,2}. \quad (6)$$

Вследствие движения среды излучение (в отличие от случая покоящихся сред) распределено несимметрично относительно плоскости $x = 0$. Например, при $\beta^2\varepsilon\mu - 1 < 0$ и скоростях нити и среды, удовлетворяющих

$$\frac{v^2}{c^2} < \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon\mu - \beta^2}, \quad (7)$$

оно сосредоточено в области $x < 0$, а $\vec{x}$ составляет с осью z острые

* Формула (4) для заряда в нити согласуется с формулами (10) работы (2), если в последних перейти к плоской задаче.

углы. При $\beta^2 \varepsilon \mu > 1$ и скоростях (7) оно опять находится в области $x < 0$, но угол между $\vec{x}$ и осью z уже тупой.

После интегрирования по k_x для полей получим

$$E_x^{1,2} = \frac{\rho_0}{v} \int \frac{1}{\varepsilon} \exp \left\{ i \left(\frac{\omega}{v} z + a_{1,2} x - \omega t \right) \right\} d\omega, \quad (8)$$

$$2. \quad v = v_x, \quad \omega = k_x v$$

Для Фурье-компонент полей получим

$$E_x(\vec{x}) = \frac{i\rho_0}{\pi\varepsilon} \frac{\frac{\omega}{v} \alpha_0^2}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \alpha_0^2} \text{ и т. д.}, \quad (9)$$

где
$$\alpha_0^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ \beta^2 \varepsilon \mu - 1 + \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon \mu - \beta^2) - \frac{uv}{c^2} (\varepsilon \mu - 1) \right\}.$$

Излучение имеет место при $\alpha_0^2 > 0$ и распространяется под углами $\theta_{1,2}$, определяемыми из

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = \pm \alpha_0.$$

Как легко заметить, при $\beta \rightarrow 1$, $\theta_{1,2} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$. Поток энергии излучения дается вектором Пойтинга по Абрагаму, который имеет вид

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\vec{E}\vec{H}] + \frac{\beta^2 \vec{n}}{(1-\beta^2)} (\vec{n} [\vec{E}\vec{H}] - \vec{n} [\vec{D}\vec{B}]) \right\}, \quad (10)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по скорости среды. Заметим попутно, что $\vec{n} ([\vec{E}\vec{H}] - [\vec{D}\vec{B}]) = inv$; в ряде случаев это может облегчить вычисление вектора Пойтинга. В случаях $\vec{u} \parallel \vec{v}$ энергия, излученная единицей длины нити и прошедшая через 2 единичные площадки, перпендикулярные к оси z , будет

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\varepsilon_0^2 \int_{\alpha_0^2 > 0} \frac{\alpha_0}{\varepsilon(\omega)} d\omega. \quad (11)$$

Для плоской задачи в ряде случаев движущаяся среда подобна покоящейся анизотропной среде. Если у нас имеется покоящаяся среда, для которой $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ и $B_i = \mu_{ik} H_k$, где

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix} \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_x & & \\ & \mu_y & \\ & & \mu_z \end{pmatrix},$$

причем ε_y , μ_x и μ_z произвольны, $\varepsilon_x = \varepsilon$,

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2 \varepsilon \mu + \frac{u v}{c^2} (\varepsilon \mu - 1)}$$

$$\mu_y = \frac{c^2 \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon \mu - \beta^2) - \frac{u v}{c^2} (\varepsilon \mu - 1)}{v^2 \varepsilon (1 - \beta^2)}$$

и наша нить движется со скоростью $v = v_x$, то для полей в такой среде мы получим

$$E_x(\vec{\rho}, t) = -\frac{\rho_0}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_z \mu_y - 1 \right)^{1/2}}{(\varepsilon_x \varepsilon_z)^{1/2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ i \frac{\omega}{v} \left[x + \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_z \mu_y - 1 \right)^{1/2} z - vt \right] \right\} d\omega,$$

что при подстановке значений ε_x , ε_z и μ_y дает то же самое, что и (9). Аналогично вектор Пойтинга совпадает с (11).

§ 2. *Переходной эффект в движущейся среде.* Пусть нить переходит из покоящейся среды с постоянными ε_1 , μ_1 в движущуюся среду с постоянными ε_2 , μ_2 (обратный случай получается заменой в формулах v на $-v$). Скорость $v = v_z$, скорость среды $u = u_x$. Границей является плоскость $z = 0$. Граничный эффект учтем введением полей в виде (3)

$$\vec{E}_{1,2}^0(\vec{\rho}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{1,2}(\vec{z}) \exp \{ i(k_x x + \lambda_{1,2} z - \omega t) \} d\omega \quad (12)$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \varepsilon_1 \mu_1 - k_x^2$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{c^2 (1 - \beta^2)} (k_x u - \omega)^2 - k_x^2, \quad (13)$$

причем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

Из граничных условий и условия поперечности $k_x D_{1,2x}(\vec{z}) + \lambda_{1,2} D_{1,2z}(\vec{z}) = 0$ определяются Фурье-компоненты полей излучения.

1. *Излучение в движущуюся среду.* Компоненты Фурье полей имеют вид:

$$E_{2x}^0(\vec{z}) = \frac{\lambda_2}{k_x (\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1)} \{ \varepsilon_1 k_x [E_{1x}(\vec{z}) - E_{2x}(\vec{z})] +$$

$$+ \lambda_1 [D_{1z}(\vec{z}) - D_{2z}(\vec{z})] \} = \frac{i \rho_0}{\pi} \frac{\lambda_2}{k_x (\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1)} \gamma_2,$$

$$H_{2y}^0(\vec{z}) = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} E_{2x}^0(\vec{z}). \quad (14)$$

Здесь $E_{1x}(x)$ и $E_{2x}(x)$ задаются формулами (2) и (4) соответственно (в (2) надо опустить штрихи, а кроме этого ε и μ везде заменяются на ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 соответственно). Введя координаты $z = \rho \cos \theta$ и $x = \rho \sin \theta$, интегрируем (12) по k_x методом перевала (1,3). Точкой перевала является

$$k_{xn} = \frac{\omega}{c} \frac{\beta (\varepsilon_2 \mu_2 - 1) \xi_2 + (1 - \beta^2)^{1/2} \xi_2^{1/2} (\varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} \sin \theta}{\xi_2 (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)} = \frac{\omega}{c} \gamma_{12},$$

где

$$\xi_2 = 1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \beta^2 \sin^2 \theta (\varepsilon_2 \mu_2 - 1),$$

$$\gamma_{2n} = \frac{\omega}{c} (\varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} \xi_2^{-1/2} (1 - \beta^2)^{1/2} \cos \theta = \frac{\omega}{c} \gamma_{20},$$

$$\gamma_{1n} = -\frac{\omega}{c} (\varepsilon_1 \mu_1 - \gamma_{12}^2)^{1/2} = -\frac{\omega}{c} \gamma_{10} \quad (\gamma_{10} \text{ и } \gamma_{20} > 0).$$

Для полей переходного излучения получим

$$E_{2x}^0(\vec{\rho}, t) = \frac{\rho_0}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cos \theta (1 - \beta^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(i \frac{\omega}{c}\right)^{-1/2} (\varepsilon_2 \mu_2)^{1/4}}{\xi_2^{3/4} (\varepsilon_1 \lambda_{20} + \varepsilon_2 \lambda_{10})} \times \\ \times \gamma_{20} \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} (\gamma_{12} \sin \theta + \lambda_{20} \cos \theta) \rho - i \omega t \right\} d\omega. \quad (15)$$

Излучение имеет место, если $\xi_2 > 0$. Из этого условия вытекают некоторые ограничения на область распространения излучения. Частоты, для которых $\varepsilon_2 \mu_2 > 1$, распространяются в области

$$\sin^2 \theta > \frac{\beta^2 \varepsilon_2 \mu_2 - 1}{\beta^2 (\varepsilon_2 \mu_2 - 1)}. \quad (16)$$

Частоты же $\varepsilon_2 \mu_2 < 1$ не имеют ограничений на область распространения, т. е. в случае релятивистской среды ($\beta \sim 1$) мягкая составляющая излучения сдвигается вбок $\left(\theta \sim \pm \frac{\pi}{2}\right)$, тогда как жесткая составляющая его имеет место при любых θ . Поток переходного излучения определяется вектором Пойтинга (10). Полюсы подынтегрального

выражения в (12) $k_x = \pm \frac{\omega}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 - 1 \right)^{1/2}$ и $k_x = \frac{\omega}{v} a_{1,2}$ (в $a_{1,2}$ ε и μ заменены на ε_2 и μ_2) дают вклад в интеграл в том случае, если они не выходят за пределы контура интегрирования, т. е. если

$$0 < \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 - 1 < \frac{v^2}{c^2} \gamma_{12}^2,$$

$$0 < \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 - 1 + \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) < (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\xi_2}. \quad (17)$$

2. *Излучения в неподвижную среду.* Здесь нет ничего качественно отличного от задачи, рассмотренной в (3). Приведем выражение для потока переходного излучения, созданного током в нити. Он будет

$$\frac{dW'}{d\theta} = 2 \frac{j_0^2}{v^2} \frac{\cos^2 \theta}{\pi \rho} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_1 \mu_1^2 |\zeta|^2 d\omega}{\omega |\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \cos^2 \theta}|^2},$$

$$\xi_1^2 = 1 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{1 - \beta^2} [\beta \sin \theta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - 1}]^2, \quad (18)$$

$$\zeta = \left\{ \frac{\frac{v}{c} \left(\mu_2 - \mu_1 \frac{v}{c} \xi_1 \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 \cos^2 \theta} + \frac{\mu_2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \frac{\xi_1 - \frac{c}{v}}{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta - \xi_1^2} \right\}.$$

Кроме этого, вклад в интеграл может дать полюс в точке

$$k_x = \frac{\omega}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ что соответствует отраженному от границы черенковскому потоку.}$$

§ 3. *Излучение при пролете нити параллельно границе раздела сред.* Пусть нить движется со скоростью $v = v_x$ в среде с постоянными ε_1, μ_1 . Плоскость $z = l$ отделяет эту среду от среды ε_2, μ_2 . Координаты нити $z = 0, x = vt$. Поля в первой среде являются суммой решений неоднородных и однородных уравнений поля, а поля во второй среде даются решениями однородных уравнений.

Решения однородных уравнений ищем в виде (4)

$$\vec{E}_{1,2}^0(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{1,2}^0(\vec{z}) \exp \left\{ i \left(\frac{\omega}{v} x + \alpha_{1,2} z - \omega t \right) \right\} d\vec{z},$$

где

$$\alpha_1 < 0 \quad \alpha_2 > 0.$$

1. Среда ε_1, μ_1 покоится, среда ε_2, μ_2 движется со скоростью $u = u_x$. Тогда имеем

$$\alpha_1 = - \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 - 1} = - \frac{\omega}{v} \alpha_{10} \quad (19)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{v} \left[\frac{\beta^2 \varepsilon_2 \mu_2 - 1 + \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon_2 \mu_2 - \beta^2) - 2 \frac{uv}{c^2} (\varepsilon_2 \mu_2 - 1)}{1 - \beta^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{v} \alpha_{20}.$$

Для Фурье-компонент полей излучения из граничных условий получим

$$E_{2x}^0(\vec{r}) = \frac{i\rho_0}{\pi} \frac{\alpha_{10}(\alpha_1 - k_z)\alpha_{20}}{(\varepsilon_1\alpha_{20} + \varepsilon_2\alpha_{10})\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\mu_1\right)} \exp[i l(k_z - \alpha_2)]. \quad (20)$$

Интегрирование сводится к взятию вычета в точке $k_z = \frac{\omega}{v}\alpha_{10}$. Излучение во второй среде имеет место при $\alpha_{20}^2 > 0$ и распространяется под углом $\operatorname{tg} \theta = \alpha_{20}$. Если при этом $\alpha_{10}^2 < 0$, то вся теряемая нитью энергия идет на генерирование излучения во второй среде. Вектор Пойнтинга в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW_2}{dt} &= 4\rho_0^2 \int_{\alpha_{20}^2 > 0} \left| \frac{\alpha_{10}}{\varepsilon_2\alpha_{10} + \varepsilon_1\alpha_{20}} \right|^2 \varepsilon_2\alpha_{20} \exp\left(-2 \frac{cl}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1\mu_1}\right) d\omega, \\ \frac{dW_2^j}{dt} &= 4 \frac{j_0^2}{c^2} \int_{\alpha_{20}^2 > 0} \frac{\mu_2\mu_1^2 \exp\left(-2 \frac{cl}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1\mu_1}\right) d\omega}{|\mu_2\alpha_{10} + \mu_1\alpha_{20}|^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

l — длина волны излучения.

Если же и $\alpha_{10}^2 > 0$, то в формулах (21) надо положить $l = 0$. В первой среде излучение имеет место при $\alpha_{10}^2 > 0$, распространяется под углом $\operatorname{tg} \theta = -\alpha_{10}$, а поток его имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= \rho_0^2 \int_{\alpha_{10}^2 > 0} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1\alpha_{20} - \varepsilon_2\alpha_{10}}{\varepsilon_1\alpha_{20} + \varepsilon_2\alpha_{10}} \left(e^{2i \frac{\omega}{v}\alpha_{10}l} + e^{-2i \frac{\omega}{v}\alpha_{10}l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\varepsilon_1\alpha_{20} - \varepsilon_2\alpha_{10}}{\varepsilon_1\alpha_{20} + \varepsilon_2\alpha_{10}} \right|^2 \right\} \frac{\alpha_{10}}{\varepsilon_1(\omega)} d\omega. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Пусть теперь движется среда ε_1, μ_1 , а покоится среда ε_2, μ_2 . Все сказанное выше остается в силе, если считать, что α_{10} и α_{20} имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \left[\frac{\beta^2\varepsilon_1\mu_1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}(\varepsilon_1\mu_1 - \beta^2) - 2 \frac{uv}{c^2}(\varepsilon_1\mu_1 - 1)}{1 - \beta^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_{20} &= \left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_2\mu_2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Г. М. Гарибяну и Б. М. Болотовскому за интерес к работе и обсуждение результатов.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Հ. Ս. ՍԵՐՔԵԼՅԱՆ

Լիցքավորված հոտաճառար լարի ճառագայթումը ճարձվող միջավայրում

Աշխատանքում հետազոտված է լիցքավորված հոսանքատար լարի շերենկոյան և անդաման ճառագայթումը շարժվող միջավայրում: Համասեռ անվերջ միջավայրի դեպքում, երբ բավարարված են $x_0^2 > 0$ և (5) պայմանները, տեղի ունի շերենկոյան ճառագայթում: Սակայն ճառագայթման անկյունային բաշխումն էապես տարբերվում է անշարժ միջավայրի դեպքից:

Այս դեպքում շարժվող միջավայրը համարված է անշարժ, անիզոտրոպ միջավայրի, որում տեղի ունի $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, $\beta_i \mu_{ik} = D_k$, որտեղ ε_{ik} և μ_{ik} ֆունկցիա են միջավայրի դիելեկտրիկ հաստատունից, լարի և միջավայրի արագության նշաններից:

Հետազոտված է նաև լարի ճառագայթումը, երբ նա անցնում է անշարժ միջավայրից շարժվող միջավայրը և ընդհակառակը: Անդաման ճառագայթումը անշարժ միջավայրի մասում, նման է աշխատանք [3]-ում ստացվածին, իսկ շարժվող միջավայրի մասում, ոպտիկական հաճախականություններից փոքր հաճախականության ալիքները առարկում են միայն (16) պայմանին բավարարող անկյունների տակ:

Լուծված է նույնպես շարժվող և անշարժ միջավայրերը բաժանող հարթութանը զուգահեռ շարժվող լարի ճառագայթման հարցը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. М. Гарибян. ЖЭТФ, 33, 1403, 1957. ² Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе. ЖЭТФ, 37, 1346, 1959. ³ Г. М. Гарибян, О. С. Мергелян. „Изв. АН АрмССР“, 12, № 5 (1959). ⁴ А. И. Морозов. Вестник МГУ, № 1, 72, 1957. ⁵ О. С. Мергелян. „Изв. АН АрмССР“, 13, № 3 (1960). ⁶ А. Г. Ситенко и В. С. Ткалич. ЖЭТФ, 29, 1074, 1959.

ФИЗИКА

А. Г. Карагезян

Температуропроводность и электросопротивление α -титана
и титановых сплавов Т-3, Т-4, ВТ-5, Т-6, Т-8

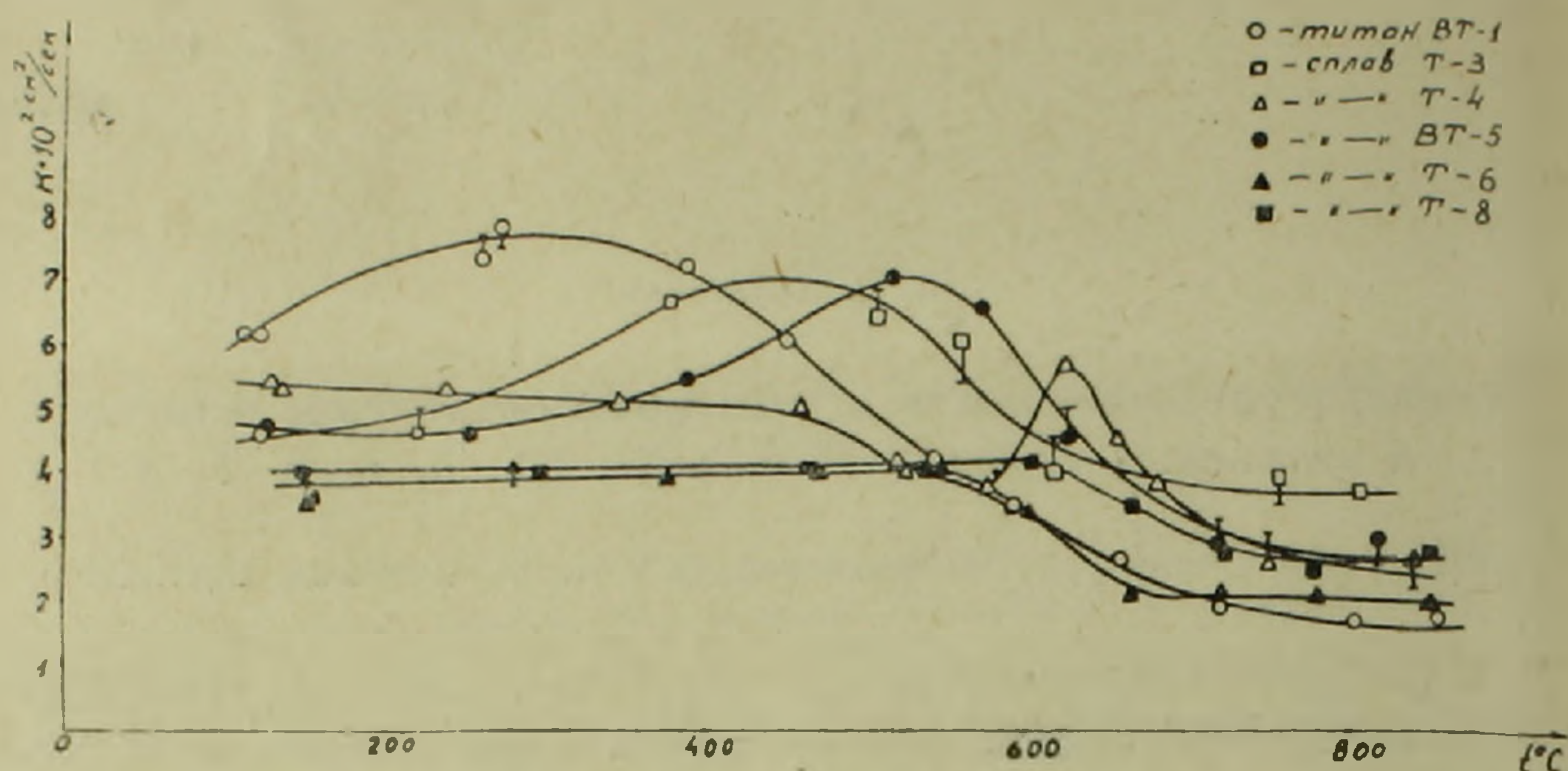
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 13/III 1961)

В Институте металлургии АН СССР за последние годы развита физико-химическая теория жаропрочности применительно к титановым сплавам (^{1,2}). Исходя из разработанных положений о многокомпонентном упрочнении сложных сплавов твердых растворов металлов и достижения максимума жаропрочности в переходных областях от твердых растворов к гетерогенным областям систем, доказана возможность создания высокопрочных и жаропрочных титановых сплавов, далеко превосходящих по своим свойствам свойства чистого титана и существующие как у нас, так и за границей титановые сплавы. В результате этих исследований были синтезированы высокопрочные и жаропрочные сплавы Т-3, Т-4, Т-6, Т-8 (³), состоящие из титана, алюминия, хрома, железа, кремния и бора. Однако тепловые и электрические свойства названных сплавов не изучены. Допуская возможность фазовых превращений в интервале температур 400–600°C, нами была исследована температурная зависимость температуропроводности и электросопротивления, как весьма чувствительного средства для определения точек превращения и выяснения причин, вызывающих аномалии в механических свойствах исследованных сплавов (⁴).

Тепловые и электрические свойства. Температуропроводность и электросопротивление измерялись для титана ВТ-1 и всех выше-названных сплавов. Измерения производились на установке, разработанной В. Е. Микрюковым и автором (⁴).

Как видно из графиков на фиг. 1, температуропроводность всех сплавов испытывает резкое изменение в области температур 500–600°C. По-видимому, не следует обращать особого внимания на несколько различный температурный ход кривых до отмеченной области температур, учитывая, что содержание абсорбированного кислорода в сплавах различно, несмотря на идентичность условий эксперимента и на то, что эксперимент производился в вакууме порядка 10^{-4} мм рт. столба на образцах, предварительно отоженных в той же вакуумной

среде. Из рисунка видно, что у всех сплавов, начиная с температуры 500°C , наблюдается резкое изменение температурного хода кривых температуропроводности. Немонотонный характер имеет и кривая изменения температуропроводности с температурой у чистого титана. Ее максимум приходится на интервал $270\text{--}300^{\circ}\text{C}$. Таким образом зна-



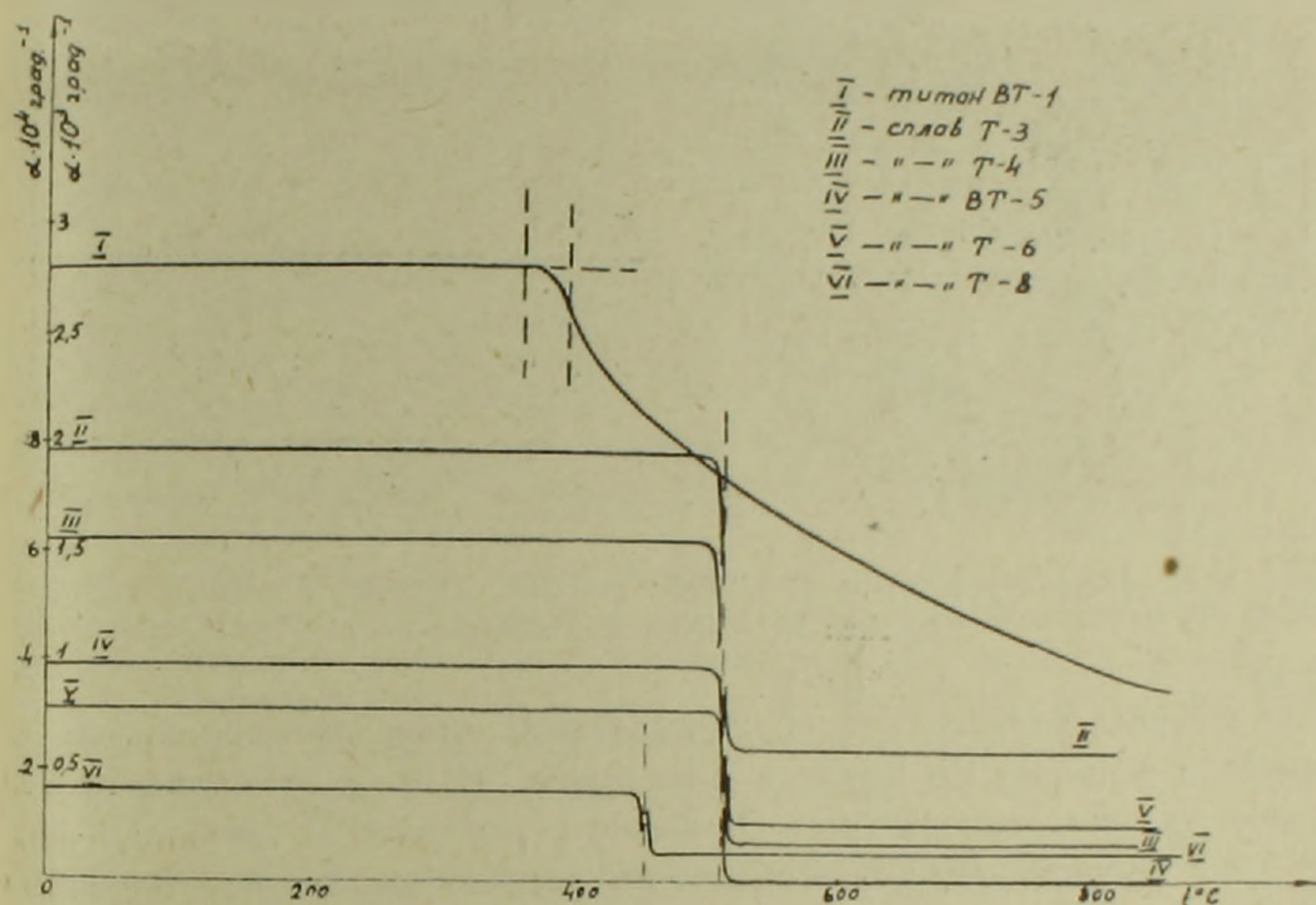
Фиг. 1. Кривые изменения температуропроводности с температурой.

чение температуропроводности находится в хорошем согласии с механическими свойствами исследованных сплавов, для которых интервал рабочих температур не превышает 550°C .

Удельное электросопротивление тех же образцов измерялось в одном и том же опыте вместе с температуропроводностью. Полученное для титана ВТ—1 значение удельного электросопротивления при комнатной температуре 69×10^{-6} ом. см хорошо согласуется с литературными данными (5, 6). Удельное электросопротивление исследованных сплавов при комнатной температуре возрастает с увеличением содержания алюминия в сплаве¹. Удельное электросопротивление всех сплавов растет с температурой линейно, причем температурный коэффициент электросопротивления (фиг. 2) падает с увеличением содержания алюминия в сплаве. В интервале температур $450\text{--}520^{\circ}\text{C}$ все графики испытывают перелом, оставаясь и после прямолинейными. Таким образом интервал температур, где происходят превращения в сплавах, составляет 70°C , причем для сплавов Т—3, Т—4, Т—6, ВТ—5 этот интервал более узок и составляет примерно 20° . Обращает на себя внимание тот факт, что температурный коэффициент электросопротивления для всех сплавов претерпевает изменение в достаточно узкой области температур. Это тем более инте-

¹ Содержание алюминия в сплавах Т—3, Т—4, Т—6, Т—8 меняется от 3 до 7,5 вес. %, увеличиваясь на 1,5 вес. % от сплава к сплаву. Легирующая присадка из Cr, Fe, Si, В в исследованных сплавах составляет 2,5 вес. %. Сплав ВТ—5 имеет в составе 95% Ti + 5% Al.

ресно, что сплав ВТ—5, состоящий только из титана и алюминия, не составляет исключения в этом отношении. Незначительность перелома кривой изменений удельного электросопротивления с температурой в интервале 360—400°C по сравнению со скачком электросопротивления, имеющим место при температуре аллотропического превращения, позволяет думать, что здесь имеет место превращение иного порядка. Область 360—400°C, где имеет место перелом, можно объяснить как границу, начиная от которой рост кристаллитов (увеличение зерен) идет быстрее, чем повышение температуры. При увеличе-

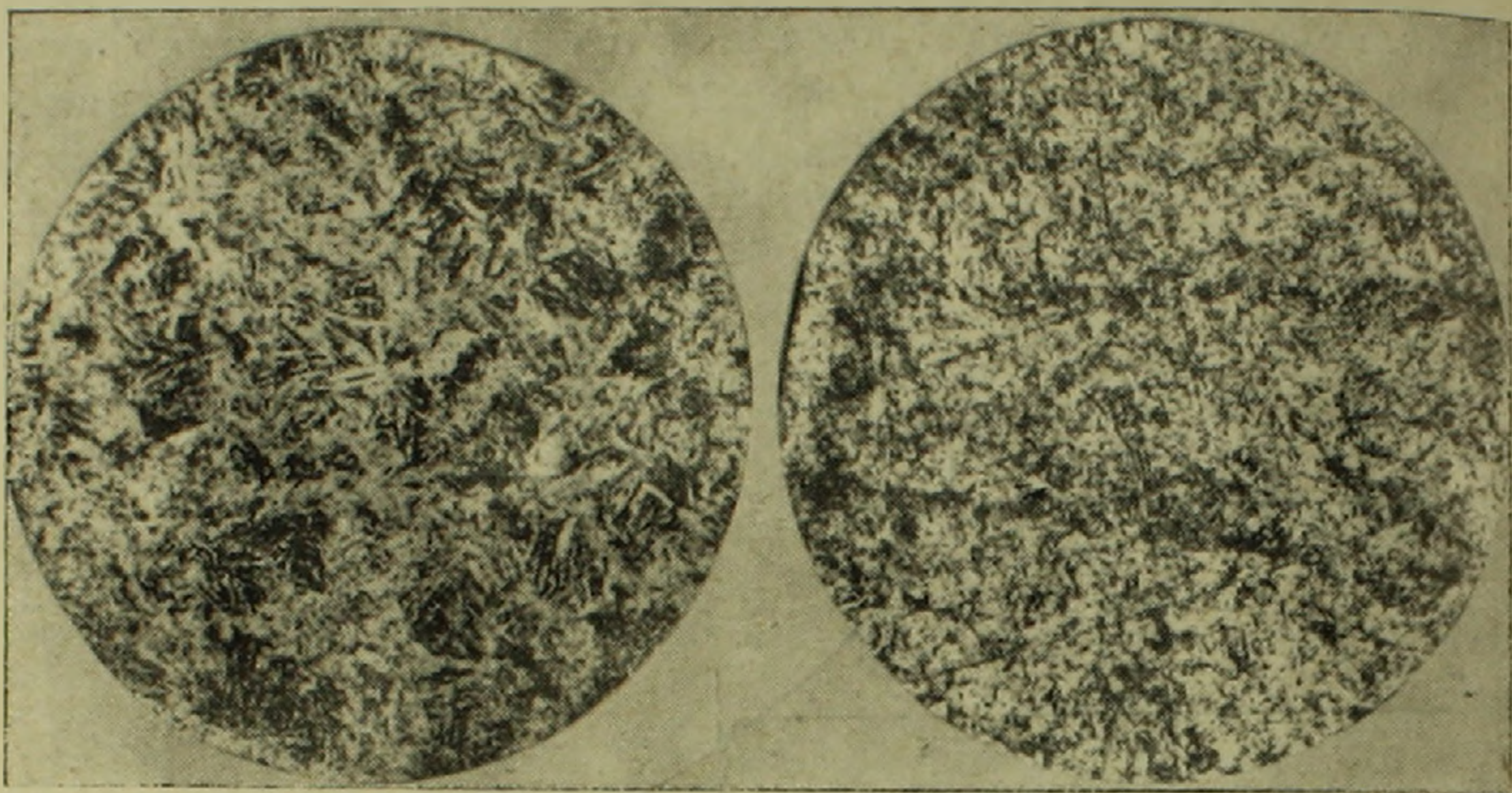


Фиг. 2. Температурный коэффициент электросопротивления для чистого титана и исследованных сплавов.

нии зерен степень дисперсности ($\frac{S}{V}$ — отношение поверхности к объему) уменьшается, вследствие чего приращение электросопротивления в зависимости от температуры уменьшается, что и наблюдается в данном случае. Наличие переломов на кривых электросопротивления мы склонны объяснить не чем иным, как структурными превращениями в самом титане. Микроструктурный анализ подтвердил наши предположения. На фиг. 3 приведены микроструктуры титана ТГ—0, закаленного с температур 350 и 450°C. До температуры 350°C (микроструктуры титана, закаленного с температур, лежащих в интервале 20—350°C не приведены) исследованный титан имеет мартенситообразную структуру (фиг. 3а). При температуре 450°C (фиг. 3б) легко заметить размельчение структуры. Превращение, наблюдаемое в чистом

¹ Были исследованы микроструктуры сплавов Т—3, ВТ—5 и титана ТГ—0 при различных температурах.

титане, можно было объяснить, если содержание железа в нем не было столь малым (0,09%). Так, по Полонису и Парру (⁷), у сплава, содержащего 0,2%, температура мартенситного превращения (M_s) равна $280 \pm 15^\circ \text{C}$ и повышается до 350°C для сплава с 2,2% Fe. Можно предположить, что в данном случае имеет место превращение аустенит-



Фиг. 3. Микроструктура титана ТГ—0 при: а— -350°C ($\times 200$); б— -450°C ($\times 200$). Травлен $\text{HF} + \text{HNO}_3$ в глицерине.

мартенситного характера (Schubumwandlung), обнаруженное в сплавах Co—Pd и в чистом Co Грубе и Винклером (⁸) и в сплавах Fe—Ni Анастаснадисом и Гюрглером (⁹).

Так, микроструктурный анализ подтвердил наши предположения об изменении фазового состава исследованных сплавов в интервале температур, заключающем в себе точку перелома кривых удельного электросопротивления, а также то, что причину этих превращений следует связывать с превращениями, происходящими в самом титане.

Автор приносит глубокую благодарность доктору физико-математических наук В. Е. Микрюкову за предложенную тему и ценные советы при ее выполнении.

Московский государственный университет

Ա. Գ. ՂՐԴԱԳՅՈՋՅԱՆ

α-Ֆազանի և T-3, T-4, BT-5, T-6, T-8 ֆազանի միահալվածքների ջերմաստիճանահադորդակաճանություները ու էլեկտրադիմադրությունները

Սխառագրում հետազոտված է α-տիտանի և տիտանից, ալյումինից, բրոմից, երկաթից, սիլիցիումից և բորից բաղկացած նոր բարձրամուր և կրակամուր տիտանի միահալվածքների ջերմաստիճանահադորդակաճանության ու տեսակարար էլեկտրադիմադրության ջերմաստիճանային կախումը: Հետազոտությունն նպատակը կայանում էր այն անոմալիաների բացատրման մեջ, որոնք տեղի են ունենում նշված միահալվածքների մեխանիկա-

կան հատկություններում: Ստացվել է ջերմային և էլեկտրական հատկությունների և հետազոտված միահալվածքների մեխանիկական հատկությունների լավ համաձայնություն: Փորձ է արվում բացատրելու մեխանիկական հատկություններում անոմալիաները ստրուկտուրային փոխակերպումներով, որոնք առաջանում են հենց տիտանի մեջ: Քանի որ ջերմաստիճանների ինտերվալը, որտեղ նկատվում են էլեկտրադիմադրության կորեքի կոսրվածքները, հեռու է դանդում ալոտրոպիկ փոխակերպման ջերմաստիճանից, ենթադրվում է, որ տվյալ դեպքում տեղի է ունենում աուստենիտա-մարտենսիտային բնույթի փոխակերպում, որպիսին վաղուց հայտնաբերել են Co-Pd, Fe-Ni միահալվածքներում և մաքուր Co-ում մի շարք հեղինակներ: Կատարվել է միկրոստրուկտուրային վերլուծություն (անալիզ), որը հաստատել է այն ենթադրությունները որոնք վերաբերում են հետազոտված միահալվածքների ֆազային բաղադրության փոփոխություններին ջերմաստիճանների ինտերվալում, որտեղ նկատվում են անոմալիաներ նրանց մեխանիկական հատկություններում. ուստի վերոհիշյալ վերլուծությունը հաստատեց նաև այն ենթադրությունը, որ դիտվող փոխակերպումների պատճառը պետք է կապել այն փոխակերպումների հետ, որոնք առաջանում են իր իսկ տիտանի ստրուկտուրայում:

ЛИТЕРАТУРА — БИБЛИОГРАФИЯ

- ¹ И. И. Корнилов, ДАН СССР, 67, 6, 1037 (1949). ² И. И. Корнилов, Л. И. Прихина, Т. Ф. Чуйко, Изв. СФХА ИОИХ АН СССР, 19, 437 (1949). ³ И. И. Корнилов, В. С. Михеев, Т. С. Чернова, Справка об основных свойствах новых высокопрочных титановых сплавов Т-3, 1-4, Т-6, Т-8, Т-9, Т-10. Институт металлургии АН СССР, М., 1958. ⁴ В. Е. Микрюков, А. Г. Карагезян, Установка для исследования температурной зависимости теплопроводности, температуропроводности, электропроводности и термо-Э. Д. С. металлов и сплавов от 20° до плавления металла, М., ЦИТЭИН, 1959. ⁵ S. L. Ames and A. D. McQuillan, Acta metallurgica, 2, 831, 1954. ⁶ W. C. Michels and S. E. Wilford, Phys. Rev., 76, 174, 1949. ⁷ W. C. Polonis and S. G. Parr, Trans. Amer. Inst. min (metall), Engrs. 200, 1148, 1954; J. Metals. 6 (10), 1148, 1954. ⁸ G. Grube und O. Winkler, Z. F. Elektrochemie, 41, 52, 1935. ⁹ L. Anastasiadis und W. Guertler, Z. Metallkunde, 23, 189, 1931.

ФИЗИОЛОГИЯ

Л. С. Гамбарян и И. Р. Мадатова

О путях взаимодействия больших полушарий головного мозга
 при полной перерезке мозолистого тела

(Представлено академиком АН Армянской ССР Л. А. Оганесяном 5/III 1961)

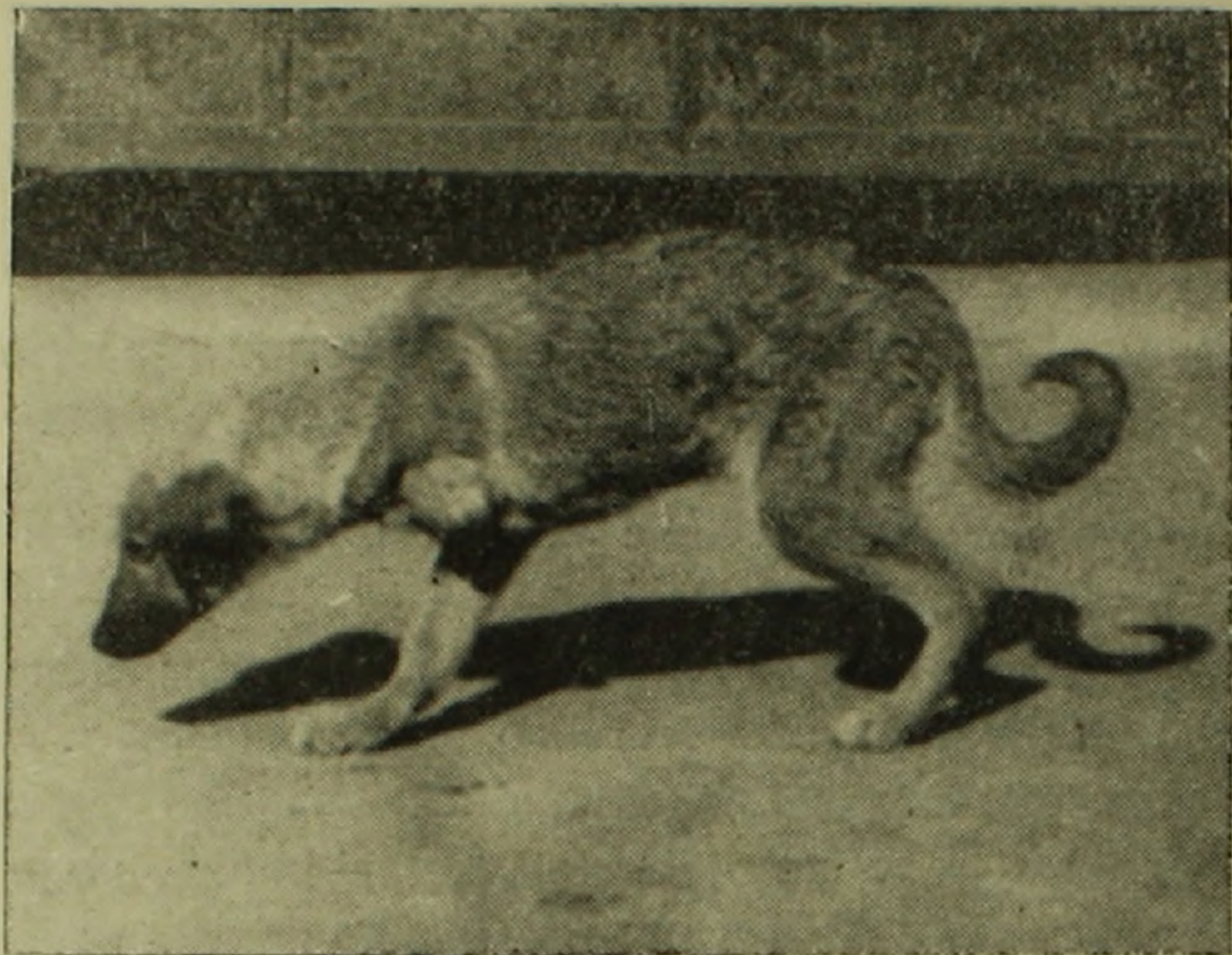
Изучение морфо-функциональной архитектуры центральной интеграции приобретенного двигательного акта привело нас к заключению⁽¹⁾, что взаимодействие симметричных отделов мозговой коры осуществляется не только по системе „кора—кора“, но и по системе „кора—подкорка—кора“. В целях дальнейшего обоснования этого представления было предпринято настоящее исследование, в задачу которого входило изучение взаимодействия обоих полушарий головного мозга в условиях полной перерезки мозолистого тела.

Эксперименты проводились на 8 щенках 4—6-месячного возраста. У части из них производилась перерезка мозолистого тела, а затем отбирались те щенки, у которых или вовсе отсутствовали послеоперационные осложнения (отек мозга, травма коры), или они были выражены слабо. Спустя месяц после мозговой операции у трех отобранных щенят производилась ампутация одной передней и противоположной задней конечностей. Наряду с этими животными перекрестная ампутация ног производилась и у трех интактных щенят (контрольная группа).

Опыты показали, что вслед за перекрестной ампутацией конечностей все животные (как с перерезанным мозолистым телом, так и контрольные) с одинаковой скоростью приобретали новую форму локомоции. На следующий день, после выхода из наркотического состояния, щенята рывком вставали на конечности и, сделав два—три шага, падали. После нескольких „проб и ошибок“ они начинали лучше управлять конечностями, а на второй-третий день совершали длительные прогулки по двору, ловко передвигаясь на двух перекрестно расположенных точках опоры.

Для иллюстрации сказанного ниже приводим данные, полученные на щенке Стрелке. 4.X 1960 г. у животного была произведена полная перерезка мозолистого тела. Спустя пять недель (11.XI 1960 г.) у нее произведена ампутация передней левой и задней правой конеч-

ностей. На следующий день щенок уже мог подниматься на хорошо экстензированные ноги и делать один-два шага. На второй день после операции Стрелка свободно передвигалась, пробегая большие расстояния (фиг. 1). Гистологический анализ мозга подтвердил полноту перерезки мозолистого тела.



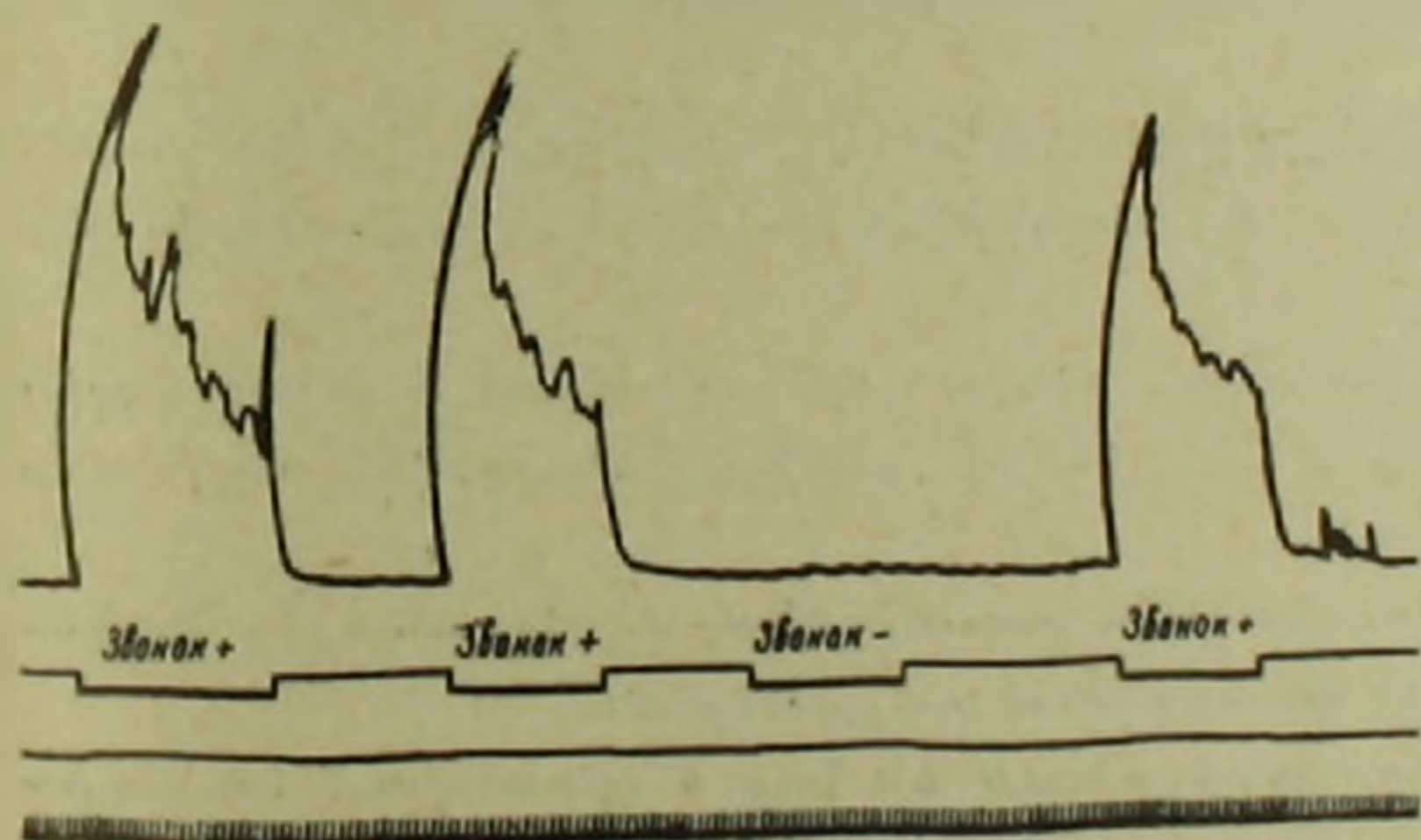
Фиг. 1. Щенок Стрелка. На второй день после ампутации конечностей. За пять недель до этого у щенка была сделана перерезка мозолистого тела.

Во второй серии опытов перерезка мозолистого тела производилась у щенят предварительно лишенных двух конечностей. В качестве подопытных животных были использованы щенята контрольной группы, которые свободно и ловко передвигались на двух ногах. Перерезка мозолистого тела привела к временному нарушению локомоторного акта, однако через 12—14 дней все животные вновь начали ходить. Отмеченное нарушение локомоторной функции мы склонны прежде всего рассматривать как результат отека мозга, появлявшегося у всех животных после комиссуротомии. Опыты, проведенные на животных с интактными конечностями, показали, что и у них отек мозга приводит к нарушениям локомоции. Поскольку перерезка мозолистого тела производилась путем полного вскрытия левого полушария и его отведения в латеральном направлении, то обычно наблюдался отек этого полушария. Щенята из-за слабости правых конечностей с трудом поднимались на ноги, а поднявшись—передвигались боком. Сделав несколько шагов, падали вправо, т. е. в сторону „пораженных“ конечностей. По мере прохождения отека мозга моторика восстанавливалась настолько хорошо, что оперированных животных трудно было отличить от нормальных.

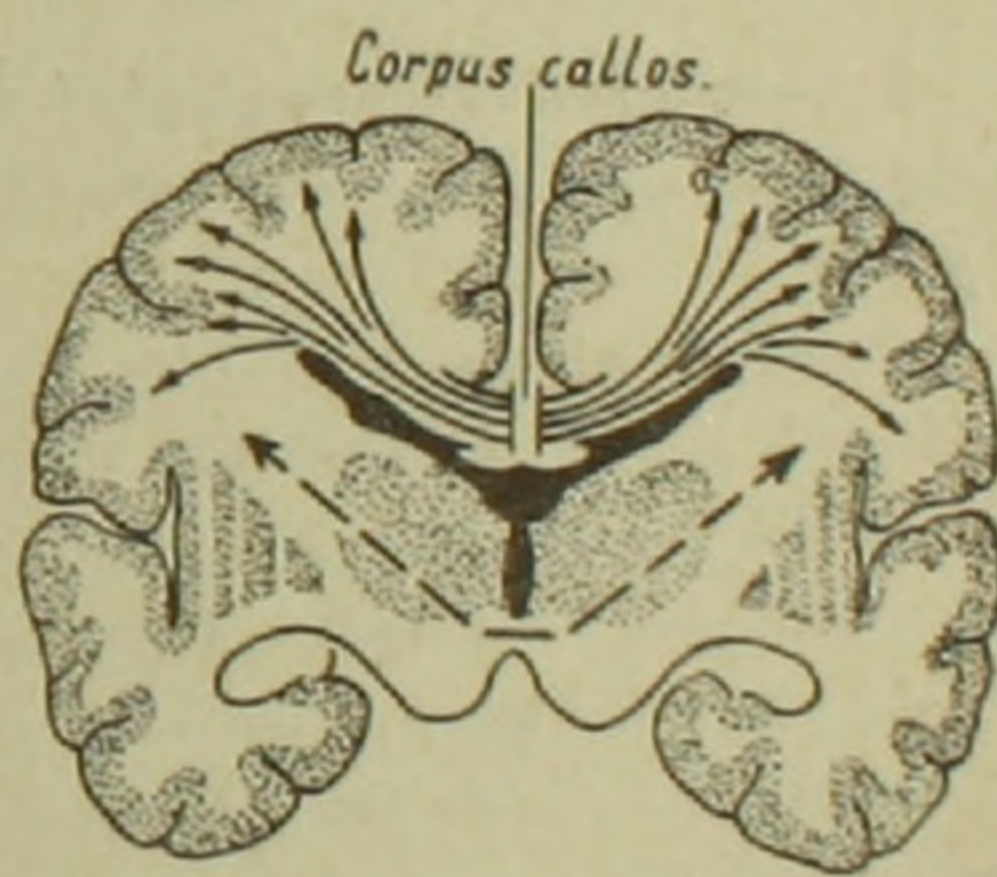
Придавая существенное значение отеку мозга в возникновении отмеченных нарушений локомоторных функций, мы не отрицаем оп-

ределенного значения перерыва комиссуральной системы мозолистого тела в этом процессе. Исследованиями К. М. Быкова и А. Д. Сперанского (²), Э. Ш. Айрапетьянца и В. Л. Бианки (^{3,4}), Бремера (¹⁰) и др. показано, что мозолистое тело играет определенную роль в механизмах взаимодействия симметричных отделов больших полушарий. Для нас важно лишь то, что и в условиях полного перерыва путей комиссуральной системы у животных может восстанавливаться функция ходьбы на двух перекрестно расположенных ногах. Более того, наши опыты показывают, что перерезка мозолистого тела мало сказывается на условно-рефлекторной деятельности животных. Электрооборонительные условные рефлексы, выработанные до перерезки мозолистого тела, сохраняются и после нее (фиг. 2). Комиссуротомия не препятствует также выработке новых условных рефлексов. Эти данные согласуются с клиническими наблюдениями Пенфилда (¹¹), показывающими, что полная перерезка мозолистого тела у человека почти не отражается на тотальной функции головного мозга.

Результаты обеих серий опытов позволяют допустить, что в условиях полной перерезки мозолистого тела взаимодействие больших полушарий головного мозга (в процессе формирования центральной интеграции двигательного акта) осуществляется через субкортикальные образования (фиг. 3). Однако наше допущение может быть правильным только в том случае, если признать, что в приобретении и осуществлении нового локомоторного акта решающая роль принадлежит коре головного мозга, а не центрэнцефалической системе Пенфилда (¹²), представленной в стволовой части головного мозга.



Фиг. 2. Щенок Эстрада. Условные электрооборонительные рефлексы после перерезки мозолистого тела. *Сверху вниз*: запись двигательной реакции задней конечности, отметка условного раздражения, отметка безусловного раздражения, отметка времени в сек. Знаки плюс и минус соответствуют положительному и отрицательному условным сигналам.



Фиг. 3. Схема показывает, что в условиях перерезки corpus callosum взаимодействие левого и правого полушария может осуществляться через подкорковые структуры (пунктирные стрелки).

Экспериментальные данные, полученные Э. А. Асратяном (⁵), позволяют считать, что приобретение животными новой формы локомоции (ходьба на двух ногах) осуществляется при обязательном уча-

стин коры больших полушарий. Показано, что полная декортикация собак приводит к стационарной утере ими возможности ходьбы на двух конечностях. Учитывая результаты опытов Э. А. Асратяна и данные классической анатомии о перекрестном представительстве функций в больших полушариях, мы с полным основанием можем считать, что формирование ходьбы на двух контралатерально расположенных ногах осуществляется при взаимодействии коры обоих полушарий головного мозга. Но поскольку это так, наше допущение о субкортикальных путях взаимодействия симметричных отделов мозга можно считать закономерным.

О существовании субкортикального механизма взаимодействия больших полушарий говорят также данные лаборатории П. К. Анохина (6,7) и других исследователей (8,9), полученные в условиях острых и хронических экспериментов.

Можно полагать, что анатомической основой „корково-подкорково-корковых“ связей могут быть системы замкнутых нейронных цепей, расходящихся из рострального отдела ствола мозга ко всем симметричным отделам коры обоих полушарий (12-14).

Сектор радиобиологии Академии наук
Армянской ССР

Լ. Ս. ՂԱՄԲԱՐՅԱՆ ԵՎ Ի. Ռ. ՄԱԴԱՏՈՎԱ

Դիսուդեդի մեծ կիսագնդերի փոխադրեցության շուրջը կոշտուկային մարմնի հասման դեպքում

Դիսուդեդի մեծ կիսագնդերի փոխադրեցության ճանապարհները կոշտուկային մարմնի լրիվ հատման դեպքում ուսումնասիրված են խրոնիկական էքսպերիմենտների քննությամբ:

Փորձերը ցույց տվին, որ շան լակոտները, որոնց մոտ հատված է կոշտուկային մարմինը և որոնք զրկված են մեկ առջևի և մեկ հետևի վերջույթներից, հեշտությամբ սովորում են բայել մնացած երկու ոտքերով:

Կոշտուկային մարմնի հատումը երկու խաչաձև դասավորված վերջույթներից նախօրոք զրկված լակոտների մոտ նմանապես չի խանգարում բայվածքին:

Կոշտուկային մարմնի հատումից հետո դարդանում են նոր և կիրառվում են նախկինում մշակված պայմանական էլեկտրոպաշտպանողական ռեֆլեքսները:

Մեր տվյալների և մյուս հետազոտողների կողմից բերված փաստերի հիման վրա կարելի է դալ հետևյալ եզրակացությունը. ձեռք բերված շարժողական դորժողության կենտրոնական ինտեգրատիվ մեխանիզմը կենսագործվում է մեծ կիսագնդերի սիմետրիկ բաժինների փոխադրեցությամբ ոչ միայն «կեղև-կեղև» սիստեմով, այլև «կեղև-ենթակեղև-կեղև» սիստեմով:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Л. С. Гамбарян, О функциональной и анатомической структуре условного двигательного рефлекса. Ереван, 1959. 2. К. М. Быков и А. Д. Сперанский, Тр. физиологических лабораторий академика И. П. Павлова, том 1, 1924. 3. Э. III. Айрапетьянц и В. Л. Бианки, Сб. Вопросы сравнительной физиологии анализаторов, вып. 1, стр. 41, Изд. Ленинград. университета, 1950. 4. В. Л. Бианки, Физиолог. жур-

нал СССР, том 54, № 8, стр. 701, (1958). ⁵ Э. А. Асратян, Физиология центральной нервной системы, М., 1953. ⁶ И. К. Анохин, Электроэнцефалографический анализ условного рефлекса, Медгиз, 1958. ⁷ В. Н. Шелихов, Журнал невропатологии и психиатрии им. С. С. Корсакова, том 60, вып. 2, 145, 1960. ⁸ Т. С. Наумова, В кн. Вопросы электрофизиологии и энцефалографии, стр. 314, М.—Л., 1956. ⁹ К. М. Джурджева, В кн. Некоторые вопросы современной физиологии, стр. 53, Медгиз, 1959. ¹⁰ Ф. Бремер, (F. Bremer), Proc. Soc. Experiment. Biol. a. Med. Vol. 90, n. 1, pp. 22—25, (1955). ¹¹ У. Пенфилд (W. Penfield), Brain, Vol. 91, part II, pp. 231—234, (1958). ¹² У. Пенфилд, Brain, vol. 77, part 1, pp. 1—17, (1954). ¹³ У. Пенфилд и Г. Джаспер, Эпилепсия и функциональная анатомия головного мозга человека, М., 1958. ¹⁴ Г. Мэгуин, Бодрствующий мозг, М., 1960.

