Известия НАН Армении, Физика, т.59, №1, с.41–50 (2024)
УДК 538.915
DOI:10.54503/0002-3035-2024-59.1-41

ПРОСТОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЦЕПОЧКИ КИТАЕВА ДЛЯ $\mathcal{Z}_3$ ПАРАФЕРМИОНОВ

Т.С. АКОПЯН[1,2*], Р.Г. ВАРОСЯН[1], Г.Г. АРУТЮНЯН[1]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

[*]e-mail: tigran.hakobyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 19 марта 2024 г.)

Построена квантовая цепочка, состоящая из квазичастиц с дробной статистикой (парафермионов) с угловым параметром $\theta = 2\pi/3$, которая обладает топологической фазой. Она получена из одномерной спиновой модели с топологическим порядком, защищенным симметрией $Z_3 \times Z_3$ (обобщенной модели кластера). Построены и исследованы нулевые парафермионные моды, возникающие на границах цепочки, которые остаются стабильными из-за вакуумной щели и топологического порядка в системе.

1. Введение

Свойства основного состояния и элементарных возбуждений квантовых систем при нулевой температуре в течение долгого времени остаются в центре внимания исследований в области физики конденсированных сред. В последнее время все более отчетливо проявляется интерес к топологическим характеристикам этих состояний [1]. С одной стороны, это обусловлено технологическими прорывами, связанными с внедрением квантовой механики в область технологий, успехами в передаче квантовой информации, в квантовой телепортации, а также в построении квантовых компьютеров. Вместе с тем, многие эффекты и вещества имеют ярко выраженную топологическую природу: квантовый эффект Холла, топологические диэлектики и сверхпроводники. Топологические фазы устойчивы по отношению к локальным возмущениям, что позволяет системе успешно исправлять ошибки в квантовых вычислениях.

Сверхпроводящая цепочка Китаева является простейшей моделью, обладающей нетривиальной топологической фазой, которая проявляется в виде двух нулевых майорановских мод, возникающих на обоих границах системы. Они образуют вместе нелокальный бесспиновый дираковский фермион и устойчивы по отношению к локальным возмущениям, что делает возможным их применение в топологических квантовых вычислениях [2, 3]. Парафермионы являются обобщением майорановских фер-мионов для частиц с дробной статистикой. Они возникают как квазичастичные возбуждения в спиновых системах с циклической симметрией [4, 5], а их нуле-вые моды образуются на границах некоторых одномерных спиновых систем [6, 7]. На основе парафермионов проектируются квантовые компьютеры [8], где вместо кубитов применяются их аналоги с тремя (трибит) и более состояниями [9].

В данной работе построена квантовая цепочка, состоящая из парафермионов, статистика которых задается фазой $\omega = e^{i\theta}$ с дробным угловым параметром $\theta = 2\pi/3$, которая обладает нетривиальной топологической фазой. Она получается «парафермионизацией» одномерной спиновой модели с топологическим порядком, защищенным симметрией $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ (обобщенной модели кластера). Построены и исследованы нулевые парафермионные моды, возникающие на границах цепочки, которые остаются стабильными благодаря щели между энергией основного состояния и остальным спектром, а также нетривиального топологического порядка.

Данная статья построена следующим образом. В следующем разделе приводится краткий обзор одномерной свехпроводяшей модели Китаева. При определенной фазе на ее границах образуются две нулевые майорановские моды, которые легко обнаружить, выразив гамильтониан через решёточные майорановские фермионы. В третьем разделе описывается одномерная модель кластера, которая является обобщением модели Поттса (с тремя локальными состояниями) для нетривиальной топологической фазы, которая остается стабильной при сохранении $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ симметрии. В четвертом разделе строится реализация модели кластера через решеточные парафермионы с применением преобразования Фрадкина-Каданова. Последний раздел посвящен граничным парафермионным модам, которые являются инвариантами системы. Обсуждаются их связь с $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ симметрией, а также сплетающие операторы, постоенные на их основе, которые актуальны в квантовых вычислениях.

2. Цепочка Китаева, майорановские фермионы

Рассмотрим сначала гамильтониан одномерной свехпроводяшей модели, состоящей из бесспиновых фермионов (цепочка Китаева) [2, 3]:

$$H = -t\sum_{j=1}^{N-1}\left(c_j^+ c_{j+1} + c_{j+1}^+ c_j\right) + \Delta\sum_{j=1}^{N-1}\left(c_j c_{j+1} + c_{j+1}^+ c_j^+\right) - \mu\sum_{j=1}^{N}\left(c_j^+ c_j - \frac{1}{2}\right), \qquad (1)$$

где μ является химическим потенциалом, а Δ-член описывает рождение и уничтожение фермионных пар в соседних узлах. Кинетический t-член задает переход (скачок) частицы на соседний узел решетки. Данная система имеет свободные граничные условия, при которых первый и последний фермионы не связаны друг с другом. Здесь c_j^+ и c_j являются, соответственно, операторами рождения и уничтожения бесспинового фермиона на j-ом узле. Они удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям:

$$\left\{c_j^+, c_k\right\} = \delta_{jk}, \qquad \left\{c_j, c_k\right\} = \left\{c_j^+, c_k^+\right\} = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2)$$

Эти операторы соответствуют обычным фермионам, которые описываются комплексными волновыми функциями и операторами. Соответственно, частицы и античастицы различаются друг от друга. Майорановский же фермион описывается действительной волновой функцией. В этом случае частица просто совпадает со своей античастицей. Обычному фермиону будет соответствовать два майорановских фермиона, которые задаются эрмитовыми операторами:

$$\gamma_{2j-1} = c_j + c_j^+, \qquad \gamma_{2j} = i\left(c_j^+ - c_j\right). \qquad (3)$$

Обратные отношения при этом выглядят следующим образом:

$$c_j = \frac{1}{2}\left(\gamma_{2j-1} + i\gamma_{2j}\right), \qquad c_j^+ = \frac{1}{2}\left(\gamma_{2j-1} - i\gamma_{2j}\right). \tag{4}$$

В результате, N комплексных фермионов задаются $2N$ майорановскими фермионами. Операторы Майораны удовлетворяют тем же соотношениям, что и гамма матрицы Дирака в евклидовом пространстве:

$$\left\{\gamma_j, \gamma_k\right\} = 2\delta_{jk}, \qquad \gamma_j^2 = 1. \tag{5}$$

Цепочку Китаева можно выразить через майорановские операторы. Ограничивая константы условием $t = \Delta$, можно представить гамильтониан (1) в виде:

$$H = -\frac{i\mu}{2}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{2j-1}\gamma_{2j} + i\Delta\sum_{j=1}^{N}\gamma_{2j}\gamma_{2j+1}. \tag{6}$$

Заметим, что несмотря на мнимый коэффициент, он, конечно, является эрмитовым вследствие антикоммутативности и эрмитовости гамма операторов.

При нулевой температуре в зависимости от значений параметров данная система может находиться в двух различных фазах. В частности, при $\Delta = 0$ имеет место тривиальная фаза, при которой основное состояние невырождено. В этом случае все майорановские фермионы присутствуют в гамильтониане (6). Напротив, при $\mu = 0$ система находится в топологически нетривиальной фазе, которая характеризуется вырождением основного состояния. Система сводится к гамильтониану

$$H = i\sum_{j=1}^{N}\gamma_{2j}\gamma_{2j+1}, \tag{7}$$

где отсутствуют операторы γ_1 и γ_{2N}, которые соотвестствуют первой и последней частице. Поэтому эти операторы коммутируют с гамильтонианом:

$$\left[H, \gamma_1\right] = \left[H, \gamma_{2N}\right] = 0. \tag{8}$$

Благодаря данной симметрии, на границах системы образуются нулевые майорановские моды, что одновременно приводит к вырождению основного состояния. Более того, вместе они образуют один комплексный фермион, который нелокален, поскольку состоит из пространственно разделенных мод. Этот фермион можно также задать через обычные операторы рождения и уничтожения:

$$c = \left(\gamma_1 + i\gamma_{2N}\right)/2, \qquad c^+ = \left(\gamma_1 - i\gamma_{2N}\right)/2. \tag{9}$$

Очевидно, данная дираковская квазичастица неявным образом присутствует и в первоначальном гамильтониане. Она приводит к двукратному вырождению основного состояния, что позволяет использовать последнее в качестве квантового бита, или кубита для квантовых вычислений. Более того, благодаря щели между элементарными возбуждениями и основным состоянием, а также топологической природе нулевых граничных мод, полученный таким образом кубит остается стабильным и защищенным от малых локальных возмущений. Поэтому данное состояние называют топологически защищенным.

С целью получения нескольких кубитов рассматривается система, состоящая из нескольких невзаимодействующих одномерных моделей Китаева в нетривиальной топологической фазе (7). Локальный член такой системы содержит два майорановских фермиона, находящихся на фиксированном расстоянии a друг от друга [10]:

$$H_a = i\sum_{j=1}^{N-a}\gamma_{2j}\gamma_{2(j+a)-1}. \qquad (10)$$

При $a = 0$ модель тривиальна. В этом случае гамильтониан эквивалент оператору полного числа частиц и не содержит граничных мод. Первый нетривиальный случай, $a = 1$, соответствует обсуждаемой выше цепочке Китаева с нулевыми майорановскими модами на границах (7). В случае же $a = 2$ возникают две назависимые цепочки, в результате чего на каждой границе появляются по два майорановских фермиона с нулевой энергией. Эта система рассматривается ниже. В общем случае возникают a независимых цепочек и $2a$ краевые майорановские моды.

Существует соответствие между бесспиновыми фермионами и неподвижными бозонами со спином ½, которые задаются матрицами Паули. На цепочке оно осуществляется преобразованием Йордана-Вигнера, которое переводит операторы спина в операторы рождения и уничтожения фермионов. Данная фермионизация используется, например, для точного решения одномерной XX модели Гейзенберга. Описанный переход задается следующими соотношениями:

$$\gamma_{2j-1} = Z_j\left(\prod_{k=1}^{j-1}X_k\right), \qquad \gamma_{2j} = Y_j\left(\prod_{k=1}^{j-1}X_k\right), \qquad (11)$$

где использованы краткие обозначения $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$, $Z = \sigma_z$ для матриц Паули. Цепочка Китаева (5), например, после преобразования Йордана-Вигнера принимает следующий вид:

$$H = -J\sum_{j=1}^{N-1}Z_jZ_{j+1} - h\sum_{j=1}^{N}X_j, \qquad (12)$$

где $J = -\Delta,\ \ h = \mu/2$. Полученная спиновая цепочка совпадает с взаимодействующей квантовой моделью Изинга в поперечном поле.

3. Модели Изинга и Поттса с нетривиальной топологией

Стандартная одномерная кластерная модель [1, 11, 12] является простейшей моделью с нетривиальным топологическим порядком, который остается стабильным благодаря ее дискретной симметрии, которая задается группой $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$. Ее основное состояние используется в квантовых вычислениях. Цепочка состоит из половинных спинов, а спектр равен спектру свободной модели Изинга, которая получается из гамильтониана (12) при условии $J = 0,\ h = 1$. Вышеуказанная симметрия модели образована спиновыми отражениями, примененными отдельно как к четным, так и к нечетным узлам решетки. Гамильтониан системы описывается следующей формулой:

$$H = -\sum_{i=2}^{N-1}Z_{i-1}X_iZ_{i+1}, \qquad (13)$$

что делает ее эквивалентной вышеприведенной модели Китаева в топологически нетривиальной фазе (7). Действительно, фермионизация локального члена в (13) приводит к выражению $i\gamma_{2i-2}\gamma_{2i+1}$, в чем можно легко убедиться, исходя из преобразований Йордана— Вигнера (11).

Существует обобщение топологически нетривиальной модели Изинга (13) для случая модели Поттса [13]. В трехспиновой модели на узлах решётки расположены спины с тремя различными состояниями, которые нумеруются последовательными числами 0, 1, 2. Они же задают трехмерный квантовый бит, или трибит, который вместе с кубитом также используется в кванто-вых вычислениях 9. В отличие от изинговского случая (13), в топологической модели Поттса четные и нечетные локальные члены в гамильтониане будут иметь различный вид:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L} Z_{2r-1} X_{2r} Z_{2r+1}^{+} - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L-1} Z_{2r}^{+} X_{2r+1} Z_{2r+2} + \text{Н. с.} \tag{14}$$

Здесь введены трехмерные обобщения стандартных матриц Паули, которые соответствуют рассматриваемой системе. Эти матрицы удовлетворяют следующим простым алгебраическим соотношениям:

$$ZX = \omega XZ, \qquad X^3 = Z^3 = 1, \qquad \omega = \exp\{2\pi i/3\}. \tag{15}$$

На каждом узле решетки они действуют на три базисные спиновые состояния и имеют следующий простой вид:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Заметим, что первая матрица выражается через экспоненту $\exp\left(\frac{2\pi i}{3} S_z\right)$ спин-1 матрицы S_z с последующей перегруппировкой ее диагональных элементов. Вторая же матрица переставляет циклически все три спиновые состояния.

Легко видеть, что обобщенные матрицы Паули являются унитарными:

$$X^{+}X = Z^{+}Z = 1, \qquad X^{+} = X^{2}, \qquad Z^{+} = Z^{2}. \tag{17}$$

Отметим также, что вышеприведенный гамильтониан (14) определен на решетке с нечетным числом

$$N = 2L + 1 \tag{18}$$

спиновых узлов в отличие от изинговской модели (13), где длина цепочки произвольна. Кластерный гамильтониан (14) состоит из взаимно-коммутирующих локальных членов. Как и в случае изинговской модели, его спектр совпадает со спектром невзаимодействующей модели Поттса с гамильтонианом $H = -\frac{1}{2}\sum_i (X_i + X_i^{+})$. Операторы симметрии, которые сохраняют топологический параметр порядка основного состояния, также строятся аналогичным образом: они соответствуют произведению X-матриц, расположенных отдельно на четных и нечетных узлах решетки:

$$[H, X_{\text{even}}] = [H, X_{\text{odd}}] = 0, \tag{19}$$

$$X_{\text{even}} = X_2 X_4 \ldots X_{N-1}, \qquad X_{\text{odd}} = X_1 X_3 \ldots X_N. \tag{20}$$

Заметим, что в силу нечетности общего числа спинов (18), генератор X_{odd} содержит на один оператор больше. Оба генератора взаимно коммутируют и удовлетворяют соотношениям, аналогичным (17). Они образуют абелеву группу $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$. Ее вторая когомология совпадает с группой $\mathcal{Z}_3$, три элемента которой характеризуют различные топологические фазы, защищенные данной симметрией [13]. При этом тривиальный элемент в $\mathcal{Z}_3$ соответствует обычной модели Поттса, а два другие – гамильтониану (14) и его аналогу, полученному заменой всех операторов Z_l на Z_l^+.

В наиболее общем случае различные топологические фазы, защищенные определенной симметрией, классифицируются по $(d+1)$-ым когомологиям соответствующей группы, где d – размерность системы [1, 14]. Поэтому рассматриваемые фазы характеризуются второй когомологией, которая также описывает различные мультиплеты, допускающие дополнительный фазовый множитель в произведении (т. е. проективные представления). Следует отметить, что недавно были рассмотрены двумерные модели Поттса на треугольной решетке с топологическим порядком, защищенным симметриями $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ и $\mathcal{Z}_3$ и исследованы соответствующие граничные безмассовые моды, которые определяются одномерным гамильтонианом [15, 16].

4. Модель кластера, состоящая из парафермионов

Как уже отмечалось во введении, парафермионы являются экзотическими квазичастицами с дробной статистикой. Они обобщают майорановские фермионы и существуют только в в одномерных и двухмерных системах. В случае, когда отдельно взятая частица имеет всего три различных состояния, парафермионы описываются операторами, удовлетворяющими следующей алгебре:

$$\chi_i^+\chi_i = 1, \qquad \chi_i^3 = 1, \qquad \chi_i\chi_j = \omega\chi_j\chi_i, \qquad i < j. \tag{21}$$

Дробная статистика определяется фазой с угловым параметром $\theta = 2\pi/3$ (15), а индекс i нумерует узел решетки, где находится частица. Заметим, что майорановским фермионам соответствует фазовый угол $\theta = \pi$.

Решеточные парафермионы посредством преобразования Фрадкина – Каданова [4] выражаются через локальные спиновые операторы, которые представляются обобщенными матрицами Паули (16). Указанное отображение обобщает вышеприведенное преобразование Йордана- Вигнера (11) для частиц с дробной статистикой и задается в нашем случае следующими формулами:

$$\chi_{2l-1} = Z_l \prod_{k<l} X_k, \qquad \chi_{2l} = \omega Z_l \prod_{k\le l} X_k. \tag{22}$$

Стоит отметить, что из-за хвоста, образованного X операторами, сложность представления растет с ростом индекса, так что наиболее простые выражения имеют частицы, расположенные в начале цепочки:

$$\chi_1 = Z_1, \qquad \chi_2 = \omega Z_1 X_1, \qquad \chi_3 = X_1 Z_2, \qquad \chi_4 = \omega X_1 Z_2 X_2. \tag{23}$$

Преобразование Фрадкина- Каданова (22) легко обратить. Соответствующие соотношения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} X_l &= \omega^{-1}\chi_{2l-1}^+\chi_{2l}, \\ Z_l &= \omega^{l-1}\chi_{2l-1}\chi_{2l-2}^+\chi_{2l-3}\chi_{2l-4}^+\dots\chi_2^+\chi_1, \\ Y_l &= \omega^{l-1}\chi_{2l}\chi_{2l-2}^+\chi_{2l-3}\chi_{2l-4}^+\dots\chi_2^+\chi_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Первая формула из приведенного списка позволяет построить парафермионное представление для четного и нечетного генераторов $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ симметрии (20):

$$X_{even} = \omega^L \chi_3^+\chi_4\chi_7^+\dots\chi_{2N-3}^+\chi_{2N-2}, \qquad X_{odd} = \omega^{L+1}\chi_1^+\chi_2\chi_5^+\dots\chi_{2N-1}^+\chi_{2N}. \tag{25}$$

Вместе оба генератора составляют чередующееся произведение по всем частицам, которое образует диагональную $\mathcal{Z}_3$ симметрию модели:

$$X_{\text{total}} = X_{\text{odd}} X_{\text{even}} = \omega^N \chi_1^+ \chi_2 \chi_3^+ \chi_4 \ldots \chi_{2N-1}^+ \chi_{2N}. \tag{26}$$

Сосредоточимся теперь на парафермионном представлении кластерного гамильтониана, изначально определенного через трехмерные матрицы Паули (14), (16). Тогда, используя также алгебраические соотношения, которым удовлетворяют парафермионные операторы (21), можно через них выразить локальные члены в гамильтониане (14):

$$\begin{aligned} Z_{l-1}^+ X_l Z_{l+1} &= \omega^{-1} \chi_{2l-2}^+ \chi_{2l+1}, \\ Z_{l-1} X_l Z_{l+1}^+ &= \omega^{-1} \chi_{2l+1}^+ \chi_{2l-2} \left(\chi_{2l-1}^+ \chi_{2l} \right)^2 = \omega \chi_{2l-2} \chi_{2l-1} \chi_{2l}^+ \chi_{2l+1}^+. \end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что первое уравнение соответствует нечетному значению индекса l, а второе – четному.

В результате, гамильтониан обобщенной модели кластера с открытыми граничными условиями, будучи выраженным через парафермионы, приобретает следующий вид:

$$H = -\frac{\omega^{-1}}{2} \sum_{r=1}^{L-1} \chi_{4r}^+ \chi_{4r+3} - \frac{\omega}{2} \sum_{r=1}^{L} \chi_{4r-2} \chi_{4r-1} \chi_{4r}^+ \chi_{4r+1}^+ \ + \ \text{H. c.} \tag{28}$$

Отметим, что формально вторая сумма представляет собой четырехчастичное взаимодействие. Тем не менее, все локальные члены коммутируют друг с другом. Конечно, это свойство наследуется от родительской модели (14). Как видно из второго уравнения в (27), указанное взаимодействие отсутствует для цепочки Китаева с майорановскими фермионами (7), переходя в свободный член, билинейный по частицам.

5. Нулевые парафермионнные моды на границах

Как было отмечено выше, модели спиновых кластеров (13), (14) унитарно эквивалентны, соответственно, моделям Изинга и Поттса. Поэтому их основные состояния получаются из соответствующих со-стояний указанных систем. В результате унитарного преобразования они при-обретают дополнительные фазовые множители в разложении по базисным спиновым состояниям. В частности, для поттсовского кластера (14) основное состояние с точностью до несущественного нормировочного множителя приоб-ретает следующий вид:

$$|0\rangle = \sum_{n_1,\ldots,n_N} \omega^{-n_1 n_2 + n_2 n_3 - \ldots + n_{N-1} n_N} \, |n_1 n_2 \ldots n_N\rangle, \tag{29}$$

где числа $n_l = 0,\ 1,\ 2$ задают значения спина (или трибита) на l-ом узле. Общее число спинов нечетно, чем и объясняется выбор знака в последнем степенном члене (18). Для случая изинговского кластера (13) основное состояние получается заменой $\omega \to -1,\ n_l \to 0,\ 1$ при любом количестве спинов. При периодических граничных условиях степень в фазовом множителе будет содержать также и связь между первым и последним членом, а состояние (29) будет невырожденным с ненулевой щелью между вакуумом и (ненулевыми) элементарными возбуждениями в системе.

При свободных граничных условиях (именно они и рассматриваются в данной работе) имеются нулевые граничные моды, которые существуют благодаря краевым инвариантам модели. Левые инварианты задаются двумя первыми нечетными парафермионными модами:

$$\chi_1 = Z_1\,, \qquad \chi_3 = X_1 Z_2. \tag{30}$$

В этом можно убедиться, используя точный вид парафермионного гамильтониана (28), а также коммутационные соотношения (21). В то же время, правые инварианты соответствуют последним двум четным модам:

$$\chi_{2N} = \omega Z_N^{+} X_{total}\,, \qquad \chi_{2N-2} = \omega X_N^{+} Z_{N-1} X_{total}. \tag{31}$$

Напомним, что справа в обоих выражениях стоит генератор комбинированной $\mathcal{Z}_3$ симметрии модели (26).

В результате, четыре краевых парафермионных инварианта (30), (31) ответственны за полное нарушение спонтанной $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ симметрии гамильтониана (28). Действительно, действием на базовое основное состояние (29) они порождают все другие вакуумные состояния, которые одновременно образуют нулевые краевые моды:

$$\chi_1^n \chi_3^m \chi_{2N-2}^k \chi_{2N}^l \,|\,0\rangle, \qquad \text{где} \quad n, m, k, l = 0, 1, 2. \tag{32}$$

Формально, построенный набор состоит из 81 состояния. Однако, не все они являются независимыми: из первых двух уравнений (23) легко видеть, что, как и в случае с майорановскими фермионами, двум различным парафермионам соответствует только один спин, который в нашем случае трёхмерный. Поэтому, четыре парафермионных оператора порождают только две независимые спиновые степени свободы, что и приводит к девятикратному вырождению основного состояния в полном соответствии с группой симметрии. В качестве нулевых мод можно, например, выбрать приведенный ниже первый или второй набор состояний:

$$\left(\chi_1^{+}\chi_3\right)^n \left(\chi_{2N-2}^{+}\chi_{2N}\right)^m |\,0\rangle, \qquad \left(\chi_1^{+}\chi_{2N}\right)^n \left(\chi_3^{+}\chi_{2N-2}\right)^m |\,0\rangle, \tag{33}$$

где значения степеней приведены в уравнении (32). Отметим, что в обоих случаях биномы в скобках взаимно коммутируют. Вместе с тем, две левые парафермионные моды (30), которые являются симметриями модели, не коммутируют между собой, а порождают дробный фазовый множитель ω при перестановке. То же самое верно и для правых краевых парафермионов (31). Это приводит к тому, что $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$ симметрия системы, будучи разделенной на правую и левую части, не сохраняется в первоначальном виде, а приобретает дополнительный фазовый множитель (он порождает проективное представление). Данное свойство называется раздроблением (фракционализацией) симметрии и является характерной особенностью нетривиальных топологических фаз, защищенных этой симметрией.

Нулевые краевые моды применяются в квантовых вычислениях. Соответствующие квантовые схемы строятся на основе логических квантовых элементов (вентилей) действующих на один или два кубита (трибита). В качестве таковых можно использовать сплетающие операторы и операторы измерения, которые сохраняют четность состояния. Оператор четности двух парафермионов определяется как 8:

$$L_j = \omega \chi_{j+1}^{+} \chi_j : \quad L_{2l-1} = X_l^{+}, \quad L_{2l} = Z_l Z_{l+1}^{+}. \tag{34}$$

Все операторы L_j коммутируют друг с другом, кроме ближайших соседей. Последние, аналогично парафермионам, удовлетворяют коммутационному соотношению

$$L_j L_{j+1} = \omega L_{j+1} L_j. \qquad (35)$$

Все эти соотношения легко вытекают из уравнений (21) и (24).

Используя оператор четности двух соседних парафермионов, можно построить вышеупомянутый сплетающий оператор, который унитарен и имеет следующий вид [8, 17]:

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega + L_j + L_j^{+}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(1 + \chi_{j+1}^{+}\chi_j + \chi_j^{+}\chi_{j+1}\right). \qquad (36)$$

Применяя парафермионную алгебру (21), можно проверить, что квадрат сплетающего оператора не является независимой величиной, а представляется в виде:

$$U_j^2 = iU_j + 1. \qquad (37)$$

Заметим, что отсюда вытекает, что $U_j^3 = i$. Более того, как и в случае операторов четности, все сплетающие операторы кроме ближайших соседей взаимно коммутируют. Рядом же расположенные операторы удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера:

$$U_j U_k = U_k U_j, \quad \text{где} \quad |j-k| \geq 2, \qquad U_j U_{j+1} U_j = U_{j+1} U_j U_{j+1}. \qquad (38)$$

Соотношения (37) и (38) полностью определяют алгебру сплетающих операторов. Для квантовых вычислений актуальны четыре краевые парафермионные моды (30), (31), которые остаются стабильными из-за топологической защищенности.

Стоит напомнить также, что аналогичные операторы для майорановских фермионов строятся на основе фермионной четности $L_j = i\gamma_j\gamma_{j+1}$. Они также унитарны и имеют следующий вид [18]:

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - iL_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \gamma_j\gamma_{j+1}\right), \qquad U_j^2 = \gamma_j\gamma_{j+1} = \sqrt{2}U_j - 1, \qquad (39)$$

откуда сразу следует, что $U_j^4 = -1$.

6. Заключение

В работе построена простая квантовая цепочка из парафермионов, которые дают фазу $\omega = e^{2\pi i/3}$ при перестановке. Гамильтониан системы выводится преобразованием Фрадкина-Каданова из спинового кластера, который соответствует модели Поттса с нетривиальным топологическим порядком, защищенным симметрией $\mathcal{Z}_3 \times \mathcal{Z}_3$. Рассматривается открытая цепочка, содержащая $4L + 2$ парафермиона. Она состоит из взаимно коммутируюших локальных частей, билинейных и биквадратных по частицам. Подобно цепочке Китаева, состоящей из майорановских фермионов, на границах образуются парафермионные моды с нулевой энергией, которых в нашем случае четыре (по две на каждом краю). Эти безмассовые моды приводят к 9-кратному вырождению основного состояния с полным нарушением спонтанной симметрии. При этом симметрия, которая защищает топологический прядок, выражается через комбинированные четности парафермионов. Стабильность краевых мод относительно локальных возмущений можно использовать для квантовых вычислений. В качестве квантовых вентилей можно использовать сплетающие операторы, которые удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории теоретической физики Института физики ЕГУ, финансируемой Комитетом по высшему образованию и науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения и в рамках программы 21AG-1C047 Комитета по высшему образованию и науке.

Авторы не имеют конфликта интересов. Они в равной степени внесли свой вклад в данную работу в концептуализации исследования, математических выводах и написании рукописи. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **B. Zeng, X. Chen, D.-L. Zhou, X.-G. Wen**. Quantum Information Meets Quantum Matter – From Quantum Entanglement to Topological Phase in Many-Body Systems: Springer, New York, 2019.
2. **A. Kitaev**. Phys.-Usp, **44**, 131 (2001).
3. **A. Kitaev, C. Laumann**. arXiv:0904.2771 (2008).
4. **E. Fradkin, L.P. Kadanoff**. Nucl. Phys. B, **170,** 1 (1970).
5. **F.C. Alcaraz, R. Koberle**. Phys. Rev. D, **24**, 1562 (1981).
6. **P. Fendley**. J. Stat. Mech., P11020 (2012).
7. **J. Alicea, P. Fendley**. Annu. Rev. Condens. Matter Phys., **7**, 119 (2016).
8. **A. Hutter, D. Loss**. Phys. Rev. B, **93**, 125105 (2016).
9. **Y. Wang, Z. Hu, B. C. Sanders, S. Kais.** Front. Phys., **8**, 479 (2020).
10. **R. Verresen, R. Moessner, F. Pollmann**. Phys. Rev. B, **96,** 165124 (2017).
11. **W.P. Su, J.R. Schrieffer, A.J. Heeger**. Phys. Rev. Lett. **42**, 1698 (1979).
12. **J.H. Han, E. Lake, H.T. Lam, R. Verresen, Y. You**. arXiv:2309.10036 (2023).
13. **S.D. Geraedts, O.I. Motrunic**. arXiv:1410.1580 (2014).
14. **X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, X.-G. Wen**. Science, **338**, 1604 (2012).
15. **H. Topchyan, V. Iugov, M. Mirumyan, Sh. Khachatryan, T. Hakobyan, T. Sedrakyan.** JHEP, **12**, 199 (2023).
16. **H. Topchyan, V. Iugov, M. Mirumyan, T. Hakobyan, T. Sedrakyan, A. Sedrakyan.** arXiv:2312.15095 (2023).
17. **L.-W. Yu, M.-L. Ge**. Scientific Reports, **6**, 21497 (2016).
18. **D. A. Ivanov**. Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001).

SIMPLE EXTENSION OF KITAEV CHAIN FOR Z_3 PARAFERMIONS

T.S. HAKOBYAN, R.H. VAROSYAN, G.H. HARUTUNYAN

A simple quantum chain with topological phase is constructed. It is formed by parafermions (quasiparticles obeying the fractional statistics) with angular parameter $\theta = 2\pi/3$. The model is derived from the one-dimensional spin model with topological order protected by the $Z_3 \times Z_3$ symmetry (generalized cluster model). Parafermionic zero modes arising at the chain boundaries, which remain stable due to the gap and topological order, are constructed and studied.