

ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ТОМ 40

ФЕВРАЛЬ, 1997

ВЫПУСК 1

ОПТИЧЕСКОЕ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ 100 ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ IRAS НА ВЫСОКИХ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ШИРОТАХ

А.М.Микаелян

5

О СООТНОШЕНИИ ПОЗИЦИОННЫХ УГЛОВ ВЫТЯНУТЫХ СТРУКТУР И ВЕКТОРА ПРЕИМУЩЕСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОМПАКТНОГО РАДИО-ИСТОЧНИКА 3С 84 НА ДЛИНАХ ВОЛН 2, 4 И 6 СМ

И.И.Проник

19

О ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ОБЛАКОВ, ОБРАЗУЮЩИХ L_{α} -ЛЕС В СПЕКТРАХ КВАЗАРОВ

В.Г.Горбачкий

29

СПЕКТРЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК И СПИРАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ПАР ГАЛАКТИК

В.Г.Малумян

39

ГРУППЫ ГАЛАКТИК. II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

А.П.Магтесян

45

О СВЯЗИ ПУЛЬСАРОВ И ЗВЕЗДНЫХ АССОЦИАЦИЙ

Т.Г.Мдзинаришвили

61

О РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПУЛЬСАРА VELA ПОСЛЕ ЕЕ СКАЧКОВ

Д.М.Седракян, М.В.Айрапетян

67

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

Выходит с 1965 г.
на русском и английском языках

Խմբագրական կոլեգիա՝ Գ.Ս.Բիսնովատի-Վոգան, Վ.Գ.Գորբաչևի (գլխ.
խմբագրի տեղակալ), Վ.Պ.Գրինին, Վ.Վ.Իվանով, Ն.Ս. Կարդաշև,
Վ.Հ.Համբարձումյան, Ա.Գ.Մասնիչ, Լ.Վ.Միրզոյան (գլխ. խմբագիր),
Գ.Ս.Սահակյան, Վ.Յու.Տերերիժ, Ա.Տ.Բալլոդյան (պատ. քարտուղար):

Խմբագրական խորհուրդ՝ Ա.Ա.Բոյարչուկ, Ե.Վ.Խարաձե, Ի.Ս.Կոսիլով,
Վ.Հ.Համբարձումյան, Լ.Վ.Միրզոյան, Վ.Վ.Սոբոլև (նախագահ):

Редакционная коллегия: В.А.Амбарцумян, Г.С.Бисноватый-Коган,
В.Г.Горбачкий (зам. главного редактора), В.П.Гринин, В.В.Иванов,
А.Т.Каллоглян (ответ. секретарь), Н.С.Кардашев, А.Г.Масевич,
Л.В.Мирзоян (главный редактор), Г.С.Саакян, В.Ю.Теребиж.

Редакционный совет: В.А.Амбарцумян, А.А.Боярчук, И.М.Копылов,
Л.В.Мирзоян, В.В.Соболев (председатель), Е.К.Харадзе.

"АСТРОФИЗИКА" - научный журнал, издаваемый Национальной Академией наук Республики Армения. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой. Журнал предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

«ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ»-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակում է Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային ակադեմիան: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների և միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագաղակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների զոնով: Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և քարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Издание журнала частично финансируется спонсором
СУРЕНОМ ФЕСЧЯНОМ (США).

Հանդեսի հրատարակությունը մասամբ ֆինանսավորում է հովանավոր
ՍՈՒՐԵՆ ՖԵՍՉԿԵՆ (ԱՄՆ).

© Издательство НАН Республики Армения, Астрофизика, 1997.

УДК: 524.3

ОПТИЧЕСКОЕ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ 100 ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ IRAS НА ВЫСОКИХ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ШИРОТАХ

А.М.МИКАЕЛЯН

Поступила 25 мая 1996

Принята к печати 1 августа 1996

На основе низкодисперсионных спектров Первого Бюраканского обзора и красных и голубых изображений Паломарского обзора неба выполнено оптическое отождествление 100 инфракрасных источников из Каталога точечных источников IRAS. Работа проводилась в области $3^h50^m \leq \alpha \leq 7^h40^m$ и $+69^\circ \leq \delta \leq +73^\circ$ с площадью 75 кв. гр. Приводятся оптические координаты, их отклонения от инфракрасных, звездные величины V , показатели цвета, предварительные классы для всех объектов и ряд замечаний по интересным объектам. 3 объекта оказались квазарами, 36 - галактиками (среди них Сейферты и взаимодействующая пара), 5 - слабыми планетарными туманностями, 9 - являются углеродными звездами и 47 - звездами поздних подклассов М.

1. *Введение.* В 1983г. инфракрасный спутник IRAS наблюдал 96% неба на длинах волн 12, 25, 60 и 100 мкм, в результате чего было обнаружено и каталогизировано в Каталоге Точечных Источников IRAS (IRAS Point Source Catalogue - PSC) [1] более 250 000 инфракрасных точечных источников. Более слабые источники, обнаруженные IRAS и более точные данные для источников PSC приведены в Каталоге слабых источников IRAS (IRAS Faint Source Catalogue - FSC) [2]. К сожалению, большинство этих источников не имеет оптического отождествления, и их физическая природа остается неизвестной.

С другой стороны, Маркарян и др. в 1965-1980гг. провели спектральный обзор на площади 17 000 кв. гр. в высоких галактических широтах - Первый Бюраканский обзор (FBS) [3]. Основной целью обзора являлось обнаружение галактик с УФ избытком (впоследствии названных галактиками Маркаряна). Но низкодисперсионные спектры пластинок FBS несут информацию о всех объектах в поле зрения до предельной величины, примерно 17.5^m - более чем 10 000 000 объектов. В 1987г. Абрамяном и др. [4] был начат обзор голубых звездных объектов (blue stellar objects - BSO) на пластинках FBS. Одновременно Абрамян и Гигоян начали поиск и исследование звезд поздних классов FBS [5]. Работа по отбору голубых и красных звезд проводится совместно Микаеляном и Гигояном. Выполнение этих двух обзоров, в течение почти 10 лет, дало большой опыт по отбору и узнаванию низкодисперсионных спектров как для галактик и квазаров, так и для звезд поздних классов и планетарных туманностей.

Хорошо известно также, что 628 галактик Маркаряна являются источниками IRAS. Многие С и М звезды, также как и некоторые QSO и планетарные туманности (PN), отобранные как звездные объекты FBS, также оказались IRAS PSC источниками, часть которых не ассоциирована с какими-либо оптическими объектами. С другой стороны, почти все отождествленные источники IRAS PSC ассоциируются с одним из следующих типов объектов: яркие звезды, галактики, квазары, звезды класса М, С и S звезды, PN.

Все источники IRAS, которые соответствуют ярким звездам, уже известны. Другие типы объектов как раз те, по которым мы имеем опыт отбора и исследования. Таким образом возникла идея оптического отождествления IRAS источников на основе низкодисперсионных спектров FBS, а также с помощью карт Обзора неба Паломарской обсерватории (POSS) [6]. Автор проанализировал также соответствие IRAS и оптических звездных величин на пластинках FBS и обнаружил, что FBS является весьма подходящим наблюдательным материалом для отождествления неизвестных источников PSC, так как слабейшие источники в среднем имеют оптические величины, близкие к пределу хороших пластинок FBS.

2. *Описание наблюдательного материала FBS.* Подробное описание многих характеристик FBS приведено Маркаряном и др. [3] и Микаеляном [7]. Здесь следует напомнить некоторые принципиальные данные. Обзор проводился во всем Северном полушарии и в части Южного полушария ($\delta > -15^\circ$) на высоких галактических широтах ($|b| > 15^\circ$). Более чем 2000 пластинок были получены с помощью Бюраканского 1м телескопа Шмидта и 1".5 объективной призмы. Масштаб составляет 97"/мм, дисперсия - 1800 Å/мм около H_γ . Спектры позволяют проследить и оценить распределение энергии для узнавания природы объектов, отметить некоторые эмиссионные и абсорбционные линии.

Предельная величина пластинок FBS колеблется в пределах 16^m - 19^m . Так как автор определяет предельные величины пластинок в ходе выполнения обзора FBS BSO [8], было выявлено, что предел обзора в области $+61^\circ \leq \delta \leq +73^\circ$ значительно выше, чем в среднем и составляет порядка 18^m - $18^m.5$. Таким образом, работы по отождествлению следует начать в этой области. Важно также, что на этих склонениях проводилось мало исследований, и данная работа принесет много новых объектов. В настоящей работе для поиска оптических двойников (counterparts) источников PSC исследована область FBS $+69^\circ \leq \delta \leq +73^\circ$, $3^h50^m \leq \alpha \leq 7^h40^m$ с площадью в 75 кв. гр. Исследованы 6 пластинок FBS со средним пределом $V = 18^m.1$. Более подробные данные о наблюдательном материале этой области приведены в [9].

3. *Принципы отождествления.* Потоки IRAS приблизительно указывают на природу источников. Существует много работ (например, [10,11]), где сделаны попытки разделить различные классы объектов на основе их [12]-[25], [25]-[60] и др. ИК цветов. В частности, [12]-[25]/[25]-[60] диаграмма цвет - цвет дает области для галактик и QSO, М и С звезд, PN. Звезды поздних классов имеют большие потоки на 12 и 25 мкм и меньшие - на 60 и 100 мкм. Звезды с пылевыми оболочками имеют повышенное ИК излучение и могут отклониться от области красных звезд без пылевых оболочек. Богатые пылью галактики могут быть опознаны их большими потоками на 60 и 100 мкм по сравнению с меньшими на 12 и 25 мкм. Таким образом, ИК данные подсказывают о природе возможных оптических двойников.

Так как основные типы объектов, которые являются кандидатами в двойники ИК источников (QSO, галактики, PN, С и поздние М звезды), не многочисленны по отношению к нормальным звездам, становится возможным отличить их в эллипсах неопределенностей IRAS координат, где обычно расположен только один кандидат. Основным критерием для отождествления является низкодисперсионный спектр FBS. После отбора кандидата в оптические двойники, он исследуется на картах POSS (если это галактика или туманность - оцениваются морфология, размеры и приблизительные интегральные звездные величины с О и Е карт, если это звездный объект - определяются оптические звездные величины и цвета). В любом случае окончательное отождествление нужно делать, используя также соответствующие оптические и ИК цвета, которые могут подсказать о природе объектов.

Если есть более одного кандидата для источника, все они могут быть взяты, если нет значительного преимущества одного перед другими быть ИК источником. Среди 100 отождествленных источников, 2 имеют по два оптических двойника.

Из 108 неассоциированных источников PSC в соответствующей области 8 не удалось отождествить. Этот случай попадает, когда нет подходящего оптического объекта. Могут быть два варианта: а) оптический объект слабее предела FBS и, иногда POSS (главным образом для слабых, возможно "недосветящихся" (underluminous) галактик); б) оптический двойник является пекулярным объектом, который не может быть опознан по низкодисперсионному спектру (некоторые QSO, другие объекты с континуальным спектром: типа BL Lac и др.). Эти 8 объектов возможно являются галактиками, если учесть их ИК цвета (большие потоки на 60 и 100 мкм и меньшие на 12 и 25 мкм). Больше половины неуверенно отождествленных 6 объектов тоже являются галактиками. В этом случае отклонения координат доходят до 100"-150", а иногда и больше.

Учитывая, что точность координат IRAS ненамного отличается от

нашей, не всегда отобранный для ИК источника оптический двойник будет находиться в эллипсе неопределенностей IRAS. Так 15 отождествленных объектов выходят за пределы этих эллипсов. Этот факт вовсе не указывает на сомнительное отождествление. Большинство таких объектов также галактики.

4. *Список объектов.* В табл. 1 приведен список 100 отождествленных вышеуказанным образом IRAS PSC источников и их оптические данные. В последовательных столбцах таблицы приведены следующие данные: 1 - номер отождествленного источника, 2 - IRAS обозначение источника, 3, 4, - оптические экваториальные координаты для эпохи 1950.0 с точностью в $2''$ (α) и $0.1''$ (δ), 5, 6 - отклонения оптических координат от IRAS координат ($\Delta\alpha = \alpha(\text{опт}) - \alpha(\text{ИК})$ и $\Delta\delta = \delta(\text{опт}) - \delta(\text{ИК})$), 7 - видимые звездные величины V с точностью в $0^m.3$ для звездных объектов и около $0^m.5$ для протяженных объектов, 8 - CI цвета с точностью в $0^m.3$ для звездных объектов и около $0^m.5$ - протяженных, 9 - природа (тип) объектов, оцененная с низкодисперсионных спектров FBS и изображений POSS, 10 - данные о переменности с PSC (всего для 25 источников) [1], 11 - ассоциации, пропущенные в IRAS PSC или примечание об обнаружении объектов в FBS.

После табл. 1 приведены комментарии к отдельным объектам, где даны более точная классификация или оценка типа, описание различных характеристик, а также другие замечания. Некоторые объекты (в основном галактики) занесены также в Каталог маломасштабных образований IRAS (IRAS Small Scale Structure Catalog (SSSC) [15], имея протяженное ИК излучение. В этих случаях отклонения координат больше и отождествление несколько сомнительно.

Для получения более высокой точности, экваториальные координаты определены с голубых карт POSS, где изображения галактик имеют меньшие размеры. Вышеприведенная точность получена на основе сравнения большого количества координат, определенных этим методом с точными каталожными данными и обоснована в [7].

Видимые звездные величины также оценены глазом с карт POSS на основе калибровки соотношения "диаметр изображения - звездная величина" [16,17] для звездных объектов. Вышеуказанная точность также обоснована с помощью сравнения с точными фотометрическими данными для известных объектов. V величины для галактик оценены с POSS и пластинок FBS с точностью в $0^m.5$. Для определения показателей цвета и звездных величин V были использованы следующие преобразования:

$$CI = \frac{m_O - m_E}{1.6} \quad \text{и} \quad V \equiv m_V = m_E + 0.5 CI.$$

Автором получена эмпирическая формула для перехода от CI к B-V цветам:

$$B-V = 0.6CI + 0.07.$$

Классификация (определение типа) сделана на основе спектров FBS и изображений и цветов POSS. Точные классы могут быть определены после спектральных наблюдений, но С и М звезды, PN и галактики (как "Gal") уверенно классифицированы с помощью низкодисперсионных спектров. Для 9 углеродных звезд, например, определены также подтипы: 5 - R, 3 - N, 1 - N:

Таблица 1

СПИСОК 100 ОТОЖДЕСТВЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ IRAS

№	IRAS обозначение	Оптические координаты		Откло- нения		m_r	CI	Тип	VAR	Примеч.
		α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	03503+6918	50 ^m 20 ^s .4	18° 41"	1 ^s .3	-2"	14.2	+1.9	C		
2	03534+6945	53 31.0	45 27	2.0	4	12.0	+1.5	M	1	
		53 31.0	45 06	2.0	-17	14.8	+1.5	M		
3	03557+7007	55 49.6	07 30	2.4	-10	11.8	+2.0	M	0	FBS
4	03563+7148	56 25.4	48 55	1.6	4	11.2	+1.5	M	4	
5	03569+6909	56 57.4	09 38	0.6	-4	14.0	+1.6	M		
6	04033+6942	03 25.3	42 29	2.0	19	15.9	+1.9	Gal		
7	04036+7135	03 40.6	35 45	1.7	13	15.4	+1.0	Gal		
8	04066+7139	06 39.8	39 10	-1.3	9	12.0	+1.2	M	3	FBS
9	04079+7033	08 04.5	33 42	4.6	18	14.5	+0.5	Gal:		
10	04124+7106	12 27.2	06 43	-2.6	12	16.4	+3.4	C	3	
11	04125+6925	12 31.5	25 12	-0.7	-7	10.6	+1.8	M		
12	04136+7002	13 38.0	02 14	-1.7	-1	8.8	+1.5	M		
13	04137+6940	13 40.0	41 05	-2.4	9	13.6	+0.7	QSO:		
14	04137+7016	13 45.2	16 07	-0.6	1	17.1	+2.2	C	1	
15	04140+6930	13 56.0	29 47	-4.4	-29	15.3	+0.8	PN:		
16	04156+6939	15 36.1	39 38	-5.6	31	13.6	+1.2	M:		
17	04170+7143	17 01.6	43 46	1.3	6	10.8	+1.6	M		
18	04173+7232	17 17.3	32 08	-3.7	-16	11.8	+2.0	C:		
19	04173+7111	17 24.5	11 49	1.4	4	13.0	+1.5	M	4	FBS
20	04181+7244	18 02.6	44 19	-5.1	-8	14.7	+1.1	M		
21	04183+7123	18 20.8	24 11	0.1	12	14.6	+1.3	Gal		
22	04194+6948	19 30.0	48 55	2.4	5	9.2	+1.7	M	0	
23	04228+7003	22 54.0	03 18	0.1	-2	13.3	+0.5	Gal		
24	04235+7001	23 32.6	01 17	0.8	4	9.6	+1.3	M		
25	04252+7034	25 11.8	34 43	-1.6	16	17.0	+2.1	PN:		
26	04256+6930	25 44.2	30 07	2.6	-8	12.7	+1.2	M	0	FBS

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
27	04260+6947	26 02.1	47 17	1.9	2	12.0	+1.9	C		FBS
28	04272+7206	27 14.5	06 43	-0.2	-4	20.5	+1.5	Gal:		
29	04276+7035	27 45.2	35 32	6.1	-17	20.3	+1.6	Gal:		
30	04302+7247	30 13.6	47 54	0.1	1	11.8	+0.7	Gal		UGC
31	04324+6925	32 27.2	25 32	-0.5	0	12.8	+1.2	M	0	FBS
32	04357+7250	35 39.4	50 36	-7.3	-15	9.5	+1.6	M	0	
33	04359+7051	35 57.8	51 56	0.6	32	13.5	+0.6	C:		
34	04363+7240	36 16.7	40 11	-3.7	2	12.4	+1.5	C	2	FBS
35	04365+6906	36 29.4	06 16	-1.4	-9	9.6	+1.2	M		
36	04450+7209	45 01.5	09 45	0.6	-6	17.6	+1.2	Gal		
37	04483+7148	48 15.2	48 15	-3.6	-30	18.1	+0.6	Gal		
38	04485+7023	48 28.2	23 17	-2.0	-14	10.5	+1.6	M		
39	04488+6903	48 54.9	03 11	4.8	-2	14.1	+0.4	PN		
40	04494+6944	49 25.0	43 53	-3.8	-54	18.3	+0.6	Gal:		
41	04518+6922	51 54.6	22 30	3.0	-5	11.4	+1.5	M	1	FBS
42	04542+7200	54 15.5	00 30	1.9	-6	15.5	+1.2	Gal		
43	04545+7107	54 35.3	07 40	1.0	4	15.2	+1.5	Gal:		
44	04546+6953	54 37.5	53 37	-0.4	3	10.9	+1.7	M		
45	04574+7030	57 28.3	30 17	0.4	-1	9.4	+1.5	M	4	
46	05004+6936	00 30.8	36 24	2.4	2	15.9	+0.0	Gal		
47	05025+7001	02 36.7	01 32	1.3	0	15.9	+0.9	Gal		
48	05071+7240	07 18.5	40 51	11.7	18	16.9	+0.7	Gal	C	
49	05088+6948	08 48.9	48 38	0.4	12	13.8	+2.0	M	3	FBS
50	05113+7122	11 24.7	22 17	1.5	-6	10.4	+1.6	M		
51	05143+7048	14 21.2	48 55	-0.5	6	8.6	+2.2	M		
52	05196+7257	19 39.6	57 09	-0.8	7	17.4	+1.2	QSO:		
53	05209+7155	20 53.7	55 38	-0.9	2	8.5	+2.2	M	0	
54	05225+6903	22 30.1	03 28	-1.1	-1	21.7	+0.3	Gal:		
55	05236+6918	23 35.8	18 42	-1.7	-8	15.8	+5.2	C	8	HD
56	05240+7133	24 06.9	33 15	1.7	10	15.6	+0.8	Gal		
57	05261+7014	26 12.1	14 23	5.8	-4	15.7	+1.0	Gal		
58	05283+6919	28 12.8	19 09	-10.0	-15	21.8	+0.6	Gal:		
59	05286+7105	28 43.9	05 22	3.1	7	15.3	+1.7	M	1	
60	05316+7233	31 46.2	33 35	5.4	-1	17.0	+0.9	Gal		
61	05342+7120	34 16.3	21 06	-0.6	11	13.3	+1.5	M		FBS
62	05358+7054	35 49.2	54 24	1.2	4	10.0	+2.5	M		
63	05396+7123	39 40.0	23 31	-0.1	1	8.2	+2.4	M	0	
64	05400+7114	40 01.8	14 47	-2.6	-1	19.5	+1.5	M:		

Таблица 1 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
65	05430+7219	43 03.5	19 02	-2.1	-4	9.7	+2.7	M	1	FBS
66	05435+6908	43 33.9	08 04	-0.5	-6	13.3	+1.7	M	2	
67	05468+7300	46 52.7	00 34	-0.3	2	9.9	+2.4	M	0	
68	05487+7244	48 47.9	44 29	1.1	7	17.2	+1.0	Gal		
69	05521+6955	52 06.8	55 55	-2.9	6	9.0	+2.4	M		
70	05544+7229	54 24.3	29 20	-0.3	4	10.3	+2.5	M		
71	05587+7253	58 42.3	54 11	-0.8	24	18.5	+0.5	Gal:		
72	06025+7013	02 32.3	13 40	-0.7	8	8.8	+2.6	M		
73	06046+7112	04 43.0	13 13	1.7	22	13.2	+0.9	M		
74	06067+7231	06 42.9	31 55	-3.9	4	11.9	+1.7	M		
75	06075+7203	07 27.8	03 15	-4.5	-2	9.0	+3.1	M		QSO:
76	06130+7152	13 22.1	53 24	20.4	25	19.8	+0.6	Gal:		
77	06134+7226	13 18.6	25 52	-7.1	-34	20.3	+1.5	Gal:		
		13 26.0	27 06	0.3	40	19.8	+0.6	Gal:		
78	06135+7215	13 28.9	15 27	-3.3	2	21.8	+0.6	Gal:		
79	06156+6929	15 42.2	30 07	3.0	12	20.8	+0.5	PN:		
80	06160+6928	15 57.5	29 27	-4.4	32	20.5	+1.2	Gal		
81	06163+7221	16 21.3	21 16	-0.9	-25	21.7	+0.4	Gal:		
82	06172+7228	17 10.9	29 00	-6.1	27	20.7	+0.4	Neb:		
83	06197+7251	19 45.6	51 06	0.4	-3	12.8	+1.3	M	1	4
84	06198+7112	19 46.3	11 45	-3.7	-18	17.3	+0.5	Gal		
85	06225+7122	22 30.1	22 17	-0.7	6	11.9	+1.9	M		
86	06235+6926	23 37.7	26 12	2.7	1	18.5	+0.5	Gal		
87	06241+7105	24 13.1	05 19	5.5	-6	22.0	+0.9	Gal:		
88	06255+6910	25 25.9	10 05	-9.1	4	16.2	+0.3	Gal		
89	06277+7125	27 46.4	26 22	2.8	27	15.8	+0.9	C		
90	06316+7227	31 35.1	27 40	-1.0	5	17.2	+0.5	Gal		
91	06370+7027	37 05.8	27 36	0.3	8	9.3	+1.8	M		
92	06419+7021	41 49.8	21 50	-5.8	0	17.5	+1.0	Gal		
93	06443+7125	44 22.0	26 29	-1.0	31	22.3	+0.6	Gal:		M:
94	06470+7146	47 07.4	46 27	2.4	14	18.9	+1.8	M:		
95	07042+6955	04 15.8	55 51	0.0	9	12.1	+1.8	M		
96	07263+7151	26 22.8	51 29	-0.9	2	11.7	+1.8	M		
97	07313+6919	31 17.4	19 36	-4.9	-16	13.2	+0.9	M		
98	07329+6944	33 01.1	44 46	1.7	11	19.0	0.0	Gal:		
99	07355+6915	35 41.5	14 47	10.3	-17	14.6	+0.9	Gal		
100	07377+6932	37 43.4	33 02	-1.2	12	11.3	+1.3	M		

Комментарии к объектам табл. 1:

- 03503+6918 - углеродная звезда раннего R класса с хорошо выраженными молекулярными полосами.
- 03534+6945 - две звезды класса M - оптические двойники этого источника. Вероятно ИК излучение идет от обоих объектов. Наличие протяженного источника в IRAS SSSC [15] подтверждает эту точку зрения.
- 04036+7135 - спиральная галактика, протянутая с северо-запада на юго-восток. Намечается область HII. Имеется также источник IRAS SSSC [15] на этой позиции.
- 04079+7033 - очень интересный объект! 3 конденсации, расположенные с северо-запада на юго-восток, похожие на HH объекты. Вероятно, это спиральная галактика с гигантскими областями HII.
- 04124+7106 - углеродная звезда позднего N класса с хорошо выраженными молекулярными полосами. Имеет очень большой $B-V$ (после поправки: $+2^m.11$).
- 04137+6940 - замечательный кандидат в яркие квазары! Спектр FBS показывает слабую, едва заметную эмиссию.
- 04156+6939 - классификация как звезда M класса неуверенная. Может оказаться также QSO с большим красным смещением (распределение энергии в низкодисперсионном спектре несколько странное).
- 04173+7232 - вероятная углеродная звезда раннего R класса. Может оказаться также звездой класса M.
- 04252+7034 - сомнительная классификация как PN. Изображение несколько растянутое, но цвет достаточно красный для того, чтобы заподозрить также этот объект как звезду класса M.
- 04260+6947 - углеродная звезда раннего R класса с хорошо выраженными молекулярными полосами.
- 04302+7247 - известная Sc галактика UGC 03085, тем не менее пропущенная в IRAS ассоциациях. Она протянута с северо-востока на юго-запад и имеет угловые размеры $1.4' \times 0.3'$ и $0.9' \times 0.3'$ на голубой и красной картах POSS, соответственно. Ярчайшая галактика в нашей выборке. Причиной неотождествления в IRAS, возможно, являются неточные координаты в каталоге UGC.
- 04363+7240 - углеродная звезда раннего R класса с хорошо выраженными молекулярными полосами.
- 04488+6903 - спектр FBS показывает эмиссионные линии. Можно увидеть и туманность, и центральную звезду на изображениях POSS. Очень красивая планетарная туманность!

- 04518+6922 - переменная типа Mira Ceti, согласно [12].
- 05004+6936 - спиральная галактика, протянутая с северо-запада на юго-восток. Очень яркое ядро по сравнению с перифериями. Если нет наложения звезды на галактику, то это кандидат в Сейферты.
- 05196+7257 - спектр FBS имеет распределение энергии, указывающее на QSO или Sy1 галактику.
- 05236+6918 - известная красная звезда HD 013503, очень позднего под-класса N с рекордным показателем цвета $B-V$ (после поправки: $+3^m.19$!) Переменность хорошо заметна сравнением яркостей на картах POSS ($15^m.8$) и FBS (18^m). Тем не менее этот объект был пропущен в PSC ассоциациях, вероятно, из-за неточных координат в каталоге HD. Может иметь протяженную пылевую оболочку, так как в IRAS SSSC [15] на этой позиции имеется протяженный источник.
- 05316+7233 - компактное образование почти круглой формы с едва заметной периферией. Сейферт или компактная галактика.
- 05396+7123 - ярчайший объект в выборке. Этот и некоторые другие яркие объекты, ранее неизвестные и, естественно, пропущенные в ассоциациях IRAS, вероятно переменные, скорее всего мириды (все такие объекты с $m_v \leq 10^m$ являются звездами класса M).
- 06134+7226 - два оптических двойника: 06133+7225 и 06134+7227. Оба - галактики и ИК излучение может быть обусловлено обоими. Первая, протянутая с северо-запада на юго-восток, вторая - почти точечный объект и может оказаться QSO. Морфологический тип первого объекта предварительно может быть определен как E:
- 06156+6929 - очень слабое незвездное образование близко к предельной величине POSS. Согласно ИК цветам и изображениям на POSS это вероятная PN.
- 06198+7112 - пара галактик, вероятно взаимодействующая. Компоненты расположены на северо-западе (слабый) и на юго-востоке (яркий). Очень интересный объект.
- 06255+6910 - вероятная эллиптическая галактика, протянутая с северо-востока на юго-запад. Очень вероятный кандидат в радио-галактики. Кажется, имеет расщепленную структуру. Интересный объект.
- 06277+7125 - углеродная звезда раннего R класса с хорошо выраженными молекулярными полосами на низкодисперсионном спектре FBS.
- 06443+7125 - слабейший объект в выборке. Видимая звездная величина оценена с E карты POSS (на O карте не виден).

5. *Анализ характеристик выборки.* Для анализа ИК цветов и состава выборки были построены различные комбинации диаграмм цвет - цвет. Рис. 1 представляет диаграмму $[12]-[25]/[25]-[60]$ для 108 объектов. ИК цвета определены согласно следующим соотношениям [18]:

$$[12] - [25] = 2.5 \lg \frac{F_{25\mu m}}{F_{12\mu m}}; \quad [25] - [60] = 2.5 \lg \frac{F_{60\mu m}}{F_{25\mu m}},$$

без коррекции к нуль - пункту. Концентрация объектов около $[12]-[25] = 0.0$ и $[25]-[60] = 0.5$ обусловлена неопределенными значениями IRAS потоков на 12, 25 и 60 мкм (верхние пределы, соответственно 0.25Jy, 0.25Jy и 0.40Jy). Хорошо разделяются области для различных типов объектов.

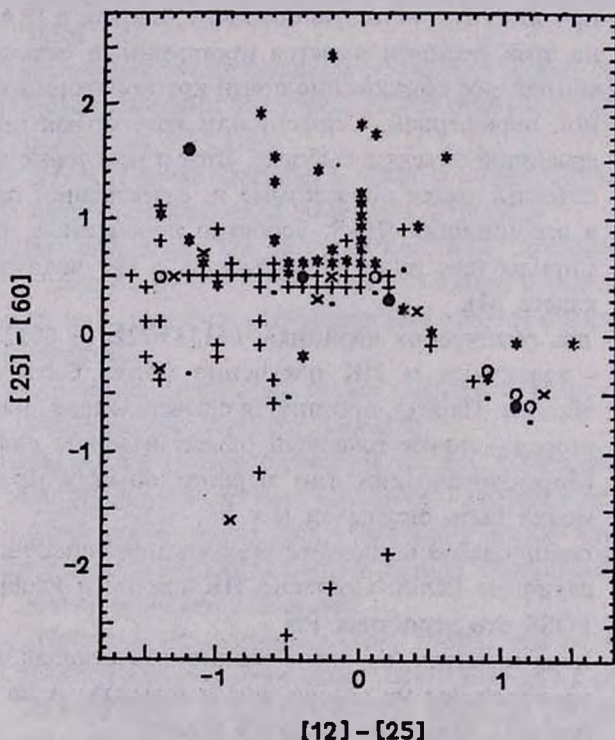


Рис. 1. $[12]-[25]/[25]-[60]$ цвет - цвет диаграмма для 108 IRAS источников. + - М звезды, x - С звезды, o - планетарные туманности, * - галактики, • - QSO, •• - неизвестные объекты.

Звездные величины $m_Y (\cong V)$ для 100 отождествленных объектов определены в пределах $8^m.2-22^m.3$. Рис. 2 показывает распределение галактических и внегалактических объектов по m_Y . В среднем, звезды ярче и, вероятно, излучают в ИК области в результате их спектра позднего типа. Рис. 3 показывает распределение отождествленных галактических

и внегалактических объектов по цветам $B-V$. Большинство звезд имеет цвет в диапазоне 0.5-1.5, достигая 2.1 и для одного объекта даже 3.2! Цвет внегалактических объектов колеблется в пределах 0.0-1.0.

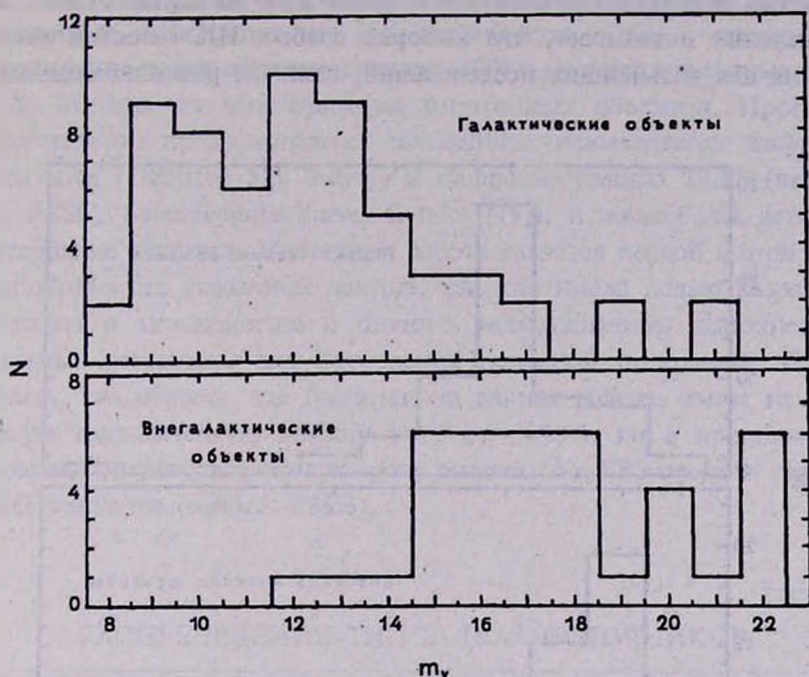


Рис. 2. Распределение 61 галактического и 39 внегалактических отождествленных IRAS источников по оптическим звездным величинам m_v .

Вероятно должно быть соответствие между оптическими и ИК величинами. Зависимость ИК величины от оптической, а также зависимость ИК величины от цвета $B-V$, показывает, что есть 8 объектов, которые сильно отклоняются от области большинства красных звезд. Это объекты IRAS 03534+6945 (M), 04066+7139 (M), 04124+7106 (C), 04137+7016 (C), 04173+7111 (M), 04256+6930 (M), 05088+6948 (M), 05236+6918 (C), имеющие повышенное ИК излучение на 12 мкм. По-видимому, они имеют протяженные пылевые оболочки и требуют дальнейшего изучения.

Подытоживая морфологические и низкодисперсионные спектральные характеристики 36 отождествленных галактик, распределение их типов можно представить следующим образом: 8 спиральных (из которых 2 - со сверхассоциациями), 5 вероятных спиралей, 2 линзовидных, 2 неправильных, 4 Сейферта (из которых один очень компактный), 1 пара (вероятно, взаимодействующая), 4 эллиптических (из которых один кандидат в радиогалактики) и 10 галактик с неопределенным морфологи-

ческим типом, в первом приближении - эллиптических. Эти и другие эллиптические могут оказаться галактиками других типов в случае детальной классификации. Сейферты заподозрены на основе низкодисперсионных эмиссионных спектров и ярких ядер на картах POSS. Это распределение показывает, что выборка слабых ИК галактик весьма интересна для дальнейших исследований, включая радионаблюдения.

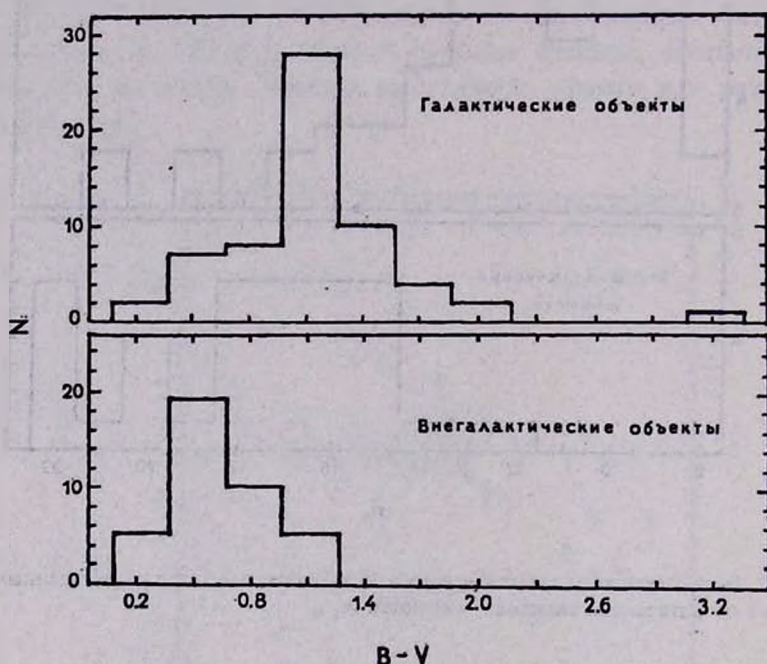


Рис. 3. Распределение 61 галактического и 39 внегалактических отождествленных IRAS источников по оптическим показателям цвета $B-V$.

Следует отметить, что многие исследования по отбору и отождествлению галактик (или звезд поздних классов) из числа IRAS источников в первую очередь основаны на анализе цветов. Более того, во многих работах для поиска и отождествления галактик рассматриваются только области с $|b| \geq 20^\circ$ - 30° , а для звезд - наоборот, области с низкими галактическими широтами. Но есть галактики с низкими галактическими широтами и с пекулярными ИК цветами, и звезды с высокими b ! Таким образом, чтобы иметь полную выборку IRAS галактик или IRAS звезд, необходимо проводить массовые отождествления.

6. Заключение. Таким образом, оптические характеристики (звездные величины, цвета, морфология, низкодисперсионные спектры), наряду с

данными IRAS о потоках на 12, 25, 60 и 100 мкм, дают возможность для достаточно уверенного отождествления и классификации объектов и дальнейшего многостороннего изучения. Как было показано, низкодисперсионные спектры FBS являются весьма удобной основой для узнавания и отождествления ИК источников. Табл. 2 представляет распределение типов отождествленных (100) и неотождествленных источников. Многие из них примеры интересных объектов. Программа отождествления предусматривает дальнейшее использование цифрового обзора неба (Digitized Sky Survey) и цифровых данных IRAS (включая FSC, SSSC, Serendipitous Survey Catalog [19]), а также более детальное исследование объектов. Настоящая работа является первой в этой серии и выполнена без указанных данных, так как имела целью разработать идеологию и методологию и оценить необходимость выполнения и ожидаемые результаты для проведения основной программы. Следует отметить, что область, где была начата данная работа, имеет не очень высокую галактическую широту ($+12^\circ \leq b \leq +30^\circ$), но с продолжением программы отождествления в сторону высоких b в FBS процент галактик и QSO возрастет (сейчас - 39%).

Таблица 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВ IRAS ИСТОЧНИКОВ

Галактики (36)							QSO	M	Углеродные звезды		Туман- ности		Не- отож- дествл.
Sy	S	SO	Irr	E	пара	?			R	N	PN	?	
4	13	2	2	4	1	10	3	47	5	4	4	1	8

Ожидается большое количество углеродных и поздних M звезд, планетарных и других туманностей, QSO и интересных галактик: они составят выборки всех этих типов объектов на большой площади для дальнейшего статистического изучения. Что касается FSC, большинство этих слабых источников не могут быть отождествлены из-за отсутствия на пластинках FBS, но они также могут дать дополнительную информацию об исследуемых объектах, а также о выборке исследуемых ИК источников.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория, Армения



OPTICAL IDENTIFICATION OF 100 IRAS POINT SOURCES AT HIGH GALACTIC LATITUDES

A.M.MICKAELIAN

Optical identification of 100 infrared sources from the IRAS Point Source Catalogue is made on the base of the low-dispersion spectra of the First Byurakan Survey and Palomar Observatory Sky Survey red and blue images. The study is carried out in the region $3^{\text{h}}50^{\text{m}} \leq \alpha \leq 7^{\text{h}}40^{\text{m}}$ and $+69^\circ \leq \delta \leq +73^\circ$ with a surface of 75 sq. degrees. Optical coordinates, their deviations from the infrared ones, V magnitudes, colour indices, preliminary types for all the objects and a number of remarks on interesting objects are presented. 3 objects turned out to be QSOs, 36 - galaxies (among which Seyferts and an interacting pair), 5 - faint planetary nebulae, 9 are carbon stars and 47 - late M-type stars.

ЛИТЕРАТУРА

1. IRAS Catalogs and Atlases. 2. The Point Source Catalog, Declination Range $90^\circ > \delta > 30^\circ$. Joint IRAS Science Working Group. NASA, Washington, DC: US GPO, 1988.
2. IRAS Faint Source Catalog, $|b| > 10^\circ$ Version 2. On The Optical Disk. "Selected Astronomical Catalogs". Supplied by NASA, Vol. 1, 1989.
3. В.Е.Маркарян, В.А.Липоветский, Я.А.Степанян, Л.К.Ерастова, А.И.Шаповалова, Commun. of the Special Astrophysical Obs., 62, 5, 1989.
4. Г.В.Абрамян, В.А.Липовецкий, Дж.А.Степанян, Астрофизика, 32, 29, 1990.
5. Г.В.Абрамян, К.С.Гигоян, Астрофизика, 31, 601, 1989.
6. А.М.Микаелян, Астрофизика, 38, 625, 1995.
7. А.М.Микаелян, Канд. диссерт., Бюракан, 1994, 284 с.
8. Г.В.Абрамян, А.М.Микаелян, Астрофизика, 37, 43, 1994.
9. Г.В.Абрамян, А.М.Микаелян, Астрофизика, 37, 411, 1994.
10. W.E.C.J. Van der Veen, H.J.Habing, Astron. Astrophys., 194, 125, 1988.
11. H.J.Walker, M.Cohen, Astron. J., 95, 1801, 1988.
12. Г.В.Абрамян, К.С.Гигоян, Астрофизика, 38, 211, 1995.
13. A.J.Cannon, E.C.Pickering, Henry Draper Catalogue and Extension 1, Harv. Ann. 91-99, 1918-24.
14. P.Nilson, Uppsala General Catalogue of Galaxies, Upps. Ann., Band 6, Ser. V:A 1, 456 pp, 1973.
15. IRAS Catalogs and Atlases. 7. Small Scale Structure Catalog. Joint IRAS Science Working Group. NASA, Washington, DC: US GPO, 1988.
16. I.R.King, M.J.Raff, Publ. Astron. Soc. Pac., 89, 120, 1977.
17. P.G.Hayman, C.Hazard, N.Sanitt, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 189, 853, 1979.
18. IRAS Catalogs and Atlases. Explanatory Supplement. Ed. C.A.Beichman, G.Neugebauer, H.J.Habing, P.E.Clegg, and T.J.Chester, NASA, Washington, DC: US GPO, 1985.
19. IRAS Serendipitous Survey Catalog, On the Optical Disk, Infrared Processing and Analysis Center, 1986.

УДК: 52-6

О СООТНОШЕНИИ ПОЗИЦИОННЫХ УГЛОВ ВЫТЯНУТЫХ СТРУКТУР И ВЕКТОРА ПРЕИМУ- ЩЕСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОМПАКТНОГО РАДИОИСТОЧНИКА ЗС 84 НА ДЛИНАХ ВОЛН 2, 4 И 6 СМ

И.И.ПРОНИК

Поступила 15 июля 1996

Принята к печати 1 августа 1996

Проведено сопоставление позиционных углов (ПУ) вытянутых структур центрального компактного радиоисточника ЗС 84 и вектора E поляризованного излучения на длинах волн 2, 4 и 6 см. Показано, что в 1972-1984 гг. вектор E имел два преимущественных направления с $ПУ = -10^\circ$ и $ПУ = +17^\circ$, которые соответствуют направлениям двух главных вытянутых структур радиоисточника, содержащих умеренно релятивистский выброс размером меньше парсека. Параллельное направление вектора поляризации и радиовыбросов для источника ЗС 84 согласуется с моделью распределения магнитных полей и облаков релятивистских электронов в умеренно релятивистских струях объектов типа BL Lac, рассмотренной Габуздой и др. (1994).

1. *Введение.* Направления вытянутости радиоструктур ряда компактных источников, расположенных в ядрах внегалактических объектов, связаны с преимущественным направлением электрического вектора E их поляризованного радиоизлучения [1]. Например, Руск и Сиквест [2] обнаружили, что структура некоторых компактных радиоисточников, наблюдаемая на радиоинтерферометре сверхдлинной базы (РСДБ) на волне 3.7 см, ортогональна вектору E . Этот результат был подтвержден и другими исследованиями [3,4]. Были обнаружены также источники, для которых РСДБ структура и вектор E параллельны. Данные об ориентации векторов поляризации проливают свет на геометрию магнитного поля этих источников и механизмы образования сгустков в этих выбросах. Особый интерес представляет эта геометрия вблизи центров активности переменных компактных радиоисточников.

Компактный радиоисточник ЗС 84, расположенный в ядре галактики NGC 1275, известен как один из самых активных. Для него зарегистрированы сильные изменения РСДБ структуры [5], радиопотока и поляризации [6]. Но связи ориентации его РСДБ структур и E вектора обнаружено не было. Пирсон и Редхат [3] отметили, что РСДБ структура источника ЗС 84 не имеет определенного позиционного угла, а изменения ПУ вектора его поляризованного излучения составляет 180° . Кавторн и др. [7] делали попытку построить РСДБ изображение этого источника в

поляризованном свете на частоте 5ГГц (6 см), но она не увенчалась успехом, т.к. разрешающая способность для ЗС 84 в поляризованном радиоизлучении на всех базах интерферометра оказалась очень низкой. Поэтому в настоящее время не представляется возможным узнать распределение направлений вектора поляризации детально по структуре источника. Можно исследовать только его преимущественное направление, полученное по интегральному излучению всего РСДБ источника. Ниже мы приводим результаты сопоставления ПУ вектора E излучения в сантиметровом диапазоне длин волн и направления вытянутых структур, полученные по литературным данным.

2. Структура РСДБ источника ЗС 84. Структура РСДБ источника ЗС 84 в сантиметровом диапазоне длин волн изучается с 1972г. [8,9]. Первые же карты, полученные на волне 2.8 см (10.7 ГГц), позволили сделать вывод, что наиболее яркие компоненты источника расположены цепочкой, имеющей ПУ $\sim 45^\circ$, тогда как общая структура всего РСДБ

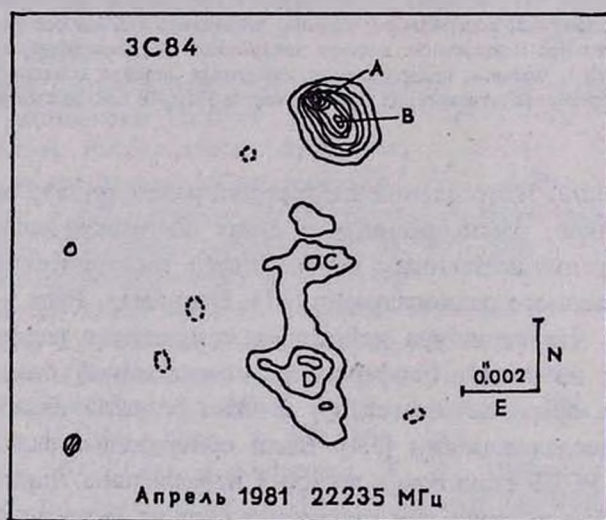


Рис. 1. РСДБ карта источника ЗС 84 согласно данным Редхада и др. [12] А, В, С, D - детали его структуры, которые обсуждаются в тексте.

источника ориентирована в ПУ $\sim -9^\circ$. Последующие наблюдения, проведенные в миллиметровом и сантиметровом диапазонах длин волн, подтвердили этот результат [10-13]. Структура оказалась переменной по яркости и положению отдельных деталей, но два преимущественных направления ориентации остались практически неизменными. На рис. 1 приведена карта источника ЗС 84 на частоте 22 ГГц (1.35 см) по данным наблюдений Редхата и др. [12], выполненным в апреле 1981г. Видно, что

структура источника действительно сильно искривленная, ее детали расположены в двух вытянутых образованиях АВ и CD. Первое из них имеет ПУ близкий $\sim +15^\circ$, а второе - $\sim -10^\circ$. Ромни и др. [10] выдвинули предположение, что структура АВ может рассматриваться как образование "ядро-выброс", где А есть центр активности радиоядра ЗС 84, а компонент В представляет собой выброс из этого центра в ПУ $\sim +15^\circ$. Дальнейшие наблюдения показали, что структуры "ядро-выброс" и CD эволюционируют со временем. Наблюдается перемещение отдельных деталей относительно центра активности А. Вся структура "ядро-выброс" меняет ПУ в пределах 20° - 50° . Данные наблюдений позволили сделать предположение, что из центра А выбрасываются сгустки облаков электронов, которые движутся в ПУ $\sim 20^\circ$ - 50° до расстояния примерно 1-2 миллисекунды дуги (0.5 пк) от компонента А, а затем направление их движения искривляется (скорее всего, магнитным полем) и далее совпадает с линией CD. В 1980г. на миллиметровых волнах была отмечена яркая вспышка излучения источника ЗС 84, которую связали с сильным увеличением активности компонента А [14]. В 1981г. общая яркость компонент А+В на волне 1.35 см была примерно равна общей яркости компонентов С+D [11]. Сравнение одной из последних РСДБ карт источника ЗС 84, полученной на частоте 22 ГГц 21 июня 1991г. Вермуленом и др. [5], с картами более ранних эпох, позволило сделать вывод о том, что выброс из центра активности ядра ЗС 84, действующий в ПУ $\sim 20^\circ$ - 50° , является умеренно релятивистским, имеющим досветовую скорость.

Все рассмотренные данные свидетельствуют о том, что вблизи радиоядра ЗС 84 существуют два основных направления движения облаков релятивистских электронов: от центра активности в ПУ $\sim 20^\circ$ - 50° до расстояния 1.5 миллисекунды дуги (0.5 пк), а на больших расстояниях от него - в ПУ $\sim 170^\circ$ (или -10°). Интересно, что второе направление совпадает с направлением вытянутой структуры радиоисточника ЗС 84 на масштабе нескольких килопарсек [15], которое, по-видимому, обусловлено общим магнитным полем галактики NGC 1275. Поэтому возникает предположение, что магнитное поле галактики "поворачивает" выброс В в том месте, где сила выброса существенно ослабевает. После поворота он движется по направлению CD.

3. *Гистограмма распределения позиционных углов вектора линейной поляризации радиоизлучения источника ЗС 84 на волнах 2, 4 и 6 см.* Основные направления вытянутой структуры РСДБ источника ЗС 84 мы сравнили с распределением ПУ вектора *E* преимущественных колебаний поляризованного радиоизлучения на длинах волн 2, 4 и 6 см, полученных Аллером и др. [7]. К сожалению, пока еще нет наблюдений, позволяющих создать детальные карты распределения ПУ вектора *E* вдоль РСДБ выброса источника ЗС 84. Мы имеем возможность

рассмотреть это распределение только для всего РСДБ источника в целом. Как уже упоминалось выше, РСДБ карты источника стали получать только с 1972г., поэтому и данные о поляризации мы рассмотрели только для дат, начиная с этого времени. Всего было использовано около 300 отдельных наблюдений поляризации, которые в интервале времени с 1972 по 1984гг. в большинстве случаев получались раз в месяц. Степень поляризации излучения источника только в единичных случаях превышала 0.5%. При этом ПУ вектора E поляризованного излучения менялся со временем в диапазоне от 0° до 180° . Вспышка излучения источника ЗС 84 на миллиметровых волнах 1980г. [14] не была сильно выражена на длинах волн 2-4 см. Средняя яркость ядра на волне 4 см в интервале времени 5.1972-12.1979гг. (до вспышки) была всего на 15% меньше, чем средняя яркость его после вспышки в 1980-1984гг. Поэтому материал рассматривался для всего интервала времени 1972-1984гг. вместе.

Таблица 1

**СТЕПЕНЬ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ ПУ ВЕКТОРА E
ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИСТОЧНИКА ЗС 84
К СРЕДНЕМУ ЗНАЧЕНИЮ, ПОЛУЧЕННОМУ
ДЛЯ РАЗНЫХ ДЛИН ВОЛН**

ПУ	2 см	4 см	6 см
$-30^\circ < \text{ПУ} < +100^\circ$	91%	92%	90%
$-30^\circ < \text{ПУ} < +60^\circ$	83	79	80
$-20^\circ < \text{ПУ} < +30^\circ$	70	52	55

На рис. 2а представлена гистограмма распределения величин ПУ вектора E излучения радиоисточника по наблюдениям 5.1972-11.1984гг. Из рисунка видно, что хотя изменения ПУ этого вектора действительно были велики - от 0° до 180° , распределение их величин наравномерно - существует интервал преимущественных направлений - в 90% случаев ПУ вектора E заключены в пределах от -30° до $+100^\circ$. Среднее значение ПУ вектора E в этом интервале равно $22^\circ 8 \pm 0^\circ 9$. Распределение ПУ векторов E асимметрично, оно круто падает в сторону отрицательных значений ПУ и более полого - в сторону положительных. Ширина гистограммы на половине максимального значения равна 55° или $\pm 27^\circ 5$, что при средней ошибке одного измерения ПУ σ (ПУ) = $14^\circ 4$ составляет $\sim 4\sigma$ ($\pm 2\sigma$). Следовательно, ширина гистограммы распределения вектора E обусловлена не только ошибками наблюдений, а отражает также его реальные изменения со временем.

Были рассмотрены также гистограммы распределения значений вектора E отдельно для каждой из длин волн 2, 4 и 6 см. Форма для 4 и 6 см почти точно повторяет форму кривой рис. 2а, а для $\lambda = 2$ см она оказалась существенно другой. Обратимся к табл. 1 и рис 2b.

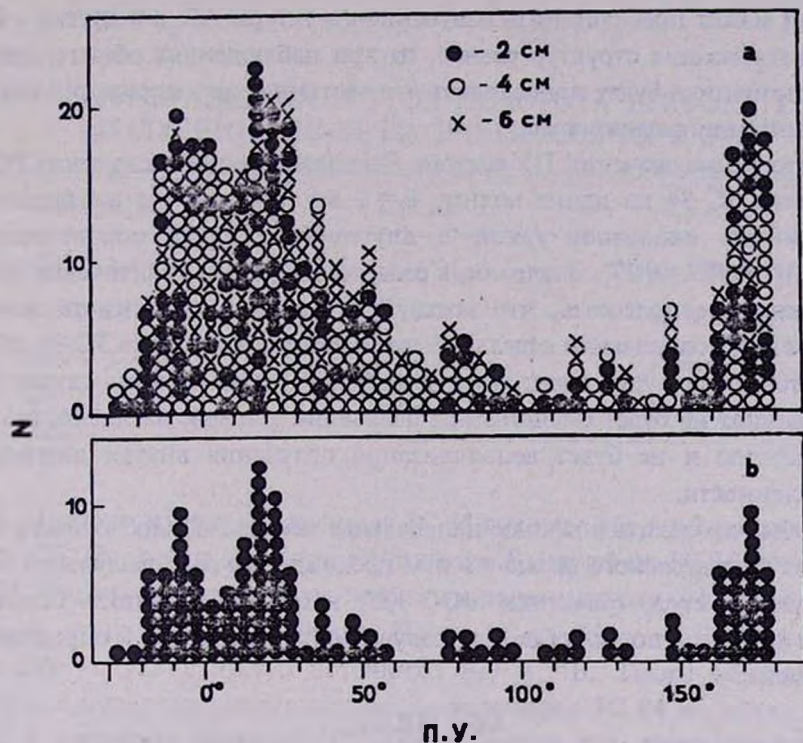


Рис. 2. Распределение ПУ векторов E поляризованного излучения источника ЗС 84 в сантиметровом участке длин волн по данным Аллера и др. [6]. а - разными значками для $\lambda = 2, 4$, и 6 см, б - для $\lambda = 2$ см.

Видно, что для $\lambda = 2$ см наблюдается наибольшая концентрация значений ПУ к максимальному. Ярко выражена двугорбая форма гистограммы. Следы двугорбости заметны также и на рис. 2а, но на рис. 2b она выражена более четко. Для длины волны $\lambda = 2$ см среднее значение ПУ в интервале от $-20^\circ < \text{ПУ} < 0^\circ$ равно $-9^\circ 6 \pm 2^\circ 7$, а в интервале $0^\circ < \text{ПУ} < +30^\circ$ равно $+16^\circ 8 \pm 2^\circ 1$, разность между ними составляет $26^\circ 4 \pm 4^\circ 8$, т.е. 5.5σ . Значимость факта бимодальности гистограммы равна 0.999.

4. *Обсуждение полученных результатов.* Интерпретация усложняется тем, что рассмотренная поляризация относится к общему излучению всего РСДБ источника ЗС 84. В этом источнике на сантиметровых волнах имеются две вытянутые структуры, наклоненные друг к другу примерно под углом 30° (рис. 1). Структура АВ (ядро - выброс) имеет

ПУ = $\sim +15^\circ$, структура CD - $\sim -10^\circ$. Как было отмечено выше, яркости этих структур в 1981г. были приблизительно одинаковыми, поэтому угол преимущественных направлений вектора E , полученный для интегрального излучения всего РСДБ источника, неправомерно относить только к структуре АВ - "ядро - выброс", или к структуре CD. В отдельные моменты времени может превалировать излучение структуры АВ, а в другие - CD. Если поляризация структур разная, то при наблюдениях общего потока РСДБ источника будет происходить его частичная деполяризация внутри диаграммы направленности.

Гистограмма значений ПУ вектора E поляризованного излучения РСДБ источника ЗС 84 на длине волны $\lambda = 2$ см (рис. 2б) по наблюдениям 1972-1984гг. оказалась узкой и двугорбой. Горбы соответствуют ПУ = -10° , и ПУ = $+17^\circ$. Значимость разделения горбов практически равна 1. Можно предположить, что когда будет возможность иметь данные наблюдений поляризации отдельных компонентов источника ЗС 84, горбы на гистограмме будут выделяться еще более четко. В этом случае при наблюдениях не будет смешиваться излучение деталей, имеющих разную поляризацию и не будет деполяризация излучения внутри диаграммы направленности.

Чтобы определить истинное направление вектора E , необходимо учесть влияние Фарадеевского вращения при прохождении радиоизлучения через межзвездную среду галактики NGC 1275 и нашей Галактики. Согласно теории [16], угол поворота $\Delta\varphi$ для излучения длины волны λ определяется формулой:

$$\Delta\varphi = MR\lambda^2,$$

где $\Delta\varphi = \varphi(\lambda) - \varphi(0)$, $\varphi(\lambda)$ - наблюдаемое значение ПУ вектора E (в рад.) для длины волны λ (в метрах); $\varphi(0)$ - ПУ вектора E до прохождения излучения через плазму; MR - мера вращения (в рад/м²). Мера вращения MR определялась разными авторами. При этом оказалось, что значения MR для источника ЗС 84 существенно отличаются для коротких волн ($\lambda \leq 10$ см) и длинных волн ($\lambda \geq 10$ см). Результаты определений MR разными авторами приведены в табл. 2.

Различие в MR , полученное для коротких и длинных волн, привело к предположению, что вращение плоскости поляризации радиоизлучения источника ЗС 84 происходит не только в областях межзвездной и межгалактической среды, расположенной вне ядра галактики NGC 1275, но также и внутри самого источника [18]. Наиболее эффективно РСДБ источник излучает на сантиметровых и миллиметровых волнах, поэтому было сделано заключение, что большие значения MR для сантиметровых волн связаны с вращением вектора E внутри этого источника. Помещенные в табл. 2 данные для MR позволяют вычислить значения $\Delta\varphi$ для длины волны 2 см. Они представлены во 2-ом столбце табл. 2. Из

этих данных можно заключить, что в областях межзвездной и межгалактической среды, расположенных вне ядра галактики NGC 1275, вектор E излучения ЗС 84 на длине волны 2 см практически не испытывает вращения. Основная доля изменения угла поворота $\Delta\phi$ приходится на области внутри ядра. Рассмотрим эти два случая отдельно.

Таблица 2

**МЕРА ВРАЩЕНИЯ И УГОЛ ПОВОРОТА ВЕКТОРА E
ИЗЛУЧЕНИЯ ЗС 84 НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ 2 СМ**

MR, рад/м ²	$\Delta\phi$ (2 см)	Ссылка
+785 ($\lambda \geq 1$ см)	+18°	Хоббс, Ваак [17]
+469 ($2 \leq \lambda \leq 18$ см)	11	Биггел [18]
+836 ($\lambda \leq 7$ см)	19	Ипоус [19]
+7 ($\lambda \geq 18$ см)	0.2	Биггел [18]

1. Поворот вектора E излучения ЗС 84 вне ядра для $\lambda = 2$ см составляет всего 0°.2. Истинные значения ПУ вектора E излучения РСДБ источника ЗС 84, соответствующие двум горбам гистограммы рис. 2b, на внешней границе этого источника будут: ПУ = -10° и ПУ = +17°. Они точно совпадают с ПУ структур источника ВД и АВ. Таким образом, ПУ вектора E поляризованного излучения источника ЗС 84 на длине волны 2 см в интервале времени 1972-1984гг. имели два преимущественных направления, совпадающие с направлением двух главных вытянутых структур РСДБ источника.

2. Поворот вектора E для излучения на длине волны 2 см внутри ядра в среднем по трем определениям, приведенным в табл. 2, составляет +16°. Это означает, что внутри ядра возможны 2 значения ПУ вектора E - -26° и +1°. Эти данные могут быть полезны при обсуждении свойств внутренних областей радиоядра ЗС 84.

Габузда и др. [20] по наблюдениям на РСДБ исследовали распределение направлений вектора поляризации излучения на волне 6 см отдельных компонент выбросов ряда лацертид. По их данным в источниках такого типа, отличающихся умеренно релятивистскими скоростями выбросов, вектор E направлен преимущественно вдоль выбросов. Распределение вектора E бимодально, есть главный максимум и слабый - вторичный. Главная мода соответствует направлению, отличающемуся от направления выбросов меньше, чем на 35°, а вторая мода - направлению, перпендикулярному выбросам. Случай, когда вектор E направлен вдоль

выброса, осуществляется в 2.5 раза чаще, чем, когда он перпендикулярен выбросу.

Свои результаты Габузда и др. [20] сравнили с результатами, полученными для выбросов в квазарах, имеющих сверхсветовые скорости. В компонентах этих источников вектор E преимущественно перпендикулярен направлению выброса. Различия в свойствах поляризации РСДБ источников лацертид и квазаров Габузда и др. [20] объясняют в рамках модели, в которой ключевым фактором является мощность центральной машины источника и, как следствие - мощность потока джета. В этой модели лацертиды имеют более слабые центральные машины, чем квазары. Выбросы лацертид относительно более медленные и нестабильные, в них сильнее развита турбулентность. Структуры медленных выбросов часто бывают искривленными или аморфными. Магнитное поле в них в основном направлено перпендикулярно направлению выброса, но в редких случаях может быть направлено вдоль выброса. Отсюда легко объясняется бимодальное распределение вектора E в излучении лацертид: главный максимум его соответствует случаям, когда магнитное поле направлено перпендикулярно выбросу, а вторичный - направлению магнитного поля вдоль выброса. Магнитное же поле квазаров в этой модели стабильно продольное и, как следствие, вектор E излучения квазаров всегда перпендикулярен направлению выброса. Выбросы этих источников не искривляются на протяжении нескольких килопарсек. Эти особенности квазаров обеспечиваются большой мощностью центральной машины.

РСДБ источник 3С 84 по форме радиоспектра, характеру переменности и поляризации потока излучения относится к лацертидам [16,21]. Скорости движения его деталей досветовые. О маломощности и нестабильности выброса в 3С 84 говорит также тот факт, что уже на расстоянии 0.5 пк от центра активности радиисточника он круто меняет свое направление под влиянием общего магнитного поля галактики NGC 1275. Полученные нами результаты позволяют предполагать, что свойства поляризации этого источника укладываются в модель, рассмотренную для лацертид Габуздой и др. [20]. Вектор E поляризованного излучения на длине волны 2 см как правило направлен вдоль выброса. Двугорбая гистограмма этого вектора для длины волны 2 см (рис. 2б) соответствует двум направлениям структуры РСДБ источника. Ее асимметрию в сторону положительных значений вектора E можно рассматривать как свидетельство наличия двух слабых горбов в распределении значений вектора E . "Слабые" горбы могут соответствовать редким случаям, когда вектор E перпендикулярен главным структурам источника. Наши предположения можно будет проверить только после того, как будут получены распределения векторов E внутри структуры РСДБ источника 3С 84.

Я приношу благодарность Л.И.Матвесенко за полезные обсуждения статьи, Л.П.Метик за замечания к рукописи статьи, Л.И.Филатовой и Е.И.Жигалкиной за изготовление рисунков.

Крымская астрофизическая
обсерватория, Украина

ON THE RELATION OF THE POSITION ANGLES OF THE ELONGATED STRUCTURES AND OF THE POLARIZATION VECTOR OF THE COMPACT RADIO SOURCE 3C 84 EMISSION ON WAVELENGTHS 2, 4 AND 6 CM

I.I.PRONIK

A comparison of the position angles (PA) of elongated structures and of the polarization vector E of 2, 4 and 6 cm emission of compact source 3C 84 was carried out. It was shown that in 1972-1984 the vector E had two primary directions with $PA = -10^\circ$ and $PA = +17^\circ$, which correspond to the directions of two main elongated structures of the radio source, including the mildly relativistic parsec-scale ejection. Parallel direction of polarization vectors and radio jets for 3C 84 source agree with the model of magnetic fields and knots of relativistic electrons distributions in mildly relativistic ejections of BL Lac objects, considered by Gabusda et al. (1994).

ЛИТЕРАТУРА

1. К.И.Келлерманн, В кн.: Галактическая и внегалактическая радиоастрономия, 1976, ред. Г.Л.Верскер, К.И.Келлерманн, Из-во Мир, М., с. 496.
2. R.E.Rusk, E.R.Seaquist, Astron. J., 90, 30, 1985.
3. T.J.Pearson, A.C.Readhead, Astrophys. J., 328, 114, 1988.
4. R.E.Rusk, The impact of VLBI on astrophysics and geophysics, Proceedings of IAU Symposium No 129, eds. M.J.Reid, J.M.Moran., 161, 1988.
5. R.C.Vermeulen, A.C.S.Readhead, D.C.Backer, Astrophys. J., 430, L41, 1994.
6. H.D.Aller, M.F.Aller, G.E.Latimer, Ph.E.Hodge, Astrophys. J. Suppl. Ser., 59, 513, 1985.
7. T.V.Cawthorne, J.F.C.Wardle, D.H.Roberts et al., Astrophys. J., 416, 496, 1993.
8. R.T.Schilizzi, M.H.Cohen, J.D.Romney et al., Astrophys. J., 201, 263, 1975.

9. Л.И.Матвеевко, К.И.Келлерманн, И.И.К.Паулини-Тос и др., Письма в Астрон. ж., 6, 77, 1980.
10. J.D.Romney, W.Alef, I.J.K.Pauliny-Toth et al., Extragalactic Radio Sources, Proceeding IAU Symp. No 97, p. 291, 1982.
11. A.C.S.Readhead, C.R.Masson, A.T.Moffet et al., Nature, 303, 504, 1983.
12. A.C.S.Readhead, D.H.Hough, M.S.Ewing et al., Astrophys. J., 265, 107, 1983.
13. J.M.Marr, D.C.Backer, M.C.H.Wright, Parces-Scale Radio Jets, Proceeding Workshop NRAO, October 17-19, eds. J.A. Zensus, T.J. Pearson. Cambridge University Press, p. 78, 1988.
14. W.A.Dent, C.P.O'Dea, T.J.Balonek et al., Nature, 306, 41, 1983.
15. J.E.Noordam, A.G. de Bruyn, Nature, 299, 597, 1982.
16. D.J.Saikia, C.J.Salter, Ann. Rev., Astron. Astrophys., 26, 93, 1988.
17. R.W.Hobbs, J.A.Waak, Astron. J., 77, 342, 1972.
18. R.C.Bignell, Astron. J., 78, 1058, 1973.
19. M.Inoue, Publ. Astron. Soc. Japan, 29, 593, 1977.
20. D.C.Gabusda, C.M.Mullan, T.V.Cawthorn et al., Astrophys. J., 435, 140, 1994.
21. E.Valtaoja, S.Haarala, H.Lehto et al., Astron. Astrophys., 203, 1, 1988.

УДК: 524.3:52-355

О ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ОБЛАКОВ, ОБРАЗУЮЩИХ L_{α} -ЛЕС В СПЕКТРАХ КВАЗАРОВ

В.Г.ГОРБАЦКИЙ

Поступила 10 октября 1996

Из наблюдений следует, что облака, образующие L_{α} -лес, обладают иерархической структурой. Выдвигается предположение о том, что их структура является не только иерархической, но также и фрактальной. На этой основе объясняется хорошо известное из наблюдений соотношение между лучевой концентрацией нейтральных атомов водорода $N(HI)$ и концентрацией облаков с тем же значением $N(HI)$. Оцениваемая по данным наблюдений и из расчетов фрактальная размерность облаков равна $D = 2.5 \pm 0.2$.

1. *Введение.* Четверть века тому назад (1971г.) в спектрах нескольких квазаров был обнаружен " L_{α} -лес", т.е. множество линий поглощения водорода L_{α} , образуемых объектами (поглотителями), находящимися между квазаром и наблюдателем. С тех пор исследования L_{α} -леса сильно расширились, и к настоящему времени такие системы линий наблюдались уже в спектрах более чем 200 квазаров. Благодаря открывшейся с запуском HST возможности получать спектры УФ-области квазаров с малым красным смещением z , интервал значений z , в котором находятся поглотители, расширился и составил $0.1 \leq z \leq 5$. Достижимая при наблюдениях высокая разрешающая способность дает возможность детально изучать профили отдельных линий и, таким образом, делать выводы о внутренней структуре поглотителей, относительно природы которых до сих пор нет единого мнения. Наблюдательные данные и, в частности, свидетельства эволюции системы поглотителей [1], дают основание считать, что в большинстве эти объекты являются очень протяженными газовыми облаками, во всяком случае те из них, которые находятся на достаточно больших расстояниях ($z \geq 1.5$). Отличительной особенностью таких облаков является крайне низкое содержание в них тяжелых элементов ($Z \leq 0.01 Z_{\odot}$), синтезирующихся, как известно, в процессе эволюции звезд. Поэтому газ, составляющий облака, является первичным, т.е. образующая L_{α} -лес система состоит из догалактических облаков.

Результаты спектральных исследований L_{α} -леса, выполненных с очень высоким разрешением [2], привели к выводу о том, что догалактические облака обладают иерархической структурой. В данной статье на основе анализа наблюдательных данных выдвигается предположение о том, что структура облаков является не только иерархической, но к тому же и фрактальной. Оценивается фрактальная размерность для облаков по

наблюдательным данным о распределении эквивалентных ширин линий L_{α} в спектрах квазаров в сочетании с найденным теоретическим спектром масс облаков в системе.

2. *Эволюция спектра масс системы догалактических облаков.* Как было показано еще в ранних работах (напр., [3]), судить о том, эволюционирует система поглотителей, образующих L_{α} -лес, или нет, можно при посредстве следующего соотношения, получаемого из наблюдений

$$\frac{dN_r}{dz} \propto (1+z)^{\gamma}. \quad (1)$$

Здесь через N_r обозначено количество поглотителей вдоль луча зрения, приходящееся на единичный интервал z . Для стандартной космологической модели, при параметре замедления $q_0 = 0$, свидетельством эволюции системы является условие $\gamma > 1$ (при $q_0 = 0.5$ соответствующее условие $\gamma > 0.5$). Наблюдения дают для интервала $1.5 \leq z \leq 5$ значение $\gamma \geq 2$ и, следовательно, система является эволюционирующей.

Расчет эволюции спектра масс системы облаков был выполнен в предположении о том, что основным фактором, определяющим изменение спектра масс со временем, является слияние облаков при их столкновениях [1]. В качестве поглотителей принималась модель сферических однородных облаков. Очевидно, что вследствие слияний облаков распределение по массе должно смещаться в сторону больших масс. Поскольку при достижении достаточно большого значения массы $m > M_{\text{прек}}$ в облаках должно начаться звездообразование, то оно тем самым превращается в галактику (происходит, в некотором смысле, "фазовый переход"), и общая масса вещества, принадлежащего системе газовых облаков, будет уменьшаться.

Расчеты показали [1], что распределение концентрации облаков по массе $n(m, t)$ независимо от начальных условий за короткое, по сравнению с продолжительностью существования системы, время выходит на самоподобный режим, в котором вид зависимости $n(m, t)$ может быть аппроксимирован выражением

$$n(m, t) = f(t) \cdot m^{-q}. \quad (2)$$

В большей части всего интервала масс $[m_0; M_{\text{прек}}]$ (кроме m близких к $M_{\text{прек}}$) показатель q равен

$$q = 1.15 \pm 0.05. \quad (3)$$

Используя известную зависимость между z и t для стандартной модели, при посредстве соотношения (2) нетрудно рассчитать величину dN_r/dz . Значение показателя γ в формуле (1), найденное из вычислений [1] для различных интервалов z , составляет $\gamma \approx 2$ и хорошо согласуется с вели-

чиной, определяемой из наблюдений. Таким образом, не только подтверждается вывод об эволюции системы поглотителей при достаточно больших значениях z , но оказывается также, что при помощи простой модели системы, состоящей из однородных облаков, можно достаточно хорошо описать эволюцию.

При $0.1 \leq z \leq 1$ наблюдения дают $\gamma < 1$ [4] и, соответственно, система поглотителей не является эволюционирующей. По-видимому, на таких расстояниях природа поглотителей иная - они представляют собой обширное гало галактик, являющихся продуктом слияния догалактических облаков. Это обстоятельство находит подтверждение в результатах расчетов [1], которые показали, что при $z < 1$ концентрация образовавшихся галактик существенно превосходит концентрацию облаков. Столкновения галактик должны происходить значительно реже, чем столкновения облаков в силу относительной малости сечения столкновений для них. Поэтому система молодых галактик не является эволюционирующей со временем в отношении изменения их концентрации. Следовательно, уменьшение γ с уменьшением z при $z < 1.5$ представляется вполне естественным.

3. *Проблема структуры облаков, образующих L_α -лес.* Определение внутренней структуры облаков по профилям образуемых ими спектральных линий требует спектрограммы с очень высоким разрешением. В этом отношении важную роль сыграла работа [2], в которой было достигнуто разрешение 6.5 км/с. По этим спектрам для выборки неблэндрированных и ненасыщенных линий было установлено, что они соответствуют значениям лучевой концентрации нейтральных атомов водорода $N(\text{HI})$, поглощающих излучение в линии L_α , лежащим в интервале

$$10^{12.5} \leq N(\text{HI}) \leq 10^{14} \text{ см}^{-2}. \quad (4)$$

По профилям этих линий было определено значение параметра b

$$b = \sqrt{2} \cdot \sigma, \quad (5)$$

где σ - дисперсия скоростей атомов. Оказалось, что значение b соответствует температурам 5000+10000К, что на порядок меньше, чем предполагалось на основе данных, полученных по спектрам с более низкой дисперсией. Отсюда следует важное заключение: самые слабые линии (с эквивалентной шириной, составляющей сотые доли Å) образуются сгустками сравнительно холодного и, следовательно, не очень сильно ионизованного ($n_{\text{II}}^+ / n_{\text{III}} \leq 10^4$) газа. При указанных значениях лучевой концентрации массы таких сгустков малы по сравнению с $\mathfrak{M}_\odot$. Поскольку оценки массы облаков, полученные с помощью различных методов, превосходят $10^5 \mathfrak{M}_\odot$, то количество таких сгустков в облаке должно быть очень большим ($\gg 10^6$).

В работе [2] была обнаружена корреляция между величиной параметра b и эквивалентной шириной W линий L_α . Это было подтверждено и в других наблюдениях, проводившихся с достаточно высоким разрешением, например, [5], [6]. Значение b лежит в пределах

$$5 \leq b \leq 80 \text{ км/с,}$$

т.е. "температура", определенная по самым слабым линиям, отличается от "температуры", найденной по сильным линиям ($W \geq 0.5 \text{ \AA}$) более чем на порядок. Поскольку в соответствии с выводами различных авторов ширина сильных линий обусловлена крупномасштабными движениями, то корреляция между b и W указывает на иерархическую структуру облаков. Для наименьших из наблюдаемых элементов структуры - "облачков" - лучевая концентрация нейтральных атомов водорода $N(\text{HI}) \geq 10^{12} \text{ см}^{-2}$. Они движутся в пространстве со скоростями, на порядок превышающими тепловые скорости атомов в облачках. Более сильные линии возникают при поглощении излучения в следующих по иерархии образованиях и представляют собой блэнды - результат наложения линий, образованных облачками, движущимися вдоль луча зрения с различными скоростями.

Уже неоднократно отмечалось (например, [7]), что определение лучевой концентрации $N(\text{HI})$ для сильных ("насыщенных") линий, при посредстве обычной кривой роста, не является корректным, так как эффект блэндирования невозможно учесть достаточно строго. Поэтому, полученное многими авторами соотношение

$$\frac{dN}{dN(\text{HI})} \propto [N(\text{HI})]^{-\beta}, \quad (6)$$

где N - пространственная концентрация поглотителей, обладающих лучевой концентрацией атомов водорода, равной $N(\text{HI})$, не может, как это часто делают, использоваться для линий большой ширины ($W \geq 1 \text{ \AA}$). Для линий, относящихся к линейной части кривой роста - в области, определяемой неравенствами (4), из (6) следует

$$\frac{dN}{dW} \propto W^{-\beta}, \quad 0.01 \leq W \leq 0.4, \quad (7)$$

где N - пространственная концентрация облаков, создающих линию с эквивалентной шириной W .

Соотношение (7) указывает на то, что по иерархической структуре все облака, образующие L_α -лес, сходны. Значение параметра β приблизительно одинаково для всех квазаров и равно $\beta = 1.7 \pm 0.2$. Следовательно, оно может лишь слабо зависеть от направления в пространстве и от z . Величина N определяется распределением поглощающих облаков по массе, которое, согласно [2] и [3], должно быть универсальным. Соответственно, универсальной должна быть и зависимость W от массы облака.

Величины N (см^{-3}) и W ($\text{\AA} \propto \text{см}$) оказываются связанными степенной зависимостью, что дает основание предполагать фрактальную структуру облаков, образующих L_α -лес, а соотношения (2) и (7) позволяют оценить их фрактальную размерность.

4. *Фрактальность облаков.* Фрактальные структуры обладают, как правило, нецелой размерностью D , значения которой могут находиться в интервале $0 < D < 3$. Для самоподобных фракталов возможно масштабное преобразование ("скейлинг") с размерностью подобия, равной D . Интересно отметить, что как облака в атмосфере Земли, так и межзвездные облака в Галактике являются фракталами. В первом случае это было установлено [8] на основании известного соотношения между площадью проекции S и периметром P

$$P \propto S^{D_2/2}.$$

Из наблюдений получается, что $D_2 = 1.35$ независимо от размера облака, тогда как при нефрактальной структуре было бы $D_2 = 1$.

Во втором случае на большом интервале размеров облаков имеет место самоподобие проекций по изофотам, и $D_2 = 1.3 + 1.4$ [9] (в обоих случаях речь идет о пространстве с размерностью, равной 2).

Примем, что межгалактические облака, создающие линии L_α -леса, представляют собой самоподобные фракталы с размерностью D . Наименьший из элементов - сферическое "облачко", имеет массу m_0 и радиус r_0 , а его оптическая толщина τ_0 в частоте линии $L_\alpha \ll 1$. Будем называть такое "облачко" элементарным поглотителем (ЭП). Если количество поглотителей конечно, в этом случае нельзя говорить о фрактальности в строгом смысле, но подобная терминология обычно применяется при изучении структуры физических объектов, содержащих конечное число элементов. Эквивалентная ширина линии L_α , создаваемой облаком размера $R > r_0$, определяется количеством поглотителей $N_{\text{полг}}$, находящихся на луче зрения от наблюдателя на квазар.

При оптической толщине ЭП равной τ_0 , создаваемая им линия поглощения имеет эквивалентную ширину W_0 , равную

$$W_0 = \sqrt{\pi} \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta \nu_T \tau_0, \quad (8)$$

где $2\Delta \nu_T$ - ширина линии, обусловленная тепловым движением атомов, содержащихся в ЭП. Так как для ЭП значение $N(\text{H I}) \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$, то $W_0 \approx 10^{-2} \text{\AA}$ и наблюдаемые линии, имеющие $W \approx 0.3 + 0.4 \text{\AA}$, являются ненасыщенными, т.е. $N_{\text{полг}} \tau_0 < 1$ и эквивалентная ширина наблюдаемой линии W , создаваемой облаком в спектре, равна

$$W = N_{\text{полг}} W_0. \quad (9)$$

Поскольку предполагается фрактальность всего облака, то распреде-

ление ЭП на луче зрения также фрактально. Согласно "теореме о сложении" (см., напр., [10]), при пересечении фрактальной структуры с размерностью D_A со структурой размерности D_B в пространстве с топологической размерностью d получается структура, обладающая размерностью D_C , равной

$$D_C = D_A + D_B - d. \quad (10)$$

В случае пересечения облака ($D_A = D$) с прямой, для которой $D_B = 1$, имеем

$$D_C = D - 2 \equiv D_1.$$

Если $D < 2$, то $D_C < 0$. Это означает, что далеко не всякий луч попадет хотя бы на один из ЭП, и поэтому облако практически прозрачно в частоте линии. При $D = 2$ фрактальность на поглощении не сказывается - могут образовываться только самые слабые линии. Поэтому будем рассматривать значения D_1 , лежащие в интервале $0 < D_1 < 1$.

При сферической симметрии фрактального облака распределение массы в нем определяется из соотношения

$$m(r) = m_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^D, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad (11)$$

где $m(r)$ - масса, содержащаяся в сфере радиуса r .

Шаровой слой $[r, r+dr]$ имеет массу $dm(r)$

$$dm(r) = \frac{m(r_0)}{r_0^D} D r^{D-1} dr, \quad (12)$$

и отсюда, учитывая, что объем этого слоя $dV(r)$ равен

$$dV(r) = 4\pi r^2 dr, \quad (13)$$

находим распределение плотности $\rho(r)$ вдоль радиуса

$$\rho(r) = \frac{D}{3} \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3-D}. \quad (14)$$

Вводя среднюю плотность в облаке $\bar{\rho} = \frac{m(R)}{V}$, находим

$$\rho(r) = \frac{D}{3} \bar{\rho} \left(\frac{R}{r} \right)^{3-D}. \quad (15)$$

В рассматриваемой модели облака концентрация ЭП ($n_{\text{погл}}$) должна быть пропорциональна локальной плотности вещества $\rho(r)$ и поэтому

$$n_{\text{погл}} \propto \rho(r^{D_1}) \propto \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1-D_1}. \quad (16)$$

При очень большом содержании ЭП в облаке функцию $\rho(r)$ можно приближенно принять непрерывной, и при вычислении $N_{\text{погл}}$ суммирование по элементам заменить интегралом

$$N_{\text{полг}} \propto \int_{r_0}^R \rho(r^{D_1}) d(r^{D_1}). \quad (17)$$

Из (17) при учете (9) и условия $R \gg r_0$ имеем

$$W \propto R^{D_1}, \quad R \propto W^{1/D_1}. \quad (18)$$

Соотношение (7) даст зависимость между распределением облаков по эквивалентным ширинам образуемых ими линий и величинами W . При посредстве (18) оно отражает распределение облаков по радиусам. С другой стороны, (2) даст распределение по массе. Для того, чтобы согласовать его с указанным распределением по радиусам, используем следующее из (11) выражение

$$R \propto [m(R)]^{1/D}. \quad (19)$$

Отсюда имеем

$$m(R) \propto W^{D/D_1} \quad (20)$$

и далее

$$dm(R) \propto W^{\frac{D}{D_1}-1} dW. \quad (21)$$

Распределение концентрации облаков по массе, согласно (2), имеет вид

$$n(m) \propto W^{-q \frac{D}{D_1}} \quad (22)$$

и отсюда

$$dN = n(R) dR = n(m) dm \propto W^{-q \frac{D}{D_1}} W^{\frac{D}{D_1}-1} dW. \quad (23)$$

Из сравнения (23) с (7) получаем

$$\beta = \frac{2(q-1)}{D_1} + q \quad (24)$$

и для D_1

$$D_1 = \frac{2(q-1)}{\beta - q}. \quad (25)$$

При указанных выше значениях параметров q и β из (25) находим фрактальную размерность рассматриваемой модели облаков

$$D \equiv D_1 + 2 = 2.5 \pm 0.2. \quad (26)$$

Заметим, что величина D сильно зависит от значения q , определяемого из расчетов. Так как находимос из наблюдений значение β можно считать фиксированным, то при $0 < D_1 < 1$ возможные значения q лежат в узком интервале $1 < q < 1.25$. Отсюда следует, что для подтверждения соответ-

вия предложенной модели облака реальным облакам необходимы более детальные, чем выполненные в [1] расчеты эволюции спектра масс облаков с учетом их внутренней структуры.

5. *Заключение.* Сделанное в данной работе заключение о фрактальности облака, перехватывающего идущее от квазара излучение в частоте линии L_α , позволило в рамках простой модели получить соответствующее данным наблюдений соотношение (6) между содержанием облаков и лучевой концентрацией нейтрального водорода в них. Как нам представляется, это может служить основанием для дальнейших исследований в указанном направлении.

Иерархическую структуру облаков, образующих L_α -лес, которая была установлена в работе [2], подтверждаюг результаты недавнего исследования [11], где показано, что линия поглощения, создаваемая отдельным облаком, является блсндой, образованной узкими слабыми линиями в результате крупномасштабных движений. Стохастичность поля скоростей связывается с предполагаемой в облаке турбулентностью. Более детально проблема образования линий поглощения L_α в среде со стохастическим полем скоростей была рассмотрена в работе [12]. В ней показано, что определяемые по эквивалентной ширине линии W значения лучевой концентрации $N(HI)$ могут различаться на один-два порядка, в зависимости от принимаемой величины корреляционной длины, т.е. расстояния по лучу зрения, на котором скорости движения существенно различны. Поэтому проблема изучения линий L_α и, соответственно, определения по ним лучевых концентраций $N(HI)$ должны решаться не путем стандартной процедуры с использованием кривой роста, а совместно с исследованием динамики среды, составляющей поглощающие облака. Вопрос о том, какой из двух подходов к проблеме, предлагаемый в данной статье или в [12], лучше соответствует реальной ситуации, остается открытым из-за отсутствия динамических моделей облаков.

Подчеркнем, что в данной статье рассматривалась возможность фрактальной структуры отдельных облаков. В работе [13] демонстрируется возможность того, что система L_α облаков обладает мультифрактальной структурой. Не исключено, что фрактальность отдельных облаков и всей системы каким-то образом связаны между собой. Здесь мы опять встречаемся с необходимостью исследования динамики догалактического газа на ранних стадиях эволюции Вселенной.

Астрономический институт Санкт-Петербургского
государственного университета, Россия

ON THE FRACTAL STRUCTURE OF CLOUDS
FORMING L_{α} -FOREST IN QSO SPECTRA

V.G.GORBATSKY

As it follows from the observational data the clouds forming L_{α} forest are of hierarchial structure. The suggestions is advanced that their structure is not only hierarchial but also it is fractal. On such base the well known from observations connection between column density of neutral hydrogen atoms $N(\text{HI})$ and concentration of clouds having this value of $N(\text{HI})$ is explained. The fractal dimension of clouds estimated from observational data and computations is $D = 2.5 \pm 0.2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.Г.Горбацкий, А.Б.Кириченко, С.П.Прохоров*, Астрон. ж., 73, №4, 1996.
2. *M.Pettini, R.W.Hunstead, L.J.Smith, D.P.Mar*, Mon. Notic. Roy. Astr. Soc., 246, 545, 1990.
3. *W.L.W.Sargent, P.J.Joung, A.Boksenberg, D.Tytler*, Astrophys. J. Suppl., 42, 41, 1980.
4. *A.Boksenberg*, ESO Workshop on QSO Absorbtion Lines, 1994, Garching, p. 26.
5. *R.F.Carswell, K.M.Lanzetta, H.S.Parnell, J.K.Webb*, Astron. J., 371, 36, 1991.
6. *G.M.Willinger, J.A.Baldwin, R.F.Carlswell, A.J.Cooke, C.I.Hazard, M.J.Irwin, R.G.McMahan, L.J.Storne-Lombarbi*, Astron. J., 428, 574, 1994.
7. *S.A.Levshakov*, Astron. J., 104, 950, 1992.
8. *S.Lovejoy*, Nature, 216, 185, 1982.
9. *E.Falgarone, J.L.Puget, M.Perault*, Astron. Astrophys., 257, 715, 1992.
10. *P.H.Coleman, L.Pietronero*, Phys. Rev., 213, 313, 1992.
11. *L.L.Cowie, A.Songalia, T.S.Kim, E.M.Hu*, Astron. J., 109, 1522, 1995.
12. *S.A.Levshakov, W.H.Kegel*, Mon. Notic. Roy. Astr. Soc., 278, 497, 1996.
13. *V.Carbhone, S.Savaglio*, Mon. Notic. Roy. Astr. Soc., 1996 (in press).

УДК: 524.726

СПЕКТРЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК И СПИРАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ПАР ГАЛАКТИК

В.Г.МАЛУМЯН

Поступила 28 августа 1996

Принята к печати 1 октября 1996

Показано, что среди изолированных спиральных галактик объекты с круглыми спектрами радиоизлучения встречаются значительно чаще, чем среди спиральных членов пар галактик. Это, наряду с некоторыми другими фактами, свидетельствует, что члены пар находятся в более активной фазе своей эволюции, чем изолированные галактики.

1. *Введение.* В ряде работ [1-5] показано, что галактики, являющиеся членами двойных систем и групп галактик, по сравнению с одиночными изолированными галактиками, обладают повышенным радио и инфракрасным излучением. Они по мощности излучения в эмиссионных линиях также превосходят изолированные галактики [6,7]. Согласно [8], чем теснее пара, тем, в среднем, выше мощность радиоизлучения ее членов.

Перечисленные выше и некоторые другие факты свидетельствуют в пользу того, что члены пар и групп галактик находятся в более активной фазе своей эволюции, чем одиночные галактики. С этой точки зрения интересно сравнить спектры радиоизлучения спиральных галактик в парах галактик и изолированных спиральных галактик.

К настоящему времени с помощью лучших радиотелескопов мира на разных частотах измерены плотности потоков радиоизлучения большого количества галактик, и полученные данные дают возможность исследовать их спектры радиоизлучения.

Используя данные, приведенные в работах [9-25], нам удалось построить спектры радиоизлучения 17 изолированных спиральных галактик из каталога Караченцевой [26] и 19 спиральных галактик из каталога двойных галактик Караченцева [27]. Спектры в основном строились в диапазоне 400-5000 МГц на основании измерений по крайней мере на трех частотах в этом интервале. В некоторых случаях спектры удавалось строить и в более широком диапазоне (например, в диапазоне 80-10700 МГц). Для всех галактик спектры радиоизлучения в широком интервале частот можно было представить одной прямой линией.

2. *Результаты сравнения.* Спектральные индексы радиоизлучения ($S \sim \nu^{-\alpha}$, где S - плотность потока излучения на частоте ν), вычисленные

нами, а также видимые звездные величины из [26] для изолированных спиральных галактик, приведены в табл. 1. Соответствующие данные для спиральных членов пар галактик из [27] приведены в табл. 2. Распреде-

Таблица 1

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК

NGC	m	α
772	11 ^m .3	1.02 $\pm$ 0.08
864	12.0	0.76 0.15
925	10.5	1.11 0.10
1156	12.0	0.76 0.02
2403	9.3	0.86 0.06
2841	9.9	0.85 0.10
2903	9.8	1.11 0.07
3344	11.1	0.50 0.06
3432	11.7	0.56 0.05
3521	10.1	0.88 0.04
3556	10.7	0.79 0.06
4826	8.9	0.57 0.08
5457	8.7	0.83 0.07
5678	12.1	1.01 0.03
6207	11.9	0.34 0.05
7316	13.7	> 1.01
7479	11.7	0.58 0.20

ления спектральных индексов радиоизлучения для спиральных членов пар и изолированных галактик показаны на рис. 1.

Средние и медианные спектральные индексы для изолированных галактик и членов пар равны, соответственно, $\langle \alpha \rangle = 0.80 \pm 0.05$, $\alpha_{\text{мед}} = 0.83$ и $\langle \alpha \rangle = 0.69 \pm 0.03$, $\alpha_{\text{мед}} = 0.72$.

Из рис. 1 видно, что среди изолированных спиральных галактик имеются пять объектов с $\alpha > 1.0$, ($29.4 \pm 13.2\%$), между тем среди спиральных членов пар нет ни одного объекта с таким крутым спектром радиоизлучения. Вероятность такого случайного отклонения около $4 \cdot 10^{-3}$. Среди изолированных галактик количество объектов с $\alpha > 0.80$ равно 9 ($52.9 \pm 17.6\%$), среди членов пар - 4 ($21.1 \pm 10.5\%$). (Если учесть также объекты, спектры которых построены с помощью потоков радиоизлучения только на двух частотах, то вышеуказанные результаты почти не меняются.)

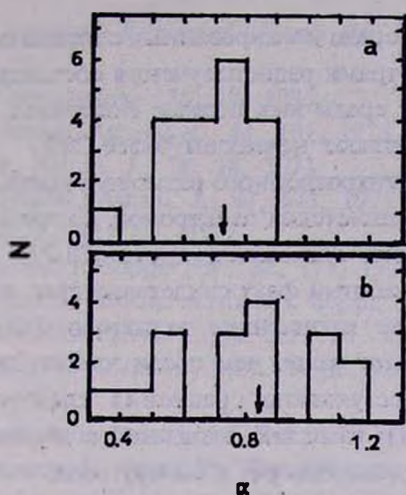


Рис. 1. Распределения спектральных индексов радиоизлучения: *a* - спиральные члены пар галактик; *b* - спиральные изолированные галактики. Вертикальными стрелками указаны медианные значения спектральных индексов радиоизлучения.

Таблица 2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СПИРАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ПАР ГАЛАКТИК

NGC	<i>m</i>	α
520	12 ^m .4	0.58 ± 0.07
2146	11.1	0.67 0.04
2798	12.9	0.67 0.04
2964	12.0	0.72 0.07
3031	8.1	0.56 0.06
3034	9.2	0.65 0.05
3166	11.2	0.72 0.05
3169	11.9	0.82 0.12
3227	12.2	0.60 0.04
3646	11.5	0.90 0.15
3690	11.8	0.59 0.05
3893	10.6	0.81 0.07
4151	11.2	0.72 0.03
4490	10.1	0.77 0.04
4631	9.8	0.79 0.04
4656	10.6	0.39 0.10
5194	8.8	0.84 0.05
5775	13.0	0.74 0.05
7469	13.0	0.64 0.03

3. *Выводы.* Итак, среди изолированных спиральных галактик объекты с очень крутыми спектрами радиоизлучения составляют заметную часть, а объектов с $\alpha > 0.80$ среди них больше половины. Среди спиральных членов пар они составляют немногим более 20%.

Согласно теории синхротронного радиоизлучения, вследствие энергетических потерь релятивистских электронов, со временем спектры излучения радиоисточников становятся круче [28,29]. Поэтому, по всей вероятности, вышеуказанный факт свидетельствует, что у изолированных галактик объекты, уже прошедшие активную фазу своей эволюции, встречаются значительно чаще, чем среди членов двойных галактик.

Таким образом, результаты сравнения спектров радиоизлучения спиральных галактик и галактик, входящих в двойные системы наряду с другими фактами, также говорят в пользу того, что спиральные члены пар галактик находятся в более активной фазе своей эволюции, чем одиночные галактики.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория, Армения

SPECTRA OF RADIO EMISSION OF ISOLATED SPIRAL GALAXIES AND SPIRAL MEMBERS OF PAIRS OF GALAXIES

V.H.MALUMIAN

It is shown that among isolated spiral galaxies the objects having steep spectra of radio emission occur significantly more often than among spiral members of double galaxies. This fact along with some other facts indicates, that the members of pairs of galaxies are in more active phase of their evolution than isolated galaxies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.T.Stocke*, *Astron. J.*, 83, 348, 1978.
2. *D.Alschuler*, *C.Pantoja*, *Astron. J.*, 89, 1531, 1984.
3. *В.Г.Малумян*, *Астрофизика*, 26, 311, 1987.
4. *E.Hummel*, *Astron. Astrophys.*, 96, 111, 1981.
5. *M.P.Haynes*, *T.Herter*, *Astron. J.*, 96, 504, 1988.
6. *R.C.Kennicutt*, *W.C.Keel*, *Astrophys. J.*, 279, 5, 1984.

7. *W.C.Keel, R.C.Kennikut, E.Hummel, J. van der Hulst*, *Astron. J.*, 90, 708, 1985.
8. *В.Г.Малуян*, *Астрофизика*, 25, 19, 1986.
9. *W.Huchtmeier*, *Astron. Astrophys.*, 44, 101, 1975.
10. *W.H.McCutcheon*, *Astron. J.*, 78, 18, 1973.
11. *M.P.Haynes, R.Sramek*, *Astron. J.*, 80, 673, 1975.
12. *R.Sramek*, *Astron. J.*, 80, 771, 1975.
13. *J.Sulentic*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 32, 171, 1976.
14. *I.M.Gioia, L.Gregorini*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 41, 329, 1980.
15. *J.Pfleiderer*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 28, 313, 1977.
16. *J.Pfleiderer, C.Durst, K.-H.Gebler*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 192, 635, 1980.
17. *E.Hummel*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 41, 151, 1980.
18. *J.J.Harnett*, *Australian J. Phys.*, 35, 321, 1982.
19. *F.P.Israel, J.M. van der Hulst*, *Astron. J.*, 88, 1736, 1983.
20. *I.M.Gioia, L.Gregorini, U.Klein*, *Astron. Astrophys.*, 116, 164, 1982.
21. *L.L.Dressel, J.J.Condon*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 36, 53, 1978.
22. *I.M.Gioia, G.Fabbiano*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 63, 771, 1987.
23. *J.J.Condon*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 65, 485, 1987.
24. *M.Dumke, M.Krause, R.Wielebinski, U.Klein*, *Astron. Astrophys.*, 302, 691, 1995.
25. *M.T.Adams, E.B.Ensen, J.T.Stocke*, *Astron. J.*, 85, 1010, 1980.
26. *В.Е.Караченцева*, *Сообщ. Спец. астрофиз. обсерв. АН СССР*, 8, 3, 1973.
27. *И.Д.Караченцев*, *Сообщ. Спец. астрофиз. обсерв. АН СССР*, 7, 3, 1972.
28. *Н.С.Кардашев, А.Д.Кузьмин, С.И.Сыроватский*, *Астрон. ж.*, 39, 216, 1962.
29. *К.И.Келлерманн*, в сб: "Нестационарные явления в галактиках", Изд. АН Арм. ССР, 1968, с. 227.

УДК: 524.6

ГРУППЫ ГАЛАКТИК. II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ЗНАЧЕНИЙ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

А.П.МАГТЕСЯН

Поступила 8 августа 1996

Принята к печати 25 сентября 1996

Для идентификации групп галактик изучен CG1 каталог Хукри и др. С этой целью использован измененный вариант перколяционного метода, ранее примененный Хукрой и Геллер. Основное отличие между нашим методом и методом Хукри и Геллер заключается в критерии выбора компаньонов. Для определения компаньонов галактик мы используем значение потенциала гравитационного поля. Такой подход физически более обоснован, чем использование расстояний между галактиками. Показано, что нет необходимости менять выборочные параметры E_0 и V_0 с расстоянием, чтобы учесть изменение наблюдаемой функции светимости галактик. Поэтому в нашем подходе для идентификации групп нет необходимости в использовании функции светимости галактик. Изучена зависимость основных характеристик выявленных групп от выборочных параметров. Определена область выборочных параметров, в которой характеристики групп наиболее слабо зависят от этих параметров. Группы галактик, выявленные по произвольно выбранным парам значений E_0 и V_0 из этих областей, можно считать практически реальными.

1. *Введение.* Хорошо известно, что подавляющее большинство галактик входит в состав систем галактик. По разным критериям бедные системы галактик были идентифицированы в работах [1-15] и др. В этих работах часто одни и те же галактики одними исследователями относились к одной группе, другими - к другой, третьи же вообще не включали их в состав групп и считали галактиками общего поля. Между тем вопрос о составе групп очень важен, особенно, для бедных групп. Например, исключение оптических членов группы может уменьшить ее вириальную массу и приблизить ее к фотометрической массе группы (см., например, [16,17]).

Выявление статистически "чистых" (свободных от оптических членов) и однородных выборок групп галактик, кроме решения проблемы вириальных масс, очень важно для изучения и других вопросов, таких как, например, зависимость характеристик галактик от окружения, роль первой по светимости галактик в группах и др., которые в конечном счете важны для выяснения эволюции галактик.

Таким образом, при выборе группы важно использовать четко определенные и объективные критерии.

Одна из первых, более или менее удачных попыток, была сделана Тернером и Готтом [10]. Они предложили выделить группы, исходя из поверхностной плотности галактик на небесной сфере.

Матерн [7] предлагает трехмерный иерархический метод группировки галактик, который в дальнейшем был развит Тулли [9] и Венником [11].

Общим недостатком иерархических методов группировки является то, что вероятность для данной галактики стать следующим объектом объединения зависит от предыдущего объединения, поскольку центр тяжести скопления, при каждом объединении, перемещается в направлении последнего объединенного объекта. Поэтому эти методы имеют некоторую тенденцию к выделению линейных структур.

Более предпочтительный, на наш взгляд, метод для выявления групп галактик предложили Хукра и Геллер [4], одним из достоинств которого является отсутствие тенденции к выделению линейных образований. Суть этого метода в следующем.

Из списка, ограниченного некоторой видимой звездной величиной выбирается произвольная галактика. В окрестности этой галактики по некоторым критериям выбираются соседи. Обнаруженные соседи считаются членами группы. Далее изучаются окрестности уже выбранных соседей и их соседи (обнаруженные по тем же критериям) также считаются членами группы. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут выявлены все члены группы.

Хукра и Геллер считают соседями те галактики, линейное расстояние между которыми в проекции на небесную сферу и разница лучевых скоростей которых меньше некоторых величин, зависящих от расстояния. Это необходимо для учета изменения наблюдаемой функции светимости галактик от расстояния. Такой выбор соседа имеет некоторые недостатки, которые отмечены нами в [18]. В указанной работе предлагаются новые, более обоснованные критерии выбора соседей для данной галактики, которые устраняют отмеченные выше недостатки. Напомним эти критерии.

2. Принципы идентификации. В [18] используется метод попарного соседства, предложенный в [4], с той разницей, что изменены критерии соседства.

Две галактики считаются соседями, если одна из них находится в сильном гравитационном поле другого:

$$\frac{\max(M_1, M_2)}{r_{1,2}} \geq \varphi,$$

где M_1 и M_2 - массы первой и второй галактики, соответственно, $r_{1,2}$ - расстояние между ними, φ - свободный параметр.

Поскольку нам не известно истинное расстояние между галактиками внутри групп, и мы вынуждены использовать проекцию этого расстояния на небесную сферу, то необходимо наложить также ограничение на разницу их лучевых скоростей. При этом принимается, что внутри групп нет зависимости скоростей галактик от их масс (что не противоречит

наблюдениям, см. [18]).

Если принять также, что масса галактики пропорциональна ее светимости, то условия соседства можно записать так:

$$\frac{\max(k_{T_1} L_1, k_{T_2} L_2)}{D_{1,2}} \geq E_0, \quad (1)$$

$$|V_1 - V_2| \leq V_0, \quad (2)$$

где k_{T_1} и k_{T_2} - коэффициенты, зависящие от морфологических типов галактик:

$$k_{T_i} = f(T_i)/f(S),$$

где $f(T_i)$ - отношение массы к светимости (M/L) для данного морфологического типа T_i , а $f(S)$ - аналогичная величина для спиральных галактик (т.е. $k(S) = 1$). Учитывая слабую зависимость величин M/L от морфологического типа галактики [19-21], для эллиптических и линзовидных галактик мы приняли $k_E = k_L = 1$ или 2, а для спиральных, нерегулярных, пекулярных и прочих морфологических типов принято $k_{T_i} = 1$. V_1 и V_2 - лучевые скорости первой и второй галактики, соответственно, L_1 и L_2 - их светимости, а $D_{1,2}$ - линейное расстояние между галактиками в проекции на небесную сферу:

$$D_{1,2} = \frac{V_1 + V_2}{H} \sin(d_{1,2}/2),$$

$d_{1,2}$ - угловое расстояние между ними.

Выше отмечено, что характеристики групп галактик зависят от принятого состава групп.

Если относительно групп или скоплений не сделано специальное модельное предположение, то в критериях идентификации групп присутствуют некоторые свободные параметры (например, параметры E_0 и V_0 в предложенных нами критериях), значения которых приходится выбирать. Обнаружение групп и их состав зависит от принятого значения этих параметров. Следовательно, важно не только найти физически обоснованные критерии для выявления групп, но также объективно оценить область значений свободных параметров, при которых выявленные группы будут наиболее реальными физическими системами.

Несмотря на применение четко определенных критериев идентификации групп галактик, в большинство вышеупомянутых работ, при выборе значений свободных параметров, входит некоторый субъективный момент.

Для выбора значений свободных параметров Хукрой и Геллер [4] был предложен объективный метод, который заключается в следующем: надо определить область свободных параметров, в которой средние характеристики групп наиболее слабо зависят от значений этих параметров.

Принимается, что в этой области выявленные группы будут наиболее реальными физическими ассоциациями.

В [2,4] вместо термина "свободные параметры" (free parameters) используется термин "выборочные параметры" (selection parameters).

В дальнейшем мы будем использовать последний термин.

3. *Определение величин E_0 и V_0 .* Если значения параметров E_0 и V_0 правильно выбраны, то средние характеристики групп (например, средняя дисперсия скоростей галактик в группах, среднее отношение массы к светимости, число выявленных систем и т. д.) при малых изменениях этих параметров должны меняться незначительно.

При определенных значениях E_0 и V_0 некоторая часть галактик избежит включения в группы и составит выборку "одинокых" галактик. При очень больших значениях E_0 и при очень малых значениях V_0 будут выявлены только наиболее плотные группы или их наиболее плотные части. Поэтому, в этом случае число выявленных систем будет меньше, а число "одинокых" галактик - больше. При очень малых E_0 и при очень больших V_0 галактики будут собираться в некоторые группы больших размеров. И, таким образом, в этом случае будет меньше как число выявленных систем, так и число "одинокых" галактик. При некоторых значениях E_0 и V_0 число выявленных систем будет максимальным. Как раз в окрестности максимума число выявленных систем будет наиболее слабо зависеть от E_0 и V_0 (это следует из математических соображений).

Таким образом, надо определить область $E_0^{(1)} \leq E_0 \leq E_0^{(2)}$, $V_0^{(1)} \leq V_0 \leq V_0^{(2)}$, внутри которой средние характеристики идентифицированных групп будут зависеть от E_0 и V_0 слабее, чем вне этой области. С целью определения этой области составлены списки групп галактик для целого набора значений выборочных параметров E_0 и V_0 .

Предложенный метод идентификации применен к списку галактик ярче $14^m.5$ с полными данными о лучевых скоростях [22]. Выборка охватывает следующие области неба:

$$1) \delta \geq 0^\circ, \quad b^{\text{II}} \geq 40^\circ;$$

$$2) \delta \geq -2.5^\circ, \quad b^{\text{II}} \leq -30^\circ.$$

Все необходимые величины, которые используются при идентификации групп, взяты из этого списка. Светимости галактик (в солнечных единицах) вычислены по формуле

$$L = 156.4 \cdot 10^{-0.4M}. \quad (3)$$

При определении абсолютных звездных величин M , вводились поправки за галактическое поглощение $(-0.25 \text{ cosec} |b^{\text{II}}|)$. При этом видимые

Таблица 1а

ЧИСЛО ВЫЯВЛЕННЫХ СИСТЕМ
ПРИ РАЗНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ E_0 И V_0
для $n \geq 3$ - верхняя строка, для $n \geq 2$ - нижняя строка

Для случая $k_E = k_L = 1$.

V_0 (км/с) $E_0 \left(\frac{M_\odot f_s}{Mpc f_\odot} \right)$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1.0·10 ¹⁰	142 277	138 255	138 247	132 239					
1.5·10 ¹⁰	137 304	135 284	140 288	138 279					
2.0·10 ¹⁰	123 308	122 295	127 296	128 295					
2.5·10 ¹⁰	114 289	120 281	118 276	119 281	124 280	124 278	126 276	127 274	128 273
3.0·10 ¹⁰	95 268	105 267	105 262	101 265	109 265				
3.5·10 ¹⁰	86 245	100 252	99 256	96 253					
4.0·10 ¹⁰	72 235	92 238	89 236	89 241					
4.5·10 ¹⁰		80 233	82 232						

Таблица 1б

Для случая $k_E = k_L = 2$.

V_0 (км/с) $E_0 \left(\frac{M_\odot f_s}{Mpc f_\odot} \right)$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1.0·10 ¹⁰		124 222	117 205						
1.5·10 ¹⁰		126 251	126 245						
2.0·10 ¹⁰		137 280	140 275						
2.5·10 ¹⁰	134 301	137 286	139 282	135 276	134 278	132 278			
3.0·10 ¹⁰	126 288	130 278	132 277	131 274	136 277	134 279	135 281	137 278	138 277
3.5·10 ¹⁰		128 274	123 270	125 271					
4.0·10 ¹⁰		114 264	109 258						
4.5·10 ¹⁰		104 254	101 250						

звездные величины галактик не переводились в другие системы по ряду причин, оговоренных в [22]. Постоянная Хаббла в данной работе принята $H = 100$ км/с Мпк. Отметим, что процедура выбора значений параметров E_0 и V_0 такова, что систематические отклонения в видимых звездных величинах, а также изменение значения постоянной Хаббла, не могут повлиять на окончательный список групп галактик.

При определении искомой области $E_0^{(1)} \leq E_0 \leq E_0^{(2)}$, $V_0^{(1)} \leq V_0 \leq V_0^{(2)}$, использованы гелиоцентрические лучевые скорости галактик, приведенные в [22]. Коррекция лучевых скоростей за движение Солнца относительно Местной системы галактик и относительно центра скопления в созвездии Дева не может значительно повлиять на определение этой области, поскольку выборка охватывает довольно большую область неба и довольно большую глубину пространства. Сказанное проверяется ниже.

Расстояния галактик определены по закону Хаббла. При этом, когда лучевая скорость галактики меньше или равна 300 км/с, она принята равной 238 км/с. Эта величина соответствует среднему расстоянию объектов, равномерно распределенных в объеме, ограниченном значением $V = 300$ км/с.

Для определения значений выборочных параметров $E_0^{(1)}$, $E_0^{(2)}$ и $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$, нами исследованы два случая: "а" - $k_E = k_L = 1$ и "б" - $k_E = k_L = 2$.

В табл. 1а и 1б приведено число идентифицированных систем, имеющих по крайней мере три (первая строка) и два (вторая строка) члена, в зависимости от выборочных параметров E_0 и V_0 . В данной работе, когда речь идет о количестве членов систем, всегда подразумевается число галактик с видимой звездной величиной не слабее $14^m.5$. Здесь и далее индекс "а" относится к случаю $k_E = k_L = 1$, а индекс "б" - к случаю $k_E = k_L = 2$.

Анализ табл. 1а и 1б показывает, что число выявленных систем слабо зависит от V_0 , и в случае "а" достигает своего максимума при $E_0 = 2.0 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк⁻¹, а в случае "б" - при $E_0 = 2.5 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк⁻¹ (для систем, имеющих больше одного члена). При рассмотрении систем, которые имеют больше двух членов, эти величины несколько меньше. Сказанное более наглядно представлено на рис. 1, где для систем, имеющих по крайней мере два члена, для случая "б" приведены зависимости числа выявленных систем от параметра E_0 . На рисунке эти зависимости представлены для случаев $V_0 = 300$ км/с и $V_0 = 400$ км/с.

На рис. 1 и 2-5 крестики соответствуют случаю, когда гелиоцентрические лучевые скорости галактик исправлены за вращение Галактики и за движение Местной системы галактик в направлении скопления в Деве по формулам:

$$V_c = V + \Delta V_1 + \Delta V_2,$$

$$\Delta V_1 = 300 \sin l_i^\Pi \cos b_i^\Pi,$$

$$\Delta V_2 = 300 (\sin \delta_V \sin \delta_i + \cos \delta_V \cos \delta_i \cos (\alpha_i - \alpha_V)),$$

где α_V и δ_V - экваториальные координаты центра скопления в Деве, α_i , δ_i , l_i^Π , b_i^Π - экваториальные и галактические координаты i -ой галактики.

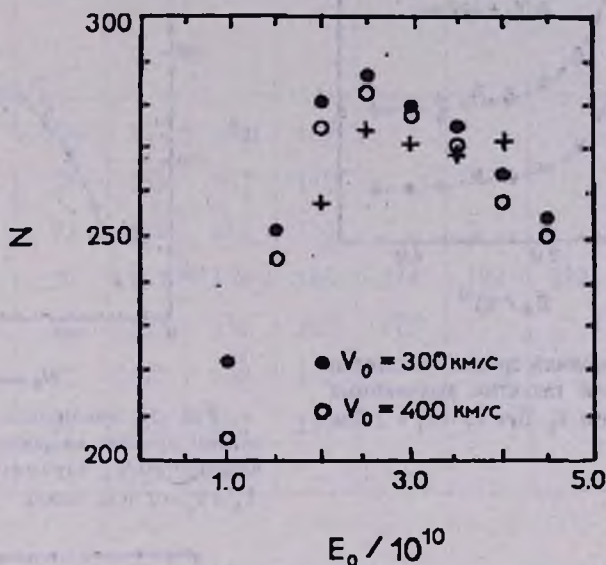


Рис. 1. Зависимость числа выявленных систем от выборочного параметра E_0 . Для случая $k_E = k_L = 2$. Здесь и на последующих рисунках крестиками отмечены данные для случаев, когда лучевые скорости галактик исправлены за движения Солнца (см. текст).

На рис. 1, 2 и 4 крестики соответствуют случаю $V_0 = 400$ км/с, а на рис. 3 и 5 - случаю $E_0 = 3.0 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк $^{-1}$.

Таким образом, величины $E_0^{(1)}$ и $E_0^{(2)}$ должны быть близки к $E_0 = 2.0 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк $^{-1}$ в случае "а" и $E_0 = 2.5 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк $^{-1}$ в случае "б".

Рассмотрим зависимость средних дисперсий лучевых скоростей галактик групп от величин E_0 и V_0 .

В табл. 2а и 2б для разных E_0 и V_0 приведены значения средних дисперсий лучевых скоростей галактик по выявленным группам, имеющим по крайней мере три члена.

$$\sigma_V = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \langle V \rangle)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где V_l - лучевая скорость l -го члена данной группы, n - число членов в этой группе, $\langle V \rangle$ - средняя лучевая скорость группы.

При увеличении E_0 сначала наблюдается уменьшение средней дисперсии лучевых скоростей галактик выявленных групп, а затем, начиная

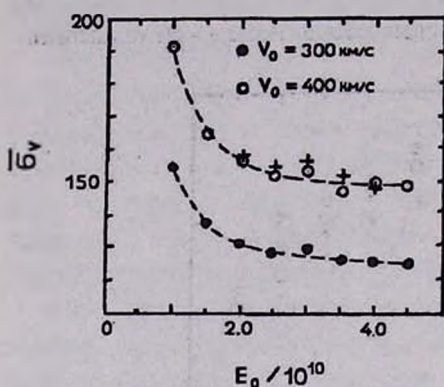


Рис. 2. Зависимость средней дисперсии лучевых скоростей галактик выявленных систем от параметра E_0 . При $k_E = k_L = 2$ (см. текст).

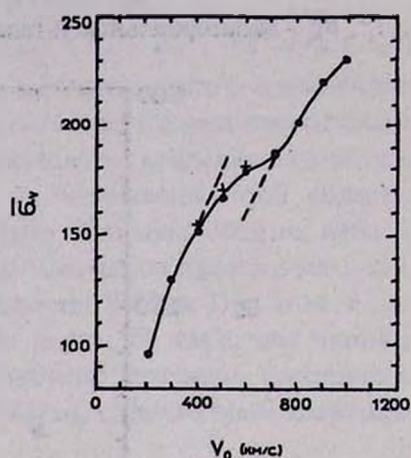


Рис. 3. Зависимость средней дисперсии лучевых скоростей галактик от выборочного параметра V_0 . При $k_E = k_L = 2$ (см. текст).

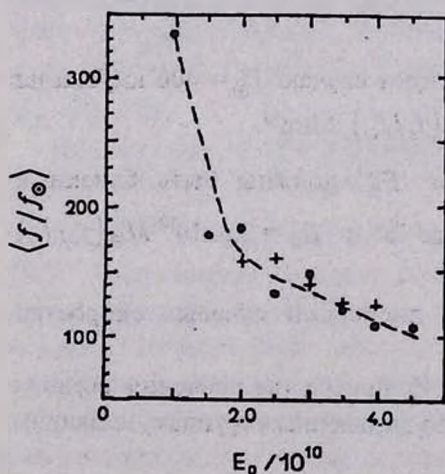


Рис. 4. Зависимость средней величины отношений массы к светимости выявленных систем от параметра E_0 . При $k_E = k_L = 2$ (см. текст).

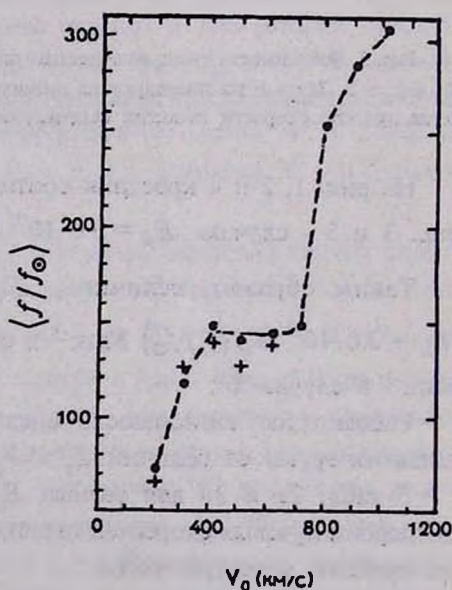


Рис. 5. Зависимость средней величины отношений массы к светимости выявленных систем от параметра V_0 . При $k_E = k_L = 2$ (см. текст).

Таблица 2а

СРЕДНЯЯ ДИСПЕРСИЯ ЛУЧЕВЫХ СКОРОСТЕЙ ГАЛАКТИК
ВЫЯВЛЕННЫХ СИСТЕМ С $n \geq 3$ ЧЛЕНАМИ ПРИ
РАЗНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ E_0 И V_0

Для случая $k_E = k_L = 1$.

V_0 (км/с) $E_0 \left(\frac{M_\odot f_S}{Mpc f_\odot} \right)$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$1.0 \cdot 10^{10}$	104	137	167	194					
$1.5 \cdot 10^{10}$	98	131	153	179					
$2.0 \cdot 10^{10}$	93	128	155	176					
$2.5 \cdot 10^{10}$	90	122	149	163	174	189	212	228	231
$3.0 \cdot 10^{10}$	91	125	150	163	179				
$3.5 \cdot 10^{10}$	92	127	148	162					
$4.0 \cdot 10^{10}$	88	123	142	157					
$4.5 \cdot 10^{10}$		126	150						

Таблица 2б

Для случая $k_E = k_L = 2$.

V_0 (км/с) $E_0 \left(\frac{M_\odot f_S}{Mpc f_\odot} \right)$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$1.0 \cdot 10^{10}$		154	192						
$1.5 \cdot 10^{10}$		137	164						
$2.0 \cdot 10^{10}$		130	156						
$2.5 \cdot 10^{10}$	97	128	151	169	174	186			
$3.0 \cdot 10^{10}$	95	129	153	168	179	185	201	219	231
$3.5 \cdot 10^{10}$		126	147	161					
$4.0 \cdot 10^{10}$		125	148						
$4.5 \cdot 10^{10}$		124	148						

с $E_0 = (2.0 - 2.5) \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк⁻¹, средняя дисперсия скоростей галактик практически остается постоянной. Нагляднее это видно из рис. 2, где для случая "б" приведены зависимости средней дисперсии лучевых скоростей галактик выявленных групп от E_0 при $V_0 = 300$ км/с и $V_0 = 400$ км/с. Это означает, что при $E_0 = (2.0 - 2.5) \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк⁻¹ число ложных членов (число галактик, которые физически не связаны с группами) мало, и по мере увеличения E_0 мы все больше и больше будем терять истинные периферийные члены групп.

При увеличении V_0 средняя дисперсия скоростей галактик выявленных групп сначала быстро растет (постепенно выявляются новые члены групп), а затем в области значений $400 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 700 \text{ км/с}$ средняя дисперсия лучевых скоростей меняется сравнительно медленно. Начиная с $V_0 = 700$ км/с, средняя дисперсия скоростей снова быстро растет. Это хорошо видно по рис. 3, где приведена зависимость средней дисперсии лучевых скоростей от параметра V_0 при $E_0 = 3.0 \cdot 10^{10} M_\odot (f_s/f_\odot)$ Мпк⁻¹ (случай "б", точки). Из приведенных зависимостей можно заключить, что при $V_0 < 400$ км/с мы теряем некоторую часть истинных членов групп, при $400 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 700 \text{ км/с}$ группы практически не будут иметь ложных членов, а при $V_0 > 700$ км/с группы "загрязнены" ложными членами.

Аналогичная картина наблюдается и в том случае, когда вместо (4) используется средняя дисперсия скоростей, взвешенная по массам:

$$\sigma'_V = \left[\frac{\sum_{i=1}^n k_{T_i} L_i \sum_{i=1}^n k_{T_i} L_i V_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n k_{T_i} L_i V_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n (k_{T_i} L_i)^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

Посмотрим, как ведут себя средние величины отношений массы к светимости выявленных групп при изменении выборочных параметров E_0 и V_0 . Значения $\langle f/f_\odot \rangle$, средние по группам, с числом членов больше двух, при разных E_0 и V_0 приведены в табл. 3а и 3б. Масса групп и их полная светимость оценены по следующим формулам:

$$M = 2.32 \cdot 10^8 R_V (\sqrt{3} \sigma'_V)^2, \quad (6)$$

$$R_V = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{T_i} L_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} k_{T_i} k_{T_j} L_i L_j / R_{i,j} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{obs}} \frac{\int_{L_c}^{\infty} L \Phi(L) dL}{\int_{L_c}^{\infty} L \Phi(L) dL}, \quad (8)$$

где M - масса группы в солнечных единицах; σ'_v - взвешенная по массам дисперсия лучевых скоростей галактик группы, которая определяется по (5); R_v - вириальный радиус группы; L_i - светимость i -ой галактики в группе. n - число галактик в группе; $R_{i,j}$ - проекция расстояния на небесную сферу между i -ой и j -ой галактиками в Мпк; k_{T_i}, k_{T_j} - те же коэффициенты, которые входят в (1); L_{tot} - полная светимость группы; L_{obs} - суммарная светимость галактик с видимыми звездными величинами $m \leq 14^m.5$; $\Phi(L)$ - составная функция светимости галактик групп, имеющих, по крайней мере, три члена. Для каждой пары E_0 и V_0 $\Phi(L)$ определялась по полученным членам групп, по методу [23]. L_{min} - минимальная светимость галактик, которая принята $9 \cdot 10^7 L_{\odot}$ согласно [24]. L_c - светимость самой слабой галактики ($m = 14^m.5$), которая еще включена в выборку, на расстоянии данной группы. Светимости галактик определялись по формуле (3).

На рис. 4 приведена зависимость величин $\langle f/f_{\odot} \rangle$ от E_0 , а на рис. 5 - зависимость этих же величин от V_0 . Изучение табл. 2а, 2б, 3а, 3б, а также рис. 4 и 5 показывает, что зависимости $\langle f/f_{\odot} \rangle$ от величин E_0 и V_0 подобны зависимостям средних дисперсий лучевых скоростей галактик от тех же величин. Следует отметить, что в диапазоне $300 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 700 \text{ км/с}$, средние величины $\langle f/f_{\odot} \rangle$ практически не зависят от V_0 .

Результат не меняется, когда при вычислении масс галактик учитываются также ошибки измерений лучевых скоростей.

Таким образом, можно указать область выборочных параметров E_0 и V_0 , в которой средняя дисперсия лучевых скоростей, среднее отношение массы к светимости, а также число выявленных систем наиболее слабо зависят от их значений:

Случай "а": $k_E = k_L = 1$.

$$2.0 \cdot 10^{10} M_{\odot} (f_s/f_{\odot}) \text{ Мпк}^{-1} \leq E_0 \leq 2.5 \cdot 10^{10} M_{\odot} (f_s/f_{\odot}) \text{ Мпк}^{-1}, \quad (9)$$

$$400 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 600 \text{ км/с}.$$

Случай "б": $k_E = k_L = 2$.

$$2.5 \cdot 10^{10} M_{\odot} (f_s/f_{\odot}) \text{ Мпк}^{-1} \leq E_0 \leq 3.0 \cdot 10^{10} M_{\odot} (f_s/f_{\odot}) \text{ Мпк}^{-1}, \quad (10)$$

$$400 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 600 \text{ км/с}.$$

Таблица 3а

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ МАССЫ К СВЕТИМОСТИ
ВЫЯВЛЕННЫХ СИСТЕМ С $n \geq 3$ ЧЛЕНАМИ ПРИ
РАЗНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ E_0 И V_0

Для случая $k_E = k_L = 1$.

V_0 (км/с)	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$E_0 \left(\frac{M_\odot f_S}{\text{Мpc } f_\odot} \right)$									
$1.0 \cdot 10^{10}$	96	138	220	305					
$1.5 \cdot 10^{10}$	98	115	145	208					
$2.0 \cdot 10^{10}$	98	115	147	171					
$2.5 \cdot 10^{10}$	69	117	123	121	133	157	267	297	297
$3.0 \cdot 10^{10}$	65	118	138	122	130				
$3.5 \cdot 10^{10}$	52	109	121	131					
$4.0 \cdot 10^{10}$	45	89	102	133					
$4.5 \cdot 10^{10}$		87	112						

Таблица 3б

Для случая $k_E = k_L = 2$.

V_0 (км/с)	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$E_0 \left(\frac{M_\odot f_S}{\text{Мpc } f_\odot} \right)$									
$1.0 \cdot 10^{10}$		190	334						
$1.5 \cdot 10^{10}$		147	179						
$2.0 \cdot 10^{10}$		128	185						
$2.5 \cdot 10^{10}$	85	130	134	136	139	155			
$3.0 \cdot 10^{10}$	72	119	148	142	145	148	254	285	303
$3.5 \cdot 10^{10}$		110	122	137					
$4.0 \cdot 10^{10}$		95	109						
$4.5 \cdot 10^{10}$		93	107						

Таблица 4а

ЧИСЛО И СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ПРОЦЕНТ ЧЛЕНОВ
ВЫЯВЛЕННЫХ СИСТЕМ С $n \geq 3$ ЧЛЕНАМИ ПРИ
РАЗНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ E_0 И V_0

Для случая $k_E = k_L = 1$.

V_0 (км/с)	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$E_0 \left(\frac{M_\odot f_s}{\text{Мpc } f_\odot} \right)$									
1.0·10 ¹⁰	1264 53%	1421 59%	1512 63%	1569 65%					
1.5·10 ¹⁰	950 40%	1137 47%	1187 49%	1249 52%					
2.0·10 ¹⁰	735 31%	879 37%	971 40%	1021 43%					
2.5·10 ¹⁰	672 25%	748 31%	824 34%	871 36%	911 38%	940 39%	966 40%	980 41%	994 41%
3.0·10 ¹⁰	507 21%	638 27%	724 30%	761 32%	806 34%				
3.5·10 ¹⁰	436 18%	566 24%	641 27%	679 28%					
4.0·10 ¹⁰	377 16%	507 21%	571 24%	616 26%					
4.5·10 ¹⁰		443 18%	515 21%						

Таблица 4б

Для случая $k_E = k_L = 2$.

V_0 (км/с)	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$E_0 \left(\frac{M_\odot f_s}{\text{Мpc } f_\odot} \right)$									
1.0·10 ¹⁰		1657 69%	1740 72%						
1.5·10 ¹⁰		1133 56%	1428 59%						
2.0·10 ¹⁰		1129 47%	1216 51%						
2.5·10 ¹⁰	818 34%	966 40%	1042 43%	1092 45%	1113 46%	1131 47%			
3.0·10 ¹⁰	712 30%	853 36%	937 39%	987 41%	1018 42%	1029 43%	1049 44%	1072 45%	1087 45%
3.5·10 ¹⁰		771 32%	842 35%	891 37%					
4.0·10 ¹⁰		684 28%	759 32%						
4.5·10 ¹⁰		616 26%	688 29%						

Группы, выявленные по описанному выше методу и по произвольно выбранным парам значений параметров E_0 и V_0 из областей (9) и (10), будут практически реальными физическими системами.

Следует отметить, что число галактик в реальных группах с числом членов ≥ 3 составляет 35-45% от общего числа ($=2401$) галактик выборки (в то время как в [2] это число равно 60%). Это хорошо видно из табл. 4а и 4б, где для различных значений E_0 и V_0 приведены число и соответствующий процент галактик, входящих в системы с числом членов больше двух. Из данных табл. 1а и 1б можно вычислить, что число галактик, входящих в реальные двойные системы, составляет примерно 12-13% объема выборки, что согласуется с [2].

4. *Заключение.* Как отмечено выше, в данной работе для идентификации групп галактик используется метод "попарного соседства", предложенный Хукрой и Геллер [2,4]. Но, поскольку использованные этими авторами критерии выбора соседей имеют некоторые недостатки [18], нами предложены новые принципы, которые устраняют эти недостатки.

В наших условиях соседства (1) и (2) присутствуют свободные параметры E_0 и V_0 . Обнаружение групп и их состав зависят от принятого значения этих параметров, которые следует выбирать таким образом, чтобы выявленные группы оказались физически реальными. Подробно изучена зависимость основных характеристик групп от этих параметров и найдены области $E_0^{(1)} \leq E_0 \leq E_0^{(2)}$, $V_0^{(1)} \leq V_0 \leq V_0^{(2)}$, ((9) и (10)), в которых характеристики групп сравнительно слабо зависят от них. Группы галактик, выявленные по любым парам значений E_0 и V_0 из этих областей, можно считать практически реальными.

Отметим основные преимущества критериев отбора соседей, предложенных нами, перед критериями в [4].

1. Они физически более обоснованы, поскольку при отборе соседних галактик учитывается гравитационное взаимодействие между ними, а также наблюдательный факт о независимости скоростей галактик от их масс.

2. Отпадает необходимость менять параметры E_0 и V_0 с расстоянием, с тем, чтобы учесть изменения наблюдаемой функции светимости галактик, и поэтому при идентификации групп нет необходимости в использовании функции светимости галактик.

3. Области (9) и (10) значений параметров E_0 и V_0 практически не зависят от предела полноты выборки по звездной величине.

Отметим, что Хукра и Геллер свой метод применили к двум выборкам галактик [2,4], ограниченным разными видимыми звездными величинами, и при этом в каждом случае использовали разные выборочные параметры. На это обратил внимание также Венник [11].

Пункты 2 и 3 прямое следствие того, что при идентификации групп по предложенным нами критериям решающую роль играют яркие галактики (см. [18]).

Автор благодарен Э.Е.Хачикяну за ценные замечания и дискуссию, а также В.М.Магтесян за ввод каталога [22] на магнитную ленту.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория, Армения

GROUPS OF GALAXIES. II. DETERMINATION OF VALUES OF SELECTION PARAMETERS

A.P.MAHTESSIAN

The CfA1 Catalogue of Huchra et al. was examined for identification of groups of galaxies. For that purpose the variants of percolation-type method previously applied by Huchra & Geller were used. The main difference between our method and that suggested by Huchra and Geller is due to the selection criteria of companions. To define the companion galaxies we used the value of potential of the gravitational field. This approach is physically more grounded than the utilization of separation between pairs of galaxies. It is shown that it isn't necessary to change selection parameters E_0 and V_0 with distance in order to account changes of observed luminosity function of galaxies. So, it isn't necessary to use the luminosity function of galaxies for the identification of the groups in scope of our approach. Dependence of main characteristics of groups from selection parameters are investigated. Intervals of selection parameters in which the group characteristics are less sensitive to those parameters are determined. The groups of galaxies revealed by any pair of E_0 and V_0 values from these intervals may be considered as practically real groups.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G.De Vaucouleurs*, in "Galaxies and the Univers", ed. A.Sandage, M.Sandage and J.Kristian (Chicago: University of Chicago Press), p. 557, 1975.
2. *M.J.Geller, J.P.Huchra*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **52**, 61, 1983.
3. *E.Holmberg*, *Annals of the Observ. of Lund*, no. 6, 1, 1937.
4. *J.P.Huchra, M.J.Geller*, *Astrophys. J.*, **257**, 423, 1982.

5. *M.L.Humason, N.U.Mayall, A.R.Sandage*, *Astron. J.*, 61, 97, 1956.
6. *И.Д.Караченцев*, *Проблемы космической физики*, 5, 201, 1970.
7. *J.Matene*, *Astron. Astrophys.*, 63, 401, 1978.
8. *A.Sandage, G.A.Tamman*, *Astrophys. J.*, 196, 313, 1975.
9. *R.B.Tully*, *Astrophys. J.*, 237, 390, 1980.
10. *E.L.Turner, J.R.Gott*, *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, 32, 409, 1976.
11. *J.Vennik*, *Tartu Astrofuus. Obs. Teated*, 73, 3, 1984.
12. *Б.А.Воронцов-Веляминов*, *Атлас и каталог 356 взаимодействующих галактик* (изд. МГУ), 1959.
13. *E.Gourgoulhon, P.Chamaraux, P.Fouque*, *Astron. Asrtrophys.*, 255, 69, 1992.
14. *R.Nolthenius*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 85, 1, 1993.
15. *A.M.Garcia*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 100, 47, 1993.
16. *I.D.Karachentsev*, in the "Large scale Structure of the Universe", IAU Symposium No 79, ed. M.S.Longair and J.Einasto (Boston, Reidel), p. 11, 1978.
17. *R.B.Tully, J.R.Fisher*, in "Proceedings of the third European Astronomical Meeting", ed. E.K.Kharadze (Tbilisi), p. 481, 1976.
18. *А.П.Магтесян*, *Астрофизика*, 28, 257, 1988.
19. *S.M.Faber, J.S.Gallagher*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 17, 135, 1979.
20. *И.Д.Караченцев*, *Астрофизика*, 16, 217, 1980.
21. *L.Y.Schweizer*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 64, 427, 1987.
22. *J.Huchra, M.Davis, D.Latham, J.Tonry*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 52, 89, 1983.
23. *В.Ю.Теребуж*, *Астрофизика*, 16, 45, 1980.
24. *M.Mezzetti, A.Pisani, G.Giuricin, F.Mardirossian*, *Astron. Astrophys.*, 143, 188, 1985.

УДК: 524.354.4+524.4

О СВЯЗИ ПУЛЬСАРОВ И ЗВЕЗДНЫХ АССОЦИАЦИЙ

Т.Г.МДЗИНАРИШВИЛИ

Поступила 4 октября 1996

Принята к печати 24 октября 1996

На основе современных данных пульсаров и звездных ассоциаций исследовано их пространственное распределение в окрестности Солнца. Распределение молодых пульсаров и звездных ассоциаций указывает на фрагменты спиральной структуры Галактики. Близкое пространственное распределение молодых пульсаров и звездных ассоциаций можно считать подтверждением гипотезы о том, что пульсары рождаются в звездных ассоциациях.

1. *Введение.* По современному представлению пульсары являются остатками вспышек сверхновых звезд II типа. Известно, что звезды, вспыхивающие как сверхновые II типа, это молодые, очень массивные объекты. Когда они находились на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга-Рессела, то представляли собой звезды спектральных классов O и B [1]. Последние, в свою очередь, в основном сосредоточены в O-ассоциациях [2]. Из этого следует, что пульсары должны рождаться в ассоциациях.

Изучение собственных движений и межзвездной сцинтилляции пульсаров показало, что они имеют большие пространственные скорости в порядка 100 км/с [3,4]. Так как пульсары должны рождаться в звездных ассоциациях, то молодые пульсары, возраст которых $\tau < 2 \cdot 10^6$ лет, должны вылетать из места их рождения на расстоянии нескольких сот парсеков и оставаться еще вблизи ассоциаций, в спиральных рукавах Галактики. Некоторое подтверждение этого факта было найдено в работах [5,6]. В этих работах, для определения местоположения пульсаров, использовались расстояния пульсаров, приведенные в [7,8]. В 1993г. вышел новый каталог 558 пульсаров, в котором заново определены расстояния известных пульсаров [9]. Новые расстояния значительно отличаются от ранее принятых. Большинство пульсаров вблизи 1.5 кпк от Солнца по старым каталогам теперь почти вдвое отдалены. По этой причине представляет интерес изучение распределения молодых пульсаров в Галактике и его связь со звездными ассоциациями.

2. *Использованный материал.* Для представления распределения O-ассоциаций в окрестности Солнца был использован каталог Хамфриз [10]. В каталоге приведены расстояния и галактические координаты звездных ассоциаций и тех звездных скоплений, членами которых являются голубые сверхгиганты. Для каждой ассоциации определены

границы по галактической долготе l и широте b . Для членов ассоциаций определены индивидуальные фотометрические модули расстояния по формуле

$$V - M_V = 5 \lg r - 5 + A_V, \quad (1)$$

где V - звездная величина в цвете V , M_V - абсолютная величина, A_V - межзвездное поглощение, r - расстояние.

Расстояния до звездных ассоциаций определяются усреднением индивидуальных расстояний звезд - членов ассоциаций. Данные каталога дают возможность изучить распределение звездных ассоциаций в радиусе 4 кпк в окрестности Солнца.

Для изучения распределения пульсаров в окрестности Солнца был использован каталог Тейлора, Манчестера и Лайна [9], в котором приведены все основные характеристики известных 558 пульсаров. Каталог доступен для компьютерной обработки и обновляется после получения новых наблюдательных данных.

Расстояния до пульсаров определяются из формулы

$$DM = \int_0^d n_e ds, \quad (2)$$

где DM - мера дисперсий, непосредственно наблюдаемая величина, которая на практике определяется измерением запаздывания принимаемых импульсов на двух или более частотах. Так как радиочастоты и время запаздывания можно измерить с большой точностью, то для большинства пульсаров DM известно с точностью до нескольких процентов. n_e - плотность свободных электронов в межзвездной среде вдоль луча зрения. Установление значения n_e является основной трудностью в проблеме определения расстояний d до пульсаров. В каталоге расстояния пульсаров определены на основе модели распределения свободных электронов Тейлора и Кордеса [11]. Оценены случайные ошибки расстояний, которые в общем случае зависят от направления луча зрения до пульсара.

Для поставленной задачи из каталога определялись возраст пульсаров τ , галактические координаты l и b . Чтобы сопоставить распределение пульсаров с распределением ассоциаций, можно ограничиться изучением пульсаров в радиусе 4 кпк от Солнца.

3. Анализ данных. При изучении пространственной структуры Галактики по некоторым объектам, решающую роль играет точность определения расстояний до них, так как в большинстве случаев координаты известны с достаточной точностью.

Как известно, ассоциации расположены вблизи галактической плоскости. Рассмотрим распределение проекций О-ассоциаций в плоскости ху Галактики. К этому вопросу можно подойти двумя путями.

1. Зная индивидуальные расстояния и координаты звезд-членов ассоциаций, можно построить картину распределения в плоскости x, y .

2. Используя оценки расстояний до ассоциаций и координаты, можно построить аналогичную картину. В первом случае получаются лучеобразные структуры с центром на Солнце, а во втором можно различить классические филаменты спиральной структуры Галактики. Это различие можно объяснить низкой точностью определения расстояний до индивидуальных звезд, которые определяются по формуле (1) и в лучшем случае имеют точность 30%. Во втором случае расстояния до ассоциаций получаются путем усреднения расстояний индивидуальных звезд и точность повышется приблизительно на $\sqrt{n}$ [12].

По этой причине, для построения картины распределения пульсаров в плоскости Галактики, мы ограничились только теми пульсарами, расстояния до которых известны с наибольшей точностью. Для каталога Тейлора, Манчестера и Лайна эта точность - 25% от расстояния.

Число молодых пульсаров с $\tau < 2 \cdot 10^6$ лет, имеющих наиболее точные расстояния в радиусе 4 кпк от Солнца - 44.

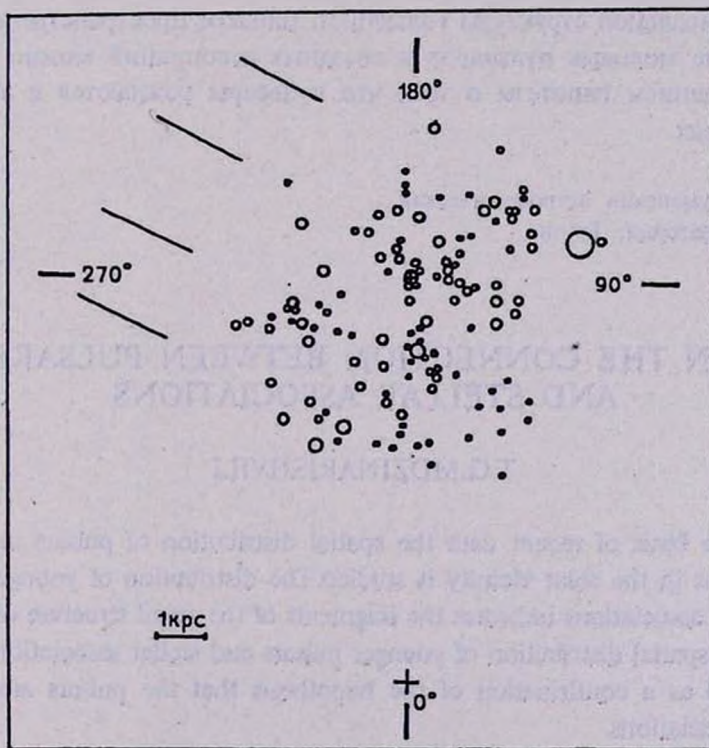


Рис. 1. Картина распределения молодых пульсаров (точки) и звездных ассоциаций (кружочки) в плоскости Галактики.

На рис. 1 представлено распределение пульсаров и звездных ассоциаций. Центр Галактики расположен на расстоянии 8.5 кпк. Картина совместного распределения пульсаров и звездных ассоциаций дает возможность различить четыре фрагмента спиральной структуры. Отметим, что так называемый рукав-Ориона-Лебеда считается ответвлением рукава Стрельца и не входит в классическую модель спиральной структуры [11].

Как отмечалось, на рис. 1 нанесены не все пульсары в данной окрестности Солнца, а только часть с наилучшими расстояниями.

Известно, что из-за эффекта диаграммы направленности излучения, часть пульсаров вообще не наблюдается. С другой стороны, из-за эффекта межзвездного поглощения не видны все ассоциации. Несмотря на это, полученная картина определенно указывает на связь пульсаров и звездных ассоциаций и замечательна тем, что первые наблюдаются в радиодиапазоне, а вторые - в оптике.

Распределение по z координате тоже указывает на то, что молодые пульсары, как и ассоциации, расположены вблизи плоскости Галактики.

4. *Выводы.* Распределение молодых пульсаров, возраст которых $\tau < 2 \cdot 10^6$ лет и О-ассоциаций в окрестности Солнца указывает на фрагменты спиральной структуры Галактики. Близкое пространственное распределение молодых пульсаров и звездных ассоциаций можно считать подтверждением гипотезы о том, что пульсары рождаются в звездных ассоциациях.

Абастуманская астрофизическая
обсерватория, Грузия

ON THE CONNECTION BETWEEN PULSARS AND STELLAR ASSOCIATIONS

T.G.MDZINARISHVILI

On the basis of recent data the spatial distribution of pulsars and stellar associations in the solar vicinity is studied. The distribution of younger pulsars and stellar associations indicates the fragments of the spiral structure of Galaxy. The close spatial distribution of younger pulsars and stellar associations can be considered as a confirmation of the hypothesis that the pulsars are born in stellar associations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И.С.Шкловский*, Звезды: их рождение, жизнь и смерть, Наука, М., 1984, с. 306.
2. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., 26, 3, 1949.
3. *J.H.Taylor, D.R.Stinebring*, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 24, 285, 1986.
4. *J.M.Cordes*, Astrophys. J., 183, 311, 1986.
5. *A.del Romero, J.Gomez-Gonzales*, Astron. Astrophys., 104, 83, 1981.
6. *H.Schild, A.Maeder*, Astron. Astrophys., 143, L7, 1985.
7. *R.N.Manchester, J.H.Taylor*, Astrophys. J., 86, 1953, 1981.
8. *A.G.Lyne, R.N.Manchester, J.H.Taylor*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 213, 613, 1985.
9. *J.H.Taylor, R.N.Manchester, A.G.Lyne*, Astrophys. J. Suppl. Ser., 88, 529, 1993.
10. *R.Humphreys*, Astrophys. J. Suppl. Ser., 38, 309, 1978.
11. *J.H.Taylor, J.M.Cordes*, Astrophys. J., 411, 674, 1993.
12. *Т.Г.Мдзинаришвили*, Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 68, 157, 1989.

УДК: 524.354.6

О РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПУЛЬСАРА VELA ПОСЛЕ ЕЕ СКАЧКОВ

Д.М.СЕДРАКЯН, М.В.АЙРАПЕТЯН

Поступила 2 августа 1996

Принята к печати 24 сентября 1996

В работе рассмотрена динамика вихревой решетки в внутренней коре нейтронной звезды. Получено общее уравнение движения и решение этого уравнения в предположении наличия областей пиннингованных и свободных вихрей. Из сравнения полученных решений с наблюдательными данными для пульсара Vela, вычислены относительные моменты инерции областей релаксации с соответствующими характерными временами для двух моделей звезд с различными уравнениями состояния. Показано, что теория может согласоваться с наблюдениями релаксаций угловой скорости пульсаров лишь для моделей звезд с экстремально жесткими уравнениями состояния.

1. *Введение.* На вековое изменение периода пульсаров накладываются нерегулярности в виде скачкообразного изменения угловой скорости $\omega_c(t)$, порядка $\Delta\omega_c / \omega_c \sim 10^{-9} - 10^{-6}$, сопровождающегося скачком скорости замедления $\dot{\omega}_c(t)$, порядка $\Delta\dot{\omega}_c / \dot{\omega}_c \sim 10^{-3} - 10^{-2}$. После скачка угловая скорость $\omega_c(t)$ и ее производная $\dot{\omega}_c(t)$ медленно релаксируют к своим экстраполяционным значениям. Скачки угловой скорости с длительностью менее, чем 2 минуты и с временами релаксации от нескольких дней до, порядка, 1000 дней, были наблюдаемы у пульсара Vela [1-4].

Известно, что моделью пульсара является нейтронная звезда, которая состоит из внешней коры с плотностью $7 \cdot 10^6 \text{ гсм}^{-3} \leq \rho \leq 4 \cdot 10^{11} \text{ гсм}^{-3}$ - "Ас" - фазы, содержащей полностью ионизованные ядра и релятивистские электроны, внутренней коры с плотностью $4 \cdot 10^{11} \text{ гсм}^{-3} \leq \rho \leq 2 \cdot 10^{14} \text{ гсм}^{-3}$ - "Аеп" - фазы, состоящей из ядер, релятивистских электронов и нейтронной жидкости, и ядра звезды с плотностью $\rho \geq 2 \cdot 10^{14} \text{ гсм}^{-3}$ - "пре" - фазы, состоящей из нейтронов, протонов и электронов.

Временные нерегулярности вращения пульсаров можно объяснить, предполагая наличие сверхтекучести в недрах нейтронных звезд. При вращении звезды в нейтронной сверхтекучей жидкости возникают квантовые вихри, которые расположены параллельно оси вращения. В работах [5-9] развиты теории динамики нейтронных вихрей, объясняющие скачки и послескачковую релаксацию угловой скорости пульсаров.

В частности, в работе [5] рассматривается динамика нейтронных вихрей, находящихся в ядре нейтронной звезды. Показано, что вокруг

каждого вихря находится кластер протонных вихрей с магнитным полем порядка 10^{14} Гс. Взаимодействие между сверхтекучей и нормальной компонентами осуществляется рассеянием релятивистских электронов на магнитном поле кластера. Полученные времена динамической релаксации звезды охватывают весь спектр наблюдаемых релаксационных времен. Развита в этой работе теория применена для объяснения первых шести скачков пульсара Vela[6].

В теории, рассмотренной в работе [7], в стационарном состоянии вихри пиннингованы к решетке ядер, и взаимодействие между сверхтекучей и нормальной компонентами осуществляется путем медленного, термически активизированного движения вихрей через дискретные конфигурации пиннинга. Пиннинг вихрей к ядрам можно понять из энергетических соображений как выигрыш в энергии при закреплении вихря с ядром. В зависимости от соотношения между ξ и a , где ξ - радиус вихря, a - константа решетки в направлении вихря, вихри находятся в областях слабого или сверхслабого пиннинга. Вихри в области сверхслабого пиннинга участвуют в кратковременной релаксации, а вихри в области слабого пиннинга - в долговременной. В рамках этой теории получаются экспоненциальные и линейная релаксации производной угловой скорости $\dot{\phi}_c(t)$ [7].

Однако в работах [8,9] показано, что в "Aep" - фазе могут существовать области как пиннингованных, так и свободных вихрей. В области наличия пиннинга должно выполняться условие $2\xi \leq a$, означающее, что вихрь может пиннинговаться к отдельному ядру. А область свободных вихрей определяется условием $2\xi \geq a$, когда в поперечном сечении вихря могут находиться несколько ядер, что приводит к освобождению вихря из-за сглаживания потенциала взаимодействия вихря с ядрами решетки. Время релаксации в области свободных вихрей, с учетом взаимодействия вихря с фононами решетки, получается порядка и меньше 50 дней [8,9].

Следуя работам [8,9], мы предполагаем в "Aep" - фазе наличие двух различных областей - с пиннингованными и свободными вихрями. Цель этой статьи - развить теорию движения вихревой решетки в этой фазе, и из сравнения этой теории с наблюдениями, вычислить относительные моменты инерции областей релаксации для различных моделей нейтронных звезд. Такой анализ даст возможность выяснить, могут ли реалистические модели нейтронных звезд согласоваться с предложенной теорией скачков пульсаров.

Вычисление проводится в предположении о наличии цилиндрической симметрии.

2. Уравнения движения. Как показано в работе [10], уравнения динамики двухкомпонентной жидкости в нейтронной звезде имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 \omega_s(r, t)] = \kappa n(r, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\omega_s(r, t)] = -\frac{\kappa n(r, t) v_r}{r}, \quad (2)$$

$$I_c \frac{d\omega_s}{dt} + \int \frac{\partial \omega_s(r, t)}{\partial t} dI_s = K_{\text{ext}}, \quad (3)$$

где ω_s, I_s и ω_c, I_c - угловая скорость и момент инерции сверхтекучей и нормальной компонент, соответственно, $n(r, t)$ - плотность вихрей в точке r в момент времени t , K_{ext} - постоянный внешний тормозящий момент, v_r - компонента скорости вихрей в радиальном направлении, $\kappa = h/2m_n$.

Вводя обозначения $\delta\omega = \omega_s - \omega_c$, $\delta\Omega = \delta\omega / \omega_c(0)$, $\Omega_c = \omega_c / \omega_c(0)$, $n_0 = 2\omega_c(0) / \kappa$, где $\omega_c(0)$ - угловая скорость звезды в начальный момент времени $t = 0$, преобразуя уравнения (1-3), получим два уравнения, описывающие движение сверхтекучей и нормальной компонент соответственно [13]:

$$\frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} + \frac{2n}{n_0} \frac{v_r}{(1-p_0)r} - \gamma = 0, \quad (4)$$

$$\Omega_c(t) = 1 - \int (\delta\Omega - \delta\Omega_0) dp - \gamma' t. \quad (5)$$

Здесь $p_0 = I_s / I$, I - момент инерции звезды, $dp = dI_s / I$, $\gamma' = -K_{\text{ext}} / I\omega_c(0)$, $\gamma = \gamma' / (1-p_0)$, а $\delta\Omega_0 = \delta\Omega(0)$ - начальное условие. Поскольку мы будем рассматривать движение нейтронных вихрей в "Aep"-фазе звезды, то будем считать, что момент инерции ядра входит в I_c [7].

Радиальная компонента скорости вихря, входящая в уравнение (4), находится из уравнения движения вихря [8]:

$$\vec{F} + \vec{F}_M = 0, \quad (6)$$

где $\vec{F}$ - сила трения единицы длины вихря из-за его взаимодействия с нормальной компонентой звезды, а $\vec{F}_M$ - сила Магнуса, которая имеет вид:

$$\vec{F}_M = \rho_s \vec{\kappa} \times (\vec{v} - \vec{v}_s), \quad (7)$$

где ρ_s - плотность сверхтекучей жидкости, $\vec{\kappa}$ - вектор в направлении вихря с модулем $\kappa = h/2m_n$, $\vec{v}$ - скорость вихревой нити и $\vec{v}_s$ - локальная скорость сверхтекучей жидкости.

Для пиннингованных вихрей выражение для v_r было найдено в [7]:

$$v_r = 2v_0 e^{-E_p/kT} \operatorname{sh} \left(\frac{E_p}{kT} \frac{\delta\Omega}{\delta\Omega_{cr}} \right), \quad (8)$$

где $v_0 \approx 10^7 \text{ смс}^{-1}$ - типичная скорость микроскопического движения вихрей между центрами пиннинга, T - температура внутри звезды, $\delta\Omega_{\text{cr}}$ - критическая разность угловых скоростей, поддерживаемых силами пиннинга, определяемая следующим образом:

$$\delta\Omega_{\text{cr}} = \frac{E_p}{\rho_s \kappa r \xi b \omega_c(0)}, \quad b = a^3 / \kappa \xi^2. \quad (9)$$

Здесь b - расстояние между центрами пиннинга вдоль вихря, а E_p - энергия пиннинга на одно ядро, определяемая следующим образом [7]:

$$E_p = \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\Delta^2}{E_F} n_s \right)_{\text{out}} - \left(\frac{\Delta^2}{E_F} n_s \right)_{\text{in}} \right] V = \frac{3}{8} c \left(\frac{\Delta^2}{E_F} n_s \right)_{\text{out}} V, \quad (10)$$

где Δ , E_F и n_s - энергетическая щель, энергия Ферми, и плотность числа сверхтекучих нейтронов, соответственно, индексы out и in соответствуют значениям этих величин вне и внутри ядер, V - объем ядра, c - неопределенный параметр порядка единицы.

Для свободных вихрей выражение для v_r , найденное из уравнения (6), имеет вид [10]:

$$v_r = \frac{\omega_c(0)(\kappa \rho_s / \eta)}{1 + (\kappa \rho_s / \eta)^2} \delta\Omega r. \quad (11)$$

Здесь

$$\eta = \frac{3}{32\pi^{1/2}} \frac{a E_p^2}{M \xi^3 c_s^3} \quad (12)$$

не зависящая от температуры часть коэффициента трения [8], M - масса ядра, c_s - скорость звука. Подставляя выражения (8) и (11) в (4), и учитывая, что часть вихрей с плотностью n_p пиннингована, а часть с плотностью $n - n_p$ - свободна, получаем:

$$\frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} + \frac{2n_p}{n_0} \frac{2v_0}{r(1-p_0)} \frac{e^{-E_p/kT}}{\text{sh}} \left(\frac{E_p}{kT} \frac{\delta\Omega}{\delta\Omega_{\text{cr}}} \right) + \frac{2(n-n_p)}{n_0(1-p_0)} \frac{\omega_c(0)(\kappa \rho_s / \eta)}{1 + (\kappa \rho_s / \eta)^2} \delta\Omega = \gamma. \quad (13)$$

Обозначая

$$\alpha = \frac{4v_0}{r(1-p_0)} \frac{e^{-E_p/kT}}{\text{sh}}, \quad (14)$$

$$\tau = \frac{kT}{E_p} \frac{\delta\Omega_{\text{cr}}}{\gamma}, \quad (15)$$

$$\tau^* = \frac{(1-p_0) \left[1 + (\kappa p_s / \eta)^2 \right]}{2\omega_c(0)(\kappa p_s / \eta)}, \quad (16)$$

и предполагая относительную малость скачков угловой скорости пульсара, т.е. $n - n_0 \ll n_0$, перепишем уравнение (13) в виде:

$$\frac{\partial \delta \Omega}{\partial t} + \frac{n_p}{n_0} \alpha \operatorname{sh} \left(\frac{\delta \Omega}{\gamma \tau} \right) + \left(1 - \frac{n_p}{n_0} \right) \frac{\delta \Omega}{\tau^*} = \gamma. \quad (17)$$

В общем случае это уравнение довольно сложное, но в областях пиннингованных и свободных вихрей в отдельности оно принимает простой вид. Так, в области наличия пиннинга имеем:

$$\frac{\partial \delta \Omega}{\partial t} + \alpha \operatorname{sh} \left(\frac{\delta \Omega}{\gamma \tau} \right) = \gamma. \quad (18)$$

Решение этого уравнения, с начальным условием $\delta \Omega(0) = \delta \Omega_0$, в неявном виде определяется из выражения:

$$\operatorname{sh} \left(\frac{\delta \Omega}{\gamma \tau} \right) = \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \right) \left[\frac{\gamma}{\alpha} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha/\gamma + \gamma/\alpha}{1 - (\alpha/\gamma) \operatorname{sh}(\delta \Omega_0 / \gamma \tau)} - \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}} \frac{t}{\tau} \right) + \left(\frac{\alpha/\gamma + \gamma/\alpha}{1 - (\alpha/\gamma) \operatorname{sh}(\delta \Omega_0 / \gamma \tau)} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}} \frac{t}{\tau} \right) \right\}^{-1}. \quad (19)$$

Стационарное решение уравнения (18) находим из (19) при $t \rightarrow \infty$:

$$\operatorname{sh} \left(\frac{\delta \Omega_\infty}{\gamma \tau} \right) = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (20)$$

Решение уравнения (18), как видно из (19), зависит от значения параметра γ/α и сильно упрощается в двух предельных случаях: $\gamma/\alpha \ll 1$ и $\gamma/\alpha \gg 1$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma/\alpha \ll 1$. Тогда, полученное из (19) решение уравнения (18) имеет вид:

$$\delta \Omega - \delta \Omega_0 = (\gamma \tau^* - \delta \Omega_0) \left(1 - e^{-t/\tau^*} \right), \quad (21)$$

где

$$\tau^* = \frac{\tau \gamma}{\alpha} = \frac{kT}{E_F} \frac{\delta \Omega_{cr} r (1-p_0)}{4v_0} e^{E_s/kT}, \quad (22)$$

а для наблюдаемой величины $\dot{\Omega}_c(t)$ получаем из (5) выражение:

$$\dot{\Omega}_c(t) = -\gamma' \int (\gamma\tau^+ - \delta\Omega_0) \frac{e^{-t/\tau^+}}{\tau^+} dp. \quad (23)$$

В обратном предельном случае $\gamma/\alpha \gg 1$, из (19) находим решение для уравнения (18):

$$\begin{aligned} \delta\Omega - \delta\Omega_0 &= -\gamma\tau \ln \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{2\gamma} e^{\delta\Omega_0/\gamma\tau} - 1 \right) (1 - e^{-t/\tau^+}) \right\} \approx \\ &\approx -\gamma\tau \left(\frac{\alpha}{2\gamma} e^{\delta\Omega_0/\gamma\tau} - 1 \right) (1 - e^{-t/\tau^+}), \end{aligned} \quad (24)$$

так как, с учетом выражения (20) и относительной малости скачков угловой скорости пульсара, т.е. $\delta\Omega_\infty \approx \delta\Omega_0 \approx \delta\Omega$, имеем:

$$\left(\frac{\alpha}{2\gamma} e^{\delta\Omega_0/\gamma\tau} - 1 \right) (1 - e^{-t/\tau^+}) \ll 1.$$

Для $\dot{\Omega}_c(t)$ получаем:

$$\dot{\Omega}_c(t) = -\gamma' + \gamma \int \left(\frac{\alpha}{2\gamma} e^{\delta\Omega_0/\gamma\tau} - 1 \right) e^{-t/\tau^+} dp. \quad (25)$$

Это выражение может описать релаксацию с характерным временем, определяемым формулой (15). Таким образом, в области пиннингованных вихрей, в зависимости от того, выполняется условие $\gamma/\alpha \gg 1$ или $\gamma/\alpha \ll 1$, релаксация происходит с характерными временами, определяемыми формулами (15) и (22) соответственно. Отметим также, что в пиннингованной области в основном реализуются решения (21) и (24), так как величина γ/α зависит экспоненциально от E_p . Переход решения (21) в (24) происходит в точке звезды, где $E_p = 0.34 \text{ MeV}$ ($kT = 11 \text{ KeV}$, $v_0 \approx 10^7 \text{ см с}^{-1}$, $1/\gamma = \tau_0 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ лет}$) [7].

В области свободных вихрей уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} + \frac{\delta\Omega}{\tau^*} = \gamma. \quad (26)$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\delta\Omega(0) = \delta\Omega_0$ следующее:

$$\delta\Omega - \delta\Omega_0 = (\gamma\tau^* - \delta\Omega_0) (1 - e^{-t/\tau^*}), \quad (27)$$

Подставляя (27) в (5) получаем:

$$\dot{\Omega}_c(t) = -\gamma' \int (\gamma\tau^* - \delta\Omega_0) \frac{e^{-t/\tau^*}}{\tau^*} dp. \quad (28)$$

Таким образом, свободные вихри участвуют в релаксационном процессе

с характерными временами, определяемыми из (16). Как увидим ниже, с помощью формул (15), (16) и (22) можно получить времена релаксации порядка межскачковых времен. Тогда, в формулах (25), (28) и (23) экспоненциальное слагаемое можно разложить в ряд и получить выражения, описывающие линейные релаксационные процессы.

3. Сравнение с наблюдениями. Рассмотрим, как распределяются области пиннингованных и свободных вихрей внутри звезды в зависимости от плотности вещества ρ . Исходя из вычислений длины когерентности ξ и энергии пиннинга E_p , формулой (10) с $c = 0.7$, на основе значений энергетической щели нейтронной сверхтекучей жидкости [11], константы решетки a [12] и плотности числа сверхтекучих нейтронов n_s [12,14], в звезде можно выделить следующие области:

1) Область с плотностью $7.2 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3} \leq \rho \leq 1.1 \cdot 10^{14} \text{ г см}^{-3}$, где $2\xi \geq a$, следовательно, в ней вихри свободны. Времена релаксации в этой области, полученные из (16), меняются от 3 часов до 1000 дней.

2) Область с плотностью $1.7 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3} \leq \rho \leq 7.2 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3}$, где $2\xi \leq a$, соответствует области пиннингованных вихрей. При $1.7 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3} \leq \rho \leq 2.05 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3}$ и $6.7 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3} \leq \rho \leq 7.2 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3}$ имеем $\gamma/\alpha \ll 1$, следовательно, в этих частях релаксационные времена вычисляются формулой (22) и дают значения от нескольких часов до порядка 500 дней и от 1000 дней до 14 дней, соответственно. А при плотностях $2.05 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3} \leq \rho \leq 6.7 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3}$ имеем $\gamma/\alpha \gg 1$, и релаксационные времена по формуле (15) меняются от 500 дней до 1000 дней. Области плотностей $\rho \geq 1.1 \cdot 10^{14} \text{ г см}^{-3}$ и $\rho \leq 1.7 \cdot 10^{13} \text{ г см}^{-3}$ также могут участвовать в релаксации, но их характерные времена не наблюдаемы. Таким образом, релаксационные решения пиннингованных и свободных вихрей могут описать как экспоненциальные, так и линейные релаксации угловой скорости пульсара. Причем, для каждого характерного времени τ_i , в этих областях существуют участки, которые будут вносить вклад в относительный момент инерции, соответствующий времени τ_i .

В работе [7], на основе наблюдательных данных первых восьми скачков угловой скорости пульсара Vela, показано, что послескачковый релаксационный процесс можно описать тремя экспоненциальными кривыми с характерными временами $\tau_1 = 10$ часов, $\tau_2 = 3.2$ дня и $\tau_3 = 32$ дня, и прямой линией с характерным временем, порядка τ_4 , порядка 1000 дней. В первых восьми столбцах табл. 1 приведены относительные моменты инерции в единицах 10^{-3} , найденные из наблюдательных данных для этих скачков пульсара Vela, соответствующих вышеуказанным характерным временам [7].

Для сравнения вышеизложенной теории релаксации с наблюдательными данными, мы выбрали две модели нейтронных звезд, отличающиеся друг от друга уравнениями состояния, но имеющие одинаковую массу $M = 1.4 M_{\odot}$. Первая из них, с не очень жестким уравнением состояния, имеет центральную плотность $\rho_c = 1.1 \cdot 10^{15} \text{ г см}^{-3}$ и радиус $R = 10.13 \text{ км}$, а вторая, с экстремально жестким уравнением состояния, имеет центральную плотность $\rho_c = 0.8 \cdot 10^{15} \text{ г см}^{-3}$ и радиус $R = 13.29 \text{ км}$. Вычисленные нами суммарные относительные моменты инерции областей пиннингованных и свободных вихрей, для каждого релаксационного времени τ_i , указаны в последних двух столбцах табл. 1, для первой и второй модели соответственно.

Таблица 1

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

	1	2	3	4	5	6	7	8	Модель	
$\left(\frac{I_1}{I}\right)_{-3}$	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	1.16	4.42
$\left(\frac{I_2}{I}\right)_{-3}$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.2	3.48
$\left(\frac{I_3}{I}\right)_{-3}$	5.8	6.4	5.1	10	3.2	12.1	9.0	9.5	1.13	4.35
$\left(\frac{I_4}{I}\right)_{-3}$	7.1	7.2	7.2	6.6	6.3	6.0	6.5	4.9	5.09	10.4

Из сравнения вычисленных значений относительных моментов инерции с значениями, полученными из наблюдательных данных для пульсара Vela, можно сделать следующие выводы:

а) Для модели с не очень жестким уравнением состояния теория согласуется с наблюдательными данными для кратковременной релаксации, однако, существует проблема нехватки моментов инерции в областях, соответствующих средним и большим релаксационным временам. Следовательно, эта теория не может объяснить релаксацию угловой скорости нейтронной звезды для моделей с мягкими и не очень жесткими уравнениями состояния.

б) Для модели с экстремально жестким уравнением состояния теория согласуется с наблюдениями также частично. Приходится предположить,

что часть областей, имеющих короткие и большие времена релаксации, не должна участвовать в релаксации. Также остается проблема нехватки момента инерции области, соответствующей времени релаксации τ_3 .

Таким образом, теория скачков и релаксации угловой скорости пульсара Vela, на основе динамики движения вихрей в "Aen" - фазе, может согласоваться с наблюдениями только для моделей звезд с экстремально жесткими уравнениями состояния. Однако, как отметили выше, даже для этих моделей сравнение теории с наблюдениями сталкивается с определенными трудностями.

Ереванский государственный
университет, Армения

ON THE VELA PULSAR ANGULAR VELOCITY RELAXATION AFTER ITS JUMPS

D.M.SEDRAKIAN, M.V.HAIRAPETIAN

The dynamics of a vortex lattice in the internal crust of a neutron star is considered. The general equation of motion and solution of this equation in the assumption of presence of regions of pinned and free vortex lines is received. The relative moments of inertia of the relaxation regions with characteristic times for two models of stars with various equations of state are calculated from comparison of the received solution with observational data of Vela pulsar. It is shown, that the theory can be in agreement with observations of the pulsars' angular velocity relaxations only for models of stars with extremely stiff equations of state.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.M.Cordes, G.S.Downs, J.Krause-Polstorff, *Astrophys.J.*, 330, 841, 1988.
2. P.M.McCulloch, P.A.Hamilton, D.McConnel, F.A.King, *Nature*, 346, 822, 1990.
3. C.S.Flanagan, *Nature*, 345, 416, 1990..
4. C.S.Flanagan, *IAU Circ.* No5311, 1991.
5. A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian, *Astrophys.J.*, 447, 305, 1995.
6. A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian, J.M.Cordes, Y.Terzian, *Astrophys.J.*, 447, 324, 1995.
7. M.A.Alpar, H.F.Chau, K.S.Cheng, D.Pines, *Astrophys.J.*, 409, 345, 1993.
8. P.B.Jones, *Mon.Not.Roy.Astr.Soc.*, 243, 257, 1990.

9. *P.B.Jones*, *Mon.Not.Roy.Astr.Soc.*, 246, 315, 1990.
10. *А.Д.Седракян, Д.М.Седракян*, *ЖЭТФ*, 102, 721, 1992.
11. *T.L.Ainsworth, J.Wambach, D.Pines*, *Phys. Lett. B*, 222, 173, 1989.
12. *J.W.Negele, D.Vautherin*, *Nucl. Phys. A*, 207, 298, 1973.
13. *А.Д.Седракян, Д.М.Седракян*, *ЖЭТФ*, 108, 631, 1995.
14. *A.D.Sedrakian*, *Astrophys. Space Sci.*, 1996, in press.

УДК: 524.354.6

О СОБСТВЕННЫХ МГД КОЛЕБАНИЯХ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

С.И.БАСТРУКОВ¹, И.В.МОЛОДЦОВА¹,
В.В.ПАПОЯН², Д.В.ПОДГАЙНЫЙ³

Поступила 11 сентября 1996

Принята к печати 2 октября 1996

В работе изучаются собственные низкочастотные гидромагнитные колебания изолированной невращающейся нейтронной звезды, локализованные в периферийной коре, структура которой определяется электрон-ядерной плазмой (Ае-фаза). Плазменная среда внешней коры рассматривается как однородный бесконечно проводящий несжимаемый континуум, движения которого управляются уравнениями магнитной гидродинамики. В приближении постоянного магнитного поля внутри коры (предполагается, что вне звезды магнитное поле обладает дипольной структурой) рассчитан спектр нормальных полонидальных и торондальных гидромагнитных осцилляций, обусловленных предполагаемыми остаточными флуктуациями потока и, связанными с ними, флуктуациями напряженности магнитного поля. Приводимые численные оценки периодов МГД колебаний попадают во временной интервал периодичности излучения радиопульсаров, что свидетельствует в пользу мнения о тесной связи остаточных гидромагнитных колебаний с электромагнитной активностью нейтронных звезд.

1. *Введение.* Одно из наиболее важных физических следствий принципа сохранения магнитного потока в процессе эволюции и коллапса массивных звезд [1,2] состоит в том, что нейтронные звезды являются самыми мощными накопителями магнитной энергии в Галактике [3]. Из эволюционных расчетов структуры нейтронной звезды (см., например, [4-8]) следует, что сверхмощное магнитное поле ($B \sim 10^{11}-10^{13}$ Гс [3,4,8]) этих компактных объектов должно быть локализовано, главным образом, во внешней оболочке (crust) звезды (со средней плотностью ионизированного вещества $\rho \sim 10^{11}$ г/см³). Структурное содержание коры, глубина которой по разным оценкам составляет 0.3-1 км, определяется идеально-проводящей электрон-ядерной плазмой (Ае-фаза)-средой, допускающей присутствие магнитного поля в занимаемой ею объеме. Физические свойства внутреннего ядра (средняя плотность которого $\rho \sim 10^{15}$ г/см³) определяются, в основном, сильно вырожденным ферми-континуумом нейтронов. Из этого следует, что физическое состояние коры не исключает возможности возбуждения в ней гидромагнитных длинноволновых колебаний или распространения альвеновских волн. В этой связи уместно отметить, что незадолго до открытия пульсаров, Хойл, Нарликар и Уилер [9] высказывали предположение о том, что магнитная энергия нейтронных звезд, запасаемая в период сжатия после их рождения в результате взрыва

сверхновой, может высвобождаться посредством преобразования энергии остаточных гидромагнитных колебаний в энергию электромагнитного излучения.

В недавней работе [10] была предпринята попытка оценить абсолютное значение частот длинноволновых гидромагнитных колебаний на основе однородной модели нейтронной звезды. Главный результат проведенного в [10] анализа состоит в том, что периоды МГД осцилляций оказываются сравнимы с периодами радиоизлучения пульсаров. Последнее обстоятельство, по нашему мнению, свидетельствует в пользу гипотезы о гидромагнитных колебаниях как источнике электромагнитной активности нейтронных звезд. Однако, поскольку распределение вещества в недрах нейтронной звезды имеет стратифицированный характер, полученные в однородной модели оценки не могут быть признаны удовлетворительными, и, в этой связи, представляется целесообразным провести перерасчет частот МГД колебаний в более реалистической модели, учитывающей слоистую структуру нейтронной звезды. В настоящей работе мы приводим вариационный расчет и численные оценки частот собственных МГД колебаний, локализованных во внешней коре нейтронной звезды, т.е. в области электрон-ядерной плазмы. В изучаемой модели нейтронная звезда представляется двухкомпонентной системой в полной аналогии с известной моделью Бейма-Петика-Пайнса-Рудермана [11] (см. также [4,5] и приведенные там ссылки), объясняющей сбой пульсаров сдвиговыми сейсмологическими колебаниями внешней коры относительно инертного кора. При этом мы во многом опираемся на результаты работ [12-14], где было показано, что частоты нерадиальных гравитационных колебаний [12] оказываются на 3-4 порядка выше частот гидромагнитных колебаний [10]. Это даст основание рассматривать гидромагнитные колебания независимо от гравитационных*.

2. Вариационный метод расчета МГД колебаний. В изучаемой модели плазменная среда внешней коры рассматривается как однородный несжимаемый континуум (бесконечной проводимости), движения которого подчиняются уравнениям магнитной гидродинамики (см., например, [17,18]):

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla W + \frac{1}{4\pi} (B \nabla) B, \quad W = P + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (2.1)$$

* В ранних работах [15, 16] частоты собственных пульсаций нейтронной звезды оценивались на основе гидродинамической модели и предположения о радиальном характере гравитационных колебаний. Однако исследования последних лет [12] выявили тот факт, что звездную среду новорожденных компактных объектов следует рассматривать как сферическую массу упруго-подобного несжимаемого континуума (движения которого подчиняются уравнениям эластодинамики), в которой гравитационные колебания вероятнее всего должны носить существенно нерадиальный характер.

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \operatorname{rot}[V \times B], \quad (2.2)$$

где ρ , V - плотность и скорость среды, соответственно; B - напряженность магнитного поля (магнитная проницаемость $\mu \approx 1$) и W - магнитогидростатическое давление (d/dt - субстанциональная производная).

Следуя Чандрасекхари [17], представим линеаризованные уравнения магнитогидродинамики в виде, явно содержащем решение, описывающее распространение альвеновской волны в несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \delta V_l}{\partial x_l} = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial \delta V_l}{\partial t} - \frac{B_k}{4\pi} \frac{\partial \delta B_l}{\partial x_k} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \delta B_l}{\partial t} - B_k \frac{\partial \delta V_l}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \delta B_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.5)$$

где δV_l и δB_k - малые отклонения скорости и напряженности магнитного поля от их равновесных значений. Приведенная форма МГД уравнений соответствует случаю, когда гравитационные (продольные) колебания не возбуждаются и гидромагнитные (поперечные) колебания остаются единственной степенью активности нейтронной звезды.

Собственные частоты гидромагнитных мод, соответствующие длинноволновым МГД колебаниям, могут быть вычислены на основе энергетического вариационного принципа по следующей схеме. Скалярное умножение (2.4) на δV_l и интегрирование по объему звезды (на поверхности звезды принимается, что $\delta B|_{r=R} = 0$) приводит к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho \delta V^2}{2} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_V \delta V_l B_k \frac{\partial \delta B_l}{\partial x_k} d\tau = 0. \quad (2.6)$$

Для нахождения нормальных мод, вариации скорости потока и напряженности магнитного поля удобно представить в виде

$$\delta V_l = a_l(r) \dot{\alpha}(t), \quad \delta B_l = b_l(r) \alpha(t). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), находим

$$b_l = B_k \frac{\partial a_l}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

Подстановка (2.7) в (2.6) дает

$$M \ddot{\alpha} + K \alpha = 0, \quad (2.9)$$

где M - инерция и K - жесткость гидромагнитных колебаний, которые имеют вид

$$M = \int_V \rho a_i a_i d\tau, \quad K = \frac{\mu}{4\pi} \int_V b_i b_i d\tau. \quad (2.10)$$

В проводимых ниже расчетах будем полагать, так же как и в [10], что внутри внешней коры звезды напряженность однородного магнитного поля B направлена вдоль оси z :

$$B_r = \mu B, \quad B_\theta = -(1 - \mu^2)^{1/2} B, \quad B_\phi = 0, \quad \mu = \cos\theta. \quad (2.11)$$

Заметим, что для нейтронных звезд эффект магнитного сплющивания [19] пренебрежимо мал, поэтому все вычисления могут быть выполнены для сферической конфигурации. Из приведенных выше формул следует, что для определения частоты собственных МГД колебаний $\omega^2 = K/M$, необходимо вычислить только поле скорости возбужденного потока.

2.1. Полоидальная МГД мода. Для определения скорости потока, сопровождающего нерадиальные полоидальные колебания, воспользуемся уравнением несжимаемости. В изучаемом случае это уравнение должно быть дополнено условием непроницаемости коры, радиус которого обозначен через R_c , отражающим его инертность:

$$\delta V_r|_{r=R_c} = 0, \quad \text{при } \dot{R}_c = 0. \quad (2.12)$$

На поверхности звезды радиуса R налагаем стандартное граничное условие:

$$\delta V_r|_{r=R} = \dot{R}(t) = R P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t), \quad (2.13)$$

где $R(t) = R[1 + \alpha_L(t) P_L(\mu)]$, L - мультипольный порядок сфероидальных искажений поверхности. Из (2.3) следует, что $a_L(r)$ подчиняется уравнению:

$$\operatorname{div} a_L = 0, \quad (2.14)$$

решение которого ищем в виде полоидального векторного поля

$$a_L = \operatorname{rot} \operatorname{rot} r \chi_L, \quad \chi_L = [A_L^1 r^L + A_L^2 r^{-L-1}] P_L(\mu). \quad (2.15)$$

Из (2.12) и (2.13) находим явный вид произвольных констант A_L^1 и A_L^2 :

$$A_L^1 = \frac{A_L}{L(L+1)}, \quad A_L^2 = -\frac{A_L}{L(L+1)} R_c^{2L+1}, \quad A_L = \frac{R^{L+3}}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}}. \quad (2.16)$$

Компоненты поля мгновенных смещений a_L в сферической системе координат представляются в виде:

$$a_r = A_L \frac{r^{2L+1} - R_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_L(\mu), \quad (2.17)$$

$$a_0 = \frac{-A_L}{L(L+1)} \frac{(L+1)r^{2L+1} + LR_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_L^1(\mu), \quad (2.18)$$

$$a_\theta = 0, \quad (2.19)$$

где $P_L^1(\mu)$ - присоединенный полином Лежандра первого порядка:

$$P_L^1(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}.$$

Параметр инерции M_L , рассчитанный с этим полем, равен [20]:

$$M_L = \frac{4\pi\rho}{L(2L+1)} A_L^2 R^{2L+1} \left[1 + \frac{L}{L+1} X^{2L+1} \right] (1 - X^{2L+1}), \quad (2.20)$$

где $X = R_c/R$ и X меняется в пределах $0 < X < 1$. Подчеркнем, что здесь ρ - плотность электрон-ядерной плазмы, локализованной в периферийной коре звезды.

Подставляя (2.11) и (2.15) в (2.8), находим, что компоненты флуктуаций напряженности магнитного поля имеют вид

$$b_r = \frac{A_L B}{r^{L+3}} [(L-1)r^{2L+1} P_{L-1}^1(\mu) + (L+2)R_c^{2L+1} P_{L+1}^1(\mu)], \quad (2.21)$$

$$b_\theta = \frac{A_L B}{r^{L+3}} [r^{2L+1} P_{L-1}^1(\mu) - R_c^{2L+1} P_{L+1}^1(\mu)], \quad (2.22)$$

$$b_\phi = 0. \quad (2.23)$$

Для жесткости гидромагнитных полоидальных колебаний получаем следующее выражение

$$K = A_L^2 B^2 R^{2L-1} \left[\frac{L-1}{2L-1} + \frac{2L+1}{(2L+3)(2L-1)} X^{2L-1} - \frac{L+2}{2L+3} X^{2(2L+1)} \right]. \quad (2.24)$$

В пределе $X \rightarrow 0$, соответствующим однородной модели, для частоты полоидальных гидромагнитных колебаний получаем [10]:

$$\omega_p^2 = \Omega_A^2 L(L-1) \frac{2L+1}{2L-1}, \quad (2.25)$$

где

$$\Omega_A^2 = \frac{V_A^2}{R^2} = \frac{B^2}{4\pi\rho R^2}, \quad (2.26)$$

- основная частота альвеновских пульсаций.

2.2. Тороидальная МГД мода. В системе с фиксированной полярной осью z тороидальное поле скорости имеет вид:

$$\delta V = \text{rot } r \chi_L \hat{e}_L(t), \quad \chi_L = [A_L^1 r^L + A_L^2 r^{-L-1}] P_L(\mu). \quad (2.27)$$

Это поле соответствует дифференциально-вращательным (крутильным) колебаниям периферийной коры относительно неподвижного кора. Возможность возбуждения крутильных нерадиальных колебаний в бесконечно проводящей жидкости (Ас-плазме) обусловлена исключительно присутствием магнитного поля, которое придает ей динамические свойства упругого континуума. Именно данное обстоятельство является причиной того, что для описания гидромагнитных колебаний, возбуждаемых в Ас-плазме, мы используем решения для поля скорости, полученные нами ранее при анализе гравитационно-упругих колебаний нейтронной звезды [12,13].

Произвольные константы A_L^1 и A_L^2 фиксируются граничными условиями, аналогичными тем, которые были использованы выше при изучении сферических колебаний. При дифференциально-вращательных колебаниях искажения поверхности звезды заданы уравнением

$R(t) = R[1 + \alpha_L(t) P_L^1(\mu)]$, поэтому, при $r = R$, следует положить:

$$\delta V_\phi \Big|_{r=R} = \dot{R}(t) = R P_L^1(\mu) \dot{\alpha}_L(t). \quad (2.28)$$

Предполагаем, что внутренняя граница остается в покое:

$$\delta V_\phi \Big|_{r=R_c} = 0, \quad \text{при } \dot{R}_c = 0. \quad (2.29)$$

В результате получаем

$$A_L^1 = A_L, \quad A_L^2 = -A_L R_c^{2L+1}, \quad A_L = \frac{R^L}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}}. \quad (2.30)$$

Используя для поля скорости крутильных колебаний (2.28) сепарабельное представление (2.7), находим, что компоненты мгновенных крутильных смещений имеют вид

$$a_r = 0, \quad a_\theta = 0, \quad a_\phi = A_L \left[r^L - \frac{R_c^{2L+1}}{r^{L+1}} \right] P_L^1(\mu). \quad (2.31)$$

Подставляя (2.11) и (2.31) в (2.8), для флуктуаций напряженности магнитного поля получаем

$$b_r = 0, \quad b_\theta = 0, \quad (2.32)$$

$$b_\phi = A_L B \left[(L+1) r^{L-1} P_{L-1}^1(\mu) + L \frac{R_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_{L+1}^1(\mu) \right], \quad (2.33)$$

Вычисление коэффициентов инерции и жесткости торондальных МГД колебаний приводит к следующим аналитическим выражениям:

$$M_L = A_L^2 \frac{4\pi\rho L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)} R^{2L+3} \left[1 - (2L+3) X^{2L+1} + \frac{(2L+1)^2}{2L-1} X^{2L+3} - \frac{(2L+3)}{2L-1} X^{2(2L+1)} \right], \quad (2.34)$$

и

$$K_L = A_L^2 B^2 \frac{L(L+1)}{2L+1} R^{2L+1} \left[\frac{L^2-1}{2L-1} + \frac{3}{(2L-1)(2L+3)} X^{2L+1} - \frac{L(L+2)}{2L+3} X^{2(2L+1)} \right]. \quad (2.35)$$

Как и следовало ожидать, при $X (= R_c/R) \rightarrow 0$ приходим к результату однородной модели [10]:

$$\omega_i^2 = \Omega_A^2 (L^2 - 1) \frac{2L+3}{2L-1}, \quad (2.36)$$

где основная (альвеновская) частота Ω_A определена выражением (2.26).

3. *Численный анализ модели и выводы.* Основная цель настоящей работы состоит в получении предельных (верхней и нижней) оценок для частот собственных МГД колебаний нейтронной звезды.

Рис. 1. демонстрирует зависимость частоты гидромагнитных полоидальных колебаний от глубины внешней коры $\Delta R = R - R_c = R(1 - X)$, которая, согласно данным эволюционных расчетов, составляет 0.3-0.8 км. Как видно из этого рисунка, частота полоидальных МГД колебаний слабо зависит от ΔR по сравнению с частотой тороидальных мод. В представленных расчетах средняя плотность коры бралась равной $\rho = 4.3 \cdot 10^{11}$ г/см³, напряженность магнитного поля $B = 0.5 \cdot 10^{13}$ Гс.

Рис. 2 дает представление о зависимости периода дипольного (нижайшего по частоте) полоидального и тороидального МГД колебания от плотности Ae-фазы во внешней коре, глубина которой взята равной 0.5 км. Плотность вещества в коре варьировалась в пределах 10^8 г/см³ < ρ < 10^{11} г/см³ [8]. Пунктирным прямоугольником выделена область характерных параметров пульсаров, приведенных на аналогичном рисунке 5 обзора [3].

Примечательно, что однородная модель предсказывает, что нижайшая альвеновская мода имеет мультипольный порядок $L = 2$. Однако, при $X \neq 0$ мультипольный порядок нижайшего устойчивого гидромагнитного колебания соответствует дипольной моде. Последнее утверждение про-

иллюстрировано на рис. 1. Подобная ситуация имеет место для гравитационных колебаний [20], которые представляются как поляризационные колебания внешней коры относительно массивного остова и не затрагивают положения центра масс звезды. Частота низшей гравитационной моды, при самых консервативных оценках, оказывается порядка 10^3 - 10^4 с⁻¹, что соответствует периоду $P = 0.01$ - 0.1 мс.

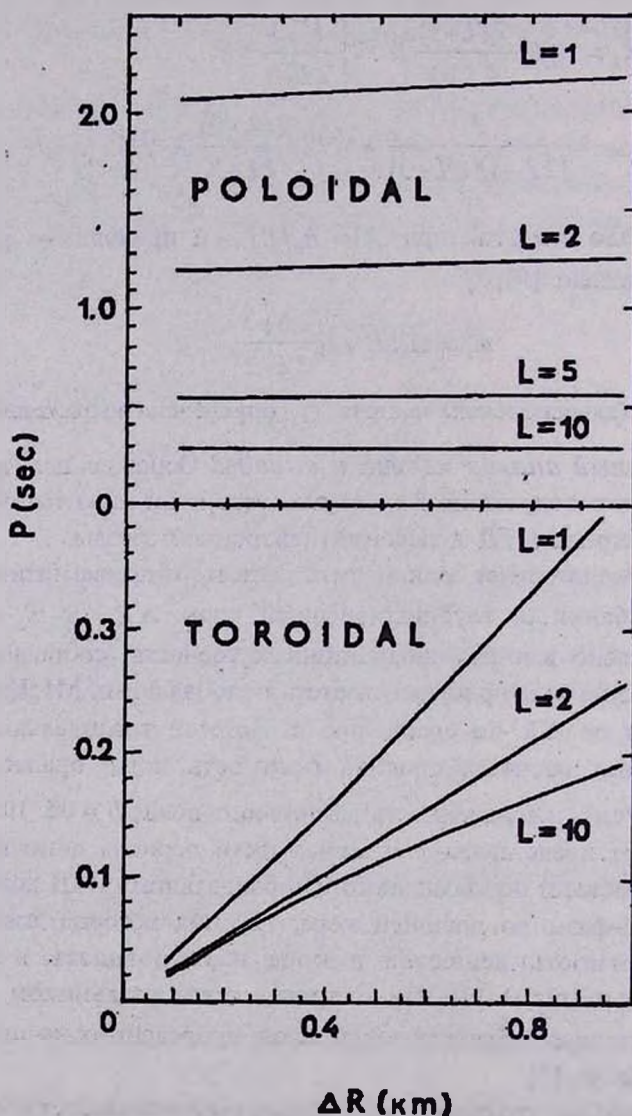


Рис. 1. Период полоидальных (вверху) и тороидальных (внизу) мультипольных колебаний в зависимости от толщины внешней коры $\Delta R = R - R_c$. Средняя плотность $\rho = 4.3 \cdot 10^{11}$ г/см³, напряженность магнитного поля $B = 0.5 \cdot 10^{13}$ Гс.

Таким образом, рассмотренная двухкомпонентная модель приводит к выводу, что если остаточный эффект взрыва сверхновой при рождении нейтронной звезды проявится в МГД колебаниях, локализованных в периферийной коре, то периоды этих колебаний ожидаются в интервале: 10мс - 10с, т.е. в интервале периодов радиоизлучения пульсаров. Хотя наше рассмотрение не затрагивает механизма излучения нейтронной

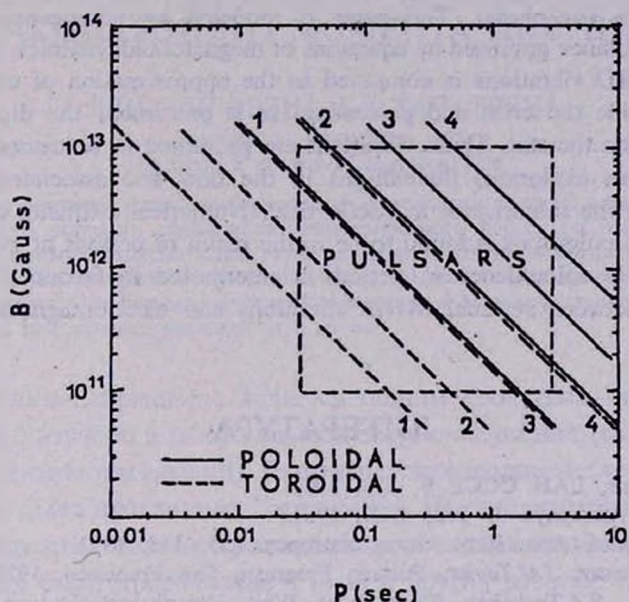


Рис. 2. Зависимость периода нижней (дипольной) полойдальной и тороидальной МГД моды от плотности электрон-ядерной плазмы. Глубина внешней коры $h = 0.5$ км. Линии соответствуют расчету при значениях плотности внешней коры: 1 — $\rho = 10^8$ г/см³, 2 — $\rho = 10^9$ г/см³, 3 — $\rho = 10^{10}$ г/см³, 4 — $\rho = 10^{11}$ г/см³.

звезды, однако столь близкое соответствие вычисленных периодов МГД колебаний и периодов наблюдаемой активности радиопульсаров указывает на то, что источником радиоизлучения нейтронной звезды может являться не только вращение (модель маяка), но и низкочастотные гидромагнитные колебания.

Авторы признательны проф. Ф.Веберу за обсуждение ряда вопросов, затронутых в настоящей статье.

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

² Ереванский государственный университет, Армения

³ Саратовский государственный университет, Россия

ON THE MHD EIGENVIBRATIONS OF NEUTRON STAR

S.I.BASTRUKOV¹, I.V.MOLODTSOVA¹,
V.V.ПАРОЯН², D.V.PODGAINY³

The low-frequency hydromagnetic pulsations of isolated non-rotating neutron star are studied, localized in the peripheral crust which is constituted by electron-nuclear plasma (Ac-phase). The latter is modeled by homogeneous perfectly conductive substance governed by equations of magnetofluidynamics. The spectrum of normal MHD vibrations is computed in the approximation of uniform magnetic field inside the crust and possessing, as is presumed, the dipole poloidal structure outside the star. These vibrations are presumed to be caused by residual (after supernova explosion) fluctuations in the flow and associated with them fluctuations in the intensity of magnetic field. Numerical estimates of periods of hydromagnetic pulsations is found to be in the realm of periods of radio emission of pulsars. This coincidence in periods is interpreted in favour of opinion of interrelation between residual MHD vibrations and electromagnetic activity of neutron stars.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л.Гинзбург, ДАН СССР 9, 329, 1964.
2. L.Woltjer, Astrophys. J. 140, 1309, 1964.
3. G.Chanmugam, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 30, 143, 1992.
4. R.N.Manchester, J.H.Taylor, Pulsars, Freeman, San Francisco, 1977.
5. S.L.Shapiro, S.A.Teukolsky, Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, Wiley, New York, 1983.
6. А.Б.Мигдал, Д.Н.Воскресенский, Е.Е.Саперштейн, М.А.Троицкий, Псионные степени свободы в ядерной материи, Наука, М., 1991.
7. N.K.Glendenning, F.Weber, S.A.Moszkowski, Phys. Rev. C45, 844, 1992.
8. Г.С.Саакян, Физика нейтронных звезд, ОИЯИ, Дубна, 1996.
9. F.Hoyle, J.V.Narlikar, J.A.Wheeler, Nature, 203, 914, 1964.
10. S.I.Bastrukov, D.V.Podgainy, Phys. Rev. E54, N2, 1996.
11. G.Baym, C.Pethick, D.Pines, M.Ruderman, Nature, 224, 872, 1969.
12. S.I.Bastrukov, I.V.Molodtsova, V.V.Papoyan, F.Weber, J. Phys. G22, L33, 1996.
13. С.И.Баструков, И.В.Молодцова, А.А.Букатина, Астрофизика, 38, 123, 1995; S.I.Bastrukov, Phys. Rev. E53, 1917, 1996.
14. Д.В.Подгайный, С.И.Баструков, И.В.Молодцова, В.В.Папоян, Астрофизика, 39, 475, 1996.
15. D.W.Melzer, K.S.Thorne, Astrophys. J. 145, 514, 1996. K.S.Thorne, J.P.Ipser, Astrophys. Lett. 152, L71, 1968.
16. В.В.Папоян, Д.М.Седракан, Е.В.Чубарян, Астрон. ж., 48, 1195, 1971; Астрофизика, 8, 405, 1972.
17. S.Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, Oxford, 1961.
18. P.Ledoux, Th.Warlaven, in: Handbuch der Physik, Vol.51, 353, Ed. by S. Flugge, Springer, Berlin, 1958.
19. S.Chandrasekhar, E.Fermi, Astrophys. J. 118, 116, 1953.
20. S.I.Bastrukov, Int. J. Mod. Phys. D5, 45, 1996.

О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД I. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАКОПЛЕННОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Л.Ш.ГРИГОРЯН¹, Г.Ф.ХАЧАТРЯН²

Поступила 11 сентября 1996

Принята к печати 23 сентября 1996

Выведено релятивистское дифференциальное уравнение первого порядка для накопленного момента инерции сферически-симметрического небесного тела. Предложена приближенная формула, описывающая вклад релятивистских эффектов в момент инерции сверхплотной звезды. В случае конфигураций из несжимаемой жидкости эта аппроксимация описывает результаты численных расчетов Чандрасекара и Миллера с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от 0 до ∞ .

1. *Введение.* Вращение является общим свойством небесных тел. Оно детально изучено в ньютоновской теории тяготения (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Релятивистская теория медленно вращающихся звезд была предложена Хартлом [2]. Им же, совместно с Торном [3], были изучены модели вращающихся звездных конфигураций. Эти исследования были продолжены в [4-8] и других работах. Влияние вращения на параметры белых карликов и нейтронных звезд изучалось параллельно в [9-12] и других публикациях. Интерес к релятивистской теории вращающихся небесных тел значительно возрос в последнее десятилетие в связи с наблюдением ряда короткопериодических пульсаров и осознанием того обстоятельства, что вращение играет важную роль для конечной стадии звездной эволюции (теория гравитационного коллапса и вспышек сверхновых).

В п.2 выведено релятивистское уравнение для накопленного момента инерции медленно вращающегося сферически-симметрического небесного тела. В следующем разделе обсуждаются релятивистские поправки к полному моменту инерции. В Заключение приведены выводы работы.

2. *Релятивистское уравнение для накопленного момента инерции.* В случае стационарного аксиально-симметрического гравитационного поля можно ввести систему координат t, r, θ, φ , в которой квадрат интервала имеет вид [13]

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 e^\mu [d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi + \omega dt)^2], \quad (1)$$

где ν, λ, μ и ω являются функциями r, θ и угловой скорости вращения небесного тела Ω , измеренной удаленным наблюдателем.

Согласно [2] медленное вращение является малым возмущением, и поэтому в нулевом порядке по Ω метрический тензор зависит только от радиальной координаты:

$$v = v_0(r), \quad \lambda = \lambda_0(r), \quad \mu = \omega = 0 \quad \text{при} \quad \Omega = 0 \quad (2)$$

(шварцшильдовская система координат), и определяется релятивистскими уравнениями гидростатического равновесия для сферически-симметричного небесного тела:

$$\frac{dP}{dr} = -G(\rho + c^{-2}P) \frac{m + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \quad (a)$$

(3)

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2 \quad (b)$$

(уравнения Оппенгеймера-Волкова), где

$$e^{-\lambda_0} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \quad (a)$$

(4)

$$\frac{dv_0}{dr} = \frac{2G(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{r(rc^2 - 2Gm)} \quad (b)$$

В этих выражениях P и ρc^2 - давление и плотность полной энергии звездного вещества, $m(r)$ - тяготеющая масса, накопленная внутри сферического слоя радиуса r , G - ньютоновская гравитационная постоянная, а c - скорость света. Имея уравнение состояния

$$\rho = \rho(P) \quad (5)$$

вещества сверхплотного небесного тела, и, задавая центральное давление $P(0) = P_0$, можно определить радиус R и тяготеющую массу

$$M = m(r) \quad \text{при} \quad r \geq R \quad (6)$$

путем интегрирования (3) с начальным условием

$$m(0) = 0. \quad (7)$$

При этом радиус небесного тела $r = R$ определяется условием $P(R) = 0$ или $\rho(R) = \rho_s$, где ρ_s - плотность вещества на поверхности небесного тела. Функции $\lambda_0(r)$ и $v_0(r)$ определяются уравнениями (4). Результаты подобных расчетов подытожены в [14-19] и других работах.

Медленное вращение небесного тела приводит к релятивистскому эффекту увлечения инерциальных систем отсчета (см., например, [15]), благодаря которому

$$\omega(r) \neq \Omega, \quad (8)$$

где ω - угловая скорость вращения гравитирующего вещества в локально инерциальной системе отсчета:

$$\omega = \Omega + \omega. \quad (9)$$

Вращение приводит также к сферической, квадрупольной и другим

более сложным деформациям, которые определяются функциями ν , λ и μ . Из (1) видно, что ν , λ и μ являются четными функциями, а ω - нечетной функцией Ω . Поэтому в первом приближении по малому параметру $c\Omega R^2/GM$ (медленно вращающееся сферически-симметрическое небесное тело) можно считать

$$\nu \approx \nu_0(r), \quad \lambda \approx \lambda_0(r), \quad \mu \approx 0, \quad \omega \sim \Omega. \quad (10)$$

Функция $\varpi(r)$ определяется не диагональной компонентой уравнения Эйнштейна:

$$R_0^3 = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^3, \quad (11)$$

где R_{ik} - тензор Риччи пространства-времени, а

$$T_{ik} = (\rho c^2 + P)u_i u_k - P g_{ik} \quad (12)$$

- тензор энергии-импульса звездного вещества. В раскрытом виде (11) сводится к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\varpi}{dr} \right) + 4r^3 \varpi \frac{dj}{dr} = 0 \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad \varpi(\infty) = \Omega \quad (14)$$

(см., например, [2,3,6-11,16,18]). При этом

$$j(r) = e^{-\nu_0/2} \sqrt{1 - 2Gm/r c^2} \Rightarrow j(r) = 1 \quad \text{при } r \geq R. \quad (15)$$

Уравнение (13) элементарно интегрируется за пределами небесного тела [2,9]:

$$\frac{\varpi(r)}{\Omega} = 1 - \frac{2GI}{c^2 r^3} \quad \text{при } r \geq R. \quad (16)$$

В этом выражении $I = J/\Omega$ является релятивистским обобщением для медленно вращающейся системы ньютоновского понятия момента инерции (J - полный момент количества движения для небесного тела и гравитационного поля). Для вычисления релятивистского момента инерции, необходимо проинтегрировать уравнения Оппенгеймера-Волкова (3) совместно с (46), (13), а затем воспользоваться условиями непрерывности ϖ и $d\varpi/dr$ на поверхности небесного тела:

$$\frac{\varpi(R)}{\Omega} = 1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}, \quad \frac{d\varpi}{dR} = \frac{6GI\Omega}{c^2 R^4}. \quad (17)$$

При желании можно использовать интегральное представление [8,16]

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R j(r) r^4 \frac{\varpi(r)}{\Omega} \frac{\rho + c^{-2} P}{1 - 2Gm/r c^2} dr. \quad (18)$$

Для сего вывода достаточно проинтегрировать обе части уравнения (13) и в полученное выражение подставить

$$\frac{dj}{dr} = -\frac{4\pi Grj(\rho + c^{-2}P)}{c^2 - 2Gm/r}, \quad (19)$$

а также $d\varpi/dR$ из (17).

Можно обойтись без дифференциального уравнения второго порядка, каковым является (13). Для этого введем функцию $i(r)$, определяемую соотношением

$$i = \frac{c^2 \varpi' r^4}{2G(3\varpi + r\varpi')}, \quad (20)$$

где штрих над функцией означает операцию дифференцирования по r . Дифференцируя $i(r)$, имеем

$$\frac{di}{dr} = \frac{3c^2 \varpi r^3 (4\varpi' + r\varpi'')}{2G(3\varpi + r\varpi')^2}. \quad (21)$$

В свою очередь из (13) и (19) находим

$$4\varpi' + r\varpi'' = \frac{4\pi}{c^2} Gr(4\varpi + r\varpi') \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/r c^2}, \quad (22)$$

и поэтому

$$\frac{di}{dr} = 6\pi r^4 a(1+a) \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/r c^2}, \quad (23)$$

где

$$a = \frac{\varpi}{3\varpi + r\varpi'}. \quad (24)$$

Из определения (20) вытекает, что

$$1 - 3a = \frac{2Gi}{c^2 r^3}. \quad (25)$$

Подставив выражение для a в (23), приходим к уравнению

$$\frac{di}{dr} = \frac{8}{3} \pi r^4 \left(1 - \frac{2Gi}{c^2 r^3}\right) \left(1 - \frac{Gi}{2c^2 r^3}\right) \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/r c^2}. \quad (26)$$

Из него следует, что за пределами небесного тела $i(r)$ постоянно и, как видно из (17), (20), равно полному моменту инерции:

$$i(r) = I \quad \text{при} \quad r \geq R. \quad (27)$$

Согласно (14) в центре небесного тела

$$i(0) = 0. \quad (28)$$

Наконец, в случае слабого гравитационного поля (26) переходит в уравнение

$$\frac{di_N}{dr} = \frac{8}{3} \pi \rho r^4 \quad (29)$$

для накопленного момента инерции $i_N(r)$ ньютоновской теории. Аналогия с уравнениями (36), (6), (7) для накопленной массы позволяет утверждать, что $i(r)$ является накопленным моментом инерции релятивистской теории.

Объединяя (26) с уравнениями Оппенгеймера-Волкова (3), получим систему трех релятивистских дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих распределение давления, массы и момента инерции в объеме сферически-симметрического небесного тела. Как видим, (26) заменяет уравнения (46), (13).

Уравнение (26) впервые без вывода было использовано одним из авторов (Л.Ш.Г) в [17] для вычисления моментов инерции белых карликов и нейтронных звезд.

3. *Релятивистские поправки к моменту инерции.* Отличие релятивистского уравнения (26) от уравнения (29) ньютоновской теории можно учесть введением множителя σ :

$$I = \sigma I_N, \quad I_N = i_N(R). \quad (30)$$

Для модели из несжимаемой жидкости:

$$\rho = \text{const}, \quad (31)$$

релятивистский множитель σ был рассчитан Чандрасекаром и Миллером [6] путем численного интегрирования (46), (13). В модели (31) уравнения (3), (29) интегрируются аналитически:

$$R = r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho c^2 + P_0}{\rho c^2 - 3P_0} \right)^2}, \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3, \quad I_N = \frac{2}{5} M R^2, \quad (32)$$

где $r_0^2 = 3c^2/8\pi G\rho$ (см., например, [14]). На рис. 1 представлены результаты расчетов [6]. Из них следует, что σ стремится (а) к ньютоновскому пределу 1 при $r_g/R \rightarrow 0$ ($P_0/\rho c^2 \rightarrow 0$), и в то же время (б) к значению ≈ 2.00 в пределе $r_g/R \rightarrow 8/9$, когда $P_0/\rho c^2 \rightarrow \infty$. Заметим, что для сверхплотного звездного вещества отношение $P/\rho c^2$ не может превышать 1 [14], и поэтому соответствующие отрезки кривых (между вертикальными прямыми с $P_0/\rho c^2 = 1$ и ∞) представляют академический интерес. Более того,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{P}{\rho c^2} = \frac{1}{3}, \quad (33)$$

согласно свойству асимптотической свободы кварков. В последнем случае из рис. 1 видно, что σ может достигать значения порядка 30%. На рис. 1 результаты Чандрасекара и Миллера дополнены отношением σ к

$$\sigma_0 = \frac{2}{1 - 0.5x + \sqrt{1 - x + 0.09x^2}}, \quad x = \frac{r_g}{R}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (34)$$

Кривая σ/σ_0 свидетельствует о том, что $\sigma_0(x)$ описывает результаты расчетов $\sigma(x)$ с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от $P_0 = 0$ до $P_0 = \infty$.

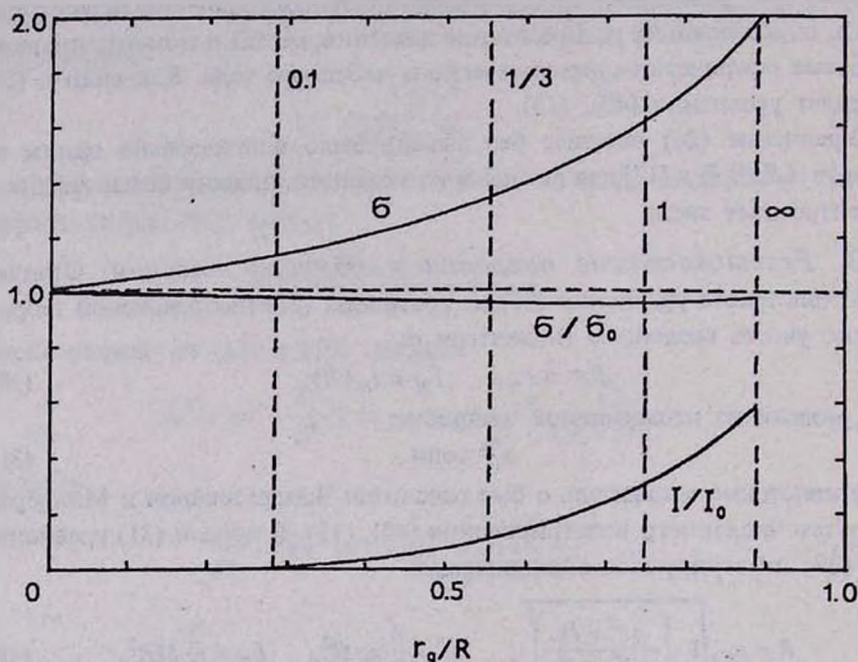


Рис. 1. Графики релятивистского момента инерции I , релятивистского множителя $\sigma = I/I_N$ и σ/σ_0 в зависимости от r_g/R для моделей сверхплотных звезд из несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$). Значения I и σ взяты из [6] (табл. 1), $I_0 = c^2(3c^2/8\pi G\rho)^{3/2}/2G$. Вертикальные прямые соответствуют $P_0/\rho c^2 = 0.1, 1/3, 1$ и ∞ .

В работе Равенола и Пстика [8] предложена формула

$$I \approx 0.21 \frac{MR^2}{1-x} \quad (35)$$

для момента инерции сферически-симметрического небесного тела. Столь простая формула с погрешностью $\sim 10\%$ воспроизводит результаты численных расчетов для 11 вариантов уравнения состояния $\rho = \rho(P)$ звездного вещества и конфигураций с не очень малыми массами ($0.5 M_\odot \leq M < 2 M_\odot$ для одного из вариантов уравнения состояния). Как отмечается в [8], (35) не применимо для модели с $\rho = \text{const}$. В этом случае согласно (34)

$$I \approx \frac{0.8 MR^2}{1 - 0.5x + \sqrt{1 - x + 0.09x^2}}. \quad (36)$$

Перейдем к выводу $\sigma_0(x)$ методом, который был использован Равенолом и Петиком для обоснования (35).

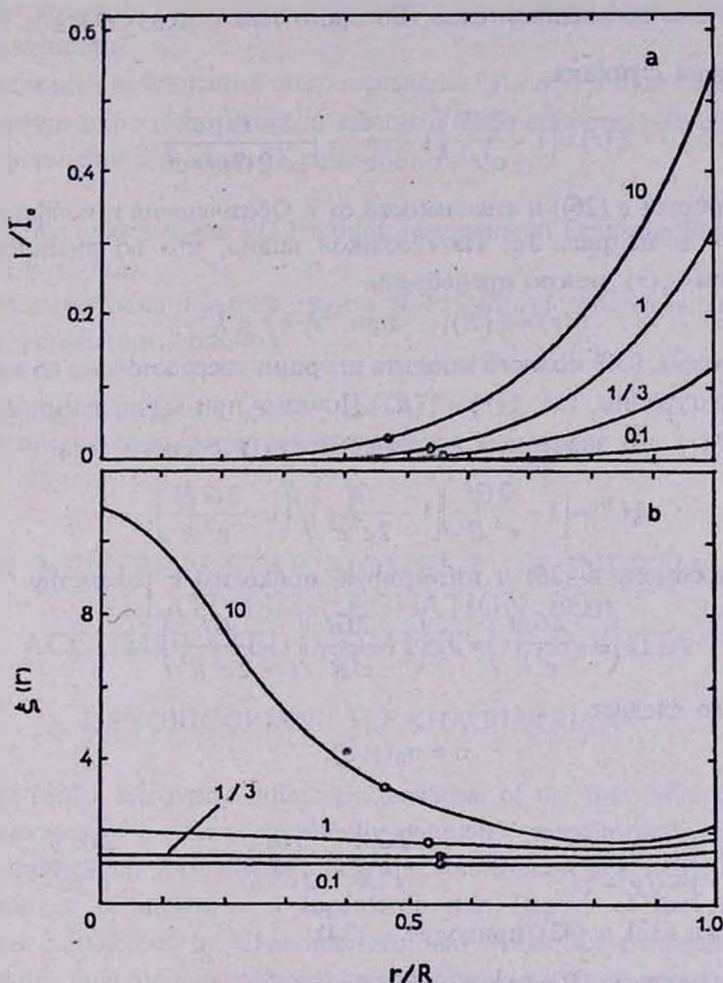


Рис. 2. Графики функций, входящих в релятивистское уравнение (26) и (38), в зависимости от радиальной координаты r , для моделей с $\rho = \text{const}$, R - радиус небесного тела, $I_0 = c^2 (3c^2/8\pi G \rho)^{3/2} / 2G$. Дальнейшие пояснения в тексте.

На рис. 2а приведены графики накопленного момента инерции $i(r)$ как функции радиальной координаты r для моделей из несжимаемой жидкости. Рядом с кривыми указаны значения центрального давления P_0 в единицах ρc^2 . Кружочки на кривых указывают расположение сфе-

рической поверхности $r = r_1$, внутри которой накоплено 5% полного момента инерции:

$$i(r_1) = 0.05 I. \quad (37)$$

Расположение кружочков согласуется с результатом ньютоновской теории:

$r_1 = (0.05)^{1/5} R \approx 0.55 R$, и указывает на то, что 95% момента инерции сосредоточено во внешнем слое небесного тела с $0.55 \leq r/R \leq 1$. На рис.

2b приведена функция

$$\xi(r) = \left(1 - \frac{2GI}{c^2 r^3}\right) \left(1 - \frac{GI}{2c^2 r^3}\right) \frac{1 + P/\rho c^2}{1 - 2Gm/r c^2} \quad (38)$$

(она фигурирует в (26)) в зависимости от r . Обозначения и конфигурации те же, что и на рис. 2a. Из графиков видно, что во внешнем слое изменением $\xi(r)$ можно пренебречь:

$$\xi(r) \approx \xi(R), \quad \text{при } r_1 \leq r \leq R. \quad (39)$$

Таким образом, 95% полного момента инерции сосредоточено во внешнем слое конфигурации, где $\xi(r) \approx \xi(R)$. Поэтому при вычислении I можно заменить $\xi(r)$ его значением на поверхности небесного тела:

$$\xi(R) = \left(1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}\right) \left(1 - \frac{GI}{2c^2 R^3}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right). \quad (40)$$

Производя замену в (26) и интегрируя, приходим к равенству

$$I \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \approx I_N \left(1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}\right) \left(1 - \frac{GI}{2c^2 R^3}\right), \quad (41)$$

из которого следует

$$\sigma \approx \sigma_0(y, z), \quad (42)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - z^2}}, \quad y = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} + \frac{5GI_N}{2c^2 R^3}, \quad z = \frac{2GI_N}{c^2 R^3}. \quad (43)$$

Подстановка (32) в (43) приводит к (34).

4. Заключение. В релятивистской теории момент инерции медленно вращающегося сферически-симметрического небесного тела определяется интегрированием уравнения (46) совместно с дифференциальным уравнением второго порядка (13), где ω - угловая скорость вращения звездного вещества в локально-инерциальной системе отсчета (см., например, [2,3,6-11,16,18]). В данной работе выведено релятивистское дифференциальное уравнение первого порядка (26) для накопленного момента инерции $i(r)$. Оно заменяет (46), (13) и совместно с уравнениями Оппенгеймера-Волкова (3) позволяет определить распределение давления, массы и момента инерции в объеме сферически-симметрического небесного тела.

Для релятивистского множителя σ , определяемого соотношением $I = \sigma I_N$ (I_N - момент инерции, вычисленный с помощью уравнения (29) ньютоновской теории), выведена приближенная формула (42). В случае конфигураций из несжимаемой жидкости σ_0 принимает вид (34) и воспроизводит результаты численных расчетов Чандресскара и Миллера [6] с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от нуля до бесконечности.

В следующей публикации аппроксимация $I \approx \sigma_0 I_N$ будет применена для конфигураций с плотностью $\rho \neq \text{const}$ и будет сопоставлена с приближенной формулой Равенола-Петтика (35).

В расчетах использован PC Pentium, подаренный Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства образования и науки Республики Армения.

¹ Институт прикладных проблем физики

² Ереванский государственный университет, Армения

ON NEUTRON STAR MOMENT OF INERTIA I. RELATIVISTIC EQUATION FOR ACCUMULATED MOMENT OF INERTIA

L.Sh.GRIGORIAN¹, H.F.KHACHATRIAN²

It is derived a relativistic differential equation of the first order for accumulated moment of inertia of spherically-symmetric celestial body. It is proposed an approximate formula describing the contribution of relativistic effects to the moment of inertia of a superdense star. Results of the numerical calculations carried out by Chandrasekhar and Miller for configurations of incompressible fluid are approximated by our formula within an accuracy of 5% for all values of central pressures from 0 to ∞ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.Л.Тассуль, Теория вращающихся звезд, Мир, М., 1982.
2. J.B.Hartle, Astrophys. J., 150, 1005, 1967.
3. J.B.Hartle, K.S.Thorne, Astrophys. J., 153, 807, 1968.

4. *J.B.Hartle*, *Astrophys. J.*, **161**, 111, 1970.
5. *J.B.Hartle*, *Astrophys. Space Sci.*, **24**, 385, 1973.
6. *S.Chandrasekhar, J.C.Miller*, *Mon. Notic. Roy. Astr. Soc.*, **167**, 63, 1974.
7. *J.M.Thomas*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **79**, 189, 1989.
8. *D.G.Ravenhall, C.J.Pethick*, *Astrophys. J.*, **424**, 846, 1994.
9. *Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, *Астрофизика*, **4**, 239, 551, 1968.
10. *В.В.Папоян, Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, *Астрофизика*, **5**, 97, 415, 1969.
11. *Г.Г.Арутюнян, Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, *Астрофизика*, **7**, 467, 1971;
Астрон. ж., **48**, 496, 1971.
12. *Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян, Г.С.Саакян, А.В.Саркисян*, *Астрофизика*, **33**, 69, 1990.
13. *J.B.Hartle, D.H.Sharp*, *Astrophys. J.*, **147**, 317, 1966.
14. *Г.С.Саакян*, *Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс*, Наука, М., 1972.
15. *Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер*, *Гравитация*, Мир, М., 1977.
16. *W.D.Arnett, R.L.Bowers*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **33**, 415, 1977.
17. *L.Sh. Grigorian, G.S.Sahakian*, *Astrophys. Space Sci.*, **95**, 305, 1983.
18. *G.Bao, E.Ostgaard*, *Inter. J. Mod. Phys. D*, **3**, 813, 1994.
19. *Г.С.Саакян*, *Физика нейтронных звезд*, Изд. ОИЯИ, Дубна, 1995.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА

Д.И. НАГИРНЕР, В.М. ЛОСКУТОВ

Поступила 21 октября 1996

Принята к печати 5 ноября 1996

Вычислена функция Грина линейного уравнения Компанейца, выражающаяся через функции Уинтгера $W_{2,\mu}(z)$ или функции Макдональда $K_{\mu}(z)$ с чисто мнимым индексом. Предложен метод расчета этих функций. Для больших значений μ асимптотическое решение Лангера уточнено во втором приближении Черри. Вместо с разложением в ряды при небольших μ и асимптотикой при больших значениях аргумента, указанное приближение позволяет вычислять функцию Грина с точностью до пяти значащих цифр. Решения уравнения Компанейца будут использованы для оценки точности численных методов и для расчета эволюции спектра фотоонного газа при комптоновском рассеянии, а также средних частот и дисперсии частот фотонов при различных начальных спектрах.

1. *Введение.* Уравнение, носящее имя А.С. Компанейца, было получено им в 1949г. (опубликовано в 1956 [1]). Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно применялось для решения многих астрофизических задач (см. обзоры [2-5]), в частности, для изучения эволюции спектров реликтового излучения [6,7] и вспышкающих компактных рентгеновских источников [8].

Уравнение Компанейца учитывает вынужденное рассеяние и поэтому нелинейно. Для нелинейного уравнения, по всей вероятности, не может быть найдено явного решения, в то время как в линейном приближении, справедливом, когда поле излучения не очень сильно, явное решение уравнения известно. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right] \quad (1)$$

Здесь через $x = h\nu/k_B T$ обозначена безразмерная частота (h и k_B - постоянные Планка и Больцмана, ν - обычная частота, T - температура электронного газа). Искомая функция $n(x, t)$ - среднее число заполнения фотонных состояний - зависит от частоты x и времени t . К уравнению следует добавить начальное условие, задав распределение $n(x, 0)$. Хотя уравнение (1) справедливо при условии $n \ll 1$, в силу его однородности относительно искомой функции n при решении уравнения можно в нее ввести произвольный численный множитель и оперировать с величинами порядка единицы.

Из уравнения (1), имеющего дивергентную форму, вытекает закон сохранения числа фотонов, а именно, прямым интегрированием можно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} x^2 n(x, t) dx = \int_0^{\infty} x^2 n(x, 0) dx. \quad (2)$$

Функция Грина уравнения (1), знание которой позволяет найти решение при любом начальном распределении $n(x, 0)$, была найдена еще самим А.С. Компанейцем методом разделения переменных и представлена в виде разложения по собственным функциям стоящего справа в (1) оператора, спектр которого включает как дискретные, так и непрерывные собственные значения. Соответствующие собственные функции в работе [1] были выписаны со ссылкой на работы других авторов. Их получение нетривиально. Они довольно сложны и до сих пор не вычислялись. Между тем расчет решения этого уравнения представляет интерес как сам по себе, так и для оценки точности численных методов решения кинетических уравнений, описывающих взаимодействие полей излучения с электронами в более сложных случаях.

В настоящей заметке мы получим выражение для функции Грина линейного уравнения Компанейца методом преобразования Лапласа и предложим способ вычисления функций, входящих в него.

2. Функция Грина и ее преобразование Лапласа. Для линейного уравнения (1) можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через соответствующее ему начальное распределение фотонов:

$$n(x, t) = \int_0^{\infty} G(x, x_1, t) n(x_1, 0) dx_1. \quad (3)$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (1)

$$\frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + G \right) \right] \quad (4)$$

с начальным условием

$$G(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1). \quad (5)$$

Интеграл (2) для этой функции переходит в

$$\int_0^{\infty} x^2 G(x, x_1, t) dx = x_1^2. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно решить методом преобразования Лапласа. Действительно, обозначив

$$\overline{G}(x, x_1, p) = \int_0^{\infty} G(x, x_1, t) e^{-pt} dt, \quad (7)$$

по обычным правилам теории этого преобразования получим, что функция (7) удовлетворяет уравнению, включающему начальное условие (5):

$$x^2 \frac{d^2 \overline{G}}{dx^2} + (x^2 + 4x) \frac{d\overline{G}}{dx} + (4x - p) \overline{G} = -\delta(x - x_1). \quad (8)$$

Однородное уравнение, соответствующее (8), принадлежит к типу вырожденных гипергеометрических уравнений, решения которого выражаются через функции Уиттекера $M_{2,\mu}(x)$ и $W_{2,\mu}(x)$. Краткие сведения об этих функциях приведены в справочнике Градштейна и Рыжика [9], на формулы из которого мы будем ссылаться.

Решение неоднородного уравнения (8) находим методом вариации произвольных постоянных и получаем обычное выражение для функции Грина преобразованного уравнения (8):

$$\overline{G}(x, x_1, p) = \frac{\Gamma(\mu - 3/2)}{\Gamma(1 + 2\mu)} x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} M_{2,\mu}(x_m) W_{2,\mu}(x_M), \quad \mu = \sqrt{p + 9/4}, \quad (9)$$

где x_m и x_M - меньшее и большее из x и x_1 , соответственно. Функция от меньшего аргумента мала при $x \rightarrow 0$: $M_{2,\mu}(x) \sim x^{\mu+1/2}$, а функция при больших значениях аргумента $W_{2,\mu}(x) \sim x^2 e^{-x/2}$, т.е. экспоненциально убывает.

3. *Обращение преобразования.* Для обращения преобразования Лапласа надо найти особые точки функции (9) на комплексной плоскости p . Эта функция имеет две изолированные особые точки, а именно, два полюса, в которых обращается в бесконечность гамма-функция, стоящая в числителе дроби в (9): $p = 0$, $\mu = 3/2$ и $p = -2$, $\mu = 1/2$. Соответствующие вычеты функции (9)

$$\operatorname{res}_{p=0} \overline{G}(x, x_1, p) = \frac{3}{6} x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} x^2 e^{-x/2} x_1^2 e^{x_1/2} = \frac{1}{2} x_1^2 e^{-x}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=-2} \overline{G}(x, x_1, p) &= -x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} M_{2,1/2}(x_m) W_{2,1/2}(x_M) = \\ &= \frac{x_1}{2x} (2 - x)(2 - x_1) e^{-x}, \end{aligned} \quad (11)$$

так как $M_{2,3/2}(x) = W_{2,3/2}(x) = x^2 e^{-x/2}$ и $M_{2,1/2}(x) = (x - x^2/2) e^{-x/2}$, $W_{2,1/2}(x) = -2 M_{2,1/2}(x)$.

Кроме полюсов функция (9) имеет линию ветвления, где корень, представляющий μ , чисто мнимая величина. После всего сказанного не представляет труда обратить преобразование (9). Беря вычеты в двух точках, и обходя линию ветвления, находим

$$\begin{aligned}
 G(x, x_1, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{pt} \overline{G}(x, x_1, p) dp = \\
 &= \frac{x_1^2}{2} e^{-x} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x_1} \right) e^{-2t} \right] + \frac{1}{2\pi i} e^{-9t/4} \\
 &\int_0^\infty e^{-u} du \left[\overline{G}(x, x_1, p = -9/4 - u - i0)_{\mu = i\sqrt{u}} - \overline{G}(x, x_1, p = -9/4 - u + i0)_{\mu = -i\sqrt{u}} \right] = \\
 &= \frac{x_1^2}{2} e^{-x} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x_1} \right) e^{-2t} \right] + \frac{1}{4\pi} x^{-2} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} x \\
 &\times \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} \left| \frac{\Gamma(-3/2) + i\sqrt{u}}{\Gamma(2i\sqrt{u})} \right|^2 W_{2, i\sqrt{u}}(x) W_{2, i\sqrt{u}}(x_1).
 \end{aligned} \tag{12}$$

При переходе к последнему равенству было использовано выражение функций Уиттекера W через функции M по формуле 9.220.4 из [9].

4. *Представление через с.ф.* Выражение (12) можно представить разложением по с.ф. оператора, являющегося самосопряженной формой стоящего справа в (1) линейного оператора Компанейца:

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d}{dx} \chi_p(x) \right] + \left(2x - \frac{x^2}{4} - 2 \right) \chi_p(x) = -p \chi_p(x). \tag{13}$$

Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned}
 G(x, x_1, t) &= \frac{x_1}{x} e^{(x_1-x)/2} \left[\chi_0(x) \chi_0(x_1) + \chi_2(x) \chi_2(x_1) e^{-2t} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu^2}(x_1) e^{-(9/4+\mu^2)t} d\mu \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

и совпадает с найденным в [1]:

Две дискретных с.ф. из этого набора

$$\chi_0(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-x/2}, \quad \chi_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2}} e^{-x/2} \tag{15}$$

ортогональны и нормированы на единицу:

$$\int_0^{\infty} \chi_0(x) \chi_2(x) dx = 0, \quad \int_0^{\infty} \chi_0^2(x) dx = \int_0^{\infty} \chi_2^2(x) dx = 1 \quad (16)$$

С.ф. непрерывного спектра

$$\chi_{9/4+\mu^2}(x) = \left[\frac{2}{\pi} \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{(1/4 + \mu^2)(9/4 + \mu^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{x} W_{2,1\mu}(x) \quad (17)$$

нормированы на δ -функцию

$$\int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu_1^2}(x) dx = \delta(\mu - \mu_1) \quad (18)$$

и ортогональны дискретным с.ф.

$$\int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_0(x) dx = \int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_2(x) dx = 0. \quad (19)$$

Вместе эти функции образуют полную систему на промежутке $[0, \infty)$, что выражается условием полноты, обеспечивающим выполнение начального условия (5):

$$\chi_0(x) \chi_0(x_1) + \chi_2(x) \chi_2(x_1) + \int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu^2}(x_1) d\mu = \delta(x - x_1). \quad (20)$$

Таким образом, функция Грина полностью определена. Для сравнения приведем решение стационарного уравнения, также в линейном приближении.

5. Решение стационарного уравнения. Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (1) переходит в однородное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn(x)}{dx} + n(x) \right) \right] = 0. \quad (21)$$

Однородное уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dn(x)}{dx} + n(x) = \frac{C_2}{x^4}. \quad (22)$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$n(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \int_x^{\infty} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (23)$$

Здесь $\alpha > 0$ - некоторое число. Решение в виде интеграла имеет смысл только при $x \geq \alpha$. Однако взять $\alpha = 0$ нельзя, так как подинтегральная функция при $x' \rightarrow 0$ стремится к бесконечности так сильно, что интеграл в (23) расходится. Первое же решение описывает распределение Вина, т.е. правильное стационарное решение, к которому стремятся нестационарные решения на больших временах. Второе решение надо, по-видимому, отбросить, как нефизическое.

Если в среде имеются стационарные источники фотонов, то задача о поле излучения в электронной бесконечной среде сводится к уравнению вида (21) с источниками

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn(x)}{dx} + n(x) \right) \right] = f(x). \quad (24)$$

Оно решается так же, как и (21). Проинтегрируем уравнение (24) по x от 0 до x

$$\frac{dn(x)}{dx} + n(x) = \frac{1}{x^4} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1. \quad (25)$$

Получившееся линейное уравнение имеет следующее решение:

$$n(x) = e^{-x} \int_0^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4} \int_0^{x'} x_1^2 f(x_1) dx_1 = e^{-x} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (26)$$

Стационарная функция Грина, определяемая формулой

$$n(x) = \int_0^\infty G(x, x_1) f(x_1) dx_1, \quad (27)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dG(x, x_1)}{dx} + G(x, x_1) \right) \right] = \delta(x - x_1) \quad (28)$$

и может быть представлена в явном виде

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}, & x_1 \leq x, \\ 0, & x_1 \geq x. \end{cases} \quad (29)$$

В частном случае степенного спектра источников $f(x) = x^\beta$, $\beta > 0$ решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$n(x) = \frac{x^\beta}{\beta(\beta+3)} e^{-x} F(\beta, \beta+1, x) \sim \begin{cases} \frac{x^\beta}{\beta(\beta+3)}, & x \ll 1, \\ \frac{x^{\beta-1}}{\beta+3}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (30)$$

В то время как функции, входящие в решение стационарного уравнения, элементарны, расчет функций Уиттекера с мнимым индексом-задача непростая.

6. *Вычисление функций Уиттекера.* Для расчета эволюции спектра излучения необходимо вычислять функции $W_{2,i\mu}(z)$ при любых положительных z и μ . В разных областях их изменения приходится использовать различные формулы.

При больших аргументах z можно вычислить рассматриваемую функцию по асимптотической формуле 9.227 из книги [9]:

$$W_{2,i\mu}(z) = z^2 e^{-z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^n} \prod_{k=1}^n [\mu^2 + (k-5/2)^2]. \quad (31)$$

В остальных случаях удобнее воспользоваться ее связью с функцией Макдональда.

Функция $W_{2,i\mu}(z)$, согласно рекуррентным формулам 9.234 из [9], выражается через $W_{0,i\mu}(x)$:

$$W_{2,i\mu}(z) = \left[z(z/2 - 1) - (1/4 + \mu^2) \right] W_{0,i\mu}(z) - 2z(z/2 - 1) W'_{0,i\mu}(z), \quad (32)$$

а функция нулевого порядка по формуле 9.235 (2) из [9] связана с функцией Макдональда:

$$W_{0,i\mu}(z) = \sqrt{z/\pi} K_{i\mu}(z/2). \quad (33)$$

Таким образом, требуемая функция выражается через функцию Макдональда и ее производную

$$W_{2,i\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \left[\left(\frac{z^2}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{3}{4} - \mu^2 \right) K_{i\mu}(z/2) - z \left(\frac{z}{2} - 1 \right) K'_{i\mu}(z/2) \right]. \quad (34)$$

Именно функции Макдональда мы и будем вычислять. Все приведенные функции вещественны, несмотря на мнимый индекс $i\mu$.

При достаточно малых z воспользуемся связью функции Макдональда с модифицированными функциями Бесселя и их разложениями в ряды (формулы 8.485 и 8.445 из [9]):

$$\begin{aligned}
 K_{i\mu}(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{i}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} [I_{i\mu}(z) - I_{-i\mu}(z)] = \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{i}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \left[\frac{(z/2)^{i\mu}}{\Gamma(1+n+i\mu)} - \frac{(z/2)^{-i\mu}}{\Gamma(1+n-i\mu)} \right] = \\
 &= \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \frac{\Gamma_1(1+n, \mu) \cos(\mu \ln(z/2)) - \Gamma_R(1+n, \mu) \sin(\mu \ln(z/2))}{\prod_{k=1}^n (\mu^2 + k^2)}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Соответственно для производной получается

$$\begin{aligned}
 K'_{i\mu}(z) &= \frac{1}{\mu z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \{ [2n\Gamma_1(1+n, \mu) - \mu\Gamma_R(1+n, \mu)] \cos(\mu \ln(z/2)) - \\
 &\quad - [2n\Gamma_R(1+n, \mu) + \mu\Gamma_1(1+n, \mu)] \sin(\mu \ln(z/2)) \} \prod_{k=1}^n \frac{1}{\mu^2 + k^2}.
 \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\Gamma_R(x, y)$ и $\Gamma_1(x, y)$ - вещественная и мнимая части гамма-функции комплексного аргумента $\Gamma(x + iy)$. Ряды (35) и (36) сходятся при любых z , однако практически производить по ним вычисления целесообразно при $z < \mu < 10$.

При больших значениях индекса (точнее, его модуля) μ применим асимптотические формулы. Наилучшими такими формулами, дающими равномерные по аргументу асимптотики при больших значениях порядка бесселевых функций, являются формулы Лангера. Метод получения таких формул изложен, например, в справочнике [10].

Согласно этому методу, сначала находятся решения уравнения в приближении ВКБ. Для функций Макдональда $w = K_{i\mu}(z)$, определяющие их уравнение

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 - \mu^2) w = 0 \quad (37)$$

надо решить отдельно для $z < \mu$ и $z > \mu$. Затем эти решения уточняются для области вблизи точки $z = \mu$ подбором асимптотического уравнения, которым служит уравнение Эйри. Следуя этому методу, получаем, что при больших μ

$$K_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v}{u}\right)^{1/2} [J_{1/3}(\mu v) + J_{-1/3}(\mu v)], & z \leq \mu, \\ e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v}{u}\right)^{1/2} K_{1/3}(\mu v), & z \geq \mu, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$u = \left| \frac{z^2}{\mu^2} - 1 \right|^{1/2}, \quad v = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, & z \leq \mu, \quad 0 \leq u < 1, \\ u - \operatorname{arctg} u, & z \geq \mu, \quad 0 \leq u < \infty. \end{cases} \quad (39)$$

Для $z = \mu$ обе формулы дают один и тот же результат. Действительно, переходя в них к пределу при $u \rightarrow 0$, $v \sim u^3/3 \rightarrow 0$, получаем, что

$$K_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{u^3}{3u}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu u^3}{6}\right)^{-1/3} \frac{1}{\Gamma(2/3)} \\ e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{u^3}{3u}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin(\pi/3)} \frac{\pi}{2\Gamma(2/3)} \left(\frac{\mu u^3}{6}\right)^{-1/3} \end{cases} = \frac{\pi}{3\Gamma(2/3)} \left(\frac{6}{\mu}\right)^{1/3} e^{-\pi\mu/2}. \quad (40)$$

Из (34) и (38) вытекает следующая асимптотика, справедливая при $\mu \gg z$:

$$W_{2,i\mu}(z) \sim -(2z)^{1/2} \mu^{3/2} e^{-\pi\mu/2} \cos\left(\mu \ln \frac{4\mu}{ez} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (41)$$

Эта асимптотика согласуется с условием нормировки с.ф. (18) и обращает функцию Грина при $t=0$ в δ -функцию, согласно начальному условию (5).

Оказалось, что формулы Лангера недостаточно точны для наших целей. Поэтому потребовалось уточнить и их. Способ уточнения результатов, получаемых методом Лангера, дан в работе Черри [11]. В основе этого уточнения лежит та же идея, что и у Лангера: у близких дифференциальных уравнений близки решения. Общая теория построения асимптотических формул для уравнений второго порядка с малым множителем перед второй производной изложена, например, в книге [12]. Здесь мы воспроизведем схему оригинальной работы Черри.

7. Метод Черри. Исходим из точного уравнения для функции, несколько отличной от рассматриваемой ранее: $w_+ = \sqrt{\zeta} K_{i\mu}(\lambda\sqrt{1+\zeta^2})$, т.е. при $z = \lambda\sqrt{1+\zeta^2}$, где λ — некоторый параметр, близкий к μ , введенный

для удобства и подлежащий определению в дальнейшем. Эта функция удовлетворяет уравнению, получающемуся из (37):

$$\begin{aligned} (1 \mp \zeta^2)^2 \frac{d^2 w_*}{d\zeta^2} - 2 \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta} \frac{dw_*}{d\zeta} + \\ + \left\{ \frac{5}{4} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) - \zeta^2 [\lambda^2 (1 \mp \zeta^2) - \mu^2] \right\} w_* = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Теперь перейдем к новой переменной, которую обозначим, как и раньше, через v , хотя эта новая переменная выражается через ζ точно так же, как старое v через u . В результате подстановки получается уравнение в новой переменной

$$\frac{d^2 w_*}{dv^2} + Q w_* = 0, \quad (43)$$

где коэффициент при w_* представлен как функция переменной ζ :

$$Q = \frac{5}{4} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^6} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) - (\lambda^2 - \mu^2) \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \pm \mu^2. \quad (44)$$

Теперь подберем уравнение стандартного вида, которое было бы близко к рассматриваемому при малых ζ и v . Будем исходить из уравнений, решения которых известны и близки к функциям, входящим в асимптотики (38). Напишем подгоночные уравнения в виде одного уравнения с вариантами знака:

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \left[\pm v^2 + \frac{5}{36} \frac{1}{\xi^2} \right] V = 0. \quad (45)$$

Здесь v - величина, близкая к μ и подлежащая выбору из некоторых соображений. Решениями уравнения (45) являются функции

$$V = e^{-\pi i/2} \sqrt{\xi} \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} [J_{1/3}(v\xi) - J_{-1/3}(v\xi)], & \text{верхний знак,} \\ K_{1/3}(v\xi), & \text{нижний знак.} \end{cases} \quad (46)$$

Постоянные в решении (46) выбраны, исходя из условия совпадения с решением ВКБ при не малых ζ , т.е. они те же, что и в (38).

Пойдем "навстречу" уравнению (43), т.е. модифицируем уравнение (45) так, чтобы оно было бы как можно ближе к (43). Для этого сделаем замены независимой переменной и решения при помощи одной функции:

$\xi = \phi(v)$, $V = \sqrt{\phi'(v)} W$. Для W в функции v получится уравнение, по форме совпадающее с (43):

$$\frac{d^2 W}{d v^2} + R W = 0, \quad (47)$$

где обозначено

$$R = \frac{1}{2} \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{3}{4} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2 + \frac{5}{36} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \pm v^2 (\phi')^2. \quad (48)$$

Кажется заманчивым просто приравнять R из (47) величине Q из (43), т.е. правые части равенств (44) и (48), и из полученного уравнения определить функцию $\phi(v)$. Однако решить столь сложное уравнение аналитически невозможно. Поэтому был предложен метод приближенной подгонки путем разложения функции $\phi(v)$, а также постоянных λ и v в ряды по обратным степеням μ . В этом и заключается сущность метода Черри.

Разложим три величины, подлежащие определению, в ряды по обратным четным степеням большого параметра μ :

$$\phi(v) = v + \frac{\phi_1(v)}{\mu^2} + \frac{\phi_2(v)}{\mu^4} + \frac{\phi_3(v)}{\mu^6} + \dots, \quad (49)$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = 1 + \frac{\gamma_1}{\mu^2} + \frac{\gamma_2}{\mu^4} + \frac{\gamma_3}{\mu^6} + \dots, \quad \frac{v^2}{\mu^2} = 1 + \frac{c_1}{\mu^2} + \frac{c_2}{\mu^4} + \frac{c_3}{\mu^6} + \dots. \quad (50)$$

Разлагая комбинации функций, входящих в выражение для R , по обратным степеням $1/\mu^2$, получаем разложение R . Это разложение надо приравнять величине Q из (44). Из равенств, получающихся в результате приравнивания нулю коэффициентов при трех последовательных степенях $1/\mu^2$, находим выражения для первых производных трех функций:

$$\phi_1' = \frac{c_1}{2} \mp \left[\frac{5}{72} \frac{1}{v^2} - \frac{5}{8} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^6} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) + \frac{\gamma_1}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right], \quad (51)$$

$$\phi_2' = \frac{c_2}{2} + c_1 \phi_1' - \frac{1}{2} (\phi_1')^2 \mp \left(\frac{1}{4} \phi_1'' + \frac{5}{36} \frac{\phi_1'}{v^2} - \frac{5}{36} \frac{\phi_1}{v^3} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \phi_3' = & \frac{c_3}{2} + c_1 \phi_2' + c_2 \phi_1' + \frac{c_1}{2} (\phi_1')^2 - \phi_1' \phi_2' \mp \left[\frac{1}{4} \phi_2'' - \frac{3}{8} (\phi_1')^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \phi_1' \phi_1'' + \frac{5}{36} \frac{\phi_2'}{v^2} - \frac{5}{36} \frac{\phi_2}{v^3} + \frac{5}{24} \frac{\phi_1'^2}{v^4} - \frac{5}{18} \frac{\phi_1 \phi_1'}{v^3} + \frac{5}{72} \frac{(\phi_1')^2}{v^2} + \frac{\gamma_3}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

8. *Три первых порядка.* По полученным выражениям для производных $\phi_i'(v)$ можно последовательно найти и сами функции $\phi_i(v)$, приняв во внимание связь дифференциалов $dv = \zeta^2 d\zeta / (1 \mp \zeta^2)$. При этом оказывается, что все интегралы берутся и их можно находить подбором численных коэффициентов. Константы λ и v подбираются так, чтобы наилучшим возможным образом приблизить подгоночное уравнение к точному около точки, где модуль порядка функции Макдональда μ и аргумент этой функции $z = \lambda \sqrt{1 \mp \zeta^2}$ близки (в приближении Лангера - равны). Эта область содержит так называемую классическую точку поворота, при переходе через которую изменяется поведение решения: с одной стороны, при $z \geq \mu$, согласно формулам (38) решение экспоненциально убывает, а с другой - носит колебательный характер.

Можно поступить одним из двух способов. В указанной области, где величины ζ и v малы, можно разложить v , а затем и производные $\phi_i'(v)$ по степеням ζ . Постоянные γ_i и c_i выбираются таким образом, чтобы при $\zeta \rightarrow 0$ производная $\phi_i'(v)$ имела порядок ζ^2 или, что то же самое $v^{2/3}$. Сами функции при малых v имеют порядок $v^{5/3}$ (или ζ^5). Можно вести разложение по степеням v , как делалось в [11]. Для этого необходимо обращать разложение v по степеням ζ^2 и находить разложения степеней ζ по степеням v . Первый способ оказался менее трудоемким.

Из (51) находим $\gamma_1 = -1/35$, $c_1 = 23/525$, а

$$\phi_1(v) = \frac{23}{1050} v \pm \frac{5}{72} \frac{1}{v} \mp \frac{5}{24} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{\zeta} \pm \frac{1}{70} \zeta. \quad (54)$$

Далее, таким же образом, по (52) определяем постоянные и функции второго порядка: $\gamma_2 = -864/398125$, $c_2 = 604256/125409375$,

$$\begin{aligned} \phi_2(v) = & \frac{3139109}{1003275000} v \pm \frac{23}{15120} \frac{1}{v} - \frac{1255}{31104} \frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{1008} \zeta \pm \frac{5}{576} \frac{1}{\zeta} - \frac{25}{1728} \frac{1}{\zeta^3} \right] \pm \\ & \pm \frac{14333}{9555000} \zeta + \frac{17}{3675} \frac{1}{\zeta} \mp \frac{463}{5760} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{3757}{4480} \frac{1}{\zeta^5} \mp \frac{221}{128} \frac{1}{\zeta^7} + \frac{1105}{1152} \frac{1}{\zeta^9}. \end{aligned} \quad (55)$$

Наконец, в третьем порядке получаются следующие результаты: две постоянные $\gamma_3 = -86884704/101929953125$, $c_3 = 101889710752/41281631015625$ и функция

$$\begin{aligned} \phi_3(v) = & \frac{133862958329}{94358013750000} v \pm \frac{3139109}{14447160000} \frac{1}{v} - \frac{4153}{6531840} \frac{1}{v^3} \pm \frac{272075}{2239488} \frac{1}{v^5} - \\ & - \frac{1}{v^2} \left(\frac{14333}{137592000} \zeta \pm \frac{17}{52920} \frac{1}{\zeta} - \frac{463}{82944} \frac{1}{\zeta^3} \pm \frac{3757}{64512} \frac{1}{\zeta^5} - \frac{1105}{9216} \frac{1}{\zeta^7} \pm \frac{5525}{82944} \frac{1}{\zeta^9} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{v^3} \left(\frac{1}{70560} \zeta^2 + \frac{65}{96768} \frac{1}{\zeta^2} \mp \frac{25}{6912} \frac{1}{\zeta^4} + \frac{125}{41472} \frac{1}{\zeta^6} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{v^4} \left(\frac{251}{145152} \zeta \pm \frac{1255}{82944} \frac{1}{\zeta} - \frac{6275}{248832} \frac{1}{\zeta^3} \right) \pm \\ & \pm \frac{1077482173}{2096844750000} \zeta + \frac{250729}{401310000} \frac{1}{\zeta} \mp \frac{30399323}{4815720000} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{142531199}{48921600} \frac{1}{\zeta^5} \mp \\ & \mp \frac{27292009}{3763200} \frac{1}{\zeta^7} + \frac{19769579}{483840} \frac{1}{\zeta^9} \mp \frac{314735}{3584} \frac{1}{\zeta^{11}} + \frac{82825}{1024} \frac{1}{\zeta^{13}} \mp \frac{82825}{3072} \frac{1}{\zeta^{15}}. \end{aligned} \quad (56)$$

В заключение этого пункта замтим, что переход от формул Черри к формулам Лангера осуществляется заменой функции и постоянных их нулевыми приближениями, т.е. константы λ и v заменяются на μ , а функция $\phi(v)$ на v .

9. *Схема расчета функции Грина.* Изложим сначала алгоритм вычисления функций Макдональда с большим по модулю мнимым порядком.

Из приведенных выше соотношений получается следующая результирующая формула

$$\begin{aligned} K_{1\mu}(z) \sim e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{\phi(v)\phi'(v)}{\zeta} \right)^{1/2} \times \\ \times \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} [J_{1/3}(v\phi(v)) + J_{-1/3}(v\phi(v))], & z = \lambda\sqrt{1-\zeta^2}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \\ K_{1/3}(v\phi(v)), & z = \lambda\sqrt{1+\zeta^2}, \quad \zeta \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь сначала по величине μ находятся λ и $v = \sqrt{\mu^2 - c}$ по формулам (50). Далее по значению z определяются значения ζ и v , а затем значения коэффициентных функций в разложениях $\phi(v)$ и ее производных. Все это делается в третьем приближении по $1/\mu^2$. Вблизи точки поворота надо использовать разложения по степеням переменных, от которых зависят эти функции. Более удобными являются разложения по степеням ζ . Как всегда для первого соотношения между z и μ во всех формулах

берется верхний знак, а для второго - нижний. Все соответствующие коэффициенты разложений в обоих случаях совпадают по модулю, но примерно через один имеют одинаковые и противоположные знаки.

Следует сказать, что при вычислении функций и их производных по точным формулам, даже при не очень малых ζ , происходит сильная потеря точности вследствие большого числа сокращающихся степеней. Поэтому при таких ζ использовались два способа регуляризации. В первом - функции разлагались в степенные ряды по ζ , причем приходилось удерживать большое число слагаемых (до 20). Во втором способе в разложениях выделялись только те слагаемые, которые сокращаются, а остаток ряда вычислялся точно.

Для вычисления функции Уиттекера необходимо кроме самой функции Макдональда знать еще и ее производную. Для ее получения просто дифференцируем асимптотику функции. Удобнее продифференцировать логарифм асимптотики. Для логарифмической производной находим

$$\frac{K'_{\mu}(\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2})}{K_{\mu}(\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2})} \sim \mp \frac{\zeta}{2\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2}} \left[-\frac{1\mp\zeta^2}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\phi'(v)}{\phi(v)} + \frac{\phi''(v)}{\phi(v)} \pm 2v\phi'(v)A \right]. \quad (58)$$

Здесь для краткости обозначено

$$A = \begin{cases} \frac{J_{-2/3}(v\phi(v)) - J_{2/3}(v\phi(v))}{J_{1/3}(v\phi(v)) + J_{-1/3}(v\phi(v))}, & \text{верхний знак,} \\ \frac{K_{2/3}(v\phi(v))}{K_{1/3}(v\phi(v))}, & \text{нижний знак.} \end{cases} \quad (59)$$

В квадратной скобке в (58) стоят слагаемые, которые вблизи точки поворота велики, но частично взаимно сокращаются. Это слагаемые $-1/\zeta^3$ и $(1/3)\phi'(v)/\phi(v)$. Подставив разложения функций по степеням $1/\mu^2$ и ζ^2 , получим

$$\pm \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\phi'(v)}{\phi(v)} \sim \pm \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta^3/3 \pm \zeta^5/5} \sim \pm \frac{2}{5} \frac{1}{\zeta}. \quad (60)$$

После сокращения остается слагаемое порядка $1/\zeta$, которое компенсируется множителем ζ перед всем выражением справа.

Имея с.ф. $W_{2,\mu}(z)$, можно вычислить функцию Грина (14). Следует отметить, что при малых временах t подинтегральная функция в (14) начинает убывать только при очень больших μ . Для усиления сходимости интеграла в (14) у с.ф. пришлось выделить асимптотику (41), которая

дает точность лучше, чем 1%. Возникающее в произведении $W_{2,i\mu}(x)W_{2,i\mu}(x_1)$ произведение косинусов заменялось на разность тригонометрических функций и асимптотические части интеграла вычислялись отдельно. Оставив только главные слагаемые в разложениях по μ , представим асимптотическую часть интеграла (14) в виде

$$I = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} x \times \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 t} d\mu \left[\sin \left(2\mu \ln \frac{4\mu}{e\sqrt{xx_1}} \right) + \cos \left(\mu \ln \frac{x}{x_1} \right) \right] = I_1 + I_2. \quad (61)$$

Второй интеграл (с косинусом) вычисляется точно и дает приближение функции Грина к δ -функции при малых t .

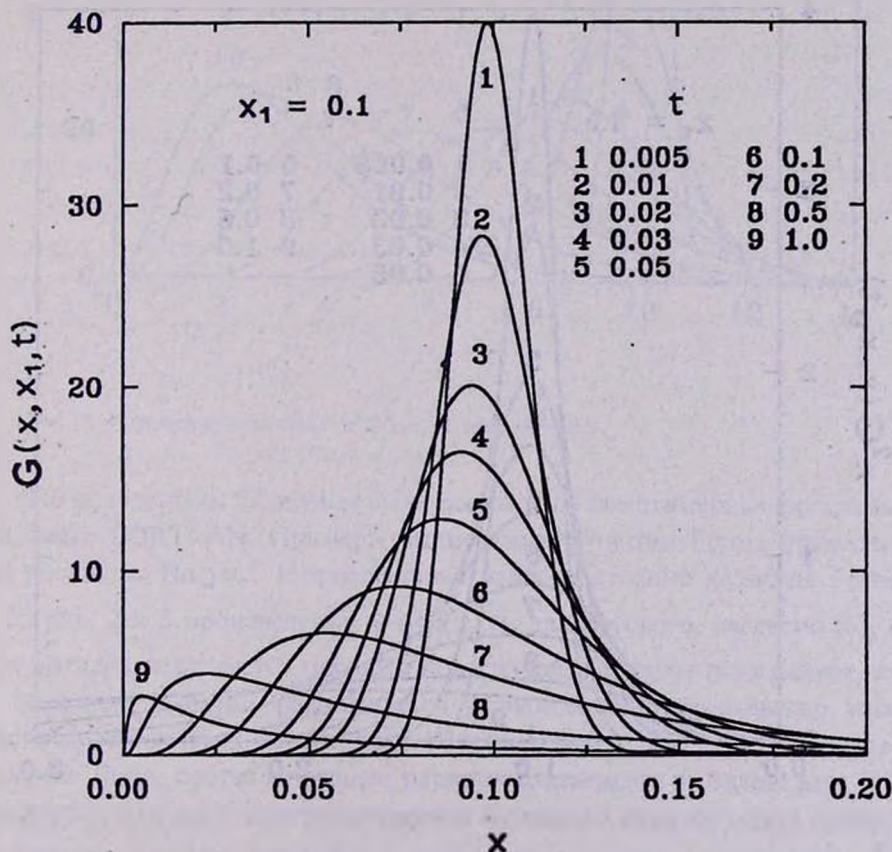


Рис. 1. Эволюция функции Грина $G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 0.1$.

$$I_2 = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{\ln^2(x/x_1)}{4t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{(x_1-x)/2} \delta(\ln x - \ln x_1) = \delta(x - x_1). \quad (62)$$

В то же время интеграл от первого слагаемого в квадратных скобках

$$I_1 = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} d\mu \sin\left(2\mu \ln \frac{4\mu}{e\sqrt{xx_1}}\right) \quad (63)$$

является обычной функцией и ограничен при конечных x и x_1 даже при $t = 0$, хотя вычисление его при $t \ll 1$ очень трудоемко. Оставшаяся часть интеграла разбивалась на несколько промежутков, к которым применялась квадратурная формула Гаусса.

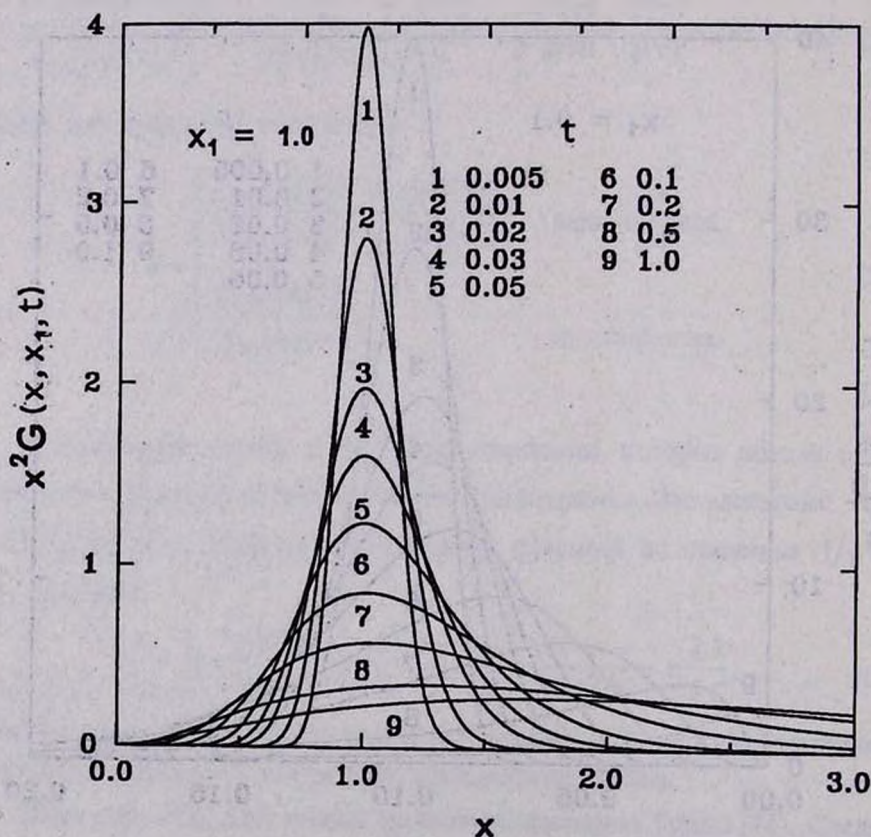


Рис. 2. Изменение величины $x^2 G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 1.0$.

При конкретных начальных распределениях фотонов по энергиям, согласно (3), сначала можно вычислить интеграл по аргументу x_1 , а затем по параметру μ . При этом вычисление интеграла по μ упрощается.

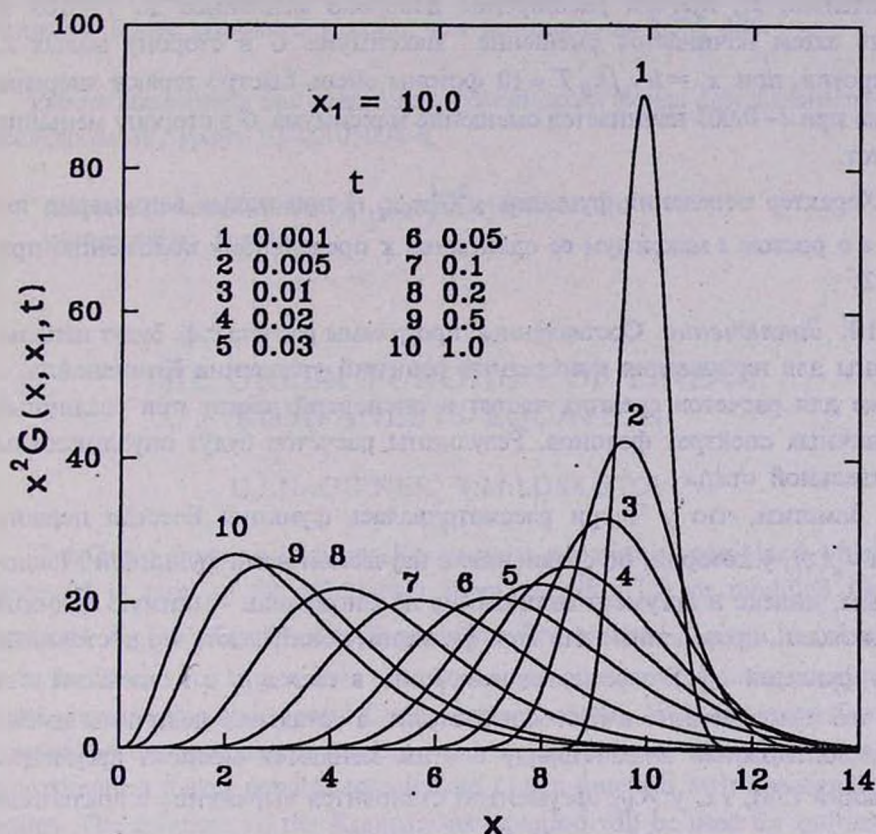


Рис. 3. Изменение величины $x^2 G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 10.0$.

По полученным формулам были составлены компьютерные программы на языке FORTRAN. Примеры вычисления функции Грина приведены на рисунках. На рис. 1 представлена непосредственно функция Грина, а на рис. 2 и 3 произведение $x^2 G(x, x_1, t)$, для которого, согласно (6), во все времена сохраняется площадь под кривой. Графики показывают, как с течением времени расплывается первоначально бесконечно узкое распределение. Предельным распределением при $t \rightarrow \infty$ является распределение Вина, соответствующее первому слагаемому в разложении (12), не зависящему от t . Заметим, что сама функция Грина не имеет прямого физического смысла. Произведение $x^2 G$ пропорционально числу фотонов, а $x^3 G$ - энергии.

Рис. 1 отражает эволюцию функции Грина, когда начальная частота $x_1 = h\nu_1/k_B T = 0.1$ и энергия переходит от электронов к фотонам. При $x_1 \leq 1$ сначала кривая $G(x, x_1, t)$ расширяется примерно симметрично относительно x_1 , причем расширение довольно медленное до $t \approx 0.05$ и лишь затем начинается смещение максимума G в сторону малых x . Напротив, при $x_1 = h\nu_1/k_B T = 10$ фотоны очень быстро теряют энергию и уже при $t \sim 0.001$ начинается смещение максимума G в сторону меньших частот.

Характер поведения функции $x^2 G(x, x_1, t)$ при малых t примерно тот же, а с ростом t максимум ее сдвигается к предельному положению при $x = 2$.

10. *Заключение.* Составленные программы расчета с.ф. будут использованы для нахождения конкретных решений уравнения Компанейца, а также для расчетов средних частот и дисперсий частот при различных первичных спектрах фотонов. Результаты расчетов будут опубликованы в отдельной статье.

Заметим, что у Черри рассматривалась функция Бесселя первого рода $J_\mu(z)$, у которой, по сравнению с изучаемой нами функцией Макдональда, индекс и аргумент отличаются на множитель - мнимую единицу i . Выкладки, проведенные для этой функции, показывают, что постоянные γ_l и функции $\phi_l(\nu)$ с четными номерами, а также c_l с нечетными - те же, что и полученные в настоящей статье, а остальные величины имеют противоположный знак. Наряду с этим меняются местами аргументы функций (38), т.е. у $K_{1/3}$ аргументом становится выражение с арктангенсом, а у $J_{1/3}$ - с логарифмом. Изменяется и численный множитель асимптотики в соответствии с определением функций Бесселя.

В статье [11] приводятся только коэффициенты γ_1 и c_1 (там эти коэффициенты обозначены γ_0 и c_0 , наше обозначение нам кажется более последовательным). Они совпадают с найденными нами для $J_\mu(z)$. Кроме того, в [11] даются разложения λ и ν по степеням $1/\mu^2$, из которых следует, что γ_2 и c_2 также совпадают с нашими, а постоянные третьего порядка несколько отличаются. Выражения для функций выше первого порядка в [11] не приводятся совсем. Заметим, что формулы для функций и их разложений выводились нами с помощью системы REDUCE и несколько раз перепроверялись.

Заметим также, что методом Черри мы получили формулы третьего приближения, которое уже очень громоздко и для расчета функций в этом приближении требуется очень много слагаемых в разложениях около точки перемены знака разности $\mu - z$. Поэтому при численных расчетах

с.ф. мы ограничились вторым приближением, что вместе с другими формулами обеспечило точность расчетов $W_{2,l\mu}(z)$ в пять значащих цифр. Мы все же привели результаты для третьего приближения, которое можно использовать для повышения точности расчетов, если их производить на машинах более высокого класса, чем компьютеры IBM 486.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 95-02-05004-а.

Астрономический институт Санкт-Петербургского университета, Россия

THE GREEN FUNCTION OF LINEAR KOMPANEETS EQUATION

D.I.NAGIRNER, V.M.LOSKUTOV

The Green function of linear Kompaneets equation is computed which is expressed in term of the Whittaker functions $W_{2,l\mu}(z)$ or modified Bessel functions $K_{l\mu}(z)$ of purely imaginary index. The method is given to calculate these functions. For large values of μ the Langer asymptotic solutions are made more precise using the second Cherry approximation. With the expansion in series when the argument is not large and the asymptotics when it is large the approximation makes possible to calculate Green function with five significant figures. The solutions of the Kompaneets equation will be used for estimation of the accuracy of numerical methods and for computation the evolution of spectrum of photon gas under Compton scattering and mean photon frequencies and dispersion of frequency with various initial spectra.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Компанеец, ЖЭТФ, 31, 876, 1956.
2. Я.Б.Зельдович, Успехи физ. наук, 115, 161, 1975.
3. R.A.Sunyaev, L.G.Titarchuk, Astron. Astrophys., 86, 537, 1980.
4. R.A.Sunyaev, L.G.Titarchuk, Astron. Astrophys., 143, 374, 1985.
5. Л.А.Поздняков, И.М.Соболь, Р.А.Сюняев, Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. 31, 265, 1986.
6. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж. 51, 698, 1974.
7. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж. 51, 1162, 1974.

8. *G.Chapline, J.Stevens*, *Astrophys. J.*, 184, 1041, 1973.
9. *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
10. *Г.Бейтмен, А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т.2. Наука, М., 1974.
11. *T.M.Cherry*, *J.London Math. Soc.*, 24, 121, 1949.
12. *С.Ю.Славянов*, Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера. Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1990.

УДК: 524.8

ОБ ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ ЭВОЛЮЦИИ ВЕЩЕСТВА ВО ВСЕЛЕННОЙ. I

Г.С.СААКЯН

Поступила 8 октября 1996

В этой части работы обсужден вопрос уравнивания состояния космического вещества и определены постоянные интегрирований в решениях Фридмана.

1. *Введение.* В этой работе проводится феноменологическое исследование эволюции космического вещества после большого взрыва ($t > 2 \cdot 10^{-5}$ с, $\rho < 10^{15}$ г/см³, $T < 5 \cdot 10^{15}$ К). Как и во всякой физической задаче об изменении состояния системы со временем, здесь также решение поставленной проблемы немыслимо без знания начальных условий. Во многом начальными условиями определяется характер дальнейшей эволюции Вселенной. Поэтому, используя основные наблюдательные факты, порождаемые этой эволюцией, можно в необходимой мере восстановить общую физическую картину для тех времен, когда космическое вещество состояло из барионов, лептонов (электрон, позитрон и разного рода нейтрино) и излучения. Ниже мы формально допускаем также наличие скрытого вещества.

Основой космологии является допущение об однородном и изотропном распределении вещества во Вселенной. При этом речь идет о средней плотности вещества в областях порядка 100 Мпк, в которых имеются много галактик и скоплений галактик. Из этого допущения следует, что в сопутствующей системе отсчета метрика пространства-времени описывается интервалом

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (1)$$

для закрытой модели Вселенной,

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (2)$$

для открытой модели, и, наконец,

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (3)$$

для плоской модели. Здесь в первом случае $r = a \sin\chi$, во втором - $r = a \operatorname{sh}\chi$, в третьем - $r = a\chi$ и, наконец, $cdt = ad\eta$.

Вторым важным наблюдательным фактом является современное значение средней плотности обычного (барионного) вещества во Вселенной

$$\rho_0 \approx 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3 \quad (4)$$

с ошибкой примерно в два раза в ту и другую сторону.

Третьим фундаментальным фактом является современное значение постоянной Хаббла

$$H_0 = 50 \text{ км/с Мпк} = 1.62 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}. \quad (5)$$

Иногда обсуждаются и большие значения этой постоянной, вплоть до 100 км/с Мпк.

Критическая плотность равна

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8\pi G} = 4.7 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3,$$

следовательно, безразмерная плотность (параметр, который определяет тип модели Вселенной) равна

$$\Omega_0 = \rho_0 / \rho_c = 0.064, \quad (6)$$

что свидетельствует об открытой модели, если, конечно, во Вселенной нет скрытого вещества в значительном количестве.

Проблема скрытого вещества является одной из важнейших в современной космологии. Она возникла при анализе кривых вращения галактического вещества на больших расстояниях от центра. Кроме этого косвенного наблюдательного факта в настоящее время эта проблема имеет и серьезную теоретическую базу. Этот вид материи обусловлен не только бесспорно существующим, но пока экспериментально не установленным, реликтовым фоном нейтрино. Суперсимметрическими теориями элементарных частиц предсказывается и наличие во Вселенной стабильного компонента материи, состоящей из частиц, слабо взаимодействующих (слабые и гравитационные взаимодействия) между собой и барионами. Таким образом, ситуация в настоящее время такая, что нельзя исключить и возможность реализации значения $\Omega_0 \approx 1$ или даже $\Omega_0 > 1$ для безразмерной плотности.

Эволюция состояния Вселенной определяется уравнениями [1]

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho, \quad (7)$$

$$3d \ln a = -\frac{d\rho}{\rho + P/c^2}. \quad (8)$$

Здесь ρc^2 - полная плотность энергии всех видов материи; P - полное давление, $\varepsilon = -1, 0, +1$, соответственно, для открытой, плоской и закрытой моделей Вселенной, штрих означает производную по дуговому времени η . В качестве начального условия к этим уравнениям принимается $a(0) = 0$, что диктуется логикой фактов.

Четвертым фундаментальным фактом, имеющим принципиальное зна-

чение для космологии, является наличие во Вселенной однородного и изотропного фонового планковского реликтового излучения, соответствующее температуре

$$T \approx 2.7 \text{ К.} \quad (9)$$

Обсуждаемые в научных публикациях возможные малые отклонения от изотропности и малые флуктуации температуры реликтового излучения, здесь для нас не имеют существенного значения.

2. *Уравнения состояния космического вещества.* С открытием реликтового равновесного излучения стало очевидным, что мы имеем дело с горячей моделью Вселенной. Здесь нас интересует то обстоятельство, что факт наличия этого излучения позволяет с достаточной точностью определить уравнение состояния $P(\rho)$ космического вещества.

Плотность числа фотонов в черном излучении равна [2]

$$n_f = 0.244 \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3. \quad (10)$$

Отсюда следует, что в реликтовом излучении плотность числа фотонов равна

$$n_f \approx 400 \text{ см}^{-3}.$$

А современная средняя плотность барионов равна

$$n_B^{(0)} \approx \frac{3 \cdot 10^{-31}}{m_p} = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}.$$

Число барионов во Вселенной сохраняется, за исключением может быть, в весьма малом начальном интервале времени, охваченном большим взрывом. Речь идет о временах $t < 10^{-5}$ с, которые здесь мы исключаем из рассмотрения. Более или менее достоверно можно сказать, что равновесный спектр электромагнитного излучения в основном сформировался в те времена, когда космическое вещество состояло из нуклонов и электронов (после исчезновения из среды нестабильных барионов и ядерно-активных мезонов). Важным здесь является то, что после этого спектр излучения не только остается планковским, но и то, что общее число фотонов во Вселенной не испытывает заметных изменений. Конечно, в дальнейшем, при образовании небесных тел, атомных ядер, атомов, а также во всевозможных процессах излучения и поглощения, число фотонов безусловно испытывает некоторые изменения. Но эти изменения, очевидно, не могут сильно превышать само число барионов, которое на много порядков меньше числа реликтовых фотонов. Поэтому, после формирования равновесного излучения, в эпоху, когда плотность вещества была порядка ядерной плотности, число фотонов во Вселенной практически не изменилось.

Из вышесказанного следует, что отношение чисел фотонов и барионов

со временем сохраняется и равно современному его значению:

$$\frac{n_f}{n_B} \approx \frac{n_f^{(0)}}{n_B^{(0)}} \approx 2.22 \cdot 10^9. \quad (11)$$

Тогда из (10) и (11) следует

$$n_f(t) \approx 20.2 T^3(t); \quad n_B(t) \approx 9.1 \cdot 10^{-9} T^3(t), \quad (12)$$

где t - возраст Вселенной.

Для нахождения аккуратных решений уравнений (7) и (8), необходимо иметь ясное представление об уравнении состояния космического вещества. В вопросе уравнения состояния можно различать две эпохи эволюции Вселенной: в первой - доминирующей является энергия электромагнитного излучения, а во второй - энергия вещества. В соответствии с (12) плотности вещества и излучения связаны между собой соотношением

$$\rho_B \approx 3.1 \cdot 10^{-6} \rho_f^{3/4}, \quad (13)$$

где $\rho_B \approx m_p n_B$ (в рассматриваемом этапе эволюции Вселенной кинетическая энергия нуклонов мала) и $\rho_f = a T^4 / c^2$ (обозначение постоянной плотности энергии черного излучения и радиуса кривизны Вселенной одной и той же буквой вряд ли послужит причиной неприятностей). Из (13) находим, что при выравнивании плотностей энергии излучения и вещества

$$\rho_B = \rho_f \equiv \rho_1 \approx 9 \cdot 10^{-23} \text{ г см}^{-3}; \quad T_1 \approx 2 \cdot 10^3 \text{ К}. \quad (14)$$

А соответствующее время t_1 мы определим только после нахождения решений уравнений (7) и (8). Что касается давления вещества, то оно всегда на много порядков меньше давления излучения.

В эпоху $t < t_1$, когда плотность энергии излучения превышала над плотностью энергии вещества, мы имеем следующее уравнение состояния космического вещества

$$\rho(t) \approx s \frac{a T^4}{c^2}; \quad P(t) \approx s \frac{a T^4}{3}, \quad (15)$$

где ρc^2 и P - суммарные плотности энергии и давление всех видов излучения (электромагнитное, нейтрино и гравитационное излучение), по-видимому $s \geq 2$. Масса предполагаемого темного вещества примерно на порядок может превышать массу обычного вещества, поэтому ясно, что его наличие заметным образом не скажется на уравнении состояния (15) для области плотностей $\rho > \rho_1$. Таким образом, в области плотностей $\rho > \rho_1$, состояние космического вещества описывается уравнением состояния $P = \rho c^2 / 3$, где под ρc^2 можно подразумевать суммарную плотность энергии всех видов материи.

В области же плотностей $\rho < \rho_1$ энергия определяется веществом, а давление снова излучением, следовательно

$$\rho = s_1 \rho_B \approx 1.5 \cdot 10^{-32} s_1 T^3; \quad P = s \frac{a T^4}{3}, \quad (16)$$

где использована формула (12). Здесь множитель $s_1 > 1$ введен для того, чтобы учесть вклад скрытого вещества в плотность массы. Как уже упоминалось во введении, возможное наличие скрытого вещества во Вселенной предсказывается суперсимметричными теориями элементарных частиц. Частицы, образующие скрытое вещество, могут рождаться в заметном количестве в период большого взрыва.

В (15) и (16) уравнения состояния космического вещества приведены в параметрическом виде. Исключая из них температуру, получаем следующие уравнения состояния в явном виде:

$$P \approx \begin{cases} \frac{1}{3} \rho c^2, & \rho > \rho_1 \\ 6.7 \cdot 10^{27} \frac{s}{s_1^{4/3}} \rho^{4/3}, & \rho < \rho_1. \end{cases} \quad (17)$$

Это уравнение состояния, кроме того, что обеспечивает плавный переход между асимптотиками $P = \rho c^2/3$ и $P = 0$, позволяет также произвести обоснованную сшивку решений Фридмана для раннего и позднего этапов эволюции Вселенной.

3. *Решения Фридмана.* Используя уравнение состояния (17) и интегрируя уравнение (8), получаем

$$\begin{aligned} \rho a^4 &= \frac{3c^2}{8\pi G} b^2, & \text{при } t < t_1 \\ \rho a^3 &= \frac{3c^2}{4\pi G} b_1 \left(1 + 7.44 s s_1^{-4/3} \cdot 10^6 \rho^{1/3} \right)^3, & \text{при } t > t_1, \end{aligned} \quad (18)$$

где b и b_1 - постоянные интегрирования, а $t_1 = t(\rho_1)$. Во втором решении второй член в скобках мал, опуская его, имеем

$$\rho a^3 = \frac{3c^2}{4\pi G} b_1, \quad t > t_1. \quad (19)$$

Сшивая решения (18) и (19) для $\rho = \rho_1$, получаем

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi G \rho_1}{3c^2} \right)^{1/4} b^{3/2} = 2.44 \cdot 10^{-13} b^{3/2}. \quad (20)$$

Теперь, используя (18) и (19), можно интегрировать и уравнение (7). Для закрытой модели имеем

$$a(\eta) = b \sin \eta; \quad t = \frac{b}{c} (1 - \cos \eta), \quad \text{при } \eta < \eta_1, \quad (21)$$

а при $\eta > \eta_1$

$$\begin{aligned} a(\eta) &= b_1 \left\{ 1 - \cos \left[\eta - \eta_1 + \arccos \left(1 - \frac{b}{b_1} \sin \eta_1 \right) \right] \right\}, \\ t &= t_1 + \frac{b_1}{c} \left\{ \eta - \eta_1 - 2 \sin \frac{\eta - \eta_1}{2} \cos \left[\frac{\eta - \eta_1}{2} + \arccos \left(1 - \frac{b}{b_1} \sin \eta_1 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\eta_1 = \eta(t_1)$. Во втором случае постоянная интегрирования найдена путем сшивки решений при $\eta = \eta_1$.

В случае открытой модели получается

$$a(\eta) = b \cdot \text{sh } \eta; \quad t = \frac{b}{c} (\text{ch } \eta - 1), \quad \text{при } \eta < \eta_1, \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} a(\eta) &= b_1 \left\{ \text{ch} \left[\eta - \eta_1 + \text{Arch} \left(1 + \frac{b}{b_1} \text{sh } \eta_1 \right) \right] - 1 \right\}, \\ t &= t_1 + \frac{b_1}{c} \left\{ 2 \text{sh} \frac{\eta - \eta_1}{2} \text{ch} \left[\frac{\eta - \eta_1}{2} + \text{Arch} \left(1 + \frac{b}{b_1} \text{sh } \eta_1 \right) \right] - (\eta - \eta_1) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

для времен $\eta > \eta_1$.

Наконец, учитывая связь $cdt = ad\eta$ между переменными времени и соотношения (18)-(20), из уравнения (7) для случая плоской модели получаем

$$a(t) = (2cbt)^{1/2} \quad \text{при } t < t_1 \quad (25)$$

и

$$a(t) = \sqrt{2bct_1} \left[1 + 1.73 \cdot 10^{-4} t_1^{-3/4} (t - t_1) \right]^{2/3}, \quad \text{при } t > t_1, \quad (26)$$

Чуть позже мы убедимся, что выражения $b \sin \eta_1 / b_1$ и $b \text{sh } \eta_1 / b_1$ малы по сравнению с единицей. Опуская их, получаем известные решения Фридмана для эпохи $t > t_1$

$$a(\eta) = b_1 (1 - \cos \eta), \quad t = \frac{b_1}{c} (\eta - \sin \eta), \quad \varepsilon = +1; \quad (27)$$

$$a(\eta) = b_1 (\text{ch } \eta - 1), \quad t = \frac{b_1}{c} (\text{sh } \eta - \eta), \quad \varepsilon = -1; \quad (28)$$

$$a(t) = 42.4 \sqrt{b} t_1^{-3/4} \cdot t^{2/3}, \quad \varepsilon = 0. \quad (29)$$

Постоянная b для разных моделей разная. При $\eta \ll 1$ для всех моделей получается следующая важная зависимость плотности массы (обычного

и скрытого веществ, излучения и нейтрино) от возраста Вселенной:

$$\rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4.47 \cdot 10^5}{t^2}. \quad (30)$$

Теперь можно вычислить и время t_1 , соответствующее значению плотности ρ_1 , приведенное в (14):

$$t_1 \approx 7 \cdot 10^{13} \text{ с.} \quad (31)$$

Из решений (27)-(29) для постоянной Хаббла находим

$$H_0 = \frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta} = \begin{cases} \frac{c \sin \eta_0}{b_1 (1 - \cos \eta_0)^2}, & \varepsilon = +1; \end{cases} \quad (32)$$

$$H_0 = \frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta} = \begin{cases} \frac{c \operatorname{sh} \eta_0}{b_1 (\operatorname{ch} \eta_0 - 1)^2}, & \varepsilon = -1; \end{cases} \quad (33)$$

$$H_0 = \frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta} = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{1}{t_0}, & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (34)$$

где индекс нуль относится к современной эпохе.

Вычислим также безразмерный параметр плотности. Имеем в виду определение (6) и соотношение (19), получаем

$$\Omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{1 + \cos \eta_0}, & \varepsilon = +1, \end{cases} \quad (35)$$

$$\Omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \eta_0}, & \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (36)$$

Для плоской модели $\Omega_0 = 1$.

Используя полученные формулы постоянной Хаббла H_0 и безразмерной плотности Ω_0 , можно теперь определить и постоянные интегрирования в решениях Фридмана, конечно, если известно, какая из рассматриваемых моделей соответствует существующей ситуации во Вселенной. Допустим, что во Вселенной количество скрытого вещества заметно меньше наблюдаемого. Тогда, согласно (6), $\Omega_0 = 0.064$, т.е. мы имеем дело с открытой моделью. В соответствии с этим значением безразмерной плотности из (36) находим

$$\eta_0 = 4.1. \quad (37)$$

Подставляя в (33) это значение η_0 и приведенное в (5) значение H_0 , получаем

$$b_1 \approx 6.6 \cdot 10^{26} \text{ см}; \quad b \approx 2 \cdot 10^{26} \text{ см}. \quad (38)$$

Теперь мы можем оценить величину отброшенного выражения $b \operatorname{sh} \eta_1 / b_1$. Учитывая результат (38) и приведенное в (31) значение t_1 , из (23) получаем $\eta_1 = 0.151$ и далее $b \operatorname{sh} \eta_1 / b_1 = 0.023$.

Можно попытаться оценить значения постоянных b_1 , b и для закрытой модели в случае ее возможной реализации. Так, предполагая количество скрытого вещества в таком количестве, что $\Omega_0 \approx 1.1$, получаем из (35) $\eta_0 \approx 0.613$. Далее, аналогично предыдущему случаю из (32), получаем $b_1 = 3.2 \cdot 10^{29} \text{ см}$, $b = 1.2 \cdot 10^{28} \text{ см}$.

Ереванский государственный
университет, Армения

ON THE MAIN EVOLUTIONARY STAGES OF MATTER IN THE UNIVERSE. I

G.S.SAHAKIAN

In this part of our work the problem of cosmic matter state equation is discussed and the integration constants in the Friedman solutions are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1967.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Статистическая физика, Наука, М., 1985.

УДК: 524.8

ФРИДМАНОВСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ В СХЕМЕ КВАНТОВАНИЯ РЕДУЦИРОВАННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.Г.ПАЛИЙ¹, В.В.ПАПОЯН^{1,2}, В.Н.ПЕРВУШИН¹

Поступила 28 июня 1996

Принята к печати 15 июля 1996

Показано, как, используя переменные действие - угол, в схеме квантования редуцированного фазового пространства сконструировать волновую функцию фридмановской Вселенной, заполненную гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов, а также найти физически наблюдаемые величины. Такой подход приводит к уравнению типа Шредингера, допускает простую интерпретацию волновой функции, и позволяет проследить связь с классической эволюцией, которая полностью воспроизводится в предложенной модели. В рамках редуцированной теории массивные фермионы описываются действием типа Намбу-Иона-Лазиньо со спонтанным нарушением киральной симметрии. Предложенная схема приводит к следствиям, которые согласуются с принципом Маха и дираковской гипотезой больших чисел.

1. *Введение.* Физическая интерпретация волновой функции и соотношение между классической и квантовой моделями однородной Вселенной относятся к разряду нерешенных проблем современной космологии [1-7]. Расширение Вселенной возникает как эффект классического рассмотрения, базирующегося на точных решениях уравнений теории тяготения Эйнштейна для фридмановской космологической модели [8]. При квантовом рассмотрении волновую функцию Вселенной принято полагать удовлетворяющей уравнению Уиллера - де Витта (УдВ) [1,2] (что связывают с инвариантностью относительно репараметризации времени) и интерпретировать ее как стационарное состояние без какой-либо эволюции. Попытки согласовать такой подход с классическим приводят к серьезным осложнениям.

В недавно предложенной схеме квантования редуцированного фазового пространства (см., например, [4,5,7]) квантовая эволюция Вселенной описывается волновой функцией, удовлетворяющей уравнению типа Шредингера (вместо уравнения УдВ), с обычной вероятностной интерпретацией. Было показано, что параметр временной эволюции этого уравнения совпадает с классическим фридмановским временем для Вселенной с преобладанием вещества (пылевидная Вселенная) [5-7]. Однако величина редуцированной энергии квантовой Вселенной в [5-7] получилась равной лишь половине массы пыли, поэтому возникает естественный вопрос - как объяснить наличие другой половины массы. Проб-

лемы возникают и при определении физически наблюдаемых величин (например, Хаббловской постоянной) в случае Вселенной с преобладанием излучения, эволюционный параметр волновой функции которой совпадает с классическим конформным временем.

Настоящая статья посвящена попыткам решения, если не всех, то по крайней мере, части перечисленных проблем. С этой целью рассматривается "полевая модель" фридмановской Вселенной, пыль и излучение в которой имитируются гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов. В соответствии с развитой ранее теорией описания систем со связями [10,11], конструируется редуцированная система, гамильтониан которой совпадает с сохраняющейся энергией. Даны определения ряда классических величин и приводится их квантование. Изложение распланировано следующим образом: в первом разделе формулируется модель, а во втором - дана постановка задачи в контексте фридмановского описания однородной Вселенной [8] и квантования УдВ, в последующих разделах к этой модели применяется общая схема редукции. Заключительный раздел отводится обсуждению физических результатов и их возможной космологической интерпретации.

2. Полевая модель однородной Вселенной. Принято считать, что эффекты квантовой космологии играют существенную роль лишь в первые моменты жизни Вселенной. Независимо от схемы квантования вопрос о соответствии квантовой и классической эволюции является ключевым и, к сожалению, нерешенным. Однако, как будет видно из дальнейшего, можно получить ответ на перефразированную постановку вопроса - какова квантовая версия современной фридмановской стадии эволюции Вселенной, заполненной радиацией и покоящейся пылью?

Для сравнения классического и квантового описания свойств Вселенной в качестве исходного выберем выражение для действия Эйнштейна-Гильберта, добавив к нему лагранжеву плотность свободных полей фотонов и n фермионов:

$$W = \int_0^T dt \int_{V(t)} d^3x \sqrt{-g} \left[-\frac{^{(4)}R(g)}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i (i\hbar/D - m_i) \psi \right]. \quad (1)$$

Для того, чтобы воспроизвести фридмановскую модель однородной Вселенной, достаточно ограничиться гармоническими возбуждениями фотонов и массивных фермионов в метрике Фридмана-Робертсона-Уолкера (ФРУ)

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(t) [N_c^2(t) dt^2 - (dl_c)^2], \quad (2)$$

где $(dl_c)^2$ - интервал трехмерного пространства постоянной положительной кривизны со скаляром

$$^{(3)}R = \frac{6k}{r_0^2}$$

и объемом $V_{(3)}(k=+1) = \int d^3x = 2\pi^2 r_0^3$; N_c - та компонента метрики, соответствующее которой полевое уравнение воспроизводит баланс энергии. Интервал наблюдаемого расширяющегося пространства dl_F связан со статическим - dl_c , посредством космологического масштабного фактора a :

$$dl_F = a dl_c. \quad (3)$$

По аналогии с этим в дальнейшем будем различать два набора физических величин: "наблюдаемые" $[Q_F]$ и конформные $[Q_c]$, связанные соотношением:

$$Q_F^{(n)} = a^n Q_c^{(n)}, \quad (4)$$

где n - конформный вес $Q^{(n)}$ ($n = -3/2$ - для фермионов, $n = -1$ - для скаляров, $n = 0$ - для векторных полей). Переменная $Q_c^{(n)}$ инвариантна относительно конформных преобразований.

Таким образом, для действия (1) в метрике (2) и в терминах конформно-инвариантных полей, описывающих гармонические возбуждения, получим следующее выражение

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\bar{\psi}_{cj} i \hbar \gamma_0 \dot{\psi}_{cj} \right) - N_c a H_D \right\} + \\ + \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\dot{A}_l^2}{N_c} - \omega_l^2 A_l^2 N_c \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{a}^2}{N_c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{a \dot{a}}{N_c} \right) - N_c \frac{ka^2}{r_0^2} \right] \beta \Bigg\}, \quad (5)$$

где β - константа

$$\beta = V_{(3)} \frac{6}{8\pi G} \Bigg|_{k=1} = \frac{3\pi r_0^3}{2G} = \frac{3\pi r_0^3 M_{Pl}^2}{2}, \quad (6)$$

ω_l - мода возбуждения электромагнитного поля в трехмерном пространстве постоянной кривизны; $\bar{\psi}_{cj}^0$ - наинизшее гармоническое возбуждение массивных фермионов в приближении

$$ma \gg \frac{1}{r_0}, \quad (7)$$

что имитирует пыль в состоянии покоя; H_D - гамильтониан свободного поля фермионов:

$$H_D = \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_{cj} m_j \psi_{cj}^0. \quad (8)$$

Гамильтонову форму действия (5) сконструируем обычным образом [2,5]

$$W^H = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi=A_t, \Psi} \pi_\Phi \dot{\Phi} - \left(\pi_a \dot{a} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\pi_a a) \right) - N_c H_{Ec} \right], \quad (9)$$

где

$$\pi_a = \frac{da}{N_c dt} \beta; \quad (10)$$

и π_Φ - канонические моменты масштабного фактора и полей соответственно; H_{Ec} - конформная эйнштейновская энергия

$$H_{Ec}(\pi_a, a, H_D, H_R) = \left(\frac{\pi_a^2}{2b} + \frac{a^2 k}{2r_0^2} \beta \right) + H_D a + H_R, \quad (11)$$

а H_R есть конформный гамильтониан полей излучения в пространстве с интервалом dl_c (3)

$$H_R = \frac{1}{2} \sum_i (\pi_i^2 + \omega_i^2 A_i^2). \quad (12)$$

Уравнение для N_c

$$\frac{\delta W}{\delta N_c} = 0 \Rightarrow H_{Ec}(\pi_a, a, H_D, H_R) = 0 \quad (13)$$

рассматривается как связь (констрайнт).

Классические уравнения приводят к сохранению величин H_D, H_R , определенных (8), (12)

$$\frac{d}{dt} H_D = 0; \quad \frac{d}{dt} H_R = 0, \quad (14)$$

которые, поэтому можно выбрать совпадающими с начальными значениями

$$H = M_D; \quad H_R = E_R \quad (15)$$

идентифицируемыми с массой пыли и энергией излучения.

3. *Постановка задачи.* Нетрудно убедиться, что уравнения (10)-(15) вместе с определением собственного времени

$$aN_c dt = dt_F, \quad (16)$$

приводят к известному фридмановскому расширению Вселенной

$$t_F(a, M_D, E_R) = \int_0^a a' da' \left[-\frac{a'^2 k}{r_0^2} + \frac{2}{\beta} (M_D a' + E_R) \right]^{-1/2}, \quad (17)$$

которое позволяет определить хаббловскую "постоянную"

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_{Hubble}(a, M_D, E_R). \quad (18)$$

В классической космологии время (16) (начиная с первой фридмановской работы 1992г.) рассматривается как наблюдаемое, а уравнение (17) трактуется как закон эволюции Вселенной.

С другой стороны, в расширенном фазовом пространстве квантовой теории УдВ [1-3] картина иная - волновая функция стационарна. Определяющее эту волновую функцию уравнение есть констрейнт (13), в котором импульс π_a заменен оператором:

$$\hat{\pi}_a = i \frac{d}{da}. \quad (19)$$

Напомним, что уравнение УдВ имеет вид:

$$\frac{1}{a} H_E \left(i \frac{d}{da}, a, M_D, E_R \right) \Psi_{WDW}(a, M_D, E_R) = 0. \quad (20)$$

Физическая трактовка подчиняющейся этому уравнению волновой функции является одной из неразрешенных проблем квантовой космологии и, поэтому, приходится опираться на весьма распространенное предположение, согласно которому квантовая Вселенная стационарна (не эволюционирует).

Таким образом, одно и то же действие (9) приводит к двум различным результатам:

- а) в классической теории Вселенная эволюционирует (17,18);
- б) в квантовой теории эволюции нет (20).

В настоящей работе предпринята попытка устранить это противоречие, чего, как нам представляется, можно достичь квантованием по иной схеме, суть которой в точном решении связей (констрейнт) (13), и в полной гамильтоновой редукции до квантования.

4. *Гамильтонова редукция.* Используемая схема гамильтоновой редукции [10,11] предполагает выбор переменных, которые максимально упрощают констрейнты. Один набор таких переменных был обнаружен в [5,7]. Существует каноническое преобразование

$$(\pi_a, a) \rightarrow (\Pi, T_r), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \pi_a &= \sqrt{2\beta\Pi} C_k \left(\frac{T_r}{r_0} \right) & (C_{+1}(\eta) = \cos\eta, \quad C_{-1}(\eta) = \cosh\eta, \quad C_0 = 1), \\ a &= \sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}} \Pi S_k \left(\frac{T_r}{r_0} \right) & (S_{+1}(\eta) = \sin\eta, \quad S_{-1}(\eta) = \sinh\eta, \quad S_0(\eta) = \eta), \end{aligned} \quad (22)$$

где $C(\eta)$, $S(\eta)$ удовлетворяют каноническому уравнению

$$\{\pi_a, a\}_{(\Pi, T_r)} = 1 \implies C_k S'_k - C'_k S_k = 1, \quad (23)$$

которые приводят к примечательным следствиям:

а) линеаризации метрической части конформного эйнштейновского гамильтониана

$$\frac{\pi_a^2}{2\beta} + \frac{a^2 k}{2r_0^2} \beta = \Pi, \quad (24)$$

б) и, обусловленном канонической структурой, "поглощении" временного поверхностного члена в действии Эйнштейна-Гильберта:

$$\pi_a \dot{a} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\pi_a a) = \Pi \dot{T}_r. \quad (25)$$

В терминах новых переменных (21) рассматриваемое действие (9) можно переписать в виде

$$W^H = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi=A_i, \Psi} \pi_\Phi \dot{\Phi} - \Pi \dot{T}_r - N_c H_{Ec} \right], \quad (26)$$

где

$$H_{Ec} = -\Pi + 2 \bar{H}_D \sqrt{\Pi} S_k + H_R, \quad (27)$$

$$\bar{H}_D = \left(\frac{r_0^2}{2\beta} \right)^{1/2} H_D. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что новая переменная T_r является времениподобной в редуцированном фазовом пространстве со связью

$$H_{Ec} = 0 \implies \sqrt{\Pi}_{(\pm)} = \bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}, \quad (29)$$

которая удовлетворяется тождественно, а величина

$$\Pi_{(\pm)} = H_{\pm}^{red} = \left(\bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R} \right)^2 \quad (30)$$

выступает в роли редуцированного гамильтониана в выражении для редуцированного действия:

$$W_{(\pm)}^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\Phi=A_i, u} \pi_\Phi \dot{\Phi} - H_{(\pm)}^{red} \dot{T}_r \right]. \quad (31)$$

Такой вид действия можно легко представить в терминах "редуцированного" времени

$$W_{(\pm)}^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dT_r \left[\sum_{\Phi=A_i, u} \pi_\Phi \frac{d\Phi}{dT_r} - H_{(\pm)}^{red} \right]. \quad (32)$$

$$H_{(1)}^{red} = H_R + 2\bar{H}_D^2 S_k^2 \pm 2\bar{H}_D S_k \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}. \quad (33)$$

Соотношение между начальным и "редуцированным" временем T_r следует из уравнения для импульса Π

$$\frac{\delta W^H}{\delta \Pi} = 0 \Rightarrow dT_r = N_c dt \left[1 - \bar{H}_D S_k \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \right]. \quad (34)$$

Решения (29) приводят к следующим соотношениям

$$dT_{r(\pm)} = N_c dt \left[1 - \frac{\bar{H}_D S_k}{\bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}} \right], \quad (35)$$

или

$$dT_{r(\pm)} = \pm N_c dt \frac{\sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}}{\bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}}. \quad (36)$$

Уравнения (22), (29), (33) в параметрической форме воспроизводят классический фридмановский закон (17)

$$a_{(\pm)} T_r = \sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}} \left[\bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R} \right] S_k, \quad (37)$$

$$dt_{F(\pm)} T_r = a N_c dt = \pm \frac{\sqrt{\frac{2r_0^2}{\beta}} \left[\bar{H}_D S_k \pm \sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R} \right]^2 S_k}{\sqrt{(\bar{H}_D S_k)^2 + H_R}} dT_r, \quad (38)$$

$$S_k = S_k \left(\frac{T_r}{r_0} \right); \quad (S_{+1}(\eta) = \sinh \eta, \quad S_{-1}(\eta) = \sinh \eta, \quad S_0(\eta) = \eta).$$

В этих выражениях "редуцированное" время T_r выступает в роли параметра.

Рассмотрим далее детально случаи излучения ($H_D = 0$) и пыли ($H_R = 0$).

5. Волновая функция радиационно-доминантной Вселенной. Случай излучения описывается редуцированным действием (30), (31) при $H_D = 0$:

$$W^{red} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_l \pi_l \dot{A}_l - H^{red} \dot{T}_r \right] = \int_{t_1}^{t_2} dT_r \left[\sum_l \pi_l \frac{dA_l}{dT_r} - H_R \right]. \quad (39)$$

Это выражение, как и следовало ожидать, есть выражение для действия чистого излучения в полости. "Редуцированное" время T_r совпадает с

конформным (35,36) $dT_r = N_c dt$, а эволюционный закон (37,38) сводится к хорошо известному фридмановскому расширению (17) для радиационно-доминантной стадии

$$a(T_r) = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_0^2}{\beta}} H_R S_k \left(\frac{T_r}{\tilde{r}_0} \right), \quad (40)$$

$$dt_F(T_r) = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_0^2}{\beta}} H_R S_k \left(\frac{T_r}{\tilde{r}_0} \right) dT_r = a(T_r) dT_r. \quad (41)$$

Вместо волновой функции УдВ (20) мы имеем волновую функцию в редуцированном фазовом пространстве

$$\Psi_{WDW}(a, E_R) \Rightarrow \Psi_{red}(T_r, A_I), \quad (42)$$

которая удовлетворяет уравнению типа Шредингера относительно "редуцированного" времени T_r *

$$+i \frac{d}{dT_r} \Psi_{red}(T_r, A_I) = H_R \hat{\Psi}_{red}(T_r, A_I). \quad (43)$$

Решение этого уравнения записывается в виде спектрального разложения

$$\Psi_{red}(T_r, A_I) = \sum_{E_R} e^{-iT_r E_R} \Phi_{E_R}(A_I), \quad (44)$$

где $\Phi_{E_R}(A_I)$ есть собственная функция конформного гамильтониана (12) и является произведением эрмитовских полиномов.

$$H_R(\hat{\pi}_I, A_I) \Phi_{E_R}(A_I) = E_R \Phi_{E_R}(A_I) \equiv E_R / E_R, \quad (45)$$

$$E_R = E_{cas}^0 + \sum_I \omega_I n_I, \quad (46)$$

ω_I - энергия гармонических возбуждений, а n_I - числа заполнения; E_{cas}^0 - энергия Казимира вакуумных колебаний в полости в конформном пространстве (dl_c).

В квантовом случае для каждого члена спектрального разложения (44) мы можем возвратиться к фридмановским наблюдаемым a , $E_F = E_R/a$, $t_F(a, E_R)$, (40), (41)

$$\langle E_R | \hat{a} | E_R \rangle = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_0^2}{\beta}} E_R S_k \left(\frac{T_r}{\tilde{r}_0} \right) \equiv a(T_r, E_R), \quad (47)$$

* Легко видеть, что уравнение (43) представляет квантовую версию определения классического импульса для переменной T_r ($\pi_{(T_r)} = -H_R$), что следует из выражения для действия (39).

$$\langle E_R | t_F(T_r) | E_R \rangle = \int_0^{T_r} a(T_r, E_R) dT_r'. \quad (48)$$

Волновую функцию Вселенной (44) можно интерпретировать достаточно просто - как волновую функцию излучения с постоянными квантовыми числами n_l, ω_l (46) в конформном пространстве dl_c с постоянным объемом.

Как в квантовом, так и в классическом случаях в наблюдаемом фридмановском времени мы имеем один и тот же закон эволюции.

6. *Вселенная с преобладанием вещества.* В случае "пылевидной" Вселенной ($H_R = 0$), после редукции действие (33) с учетом (35,36) принимает вид, известный как действие Намбу-Иона-Лазинио [9]

$$W^{red} = \int_{T_r(t_1)}^{T_r(t_2)} dT_r \left[\sum_j \frac{0}{\Psi_{cj}} \gamma_0 \partial_{T_r} \frac{0}{\Psi_{cj}} - 2S_k^2 \frac{r_0^2}{\beta} \left(\sum_j \frac{0}{\Psi_{cj}} m_j \frac{0}{\Psi_{cj}} \right)^2 \right] \quad (49)$$

и описывает динамику фермионов.

Фридмановское расширение в этом случае получается после канонических преобразований на связях (29)

$$a = 2S_k^2 \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \frac{0}{\Psi_{cj}} m_j \frac{0}{\Psi_{cj}}; \quad S_k = S_k \left(\frac{T_r}{r_0} \right) \quad (50)$$

и из уравнений движения для "геометрического" импульса Π (38)

$$dT_F = 2a dT_r = a dT_c; \quad T_r = T_c/2, \quad (51)$$

где T_c - конформное время (по определению). Эти два уравнения (50), (51) приводят к хорошо известным результатам для закрытой ($k = +1$), открытой ($k = -1$) и плоской ($k = 0$) моделей:

$$\begin{aligned} a(k = +1) &= \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \left(\frac{0}{\Psi_{cj}} m_j \frac{0}{\Psi_{cj}} \right) \left(1 - \cos \frac{T_c}{r_0} \right), \\ a(k = -1) &= \frac{r_0^2}{\beta} \sum_j \left(\frac{0}{\Psi_{cj}} m_j \frac{0}{\Psi_{cj}} \right) \left(\frac{T_c}{r_0} - 1 \right), \\ a(k = 0) &= \frac{1}{2\beta} \sum_j \left(\frac{0}{\Psi_{cj}} m_j \frac{0}{\Psi_{cj}} \right) T_c^2, \end{aligned} \quad (52)$$

здесь вместо массы Вселенной M_D присутствует ее динамический эквивалент. Это различие приводит к существенной выделенности фридмановского времени T_F (51) в рассматриваемой схеме редукции: T_F становится динамической величиной, в отличие от "редуцированного" времени T_r , которое является параметром.

Подстановка величин (50), (51) в действие (49) и формальная замена "редуцированного" времени на фридмановское приводит к теории свободных фермионов

$$W^{red} = \int_{T_F(t_1)}^{T_F(t_2)} dT_F \left[\sum_j \bar{\psi}_j i \gamma_0 \partial_{T_F} \psi_j - \sum_j \bar{\psi}_j \bar{m}_j \psi_j \right] \quad (53)$$

масса которых составляет половину начальной.

$$\bar{m}_j = \frac{1}{2} m_j. \quad (54)$$

Проблема "половины массы" [5,7] проявляется в рассматриваемой динамической модели, где фридмановское время (51) является динамической величиной, а формальный переход к этому времени изменяет динамическое содержание теории. Теория в терминах фридмановского времени (53) сильно отличается от теории, сформулированной через редуцированное время (49). Последнюю можно переписать в виде:

$$W^{red} = \int_{T_F(t_1)}^{T_F(t_2)} dT_F \left[\sum_j \bar{\psi}_j i \gamma_0 \partial_{T_F} \psi_j - \frac{1}{2} \frac{\kappa_0^2}{\beta} \left(\sum_j \bar{\psi}_j \bar{m}_j \psi_j \right)^2 \right], \quad (55)$$

через модифицированное (без динамического фактора) фридмановское время T_F :

$$dT_F = 4S_k^2 \left(\frac{T_R}{\kappa_0} \right) dT_F. \quad (56)$$

В выражении (55) масса фермионов описывается уравнением Швингера-Дайсона (см., например, [9])

$$\bar{m}_j = m_j \left(\frac{\kappa_0}{\beta} \right) \left[\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \sum_k m_k G_0(q_0 | \bar{m}_k) \right], \quad (57)$$

где $G_0(q_0 | \bar{m})$ - функция Грина свободной теории (55)

$$G(q_0 | \bar{m}) = \frac{1}{q_0 \gamma_0 - \bar{m}_k + i\epsilon} = - \left[\frac{\Lambda_{(+)} }{\bar{m}_k - q_0 - i\epsilon} + \frac{\Lambda_{(-)} }{\bar{m}_k + q_0 - i\epsilon} \right], \quad (58)$$

а

$$\Lambda_{(\pm)} = \frac{1(\pm)\gamma_0}{2} \quad (59)$$

проекторный оператор состояний с положительной и отрицательной энергиями.

Используя формулу $(q_0 \pm i\varepsilon) = \pm i\pi\delta(q_0) + P/q_0$, вместо (54), получим

$$\bar{m}_j = m_j \frac{r_0^2}{2\beta} M_{T\omega}. \quad (60)$$

Этот результат можно трактовать как одну из версий принципа Маха; наблюдаемая масса частицы определяется массами остальных частиц во Вселенной. С другой стороны, полагая $\bar{m} = m$, для полной массы $M_{T\omega} = \sum_k m_k$, получим:

$$\frac{r_0^2}{2\beta} M_{T\omega} = 1 \Rightarrow M_{T\omega} = \frac{2\beta}{r_0^2} \sim 3\pi r_0 M_{Pl}^2 \approx 10^{80} m_p, \quad (61)$$

что согласуется с дираковской гипотезой больших чисел.

Для того, чтобы сконструировать квантовое состояние "пылевидной" Вселенной, для действия (53) используем разложение фермионных полей по операторам рождения (b^+, d^+) и аннигиляции (b, d) частиц (b^+, b) и античастиц (d^+, d)

$$\psi_k(T) = \sum_s (b_k(s) u(s) e^{i\bar{m}_k T} + d_k^+(s) v(s) e^{-i\bar{m}_k T}), \quad (62)$$

$$\bar{\psi}_k(T) = \sum_s (b_k^+(s) \bar{u}(s) e^{-i\bar{m}_k T} + d_k^+(s) \bar{v}(s) e^{i\bar{m}_k T}), \quad (63)$$

где (s) - спиновый индекс, а u, v - четырехкомпонентные спиноры

$$\sum_s u(s) \bar{u}(s) = \frac{1+\gamma_0}{2} = \Lambda_{(+)}; \quad \sum_s v(s) \bar{v}(s) = \frac{1-\gamma_0}{2} = \Lambda_{(-)}. \quad (64)$$

Собственные функции свободного гамильтониана $H_D = \sum_j \bar{\psi}_j m_j \psi_j$

имеют вид

$$H_D \Phi_{M_D} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_j \end{pmatrix} = M_D \Phi_{M_D} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_j \end{pmatrix}; \quad \Phi_{M_D} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_j \end{pmatrix} = \prod_{k_{(+)} k_{(-)}} (b_{k_{(+)}}^+)^{n_{k_{(+)}}} (d_{k_{(-)}}^+)^{n_{k_{(-)}}} |0\rangle \quad (65)$$

и соответствуют следующему выражению для массы Вселенной

$$\bar{M}_D = \sum_{k_{(+)}} \bar{m}_{k_{(+)}} n_{k_{(+)}} + \sum_{k_{(-)}} \bar{m}_{k_{(-)}} n_{k_{(-)}}, \quad (66)$$

где $n_{k_{\pm}} = 0, 1$ - числа заполнения. Обычно предполагают, что Вселенная содержит только частицы с $n_{k_{(+)}} = 1$, а $n_{k_{(-)}} = 0$, так что

$$\bar{M}_D = \sum_k \bar{m}_k n_k \leq \bar{M}_{T\omega} = \sum_k \bar{m}_k, \quad (67)$$

а $\bar{M}_{T\omega}$ представляет максимальное значение массы Вселенной (61).

Волновую функцию "пылевидной" Вселенной можно представить в виде спектрального разложения

$$\Psi\left(T, \psi\right)=\sum_{M_D} e^{i \overline{M}_D \hat{T}_F(T)} \Phi_{\overline{M}_D}\left(\psi\right), \quad (68)$$

а затем для каждого члена этого разложения вычислить фридмановскую эволюцию (50)-(52)

$$\left\langle M_D \mid a \mid M_D \right\rangle=2 S^2 \frac{r_0^2}{\rho} \overline{M}_D, \quad (69)$$

в полном согласии с наблюдаемой классической картиной.

7. Заключение. В настоящей работе на базе действия Гильберта-Эйнштейна со свободными полями фотонов и массивных фермионов рассмотрена модель однородной Вселенной и сравниваются эффекты классического и квантового подходов. Классические уравнения такой модели описывают расширяющуюся фридмановскую Вселенную, заполненную пылью и радиацией, которые имитируются гармоническими возбуждениями фермионов и фотонов в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера. Для квантования этой модели применяется предложенная недавно схема гамильтоновой редукции [10,11], использующая переменные действие - угол и основанная на точном решении констрейнта энергии до квантования. Полученная редуцированная система приводит к волновой функции Вселенной, которая оказывается представленной в виде спектрального разложения (43), (68) по собственным состояниям редуцированного гамильтониана с сохраняющимися квантовыми числами. Эти состояния нормированы и допускают простую интерпретацию волновой функции каждого состояния как гармонического возбуждения в полости, погруженной в трехмерное пространство.

Наблюдаемое фридмановское время после редукции становится динамической переменной, а формальная подстановка его в редуцированное действие или в уравнения движения изменяет динамическое содержание теории, что имеет непосредственное отношение к сути обсуждаемого выше парадокса "половины массы" [5,6], который разрешается на квантовом уровне: исключение нефизических переменных при редукции действия приводит к эффективному четырехфермионному взаимодействию типа Намбу-Иона-Лазинио (аналогично тому, как в квантовой электродинамике исключение временной компоненты калибровочного поля приводит к кулоновскому взаимодействию). Масса фермионов (и, поэтому, "пыли") определяется уравнением Швингера-Дайсона и зависит от остальной массы во Вселенной - факт, который можно трактовать как одну из версий принципа Маха. В этой связи отметим также, что предположение о совпадении массы фермиона, которая

получается как решение уравнения Швингера-Дайсона, с его массой, фигурирующей в исходном действии (1), приводит к результату, согласующемуся с дираковской гипотезой больших чисел.

В случае радиационно-доминантной Вселенной наблюдаемые фридмановские переменные не подходят для построения гильбертова пространства состояний с сохраняющимися квантовыми числами, поскольку наблюдаемая энергия фотонов изменяется в процессе эволюции. Как было показано, пространство состояний можно построить в конформных переменных, тогда волновая функция Вселенной будет представлена в виде спектрального разложения (43), (68) по собственным состояниям редуцированного (конформного) гамильтониана, собственными значениями которого являются конформная энергия фотонов и их числа заполнения.

Благодарности. Мы признательны С.Гогилидзе, А.Хведелидзе и Д.Младенову за критику и интересные обсуждения. В.Н.П. благодарен доктору Г.Рехенбергу за радушный прием в Гейзенберговском институте теоретической физики в Мюнхене. Ю.Г.П. и В.Н.П. благодарят РФФИ за финансовую поддержку (грант 96-01-01223).

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Россия

² Ереванский государственный университет, Армения

THE WAVE FUNCTION OF THE FRIEDMANN UNIVERSE IN THE REDUCED PHASE SPACE QUANTIZATION SCHEME

Yu.G.PALII, V.V.PAPOYAN, V.N.PERVUSHIN

Physical observables and wave function of the Friedmann Universe (filled by hermonic excitations of massive fermions and photons) are constructed in the reduced phase space quantization scheme by use the action-angle variables. This approach leads to the Schrödinger like equation for the wave function and gives us a possibility of a clear interpretation of the Universe wave function and its relation to the classical evolution. In the reduced theory, the massive fermions are described by the Nambu-Jona-Lasinio type action with the spontaneous chiral symmetry breaking. It was shown that the reduced scheme can have consequence of the type of the Mach principle and the Dirac hypothesis of large numbers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.A.Wheeler*, In *Batelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, edited by *C.DeWitt* and *J.A.Wheeler*, Benjamin, New York, 1968.
2. *B.S.DeWitt*, *Phys. Rev.*, **160**, 1967, 1113.
3. *J.B.Hartle*, *S.W.Hawking*, *Phys. Rev.*, **D28**, N12, 1983.
4. *C.Misner*, *Phys. Rev.*, **186**, 1969, 1319.
5. *A.Khvedelidze*, *V.Papoyan*, *V.Pervushin*, *Phys. Rev.*, **D51**, 1995, 5654.
6. *V.Pervushin*, *T.Towmasjan*, *Int. J. Mod. Phys.*, **D4**, 1995, 105-113.
7. *V.Pervushin*, *V.Papoyan*, *S.Gogilidze*, *A.Khvedelidze*, *Yu.Palii*, *V.Smirichinski*, *Phys. Lett.*, **B365**, 1996, 35.
8. *A.Friedmann*, *Z. Phys.*, **10**, 1922, 377.
9. *M.K.Volkov*, *Ann. Phys. (NY)*, **110**, 1982, 363.
10. *S.A.Gogilidze*, *A.M.Khvedelidze*, *V.N.Pervushin*, *Phys. Rev.*, **D52**, 1996, 1111.
11. *S.A.Gogilidze*, *A.M.Khvedelidze*, *V.N.Pervushin*, On Abelization of First Class Constraints. JINR Preprint E2-95-131, 1995, *J. M. Phys.*, **37**, 1996, 1760.

ЗАКОН ПОДОБИЯ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА. I

В.Ю.ТЕРЕБИЖ

Поступила 9 сентября 1996

На примере гауссова стационарного процесса изучается обратная задача нахождения естественной состоятельной оценки спектральной плотности. В первой части работы приводятся исходные соотношения и кратко описаны основные результаты.

1. *Введение.* Почти столетие тому назад Артур Шустер [1] ввел понятие периодограммы $P_N(\nu)$ в качестве оценки спектральной плотности случайного временного ряда, содержащего N отсчетов. Пусть $\xi(t)$ - стационарный, непрерывный случайный процесс со спектральной плотностью $g(\nu)$, а $y = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]'$ - совокупность его наблюдаемых значений, разделенных одним и тем же интервалом времени δt (штрих означает операцию транспонирования матрицы, мы везде используем векторы-столбцы). Тогда *периодограмма Шустера* представляется в виде:

$$P_N(\nu) = \frac{\delta t}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-i \cdot 2\pi \nu \delta t k) \cdot y_k \right|^2, \quad (1.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Будучи функцией случайной реализации y , периодограмма $P_N(\nu)$ сама представляет собой случайную величину для каждого значения частоты ν .

Уже сам Шустер доказал, что при больших значениях $T \equiv N \cdot \delta t$ среднее значение периодограммы стремится к спектральной плотности $g(\nu)$ порождающего ряд процесса, т.е.

$$\langle P_N(\nu) \rangle = g(\nu) + O(N^{-1}), \quad N \gg 1, \quad (1.2)$$

где, как обычно, $O(\alpha)$ означает член порядка α и предполагается, что $\nu \neq 0$ или значениям, кратным частоте Найквиста $\nu_C \equiv (2\delta t)^{-1}$. На статистическом языке этот результат означает, что $P_N(\nu)$ является *асимптотически несмещенной оценкой* спектральной плотности $g(\nu)$. Поскольку на практике именно это требование представляется весьма желательным, казалось бы, нет оснований искать другие оценки $g(\nu)$. Однако Шустер обнаружил также, что дисперсия случайной величины $P_N(\nu_j)$ в точках спектра,

разделенных малым интервалом $\delta v = 1/T$, не убывает с ростом N :

$$\text{Var}[P_N(v_j)] = g^2(v_j) + O(N^{-1}), \quad v_j = j/T, \quad (1.3)$$

где j - целые числа и v_j предполагается не совпадающим с концами интервала Найквиста. Таким образом, точность оценивания спектральной плотности с помощью $P_N(v)$ не возрастает с увеличением объема данных наблюдений - как говорят, статистика $P_N(v)$ не является *состоятельной*. Наконец, Шустер показал, что $P_N(v)$ асимптотически подчиняется экспоненциальному распределению со средним значением, совпадающим с

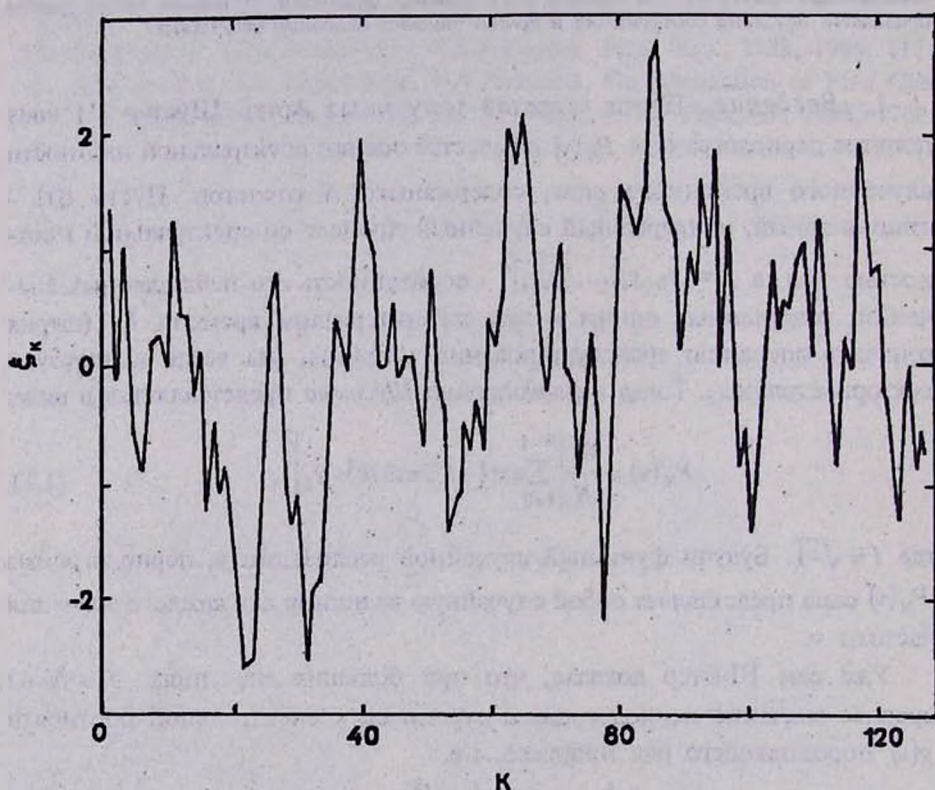


Рис. 1.1 Реализация случайного процесса AR-1 с дисперсией $\sigma^2 = 1$ и коэффициентом корреляции между соседними отсчетами $\rho = 0.7$. Полное количество отсчетов временного ряда $N = 128$.

$g(v)$, а значения периодограммы в точках спектра, разделенных интервалом, кратным δv , становятся при больших N некоррелированными между собой.

Периодограмма Шустера является *векторной* оценкой в том смысле, что оцениванию подлежат неизвестные значения спектральной плотности

во всем интервале Найквиста. Если бы, например, $g(\nu)$ была *a priori* задана везде, кроме одной точки спектра, мы имели бы дело со *скалярной* оценкой плотности. Естественно ожидать, что точность последней будет выше; мы остановимся на этом в дальнейшем при обсуждении результатов численного моделирования. Шаг по частоте в (1.1) выбирается равным $\delta\nu = 1/T$ по той причине, что соответствующие отсчеты $P_N(\nu)$ не коррелируют между собой и тем самым дают дополнительную информацию о спектре.

На рис. 1.1 в качестве примера приведена реализация случайного процесса авторегрессии первого порядка (процесс AR-1, см. далее §3)

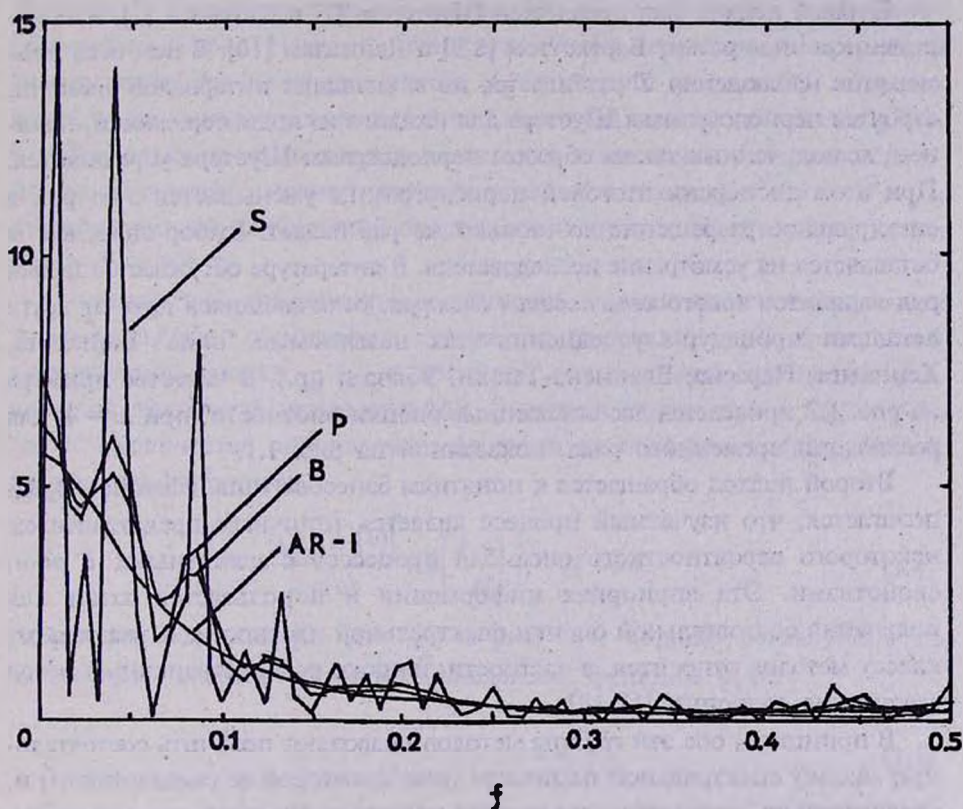


Рис. 1.2 Спектральная плотность процесса AR-1 при $\sigma^2 = 1$, $\rho = 0.7$. Показаны также периодограмма Шустера (S), оценки Бартлетта (B) и Парзена (P), вычисленные по приведенной на рис. 1 реализации.

при $N = 128$. Спектральная плотность исходного процесса $g(\nu)$ показана на рис. 1.2; там же приведена вычисленная по реализации периодограмма Шустера. Поскольку ширина отдельных пиков периодограммы $\delta\nu \approx 1/T$, по мере роста объема выборки они становятся лишь более узкими, а

распределение пиков по высоте остается тем же. То обстоятельство, что мы сталкиваемся здесь с весьма пологой - экспоненциальной - плотностью распределения, приводит к типичным выбросам $P_N(v)$ значительной амплитуды, не уменьшающимся при $N \rightarrow \infty$, а дополнительная некоррелированность $P_N(v_i)$ в близких точках спектра обуславливает "рваный" вид периодограммы Шустера, породивший многие "открытия" периодичности исходных процессов.

Итак, имеются веские аргументы в пользу поисков оценки спектральной плотности, точность которой улучшалась бы по мере роста объема выборки. Известно много таких оценок (см. [2-6]); они основаны на одном из следующих двух подходов.

Первый подход был предложен Шустером [1] и Слуцким [7], а в современном виде развит Бартлеттом [8,9] и Даниэлем [10]. В нем весь промежуток наблюдения T разбивается на m меньших интервалов времени, строятся периодограммы Шустера для каждого из подинтервалов и, наконец, m полученных таким образом периодограмм Шустера усредняются. При этом дисперсия итоговой периодограммы уменьшается в m раз, а спектральное разрешение во столько же раз падает. Выбор значения m оставляется на усмотрение исследователя. В литературе обсуждается целый ряд вариантов такого *сглаживания спектра*, отличающихся друг от друга деталями процедуры усреднения (так называемые "окна" Бартлетта, Хеннинга, Парзена, Блэкмена-Тьюки, Уэлча и пр.). В качестве примера на рис. 1.2 приведены две сглаженные оценки плотности (при $m = 4$) для реализации временного ряда, показанной на рис. 1.1.

Второй подход обращается к понятиям байесова типа. Именно, предполагается, что изучаемый процесс является типичным представителем некоторого вероятностного ансамбля процессов с известными *a priori* свойствами. Эта априорная информация и используется затем для получения состоятельной оценки спектральной плотности. К указанному классу методов относится, в частности, широко распространенный метод максимума энтропии [11-13].

В принципе, обе эти группы методов позволяют получить состоятельную оценку спектральной плотности (при некоторой ее смещенности) и, следовательно, удовлетворяют нуждам практики. Вместе с тем, использующиеся в них произвольные предположения *ad hoc* типа выбора процедуры усреднения, количества временных подинтервалов, характеристик ансамбля и пр. нельзя признать эстетически приемлемыми. Даже если исходить из чисто утилитарной точки зрения, то и тогда указанные черты проявляют себя недопустимым образом. Фактически при анализе данных аккуратный исследователь должен применить несколько различных методик, и затем сохранить те результаты, которые остаются неизменными при "разумной" смене способа анализа.

Все эти соображения заставляют искать объективный подход к проблеме спектрального оценивания, по сути дела, искать строгое решение обратной задачи оценивания спектральной плотности $g(v)$ по данным наблюдений $y = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]'$ и реально имеющейся априорной информации об изучаемом процессе. Соответствующее рассмотрение стационарного гауссова процесса, основанное на т.н. *бккамовском* подходе к обратным задачам математической физики [14,15], и составляет предмет данного исследования.

Формальной основой анализа служит найденное ниже точное представление матрицы Фишера I , коэффициентов ковариации $\{r_n\}$ гауссова временного ряда при любых значениях N . Это позволяет найти матрицу Фишера I_g и для спектральной плотности $g(v)$, связанной с $\{r_n\}$ преобразованием Фурье. Наконец, ввиду известного *неравенства информации* (неравенства Рао-Крамера) знание I_g позволяет установить нижнюю границу дисперсии произвольной несмещенной оценки плотности $g^*(v)$.

Поскольку приводимые далее выкладки технически достаточно сложны, укажем здесь основной результат в асимптотической области $N \gg 1$, представляющей наибольший практический интерес (фактически, достаточно $N > 10$).

Оказывается, относительная точность несмещенного оценивания плотности, т.е. отношение стандартного отклонения наилучшей несмещенной оценки $g^*(v)$ к истинной спектральной плотности $g(v)$, является некоторой универсальной функцией параметра $w = (F-1)/N$, где F - количество оцениваемых значений плотности в спектре вплоть до частоты Найквиста:

$$\frac{\sigma_{\min}[g^*(v)]}{g(v)} \approx \theta\left(\frac{F-1}{N}\right), \quad N \gg 1. \quad (1.4)$$

Результаты вычислений (см. §9 и рис. 9.4) хорошо согласуются со следующим аналитическим представлением функции $\theta(w)$:

$$\theta(w) \approx \frac{Cw^{1/2}}{(1-w)^\gamma}, \quad 0 < w < 1, \quad (1.5)$$

где параметры C и γ слегка меняются в зависимости от вида исходной спектральной плотности (для белого шума $C \approx 1.88$, $\gamma \approx 0.30$). Закон подобия (1.4) показывает, в частности, что при фиксированном значении w точность всякой несмещенной оценки не может быть ниже некоторого *не зависящего от длины ряда* значения, т.е. в этих условиях оценка будет статистически несостоятельной. Если мы хотим добиться более высокой точности оценивания, следует выбрать менее детальную модель спектральной плотности, например, ограничиться количеством оцениваемых отсче-

тов $g(v)$ порядка $F \approx N^{1/2}$. При этом теория дает естественную состоятельную оценку этих отсчетов.

Для периодограммы Шустера параметр $w \approx 1/2$, и если бы $P_N(v)$ была строго несмещенной оценкой плотности, то для нее из (1.4) и (1.5) следовала нижняя граница относительной точности оценивания вида $\sigma[P_N(v)]/g(v) \approx 1.6$. Уменьшение дисперсии $P_N(v)$ обусловлено ее смещенностью; как показывают соотношения (1.2) и (1.3), при этом достигается относительная точность $\sigma[P_N(v)]/g(v) \approx 1.0$.

Таким образом, несостоятельность оценок типа периодограммы Шустера обусловлена стремлением выяснить чрезмерно большую информацию относительно искомого объекта - спектральной плотности $g(v)$. Мы обязаны при анализе ограничиваться информацией, реально содержащейся в данных. Если при этом модель спектральной плотности выбирается до начала наблюдений, то для достижения заданной точности оценивания следует накопить временной ряд вполне определенной минимальной длины. Если же ставится задача интерпретировать уже имеющиеся данные объемом в N отсчетов, то следует умеренно задавать модель спектральной плотности с тем, чтобы точность оценок была достаточно высока. Количественное описание требуемого согласования модели с данными и дает приведенное выше соотношение подобия.

Уже давно высказывалось мнение, что природа несостоятельности периодограммы Шустера связана с тем же "гистограммным эффектом", который проявляется при восстановлении плотности распределения какой-либо случайной величины по экспериментальным данным. Как мы видим, это мнение было вполне обоснованным, причем закон подобия дает конкретные рекомендации по выбору разумной теоретической модели.

Имея в виду дальнейшее обобщение результатов на случай несравномерных временных рядов, мы приводим сначала некоторые известные положения из теории стационарных случайных процессов с непрерывным параметром, которые лежат в основе дискретных моделей. С этой же целью на первом этапе анализа явным образом сохраняется обозначение временного шага δt .

2. *Дискретизация стационарного процесса.* Обозначим посредством $\xi(t)$ действительный, стационарный в широком смысле процесс на бесконечном интервале времени. Процесс предполагается центрированным, так что его среднее значение $\langle \xi(t) \rangle = 0$, а ковариационная функция

$$r(\tau) = r(-\tau) = \langle \xi(t) \cdot \xi(t + \tau) \rangle, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (2.1)$$

Согласно теореме Винера-Хинчина, ковариационная функция $r(\tau)$ и спектральная плотность $g(v)$ стационарного процесса связаны между собой

преобразованием Фурье:

$$r(\tau) = \int \exp(i 2\pi \nu \tau) g(\nu) d\nu, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (2.2)$$

$$g(\nu) = \int \exp(-i 2\pi \nu \tau) r(\tau) d\tau, \quad -\infty < \nu < \infty. \quad (2.3)$$

Здесь и ниже бесконечные пределы интегрирования не указываются. Спектральная плотность $g(\nu)$ - неотрицательная симметричная функция частоты ν , а интеграл от нее по всему спектральному диапазону равен дисперсии σ^2 процесса $\xi(t)$:

$$\sigma^2 = \langle \xi^2(t) \rangle = r(0) = \int g(\nu) d\nu. \quad (2.4)$$

Это соотношение позволяет интерпретировать $g(\nu)d\nu$ как дисперсию тех гармонических компонент процесса $\xi(t)$, частоты которых заключены в узком интервале $d\nu$ вблизи данного значения ν .

На практике $\xi(t)$ всегда представляет собой частотно-ограниченный процесс, а потому примем, что

$$g(\nu) = \begin{cases} g_0(\nu), & |\nu| \leq \nu_c, \\ 0, & |\nu| > \nu_c, \end{cases} \quad (2.5)$$

где частоту $\nu_c > 0$ будем называть далее *критической частотой*. Для частотно-ограниченных процессов известная *теорема отсчетов* Ла Валле Пуссена-Котельникова-Шеннона (см. [16-18]) утверждает, что соответствующая ковариационная функция

$$r(\tau) = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} \exp(i 2\pi \nu \tau) g_0(\nu) d\nu \quad (2.6)$$

может быть представлена в виде ряда

$$r(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\tau/\delta t - n) \cdot r_n, \quad (2.7)$$

где вспомогательная функция $\text{sinc}(\cdot)$ определена соотношением

$$\text{sinc}(x) \equiv \sin(\pi x)/(\pi x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.8)$$

интервал времени, отвечающий критической частоте, равен

$$\delta t \equiv (2\nu_c)^{-1}, \quad (2.9)$$

и $r_n = r_{-n} = r(n \cdot \delta t)$ - значения ковариационной функции на дискретной временной сетке:

$$r_n = \langle \xi_k \xi_{k+n} \rangle, \quad \xi_k \equiv \xi(k \cdot \delta t), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.10)$$

Полагая в (2.6) время запаздывания $\tau = n \cdot \delta t$, мы получаем точное соотношение

$$r_n = \int_{-v_c}^{v_c} \exp(i \cdot 2\pi v n \delta t) g_0(v) dv, \quad (2.11)$$

а его обращение дает следующее важное представление спектральной плотности:

$$g_0(v) = \delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i \cdot 2\pi v n \delta t) r_n, \quad -v_c \leq v \leq v_c. \quad (2.12)$$

Формулы (2.7) и (2.12) показывают, что в случае спектрально-ограниченного процесса для описания непрерывных функций $r(\tau)$ и $g(v)$ достаточно задать лишь дискретную совокупность коэффициентов ковариации $\{r_n\}$, $n = 0, 1, \dots$

Заметим, что теорема Рэлея в данном случае сводится к равенству:

$$\int r^2(\tau) d\tau = \int_{-v_c}^{v_c} g_0^2(v) dv. \quad (2.13)$$

Подставляя сюда $g_0(v)$ из (2.12), находим:

$$\int r^2(\tau) d\tau = \delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n^2. \quad (2.14)$$

Простой пример приведенным выше соотношениям доставляет часто применяющийся на практике случай *частотно-ограниченного белого шума*. При этом реальная плотность заменяется некоторым постоянным значением:

$$g_0(v) = g_0 = \text{const}, \quad -v_c \leq v \leq v_c. \quad (2.15)$$

Для белого шума отличен от нуля только первый коэффициент ковариации $r_0 = \sigma^2 = 2v_c g_0 = g_0 / \delta t$; выражение для ковариационной функции при произвольном запаздывании следует из (2.11):

$$r(\tau) = r_0 \cdot \text{sinc}(\tau / \delta t). \quad (2.16)$$

В общем случае случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется протяженной ковариационной функцией $r(\tau)$. Это означает, в частности, что отдельные его значения $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$, разделенные интервалом времени δt , представляют собой зависимые случайные величины, попарные коэффициенты ковариации между которыми равны r_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$. Дальнейшее обсуждение упрощается, если мы рассмотрим *гауссов* случайный процесс. При этом плотность распределения многомерной случайной величины $\xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}]'$ равна

$$\varphi(y|r) = (2\pi)^{-N/2} (\det R)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} y' \cdot R^{-1} \cdot y\right), \quad (2.17)$$

где введены вектор $r = [r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]'$ и матрица

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N-1} & \dots & r_0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ковариационная матрица R относится к классу симметрических *тёплицевых* матриц (их называют *матрицами Лорана* [19]). Будем считать R положительно определенной матрицей.

Как известно, гауссовы процессы охватывают весьма значительный круг приложений, в том числе и в астрономии, так что полученные для них результаты имеют достаточно общий характер.

Крымская лаборатория Гос. астрономического
ин-та им. П.К.Штернберга, Россия

SIMILARITY LAW IN A TIME SERIES SPECTRAL ESTIMATION. I.

V.Yu.TEREBIZH

The searching of the natural consistent estimate of spectral density is studied on the example of Gaussian stationary process. The estimation is considered as an inverse problem of mathematical physics. Basic relations and a brief summary of main results are given in the first part.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Schuster, Terr. Magn., 3, 13, 1898.
2. G.M.Jenkins, D.G.Watts, Spectral Analysis and Its Applications, Holden Day, San Francisco, 1968; Г.Дженкинс, Д.Ваттс, Спектральный анализ и его приложения, Мир, М., 1971, 1972.
3. T.W.Anderson, The Statistical Analysis of Time Series, Wiley, New York, 1971; Т.Андерсон, Статистический анализ временных рядов, Мир, М., 1976.

4. *D.R.Brillinger*, Time Series. Data Analysis and Theory. Holt, Rinchart and Winston, New York, 1975; *Д.Бриллинджер*, Временные ряды. Обработка данных и теория, Мир, М., 1980.
5. *S.L.Marple, Jr.*, Digital Spectral Analysis With Applications, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, 1987; *С.Л.Марпл- мл.*, Цифровой спектральный анализ и его приложения, Мир, М., 1990.
6. *В.Ю.Теребиж*, Анализ временных рядов в астрофизике, Наука, М., 1992.
7. *Е.Е.Слуцкий*, Вопросы конъюнктуры, 3, No. 1, 1927; *E.E.Slutsky*, Econometrica, 5, 105, 1937.
8. *M.S.Bartlett*, J. Roy. Statist. Soc., Suppl. 8, 27, 85, 1946.
9. *M.S.Bartlett*, Biometrika, 37, 1, 1950.
10. *P.J.Daniell*, J. Roy. Statist. Soc., Suppl. 8, 27, 1946.
11. *E.T.Jaynes*, Phys. Rev., 106, 620, 1957.
12. *E.T.Jaynes*, Phys. Rev., 108, 171, 1957.
13. *J.P.Burg*, Paper presented at the 37-th Ann. Int. Meeting, Oklahoma City, 1967.
14. *В.Ю.Теребиж*, Успехи физ. наук, 165, 143, 1995.
15. *V.Yu.Terebizh*, Int. Journ. of Imaging Systems and Technology, 6, 358, 1995.
16. *В.А.Котельников*, Материалы к I Вс. съезду по вопр. техн. реконстр. дела связи и развития слаботочной пром., М., 1933.
17. *C.Shannon*, C.Bell Syst. Techn. J., 27, 379, 623, 1948.
18. *А.Н.Колмогоров*, *В.М.Тихомиров*, Успехи мат. наук, 14 (2), 3, 1959.
19. *M.G.Kendall*, *A.Stuart*, The Advanced Theory of Statistics, Vols. 2, 3, Griffin, London, 1969; *М.Кендалл*, *А.Стьюарт*, Статистические выводы и связи, Наука, М., 1973; Многомерный статистический анализ и временные ряды, Наука, М., 1976.

CONTENTS

Optical identification of 100 IRAS point sources at high galactic latitudes <i>A.M.Mickaelian</i>	5
On the relation of the position angles of the elongated structures and of the polarization vector of the compact radio source 3C 84 emission on wavelengths 2, 4 and 6 cm <i>I.I.Pronik</i>	19
On the fractal structure of clouds forming L_{α} -forest in QSO spectra <i>V.G.Gorbatsky</i>	29
Spectra of radio emission of isolated spiral galaxies and spiral members of pairs of galaxies <i>V.H.Malumian</i>	39
Groups of galaxies. II. Determination of values of selection parameters <i>A.P.Mahtessian</i>	45
On the connection between pulsars and stellar associations <i>T.G.Mdzinarishvili</i>	61
On the VELA pulsar angular velocity relaxation after its jumps <i>D.M.Sedrakian, M.V.Hairapetian</i>	67
On the MHD eigenvibrations of neutron star <i>S.I.Bastrukov, I.V.Molodtsova, V.V.Papoyan, D.V.Podgainy</i>	77
On neutron star moment of inertia I. Relativistic equation for accumulated moment of inertia <i>L.Sh.Grigorian, H.F.Khachatryan</i>	87
The Green function of linear Kompaneets equation <i>D.I.Nagirner, V.M.Loskutov</i>	97
On the main evolutionary stages of matter in the Universe. I <i>G.S.Sahakian</i>	117
The wave function of the Friedmann Universe in the reduced phase space quantization scheme <i>Yu.G.Palii, V.V.Papoyan, V.N.Pervushin</i>	125
Similarity law in a time series spectral estimation. I <i>V.Yu.Terebizh</i>	139

СОДЕРЖАНИЕ (продолжение)

О СОБСТВЕННЫХ МГД КОЛЕБАНИЯХ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ <i>С.И.Баструков, И.В.Молодцова, В.В.Папоян, Д.В.Подгайный</i>	77
О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД I. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАКОПЛЕННОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ <i>Л.Ш.Григорян, Г.Ф.Хачатрян</i>	87
ФУНКЦИЯ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА <i>Д.И.Нагирнер, В.М.Лоскутов</i>	97
ОБ ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ ЭВОЛЮЦИИ ВЕЩЕСТВА ВО ВСЕЛЕННОЙ. I <i>Г.С.Саакян</i>	117
ФРИДМАНОВСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ В СХЕМЕ КВАНТОВАНИЯ РЕДУЦИРОВАННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА <i>Ю.Г.Палий, В.В.Папоян, В.Н.Первушин</i>	125
ЗАКОН ПОДОБИЯ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА. I <i>В.Ю.Теребизж</i>	139