ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

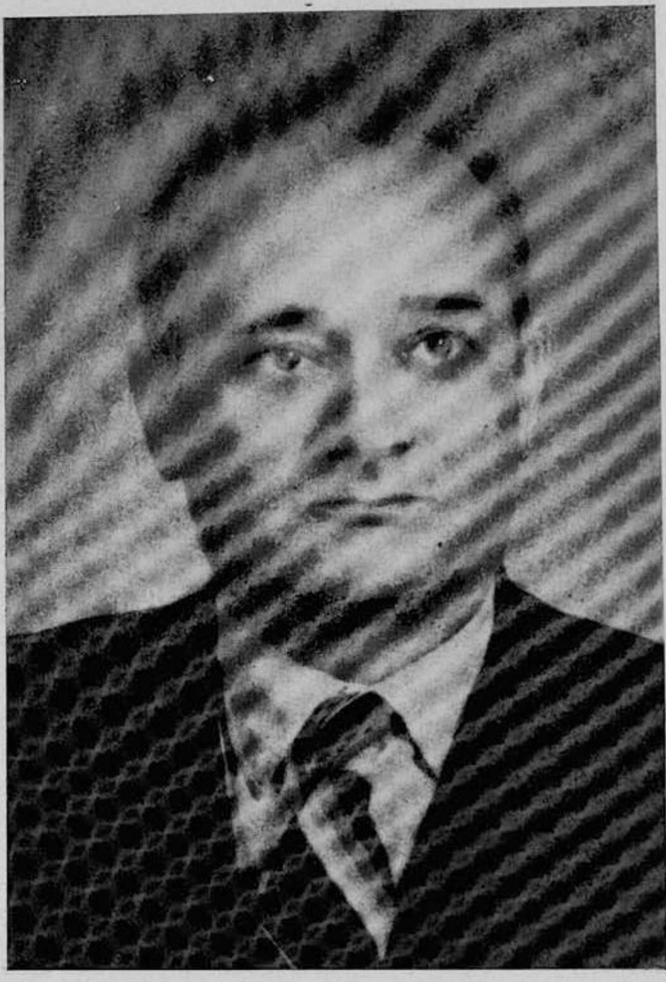
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՖԻԶԻԿԱ
ФИЗИКА

1966 г.



Норайр Маркарович Кочарян

НОРАЙР МАРКАРОВИЧ КОЧАРЯН

(К шестидесятилетию со дня рождения)

16 октября этого года исполняется 60 лет со дня рождения Н. М. Кочаряна, член-корреспондента АН Армянской ССР, одного из ведущих физиков Армении.

Н. М. Кочарян начал свою научную и педагогическую деятельность с 1931 г., после окончания Ереванского государственного университета.

Со дня основания физического института АН Армянской ССР Н. М. Кочарян, будучи заместителем директора института, принимал самое деятельное участие в его организации, создании научно-технической базы, подборе и подготовке кадров научных сотрудников. Одновременно Н. М. Кочарян создал лабораторию по исследованию космических лучей в Ереване, а затем и на Арагаце.

Научная деятельность Н. М. Кочаряна может быть разделена на два больших этапа: 1) исследования в области космических лучей (1934—1960); 2) исследования в области физики полимеров (с 1960 г.).

Исследования в области космических лучей Н. М. Кочаряном были начаты еще в 1934 г. При непосредственном его участии были проведены первые измерения на горе Арагац. На протяжении более 20 лет Н. М. Кочарян занимался исследованиями состава и энергетического спектра космического излучения на высоте 1000 и 3200 *м* над уровнем моря, а также ядерных взаимодействий частиц высоких энергий. Эти работы характеризуются большим экспериментальным искусством. Благодаря осуществлению большой серии остроумных методических работ, Н. М. Кочаряну удалось добиться исключительно высокой точности в измерении импульсов и масс частиц, что позволило успешно разрешить задачу абсолютных измерений числа протонов и мезонов высоких энергий в составе космического излучения.

Большое научное значение имеют работы Н. М. Кочаряна по определению энергетических распределений протонов и μ-мезонов, обладающих энергией до 100 *Бэв*, а также по определению поперечного сечения неупругого ядерного взаимодействия π-мезонов и протонов в области энергий порядка нескольких десятков *Бэв*. Глубокий анализ полученных данных позволил Н. М. Кочаряну установить существенные характеристики процессов взаимодействия частиц высоких энергий с атомными ядрами. Значительный интерес представляют его работы по осуществлению прецизионных измерений некоторых характеристик нуклонной и мезонной компонент космического излучения, что позволило произвести анализ явлений, вызываемых космическими лучами в земной атмосфере. Оценкой большой научной и научно-общественной деятельности Н. М. Кочаряна было его избрание в 1956 г. член-корреспондентом АН Армянской ССР.

Второй большой этап научной деятельности Н. М. Кочаряна начинается с 1960 года, когда он, на базе своей лаборатории, организовал в физическом институте АН Армянской ССР лабораторию физики полимеров. Таким образом, была создана реальная основа для развития в Армении новых направлений физики, связанных с народным хозяйством. За два года Н. М. Кочаряну удалось развернуть исследования в области физики полимеров. Уже в 1962 г. были сданы в печать первые работы, и в том же году была создана ЦНИ физико-техническая лаборатория АН Армянской ССР, которой и руководит Н. М. Кочарян по настоящее время.

Из работ Н. М. Кочаряна этого периода особое место занимают исследования анизотропных полимеров. В результате этих исследований выяснилось, что аморфным полимерам можно привить некоторые физические свойства, характерные для „классических" твердых тел. Так при поляризации полярных полимеров в электрическом поле высокой напряженности удалось получить полимеры, обладающие пьезоэлектрическими и пироэлектрическими свойствами. Эти исследования открывают широкие возможности для использования полимеров в качестве приемников теплового излучения и ультразвуковых преобразователей. Исследования Н. М. Кочаряна по пьезоэлектрическим и пироэлектрическим свойствам полимеров являются ведущими в современной физике полимеров. Большой интерес представляют также исследования анизотропных свойств, создаваемых в полимерах посредством растяжения. Этот комплекс работ дает возможность выявить связь между тепловыми и упругими свойствами полимеров вдоль и поперек оси вытяжки.

Одновременно с плодотворной научной деятельностью, начиная с 1931 г., Н. М. Кочаряном проводилась большая педагогическая работа. Будучи ассистентом, доцентом, с 1937 по 1951 г. заведующим кафедрой экспериментальной физики, затем в 1959—1960 г. первым деканом физического факультета, Н. М. Кочарян проделал большую работу по подготовке специалистов-физиков. В течение долгого периода (1938—1945) Н. М. Кочарян заведовал также кафедрой физики Ереванского политехнического института имени К. Маркса.

Н. М. Кочаряном опубликовано более 60 научных работ.

Особо хочется отметить, что Н. М. Кочарян является не только известным ученым, замечательным педагогом, но и чутким отзывчивым человеком. Всякий, кто с ним знаком или вместе работал неизменно бывал покорен его простотой, искренностью, доброжелательностью, сочетающейся с твердостью убеждений и принципиальностью.

Отмечая шестидесятилетний юбилей Н. М. Кочаряна, научная общественность Армении желает ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов в научной деятельности.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 271—278 (1966)

К ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВИЗИРОВАННОЙ s—d-МОДЕЛИ

ЯН ШИ, Н. В. ШАХНАЗАРЯН

Развита теория s—d-модели с учетом подвижности d-электронов. Получены спектры индивидуальных и коллективных элементарных возбуждений системы. Показано, что существуют две ветви коллективных возбуждений типа спиновых волн, одна из которых не имеет щели.

Низкотемпературная зависимость намагниченности содержит члены $T^{3/2}$ и T^2. Из-за подвижности d-электронов s—d-взаимодействие не обязано быть единственной причиной дробности атомного магнитного момента.

В существующей теории s—d-модели, развитой Вонсовским и др. [1, 2] (см. также [3]), d-электроны предполагаются полностью локализованными в узлах кристаллической решетки. Однако в реальных переходных металлах d-электроны все же обладают известной подвижностью. Поэтому представляет интерес обобщить теорию s—d-модели на случай, когда d-электроны также являются коллективизированными. В настоящей работе делается попытка такого обобщения.

Будем исходить из предположения, что в металле имеются две группы электронов: s- и d-электроны. Они характеризуются разными волновыми функциями и разной шириной энергетических полос. Будем считать, что энергетическая полоса d-электронов намного уже полосы s-электронов. s- и d-электроны взаимодействуют как между собой, так и друг с другом. Кроме того, как и ранее, будем считать, что за ферромагнетизм в основном ответственны d-электроны.

Гамильтониан рассматриваемой системы в представлении вторичного квантования может быть записан в виде

$$H = \sum_{\alpha f} E_\alpha (f)\, a_f^{+\alpha} a_f^\alpha + \sum U_{\alpha\beta\beta'\alpha'} (f_1 f_2 f_3 f_4)\, a_{f_1}^{+\alpha} a_{f_2}^{+\beta} a_{f_3}^{\beta'} a_{f_4}^{\alpha'}, \qquad (1)$$

где $E_\alpha(f)$ — собственная энергия s- ($\alpha = 1$) или d- ($\alpha = 2$) электронов в поле кристаллической решетки, a и a^+ — операторы уничтожения и рождения, $f \equiv (k,\ s)$, k — квазиимпульс, s — спиновый индекс.

Прежде всего исследуем спектр элементарных возбуждений в коллективизированной s—d модели. При этом, как и в теории ферромагнетизма простой коллективизированной модели [4], важно учитывать корреляцию между магнитными электронами. Поэтому будем рассматривать следующие двухчастичные („коллективные“) функции Грина [5]

$$G_{s,\,-s}^{\alpha\beta\beta'\alpha'}(k,\ q) = \langle\langle a_{k,\,s}^{+\alpha} a_{k+q,\,-s}^{\beta} \mid a_{k+q,\,-s}^{+\beta} a_{k,\,s}^{\alpha'} \rangle\rangle, \qquad (2)$$

где $\langle\langle A \mid B \rangle\rangle$ означает фурье-образ двухвременной температурной функции Грина.

После расцепления в приближении, принятом ранее [4], получаем следующую систему уравнений:

$$\Phi_{\mu\nu}(k, q)\, G_\nu(k, q) = I_l - \sum_{k'} \Phi^*_{\mu\nu}(k, q)\, G_\nu(k', q), \tag{3}$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

$\Phi_{\mu\nu}(k, q)$ — квадратная матрица с компонентами:

$$\Phi_{11}(k, q) = E - \widetilde{E}_{1\downarrow}(k+q) + \widetilde{E}_{1\uparrow}(k), \quad \Phi_{12}(k, q) = 0,$$

$$\Phi_{13}(k, q) = g_{12\downarrow}(k+q), \quad \Phi_{14}(k, q) = -g_{21\uparrow}(k),$$

$$\Phi_{21}(k, q) = 0, \quad \Phi_{22}(k, q) = [E - \widetilde{E}_{2\downarrow}(k+q) + \widetilde{E}_{2\uparrow}(k)],$$

$$\Phi_{23}(k, q) = -g_{12\uparrow}(k), \quad \Phi_{24}(k, q) = g_{21\downarrow}(k+q),$$

$$\Phi_{31}(k, q) = g_{21\downarrow}(k+q), \quad \Phi_{32}(k, q) = -g_{21\uparrow}(k),$$

$$\Phi_{33}(k, q) = E - \widetilde{E}_{2\downarrow}(k+q) + \widetilde{E}_{1\uparrow}(k), \quad \Phi_{34}(k, q) = 0,$$

$$\Phi_{41}(k, q) = -g_{12\uparrow}(k), \quad \Phi_{42}(k, q) = g_{12\downarrow}(k+q),$$

$$\Phi_{43} = 0, \quad \Phi_{44} = E - \widetilde{E}_{1\downarrow}(k+q) + \widetilde{E}_{2\uparrow}(k).$$

$\Phi^*_{\mu,\nu}(k, q)$ — квадратная матрица с компонентами:

$$\Phi^*_{11}(k, q) = U_1[n_{1\uparrow}(k) - n_{1\downarrow}(k+q)], \quad \Phi^*_{12}(k, q) = U_{12}[n_{2\uparrow}(k) - n_{2\downarrow}(k+q)], \quad \Phi^*_{13}(k, q) = U_{12}n_{12\uparrow}(k) - U_1 n_{12\downarrow}(k+q).$$

$$\Phi^*_{14}(k, q) = U_1 n_{21\uparrow}(k) - U_{12}n_{21\downarrow}(k+q), \quad \Phi^*_{21}(k, q) = U_{12}[n_{1\uparrow}(k) - n_{1\downarrow}(k+q)], \quad \Phi^*_{22}(k, q) = U_2[n_{2\uparrow}(k) - n_{2\downarrow}(k+q)];$$

$$\Phi^*_{23}(k, q) = U_2 n_{12\uparrow}(k) - U_{12}n_{12\downarrow}(k+q), \quad \Phi^*_{24}(k, q) = U_{12}n_{21\uparrow}(k) - U_2 n_{12\downarrow}(k+q), \quad \Phi^*_{31}(k, q) = -U_{12}n_{21\downarrow}(k+q),$$

$$\Phi^*_{32}(k, q) = U_{12}n_{21\uparrow}(k), \quad \Phi^*_{33}(k, q) = U_{12}[n_{1\uparrow}(k) - n_{2\downarrow}(k+q)],$$

$$\Phi^*_{34}(k, q) = 0, \quad \Phi^*_{41}(k, q) = U_{12}n_{12\uparrow}(k),$$

$$\Phi^*_{42}(k, q) = -U_{12}n_{12\downarrow}(k+q), \quad \Phi^*_{43}(k, q) = 0,$$

$$\Phi^*_{44}(k, q) = U_{12}[n_{2\uparrow}(k) - n_{1\downarrow}(k+q)].$$

$$G_\nu(k, q) = \begin{pmatrix} G^{11}_{\uparrow\downarrow}(k, q) \\ G^{22}_{\uparrow\downarrow}(k, q) \\ G^{12}_{\uparrow\downarrow}(k, q) \\ G^{21}_{\uparrow\downarrow}(k, q) \end{pmatrix};$$

в (3) I_l — соответствующие неоднородные члены, например,

$$I_l = \frac{i}{2\pi} \langle [a^{+1}_{k,s} a^{1}_{k+q,-s} a^{+\beta'}_{k+q,-s} a^{\alpha'}_{k,s}] \rangle,$$

а

$$\widetilde{E}_{\alpha s}(k) = E_\alpha(k) + \sum_{f\sigma} U_\alpha(kffk)\, n_{\alpha\sigma}(f) + \sum_{f\sigma} U_{\alpha\beta\beta\alpha}(kffk)\, n_{\beta\sigma}(f) -$$

$$- \sum_f U_\alpha(kfkf)\, n_{\alpha s}(f) - \sum_f U_{\alpha\beta\alpha\beta}(kfkf)\, n_{\beta s}(f) - \lambda - \frac{s}{2} g\mu_0 H, \tag{4}$$

$$g_{\alpha\beta s}(k) = \sum_f U_{\alpha\beta\beta\alpha}(kfkf)\, n_{\alpha\beta s}(f) - \sum_{f\sigma} U_{\alpha\beta\alpha\beta}(kffk)\, n_{\alpha\beta\sigma}(f). \tag{5}$$

$n_{1s}(k)$ и $n_{2s}(k)$ — функции распределения s- и d-электронов соответственно, $n_{\alpha\beta s}(k)$ $(\alpha \neq \beta)$ — вероятности переходов электронов между s- и d-подсистемами.

При получении уравнений (3) принималось $\alpha' = \beta' = 1$ и эти индексы опускались. α и β принимают значения 1 и 2.

Индивидуальные возбуждения можно получить (с точностью до несущественных членов, асимптотически малых при $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = n = \text{const}$ [6]) из условия равенства нулю детерминанта матрицы коэффициентов в левой части уравнений (3). Решая соответствующее уравнение, получаем следующие две ветви индивидуальных возбуждений

$$\tilde{E}_{1s}(k),\ \ \tilde{E}_{2s}(k) = \frac{\widetilde{E}_{1s}(k) + \widetilde{E}_{2s}(k)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\widetilde{E}_{1s}(k) - \widetilde{E}_{2s}(k)}{2}\right)^2 - |g_{21s}(k)|^2}. \tag{6}$$

Если обменное взаимодействие между s- и d-электронами является малым, т. е. и величина g_s является малой, то спектр индивидуальных возбуждений $\tilde{E}_{\alpha s}(k)$ везде мало отличается от „невозмущенного" (без учета переходов электронов между s- и d-подсистемами) спектра $\widetilde{E}_{\alpha s}(k)$, за исключением точек пересечения функций $\widetilde{E}_{1s}(k)$ и $\widetilde{E}_{2s}(k)$. А в тех точках k-пространства, где имеет место равенство

$$\widetilde{E}_{1s}(k) = \widetilde{E}_{2s}(k), \tag{7}$$

спектр индивидуальных возбуждений имеет разрыв с образованием щели $|g_s|$ (рис. 1).

Помимо спектра индивидуальных возбуждений попытаемся найти еще спектр коллективных возбуждений в коллективизированной s—d-системе. Для этого следует найти изолированные полюса функций Грина, определяемые уравнениями (3). Точное решение (3) весьма трудно найти. Однако мы можем попытаться решить эти уравнения приближенно, считая s—d-взаимодействие малым возмущением. В этом случае величины типа $V_{12}n_{12}$ являются величинами второго порядка малости и в первом приближении можно ими пренебречь. Кроме того, примем еще следующие дополнительные предположения относительно матричных элементов взаимодействия: 1) матричный элемент $d-d$-обмена зависит только от относительного квазиимпульса q, $U_2(k'+q, k; k', k+q) = U_2(q)$ [4], 2) матричный элемент $s-d$-обмена слабо зависит от квазиимпульса d-электрона, $U_{1212}(k'+q, k; k', k+q) = U_{12}(k', q)$, 3) взаимодействием между s-электронами можно пренебречь. Тогда уравнения для функций Грина $G^{11}_{\uparrow\downarrow}(kq)$ и $G^{22}_{\uparrow\downarrow}(kq)$ приближенно примут вид

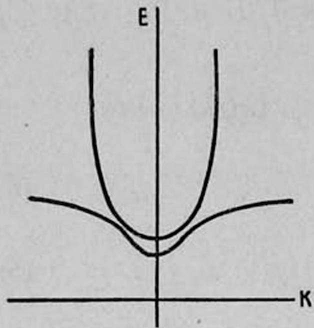


Рис. 1. Спектр индивидуальных возбуждений.

$$[E-\widetilde{E}_{1\downarrow}(k+q)+\widetilde{E}_{1\uparrow}(k)]\,G^{11}_{\uparrow\downarrow}(kq)+[n_{1\uparrow}(k)-n_{1\downarrow}(k+q)]\times$$
$$\times U_{12}(kq)\sum_{k'}G^{22}_{\uparrow\downarrow}(k'q)=0, \qquad (8)$$

$$[n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k+q)]\sum_{k'}U_{12}(k'q)\,G^{11}_{\uparrow\downarrow}(k'q)+$$
$$+[E-\widetilde{E}_{2\downarrow}(k+q)+\widetilde{E}_{2\uparrow}(k)]\,G^{22}_{\uparrow\downarrow}(kq)+$$
$$+U_2(q)[n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k+q)]\sum_{k'}G^{22}_{\uparrow\downarrow}(k'q)=\frac{i}{2\pi}[n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k+q)]. \qquad (9)$$

Особенности решений уравнений (8) и (9) определяются секулярным уравнением

$$1+\left\{U_2(q)-\sum_k\frac{|U_{12}(kq)|^2[n_{1\uparrow}(k)-n_{1\downarrow}(k+q)]}{E-\widetilde{E}_{1\downarrow}(k+q)+\widetilde{E}_{1\uparrow}(k)}\right\}P_2(E, q)=0, \qquad (10)$$

где $P_2(E, q)$ — так называемый поляризационный оператор для d-электронов:

$$P_2(E, q)=\sum_k\frac{n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k+q)}{E-\widetilde{E}_{2\downarrow}(k+q)+\widetilde{E}_{2\uparrow}(k)}. \qquad (11)$$

При $q=0$ уравнение (10) упрощается и приобретает вид

$$\left\{U_2(0)-\sum_k\frac{|U_{12}(k)|^2\,[n_{1\uparrow}(k)-n_{1\downarrow}(k)]}{E-\sum_{k'}U_{12}(k')\,\Delta n_2(k')-g\mu_0H}\right\}\times$$
$$\times\sum_k\frac{n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k)}{E-U_2\sigma_2-\sum_{k'}U_{12}(k')\,\Delta n_1(k')-g\mu_0H}=-1. \qquad (12)$$

Корни полученного уравнения (12) найдем графическим методом, при этом рассмотрим два случая: а) матричный элемент s—d-обменного взаимодействия положителен, $U_{12}>0$ (для электронов вблизи поверхности Ферми), б) $U_{12}<0$. Нетрудно убедиться, что если $\sigma_2\equiv\sum\limits_k[n_{2\uparrow}(k)-n_{2\downarrow}(k)]/N_2>0$, то в случае а) $\sigma_1\equiv\sum\limits_k\Delta n_1(k)/N_1>0$, а в случае б) $\sigma_1<0$.

В случае а) имеются два изолированных корня уравнения (12)

$$E_0^1=g\mu_0H, \tag{13}$$

$$E_0^2=g\mu_0H+U_{12}(k,\ 0)\sigma_2+\sum_k U_{12}(k,\ 0)\Delta n_1(k). \tag{14}$$

Кроме того, имеются еще корни, квазинепрерывно лежащие в двух интервалах

$$\min U_{12}(k,\ 0)\sigma_2\leqslant E-g\mu_0H\leqslant\max U_{12}(k,\ 0)\sigma_2, \tag{15}$$

$$\min\left[U_2\sigma_2-\sum_k U_{12}(k,\ 0)\Delta n_1(k)\right]\leqslant$$
$$\leqslant E-g\mu_0H\leqslant\max\left[U_2\sigma_2-\sum_k U_{12}(k,\ 0)\Delta n_1(k)\right]. \tag{16}$$

Следует отметить, что здесь получим две ветви коллективных возбуждений бозевского типа, одна из которых (решение (13)) не имеет щели (при отсутствии внешнего магнитного поля), а другая (решение (14)) отделена от нуля энергетической щелью, пропорциональной параметру s—d-взаимодействия. Если приближенно заменить $U_{12}(k,\ 0)$ некоторым средним значением $U_{12}(k_F,\ 0)$, то решение (13) и (14) находятся в согласии с результатом работы [7], где также получены две ветви бозевских возбуждений в обычной s—d-модели (без учета подвижности d-электронов).

Для малых q решения уравнения (10) будем искать в виде ряда

$$E^1=E_0^1+\sum A_l q_l+\sum A_{lj}q_l q_j, \tag{17}$$

$$E^2=E_0^2+\sum B_l q_l+\sum B_{lj}q_l q_j. \tag{18}$$

Разлагая уравнение (10) по степеням и сравнивая члены одинаковой малости, получаем

$$A_l=0,\qquad B_l=0, \tag{19}$$

$$A_{lj}=\frac{1}{1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{U_{12}\sigma_1}{U_2\sigma_2}}\left\{\alpha_{lj}U_2\sigma_2+\left(1+\frac{U_{12}\sigma_1}{U_2\sigma_2}\right)\sum\left[\frac{\partial^2E_2}{\partial k_l\,\partial k_j}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{U_2\sigma_2}\frac{\partial E_2}{\partial k_l}\frac{\partial E_2}{\partial k_j}\right]+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum\left[\frac{\partial^2E_1}{\partial k_l\partial k_j}-\frac{1}{U_2\sigma_2}\frac{\partial E_1}{\partial k_l}\frac{\partial E_1}{\partial k_j}\right]\right\}, \tag{20}$$

$$B_{ij}=\frac{1}{1+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+\frac{U_{12}}{U_2}}\left\{\alpha_{ij}U_2\sigma_2+2\beta_{ij}U_{12}\sigma_2+\left(1+\frac{U_{12}}{U_2}\right)\sum\left[\frac{\partial^2 E_2}{\partial k_i\partial k_j}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(U_2+U_{12})\sigma_2}\frac{\partial E_2}{\partial k_i}\frac{\partial E_2}{\partial k_j}\right]+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum\left[\frac{\partial^2 E_1}{\partial k_i\partial k_j}-\frac{1}{U_{12}\sigma_1}\frac{\partial E_1}{\partial k_i}\frac{\partial E_1}{\partial k_j}\right]\right\}, \quad (21)$$

коэффициенты α_{ij} и β_{ij} определяются из выражений

$$\begin{aligned} U_2(q) &= U_2(0)\,[1-\alpha_{ij}q_i q_j], \\ U_{12}(q) &= U_{12}(0)\,[1-\beta_{ij}q_i q_j]. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видно из приведенных формул, первая ветвь бозевских возбуждений (17) и (20) представляет собой обычную ферромагнитную спиновую волну, учитывающую подвижность d-электронов, поправленную на s—d-взаимодействие. Что же касается второй ветви (18) и (21), то она может интерпретироваться как связанные колебания спинов в s—d-системе, наподобие оптических колебаний в молекулярном кристалле.

При малой подвижности d-электронов и квадратичном законе дисперсии s-электронов значение энергии для второй ветви в общем уменьшается с возрастанием q (рис. 2).

В случае б) ($U_{12}<0$) исследование корней уравнения (10) можно провести так же, как и в случае а).

В этом случае получаем картину, изображенную на рис. 3. Видно, что здесь также имеются две ветви коллективных возбуждений, только одна из них начинается с конечного значения квазиимпульса.

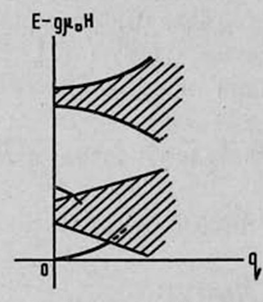


Рис. 2. Спектр индивидуальных и коллективных элементарных возбуждений в случае $U_{12}>0$.

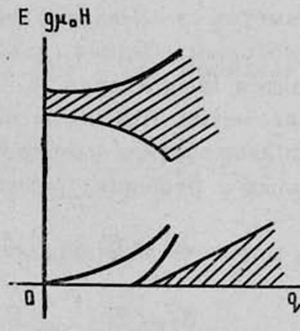


Рис. 3. Спектр индивидуальных и коллективных элементарных возбуждений в случае $U_{12}<0$.

Таким образом, видим, что в случае учета подвижности d-электронов структура спектра элементарных возбуждений при малых квазиимпульсах во многом аналогична структуре обычной s—d-модели (без учета подвижности d-электронов). В частности, имеется ветвь коллективных возбуждений бозевского типа с квадратичным законом дисперсии, не имеющая щели. Следовательно, низкотемпературное разложение самопроизвольной намагниченности начинается с члена $T^{3/2}$.

Следующий член в этом разложении должен быть пропорционален T^2 из-за наличия индивидуальных возбуждений фермиевского типа [4, 8]. Взаимодействие между *s*- и *d*-электронами приводит лишь к некоторым поправкам в коэффициентах перед этими членами. Что же касается самопроизвольной намагниченности при абсолютном нуле, то она в основном определяется относительным сдвигом энергетических подполос *d*-электронов, и вопрос о дробности атомного магнитного момента решается в первом приближении так же, как в обычной коллективизированной теории ферромагнетизма (например, [9]). *s—d*-взаимодействие, конечно, вносит поправки, но оно уже не обязано быть единственной причиной дробности.

Возможно, рассматриваемая коллективизированная *s—d*-модель будет полезна при изучении электропроводности переходных металлов, так как эта модель позволит учесть процессы „захвата" *s*-электронов *d*-полосами, а также процессы рассеяния *s*-электронов на *d*-электронах.

ЦНИ физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

Поступила 22 февраля 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. В. Вонсовский*, ЖЭТФ, **16**, 981 (1946).
   С. В. Вонсовский, Е. А. Туров, ЖЭТФ, **24**, 419 (1953).
2. *С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов*, УФН, **77**, 377, 78, 3 (1962).
3. *Н. А. Потапков, С. В. Тябликов*, ФТТ, **2**, 2733 (1960).
4. *Ян Ши*, ДАН АрмССР **39**, 73 (1964), **40**, 93 (1965).
5. *В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов*, Метод функций Грина в статистической механике, М., Физматгиз, 1961.
6. *Н. Н. Боголюбов*, УФН, **67**, 549 (1959).
7. *R. A. Tahir-Khely, D, ter Haar*, Phys, Rev., **130**, 108 (1963).
8. *П. С. Кондратенко*, ЖЭТФ, **46**, 1438, **47**, 1536 (1964).
9. *E. C. Stoner*, Phys. Soc. Rep. Prog. in Phys., **11**, 43 (1948).

ԿՈԼԵԿՏԻՎԻԶԱՑՎԱԾ s-d ՄՈԴԵԼԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

ՅԱՆ ՇԻ, Ն. Վ. ՇԱՀՆԱԶԱՐՅԱՆ

Զարգացված է s-d մոդելի տեսությունը, հաշվի առնելով d-էլեկտրոնների շարժունակությունը։ Ստացված են սիստեմի անհատական և կոլեկտիվ տարրական գրգռումների սպեկտրները։ Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն կոլեկտիվ գրգռումների երկու ճյուղեր՝ սպինային ալիքների տիպի, որոնցից մեկը չունի անցք։

Մագնիսացման ցածր ջերմաստիճանային կախումը պարունակում է $T^{3/2}$ և T^2 անդամներ։ d-էլեկտրոնների շարժունակության պատճառով պարտադիր չէ, որ s-d փոխազդեցությունը լինի ատոմային մագնիսական մոմենտների ոչ ամբողջ թվով արտահայտվելու միակ պատճառը։

ON THE THEORY OF A COLLECTIVIZED s—d MODEL

by YAN SHI, N. V. SHAHNAZARIAN

A theory of *s—d* model with an account of *d*-electron mobility is developed. A number of spectra of single and collective elementary excitations of the system are obtained. Two branches of collective excitations of a spin wave type are shown to exist, one of which is gap-free. The low temperature dependence of magnetization contains the $T^{3/2}$ and T^2 members. The fractionality of the atomic magnetic moment is not to be accounted for merely by *s—d* interaction in view of the mobility of *d*-electrons.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1. 279—288 (1966)

О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ КРАЙНЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ

Г. М. ГАРИБЯН, С. С. ЭЛБАКЯН

Вычислены полные потери энергии крайнерелятивистской частицы при пролете через пластину. Расчеты проведены методом Ландау, обобщенным на случай, когда нельзя произвести замыкание контура верхней полуокружностью. Проанализированы крайние случаи полученной формулы для тонких и толстых пластин.

В работе [1] (см. также [2]) теоретически было показано, что в достаточно тонких пленках вещества, расположенных в вакууме, ионизационные потери энергии заряженных частиц идут без эффекта плотности Ферми.

В дальнейшем этот эффект был экспериментально наблюден в тонких пленках сцинтиллирующего вещества—полистирола [3]. Имеет смысл также отметить, что в ряде экспериментов со вторично-эмиссионными мониторами была также наблюдена логарифмическая зависимость тока вторичной эмиссии от энергии первичных частиц [4, 5]. Надо думать, что эти явления взаимосвязаны [6, 7], так как электроны вторичной эмиссии вырываются из поверхностного слоя эмиттера, а в тонком поверхностном слое поле первичной частицы еще не сильно отличается от поля частицы в вакууме, т. е. ионизационные потери быстрых частиц будут обладать логарифмическим ростом.

Как в работе [1], так и в [2] двойной интеграл, дающий дополнительные потери энергии в пластине, обязанные наличию границ, был проинтегрирован по обеим переменным методом Ландау [8], после того как подынтегральное выражение разлагалось в ряд по толщине пластинки, если сделать предположение, что она мала.

Представляет интерес произвести более детальный анализ указанного эффекта с целью выяснить характер поведения дополнительного члена с ростом толщины пластины. В настоящей работе этот член интегрируется в общем виде, без разложения подынтегрального выражения по толщине пластины, что удается сделать соответствующим обобщением метода Ландау для крайнерелятивистских частиц.

1. Дополнительные потери энергии заряженной частицы в пластине толщины a, обязанные наличию границ и получающиеся при вычислении работ сил поля излучения над частицей в областях до пластины, в пластине и после нее равны [2]

$$W = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\,\omega d\omega\,\varepsilon\lambda\lambda_0(\varepsilon-1)^2}{[2\varepsilon\lambda\lambda_0\cos\lambda a - i(\varepsilon^2\lambda_0^2+\lambda^2)\sin\lambda a]\,\Lambda^2\Lambda_0^2}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\beta^2\lambda_0+\frac{\Omega_1^2}{\varepsilon^2\lambda_0}\right)\cos\lambda a - i\left(\frac{\omega^2}{c^2}\beta^2\frac{\lambda}{\varepsilon}+\frac{\Omega_1^2}{\lambda\varepsilon}\right)\sin\lambda a\right]+\right.$$

$$\left.+\left[-\left(\frac{\omega^2}{c^2}\beta^2\lambda_0+\frac{\Omega_1^2}{\varepsilon^2\lambda_0}\right)\cos\frac{\omega}{v}a - 2i\beta\frac{\omega}{c}\frac{\Omega_1}{\varepsilon}\sin\frac{\omega}{v}a\right]\right\}, \tag{1}$$

где $\Lambda_0 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$, $\Lambda = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon$, $k^2 = \varkappa^2 + \frac{\omega^2}{v^2}$, $\lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2$, $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2$, $\Omega_1 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon+1)$ (действительные и мнимые части λ и λ_0 для $\omega > 0$ положительны, а $\lambda(-\omega) = -\lambda^*(\omega)$, $\lambda_0(-\omega) = -\lambda_0^*(\omega)$), величина $\frac{1}{\varkappa_0}$ ограничена пределами применимости макроскопического рассмотрения. С точки зрения дальнейших расчетов выражение для W удобно разбить на два члена:

$$W = W_1 + W_2, \tag{2}$$

где W_1 — определяется первой квадратной скобкой, имеющейся в подынтегральном выражении (1), а W_2 — второй.

2. Следуя методу Ландау [8], интегрирование W_1 произведем сначала по ω. Так как λ не обращается нигде в нуль в верхней полуплоскости плоскости комплексного переменного ω, то для того, чтобы

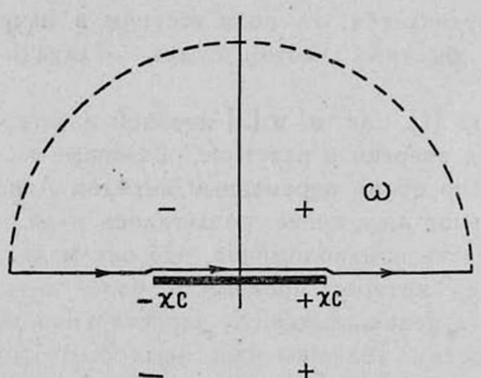


Рис. 1.

исключить двузначность подынтегральной функции, возникающую из-за наличия нулей $\lambda_0 = \lambda_0' + i\lambda_0''$, необходимо произвести разрез, указанный на рис. 1 жирной линией. Знак λ_0'' выбран положительным в верхней полуплоскости ω и отрицательным — в нижней. Тогда λ_0' будет иметь знаки, указанные на рис. 1. Интегрирование необходимо производить по верхнему берегу разреза.

Замкнем путь интегрирования по действительной оси верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса (рис. 1).

Нетрудно видеть, что подынтегральная функция W_1 на этой полуокружности убывает как $\frac{1}{\omega^8}$ и значением интеграла на ней можно пренебречь. Следовательно искомый интеграл будет равен сумме вычетов подынтегрального выражения в верхней полуплоскости.

Выражение $2\varepsilon\lambda\lambda_0\cos\lambda a - i(\varepsilon^2\lambda_0^2+\lambda^2)\sin\lambda a = \frac{1}{2}[(\varepsilon\lambda_0+\lambda)^2 e^{-i\lambda a} - (\varepsilon\lambda_0-\lambda)^2 e^{i\lambda a}]$ не имеет нулей в верхней полуплоскости ω, в чем можно убедиться используя теорему Руше (см., например, [9]). Следовательно полюса будут находиться в тех точках, где обращаются в нуль Λ_0 и Λ, т. е. будем иметь полюса второго порядка. Вычеты в них будем брать так же, как в работах [1, 2], т. е. превращением полюса второго порядка в два полюса первого порядка и обратным предельным переходом. В результате расчет приводит к следующей формуле

$$W_1 = -\frac{2}{3}\frac{e^2\sqrt{\sigma}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3}$$

где $\sigma = \frac{4\pi Ne^2}{m}$, N — число электронов в единице объема, m — масса электрона. При этом мы полагали $\beta = \frac{v}{c} \sim 1$ и отбрасывали члены, убывающие с энергией частицы.

3. Приступая к вычислению W_2, заметим, что мы не можем в этом случае сразу замкнуть контур интегрирования в плоскости ω бесконечно большой полуокружностью, находящейся в верхней полуплоскости, из-за появления в подынтегральном выражении фактора $\exp\left[-i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda\right)a\right]$, расходящегося в верхней полуплоскости. Поэтому замкнем путь интегрирования в верхней полуплоскости контуром C конечного радиуса, но с таким расчетом, чтобы радиус этого контура был бы достаточно большим и подынтегральное выражение на нем максимально упростилось. Опуская для простоты подынтегральное выражение и интеграл по $\varkappa$, запишем это следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega = \int_{-\infty}^{-\alpha} d\omega + \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\omega + \int_{+\alpha}^{+\infty} d\omega + 2\pi i\sum \operatorname{Res} s = \int_{C_1} d\omega + 2\pi i\sum \operatorname{Res} s, \tag{4}$$

где α — радиус контура C, а контур C_1 изображен на рис. 2 сплошной линией. В формуле (4) интегралы и вычеты должны быть взяты от полной подынтегральной функции, стоящей в выражении для W_2 (формула (1)). Однако на контуре C (а также C_1) подынтегральное выражение может быть сильно упрощено. Эти упрощения мы произведем следующим образом. Сначала считая, что на контуре C

$$|\omega| \gg \frac{c\sqrt{\varkappa_0^2+\frac{\sigma}{c^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5}$$

произведем приближения везде, кроме выражений, стоящих под знаками тригонометрических функций. Для того чтобы перейти к приближению и под знаками тригонометрических функций, потребуем также чтобы на контуре C имело место

$$\frac{1}{2}\left(\varkappa_0^2+\frac{\sigma}{c^2}\right)\frac{c}{|\omega|}a \ll 1. \tag{6}$$

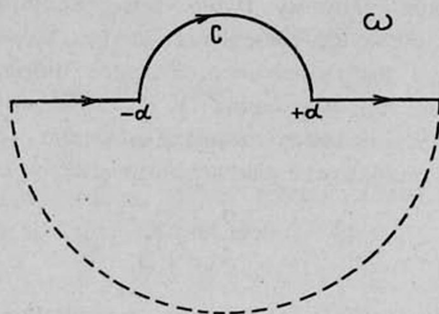


Рис. 2.

В результате для интеграла на контуре C_1 получим выражение

$$W'_{2C_1} = \frac{2e^2}{\pi c}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 \int_0^{\varkappa_0}\int_{C_1} \frac{\varkappa^3 d\varkappa d\omega}{\left[\frac{\omega^2}{c^2}(1-\beta^2)\right]^4} e^{-i\frac{\omega}{v}(1-\beta)a} \times$$

$$\times\left\{1-2\frac{\frac{\sigma}{c^2}+2\varkappa^2}{\frac{\omega^2}{c^2}(1-\beta^2)} - i\frac{c}{\omega}\frac{a}{2}\left(\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2\right)\right\}. \tag{7}$$

Последний интеграл запишем в виде

$$W'_{2C_1} = W_{2C_1} + \Delta, \tag{8}$$

где W_{2C_1} определяется главным членом, стоящим в фигурной скобке формулы (7), т. е. единицей, а Δ — двумя следующими членами. Таким образом, входящий в формулу (4) интеграл по контуру C_1, будет равен W_{2C_1}, если

$$|\Delta| \ll |W_{2C_1}|. \tag{9}$$

Для того чтобы вычислить интегралы по контуру C_1, аналитически продолжим упрощенное подынтегральное выражение в формуле (7) на всю плоскость комплексного переменного ω. Тогда можем замкнуть контур C_1 бесконечно большой полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости (рис. 2). Так как интеграл по этой полуокружности равен нулю и единственным полюсом подынтегрального выражения является точка нуль, то получим

$$W_{2C_1} = \frac{e^2}{2^7 \cdot 7!} \varkappa_0^4 a^7 \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 (1-\beta^2)^3. \tag{10}$$

Поступая аналогичным образом при вычислении Δ будем иметь

$$\Delta = -e^2 \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 \frac{(1-\beta^2)^4 \varkappa_0^4 a^9}{2^8 \cdot 9!} \left(\frac{7}{2}\frac{\sigma}{c^2} + \frac{5}{3}\varkappa_0^2\right). \tag{11}$$

Условие (9) тогда примет вид

$$a \ll \frac{\sqrt{2 \cdot 8 \cdot 9}}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\frac{7}{2}\frac{\sigma}{c^2} + \frac{5}{3}\varkappa_0^2}}. \tag{12}$$

Хотя обычно $\varkappa_0^2 \gg \frac{\omega_0^2}{c^2} \sim \frac{\sigma}{c^2}$, ω_0 — средняя атомная частота (см. [8]), мы сохранили в формулах (5), (6), (11) и (12), а также (13)—(15), член $\frac{\sigma}{c^2}$ из соображений, которые будут видны в п. 4.

Обратимся теперь к условиям (5) и (6), связанным с выбором контура C. Условие (5) будет удовлетворено, если на контуре

$$|\omega| = \alpha = \frac{c\sqrt{\varkappa_0^2 + \frac{\sigma}{c^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \gamma_1, \tag{13}$$

где $\gamma_1 \gg 1$. Подставляя такое $|\omega|$ в (6), получим

$$a \ll \frac{2\gamma_1}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\varkappa_0^2 + \frac{\sigma}{c^2}}}. \tag{14}$$

Из сравнения (14) и (12) видно, что соответствующим выбором γ_1 можно сделать эти условия эквивалентными, так что достаточно потребовать выполнения одного из них, например (12).

Возвращаясь теперь к формуле (4) заметим, что интеграл по контуру C_1 задается формулой (10), причем между a и $\varkappa_0$ имеется связь, выражаемая неравенством (12). Остается вычислить $2\pi i \sum \mathrm{Res}$, т. е. сумму вычетов подынтегральной функции W_2 в верхней полуплоскости, ограниченной контуром C_1. Так как радиус контура C определяется формулой (13), а наиболее удаленный полюс, а именно нуль Λ, находится [8] в точке $\frac{iv\sqrt{\varkappa_0^2 + \frac{\sigma}{c^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то ясно, что внутри контура C будут находиться все нули, как Λ, так и Λ_0.

Производя соответствующие вычисления, получим

$$W_2 = \frac{e^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\sigma}}{c} - \frac{\varkappa_0^2}{\sqrt{\varkappa_0^2+\frac{\sigma}{c^2}}} + \frac{4}{3}\frac{c^2}{\sigma}\left(\varkappa_0^2+\frac{\sigma}{c^2}\right)^{3/2} - \right.$$

$$\left. -2\sqrt{\varkappa_0^2+\frac{\sigma}{c^2}}\right] - \frac{e^2\varkappa_0^2 a}{2} + \frac{\sigma e^2 a}{2c^2}\ln\left(1+\frac{\varkappa_0^2 c^2}{\sigma}\right) +$$

$$+\frac{2e^2}{c}a_1 - e^2\left(\frac{\sigma}{c^2\left(\sqrt{\frac{\Omega^2}{v^2}+\frac{\sigma}{c^2}} - \frac{\Omega}{v}\right)} + \frac{1}{a}\right)e^{-ax_1} -$$

$$-\frac{\sigma e^2 a}{c^2}\left[\mathrm{Ei}\,(-ax_1) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{a\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{2c^2\varkappa_0}\right)\right] +$$

$$+e^2\left[\frac{1}{a} + \frac{\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{4}{3}\frac{c^2}{\sigma}\frac{\varkappa_0^3}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{6}a\varkappa_0^2\right]e^{-\frac{a\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{2c^2\varkappa_0}}, \qquad (15)$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{v^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}\left(\varepsilon\,(i\Omega)-1\right)} - \frac{\Omega}{v},$$

$$a_1 = \int_0^{\Omega}\frac{2\sqrt{\varepsilon\,(i\omega)}\,e^{\frac{\omega}{v}a}\,d\omega}{2\sqrt{\varepsilon\,(i\omega)}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\omega}{v}a\sqrt{1+\beta^2(\varepsilon-1)}\right] + (\varepsilon(i\omega)+1)\,\mathrm{sh}\left[\frac{\omega}{v}a\sqrt{1+\beta^2(\varepsilon-1)}\right]}, \qquad (16)$$

$$\mathrm{Ei}\,(x) = -\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du,$$

а Ω есть та частота, начиная с которой можно считать $\varepsilon\,(\omega) = 1 - \frac{\sigma}{\omega^2}$. В формуле (15) не записан W_{2C_1}, определяемый выражением (10). Покажем, что этим членом можно пренебречь.

Действительно, он быстро убывает с ростом энергии и при малых a будет к тому же еще и мал за счет того, что пропорционален a^7. Что же касается больших a, то в этом случае он будет мал за счет того, что тогда $\varkappa_0 \ll \frac{\sqrt{\sigma}}{c}$, как это будет показано ниже.

4. Таким образом, дополнительные потери энергии определяются суммой выражений W_1 и W_2, задаваемых соответственно формулами (3) и (15), причем в последней формуле толщина пластины a связана неравенством (12) с параметрами среды $\frac{\sqrt{\sigma}}{c}$ и $\varkappa_0$.

Отметим, что W_1 не зависит от толщины пластинки и дает, следовательно, потери энергии, происходящие на каждой из границ независимо, т. е. удвоенное переходное излучение на одной границе. С другой стороны, W_2 зависит от толщины пластины и поэтому описывает как взаимное влияние границ на переходное излучение, так и те потери, которые зависят от пройденного частицей пути.

Для проверки полученных формул положим в (15) $\varkappa_0 \ll \frac{\sqrt{\sigma}}{c}$. Однако такое допущение означает сильное увеличение минимального прицельного параметра $\rho_0 \sim \frac{1}{\varkappa_0}$ и соответствует тому, что мы почти выключаем взаимодействие при вычислении W_2. Нетрудно убедиться, что при этом можно будет пренебречь W_2 по сравнению с W_1, если $a \gtrsim \frac{c}{\sqrt{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Таким образом, при толщинах пластин, удовлетворяющих этому последнему условию, т. е. больших или порядка зоны формирования переходного излучения, полные потери энергии оказываются равными

$$W = -\frac{2}{3}\frac{e^2\sqrt{\sigma}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{17}$$

что и следовало ожидать [1]. Однако при этом надо иметь в виду, что, согласно (12), толщина пластины должна удовлетворять также условию

$$a \ll 6\frac{c}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{12'}$$

которое можно считать совместимым с предыдущим условием для a. Заметим, что предположение $\varkappa_0 \ll \frac{\sqrt{\sigma}}{c}$ не нарушает хода рассуждений п. 3, связанных с выбором контура C и получением формулы (15), что нетрудно проверить, полагая $\varkappa_0 \ll \frac{\sqrt{\sigma}}{c}$ в формулах (5), (6), (10)—(14).

Дополнительные потери энергии W описывают влияние макроскопических свойств поля заряженной частицы, не имеющих соответствующего аналога в микрообласти, и поэтому они не должны зависеть от параметра $\varkappa_0$. Действительно, при больших a мы имеем формулу (17). Наличие же $\varkappa_0$ в формуле (15) носит формальный характер и из (15), считая, как обычно, $\varkappa_0^2 \gg \frac{\sigma}{c^2}$, нетрудно получить

$$W = \frac{2e^2}{c}a_1 - e^2\left(\frac{\sigma}{c^2\left(\sqrt{\frac{\Omega^2}{v^2}+\frac{\sigma}{c^2}}-\frac{\Omega}{v}\right)}+\frac{1}{a}\right)e^{-ax_1}+\frac{e^2}{a}-$$

$$-\frac{\sigma e^2 a}{c^2}\left[\mathrm{Ei}(-ax_1)+\ln\frac{2c}{\gamma a\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{1}{2}\right], \tag{18}$$

где $\ln\gamma = C$—постоянная Эйлера ($\gamma = 1{,}779$). Однако теперь a уже не произвольно, а ограничено следующим неравенством:

$$a \ll \frac{10}{\varkappa_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12''}$$

Произведем анализ формулы (18). Считая a малым и разлагая (18) по a, получим

$$W = -\frac{\sigma e^2 a}{c^2}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma}}{\overline{\omega}_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{e^2 a^2}{2c^3}\left(\frac{\sigma^2}{2\Omega} + \int\limits_0^{\Omega}\left(1-\varepsilon\,(i\omega)\right)^2 \omega^2 d\omega\right), \tag{19}$$

причем мы приняли во внимание, что $\Omega \gg \sqrt{\sigma}$, а

$$\ln\overline{\omega}_1 = \frac{\int\limits_0^{\infty}\omega\varepsilon''(\omega)\ln\omega\cdot d\omega}{\int\limits_0^{\infty}\omega\varepsilon''(\omega)\,d\omega}. \tag{20}$$

Полученная формула в члене, пропорциональном a, полностью совпадает с полученной ранее в [2], а в квадратичном — только отличается коэффициентом 2 в первом члене. В результате в формуле (19) основную роль будет играть первый член, т. е. ионизационные потери будут иметь логарифмический рост при

$$a \ll \frac{2c\sigma\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma}}{\overline{\omega}_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sigma^2}{2\Omega} + \int\limits_0^{\Omega}(1-\varepsilon\,(i\omega)^2\,\omega^2 d\omega)}. \tag{21}$$

Здесь имеет смысл отметить, что условие (21), может быть, является несколько более жестким, чем это требуется на самом деле. Для этого попробуем идентифицировать потери энергии, выражаемые первым членом формулы (19). Если разложить поля излучения в пространствах до и после пластинки (см., например, [10]) по толщине пластинки a, то можно убедиться, что начинаются эти разложения с члена, линейного по a. Так как поток вектора Пойнтинга энергии, излученной на бесконечность, квадратичен по полю, то отсюда следует, что первый член в (19), пропорциональный a, соответствует ионизационным потерям энергии, застревающим в пластинке. Возвращаясь к условию (21), заметим, что для того, чтобы первый член формулы (19) был бы основным дополнительным членом к обычным ионизационным потерям, необходимо, чтобы он был больше не всего квадратичного члена, а лишь той его части, которая соответствует ионизационным потерям, так как, вообще говоря, в квадратичный член входят и потери на излучение, уходящее в бесконечность.

Будем теперь считать a не очень малым, а „средним", т. е. удовлетворяющим неравенству (12''), но одновременно

$$a \gg \frac{2c\Omega}{\sigma}. \tag{22}$$

Тогда $ax_1 \gg 1$, $a_1 \to 0$ и в результате

$$W = -\frac{\sigma e^2 a}{c^2}\left[\ln\frac{2c}{\gamma a\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{2}\right]. \tag{23}$$

Для того, чтобы одновременно имели место (12'') и (22), необходимо наложить следующее условие на энергию частицы:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg \frac{\varkappa_0}{10}\frac{2c\Omega}{\sigma}. \tag{24}$$

Для идентификации дополнительных потерь энергии, задаваемых формулой (23), обратимся к работе [11], где, так же как и в настоящей работе, исследование заоптической части спектра переходного излучения, испускаемого заряженной частицей вперед в пластине произвольной толщины, проводится после интегрирования по всем промежуточным переменным. В упомянутой работе имеется случай 3), соответствующий рассматриваемым сейчас толщинам пластины, формулами которого мы можем воспользоваться. В результате для излученной вперед энергии переходного излучения получим выражение

$$W_{\text{пер.}} \simeq \frac{2}{\pi}\frac{\sigma e^2 a}{c^2}\ln\frac{2c}{a\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{25}$$

Из последней формулы видно, что потери (23), или по крайней мере часть из них, являются переходным излучением.

Авторы благодарны Г. В. Бадаляну и М. М. Мурадяну за полезные обсуждения в ходе выполнения настоящей работы.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР
Ереванский физический институт

Поступила 16 марта 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян.* ЖЭТФ, **37**, 527 (1959).
2. *Г. М. Гарибян, М. П. Лорикян*, ДАН АрмССР, **15**, 21 (1965).
3. *А. И. Алиханян, А. К. Вальтер, Г. М. Гарибян, И. А. Гришаев, М. П. Лорикян, В. А. Петренко, Г. Л. Фурсов.* ЖЭТФ, **44**, 1122 (1963), **46**, 1212 (1964).
4. *V. J. Vanhuyse, R. E. Van de Vijver* Nucl. Inst. and Meth. 15,63 (1962).
5. *L. C. L. Yuan*, Experimental program requirements for a 300—1000 bev Accelerator USA, 1963, ED. L. C. L. Yuan and I. P. Blewett, pp. 97—98.
6. *L. C. L. Yuan*, Nature of Mattes. USA, 1965, ED. L. C. L. Yuan (русский перевод УФН, **86**, 715 (1965)).
7. *Фишер* и *К. Шерф*, Приборы для научных исследований **35**, № 5, 77 (1964).

8. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Электродинамика сплошных сред, гл. XII, М., ГИТТЛ, 1957.
9. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат,* Методы теории функций комплексного переменного, М., „Наука“, 1965.
10. *Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян,* ЖЭТФ, **35**, 1282 (1958).
11. *Г. М. Гарибян,* Изв. АН СССР, серия физическая, **26**, 754 (1962)

ԳԵՐՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ՄԱՍՆԻԿԻ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԸ ԹԻԹԵՂԻ ՄԻՋՈՎ ԱՆՑՆԵԼԻՍ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

Հաշվված են թիթեղի միջով անցնող գեր-արագ մասնիկի էներգիայի լրիվ կորուստները։

Հաշվումները կատարված են Լանդաուի մեթոդով, ընդհանրացրած այն դեպքի համար, երբ չի կարելի փակել կոնտուրը վերին կիսաշրջանագծով։

Վերլուծված են ստացված բանաձևի սահմանային դեպքերը բարակ ու հաստ թիթեղների համար։

Երբ թիթեղը բարակ է, ապա հիմնական դեր խաղում են իոնիզացիոն կորուստները, որոնք ունեն լոգարիթմական աճ։ Երբ թիթեղի հաստությունը մեծ է կամ հավասար անցումային ճառագայթման ձևավորման տիրույթին, ապա էներգիայի լրիվ կորուստները հավասար են

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

ENERGY LOSS OF THE ULTRA-RELATIVISTIC PARTICLE PASSING THROUGH FILM

by G. M. GARIBIAN, S. S. ELBAKIAN

The full loss of the energy of the ultra-relativistic particle passing through the film is calculated. The calculation has been made by Landau's method generalised for the case when one must not close the contour by a semicircle in the upper half plane.

The extreme cases for the formula for thin and thick films have been considered. In case of the thin film, the ionization losses with logarithmic growth play the main role, while when the thickness of the film is great or equal to the formation zone of transitional radiation, the full loss of the energy is equal to

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 289—309 (1966)

МОДЕЛЬ НИЛЬССОНА С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЙ ОБОЛОЧКА $N=4$

В. С. ПОГОСЯН, Р. А. САРДАРЯН

Рассматривается аксиально-симметричная модель ядра, состоящего из вращающегося остоза и внешнего нуклона, движущегося в поле остова. В качестве поля, в котором движется внешний нуклон, выбирается потенциал Нильссона. Ядро жесткое по отношению к γ-колебаниям. Найдены одночастично-вращательные состояния оболочки $N=4$. Теоретический расчет хорошо согласуется с экспериментальными возбужденными состояниями ядер Eu^{153}, Ir^{189}, Ir^{191}, Ir^{193}, Tm^{167}, Tm^{169}, Tm^{171}.

В последнее время все большее внимание привлекают к себе нечетные атомные ядра. Это, в частности, связано с тем, что именно нечетные атомные ядра являются источником информации о самосогласованном ядерном потенциале. Рассмотрение совокупности всех экспериментальных уровней деформированных ядер с энергией, меньшей 500 *kev*, позволяет сделать заключение о том, что известная схема одночастичных состояний Нильссона [1] и построенные на каждом таком состоянии вращательные уровни ядра качественно во многих случаях удовлетворительно описывают [2] эксперимент. Несмотря на всю полезность такой интерпретации экспериментальных возбужденных низколежащих состояний, эта схема имеет ряд существенных недостатков. Прежде всего, в нечетных ядрах неправомочно подразделение возбуждений на одночастичные и вращательные (несправедливо адиабатическое приближение), т. к. одночастичные энергии в этом случае одного порядка с вращательными. Однако ряд работ [3, 4], посвященных нечетным ядрам, проводились в адиабатическом приближении, но при этом изучалось влияние неаксиальности на вращательный спектр, построенный на одном одночастичном состоянии. В работах [5, 6] была рассмотрена модель, которая позволила изучить одночастичные и коллективные возбуждения с единой точки зрения. Однако в этой модели предполагалось, что момент количества движения внешнего нуклона сохраняется, несмотря на то, что поле, в котором движется внешний нуклон, заведомо несферическое. Также предполагалось, что ядро имеет аксиально-симметричную форму, и допускались лишь малые отклонения от аксиальности. Было показано, что γ-колебания не могут рассматриваться изолированно от одночастичных и вращательных степеней свободы, но для жестких по отношению к γ-колебаниям аксиально-симметричных ядер γ-колебательные возбуждения лежат достаточно высоко и низколежащие возбужденные состояния представляют собой одночастично-вращательные состояния, взаимодействующие между собой посредством кориолисова взаимодействия.

В работе [7] была исследована динамика движений неаксиальных ядер с теми же основными предположениями, что и в работах [5, 6]. Было показано, что весьма существенным является взаимодействие одночастичных, вращательных и колебательных степеней свободы. γ-колебательные возбуждения, лежащие достаточно высоко у аксиальных ядер, у неаксиальных ядер сильно опускаются и должны быть исследованы совместно с вращениями и одночастичными возбуждениями. Важнейшим следствием этого является то обстоятельство, что состояния, одночастично-вращательные при малой неаксиальности, с ростом неаксиальности могут приобрести свойства γ-колебательных состояний. Поэтому необходимо знать все одночастично-вращательные возбуждения, которые можно ожидать в конкретных ядрах. Сравнение с экспериментом выделит жесткие ядра, у которых γ-колебательные возбуждения лежат достаточно высоко и поможет предсказать, хотя бы качественно, влияние γ-колебаний на одночастично-вращательный спектр в мягких по γ-колебаниям, или неаксиальных ядрах.

В ряде работ была учтена неадиабатика коллективных и одночастичных движений в ядре. Так Чи и Дэвидсон [8] рассмотрели одночастично-вращательные возбуждения неаксиальных нечетных ядер. Однако сложность расчетов не позволила продвинуться дальше ядер оболочки $N = 3$. Кроме того, серьезные возражения вызывает использованный ими способ учета принципа Паули. В работе [9] была учтена связь коллективных и наблюдаемых на опыте одночастичных состояний конкретных ядер в предположении аксиально-симметричной формы ядра.

В настоящей работе будут исследованы вращательно-одночастичные состояния нечетных ядер, но на основе более реалистической модели по сравнению с [5, 6, 7].

Ядро состоит из аксиально-симметричного остова, совершающего коллективные движения и одного внешнего нуклона, движущегося в поле остова. В качестве поля, в котором движется внешний нуклон, выбирается потенциал Нильссона. Предполагается, что ядро жесткое по отношению к γ-колебаниям. Отклонения от аксиально-симметричной формы хотя и малы, но имеются. Поэтому ни угловой момент j внешнего нуклона, ни его проекция Ω на равновесную ось симметрии ядра не сохраняются. На электронно-счетной вычислительной машине рассчитывались последовательность спинов и энергии возбужденных одночастично-вращательных состояний. Результаты расчетов сравниваются с экспериментом.

§ 1. Основные уравнения

При малых отклонениях от равновесных значений $\beta_0 \neq 0$ и $\gamma_0 = 0$ возбужденные состояния рассматриваемой системы определяются уравнением Шредингера

$$(H_v + H_{rot} + H_p - E)\,\Psi = 0, \tag{1}$$

где H_v — полная энергия поверхностных колебаний остова ядра,

$$H_v = \frac{\hbar^2}{2B}\hat{T}_\beta + \frac{1}{2}C'(\beta-\beta_0)^2 + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\left(\hat{T}_\gamma + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4}\right); \tag{2}$$

$$\hat{T}_\beta = -\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}\right); \tag{3}$$

$$\hat{T}_\gamma = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right); \tag{4}$$

Γ — параметр, характеризующий жесткость ядра по отношению к γ-колебаниям. Записывая энергию поверхностных колебаний в таком виде, мы заранее пренебрегаем взаимодействием β- и γ-колебаний. В общем случае потенциальная энергия поверхностных колебаний имеет вид

$$V(\beta,\,\gamma) = \frac{1}{2}\bar{C}\beta^2 + \beta\chi(\gamma). \tag{5}$$

Мы используем разложение энергии (5) около равновесных значений $\beta_0 \neq 0$ и $\gamma = 0$. В таком случае потенциальная энергия поверхностных колебаний имеет вид

$$V(\beta,\,\gamma) = \frac{1}{2}C'(\beta-\beta_0)^2 + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\frac{\gamma^2}{4\Gamma^4}. \tag{6}$$

H_{rot} — вращательная энергия ядра. С точностью до членов линейных по γ эту энергию при небольших отклонениях формы ядра от аксиально-симметричной можно представить в виде

$$H_{rot} = H^0_{rot} + H^{cor}_{rot} + H^{int}_{rot}, \tag{7}$$

где

$$H^0_{rot} = \frac{\hbar^2}{6B\beta^2}\left\{\hat{\vec{I}}^2 + \hat{\vec{j}}^2 - \hat{I}^2_3 - \hat{j}^2_3\right\} \tag{8}$$

— собственно вращения;

$$H^{cor}_{rot} = -\frac{\hbar^2}{6B\beta^2}2\,(\hat{I}_1\hat{j}_1 + \hat{I}_2 j_2) \tag{9}$$

— кориолисово взаимодействие;

$$H^{int}_{rot} = \frac{\hbar^2}{6B\beta^2}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3}\right)(\hat{I}_3 - \hat{j}_3)^2 \tag{10}$$

— взаимодействие одночастично-вращательных состояний с γ-колебаниями. Этот член ответственен за аномальные вращательные возбуждения, связанные с переходом ядра в неаксиальную форму.

Благодаря кориолисову взаимодействию (9), несмотря на цилиндрическую симметрию потенциала, в котором движется внешний нуклон, проекция углового момента Ω внешнего нуклона на равновесную ось симметрии ядра не сохраняется, т. к. оператор $\hat{j}_3$ не коммутирует с оператором (9).

И, наконец, H_p — гамильтониан Нильссона, который имеет вид

$$H_p = \frac{\hbar\omega_0}{2}\{\rho^2 - \nabla^2\} + C\vec{l}\vec{s} + D\vec{l}^2 - V(r)\beta Y_{20}, \tag{11}$$

где

$$V(r) = M\omega_0^2 r^2 = \hbar\omega_0\rho^2. \tag{12}$$

Таким образом, уравнение Шредингера (1) можно записать в виде

$$\left\{H_p^0 + \left[\frac{\hbar^2}{2B}\hat{T}_\beta + \frac{C'}{2}(\beta - \beta_0)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\left[\hat{T}_\gamma + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + \frac{1}{3}\hat{h}_{rot} + \xi\hat{h}_p\right] - E\right\}\Psi = 0, \tag{13}$$

где

$$\hat{h}_{rot} = \hat{h}_{rot}^0 + \hat{h}_{rot}^{cor} + \hat{h}_{rot}^{int}; \tag{14}$$

$$\hat{h}_{rot}^0 = \hat{\vec{I}}^2 + \hat{\vec{j}}^2 - \hat{I}_3^2 - \hat{j}_3^2; \tag{15}$$

$$\hat{h}_{rot}^{cor} = -2(\hat{I}_1\hat{j}_1 + \hat{I}_2\hat{j}_2); \tag{16}$$

$$\hat{h}_{rot}^{int} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3}\right)(\hat{I}_3 - \hat{j}_3)^2; \tag{17}$$

$$\hat{h}_p = -V(r)Y_{20} + \frac{1}{\beta_0}C\vec{l}\vec{s} + \frac{1}{\beta_0}D\vec{l}^2; \tag{18}$$

$$\xi = \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2}. \tag{19}$$

Волновая функция уравнения Шредингера (13) может быть записана в виде

$$\Psi = F(\beta)\Phi(x\gamma\theta_i), \tag{20}$$

и тогда для β-колебаний уравнение запишется в виде

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2}{d\beta^2} - W_\Lambda(\beta) + (E - E_N)\right\}\beta^2 F(\beta) = 0, \tag{21}$$

в котором роль потенциальной энергии играет выражение

$$W_\Lambda(\beta) = \frac{C'}{2}(\beta - \beta_0)^2 + \frac{\hbar^2(\Lambda + 2)}{2B\beta^2}. \tag{22}$$

Λ — параметр разделения переменных, E_N — связанные состояния внешнего нуклона в сферической части потенциала остова, т. е. E_N — собственные значения оператора H_0;

$$H_0\Psi_N = E_N\Psi_N = \hbar\omega_0\left(\frac{3}{2}+N\right)\Psi_N.$$

Для остальных переменных системы уравнение имеет вид

$$\left[\hat{T}_\gamma + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + \frac{1}{3}\hat{h}_{rot} + \xi\hat{h}_p - \Lambda\right]\Phi(x\gamma\theta_i) = 0. \tag{23}$$

В работе [6] отмечалось, что $|\hat{I}_3 - \hat{j}_3|$ коммутирует с операторами, входящими в уравнение (23), и соответственно этому существует хорошее квантовое число $|m| = \left|\frac{K-\Omega}{2}\right|$. Поэтому решения уравнения (23) можно искать в виде

$$\Phi(x\gamma\theta_i) = \chi^{|m|}(\gamma)\,\Theta^{L,\,|m|}(x\theta_i). \tag{24}$$

γ — колебания выделяются и для них имеем уравнение

$$\left[\hat{T}_\gamma + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + m^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{3}\right) - L\right]\chi^{|m|}(\gamma) = 0. \tag{25}$$

Для переменных $x\theta_i$ уравнение имеет вид

$$\left[\frac{1}{3}(\hat{h}^0_{rot} + \hat{h}^{cor}_{rot}) + \xi\hat{h}_p + L - \Lambda\right]\Theta^{L,\,|m|}(x\theta_i) = 0. \tag{26}$$

Таким образом, полное уравнение Шредингера для нашей квантово-механической системы разбито на три уравнения: выделены β-колебания, γ-колебания и вращательно-одночастичные движения. Уравнение для β-колебаний исследовалось в работе [10], поэтому выпишем решение, поясняя обозначения.

$$F^{\nu}_{N\Lambda}(\beta) = \frac{N}{\beta^2}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)H_\nu(z), \tag{27}$$

где

$$H_\nu(z) = [2\Gamma(-\nu)]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)(2z)^n \tag{28}$$

—функции Эрмита

$$\left.\begin{aligned} &z = \frac{p(\beta-\beta_\Lambda)}{\mu_1\beta_\Lambda}; \qquad \mu_1 = \mu\left[1 + 3(\Lambda+2)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}} \\ &(p-1)p^3 = (\Lambda+2)\mu^4; \quad \beta_\Lambda = \beta_0 + \frac{\hbar^2(\Lambda+2)}{BC'\beta^3_\Lambda} \\ &\mu = \frac{1}{\beta_0}\sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{C'}}; \qquad \omega_\beta = \sqrt{\frac{C'}{B}}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ν — корень трансцендентного уравнения $H_\nu\left(-\frac{p}{\mu_1}\right) = 0$; N — множитель нормировки; μ — параметр „неадиабатичности" по β-колебаниям. При $\mu < \frac{1}{3}$, $\nu \approx n = 0, 1, 2, \cdots$, функции Эрмита переходят в полиномы Эрмита. β-колебания приближенно можно отделить от остальных типов возбуждений и энергию ядра, соответствующую определенному значению Λ, можно записать в виде

$$\Delta E_{N,\Lambda}^{|m|,n} = E_{\Lambda}^{|m|,n} - E_N = \hbar\omega_\beta\left(n + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\hbar^2(\Lambda + 2)}{2B\beta_\Lambda^2}\left\{1 + 3\mu^2\left(n + \frac{1}{2}\right) - \mu^4(\Lambda + 2)\right\}. \tag{30}$$

Уравнение (25) для γ-колебаний исследовано в работе [6] и его решение имеет вид

$$\chi_\lambda^{|m|}(\gamma) = \left(\frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}\right)^{\frac{|m|}{2}} F\left(-\lambda, |m| + 1, \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}\right)\exp\left(-\frac{\gamma^2}{4\Gamma^2}\right), \tag{31}$$

$F\left(-\lambda, |m| + 1, \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Каждой собственной функции (31) соответствует собственное значение

$$L_{|m|,\lambda} = \frac{1}{\Gamma^2}(2\lambda + |m| + 1) + \frac{m^2}{3}. \tag{32}$$

И, наконец, решение уравнения (26) ищется в виде

$$\Theta^{I,|m|}(x\theta_i) = \sum_{j,K,\alpha} C^{I,|m|}(j, K, \alpha)\,|IjK, \alpha|m|>, \tag{33}$$

где $\alpha = \frac{m}{|m|}$ принимает два значения $+1$ и -1, j пробегает значения от $\frac{1}{2}$ до $\frac{2N+1}{2}$ и K от $\frac{1}{2}$ до j для каждого j.

$$|IjK, \alpha|m|> = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}}\left\{D_{MK}^I(\theta_i)\,\varphi_{K-2\alpha|m|}^j(x) +\right.$$

$$\left.+ (-1)^{I-j} D_{M-K}^I(\theta_i)\,\varphi_{2\alpha|m|-K}^j(x)\right\}. \tag{34}$$

Тогда получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j'K'\alpha'} a_I^{|m|}(jK\alpha; j'K'\alpha')\,C^{I,|m|}(j'K'\alpha') + (L_\lambda^{|m|} - \Lambda)\,C^{I,|m|}(jK\alpha) = 0, \tag{35}$$

где

$$a_I^{|m|}(jK\alpha; j'K'\alpha') \equiv <Ij'K'\alpha'|m||\hat{\Omega}|IjK\alpha|m|>, \tag{36}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{3}\left\{\vec{I}^2 + \vec{j}^2 - \hat{I}_3^2 - \hat{j}_3^2\right\} -$$

$$-\frac{2}{3}(\hat{I}_1\hat{j}_1+\hat{I}_2\hat{j}_2)+\frac{\xi}{\beta_0}(-V(r)\beta_0 Y_{20}+C\vec{l}\,\vec{s}+D\vec{l}^2). \tag{37}$$

§ 2. Матричные элементы оператора $\hat{\Omega}$

Перепишем оператор (37) в несколько ином виде

$$\hat{\Omega}=\frac{\hbar\omega\varkappa\xi}{\beta_0}\left\{\eta U-2\vec{l}\,\vec{s}-\mu'\vec{l}^2+\lambda\hat{F}_R\right\}, \tag{38}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\varkappa=-\frac{C}{2\hbar\omega_0}, \qquad \frac{V(r)\beta_0}{\hbar\omega_0\varkappa}=\frac{\hbar\omega_0\rho^2\beta_0}{\hbar\omega_0\varkappa}=\eta\rho^2\\ &\mu'=\frac{2D}{C}; \qquad \eta=\frac{\beta_0}{\varkappa}; \quad \lambda=\frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2}\cdot\frac{1}{\hbar\omega_0\varkappa};\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$U=-\rho^2 Y_{20}; \tag{40}$$

$$\hat{F}_R=(\hat{\vec{I}}^2+\hat{\vec{j}}^2-\hat{I}_3^2-\hat{j}_3^2)-2(\hat{I}_1\hat{j}_1+\hat{I}_2\hat{j}_2); \tag{41}$$

Сначала найдем матричные элементы оператора (40).

Согласно теореме Вигнера-Эккарта

$$\langle Ij'\Omega'\,|\,V(r)\,Y_{2\mu}\,|\,Ij\Omega\rangle=(2j\mu\Omega\,|\,j'\Omega')\,\langle j'\,\|\,V(r)\,\|\,j\rangle, \tag{42}$$

$(2j\mu\Omega\,|\,j'\Omega')$ — коэффициенты Клебши, $\langle j'\,\|\,V(r)\,\|\,j\rangle$ — приведенные матричные элементы, значения которых зависят от вида функции $V(r)$ и от типа орбитальной и спиновой части волновой функции внешнего нуклона и не зависят от магнитного квантового числа. Для вычисления этих приведенных матричных элементов представим волновую функцию внешнего нуклона в виде

$$\varphi_\Omega^j(x)=\sum_{s=-1/2}^{1/2}\left(l\frac{1}{2},\ \Omega-s,\ s\,|\,j\Omega\right)S_s f_l(r)\,Y_{l,\Omega-s}(\vartheta,\varphi), \tag{43}$$

где S_s — спиновая часть волновой функции, $f_l(r)$ — радиальная часть, $Y_{l,\Omega-s}(\vartheta,\varphi)$ — угловая часть, l — орбитальный момент внешнего нуклона, связанный с полным его угловым моментом j следующим выражением

$$l=j+\frac{1}{2}(-1)^{N+j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда, приведенный матричный элемент можно преобразовать к виду

$$\langle j'\,\|\,V(r)\,\|\,j\rangle\equiv\langle j'l'\frac{1}{2}\,\|\,V(r)\,Y_2\,\|\,jl\frac{1}{2}\rangle=$$

$$=(-1)^{l'+j-\frac{1}{2}}\sqrt{(2j+1)(2l+1)}\cdot W\left(ljl'j'\,|\,\frac{1}{2}\,2\right)\langle l'\,\|\,V(r)\,\|\,l\rangle, \tag{44}$$

где $W\left(ljl'j'|\frac{1}{2}2\right)$ — коэффициенты Рака. Подставляя явное значение для коэффициента Рака и учитывая

$$(l'\| Y_2\| l) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(2l00|l'0),$$

окончательно получим следующее выражение для приведенного матричного элемента

$$\langle j'\| V(r)\, Y_2\| j\rangle = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(2j0\frac{1}{2}|j'\frac{1}{2}\right)(l'|V(r)|l), \tag{45}$$

причем, либо $l' = l$, либо $l' = l \pm 2$. В остальных случаях этот матричный элемент равен нулю.

$$\langle l'|V(r)|l\rangle = \hbar\omega_0\langle Nl'|\rho^2|Nl\rangle =$$

$$= \hbar\omega_0\begin{cases} N+\frac{3}{2}, & \text{если } l = l' \\ \sqrt{(N-l)(N+l+3)}, & \text{если } l' = l+2 \\ \sqrt{(N-l+2)(N+l+1)}, & \text{если } l' = l-2. \end{cases} \tag{46}$$

Найдем теперь матричные элементы оператора (41)

$$\langle IjK,\alpha|m||\hat{F}_R|IjK,\alpha|m|\rangle = I(I+1) + j(j+1) - K^2 -$$
$$-(K-2\alpha|m|)^2 - (-1)^{I-j}\sqrt{(I+K)(I-K+1)(j+K)(j-K+1)}\,\delta_{K\frac{1}{2}}\,\delta_{m0}; \tag{47}$$

$$\langle IjK,\alpha|m||\hat{F}_R|IjK\pm 1\alpha|m|\rangle =$$
$$= -\sqrt{(1-K)(I+K+1)(j\mp K\pm 2m)(j\pm K\mp 2m+1)}. \tag{48}$$

С помощью выражений (46), (47) и (48) легко найти все матричные элементы оператора Ω. Выпишем отличные от нуля матричные элементы основной вращательно-одночастичной полосы $m=0$, которой мы интересуемся в данной работе

$$\left\langle IljK\left|\frac{\hat{\Omega}}{T}\right|IljK\right\rangle = -\eta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(2j0K|jK)\left(2j0\frac{1}{2}|j\frac{1}{2}\right)\left(N+\frac{3}{2}\right) +$$
$$+(1-\mu')\,l(l+1) - j(j+1) + \frac{3}{4} + \lambda\,[I(I+1) + j(j+1) - 2K^2 -$$
$$-(-1)^{I-j}\left(I+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)\delta_{K\frac{1}{2}}]; \tag{49}$$

$$\left\langle IljK\left|\frac{\hat{\Omega}}{T}\right|Ilj,K\pm 1\right\rangle = -\lambda\sqrt{(j\mp K)(j\pm K+1)(I\mp K)(I\pm K+1)}; \tag{50}$$

$$\left\langle lljK \left| \frac{\hat{\Omega}}{T} \right| llj \pm 1,\ K \right\rangle = -\eta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2,\ j \pm 1,\ 0K \mid jK) \times$$

$$\times \left(2j0\,\frac{1}{2} \mid j \pm 1,\ \frac{1}{2}\right)\left(N + \frac{3}{2}\right); \tag{51}$$

$$\left\langle lljK \left| \frac{\hat{\Omega}}{T} \right| l l+2,\ j+1,\ K \right\rangle = -\eta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2,\ j+1,\ 0K \mid jK) \times$$

$$\times \left(2j0\,\frac{1}{2} \mid j+1,\ \frac{1}{2}\right)\sqrt{(N-l)(N+l+3)}; \tag{52}$$

$$\left\langle lljK \left| \frac{\hat{\Omega}}{T} \right| l l+2,\ j+2,\ K \right\rangle = -\eta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2,\ j+2,\ 0K \mid jK) \times$$

$$\times \left(2j0\,\frac{1}{2} \mid j+2,\ \frac{1}{2}\right)\sqrt{(N-l)(N+l+3)}; \tag{53}$$

$$\left\langle lljK \left| \frac{\hat{\Omega}}{T} \right| l l-2,\ j-1,\ K \right\rangle = -\eta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2,\ j-1,\ 0K \mid jK) \times$$

$$\times \left(2j0\,\frac{1}{2} \mid j-1,\ \frac{1}{2}\right)\sqrt{(N-l+2)(N+l+1)}; \tag{54}$$

$$\left\langle lljK \left| \frac{\hat{\Omega}}{T} \right| l l-2,\ j-2,\ K \right\rangle = -\eta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2,\ j-2,\ 0K \mid jK) \times$$

$$\times \left(2j0\,\frac{1}{2} \mid j-2,\ \frac{1}{2}\right)\sqrt{(N-l+2)(N+l+1)}; \tag{55}$$

$$T = \frac{\hbar\omega_0 \varkappa \xi}{\beta_0}. \tag{56}$$

Для того, чтобы система алгебраических уравнений (35) имела нетривиальные решения, необходимо выполнение следующего условия

$$det \| a_I^{|m|}(jK\alpha;\ j'K'\alpha') - \varepsilon\delta_{jj'}\delta_{KK'}\delta_{\alpha\alpha'} \| = 0. \tag{57}$$

Уравнение (57) определит ε, следовательно полностью определится параметр Λ, который определяет энергию ядра, согласно выражению (30). После вычитания энергии нулевых β- и γ-колебаний в приближении $\mu = 0$, энергию возбужденных состояний ядра можно записать в виде

$$E_N^{|m|,\ n,\ \lambda,\ I} = \hbar\omega_p n + \hbar\omega_\gamma\left(\lambda + \frac{|m|}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2B\beta_\Lambda^2}\left(\varepsilon^{|m|}(I) + \frac{m^2}{3}\right), \tag{58}$$

где $\hbar\omega_\gamma = \dfrac{\hbar^2}{B\beta_\Lambda^2\Gamma^2}$ — энергия γ-колебаний.

Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы $a_I^{|m|}(jK\alpha;\ j'K'\alpha')$ равносильно решению уравнения (57). Эти собственные значения и собственные векторы определят вращательно-одночастичные состояния основной полосы ($m=0$) и аномальных полос ($|m|\neq 0$), а также коэффициенты разложения волновой функции (33).

§ 3. Сравнение теории с экспериментом

Для основной полосы $m=0$ и оболочки $N=4$ методом вращений (11) на электронно-счетной вычислительной машине было решено уравнение (57). Максимальный порядок диагонализируемых при этом матриц определяется для $m=0$ выражением $n=\dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$,

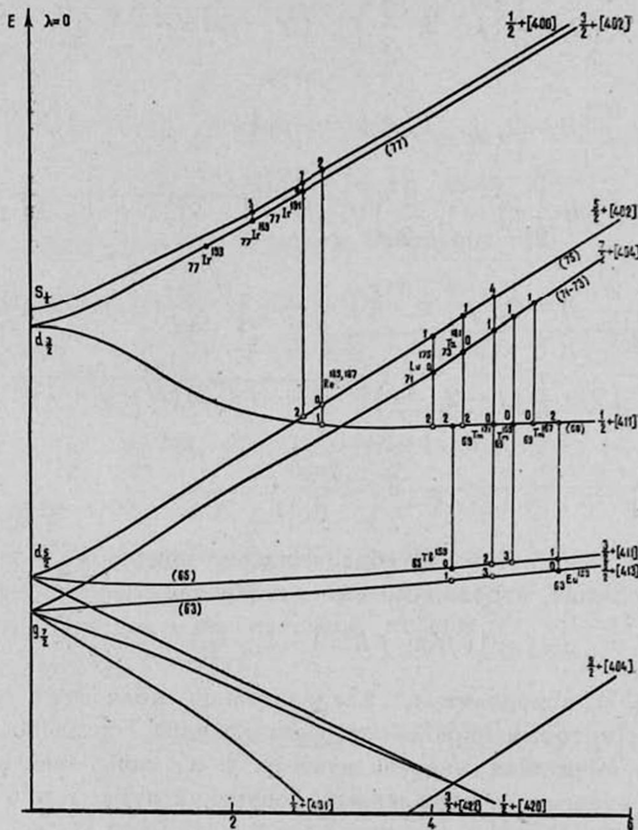


Рис. 1. Схема Нильссона, $N=4$. Спектр протонов для $50<Z<82$ как функция деформации.

N — номер оболочки схемы Нильссона. Для удобства понимания полученных результатов приведем часть оболочки $N=4$ схемы Нильссона (рис. 1), которая обычно используется для интерпретации одночастичных состояний нечетно-протонных ядер в области редких земель.

На рис. 1 не показаны уровни отрицательной четности, которые относятся к оболочке $N=5$. В скобках у некоторых уровней указано число заполненных состояний, т. е. число протонов в протонно-нечетном ядре, основное состояние которого имеет квантовые характеристики данного уровня. На этом же рисунке представлены ядра, одночастичные состояния которых интерпретируются по схеме Нильссона. Черные кружочки означают возбуждения частиц, белые—дырок. Цифры у них означают номер возбужденного состояния. 0—относится к основному состоянию. Можно заметить, что возбуждения частиц могут чередоваться с возбуждениями дырок. Следует отметить, что в настоящей работе могут быть описаны либо возбуждения частиц, либо

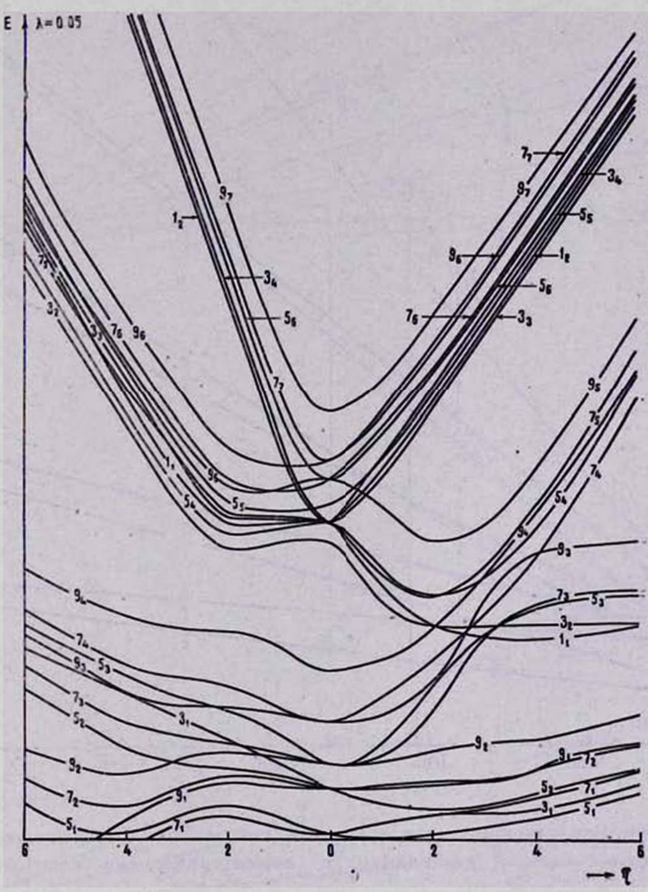


Рис. 2. Схема Нильссон+вращения, $N=4$. Вращательно-одночастичный спектр нечетно-протонных ядер с $50<Z<82$ как функция деформации при $\lambda=0{,}05$. Цифры у каждого уровня обозначают удвоенный спин, индекс при цифре различает одночастичные состояния, к которым относятся вращательные уровни с данным спином.

возбуждения дырок. Чередование таких возбуждений в данной схеме количественно не может быть описано. Схема Нильссона представляет собой предельный случай более полной схемы, когда учитываются вращения. При стремлении энергии вращения к нулю построенная здесь схема переходит в обычную схему Нильссона. На рис. 2 приведена схема Нильссона с учетом вращений. В отличие от рис. 1 на каждом одночастичном состоянии построена вращательная полоса и можно проследить, как эти полосы изменяются в зависимости от деформации η. Каждая вращательная полоса, развивающаяся на одночастичном состоянии, при $\lambda \to 0$ вырождается в одночастичное состояние схемы Нильссона. Достаточно малые λ соответствуют адиабатическому приближению, когда вращения можно отделить от одночастичных движений, т. е. на каждом одночастичном состоянии строится независимая вращательная полоса.

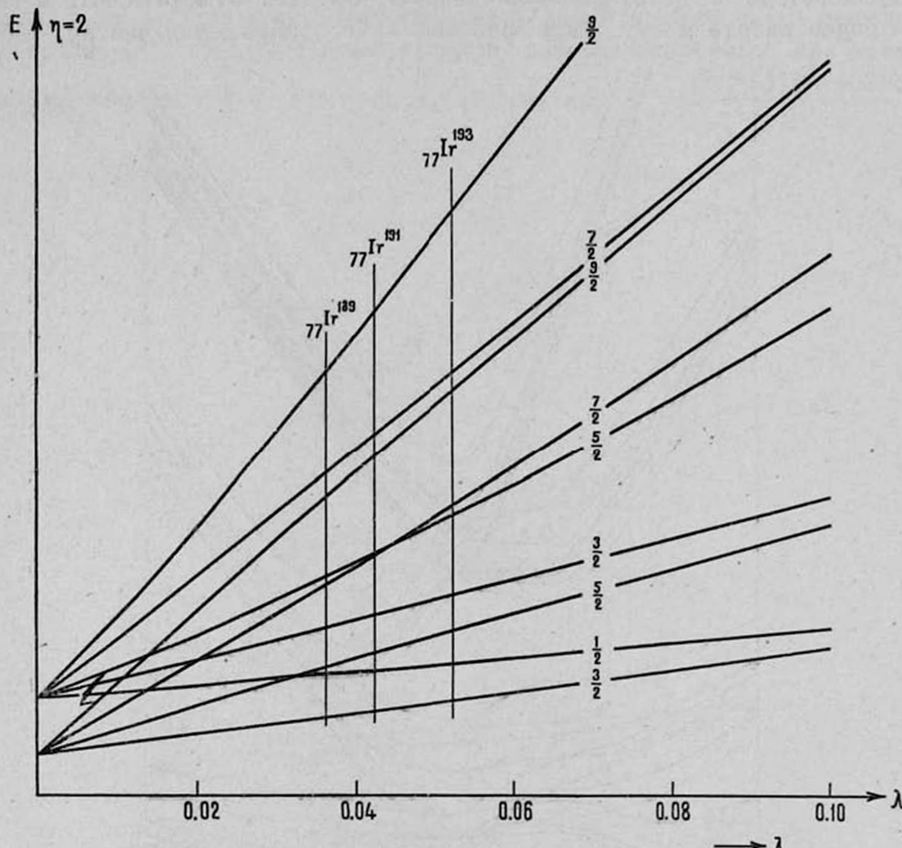


Рис. 3. Вращательно-одночастичные состояния схемы Нильссон+вращения, соответствующие нильссоновским состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1}{2}+[400]$ и $\frac{3}{2}+[402]$, как функции параметра λ при $\eta=2$.

На рис. 3 приведена часть схемы Нильссон + вращения, относящаяся к двум нильссоновским одночастичным состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1^+}{2}[400]$ и $\frac{3^+}{2}[402]$. На этих одночастичных состояниях, согласно принятой интерпретации, развиваются вращательные полосы ядер $_{77}Ir^{189}$, $_{77}Ir^{191}$ и $_{77}Ir^{193}$. При определенных значениях параметров η и λ ($\eta = 2$, $\lambda = 0{,}036$ для Ir^{189}; $\eta = 2$, $\lambda = 0{,}042$ для Ir^{191} и $\eta = 2$, $\lambda = 0{,}052$ для Ir^{193}) можно добиться удовлетворительного согласия с экспериментом (см. рис. 5). На рис. 4 приведена часть схемы Нильссон + вращения, относящаяся к трем одночастич-

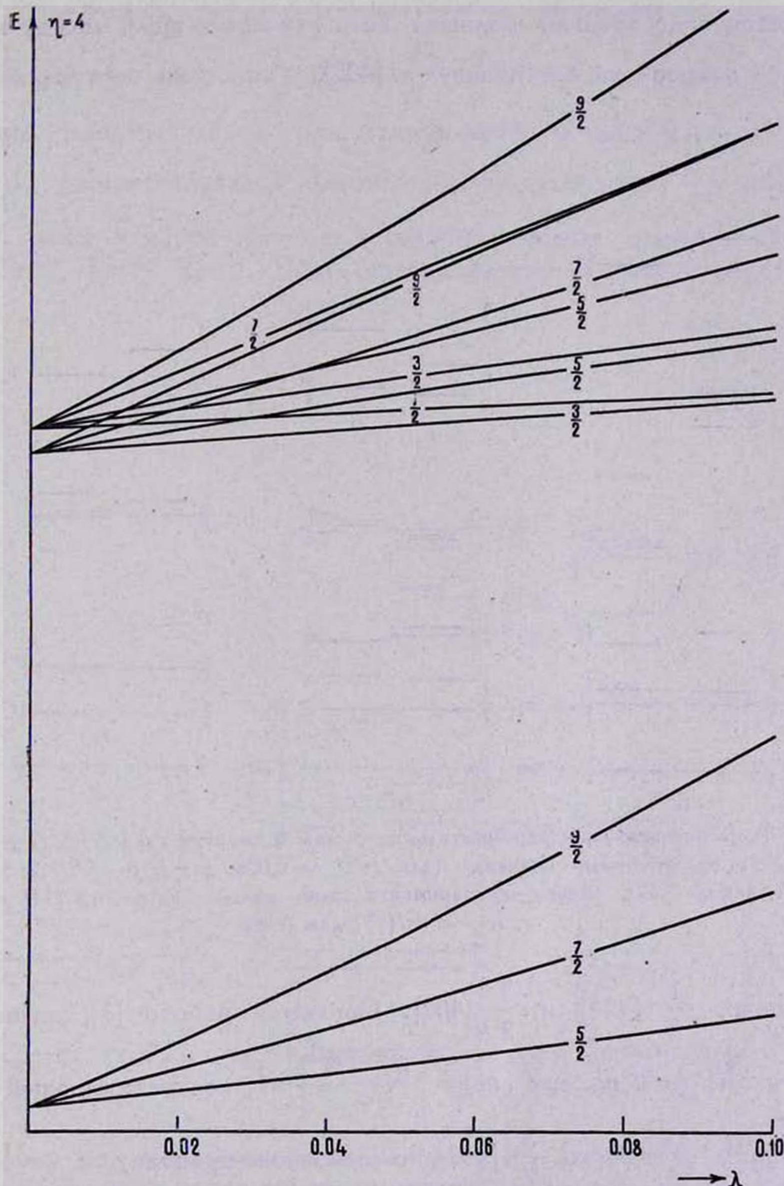
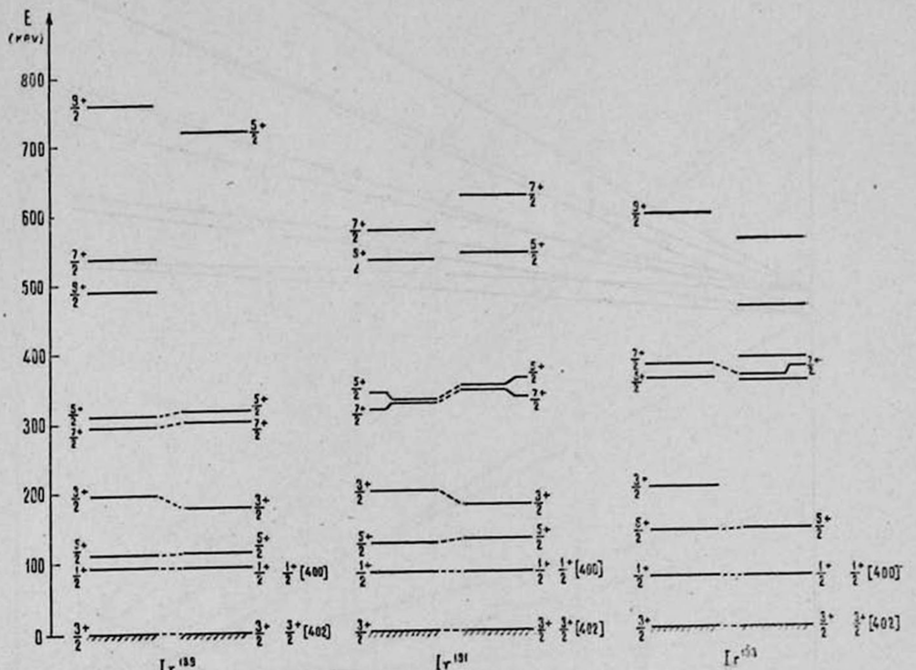


Рис. 4. Вращательно-одночастичные состояния схемы Нильссон+вращения, соответствующие нильссоновским состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1}{2}+[400]$, $\frac{3}{2}+[402]$ и $\frac{5}{2}+[402]$ как функции параметра λ при $\eta = 4$.

ным состояниям $\frac{1}{2}^+[400]$, $\frac{3}{2}^+[402]$ и $\frac{5}{2}^+[402]$ в зависимости от параметра λ при $\eta=4$. Эти орбиты соответствуют изотопам рения. Имеется ряд указаний [12—13] на то, что в изотопах рения возбуждаются γ-колебательные состояния. Из рис. 4 видно, что при малых λ имеется относительно большая энергетическая щель между вращательной полосой на состоянии $\frac{5}{2}^+[402]$, и полосами, построенными на



Рис, 5. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядер Ir^{189}, Ir^{191} и Ir^{193}. Слева даны теоретические значения (для Ir^{189} $\lambda=0{,}036$; для Ir^{191} $\lambda=0{,}042$; для Ir^{193} $\lambda=0{,}052$; всюду $\eta=2$), справа—экспериментальные, взятые из работы [14] для Ir^{189} и Ir^{191} и из [15] для Ir^{193}.

состояниях $\frac{1}{2}^+[400]$ и $\frac{3}{2}^+[402]$. Согласно работе [7], взаимодействие аномальной полосы $|m|=\left|\frac{K-\Omega}{2}\right|=1$, соответствующей одночастичному состоянию $\frac{5}{2}^+[402]$, с основной приводит к опусканию состояния $\frac{1}{2}^+[400]$ и сильно его коллективизирует. Поэтому состояние $\frac{1}{2}^+ 645{,}8\ kev$ [15] Re^{185} можно интерпретировать как сильно коллективизированное одночастичное состояние с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1}{2}^+[400[$. Точно также состояние $\frac{1}{2}^+511$ *kev* в Re^{187} [16]—это сильно коллективизированное состояние $\frac{1}{2}^+[400]$; $\frac{3}{2}^+582$ *kev* —это $\frac{3}{2}^+[402]$; $\frac{3}{2}^+618$ *kev* — вращательное состояние полосы, принадлежащей $\frac{1}{2}^+[400]$; а $\frac{1}{2}^+625$ *kev* и $\frac{3}{2}^+773$ *kev* — уровни, принадлежащие γ-колебательной или аномальной вращательной полосе $|m|=1$, соответствующей одночастичному состоянию $\frac{5}{2}^+[402]$. На рис. 6 даны теоретические и экспериментальные спины и энергии ядер Tm^{167}, Tm^{169}, Tm^{171}. Часть возбужденных состояний этих ядер

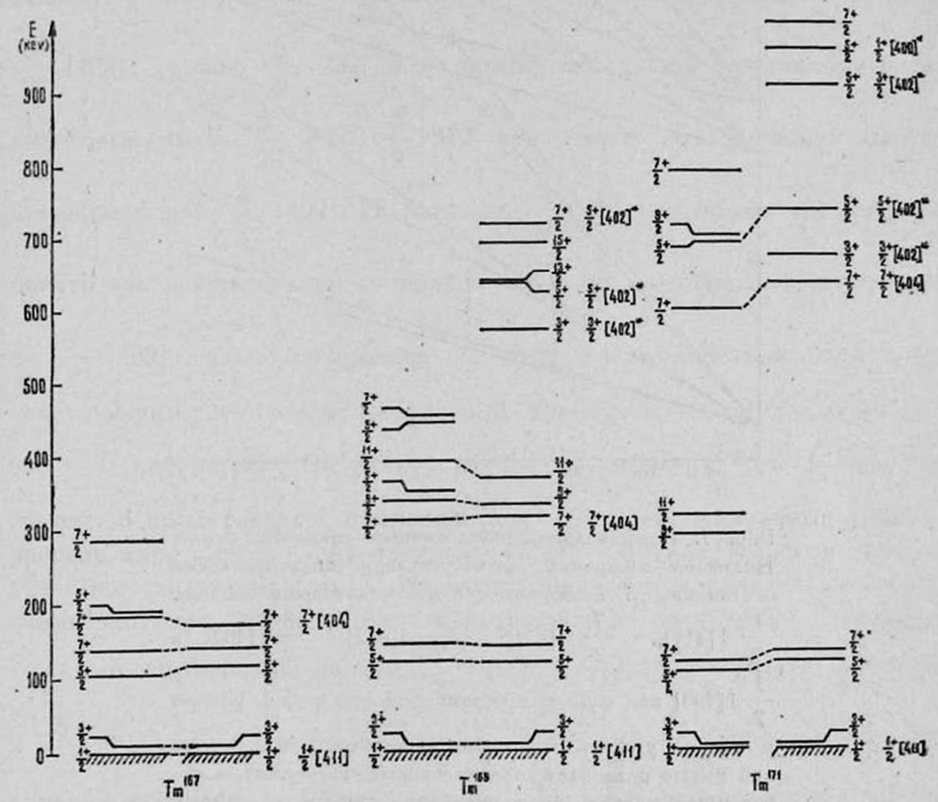


Рис. 6. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядер Tm^{167}, Tm^{169}, Tm^{171}. Слева даны теоретические значения (для Tm^{167} $\lambda=0{,}184$; для Tm^{169} $\lambda=0{,}116$; Tm^{171} $\lambda=0{,}052$; всюду $\eta=5{,}4$), справа—экспериментальные, взятые из работы [15] и для Tm^{167} и Tm^{171} и из [17] для Tm^{169}. Справа также указаны асимптотические квантовые числа. Звездочка означает, что данный уровень сильно коллективизирован за счет взаимодействия с γ-колебаниями.

описывается схемой, представленной на рис. 7. Рис. 7 представляет собой тоже часть схемы Нильссон + вращения, относящуюся к одноча-

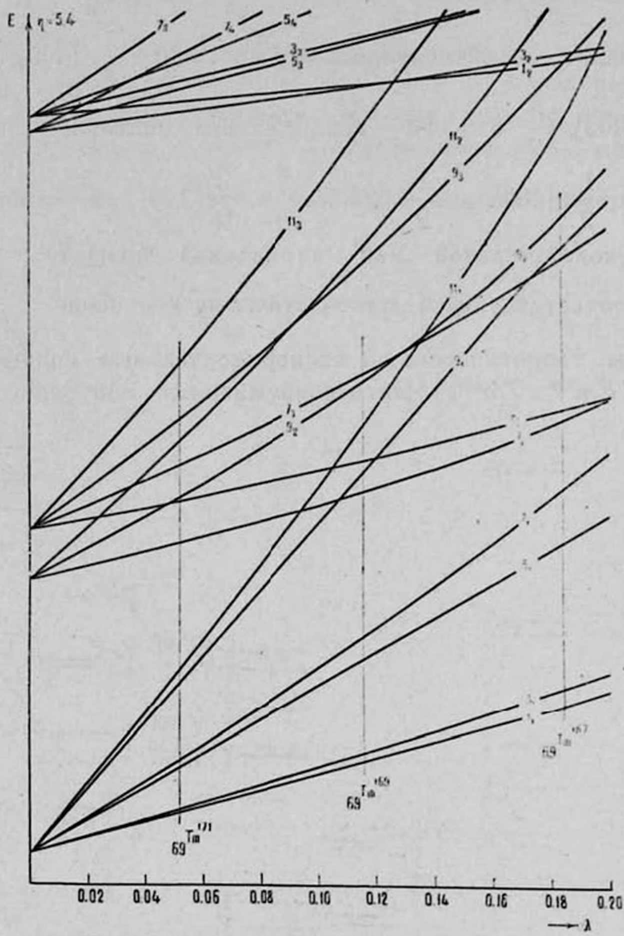


Рис. 7. Вращательно-одночастичные состояния схемы Нильссон+вращения, соответствующие нильссоновским состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1}{2}+[411]$, $\frac{7}{2}+[404]$, $\frac{5}{2}+[402]$, $\frac{3}{2}+[402]$ и $\frac{1}{2}+[400]$ как функции параметра λ при $\eta=5{,}4$. Цифры у каждого уровня обозначают удвоенный спин, индекс при цифре различает одночастичные состояния, к которым относятся вращательные уровни с данным спином.

стичным состояниям $\frac{1}{2}+[411]$, $\frac{7}{2}+[404]$, $\frac{5}{2}+[402]$, $\frac{3}{2}+[402]$ и $\frac{1}{2}+[400]$ в зависимости от параметра λ при $\eta = 5{,}4$. В случае Tm^{167} все известные возбужденные состояния описываются при $\lambda = 0{,}184$

(рис. 7). В случае Tm^{169} нижайшие состояния также удовлетворительно описываются теорией (рис. 7, $\lambda = 0{,}116$), причем любопытно, что состояния $\frac{9}{2}+332$ *kev* и $\frac{11}{2}+368$ *kev* — члены ротационной полосы, построенной на одночастичном состоянии $\frac{1}{2}+[411]$, а не $\frac{7}{2}+[404]$. Состояние $\frac{3}{2}+570$ *kev* — это опущенный за счет γ-колебаний и сильно тем коллективизированный уровень $\frac{3}{2}+[402]$, а $\frac{5}{2}+633$ *kev* и $\frac{7}{2}+718$ *kev* — члены его ротационной полосы. Аналогична ситуация в ядре Tm^{171}. Нижайшие состояния — это вращательно-одночастичные состояния, описываемые схемой Нильссон + вращения (рис. 7, $\lambda = 0{,}052$). Далее, $\frac{3}{2}+675$ *kev* — опущенный и коллективизированный уровень $\frac{3}{2}+[402]$; уровню $\frac{5}{2}+737$ *kev* можно приписать асимптотические квантовые числа $\frac{5}{2}+[402]$; $\frac{5}{2}+912$ *kev* — член ротационной полосы, принадлежащей $\frac{3}{2}+[402]$. И, наконец, $\frac{5}{2}+963$ *kev* можно интерпретировать как вращательное состояние с $I = \frac{5}{2}$ из полосы, построенной на $\frac{1}{2}+[400]$, сильно опущенное за счет взаимодействия его с соответствующим состоянием аномальной полосы нулевых γ-колебаний с $|m| = 1$, построенной на одночастичном состоянии $\frac{1}{2}+[411]$. Наконец, на рис. 8 представлены теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра ${}_{63}Eu^{153}$. Соответствующая часть схемы Нильссон + вращения представлена на рис. 7. На этом рисунке представлена та часть схемы, которая соответствует одночастичным состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{5}{2}+[413]$, $\frac{3}{2}+[411]$, $\frac{1}{2}+[411]$, $\frac{7}{2}+[404]$ и $\frac{5}{2}+[402]$. Для нижайших состояний Eu^{153} при $\lambda = 0{,}024$ наблюдается хорошее согласие с экспериментом. Полоса, начинающаяся с уровня $\frac{1}{2}+634$ *kev* — это вращательная полоса на коллективизированном за счет γ-колебаний одночастичном состоянии с асимптотическими квантовыми числами $\frac{1}{2}+[411]$.

В рамках настоящей теории не может быть описано ядро Tb^{159}, в котором сначала возбуждается дырочное состояние, затем частичное. То же самое можно сказать о ядрах Lu^{175} и Ta^{181} (см. рис. 1). Однако не исключено, что и в последнем случае сказывается влияние неаксиальности, т. е. γ-колебаний.

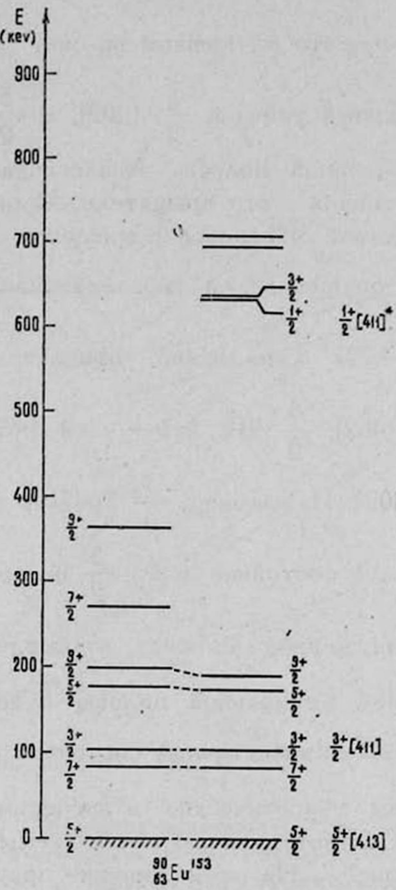


Рис. 8. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Eu^{153}. Слева даны теоретические значения ($\lambda=0{,}024$, $\eta=4$), справа—экспериментальные [18]. Справа также указаны асимптотические квантовые числа. Звездочка означает, что данный уровень сильно коллективизирован.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что в области ядер, принадлежащих оболочке $N=4$ низколежащие состояния действительно могут быть описаны схемой Нильссон+вращения. Однако во многих случаях более высокие возбужденные состояния лежат значительно ниже, чем можно ожидать согласно схеме Нильссон+

вращения. Это свидетельствует о том, что следует учитывать γ-колебания. К сожалению, точный учет их связан с большими трудностями и нужно искать приближенные методы.

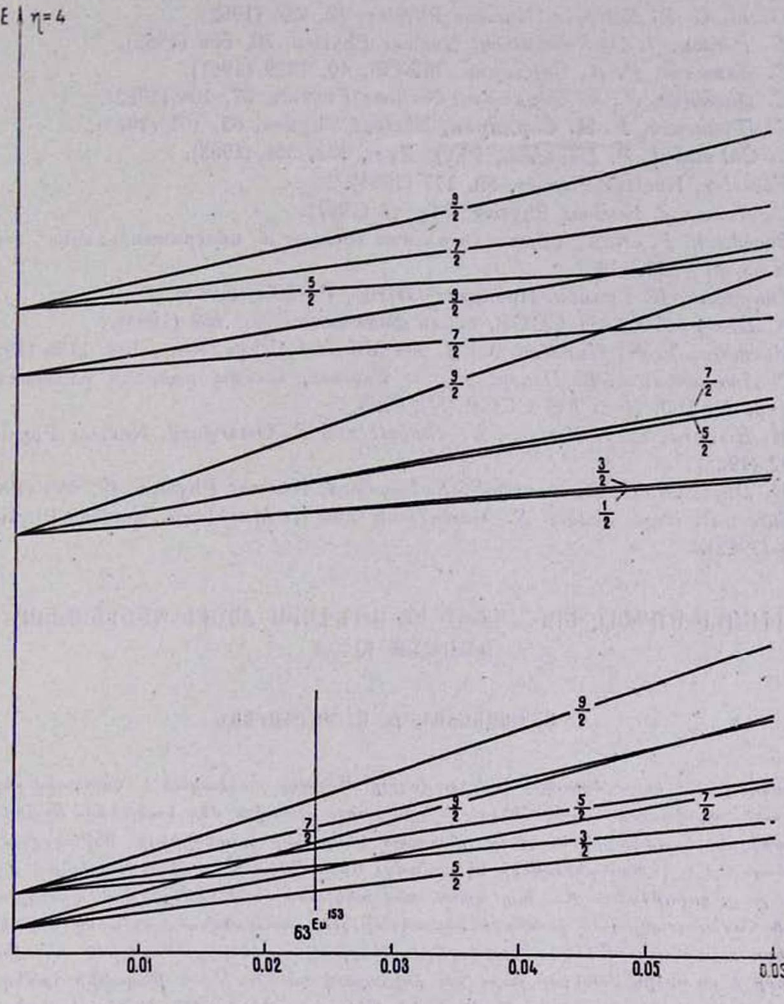


Рис. 9. Вращательно-одночастичные состояния схемы Нильссон+вращения, соответствующие нильссоновским состояниям с асимптотическими квантовыми числами $\frac{5}{2}+[413]$ $\frac{3}{2}+[411]$, $\frac{1}{2}+[411]$, $\frac{7}{2}+[404]$ и $\frac{5}{2}+[402]$ как функции параметра λ при $\eta=4$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору А. С. Давыдову за постоянное внимание к работе и ценные критические замечания, а также В. В. Пашкевичу за плодотворные дискуссии.

Ереванский физический
институт

Поступила 13 апреля 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. G. Nilsson*, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 29, № 16 (1955).
2. *B. Mottelson, S. Nilsson*, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, № 8 (1959).
3. *K. Hecht, G. R. Satchler*, Nuclear Physics, 32, 286 (1962).
4. *L. W. Person, J. O. Rasmussen*, Nuclear Physics, 36, 666 (1962).
5. *А. С. Давыдов. Р. А. Сардарян*, ЖЭТФ, 40, 1429 (1961).
6. *А. С. Давыдов, Р. А. Сардарян*, Nuclear Physics, 37, 106 (1962).
7. *В. В. Пашкевич, Р. А. Сардарян*, Nuclear Physics, 65, 401 (1965).
8. *B. E. Chi* and *J. P. Davidson*, Phys. Rev., 131, 366 (1963).
9. *A. Faessler*, Nuclear Physics, 59, 177 (1964).
10. *А. С. Давыдов*, Nuclear Physics, 24, 642 (1961).
11. *В. Воеводин. Г. Ким*, „Вычислительные методы и программирование" стр. 269, Из-во МГУ, М., 1962.
12. *В. Гнатович, К. Громов*. Препринт ОИЯИ, Р—2086 (1965).
13. *Л. К. Пекер*, Изв. АН СССР, серия физическая, 28, 289 (1964).
14. *B. Harmatz, T. H. Handley* and *J. W. Mihelich*, Phys. Rev., 128, 1186 (1962).
15. *Б. С. Джелепов, Л. К. Пекер, В. О. Сергеев*, Схемы распада радиоактивных ядер, A > 100. Изд. АН СССР, М., 1963.
16. *K. M. Bisgard, L. J. Nielsen, E. Stabell* and *P. Ostergard*, Nuclear Physics, 71, 192 (1965).
17. *R. M. Diamond, B. Elbek* and *F. S. Stephens*, Nuclear Physics, 43, 560 (1963).
18. *T. Suter, P. Reyes-Suter, S. Gustafsson* and *I. Marklund*, Nuclear Physics, 20, 33 (1962).

ՆԻԼՍՈՆԻ ՄՈԴԵԼԸ ԵՐԲ ՀԱՇՎԻ ԵՆ ԱՌՆՎՈՒՄ ՀԵՆՔԻ ՊՏՈՒՅՏՆԵՐԸ։ ԹԱՂԱՆԹ N=4

Վ. Ս. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Ռ. Ա. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ

Հետազոտված է կենտ միջուկի հետևյալ մոդելը։ Միջուկը բաղկացած է՝ կոլեկտիվ շարժումներ կատարող աքսիալ-սիմետրիկ հենքից և նրա շուրջը պտտվող մեկ նուկլոնից։ Որպես դաշտ, որտեղ շարժվում է արտաքին նուկլոնը, ընտրված է Նիլսոնի պոտենցիալը։ Ենթադրվում է, որ միջուկը կայուն է γ-տատանումների նկատմամբ։ Շեղումները աքսիալ սիմետրիայից թեկուզ և փոքր են, բայց գոյություն ունեն։ Այդ պատճառով անկյունային մոմենտը և նրա պրոեկցիան սիմետրիայի հավասարակշռված առանցքի նկատմամբ չեն պահպանվում։ Այսպիսի միջուկներում պտույտները առանձնանում են կոլեկտիվ շարժումների մյուս ձևերից։ Կարելի է ուսումնասիրել պտույտները և առանձին մասնիկի շարժման փոխադարձ կապը։ $N=4$ թաղանթի համար (N-ը Նիլսոնի մոդելի գլխավոր քվանտային թիվն է) էլեկտրոնային-հաշվիչ մեքենայի վրա լուծվել է միամասնիկի պտտական շարժման խնդիրը կենտ միջուկների համար։ Մի շարք միջուկների համար հազվագյուտ հողերի տիրույթում (Eu^{153}, Ir^{189}, Ir^{191}, Ir^{193}, Tm^{167}, Tm^{169}, Tm^{171}) սպինների և գրգռման էներգիաների ստացված հաջորդականության համեմատումը էքսպերիմենտի հետ թույլ է տալիս տարբերել պտտական միամասնիկի վիճակները զրոյական γ—տատանումների մեծ խառնուրդ ունեցող վիճակներից։ Ստացված է բավարար համաձայնություն էքսպերիմենտի հետ։

NILSSON'S MODEL WITH AN ACCOUNT OF THE ROTATIONS SHELL $N=4$

by B. S. POGHOSSIAN, R. A. SARDARIAN

The paper treats of the axial-symmetric model of the odd—A nucleus, consisting of a rotating core and an external nucleon moving in the field of core. Nilsson's potential is chosen as the field where the external nucleon moves. The nucleon remains stiff in respect to the γ-vibrations. The single-particle states of the shell $N=4$ are found out. The theoretical calculation is in full agreement with the experimentally excited states of the nuclei Eu^{153}, Ir^{189}, Ir^{191}, Ir^{193}, Tm^{167}, Tm^{169}, Tm^{171}.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 310—318 (1966)

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ДВУХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ

Г. М. ГАРИБЯН, М. М. МУРАДЯН

Рассмотрены полные потери энергии заряженной частицы при пролете через двухслойную пластинку в общем случае. С помощью общей формулы дан анализ случая двухслойной тонкой пластинки.

В ряде работ (см. обзор [1]) были рассмотрены потери энергии заряженной частицы при пролете через пластинку. В работе [2] было показано, что в тонких пленках вещества, расположенных в вакууме, ионизационные потери идут без эффекта плотности. Поскольку толщины пленок при этом должны быть малыми, представляет интерес рассмотреть случай двухслойной пластины и, в частности, исследовать, когда ионизационные потери энергии в обоих слоях идут без эффекта плотности, а на толщины каждого из слоев накладываются такие условия, как если бы мы имели две независимые однослойные пластины.

1. Пусть частица заряда e пролетает с постоянной скоростью $v = v_z$ перпендикулярно через двухслойную пластинку, расположенную в вакууме (для удобства дальнейших обозначений мы введем диэлектрическую постоянную вакуума ε_0, которая равна единице).

Пластинку будем считать состоящей из первого слоя толщины a_1 и диэлектрической постоянной $\varepsilon_1(\omega)$ (везде полагаем магнитную проницаемость вещества $\mu(\omega) = 1$), и второго слоя a_2 и $\varepsilon_2(\omega)$. Задачу мы будем решать таким же методом, как и в [3], т. е. для получения полного решения, удовлетворяющего условиям на границах сред, мы к решениям неоднородных уравнений Максвелла добавим в пространстве до пластинки в качестве решений однородных уравнений Максвелла отраженную волну $E_0''(\vec{r}, t)$, в пространстве за пластиной—прошедшую волну $E_0'(\vec{r}, t)$ и, наконец, в каждом из слоев пластинки как одну волну, так и другую (E_1'', E_1', E_2'', E_2').

Указанные поля излучения мы будем искать в следующем виде:

$$\vec{E}_m''(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_m''(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} - \lambda_m z - \omega t)}\, d\vec{k},$$
$$\vec{E}_m'(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_m'(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} + \lambda_m z - \omega t)}\, d\vec{k}, \qquad (1)$$

где $\lambda_m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_m - \varkappa^2$, $\lambda_m = \lambda_m' + i\lambda_m''$, $\lambda_m' > 0$ для $\omega > 0$ и $\lambda_m' < 0$ для

$\omega < 0$, $\lambda''_m > 0$ для $\omega \lessgtr 0$, $m = 0, 1, 2$, $\vec{\varkappa}$ и $\vec{\rho}$ есть компоненты векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$ в плоскости x, y, $\omega = k_z v$, а Фурье-компоненты полей $\vec{E}_m(\vec{k})$ и $\vec{E}'_m(\vec{k})$ должны быть определены из граничных условий. Что же касается магнитных векторов полей излучения, то они выражаются через электрические векторы с помощью однородных уравнений Максвелла. Помимо этого имеются также условия поперечности, из которых следует связь между нормальными и тангенциальными компонентами электрических векторов полей излучения.

Приравняв тангенциальные компоненты электрического и магнитного векторов полных полей и нормальные компоненты их индукций при $z = 0$, a_1, $a_1 + a_2$, мы получим 12 уравнений. Из 6 уравнений для магнитных векторов следует, что тангенциальные компоненты электрических векторов полей излучения направлены по вектору $\vec{\varkappa}$. Тогда из оставшихся 6 уравнений получаются следующие выражения для Фурье-компоненты тангенциальных составляющих электрических векторов полей излучения:

$$\vec{E}_{0t}(\vec{k}) = \frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{10}^{-}(\rho_{02}^{+}\rho_{12}^{+} - \rho_{02}^{-}\rho_{12}^{-})\,e^{-i\lambda_1 a_1} + \gamma_{10}^{+}(\rho_{02}^{+}\rho_{12}^{-} - \rho_{02}^{-}\rho_{12}^{+})\,e^{i\lambda_1 a_1} +$$

$$+ \rho_{11}^{+}(\rho_{02}^{+}\gamma_{21}^{-} - \rho_{02}^{-}\gamma_{21}^{+} + \rho_{22}^{+}\gamma_{02}^{-})\,e^{i\frac{\omega}{v}a_1}\Big],$$

$$\vec{E}_{1t}(\vec{k}) = \frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{01}^{+}(\rho_{02}^{-}\rho_{12}^{+} - \rho_{02}^{+}\rho_{12}^{-}) + \rho_{01}^{+}(\rho_{02}^{+}\gamma_{21}^{-} - \rho_{02}^{-}\gamma_{21}^{+} + \rho_{22}^{+}\gamma_{02}^{-})\Big]\,e^{i\left(\lambda_1 + \frac{\omega}{v}\right)a_1},$$

$$\vec{E}'_{1t}(\vec{k}) = -\frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{01}^{+}(\rho_{02}^{+}\rho_{12}^{+} - \rho_{02}^{-}\rho_{12}^{-}) + \rho_{01}^{-}(\rho_{02}^{+}\gamma_{21}^{-} - \rho_{02}^{-}\gamma_{21}^{+} + \rho_{22}^{+}\gamma_{02}^{-})\Big]\,e^{-i\left(\lambda_1 - \frac{\omega}{v}\right)a_1}, \tag{2}$$

$$\vec{E}_{2t}(\vec{k}) = \frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{02}^{-}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{+} + \rho_{01}^{-}\rho_{02}^{-}) + \rho_{02}^{-}(\rho_{01}^{+}\gamma_{12}^{+} - \rho_{01}^{-}\gamma_{12}^{-} + \rho_{11}^{+}\gamma_{01}^{+})\Big]\,e^{i\left(\lambda_2 + \frac{\omega}{v}\right)a_1},$$

$$\vec{E}'_{2t}(\vec{k}) = -\frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{02}^{-}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{-} + \rho_{01}^{-}\rho_{12}^{+}) + \rho_{02}^{+}(\rho_{01}^{+}\gamma_{12}^{+} - \rho_{01}^{-}\gamma_{12}^{-} + \rho_{11}^{+}\gamma_{01}^{+})\Big]\,e^{-i\left(\lambda_2 - \frac{\omega}{v}\right)a_1},$$

$$\vec{E}'_{0t}(\vec{k}) = -\frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\Big[\gamma_{20}^{+}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{+} + \rho_{01}^{-}\rho_{12}^{-})\,e^{-i\lambda_2 a_2} - \gamma_{20}^{-}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{-} + \rho_{01}^{-}\rho_{12}^{+})\,e^{i\lambda_2 a_2} +$$

$$+ \rho_{22}^{+}(\rho_{01}^{+}\gamma_{12}^{+} - \rho_{01}^{-}\gamma_{12}^{-} + \rho_{11}^{+}\gamma_{01}^{+})\,e^{-i\frac{\omega}{v}a_2}\Big]\,e^{-i\left(\lambda_0 - \frac{\omega}{v}\right)(a_1 + a_2)},$$

где

$$\rho_{ml}^{\pm} = \left(\frac{\varepsilon_m}{\lambda_m} \pm \frac{\varepsilon_l}{\lambda_l}\right) e^{\mp i\lambda_l a_l \delta_{m0}},$$

$$\gamma_{ml}^{\pm} = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_l}{\Lambda_m \Lambda_l}\left(\frac{\omega}{c}\beta \pm \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_l - \Lambda_m}{\varepsilon_l \lambda_m}\right) e^{\mp i\frac{\omega}{v}a_l \delta_{m0}}, \tag{3}$$

$$F = \rho_{12}^{+}(\rho_{01}^{+}\rho_{02}^{+} - \rho_{01}^{-}\rho_{02}^{-}) + \rho_{12}^{-}(\rho_{01}^{-}\rho_{02}^{+} - \rho_{01}^{+}\rho_{02}^{-}),$$

$$\Lambda_m = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_m, \qquad k^2 = \varkappa^2 + \frac{\omega^2}{v^2}, \qquad \beta = \frac{v}{c},$$

$m,\ l = 0,\ 1,\ 2$; δ_{m0} — символ Кронекера.

Легко убедиться, что из решений (2) правильно получаются все частные случаи, к которым можно перейти от случая двухслойной пластинки.

2. Вычислим теперь работу сил поля излучения над частицей. Очевидно, что она совершается только нормальными составляющими электрического поля, Фурье-компоненты которых следующим образом связаны с Фурье-компонентами тангенциальных составляющих:

$$E'_{mn}(\vec{k}) = -\frac{\varkappa}{\lambda_m}E'_{mt}(\vec{k}); \qquad E''_{mn}(\vec{k}) = \frac{\varkappa}{\lambda_m}E''_{mt}(\vec{k}). \tag{4}$$

Эта работа будет равна

$$W = e\int_{-\infty}^{0}\vec{E}''_{0n}\vec{v}dt + e\int_{0}^{\frac{a_1}{v}}(\vec{E}'_{1n} + \vec{E}''_{1n})\vec{v}dt + e\int_{\frac{a_1}{v}}^{\frac{a_1+a_2}{v}}(\vec{E}'_{2n} + \vec{E}''_{2n})\vec{v}dt +$$

$$+ e\int_{\frac{a_1+a_2}{v}}^{+\infty}\vec{E}'_{0n}\vec{v}dt, \tag{5}$$

где стоящие под интегралами электрические поля взяты в точке нахождения частицы, т. е. при $\rho = 0,\ z = vt$.

Интегрируя по времени и представив $d\vec{k} = 2\pi\varkappa d\varkappa\frac{d\omega}{v}$, после весьма длинных преобразований приходим к следующей формуле:

$$W = W_1 + W_2, \tag{6}$$

$$W_1 = -\frac{e^2}{\pi v^2}\int_0^{\varkappa_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\omega d\omega}{F}[\alpha_{01}^{+}(\rho_{02}^{+}\rho_{12}^{+} - \rho_{02}^{-}\rho_{12}^{-}) + \alpha_{02}^{+}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{+} + \rho_{01}^{-}\rho_{12}^{-}) +$$

$$+ \alpha_{12}^{+}(\rho_{01}^{+}\rho_{02}^{+} + \rho_{01}^{-}\rho_{02}^{-}) + \alpha_{01}^{-}(\rho_{02}^{+}\rho_{12}^{-} - \rho_{02}^{-}\rho_{12}^{+}) - \alpha_{02}^{-}(\rho_{01}^{+}\rho_{12}^{-} + \rho_{01}^{-}\rho_{12}^{+}) -$$

$$- \alpha_{12}^{-}(\rho_{01}^{+}\rho_{02}^{-} + \rho_{01}^{-}\rho_{02}^{+}) + \rho_{11}^{+}(\rho_{02}^{-}\gamma_{01}^{+}\gamma_{21}^{-} + \rho_{02}^{-}\gamma_{01}^{-}\gamma_{21}^{+} - \rho_{02}^{+}\gamma_{01}^{-}\gamma_{21}^{-}) +$$

$$+ \rho_{22}^{+}(\rho_{01}^{-}\gamma_{02}^{+}\gamma_{12}^{-} + \rho_{01}^{-}\gamma_{02}^{-}\gamma_{12}^{+} - \rho_{01}^{+}\gamma_{02}^{-}\gamma_{12}^{-}) - \rho_{11}^{+}\rho_{22}^{+}\gamma_{01}^{-}\gamma_{02}^{-}], \tag{7}$$

где

$$\alpha_{ml}^{\pm} = \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_l)^2}{\Lambda_m^2 \Lambda_l^2} \left[\frac{\omega^2}{c^2}\beta^2 \pm \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_m - \Lambda_l\right)^2}{\varepsilon_m \varepsilon_l \lambda_m \lambda_l} \right] e^{\mp \lambda_l a_l \lambda_{m0}},$$

$$W_2 = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega}{F} (\rho_{11}^{+} \rho_{02}^{+} \gamma_{01}^{+} \gamma_{21}^{+} + \rho_{22}^{+} \rho_{01}^{+} \gamma_{02}^{+} \gamma_{12}^{+} + \rho_{11}^{+} \rho_{22}^{+} \gamma_{01}^{+} \gamma_{02}^{+}). \tag{8}$$

$\frac{1}{\varkappa_0}$ определяется пределами применимости макроскопического рассмотрения.

Имеет смысл отметить, что выражение (6) не зависит от знака скорости частицы, т. е. потери не зависят от того, в какой последовательности расположены слои пластинки. Полагая $a_1 = 0$ (или $a_2 = 0$, или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), из (6) мы получаем выражения для потерь в однослойной пластинке [4].

3. Далее нам необходимо произвести в формуле (6) интегрирование по переменным ω и $\varkappa$.

В частном случае малых толщин слоев пластинки произведем разложение формулы (6) в ряд по степеням a_1 и a_2. В результате преобразований получим:

$$W = W(a_1) + W(a_2) + W(a_1^2) + W(a_2^2) + W(a_1, a_2), \tag{9}$$

$$W(a_1) = \frac{ie^2 a_1}{\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega (1 - \varepsilon_1)^2 \left(\Lambda_1 - \frac{\omega^2}{c^2}\beta^2\right)}{\varepsilon_1 \Lambda_0^2 \Lambda_1},$$

$$W(a_2) = \frac{ie^2 a_2}{\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega (1 - \varepsilon_2)^2 \left(\Lambda_2 - \frac{\omega^2}{c^2}\beta^2\right)}{\varepsilon_2 \Lambda_0^2 \Lambda_2}, \tag{10}$$

$$W(a_1^2) = -\frac{e^2 a_1^2}{2\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega (1 - \varepsilon_1)^2 \lambda_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{v^2} \frac{(1 - \beta^2)^2}{\varepsilon_1^2 \lambda_0^2}\right)}{\Lambda_0^2},$$

$$W(a_2^2) = -\frac{e^2 a_2^2}{2\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega (1 - \varepsilon_2)^2 \lambda_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{v^2} \frac{(1 - \beta^2)^2}{\varepsilon_2^2 \lambda_0^2}\right)}{\Lambda_0^2},$$

$$W(a_1, a_2) = -\frac{e^2 a_1 a_2}{\pi v^2} \int_0^{\varkappa_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa \omega d\omega (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \lambda_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{v^2} \frac{(1 - \beta^2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda_0^2}\right)}{\Lambda_0^2}.$$

4. Проинтегрируем выражение для $W(a_1)$, используя метод Ландау [5]. Рассмотрим два основных случая. Первый, когда $v^2 < \frac{c^2}{\varepsilon_{01}}$, и второй — $v^2 > \frac{c^2}{\varepsilon_{01}}$, где $\varepsilon_{01} = \varepsilon_1(0)$ — статическое значение диэлектрической постоянной первого слоя пластинки.

В первом случае $W(a_1) = -\frac{e^2\sigma_1 a_1}{v^2} \ln \frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}_1} \sim 0$, где $\overline{\omega}$ определено в [5], а $\overline{\omega}_1$ в [4] (см. также формулу (13)). Таким образом $W(a_1)$ в этом случае есть малая постоянная величина и следовательно потери в слое a_1 определяются только полем заряда частицы и задаются формулой без эффекта плотности [5]:

$$F = -\frac{e^2\sigma_1 a_1}{v^2}\left[\ln \frac{v\varkappa_0}{\overline{\omega}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{2}\right]. \tag{11}$$

Во втором случае надо различать две возможности. Если величина ξ, определяемая из уравнения

$$\varepsilon_1(i\xi) = \frac{c^2}{v^2},$$

много меньше атомных частот, то мы опять приходим к первому случаю. Интересной является вторая возможность. Из формулы (14) видно, что при v, очень близком к c, величина ξ будет много больше атомных частот и, как показано в [5], $\xi = \frac{\beta\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. В этом случае

$$W(a_1) = -\frac{e^2\sigma_1 a_1}{v^2}\left[\ln \frac{v\varkappa_0}{\overline{\omega}_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{2}\right] + \frac{e^2\sigma_1 a_1}{v^2} \ln \frac{v\varkappa_0}{\beta\sqrt{\sigma_1}}, \tag{12}$$

где

$$\ln\overline{\omega}_1 = \frac{\int\limits_0^\infty \omega\varepsilon_1''(\omega) \ln \omega d\omega}{\int\limits_0^\infty \omega\varepsilon_1''(\omega)\, d\omega}. \tag{13}$$

Складывая эти потери с обычными потерями, обязанными полю заряда частицы [5], мы видим, что второй член формулы (12) сокращается с этими потерями, и мы снова приходим к формуле (11), но с другим определением средней частоты.

Все выше сказанное справедливо и для выражения $W(a_2)$, которое при v близком к c имеет следующий вид:

$$W(a_2) = -\frac{e^2\sigma_2 a_2}{v^2}\left[\ln \frac{\beta\sqrt{\sigma_2}}{\overline{\omega}_2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{2}\right]. \tag{14}$$

5. Для того, чтобы найти условия, при которых потери энергии в обоих слоях идут без эффекта плотности, вычислим интегралы $W(a_1^2)$, $W(a_2^2)$ и $W(a_1, a_2)$.

В виду того, что $W(a_1^2)$, $W(a_2^2)$ и $W(a_1, a_2)$ не имеют полюсов, обязанных нулям Λ, они после взятия вычетов в нулях Λ_0 приводятся к следующим выражениям, независимо от того v больше или меньше $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{0m}}}$, $(m = 1, 2)$:

$$W(a_1^2) = \frac{e^2 a_1^2}{2v^3} \int\limits_0^{\frac{v\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} [1 - \varepsilon_1(i\omega)]^2 \omega^2 d\omega,$$

$$W(a_2^2) = \frac{e^2 a_2^2}{2v^3} \int\limits_0^{\frac{v\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} [1 - \varepsilon_2(i\omega)]^2 \omega^2 d\omega, \tag{15}$$

$$W(a_1, a_2) = \frac{e^2 a_1 a_2}{v^3} \int\limits_0^{\frac{v\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} [1 - \varepsilon_1(i\omega)]\,[1 - \varepsilon_2(i\omega)]\, \omega^2 d\omega.$$

Для того, чтобы вычислить эти интегралы, воспользуемся дисперсионными соотношениями, связывающими диэлектрическую постоянную от мнимого аргумента с мнимой частью диэлектрической постоянной на действительной оси [5].

В случае, например, $W(a_1^2)$ нетрудно получить

$$W(a_1^2) = \frac{e^2 a_1^2}{\pi v^3} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{xy\varepsilon_1''(x) \cdot \varepsilon_1''(y)}{x + y} dxdy, \tag{16}$$

причем при вычислении было предположено, что частица достаточно быстрая:

$$\frac{v\varkappa_0}{\Omega\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1, \tag{17}$$

где Ω — максимальная собственная частота среды. Из формулы (16) видно, что имеет смысл ввести понятие дважды усредненной частоты $\overline{\Omega}_{mn}$ согласно формуле

$$\overline{\Omega}_{mn} = \frac{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty xy\varepsilon_m''(x)\, \varepsilon_n''(y)\, dxdy}{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{xy}{x+y} \varepsilon_m''(x)\, \varepsilon_n''(y)\, dxdy}, \quad (m, n = 1, 2). \tag{18}$$

В случае прозрачных сред

$$\varepsilon''_m(\omega) = \frac{\sigma_m \pi}{2} \sum_k f_{mk} \frac{\delta(\omega - \omega_{mk})}{\omega_{mk}},$$

где f_{mk} — силы осцилляторов $\left(\sum_k f_{mk} = 1\right)$, для (18) получим следующее выражение:

$$\overline{\Omega}_{mn} = \frac{1}{\sum\limits_{l,\,k} \frac{f_{ml} f_{nk}}{\omega_{ml} + \omega_{nk}}}. \tag{19}$$

С помощью (18) формулы (15) запишутся в виде:

$$W(a_1^2) = \frac{\pi e^2 \sigma_1^2 a_1^2}{4v^3 \overline{\Omega}_{11}},$$

$$W(a_2^2) = \frac{\pi e^2 \sigma_2^2 a_2^2}{4v^3 \overline{\Omega}_{12}}, \tag{15^1}$$

$$W(a_1, a_2) = \frac{\pi e^2 \sigma_1 \sigma_2 a_1 a_1}{2v^3 \overline{\Omega}_{12}}.$$

Потребуем, чтобы в случае $v^2 > \frac{c^2}{\varepsilon_{0m}}$ было бы правильным разложение (9) в ряд по степеням a_1 и a_2, т. е. чтобы

$$W(a_1) + W(a_2) \gg W(a_1^2) + W(a_2^2) + W(a_1, a_2). \tag{20}$$

Подставляя сюда их значения и вводя параметр $\alpha \ll 1$, получим общее условие, накладываемое на толщины слоев пластинки:

$$\alpha \sigma_1 a_1 \left(\ln \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\overline{\omega}_1 \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \sigma_2 a_2 \left(\ln \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\overline{\omega}_2 \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi \sigma_1^2 a_1^2}{4c\overline{\Omega}_{11}} + \frac{\pi \sigma_2^2 a_2^2}{4c\overline{\Omega}_{22}} + \frac{\pi \sigma_1 \sigma_2 a_1 a_2}{2c\overline{\Omega}_{12}}. \tag{21}$$

Рассмотрим случай, когда среды слоев одинаковы, т. е.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}, \quad \overline{\Omega}_{11} = \overline{\Omega}_{22} = \overline{\Omega}_{12} = \overline{\Omega}.$$

Тогда из (21) получается условие, накладываемое на всю толщину пластинки:

$$a_1 + a_2 = \alpha \frac{4c\overline{\Omega}}{\pi\sigma} \left(\ln \frac{\sqrt{\sigma}}{\overline{\omega}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2} \right). \tag{22}$$

Это условие несколько отличается от приведенных в [2], и частично, в [4] значением частоты $\overline{\Omega}$ и является более точным. Условие (22) совпадает с условием, имеющимся в [4], если воспользоваться для $W_{(2)}$ формулой (9) работы [4].

Теперь рассмотрим самый интересный случай, когда потери энергии в обоих слоях пластинки будут обладать логарифмическим ростом, а условия, накладываемые при этом на толщину каждого из слоев, будут такими же, как если бы имели две независимые однослойные пластинки.

Допустим толщина a_2 удовлетворяет условию (22), т. е.

$$a_2 = \alpha \frac{4c\overline{\Omega}_{22}}{\pi\sigma_2}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\omega_2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right). \tag{23}$$

Подставляя в (21) выражение (23), получим

$$a_1 = \alpha \frac{4c\overline{\Omega}_{11}}{\pi\sigma_1}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\omega_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2\overline{\Omega}_{22}}{\overline{\Omega}_{12}}\cdot\frac{\ln\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\omega_2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}}{\ln\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\omega_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}}\right). \tag{24}$$

Из (24) следует, что толщина a_1 будет удовлетворять условию (22):

$$a_1 = \alpha \frac{4c\overline{\Omega}_{11}}{\pi\sigma_1}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\omega_1\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

если

$$\overline{\Omega}_{12} \gg \overline{\Omega}_{22}. \tag{26}$$

Аналогично можно показать, что взяв сначала условие (25), мы получим условие (23), если

$$\overline{\Omega}_{12} \gg \overline{\Omega}_{11}. \tag{27}$$

Таким образом, при выполнении одного из условий (26) или (27), ионизационные потери энергии в обоих слоях пластинки растут логарифмически, а на толщины каждого из слоев накладываются условия (25) и (23), как если бы мы имели две независимые однослойные тонкие пластины.

Из формулы (15) видно, что неравенства (26) или (27) будут выполняться тем лучше, чем меньше будут перекрываться области собственных частот веществ слоев пластинки.

Зная силы осцилляторов и собственные частоты веществ слоев пластинки с помощью формулы (19) нетрудно количественно проверить выполнение неравенств (26) или (27). Пользуясь данными [6] для Al (индекс 1) и $AgCl$ (индекс 2), нетрудно получить $\overline{\Omega}_{12}:\overline{\Omega}_{11} = 14:1$. Для толуэна C_7H_8 (индекс 1) и $AgCl$ (индекс 2) это отношение равно $\overline{\Omega}_{12}:\overline{\Omega}_{11} = 5:1$.

Институт физики
Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 12 апреля 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Басс, А. М. Яковенко*, УФН 86, 189 (1965).
2. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 37, 527 (1959).
3. *Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян*, ЖЭТФ, 35, 1282 (1958). Изв. АН АрмССР, серия физ. мат. наук, 12, № 3 (1959).
4. *Г. М. Гарибян, М. П. Лорикян*, ДАН АрмССР, 40, 21, (1965).
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
6. *R. M. Sternheimer*, Phis. Rev., 103, 511 (1956).

ՄԱՍՆԻԿԻ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԸ ԵՐԿՇԵՐՏԱՎՈՐ ԹԻԹԵՂԻ ՄԻՋՈՎ ԱՆՑՆԵԼԻՍ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, Մ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Քննարկված են լիցքավորված մասնիկի էներգիայի լրիվ կորուստները երկշերտավոր թիթեղի միջով անցնելիս, երբ շերտերի հաստությունների վրա ոչ մի սահմանափակում չի դրվում։ Ստացված ընդհանուր բանաձևը մինչև վերջ հաշվված և վերլուծված է բարակ շերտերի դեպքերում։ Ցույց է տրված, որ եթե թիթեղի շերտերի նյութերի սեփական հաճախականությունների տիրույթները միմյանցից հեռու են գտնվում, ապա իոնիզացիոն կորուստներն երկու շերտերումն էլ աճում են լոգարիթմորեն այնպես, ինչպես եթե ունենայինք երկու միմյանցից անկախ միաշերտ թիթեղներ։

LOSS OF THE PARTICLE ENERGY PASSING THROUGH TWO-LAYER PLATE

by G. M. GARIBIAN, M. M. MOURADIAN

Total energy losses of the charged particle passing thorugh the two-layer plate are dealt with in cases when the thickness of the layer is not limited. The obtined general formula is thoroughly calculated and analyzed for the case of thin layers. When the regions of the particular frequencies of the plate layers of the matter are distant from each other, the ionization losses in both layers are shown to grow logarithmically as if we had two independent one-layer plates.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 319—328 (1966)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ НА ПАРАМЕТРОНАХ

Н. П. РУССКИХ, В. И. САМОЙЛЕНКО

В работе исследуется зависимость быстродействия устройств на параметронах от добротности контуров параметронов, величины связи между параметронами, амплитуды подкачки, скважности импульсов подкачки и др.

Найдено оптимальное значение добротности контура, при котором можно обеспечить наибольшее быстродействие.

Показано, что для увеличения быстродействия коэффициент связи между параметронами следует увеличивать до величины 0,1—0,15. Дальнейшее увеличение связи нецелесообразно. Показана зависимость между возможным быстродействием и надежностью систем на параметронах.

Вопросы быстродействия и надежности ЦВМ—основные вопросы современной вычислительной техники.

В видеоимпульсных ЦВМ при повышении тактовой частоты логические и запоминающие элементы становятся менее устойчивыми или перестают выполнять свои функции. Наметившиеся пути повышения быстродействия видеоимпульсных систем: применение туннельных диодов, полевых полупроводниковых триодов, многослойных полупроводниковых структур и т. д. позволили увеличить тактовую частоту ЦВМ за 1 *мгц*. Однако дальнейшее увеличение тактовой частоты до десятков мегагерц осложняется из-за трудности однонаправленной передачи информации, обеспечения достаточно широкополосных цепей, связывающих элементы ЦВМ, различного рода паразитных связей и т. д.

Аналогичные вопросы возникают и при проектировании ЦВМ на параметронах. Наиболее простой путь повышения быстродействия параметронных устройств—увеличение частоты подкачки—оказывается весьма сложным из-за трудностей, связанных с созданием цепей передачи информации и подкачки, и из-за различных паразитных связей, увеличивающихся с частотой. Кроме того, с увеличением частоты подкачки возникают дополнительные трудности в проектировании параметронов, связанные с ухудшением добротности варикапов (или других нелинейных элементов), применяемых в параметронах. Поэтому возникает необходимость максимально эффективного использования частоты подкачки, т. е. обеспечения максимального быстродействия и надежности при заданной частоте.

При проектировании быстродействующих систем на параметронах следует учитывать не только свойства отдельной параметронной ячейки (длительность фронтов, амплитуду, потребляемую мощность и т. д.), но и взаимодействие соседних ячеек через цепи связи, питания и за счет наводок.

Кроме того, для обеспечения наивысшего быстродействия нужно выбрать оптимальный режим подкачки—амплитуду, перекрытие импульсов подкачки и т. д.

Для определения оптимальных по быстродействию параметров ячеек и связи между ними придется сделать ряд упрощающих математические выкладки допущений и ограничений, иначе задача сведется к уравнениям, решения которых современная математика не предлагает.

Будем полагать, что данный параметрон связан с m предыдущими и n последующими параметронами двухсторонней линейной связью. При этом будем считать, что n не более двух. Это охватывает достаточный круг схем на параметронах, например, счетчики и регистры. Так как связь между параметронами достаточно мала, то влияние помех от параметронов, не связанных с данным непосредственно, учитываться не будет.

Примем, что напряжение подкачки подается в виде прямоугольных импульсов и действие его сводится к внесению в контур параметрона отрицательного сопротивления ρ, постоянного в течение импульса подкачки.

При рассмотрении нарастания колебаний в параметроне будем исходить из линейно-ломанной аппроксимации нелинейных характеристик параметрона. Будем считать, что установление одной из двух возможных стационарных фаз колебаний определяется только начальными условиями, т. е. после подачи подкачки на параметрон процессы в нем не зависят от внешних воздействий на частоте субгармоники.

Взаимная расстройка параметронов, определяемая, в основном, технологическим разбросом параметров элементов схемы, учитываться не будет, так как при существующем разбросе параметров дополнительный сдвиг фазы фазирующего сигнала относительно фазы колебаний подкачки за счет расстройки не превышает 10—15°. При этом приращение амплитуды синусной составляющей является величиной второго порядка малости по сравнению с ее амплитудой и в первом приближении может не учитываться.

Тепловые шумы будем считать достаточно малыми по сравнению с сигналом синхронизации параметрона. Их будем учитывать только при определении минимально необходимого напряжения синхронизации для установления требуемой фазы с необходимой надежностью.

При сделанных предположениях передний и задний фронты импульсов субгармоники могут быть описаны удобными для анализа экспоненциальными зависимостями.

Начальные условия будем задавать амплитудой синусной составляющей в момент включения подкачки u_{s0}. Принятая линейная аппроксимация переходных процессов не учитывает фазовых сдвигов при нарастании и спаде колебаний.

Длительность переднего фронта субгармонических колебаний определяется соотношением

$$u_{уст} = u_{s0} e^{\frac{\tau_n}{T_n}}$$

или

$$\omega \tau_n = \omega T_n \ln \frac{u_{уст}}{u_{s0}},$$

где $u_{уст}$ — амплитуда установившихся колебаний,

T_n — постоянная времени контура параметрона, которая определяется его полным сопротивлением

$$\omega T_n = \frac{2\omega L}{\rho - r} = \frac{2}{\frac{1}{Q_\rho} - \frac{1}{Q_r}},$$

ρ — отрицательное сопротивление, вносимое в контур параметрона при включении подкачки,

L — индуктивность контура,

r — полное сопротивление потерь контура с учетом нагрузки,

ω — частота первой субгармоники подкачки,

$Q_\rho = \frac{\omega L}{\rho}$ — эффективная добротность отрицательного сопротивления,

$Q_r = \frac{\omega L}{r}$ — добротность нагруженного контура.

Итак,

$$\omega \tau_n = \frac{2}{\frac{1}{Q_\rho} - \frac{1}{Q_r}} \ln \frac{u_{уст}}{u_{s0}}. \tag{1}$$

Из этого выражения следует, что для уменьшения длительности переднего фронта колебаний следует увеличивать добротность Q_r, уменьшать Q_ρ, т. е. увеличивать вносимое отрицательное сопротивление ρ, и увеличивать u_{s0}. Однако после выключения подкачки свободные колебания в контуре будут затухать тем дольше, чем выше добротность контура Q_r. Поэтому следует искать оптимальное значение Q_r, при котором быстродействие будет максимальным.

В момент включения подкачки напряжение на входе параметрона u_0 складывается из трех составляющих: фазирующего напряжения $u_ф$ от m предыдущих параметронов, в которых колебания в момент включения подкачки были равны установившемуся значению; напряжения реакции $u_{посл}$ от n последующих параметронов, в которых колебания затухали после выключения подкачки и, наконец, остаточного напряжения $u_{ост}$ колебаний, сохранившихся в контуре от предыдущего включения подкачки:

$$u_0 = u_ф + u_{посл} + u_{ост}. \tag{2}$$

При этом не учитывался сигнал обратной информации от группы параметронов, работающих в режиме генерации в те же моменты времени, что и фазирующие параметроны. Такое допущение является правомерным при условии, что рассматриваемый параметрон нагружен не более чем на два параметрона. Кроме того, в выражении (2) не учитываются допуски на отклонения параметров элементов схемы. Исследования показали, что разброс параметров элементов схемы параметрона вызывает вариации амплитуды и фазы установившихся колебаний, которые являются малыми из-за уплощения амплитудно-частотной характеристики параметрона, и в первом приближении могут не учитываться.

Нахождение формы колебаний в контуре при сложном воздействии на его вход—задача достаточно трудная. Полагаем, что напряжение в данном параметроне от предыдущего, с ним связанного, пропорционально напряжению на этом параметроне. Если коэффициент связи между параметронами k ($k < 1$), то для наиболее опасного случая минимально фазирующего сигнала только от одного входного параметрона

$$u_{\text{ф}} = k \cdot u_{\text{уст}}.$$

В этом же наиболее опасном случае следует предположить, что на всех параметронах, с которыми соединен выход данного, существовали колебания с противоположной фазой. Тогда напряжение последействия будет равно

$$u_{\text{посл}} = -knu_{\text{уст}} e^{-\frac{\tau_{\text{посл}}}{T_3}}, \qquad (3)$$

где $\tau_{\text{посл}} = \tau_u - 2\tau_{\text{пер}}$ — интервал времени от момента выключения подкачки на последующих параметронах до момента включения подкачки в данном параметроне,

τ_u — длительность импульса подкачки,

$\tau_{\text{пер}}$ — время перекрытия импульсов подкачки,

T_3 — постоянная времени контура параметрона после выключения подкачки.

Кроме того, $\tau_{\text{посл}} = \dfrac{2}{3} T_0 - \tau_u$, где T_0 — тактовый период. Для увеличения быстродействия необходимо сокращать длительность импульса подкачки. В предельном случае его длительность может быть равна длительности переднего фронта параметрических колебаний или несколько более его. Считаем, что $\tau_u = \alpha\tau_n$, где α коэффициент, близкий к 1.

Время перекрытия $\tau_{\text{пер}}$ следует выбирать возможно меньшим, чтобы уменьшить величину напряжения последействия за счет увеличения $\tau_{\text{посл}}$. Однако время перекрытия должно быть достаточным для того, чтобы фаза установившихся в параметроне колебаний определялась начальными условиями, т. е. за время перекрытия амплитуда колебаний в параметроне должна нарасти до какой-то определенной величины, такой, чтобы выключение предыдущего параметрона не могло влиять на установившееся значение фазы. Обозначим эту величину $\beta u_{уст}$. Тогда из (1) получим

$$\omega\tau_{пер} = \frac{2}{\frac{1}{Q_\rho} - \frac{1}{Q_r}} \ln \frac{\beta u_{уст}}{u_{s0}}, \tag{4}$$

$$\omega\tau_{посл} = \omega\tau_u - 2\omega\tau_{пер} = \frac{2}{\frac{1}{Q_\rho} - \frac{1}{Q_r}} \ln \frac{u_{уст}^{\alpha-2}}{u_{s0}^{\alpha-2}\beta^2}. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что $T_з = \frac{2L}{r} = \frac{2Q_n}{\omega}$, получим следующее выражение для напряжения последействия:

$$u_{посл} = -knu_{уст}\left[\frac{u_{уст}^{\alpha-2}}{u_{s0}^{\alpha-2}\beta^2}\right]^{-\left(\frac{\frac{1}{Q_r}}{\frac{Q_r}{Q_\rho}-1}\right)}. \tag{6}$$

Последний член суммы (2) $u_{ост}$ определяется для наиболее опасного случая соотношением

$$u_{ост} = -u_{уст}e^{-\frac{T_0-\tau_u}{T_з}} = -u_{уст}\,e^{-\frac{2\tau_u-3\tau_{пер}}{T_з}} = -u_{уст}\left[\frac{u_{уст}^{2\alpha-3}}{u_{s0}^{2\alpha-3}\beta^3}\right]^{-\left(\frac{\frac{1}{Q_r}}{\frac{Q_r}{Q_\rho}-1}\right)}. \tag{7}$$

Для надежной работы параметрона необходимо, чтобы и в этом наиболее опасном случае вероятность сбоя была допустимой. Это будет в том случае, если $u_0 \geqslant \varepsilon$, где ε больше уровня шумов, но достаточно мало в сравнении с величиной $u_{уст}$ и определяется допустимой вероятностью сбоя. Если и предыдущие параметроны находятся в наихудших с точки зрения сбоя условиях, то $u_{s0} = u_0$.

Подставив в (2) значения $u_ф$, $u_{посл}$, $u_{ост}$ и обозначив $\gamma = \frac{u_{уст}}{u_{s0}}$, получим

$$k\gamma - kn\gamma\left[\frac{\gamma^{\alpha-2}}{\beta^2}\right]^{-\varphi} - \gamma\left[\frac{\gamma^{2\alpha-3}}{\beta^3}\right]^{-\varphi} = 1, \tag{8}$$

где $\varphi = \frac{1}{\left(\frac{Q_r}{Q_\rho} - 1\right)}$.

Пользуясь ранее полученными выражениями для τ_u и $\tau_{пер}$, легко определить тактовый период T_0:

$$\omega T_0 = 3\omega(\tau_u - \tau_{пер}) = 6Q_r\varphi \ln \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\beta} = 6Q_\rho(1+\varphi)\ln\frac{\gamma^{\alpha-1}}{\beta}. \tag{9}$$

Задача состоит в том, чтобы с помощью выражений (8) и (9) выбрать параметры схемы (k, φ) таким образом, чтобы при заданных величинах ε, β, n, Q_ρ величина тактового периода T_0 была минимальной. Это задача на отыскание экстремума функции двух переменных (например, k и φ), т. к. третья переменная α может быть выражена через эти две.

Из уравнения (8) определим значение α.

Введем обозначение

$$z = \left[\frac{\gamma^{\alpha-1}}{\beta}\right]^{-\varphi}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (8) приводится к квадратному уравнению относительно z

$$z^2 + knz + \frac{1-k\gamma}{\gamma^{\varphi+1}\cdot\beta^{\varphi}} = 0, \tag{11}$$

откуда

$$z = -\frac{kn}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2n^2}{4} - \left(\frac{1-k\gamma}{\gamma^{\varphi+1}\beta^{\varphi}}\right)}.$$

Знак „—“ перед корнем физического смысла не имеет, поэтому оставляем одно значение корня.

Подставив в (10) полученное для ωT_0 выражение, после несложных преобразований получим

$$\alpha = 1 - \frac{\ln\left(-\frac{kn}{2} + \sqrt{\frac{k^2n^2}{4} - (1-k\gamma)\gamma^{-(\varphi+1)}\beta^{-\varphi}}\right) + \varphi\ln\beta}{\varphi\ln\gamma}. \tag{12}$$

После подстановки (12) в выражение (9) для ωT_0 имеем

$$\omega T_0 = 6Q_r\left\{-\ln\left(-\frac{kn}{2} + \sqrt{\frac{k^2n^2}{4} - (1-k\gamma)\,\gamma^{-(\varphi+1)}\,\beta^{-\varphi}}\right) - 2\varphi\ln\beta. \right. \tag{13}$$

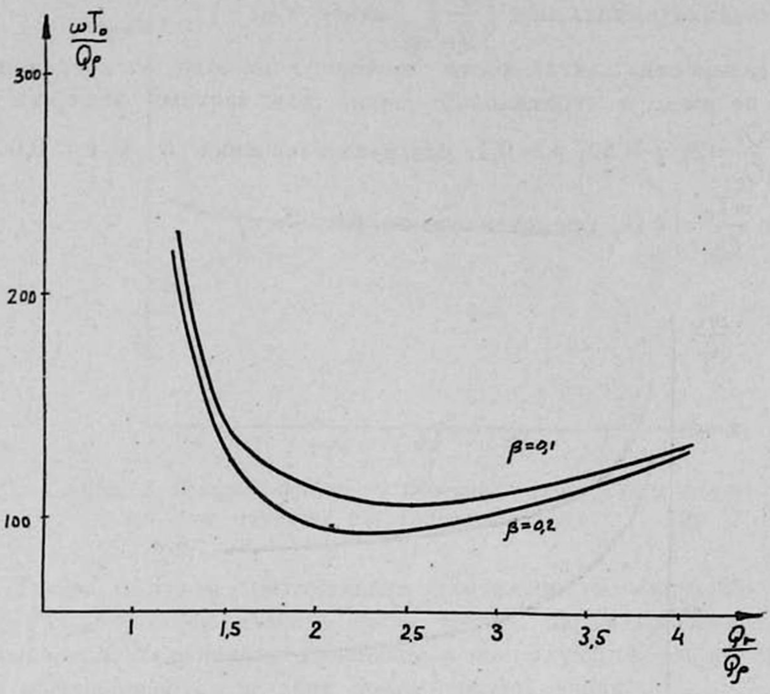
Для частных значений параметров $k\gamma = 1{,}1$, $\gamma = 50$, $\beta = 0{,}1$ и $n = 2$ зависимость $\frac{\omega T_0}{Q_\rho} = f\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)$ представлена на фиг. 1.

Из приведенного графика видно, что данная кривая имеет экстремальную точку, т. е. имеется оптимальное значение добротности, при котором тактовый период T_0 минимален.

Анализ на экстремум соотношения (13) приводит к следующему выражению для оптимального отношения добротностей:

$$\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{-2\ln\beta}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2\ln\beta}\right)^2 + \left(1 + \frac{kn}{2e^{4/\ln\beta\gamma}}\right)\left(\frac{1}{-2\ln\beta}\right)}}. \tag{14}$$

Из (14) следует, что величина оптимальной добротности практически не зависит от числа параметронов n, являющихся нагрузкой данного, т. к. $\frac{kn}{2e^{4/\ln\beta\gamma}} \ll 1$ в значительных пределах изменения числа n.



Фиг. 1 График зависимости величины $\frac{\omega T_0}{Q_\rho}$ от отношения добротностей.

Величина связи k также мало влияет на отношение $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt}$. Значительнее в выражении (14) обнаруживается зависимость между $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt}$ и коэффициентом β, определяющим устойчивое затягивание по фазе.

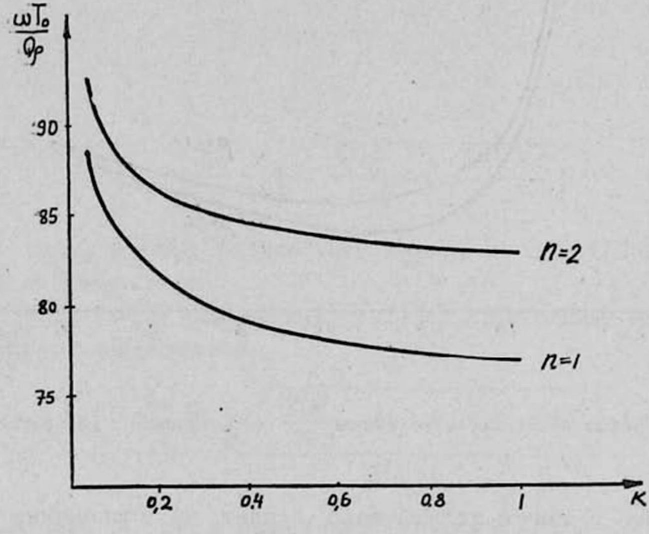
При $\beta = 0{,}1$, $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt} = 2{,}37$.

При $\beta = 0{,}2$, $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt} = 2{,}05$.

Для уменьшения вероятности сбоя параметрона величину β следует увеличивать. Это приводит к возрастанию коэффициента α и, соответственно длительности импульса подкачки τ_u и времени перекрытия $\tau_{пер}$. В этом случае устойчивое затягивание по фазе обеспечивается увеличением времени перекрытия между двумя подтактовыми импульсами подкачки, а оптимальное значение добротности $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt}$ при этом несколько уменьшается.

Вычисление оптимальной добротности по формуле (14) дает хорошую точность. Для зависимости $\frac{\omega T_0}{Q_\rho} = f\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)$ (см. фиг. 1) при $\beta = 0{,}1$ ошибка вычисления $\left(\frac{Q_r}{Q_\rho}\right)_{opt}$ менее 4%.

Зависимость длительности тактового периода от коэффициента связи k не имеет экстремальной точки. Для частных значений параметров $\frac{Q_r}{Q_\rho} = 2$; $\gamma = 50$; $\beta = 0{,}1$, различных значений n и $k = 0{,}005 \div 1$ функция $\frac{\omega T_0}{Q_\rho} = \psi(k)$ представлена на фиг. 2.

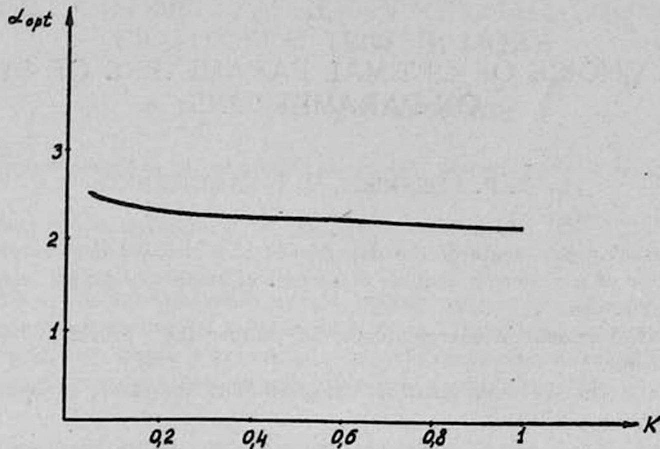


Фиг. 2. График зависимости длительности тактового периода от коэффициента связи.

С увеличением коэффициента связи длительность оптимального тактового периода уменьшается. Однако увеличение коэффициента связи до величин, превышающих $k = 0{,}1$—$0{,}15$, нецелесообразно, так как при этом увеличивается нагрузка на параметрон, ухудшаются условия его возбуждения, увеличивается потребляемая мощность, а быстродействие увеличивается весьма незначительно. При увеличении числа параметронов n на выходе данного быстродействие снижается. Однако характер кривой $\frac{\omega T_0}{Q_\rho} = \psi(k)$ при различных n не меняется. Следовательно, можно для расчетов рекомендовать $k = 0{,}1$—$0{,}15$ при числе параметронов, нагруженных на данный, не превышающем двух.

Для определения коэффициента α_{opt}, определяющего длительность импульса подкачки, необходимо в выражение для α (12) подставить оптимальное значение φ.

При $\beta=0{,}1$, $\varphi_{opt}=0{,}731$; $\gamma = 50$; $n=2$ и $k=0{,}05 \div 1$ зависимость $\alpha_{opt}=\theta\,(k)$ представлена на фиг. 3. С увеличением коэффициента связи α_{opt} незначительно уменьшается.



Фиг. 3. График зависимости величины коэффициента α_{opt} от значения коэффициента связи k.

Таким образом, оптимальная длительность импульса подкачки $(\tau_u)_{opt} = \alpha_{opt}\cdot\tau_n$ с увеличением связи между параметронами несколько уменьшается. Устойчивые колебания в последующем параметроне при этом обеспечиваются за счет более сильной связи.

Пользуясь полученными соотношениями, можно оптимально выбрать параметры схемы на параметронах, а также параметры цепей подкачки.

Московский авиационный
институт

Поступила 31 мая 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Самойленко*, Труды МАИ, выпуск 149, 1962.

ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՆԱՅԻՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՎՐԱ ՕՊՏԻՄԱԼ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ն. Պ. ՌՈՒՍԿԻԽ, Վ. Ի. ՍԱՄՈՅԼԵՆԿՈ

Աշխատանքում քննարկված է պարամետրոնների վրա հիմնված սարքավորումների արագազդեցության կախվածությունը պարամետրոնների կոնտուրների բարորակությունից, պարամետրոնների եղած կապի մեծություններից, սնման ամպլիտուդայից և այլն։

Գտնված է կոնտուրի բարորակության օպտիմալ արժեքը, որի դեպքում կարելի է ապահովել ամենամեծ արագազդեցությունը։

Ցույց է տրված, որ արագազդեցության մեծացման համար հարկավոր է պարամետրոն-ների միջև եղած կապի գործակիցը մեծացնել մինչև 0,1—0,15։ Կապի հետագա մեծացումը աննպատակահարմար է։

Ցույն է տրված պարամետրոնային սիստեմների և հուսալիության կախվածությունը։

ON THE CHOICE OF OPTIMAL PARAMETERS OF SYSTEMS ON PARAMETRONS

by N. P. RUSSKIKH, V. I. SAMOILENKO

The present paper treats of the dependence of highspeed devices of parametrons on energy factor of parametron contour of amount of amplitude gadget connection between the parametrons.

The optimal amount of energy factor of contour that provides for the highest speed is found out.

The relationship between possible highspeed and the safety of systems on parametrons is shown.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 329—339 (1966)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕЛЛЕНА-ПАУЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. Б. ГОСТЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

Встречающееся в задачах квантовой теории поля интегральное уравнение Челлена-Паули $\psi(\omega)=\varphi(\omega)-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{\psi(\omega')\,d\omega'\,Im\,h(\omega')}{h(\omega_0-\omega')(\omega'+\omega-\omega_0)}$ решается путем интегрального представления $\psi(\omega)$ через функцию $\alpha(\omega)$, не имеющую разрезов на действительной оси. Получены выражения для $\psi(\omega)$ в конечной форме в случае однородного уравнения полиномиальных и полюсных неоднородных членов. Указаны возможные обобщения.

При рассмотрении различных моделей квантовой теории поля для определения волновых функций стационарных состояний, амплитуд рассеяния, пропагаторов и вершинных частей приходится решать интегральные уравнения вида

$$\psi(\omega)=\varphi(\omega)-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{\psi(\omega')\,d\omega'\,Im\,h(\omega')}{h(\omega_0-\omega')(\omega'+\omega-\omega_0)}, \qquad (1)$$

где

$$h(\omega)=h(\omega+i\varepsilon)=\omega\left[1+\frac{\omega}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{d\omega'\,Im\,h(\omega')}{(\omega')^2(\omega'-\omega-i\varepsilon)}\right], \qquad (2)$$

$$Im\,h(\omega)=Im\,h(\omega+i\varepsilon),$$

и предполагается, что $Im\,h(\omega)$ убывает на бесконечности так, что обеспечивается сходимость всех встречающихся в дальнейшем интегралов $Im\,h(1)=0$,

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\frac{h(\omega)}{\omega}=Z, \qquad 0\leqslant Z<1, \qquad (3)$$

$\varphi(\omega)$ — произвольная мероморфная функция, ограничения на $\varphi(\omega)$ будут наложены в дальнейшем.

Уравнение такого типа с $\varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega}$ для рассеяния θ-частиц на V-частице в модели Ли [1] впервые было получено Челленом и Паули [2]. Однородное уравнение служит для определения волновой функции $V-\theta$ связанного состояния [3]. К такому же уравнению приводит задача рассеяния и определения волновой функции однонуклонного состояния в модели с тремя состояниями фиксированного источника [4], [5], [6], [7] $\left(\varphi(\omega)=c,\ \varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega},\ \varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega+a}\right.$, a и c — постоянные$\left.\right)$, и расчет энергии и времени распада (5,5) резонанса [8] в модели Чу-Лоу-Вика [9]. Для различных частных случаев специальными приемами уравнение (1) было решено в работах [10], [11], [12] $\left(\varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega}\right)$, [8], [5], [7] $\left(\varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega+a}\right)$, [6] $(\varphi(\omega)=c)$. В настоящей статье будет изложен систематический метод решения таких уравнений.

Следует отметить, что функция $h(\omega)$, постоянные Z и ω_0 имеют простой физический смысл, $\frac{1}{h(\omega)}$ — перенормированный пропагатор фиксированного источника в энергетическом представлении;

$$Im\, h(\omega)=2\pi^2\gamma\sqrt{\omega^2-1}\,u^2(\omega), \tag{4}$$

где γ — квадрат перенормированной постоянной связи источника с релятивистскими квантами единичной массы,

$u(\omega)$ — изотропная действительная обрезающая функция $(u(0)=1)$, обеспечивающая сходимость интегралов.

Z — постоянная перенормировки источника, свойства $h(\omega)$, Z подробно исследованы [2].

ω_0 — энергия рассматриваемого состояния, отсчитываемая от массы фиксированных частиц. Случаю $\omega_0<1$ соответствуют дискретные стационарные состояния, $1\leqslant\omega_0<2$ — состояния упругого рассеяния, для $\omega_0>2$ включается канал рождения частиц, и рассеяние становится неупругим.

II

Ограничимся сначала случаем $\omega_0<2$. Основной особенностью уравнения типа (1) является связь мнимой части $Im\,\psi(\omega)=Im\,\psi(\omega+i\varepsilon)$ со значением $\psi(\omega_0-\omega)$ в сдвинутой точке, в отличие от классических сингулярных интегральных уравнений теории поля [13], связывающих мнимую часть искомой функции с ее значением в той же точке.

$$Im\,\psi(\omega+i\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{h(\omega_0-\omega)\,\psi(\omega_0-\omega)}{h(\omega)}, & \omega<\omega_0-1,\\[2mm] 0, & \omega>\omega_0-1.\end{cases} \tag{5}$$

Это отличие вызвано тем, что ядро интегрального уравнения зависит от суммы $\omega+\omega'$, а промежуток интегрирования полубесконечен.

Для дальнейшего исследования введем функцию

$$\alpha(\omega)=h(\omega)\,\psi(\omega)+h(\omega_0-\omega)\,\psi(\omega_0-\omega)=\alpha(\omega_0-\omega). \tag{6}$$

Эта функция не имеет разрезов на действительной оси, поскольку при $\omega>1$

$$Im\,\alpha(\omega + i\varepsilon) = \psi(\omega)\,Im\,h(\omega) + h(\omega_0 - \omega)\,Im\,\psi(\omega_0 - \omega) =$$

$$= \psi(\omega)\,Im\,h(\omega) + h(\omega_0 - \omega)\left[-\frac{\psi(\omega)\,Im\,h(\omega)}{h(\omega_0 - \omega)}\right] = 0, \tag{7}$$

что следует из равенства (5) и аналитичности $h(\omega)$ на всей комплексной ω-плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$. Аналогично можно показать, что $Im\,\alpha(\omega + i\varepsilon) = 0$ при $\omega < \omega_0 - 1$. Отсюда следует, что особенностями $\alpha(\omega)$ могут быть только полюсы, совпадающие с полюсами $\varphi(\omega)$ и $\varphi(\omega_0 - \omega)$. Если $\varphi(\omega)$ целая функция, представимая в виде ряда Маклорена

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \omega^n, \tag{8}$$

то и $\alpha(\omega)$ будет целой функцией

$$\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \omega^n. \tag{9}$$

Построим новую функцию

$$f(\omega) = \frac{\omega\left[\psi(\omega_0 - \omega) - \varphi(\omega_0 - \omega)\right]}{h(\omega)}. \tag{10}$$

Определив $\psi(\omega_0 - \omega) - \varphi(\omega_0 - \omega)$ с помощью уравнения (1) и пользуясь тем, что $h(\omega)$ имеет ноль первого порядка при $\omega = 0$, можно заметить, что у $f(\omega)$ нет полюсов, она аналитична в комплексной ω-плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$ и $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} f(\omega) = 0$.

Поэтому по теореме Коши имеем

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{Im\,f(\omega')\,d\omega'}{\omega' - \omega},$$

$$Im\,f(\omega) = Im\,f(\omega + i\varepsilon). \tag{11}$$

Поскольку $\alpha(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ целые функции, мнимую часть $f(\omega)$ с помощью равенства (5) можно представить в виде

$$Im\,f(\omega) = \frac{\omega\alpha(\omega)}{h(\omega_0 - \omega)}\,Im\,\frac{1}{h(\omega)} - \omega\varphi(\omega_0 - \omega)\,Im\,\frac{1}{h(\omega)}. \tag{12}$$

Подставим выражения (10) и (12) в тождество (11), заменим аргумент $\omega_0 - \omega$ на ω и разрешим относительно $\psi(\omega)$:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega'\alpha(\omega')\,d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0)\,h(\omega_0 - \omega)}\,Im\,\frac{1}{h(\omega')} -$$

$$- \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega}\,\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\omega'\varphi(\omega_0 - \omega')\,d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0}\,Im\,\frac{1}{h(\omega')}. \tag{13}$$

Таким образом, $\psi(\omega)$ полностью определяется функцией $\alpha(\omega)$, для которой из определения (6) и представления (13) получаем интегральное уравнение

$$\alpha(\omega)=h(\omega)\varphi(\omega)+h(\omega_0-\omega)\varphi(\omega_0-\omega)+\frac{h(\omega)h(\omega_0-\omega)}{\omega}\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{\omega'd\omega'}{\omega'-\omega}\,Im\,\frac{1}{h(\omega')}\left[\frac{\alpha(\omega')}{h(\omega_0-\omega')}-\varphi(\omega_0-\omega')\right]+$$

$$+\frac{h(\omega)h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{\omega'd\omega'}{\omega'+\omega-\omega_0}\,Im\,\frac{1}{h(\omega')}\left[\frac{\alpha(\omega')}{h(\omega_0-\omega')}-\varphi(\omega_0-\omega')\right]. \tag{14}$$

Подставив в это уравнение разложения (8) и (9) по степеням ω функции $h(\omega)$, $h(\omega_0-\omega)$, что допустимо при $\omega_0>1$, можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов p_n, однако решение такой системы довольно сложно [14], и поэтому мы попытаемся обойти эту трудность, хотя бы для полиномиальных неоднородных членов.

III

Если $\varphi(\omega)$ полином степени n, то $\alpha(\omega)$ должна быть полиномом степени не выше $n+1$, т. к. в силу асимптотического представления функции $h(\omega)$

$$h(\omega)=\sum_{m=-1}^{\infty}\frac{dm}{\omega^m},$$

$$d_{-1}=Z=1-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{d\omega'\,Im\,h(\omega')}{(\omega')^2}, \tag{15}$$

$$d_m=-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty(\omega')^{m-1}[Im\,h(\omega')]\,d\omega',\qquad m=0,\ 1,\ 2\cdots,$$

правильная часть $\psi(\omega)h(\omega)$, совпадающая с точностью до постоянной с правильной частью $\varphi(\omega)h(\omega)$, имеет $(n+1)$-ый порядок, а главная часть $\alpha(\omega)$ исчезает из-за отсутствия полюсов у $h(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$.

Для $\varphi(\omega)=\omega^n$ искомая функция $\psi(\omega)$ имеет асимптотическое представление

$$\psi(\omega)=\omega^n+\xi\frac{1}{\omega}, \tag{16}$$

где коэффициент ξ остается пока неопределенным, и полином $\alpha(\omega)$ совпадает со своей асимптотикой

$$\alpha(\omega) = p_0 + \gamma_n(\omega),$$

$$\gamma_n(\omega) = \sum_{k=-1}^{n-2} d_k \left[\omega^{n-k} + (\omega_0 - \omega)^{n-k} - \omega_0^{n-k}\right], \tag{17}$$

в которой неизвестен только постоянный член

$$p_0 = \alpha(0) = h(\omega_0)\,\psi(\omega_0). \tag{18}$$

С учетом значения p_0, путем подстановки функции $\alpha(\omega)$ в уравнение (13) определяем $\psi(\omega)$ в зависимости от $\psi(\omega_0)$

$$\psi(\omega) = \omega^n + \frac{h(\omega_0 - \omega)\,h(\omega_0)\,\psi(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} A(\omega, \omega_0) +$$

$$+ \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' \gamma_n(\omega')\,d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0)\,h(\omega_0 - \omega')} Im \frac{1}{h(\omega')} -$$

$$- \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' (\omega_0 - \omega')^n d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} Im \frac{1}{h(\omega')}, \tag{19}$$

$$A(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} Im \frac{1}{h(\omega')}. \tag{20}$$

Положив в равенстве (19) $\omega = \omega_0$, найдем постоянную $\psi(\omega_0)$ и после подстановки ее значения в (19) получим решение уравнения (1) для $\varphi(\omega) = \omega^n$,

$$\psi(\omega) = \omega^n + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left[\frac{h(\omega_0)\,[Q_n(\omega_0) - B_n(\omega_0) + \omega_0^n]}{1 - h(\omega_0)\,A(\omega_0, \omega_0)} A(\omega, \omega_0) + \right.$$

$$\left. + Q_n(\omega) - B_n(\omega) \right], \tag{21}$$

где

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' \gamma_n(\omega')\,d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} Im \frac{1}{h(\omega')}, \tag{22}$$

$$B_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' (\omega_0 - \omega')^n d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} Im \frac{1}{h(\omega')}. \tag{23}$$

Входящие в ответ интегралы вида

$$F_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{(\omega')^k d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} Im \frac{1}{h(\omega')}, \tag{24}$$

$$L_k(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{(\omega')^k d\omega'}{(\omega'+\omega-\omega_0)\,h(\omega_0-\omega')}\, Im\,\frac{1}{h(\omega')} \tag{25}$$

вычисляются с помощью реккурентного соотношения

$$F_k(\omega) - F_k(\omega_0) = (\omega_0 - \omega)\, F_{k-1}(\omega) \tag{26}$$

и аналогичного для $L_k(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} (\omega_0-\omega)^j F_{k-j} + (\omega_0-\omega)^k F_0(\omega), \\ L_k(\omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} (\omega_0-\omega)^j L_{k-j} + (\omega_0-\omega)^k L_0(\omega), \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$F_j = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty (\omega')^{j-1} d\omega'\, Im\,\frac{1}{h(\omega')},$$

$$F_1 = 1 - Z^{-1}, \tag{28}$$

$$F_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'+\omega-\omega_0}\, Im\,\frac{1}{h(\omega')} = \frac{1}{\omega-\omega_0} + \frac{1}{h(\omega_0-\omega)},$$

последние два интеграла найдены контурным интегрированием (ср. [2]),

$$\begin{aligned} L_j(\omega_0) &= \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{(\omega')^{j-1} d\omega'}{h(\omega_0-\omega')}\, Im\,\frac{1}{h(\omega')}, \\ L_0(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega'}{(\omega'+\omega-\omega_0)\,h(\omega_0-\omega')}\, Im\,\frac{1}{h(\omega')}. \end{aligned} \tag{29}$$

В частности

$$\begin{aligned} &A(\omega, \omega_0) = L_1(\omega) = L_0(\omega)(\omega_0-\omega) + L_1(\omega_0); \\ &A(\omega_0, \omega_0) = L_1(\omega_0). \end{aligned} \tag{30}$$

В наиболее простых случаях выпишем ответ в явном виде:

$$\begin{aligned} &\varphi(\omega) = 1, \\ &\psi(\omega) = Z^{-1}\,\frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\,\frac{1+h(\omega_0)\,L_0(\omega)}{1-h(\omega_0)\,L_1(\omega_0)}; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\varphi(\omega) = \omega,$$

$$\psi(\omega) = \omega + \frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\left\{\frac{h(\omega_0)\,[2ZL_3(\omega_0) - 2Z\omega_0 L_2(\omega_0) - \omega_0 F_1 + F_2 + \omega_0]\,A(\omega,\omega_0)}{1-h(\omega_0)\,L_1(\omega_0)} + \right.$$

$$+2Z[-L_0(\omega)\,\omega(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega)(L_2(\omega_0)-\omega L_1(\omega_0))]-$$

$$\left.-F_0(\omega)\,\omega(\omega_0-\omega)-\omega F_1+F_2\right\}. \qquad (32)$$

Таким же приемом легко решить однородное уравнение (1), для которого $\alpha(\omega)=\text{const}$ и

$$\psi(\omega)=C\frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}A(\omega,\ \omega_0), \qquad (33)$$

где C — произвольная постоянная, а ω_0 определяется из характеристического уравнения

$$1-h(\omega_0)L_1(\omega_0)=0, \qquad (34)$$

имеющего при $\omega_0<1$ не более одного действительного корня, лежащего в интервале $0<\omega_0<1$.

Для целой $\varphi(\omega)$ (8), по крайней мере формально, решение можно представить в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n\psi_n(\omega)$, где $\psi_n(\omega)$ — решение (19) уравнения (1) с неоднородным членом ω^n. Сходимость этого ряда в настоящей статье не исследуется.

IV

Разберем случай $\varphi(\omega)=-\dfrac{1}{\omega-c}$. Функция $\alpha(\omega)$ стремится к постоянной при $|\omega|\to\infty$ и имеет простые полюсы при $\omega=c$, $\omega=\omega_0-c$ с вычетами $-h(c)$ (эти полюсы компенсируются нулями $h(\omega)$ и $h(\omega_0-\omega)$ для $c=0$), поэтому

$$\alpha(\omega)=h(\omega_0)\,\psi(\omega_0)-\frac{h(c)(\omega_0-2c)}{(\omega_0-c)\,c}+\frac{h(c)(\omega_0-2c)}{(\omega-c)(\omega-\omega_0+c)}. \qquad (35)$$

Теорему Коши теперь можно применить к функции

$$f(\omega)=\frac{\omega\psi(\omega_0-\omega)}{h(\omega)}, \qquad (36)$$

убывающей на бесконечности, но, в отличие от функции (10), имеющей полюс при $\omega=\omega_0-c$ с вычетом $\dfrac{\omega_0-c}{h(\omega_0-c)}$:

$$f(\omega)=\frac{\omega_0-c}{h(\omega_0-c)}\,\frac{1}{\omega-\omega_0+c}+\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\,Im\,f(\omega'). \qquad (37)$$

Используя равенство

$$Im\,f(\omega)=\frac{\omega\alpha(\omega)}{h(\omega_0-\omega)}\,Im\frac{1}{h(\omega)}, \qquad (38)$$

найдем $\psi(\omega)$ методом, полностью аналогичным случаю целой $\varphi(\omega)$:

$$\psi(\omega)=\frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\left\{-\frac{\omega_0-c}{h(\omega_0-c)(\omega-c)}+\right.$$

$$+\frac{[h(\omega_0)h(c)h(\omega_0-c)(\omega_0-2c)C(\omega_0-c)D(\omega_0)-h(\omega_0)(\omega_0-c)c-h(c)h(\omega_0-c)(\omega_0-2c)]A(\omega,\omega_0)}{(\omega_0-c)ch(\omega_0-c)\times[1-h(\omega_0)L_1(\omega_0)]}+$$

$$\left.+h(c)(\omega_0-2c)D(\omega)\right\},\tag{39}$$

где

$$D(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_1^\infty\frac{\omega' d\omega'}{(\omega'-c)(\omega'-\omega_0+c)(\omega'+\omega-\omega_0)h(\omega_0-\omega')}\,Im\frac{1}{h(\omega')}.\tag{40}$$

При $c=0$ решение (39) переходит, как и следовало ожидать, в решение уравнения $V-\theta$ рассеяния с $\varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega}$ [10], [11], [12]

$$\psi(\omega)=-\frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\left[\frac{\omega_0}{h(\omega_0)}\frac{1}{\omega}+\frac{2A(\omega)}{1-h(\omega_0)L_1(\omega_0)}\right].\tag{41}$$

Для $\varphi(\omega)=-\frac{1}{(\omega-c)^n}$ функция $\alpha(\omega)$ имеет главную часть порядка n и определяется с помощью разложения $h(\omega)$ в ряд Тейлора в точке $\omega=c$. Окончательный результат таков:

$$\psi(\omega)=\frac{h(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}\left\{U_n(\omega)+\right.$$

$$\left.+\frac{h(\omega_0)L_1(\omega_0)[U_n(\omega_0)+T_n(\omega_0)]A(\omega,\omega_0)}{1-h(\omega_0)L_1(\omega_0)}+T_n(\omega)\right\},\tag{42}$$

где

$$U_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k-1}\frac{1}{k!}g^{(n-k)}(\omega_0-c)\frac{1}{(\omega-c)^k},\tag{43}$$

$$g(\omega)=\frac{\omega}{h(\omega)},$$

$$T_n(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_1^\infty\frac{\omega'\beta_n(\omega')d\omega'}{(\omega'+\omega-\omega_0)h(\omega_0-\omega')}\,Im\frac{1}{h(\omega')},\tag{44}$$

а главная часть $\alpha(\omega)-\beta_n(\omega)-K_n$ выражается формулами

$$\beta_n(\omega)=K_n-\sum_{j=1}^{n}a_j\left[\frac{1}{(\omega-c)^{n-j+1}}+\frac{1}{(\omega_0-\omega-c)^{n-j+1}}\right],\tag{45}$$

$$a_1=h(c),$$

$$a_2=h'(c),$$

$$a_{j+1}=\frac{1}{j!}h^{(j)}(c)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{d\omega' \, Im\, h(\omega')}{(\omega'-c)^{j+1}}, \qquad j=2,\ 3,\cdots,\ n,$$

$$K_n=\sum_{j=1}^{n}a_j\left[\frac{1}{(\omega_0-c)^{n-j+1}}-(-1)^{n-j}\frac{1}{c^{n-j+1}}\right]. \tag{46}$$

В отличие от случая полиномиального неоднородного члена интегралы, входящие в $T_n(\omega)$ (44), не сводятся к единственной функции $L_0(\omega)$, но могут быть приведены с помощью реккурентных соотношений, аналогичных (26) и одной из n форм

$$M_n(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{d\omega'}{(\omega'-c)^n(\omega'-\omega_0+c)^n(\omega'+\omega-\omega_0)\,h(\omega_0-\omega')}Im\frac{1}{h(\omega')} \tag{47}$$

и функции $A(\omega,\ \omega_0)$ (20).

Аналогично целой функции формальное решение для мероморфной $\varphi(\omega)$ можно записать в виде ряда по решениям (42).

Отметим, что все результаты, полученные в предположении $\omega_0<2$, имеют место и при $\omega_0\geqslant 2$. Особенностью этого случая является то, что при $\omega_0\geqslant 2$ для значений ω в области $1\leqslant\omega\leqslant\omega_0-1$ обе функции $\psi(\omega)$ и $\psi(\omega_0-\omega)$, используемые при построении $\alpha(\omega)$, имеют отличные от нуля мнимые части. Поэтому прежде всего необходимо определить правила обхода полюсов в подынтегральных выражениях. Эти правила устанавливаются из физических соображений. Например, при нахождении *in*-состояний рассеяния функция $\psi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi(\omega)=\varphi(\omega)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{d\omega'\,\psi(\omega')\,Im\,h(\omega')}{h(\omega_0-\omega')(\omega'+\omega-\omega_0-i\varepsilon)} \tag{1a}$$

и в подынтегральном выражении $\Psi(\omega')$ следует рассматривать как $\Psi(\omega'-i\varepsilon)$. Аналогично выводу формулы (7) легко показать, что введенная функция $\alpha(\omega)$ по-прежнему не имеет разрезов во всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что после выбора правил обхода полюсов в случае $\omega_0\geqslant 2$ функция $\alpha(\omega)$, как и ранее, удовлетворяет интегральному уравнению (14).

Поэтому все полученные результаты справедливы для любых действительных значений ω_0.

V

Возможны различные обобщения уравнения (1), к которым применим изложенный метод. Важным для физических приложений является следующее видоизменение функции $h(\omega)$ (2) и уравнения (1):

$$h(\omega) = (\omega - b)\left[1 + \frac{(\omega - b)}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{Im\,h(\omega')\,d\omega'}{(\omega' - b)^2(\omega' - \omega - i\varepsilon)}\right], \tag{48}$$

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\psi(\omega')\,d\omega'}{h(b + \omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0 - b)}\,Im\,h(\omega'),\ b < 1. \tag{49}$$

Оно соответствует случаю неравных масс фиксированных частиц, например, $m_V \neq m_N$ в модели Ли. Решение уравнения (49) практически с точностью до замены $\omega_0 \to \omega_0 + b$ не отличается от решения уравнения (1) [6], [7]. Неперенормированным постоянной связи и массе V-частицы или только одной постоянной связи соответствует изменение определения функции $h(\omega)$ [15], [3]:

$$h(\omega) = P_1(\omega) + \frac{\omega^j}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{d\omega'}{(\omega')^j(\omega' - \omega)}\,Im\,h(\omega'), \tag{50}$$

где $P_1(\omega)$ — полином первой степени,

$j = 0$ в первом случае,

$P_1(\omega) = \omega$, $j = 1$ во втором случае.

Метод решения уравнения (1), рассмотренный в настоящей работе, при этом не изменяется.

* * *

Авторы глубоко благодарны В. И. Григорьеву за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 25 апреля 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. D. Lee*, Phys. Rev., 95, 1329 (1954).
2. *G. Kallen, W. Pauli*, Kgl Dansk. Vid. Sels. Mat-fys. Medd. 30, № 7 (1955) (перевод УФН 60, 425 (1956)).
3. *T. Muta*, Progr. Theor. Phys., 33, 666 (1965).
4. *U. Haber-Shaim, W. Thirring*, Nuovo Cimento 2, 100 (1955).
5. *J. B. Bronzan*, Phys. Rev. 139, B 751 (1965).
6. *В. Б. Гостев, А. Р. Френкин*, ДАН СССР, 1966 (в печати).
7. *В. Б. Гостев, А. Р. Френкин*, ДАН СССР. 1966 (в печати).
8. *T. L. Trueman*, Phys. Rev., 137, B 1566 (1965).
9. *G. C. Wick*, Rev. Mat. Phys., 27, 339 (1955).
10. *R. P. Kenschaft, R. D. Amado*, Journ. Math. Phys., 5, 1340 (1964).
11. *C. M. Sommerfield*, Journ. Math. Phys., 6, 1170 (1965).
12. *E. Kazes*, Journ. Math. Phys.. 6, 1772 (1965).
13. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, ФМ, М., 1962. *R. Omnes*, Nuovo Cimento 8, 316 (1958).
14. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. I, ФМ, М., 1962.
15. *W. Heinsenberg*, Nucl. Phys., 4, 532 (1957) (перевод в сборнике Нелинейная квантовая теория поля, ИЛ, 1959, стр. 175).

ՉԵԼԼԵՆ-ՊԱՈՒԼԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Վ. Բ. ԳՈՍՏԵՎ, Ա. Ռ. ՖՐԵՆԿԻՆ

Քվանտային դաշտի տեսության խնդիրներում հանդիպող Չելլեն-Պաուլի ինտեգրալային հավասարումները։

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega'\,\psi(\omega')\,Im\,h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}$$

Լուծվում են $\alpha(\omega)$*— ֆունկցիայի միջոցով* $\psi(\omega)$*-ի ինտեգրալային ներկայացմամբ, որը իրական առանցքի վրա կտրվածքներ չունի։*

$\psi_p(\omega)$*-ի համար ստացված են վերջավոր տեսքով արտահայտություններ համասեռ պոլինոմիալային հավասարումների և անհամասեռ բևեռային անդամների դեպքում։*

Նշված են հնարավոր ընդհանրացումները։

INTEGRAL EQUATIONS OF THE KALLEN-PAULI TYPE IN THE QUANTIZED FIELD THEORY

V. B. GOSTEV, A. R. FRENKIN

The Källen-Pauli integral equation:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega'\psi(\omega')\,Im\,h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}$$

found in problems connected with quantized field theory can be solved using an integral representation of $\psi(\omega)$ through *o* function $\alpha(\omega)$ which has no cuts on the real axis. Expressions for $\psi(\omega)$ have been obtained in the final form in cases of a homogenous equations with polynomial and polar inhomogenous term.

Possible generalizations are indicated.

Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 340—346 (1966)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЧАСТИЦА С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Г. А. НАГОРСКИЙ

Задача о движении электрона в плоской электромагнитной волне была решена Волковым [1]. Одна из характерных особенностей этого движения состоит в том, что конечное состояние электрона после прохождения цуга волн совпадает с начальным. Оказывается, что аналогичная задача для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом может быть сведена к уравнению, которое формально совпадает с уравнением Шредингера для нейтральной частицы в магнитном поле.

Частица со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом μ описывается уравнением

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\{\vec{\alpha}(\vec{p}-e\vec{A})-\mu\beta(\vec{\Sigma}\vec{H}-i\vec{\alpha}\vec{E})+\beta m\}\psi, \tag{1}$$

где $\hbar=c=1$.

Выберем ось z в направлении распространения волны и введем новые переменные $\xi=t-z$ и $\zeta=t+z$. Вектор-потенциал $\vec{A}$, а также поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от ξ и лежат в плоскости xy (в дальнейшем стрелка обозначает двумерный вектор в плоскости xy). Учитывая, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской волне перпендикулярны друг другу и оси z, получим

$$i\vec{\alpha}\vec{E}=(\vec{\Sigma}\vec{H})\,\alpha_3. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi=\exp\left[i\vec{f}\vec{r}-i\frac{\gamma}{2}\zeta\right]\varphi(\xi), \tag{3}$$

где $\vec{f}$ и γ — произвольные постоянные, а $\vec{r}$ — радиус-вектор в плоскости xy. Используя формулу (2), получим для $\varphi(\xi)$ следующее уравнение:

$$i(1-\alpha_3)\,\varphi'=\left[-\gamma\frac{1+\alpha_3}{2}+\vec{\alpha}(\vec{f}-e\vec{A})+\beta m-\mu\beta\vec{\Sigma}\vec{H}(1-\alpha_3)\right]\varphi, \tag{4}$$

где штрих означает производную по ξ. Теперь используем проекционные операторы $P_+ = \frac{1+\alpha_3}{2}$ и $P_- = \frac{1-\alpha_3}{2}$ [2]. Умножая уравнение (4) слева один раз на P_-, и другой раз на P_+, получим два уравнения:

$$2i\varphi_1' = [\vec{\alpha}(\vec{f} - e\vec{A}) + \beta m]\,\varphi_2 - 2\mu\beta\,\vec{\Sigma}\vec{H}\varphi_1, \tag{5a}$$

$$\gamma\varphi_2 = [\vec{\alpha}(\vec{f} - e\vec{A}) + \beta m]\,\varphi_1, \tag{5б}$$

где $\varphi_1 = P_-\varphi$, $\varphi_2 = P_+\varphi$.

Уравнение (5б) имеет вид дополнительного условия на φ_1 и φ_2. Исключая φ_2 получим

$$i\varphi_1' = \left\{\frac{(\vec{f} - e\vec{A})^2 + m^2}{2\gamma} - \mu\beta\vec{\Sigma}\vec{H}\right\}\varphi_1. \tag{6}$$

Сразу видно, что уравнение (6) распадается на два уравнения для двухкомпонентных спиноров Φ_1 и Φ_2, связанных соотношением $\Phi_1 + \sigma_3\Phi_2 = 0$ (т. е. условием $P_+\varphi_1 = P_+P_-\varphi = 0$). Φ_1 и Φ_2 есть верхний и нижний спиноры биспинора $\exp\left[i\int\frac{(\vec{f} - e\vec{A})^2 + m^2}{2\gamma}d\xi\right]\varphi_1$. Для Φ_1 из (6) получается уравнение

$$i\Phi_1' = -\mu\vec{\sigma}\vec{H}\Phi_1, \tag{7}$$

которое совпадает с уравнением Шредингера для нейтральной частицы в магнитном поле [3].

В заключение мне хочется поблагодарить И. И. Гольдмана и В. М. Арутюняна за полезные обсуждения и ценные советы.

Физический институт **Поступила 12 апреля 1966**

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. M. Wolkoff*, Zs, f. Phys., 94, 25 (1935).
2. *И. И. Гольдман*, Изв. АН АрмССР 17, № 6, 129 (1964).
3. *Л. Ландау* н *Е. Лифшиц*, „Квантовая механика", М., 1948.

ԱՆՈՄԱԼ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄՈՄԵՆՏՈՎ ՄԱՍՆԻԿԸ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԱՐԹ ԱԼԻՔԻ ԴԱՇՏՈՒՄ

Գ. Ա. ՆԱԳՈՐՍԿԻ

Հարթ ալիքի դաշտում անոմալ մագնիսական մոմենտով մասնիկի համար Դիրակի հավասարումը բերվում է $^1/_2$ սպինով և μ անոմալ մագնիսական մոմենտով չեզոք մասնիկի համար Շրեդինգերի հավասարմանը։

THE PARTICLE WITH AN ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE FIELD OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE

by G. A. NAGORSKY

The equation of Dirac for the particle with an anomalous magnetic momentum μ is reduced to the Schroedinger equation for neutral particle with spin 1/2 and magnetic momentum μ.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

А. Ц. АМАТУНИ, Г. М. ГАРИБЯН

Известно, что полная интенсивность переходного излучения, испускаемого вперед заряженной ультрарелятивистской частицей линейно зависит от ее энергии [1]. Одной из причин наличия такой зависимости является близость диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ к единице в заоптической области. С другой стороны известно, что $\varepsilon(\omega)$ может проходить через единицу и в оптической области. Поэтому естественно рассмотреть этот случай переходного излучения с точки зрения зависимости его интенсивности и формы спектра от энергии ультрарелятивистской частицы.

В области прозрачности $\varepsilon(\omega)$ имеет вид [2]

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{b}{\omega^2}, \quad (a > 1,\ b < 0). \quad \text{Пусть} \quad \varepsilon(\omega_0) = 1,$$

тогда вблизи частоты ω_0 диэлектрическая постоянная будет выражаться формулой $\varepsilon = 1 + \alpha(\omega - \omega_0)$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b}{a-1}}$, $\alpha = \dfrac{2(a-1)^{3/2}}{b^{1/2}}$. Так, например, для кварца $\omega_0 \simeq 2{,}5 \cdot 10^{-14}\ сек^{-1}$, $\alpha \simeq 3 \cdot 10^{-14}\ сек$ [3].

При $\omega > \omega_0$, $\varepsilon > 1$ и, если $\beta\sqrt{\varepsilon} > 1$, то на этих частотах будет иметь место черенковское излучение. Эту область частот мы рассматривать не будем.

Переходное излучение, испущенное вперед, в случае одной границы раздела среда-вакуум выражается формулой (см., например, обзор [4])

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\pi^2 c (1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \left| \frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})} \right|^2. \quad (1)$$

В крайне-релятивистском случае, переходя к приближению малых углов излучения θ и считая ε близким к единице, формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2e^2\theta^3 d\theta}{\pi c} \left(\frac{1}{1-\beta^2+\theta^2} - \frac{1}{1-\beta^2\varepsilon+\theta^2} \right)^2. \quad (2)$$

THE PARTICLE WITH AN ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE FIELD OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE

by G. A. NAGORSKY

The equation of Dirac for the particle with an anomalous magnetic momentum μ is reduced to the Schroedinger equation for neutral particle with spin 1/2 and magnetic momentum μ.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

А. Ц. АМАТУНИ, Г. М. ГАРИБЯН

Известно, что полная интенсивность переходного излучения, испускаемого вперед заряженной ультрарелятивистской частицей линейно зависит от ее энергии [1]. Одной из причин наличия такой зависимости является близость диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ к единице в заоптической области. С другой стороны известно, что $\varepsilon(\omega)$ может проходить через единицу и в оптической области. Поэтому естественно рассмотреть этот случай переходного излучения с точки зрения зависимости его интенсивности и формы спектра от энергии ультрарелятивистской частицы.

В области прозрачности $\varepsilon(\omega)$ имеет вид [2]

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{b}{\omega^2}, \quad (a > 1,\ b < 0). \quad \text{Пусть} \quad \varepsilon(\omega_0) = 1,$$

тогда вблизи частоты ω_0 диэлектрическая постоянная будет выражаться формулой $\varepsilon = 1 + \alpha(\omega - \omega_0)$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b}{a-1}}$, $\alpha = \dfrac{2(a-1)^{3/2}}{b^{1/2}}$. Так, например, для кварца $\omega_0 \simeq 2{,}5 \cdot 10^{-14}$ *сек*$^{-1}$, $\alpha \simeq 3 \cdot 10^{-14}$ *сек* [3].

При $\omega > \omega_0$, $\varepsilon > 1$ и, если $\beta\sqrt{\varepsilon} > 1$, то на этих частотах будет иметь место черенковское излучение. Эту область частот мы рассматривать не будем.

Переходное излучение, испущенное вперед, в случае одной границы раздела среда-вакуум выражается формулой (см., например, обзор [4])

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\pi^2 c(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\right|^2. \quad (1)$$

В крайне-релятивистском случае, переходя к приближению малых углов излучения θ и считая ε близким к единице, формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2e^2\theta^3 d\theta}{\pi c}\left(\frac{1}{1-\beta^2+\theta^2} - \frac{1}{1-\beta^2\varepsilon+\theta^2}\right)^2. \quad (2)$$

Интегрируя по θ от 0 до ∞ и полагая $\varepsilon = 1 + \alpha(\omega - \omega_0)$, получим

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1-\beta^2}{\alpha(\omega_0 - \omega)}\right)\ln\left(1 + \frac{\alpha(\omega_0-\omega)}{1-\beta^2}\right) - 1\right], \tag{3}$$

причем $\alpha(\omega_0 - \omega) \ll 1$. Как и следовало ожидать, при $\omega = \omega_0$ $\frac{dW}{d\omega} = 0$. Нетрудно заметить, что формула (3) отличается от соответствующей формулы для заоптической части спектра [5] заменой $\frac{\sigma}{\omega^2}$ на $\alpha(\omega_0 - \omega)$.

Рассмотрим частные случаи выражения (3). Если

$$\frac{\alpha(\omega_0-\omega)}{1-\beta^2} \ll 1, \quad \text{то} \quad \frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2}{6\pi c}\alpha^2(\omega_0-\omega)^2\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^4, \tag{4}$$

в другом крайнем случае $\frac{\alpha(\omega_0-\omega)}{1-\beta^2} \gg 1$ имеем

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha(\omega_0-\omega)}{1-\beta^2} - 1\right]. \tag{5}$$

В промежуточном случае $\alpha(\omega_0 - \omega) \sim (1-\beta^2)$ (напомним, что $\omega < \omega_0$) мы имеем переход от резкой зависимости интенсивного излучения от энергии частицы (4) к логарифмической (5). Значения $y = \frac{\pi c}{2e}\frac{dW}{d\omega}$ как функции $x = \frac{\alpha(\omega_0-\omega)}{1-\beta^2}$ для этого промежуточного случая приведены на рис. 1. В интервале $1 \leqslant x \leqslant 7$ можно воспользоваться аппроксимацией $y = 0{,}05\,x$, т. е. вместо (3) будем иметь

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{0{,}1\,e^2}{\pi c}\alpha\omega_0\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2, \tag{6}$$

при

$$\frac{1}{\alpha\omega_0}\left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2 \leqslant \frac{\omega_0-\omega}{\omega_0} \leqslant \frac{7}{\alpha\omega_0}\left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2. \tag{7}$$

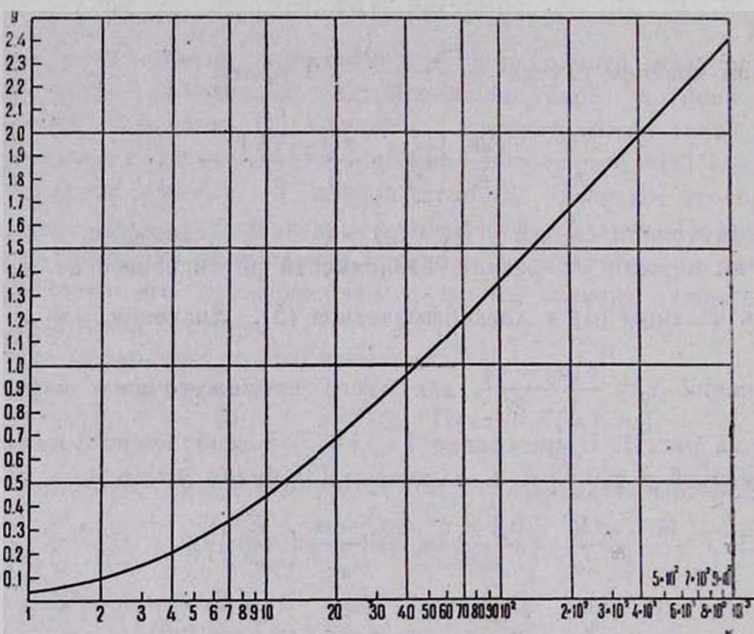
Поскольку разрешающая способность практически используемых оптических спектрометров $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-5}$, а в вышеприведенном случае кварца $\alpha\omega_0 \simeq 7$, приходим к выводу, что измерение интенсивности переходного излучения в интервале частот (7) может служить индикатором энергии частиц для $\frac{E}{\mu c^2} \lesssim 10^2$. Нетрудно получить также выражение для числа квантов в интервале частот (ω_1, ω_2), где

$$\omega_0 - \frac{7}{\alpha}\left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2 < \omega_1 < \omega < \omega_2 < \omega_0 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2. \tag{8}$$

Из формулы (6) тогда имеем

$$\Delta N = \frac{0{,}1}{137\,\pi}\,\alpha\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_0 \ln\frac{\omega_2}{\omega_1}\right). \tag{9}$$

Из последней формулы видно, что для одиночных частиц ΔN мало при значении $\left(\frac{E}{\mu c^2}\right) \sim 10^2$, и кварца в рассмотренном интервале частот. Поэтому эту часть переходного излучения можно будет использовать, по-видимому, для измерения энергии частиц в сгустках. Если n есть число частиц в сгустке формы цилиндра длиной λ и радиуса $\lambda\frac{E}{\mu c^2}$ (где λ длина волны излучения), то все частицы сгустка будут излучать когерентно и формула (1) умножится на n^2 [6].



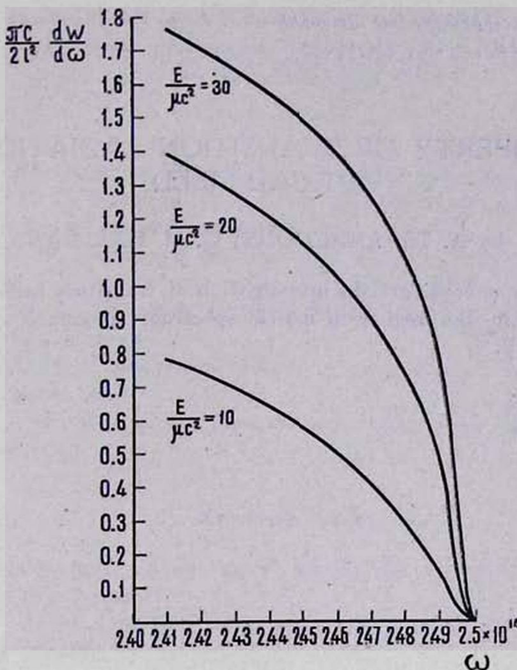
Фиг. 1.

Другой путь увеличения интенсивности состоит в использовании слоистой среды. Однако зоны формирования излучения в среде и вакууме в рассматриваемом случае будут определяться формулой

$$R_{\text{ср}} \simeq R_{\text{вак}} = \lambda\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2.$$

В случае кварца $\lambda \sim \lambda_0 \simeq 7{,}4\cdot 10^{-4}$ *см* и кварцевая пластинка должна иметь толщину в несколько сантиметров. В случае золота $\lambda_0 \simeq 500\,A^\circ$ и толщина пластинок составит доли миллиметра.

На рис. 2 приведены кривые зависимости спектральной интенсивности от частоты, рассчитанные по формуле (3) в случае кварца для трех значений энергии частицы.



Фиг. 2.

В заключение отметим, что переходное излучение, испускаемое назад в случае вакуум-среда, получающееся из формулы (1) заменой β на $-\beta$, будет зависеть от энергии частицы только логарифмически.

Авторы признательны проф. А. И. Алиханяну и проф. Л. Юаню, беседы с которыми стимулировали эту работу.

Институт физики
Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 20 апреля 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ 37, 527 (1959).
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, „Электродинамика сплошных сред", § 64, ГИТТЛ, М., 1957.
3. *Р. Вуд*, „Физическая оптика" стр. 553, ОНТИ Л. И., 1936.
4. *Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко*, УФН, 86, 189 (1965).
5. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 39, 332 (1960).
6. *А. Ц. Аматуни*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1 (1960).

ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՄԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ց. ԱՄԱՏՈՒՆԻ, Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ

Ուսումնասիրված է լիցքավորված մասնիկի անցումային ճառագայթումը օպտիկական սպեկտրի այն տիրույթի համար, որտեղ դիէլեկտրիկ հաստատունը մոտ է 1-ին։

ON A PROPERTY OF TRANSITION RADIATION IN AN OPTICAL FIELD

by A. TS. AMATOONY, G. M. GARIBIAN

The present paper considers the investigation of transition radiation generated by the charged particle in the region of optical spectrum frequency where the dielectric constant is near unity.

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Համառոտ հաղորդումներ

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04770. Подписано к печати 21/XI 1966 г. Тираж 500. Изд. № 2747. Заказ 303.
Формат бумаги $70 \times 108^1/_{16}$. Печ. л. 5. Бум. л. 2,5. Усл. печ. л. 6,85.
Уч. изд. лист. 5,44.

Типография Изд. АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.