

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXX, № 4

1960

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս,
Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ քղրակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԻԱՐԶՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ (պատ. խմբագրի
տեղակալ), Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ
ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ ԳԱ
ակադեմիկոս, Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր):

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик АН
АрмССР, Г. С. ДАВТЯН, академик АН
АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, академик
АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН (зам. отв. редактора), С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

Մաթեմատիկա

- Ա. Վ. Չարմազյան — Երկու կի նորմալացված մակերևույթի մի ձևափոխության մասին 187
- Ա. Ա. Դոնչայր — Հավաքույն մոտավորության տեսության վերաբերյալ մի հակադարձ թեորեմի մասին 193
- Է. Ռ. Ռոզենդորն — $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ մետրիկայի իրականացումը հնգա-
շափ էվկլիդեսյան տարածության մեջ 197

Կիրառական մաթեմատիկա

- Ռ. Ս. Ունասյան — Խառն եղրային պայմաններով խաչաձև սալի ծոման մի խնդրի մասին 201

Ֆիզիկա

- Գ. Ս. Սահակյան — Դիսպերսիայի օրինքը շատ մեծ խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում: Հաղորդում II 211

Դինամիկական օդերևութաբանություն

- Ա. Մ. Մխիթարյան — Տուրբուլենտ ջերմահաղորդականության հավասարման մի լուծման մասին 219

Ֆիզիկական Բիմիա

- Հ. Հ. Զալքիկյան և Ն. Մ. Բեյլերյան — Կալիումի պերսուլֆատ — ամիններ ու եկ-
ցիանների կինետիկան ջրային լուծույթներում: III 223

Անօդաչուական Բիմիա

- Վ. Մ. Թառայան, ՀՍՍՌ ԴԱ թղթակից-անդամ և Թ. Ժ. Ավագյան — Սելենային
թթվի կատալիտիկ ռեդուկցիան 231

Ագրոֆիմիա

- Բ. Ն. Աստվածատրյան — Կալիումի ֆիքսացիան Հայաստանի նախալեռնային
զոնում կիսաանապատային քարքարոտ հողերում 233

Հանքաբանություն

- Բ. Մ. Ունիքսեբյան, Ա. Ս. Ֆարամազյան և Է. Խ. Խուրշուդյան — Տելուրոթիսմու-
տիտ և որոշ տելուրիդներ Կալերի մոլիբդենիտային հանքավայրից 239
- Շ. Հ. Ամիրյան — Ոսկու հանքայնացման բնույթը հանքավայրերից մեկում 245

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Математика	
А. В. Чакмазян—Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности	187
А. А. Гончар—Об одной обратной теореме теории наилучших приближений	193
Э. Р. Розендорн—Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве	197
Прикладная математика	
Р. С. Минасян—Об одной смешанной задаче изгиба крестообразной пластинки	201
Физика	
Г. С. Саакян—О дисперсионных свойствах среды при очень больших плотностях и температурах. Сообщение II	211
Динамическая метеорология	
А. М. Мхитарян—Об одном решении уравнения турбулентной теплопроводности	219
Физическая химия	
О. А. Чалтыкян и Н. М. Бейлерян—Кинетика реакций персульфата калия с аминами в водных растворах. III	225
Неорганическая химия	
В. М. Тараян, чл.-корресп. АН АрмССР и Т. Т. Авакян—О каталитическом восстановлении селенистой кислоты	231
Агрохимия	
Б. Н. Аствацатрян—О фиксации калия в полупустынных каменистых почвах предгорной зоны Армении	235
Минералогия	
Б. М. Меликсетян, А. С. Фарамазян и Э. Х. Хуршудян—Теллуrowисмутит и некоторые другие теллуриды из Калерского месторождения молибденита	239
Ш. О. Амирян—Характер оруденения золота на одном месторождении	245

А. В. Чакмазян

Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 3. I 1960)

Рассмотрим поверхность двух измерений X_2 , погруженную в евклидово E_4 . Допустим, что X_2 дополнена до гиперполосы так, что ее естественная нормализация будет одновременно и двойственной. Это значит, что поверхность X_2 дополнена до гиперполосы так, чтобы характеристика была перпендикулярна касательной плоскости X_2 .

Если обозначить через X нормальный вектор главной касательной гиперплоскости гиперполосы, а Y направляющий вектор характеристической прямой, то основные дифференциальные уравнения Γ_2 ⁽¹⁾ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_j r_i &= h_{ij} X + k_{ij} Y & (a) \\ X_j &= -h_j^k r_k & (b) \\ Y_j &= -k_j^k r_k, & (c) \end{aligned} \quad (1)$$

где $h_{ij} = -\partial_i r \partial_j X = X \nabla_j r_i$, $k_{ij} = -\partial_i r \partial_j Y = Y \nabla_j r_i$.

Условия (1b) можно истолковать следующим образом. Если рассмотрим на гиперсфере S_3 двумерную поверхность Σ_2 , радиус-вектор точки которой $X = X(u^1, u^2)$, то ее касательная плоскости, определяемая векторами $\partial_i X$, параллельна касательной плоскости X_2 .

Говорят, что эти поверхности находятся в соответствии Петерсона ⁽²⁾. Такое отображение X_2 на поверхности Σ_2 назовем ее главным сферическим отображением.

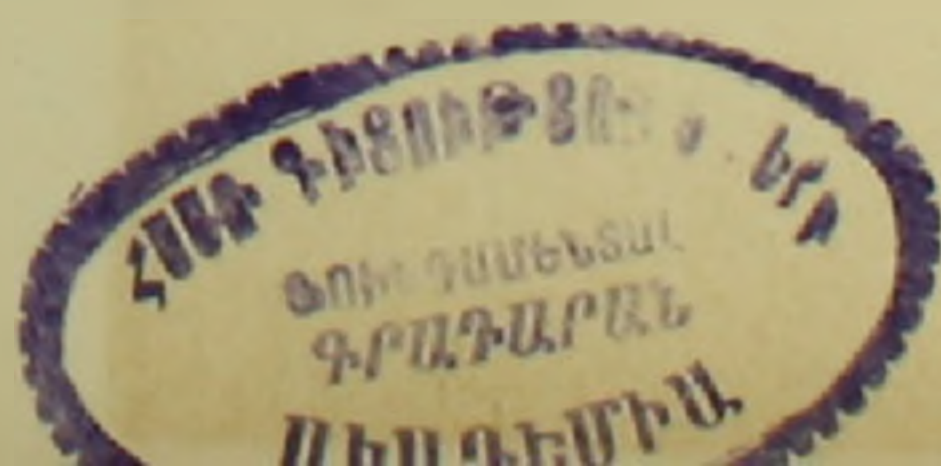
Поверхность Σ_2 определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla_j X_{(i)} &= -\gamma_{ij} X + E_{ij} Y \\ Y_j &= -E_j^k X_k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\gamma_{ij} = X_i X_j = h_i^k h_{jk}, \quad E_{ij} = -\partial_i X \partial_j Y = -h_i^k k_{jk} \quad (3)$$

есть первый и второй тензоры поверхности Σ_2 на гиперсфере S_3 , причем скобка вокруг индекса показывает, что ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности Σ_2 ⁽³⁾. Условия (3)



показывают, что главная сеть $(^4) X_2$ соответствует сети линий кривизны Σ_2 .

1. В нормальной плоскости X_2 возьмем точку с постоянными координатами c_1, c_2 относительно репера X, Y . Радиус-вектор этой точки

$$r^*(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) + c_1 X(u^1, u^2) + c_2 Y(u^1, u^2) \quad (4)$$

определяет двумерную поверхность, которую мы обозначим через X_2^* . Дифференцируя (4) по u^i , получим

$$r_i^* = r_i + c_1 X_i + c_2 Y_i \quad (5)$$

или, вследствие (1)

$$r_i^* = (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) r_k. \quad (6)$$

Эти уравнения показывают, что в соответствующих точках поверхностей X_2 и X_2^* касательные плоскости параллельны.

Кроме того, поверхности X_2 и X_2^* имеют общую нормальную плоскость. Для X_2^* получаем выражения

$$X r_i^* = 0, \quad Y r_i^* = 0, \quad XY = 0, \quad \partial_i XY = 0,$$

а это показывает, что X_2^* допускает действенную нормализацию с теми же X, Y . Основные дифференциальные уравнения X_2^* будут иметь следующий вид:

$$\nabla_j r_i^* = h_{ij}^* X + k_{ij}^* Y,$$

$$X_i = -h_i^{*k} r_k^*,$$

$$Y_i = -k_i^{*k} r_k^*,$$

где

$$h_{ij}^* = -\partial_i r^* \partial_{ij} X = h_{ij} - c_1 h_i^k h_{jk} - c_2 k_i^k h_{jk}$$

$$k_{ij}^* = -\partial_i r^* \partial_{ij} Y = k_{ij} - c_1 h_i^k k_{jk} - c_2 k_i^k k_{jk}.$$

Кроме того, поверхностям X_2 и X_2^* соответствует один и тот же сферический образ Σ_2 . Мы можем сказать, что уравнение (4) дает переход от одной двойственно нормализованной X_2 к другой X_2^* с тем же сферическим отображением. Но так как главные сети как X_2 , так и X_2^* соответствуют одной и той же сети линий кривизны сферического образа Σ_2 , то главные сети X_2 и X_2^* соответствуют друг другу.

Вычислим метрический тензор X_2^* . Используя (6), получаем

$$g_{ij}^* = (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) (\delta_j^e - c_1 h_j^e - c_2 k_j^e) g_{ke}.$$

Если теперь главную сеть на X_2 примем координатную, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$; следовательно, на X_2^* получаем соответственно $h_{12}^* = k_{12}^* = g_{12}^* = 0$. Из (6) следует

$$r_1^* = (1 - c_1 h_1^1 - c_2 k_1^1) r_1,$$

$$r_2^* = (1 - c_1 h_2^2 - c_2 k_2^2) r_2.$$

Эти условия показывают, что касательные к координатным линиям параллельны.

2. Предположим, что в уравнении (4) c_1 и c_2 зависят от параметров u^3, u^4 . Тогда

$$r^* = r(u^1, u^2) + c_1(u^3, u^4) X(u^1, u^2) + c_2(u^3, u^4) Y(u^1, u^2).$$

Примем u^1, u^2, u^3, u^4 за криволинейные координаты пространства E_4 . Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^i} = \frac{\partial r}{\partial u^i} + c_1 \frac{\partial X}{\partial u^i} + c_2 \frac{\partial Y}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^3} = \frac{\partial c_1}{\partial u^3} X + \frac{\partial c_2}{\partial u^3} Y$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^4} = \frac{\partial c_1}{\partial u^4} X + \frac{\partial c_2}{\partial u^4} Y$$

Выберем u^3, u^4 так, чтобы в нормальной плоскости они определяли ортогональную систему криволинейных координат. В этом случае будем иметь $\frac{\partial r^*}{\partial u^3} \frac{\partial r^*}{\partial u^4} = 0$.

Линейный элемент пространства E_4 выражается следующим образом

$$ds^2 = g_{ij}^* du^i du^j + g_{33}^* (du^3)^2 + g_{44}^* (du^4)^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}^* &= (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) (\delta_j^e - c_1 h_j^e - c_2 k_j^e) g_{ke} \\ g_{33}^* &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial u^3} \right)^2 \\ g_{44}^* &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^4} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial u^4} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если, кроме того, главную сеть X_2 принять за координатную, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$, а из (7) получим $g_{12}^* = 0$. Таким образом, линейный элемент пространства примет вид

$$ds^2 = g_{11}^* (du^1)^2 + g_{22}^* (du^2)^2 + g_{33}^* (du^3)^2 + g_{44}^* (du^4)^2.$$

Отсюда следует, что с каждой двойственно нормализованной поверхностью можно связать четырежды ортогональную систему координатных поверхностей в E_4 .

3. Допустим, что в уравнении (4) c_1, c_2 зависят от параметра u^3 . Тогда уравнение

$$r^* = r(u^1, u^2) + c_1(u^3) x(u^1, u^2) + c_2(u^3) y(u^1, u^2) \quad (8)$$

выражает трехмерную поверхность X_3 , вложенную в E_4 . Линейный элемент X_3 равен

$$ds^2 = g_{ij}^* (u^1, u^2, u^3) du^i du^j + g_{33}^* (u^3) (du^3)^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}^* &= (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) (\delta_j^e - c_1 h_j^e - c_2 k_j^e) g_{ke} \\ g_{i3}^* &= 0 \\ g_{33}^* &= (c_1')^2 + (c_2')^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если обозначить $w = \int \sqrt{g_{33}^* (u^3)} du^3$, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = g_{ij}^* du^i du^j + dw^2, \quad (10)$$

который показывает, что линии w будут геодезическими линиями X_3 , а поверхность $w = \text{const}$ ортогональна направлениям этих линий. Из (9) получаем выражение $(c_1')^2 + (c_2')^2 = 1$, которое показывает, что кривая $\{c_1(w), c_2(w)\}$, находящаяся в нормальной плоскости, отнесена к длине дуги. Обозначим коэффициенты второй квадратичной формы X_3 через $\pi_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha r^* \partial_\beta n = \nabla_\alpha r_\beta^* n$, где n — нормальный вектор ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Очевидно, что $\pi_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$).

Из деривационного уравнения следует

$$\nabla_3 r_3^* = \pi_{33} n,$$

но так как в нашем случае $\Gamma_{33}^k = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{k3}^3 = 0$, то имеем

$$\frac{\partial r_3^*}{\partial u^3} \pi_{33} n.$$

Отсюда, вследствие (8), получаем

$$c_1^* x + c_2^* y = \pi_{33} n,$$

следовательно,

$$\pi_{33} = \sqrt{(c_1^*)^2 + (c_2^*)^2},$$

т. е. π_{33} есть кривизна кривой, лежащей в нормальной плоскости. Для π_{ij} получаем выражение

$$\pi_{ij} = \frac{(\delta_i^e - c_1 h_i^e - c_2 k_i^e)(c_1^* h_{ej} + c_2^* k_{ej})}{\sqrt{(c_1^*)^2 + (c_2^*)^2}}. \quad (11)$$

Если, кроме того, главная сеть X_2 является координатной, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$ и из (11) получаем $\pi_{12} = 0$. Таким образом, матрицы фундаментальных тензоров X_3 получают диагональный вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} g_{11}^* & & \\ & g_{22}^* & \\ 0 & & 1 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{ccc} \pi_{11} & & \\ & \pi_{22} & \\ 0 & & \pi_{33} \end{array} \right\|$$

где

$$g_{ii}^* = (1 - c_1 h_i^i - c_2 k_i^i)^2 g_{ii}^*$$

$$\pi_{ii} = \frac{(1 - c_1 h_i^i - c_2 k_i^i)(c_1^* h_{ii} + c_2^* k_{ii})}{V(c_1^*)^2 + (c_2^*)^2} \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, главные направления на X_1 образуют голономную систему.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность А. П. Нордену, под руководством которого выполнена эта работа.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՉՅԱՆ

Երկակի նորմալացված մակերեվույթի մի նեվափոխության մասին

1. Դիտարկենք նորմալացված X_1 մակերևույթն ընկղմված էվկլիդեսյան E_4 -ում: Վերջենք X_2 -ինորմալ հարթությունում կետ c_1, c_2 հաստատուն կոորդինատներով X, Y բեկորի նկատմամբ: Այդ կետի յառավիղ վեկտորը

$$r^*(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) + c_1 X(u^1, u^2) + c_2 Y(u^1, u^2) \quad (*)$$

որոշում է երկրաչափ մակերևույթ, որը մենք կնշանակենք X_2^* -ով:

Դիֆերենցները ըստ u^i վերջին արտահայտությունը և հաշվի առնենք (1) կատարենք

$$r_i^* = (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) r_k$$

Այս հավասարումը ցույց է տալիս, որ համապատասխան կետում X_2 և X_2^* մակերեվույթի շոշափող հարթությունները ղուգահեռ են: Բացի դրանից X_2 և X_2^* մակերևույթներն ունեն ընդհանուր նորմալ հարթություն:

X_2^* -ի համար ստանում ենք արտահայտություններ

$$X r_i^* = 0, \quad Y r_i^* = 0, \quad XY = 0, \quad X_i Y = 0$$

իսկ այս ցույց է տալիս, որ X_2^* -ը թույլատրում է երկակի նորմալացում նույն X և Y -ով:

Բացի դրանից X_2 և մակերևույթներին S_3 -ի վրա համապատասխանում է նույն սֆերիկական պատկեր Σ_2 -ը:

Մենք կարող ենք ասել, որ (*) հավասարումը տալիս է անցում մեկ երկակի նորմալացված X_2 մակերևույթից մյուս X_2^* -ին նույն սֆերիկական պատկերմամբ: Բայց քանի որ զիսավոր ցանցը X_2 -ի X_2^* -ի համապատասխանում է սֆերիկական պատկերի Σ_2 կորոթյան ցանցին, ասկա զիսավոր ցանցը X_2 -ի X_2^* համապատասխանում է մեկը մյուսին:

2. Ենթադրենք, որ (*) հավասարման մեջ c_1 և c_2 կախված են u^3, u^4 պարամետրից: Այդ դեպքում ստացվում է հետևյալը

$$r^* = r(u^1, u^2) + c_1(u^3, u^4) X(u^1, u^2) + c_2(u^3, u^4) Y(u^1, u^2).$$

* по i не суммировать.

եթե գլխավոր ցանցը X_2 -ի ընդունենք որպես կոորդինատային և հաշվի առնենք (7)-ի տարածություն զծախն էլեմենտը ստանում է հետևյալ տեսքը

$$ds^2 = g_{11}^* (du^1)^2 + g_{22}^* (du^2)^2 + g_{33}^* (du^3)^2 + g_{44}^* (du^4)^2;$$

Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի երկակի նորմալացված մակերևույթի հետ կարելի է կապել քառորթոգոնալ սխեմայի կոորդինատային մակերևույթներ E_2 -ում:

3. Ենթադրենք որ (*) հավասարման մեջ c_1, c_2 կախված են u^3 պարամետրից: Այդ դեպքում ստացվում է, որ X_2 -ի վրա գլխավոր ուղղությունները կադմում են հոլոնոմ սխեմայ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 4 (1959). ² А. П. Норден, Известия высших учебных заведений. Математика, № 4 (5), 1958. ³ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, М.—Л., Гостехиздат, 1950. ⁴ А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР, т. XXIX, № 1 (1959).

МАТЕМАТИКА

А. А. Гончар

Об одной обратной теореме теории наилучших приближений

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 5. I 1960)

1. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, определенную на замкнутом множестве F действительной оси; производную функцию $f'(x)$ в точке $x \in F$ по множеству F обозначим $f'_F(x)$. Наилучшее приближение в равномерной метрике функции $f(x)$ рациональными функциями (без какого-либо ограничения на расположение полюсов) порядка не выше n будем обозначать $R_n(f; F)$.

Известна (для $F = [0, 1]$ ⁽⁴⁾, для произвольного замкнутого множества F ⁽⁵⁾) следующая теорема (имеющая смысл лишь для множеств положительной меры):

Теорема 1.

Если

$$R_n(f; F) \leq \frac{C}{n^A},$$

где $A > 1$, C не зависит от n , то почти всюду на множестве F существует конечная производная $f'_F(x)$.

Заметим ⁽⁴⁾, что никакая скорость стремления к нулю $R_n(f; F)$ (даже для $F = [0, 1]$) не обеспечивает дифференцируемости функции $f(x)$ на всем множестве F . С другой стороны, при $A = 1$ теорема уже не верна. Е. П. Долженко ⁽³⁾ построил пример функции, непрерывной, но нигде не дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$, для которой $R_n(f; [0, 1]) < \frac{1}{n}$ (и даже $R_n(f; [0, 1]) \leq a_n$, лишь бы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$).

В работе (5) показано, что скорость стремления $R_n(f; F)$ к нулю большая, чем $n^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$ произвольно мало, обеспечивает дополнительную гладкость функции $f(x)$ (в обобщенном смысле) почти всюду на множестве F . В то же время оставался открытым вопрос о том, насколько окончательна в теореме 1 характеристика исключительного множества точек недифференцируемости функции $f(x)$ как множества меры нуль: или а) каковы бы ни были множества Δ меры нуль и функции $\varphi(n) \downarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$ существует функция $f(x)$, недифферен-

цируемая на Δ , причем $R_n(f; F) < \varphi(n)$, или б) дополнительная скорость стремления к нулю $R_n(f; F)$ накладывает дополнительные ограничения на исключительное множество. В настоящей заметке приводятся две теоремы, показывающие, что имеет место второй случай, и устанавливающие зависимость между скоростью стремления к нулю $R_n(f; F)$ и свойствами исключительного множества.

2. Пусть $h(r)$ положительная неубывающая функция положительного аргумента r , мера Хаусдорфа $m(F; h)$ множества F действительной оси определяется следующим образом: покроем множество F системой интервалов Δ_k , длина $\Delta_k = r_k$ так, что $r_k \leq \varepsilon$. Нижнюю грань $\sum_k h(r_k)$ по всевозможным таким покрытиям обозначим через $m_\varepsilon(F; h)$;

$m(F; h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon(F; h)$. Если $h(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, то получаем α -меру

Хаусдорфа; в частности, при $h(r) = r$ длину множества по Хаусдорфу, совпадающую для измеримых множеств на прямой с линейной мерой Лебега; если $h(r) = \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-1}$, получаем логарифмическую меру.

Очевидно, если α -мера Хаусдорфа множества F равна нулю, то и α' -мера для всех $\alpha' > \alpha$ также равна нулю; из равенства нулю логарифмической меры следует равенство нулю α -меры при любом α .

Теорема 2.

Если

$$R_n(f; F) < \frac{c}{n^A},$$

где $A > 1$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $(A - \varepsilon)^{-1}$ -мера Хаусдорфа множества точек недифференцируемости $f(x)$ равна нулю.

Так как $A > 1$, то при некотором $\varepsilon > 0$ $(A - \varepsilon)^{-1} < 1$ и следовательно теорема 2 содержит в себе теорему 1.

Теорема 3.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f; F)} = 0,$$

то логарифмическая мера множества точек недифференцируемости $f(x)$ равна нулю.

Заметим, что точки с бесконечной производной включаются в множество недифференцируемости $f(x)$.

Известно ⁽¹⁾, что из равенства нулю логарифмической меры множества следует равенство нулю гармонической меры; по-видимому, если $R_n(f; F) \leq cq^n$, $0 < q < 1$, то множество точек недифференцируемости $f(x)$ имеет гармоническую меру нуль ⁽²⁾, теорема 6.4).

Доказательства теорем 2, 3 основываются, в частности, на следующих леммах об оценке логарифмической производной рациональных функций:

Лемма 1. Пусть $R_n(x)$ рациональная функция порядка n , $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ произвольно малое число. Существует множество $\Delta = \Delta(R_n(x); \delta)$, представляющее из себя сумму конечного числа интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2n}$, длина $\Delta_k = r_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{2n} (r_k)^2 \leq \delta$$

такое, что для $x \notin \Delta$ имеет место оценка

$$|R'_n(x)| \leq C |R_n(x)| \cdot \frac{1}{\delta^{1/2}} \cdot n^{1/2} \ln n,$$

где C не зависит от n и δ .

Лемма 2. Пусть $R_n(x)$ рациональная функция порядка n , $\delta > 0$ произвольно малое число. Существует множество $\Delta = \Delta(R_n(x); \delta)$, представляющее из себя сумму конечного числа интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2n}$, длина $\Delta_k = r_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{2n} \left[\ln \left(\frac{1}{r_k} \right) \right]^{-1} \leq \delta,$$

такое, что для $x \notin \Delta$ имеет место оценка

$$|R'_n(x)| \leq C |R_n(x)| e^{n^{1/2}} \cdot \ln n,$$

где C абсолютная постоянная.

Замечание 1. Производная $f'_F(x)$ в точках x , в которых она существует, может быть получена почленным дифференцированием последовательности $R_{2^n}(x)$ рациональных функций наилучшего приближения порядка 2^n функции $f(x)$ на множестве F :

$$f'_F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R'_{2^n}(x).$$

Замечание 2. Приведенные результаты легко перенести на случай приближения функций комплексного переменного на множествах, расположенных на спрямляемых кривых в плоскости комплексного переменного. По-видимому, теоремы 2, 3 справедливы для произвольного замкнутого множества в плоскости комплексного переменного.

Замечание 3. Теорема 2 представляет интерес в частном случае наилучших приближений многочленами на всюду разрывных замкнутых множествах.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

**Հավազույն մոտավորության հետևության վերաբերյալ մի հակադարձ
թեորեմի մասին**

Աշխատանքում դիտարկվում են ուսումնասիրվող ֆունկցիաների միջոցով լավագույն մոտավորությունների վերաբերյալ հակադարձ թեորեմներ:

Ապացուցվում է, որ եթե

$$R_n(f; F) < \frac{c}{n^A}, \quad A > 1,$$

ապա $f(x)$ ֆունկցիայի ոչ-դիֆերենցելիության կետերի բազմության $\frac{1}{A-1}$ կարգի խտությունը չափը զրո է, որտեղ $R_n(f; F)$ -ը իրական առանցքի F վրա f ֆունկցիայի n կարգի ուսումնասիրվող ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորությունն է:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f; F)} = 0$ դեպքում տեղի ունի համանման թեորեմ ֆունկցիայի ոչ-դիֆերենցելիության լոգարիթմական չափի մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ *Р. Неванlinna*, Однозначные аналитические функции, ГТТЛ, 1941. ² *С. Н. Мергелян*, Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды Математич. института им. В. А. Стеклова, т. 37 (1951). ³ *Е. П. Долженко*, ДАН СССР, т. 126, № 5 (1959). ⁴ *А. А. Гончар*, ДАН СССР, т. 100, № 2 (1955). ⁵ *А. А. Гончар*, ДАН СССР, т. 128, № 1 (1959).

Э. Р. Розендорн

Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22. I 1960)

1. Как известно, плоскость Лобачевского не допускает регулярного вложения в E_3 (Д. Гильберт ⁽¹⁾; через E_m обозначаем m -мерное евклидово пространство). Д. Блануша построил реализацию плоскости Лобачевского в E_8 в виде поверхности класса C^∞ , не имеющей самопересечений ⁽²⁾. Покажем, что, если допускать самопересечения (точнее самоприкосновения), то, пользуясь методом Д. Блануша, можно построить в E_5 поверхность с метрикой

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2, \quad (1)$$

где $f(u)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, определенная для всех значений u ($-\infty < u < +\infty$), причем указанная поверхность принадлежит к тому же классу C^n или C^∞ , что и $f(u)$. В частности, если $f(u) = \sinh u$, получим вложение плоскости Лобачевского в E_5 .

2. Используем функции:

$$\varphi_1(u) = \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u+1} e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_2(u) = \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^u e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi_1(u) = Na \left(\left[\max_{2n-1 < u < 2n+1} (|f|, |f'|) \right] + 1 \right), \text{ если } 2n-1 \leq u < 2n+1,$$

$$\psi_2(u) = Na \left(\left[\max_{2n-2 < u < 2n} (|f|, |f'|) \right] + \sqrt{2} \right), \text{ если } 2n-2 \leq u < 2n.$$

Здесь $[]$ обозначает целую часть, n принимает всевозможные целые значения, $N \geq 2$ — фиксированное целое число, $a = [\max |\varphi_i'|] + 2$. Функции φ_1 и φ_2 рассматривались в работе ⁽²⁾, ψ_1 и ψ_2 — аналог ступенчатых функций работы ⁽²⁾. Для реализации важны следующие свойства φ_i , доказанные в ⁽²⁾:

1) $\varphi_i(u)$ — периодические функции класса C^∞ с периодом 2.

2) $\varphi_i(1) = \varphi_i^{(k)}(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$

При $u \neq 2n + 1$ $\varphi_1(u) \neq 0$, при $u \neq 2n$ $\varphi_2(u) \neq 0$.

$$3) \varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1.$$

Поверхность с уравнениями (2) реализует метрику (1):

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= f(u) \varphi_1(u) \frac{\cos v \psi_1(u)}{\psi_1(u)} ; & x_2 &= f(u) \varphi_1(u) \frac{\sin v \psi_1(u)}{\psi_1(u)} ; \\ x_3 &= f(u) \varphi_2(u) \frac{\cos v \psi_2(u)}{\psi_2(u)} ; & x_4 &= f(u) \varphi_2(u) \frac{\sin v \psi_2(u)}{\psi_2(u)} ; \\ x_5 &= \int_0^u \sqrt{1 - \left\{ \frac{1}{\psi_1(t)} \frac{d}{dt} (f(t) \varphi_1(t)) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{\psi_2(t)} \frac{d}{dt} (f(t) \varphi_2(t)) \right\}^2} dt. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

В этом можно убедиться, непосредственно вычисляя $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_5^2$ (учитывая, что $\psi_1'(u) = \psi_2'(u) = 0$).

Замечание. Подынтегральное выражение в формулах (2) имеет смысл, так как в силу построения ψ_i

$$\left| \frac{1}{\psi_i(u)} \frac{d}{du} (f(u) \varphi_i(u)) \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям Д. Блануши (2), можно установить, что x_i принадлежат к тому же классу C^n или C^∞ , к которому принадлежит $f(u)$.

3. Остановимся на расположении в E_5 поверхности, заданной уравнениями (2). Из (2), (3) и из свойств φ_i и ψ_i (в частности из несоразмерности $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ при всех значениях u) вытекает следующее:

1) Поверхность неограниченно простирается вдоль оси x_5 и заключена внутри цилиндра $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(Na)^{-1}$, радиус которого можно сделать как угодно малым за счет выбора N .

2) Линии $v = \text{const}$ однозначно проектируются на ось x_5 .

3) Различные линии $u = \text{const}$ не имеют общих точек. Каждая из них проектируется на плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(u)$ и $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(u)$ соответственно, где $r_i(u) = f(u) \varphi_i(u) (\psi_i(u))^{-1}$. Если u_0 — не целое, то на линии $u = u_0$ разным значениям v соответствуют разные точки.

4) Если k — целое число, то линии $u = 2k$ представляют собой окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(2k)$, $x_5 = x_5(2k)$, а линии $u = 2k + 1$ — окружности $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(2k + 1)$, $x_5 = x_5(2k + 1)$. Эти окружности являются линиями самоприкосновения поверхности. В каждой точке такой окружности счетное число областей поверхности, соответствующих разным значениям v , касаются друг друга, причем имеют бесконечный порядок соприкосновения. Поверхность пересекается с подпространством (x_1, x_2, x_5) по последовательности линий $u = 2k$, с подпространством (x_3, x_4, x_5) — по последовательности линий $u = 2k + 1$.

$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$ մետրիկայի իրականացումը հնգաչափ էվկլիդեսյան
հարաժույթյան մեջ

Հոդվածում ողտագործելով Դ. Բլանուսի մեթոդը էվկլիդեսյան հնգաչափ E_5 տա-
րաժույթյան մեջ կառուցվում է

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2$$

մետրիկա ունեցող մի մակերևույթ, որտեղ $f(u)$ —դրական անընդհատ դիֆերենցելի
ֆունկցիա է $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա: Մասնավորաբար, եթե $f(u) = \cosh u$, ստացվում
է լորաչևսկու հարթության ներդրումը E_5 տարաժույթյան մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Гильберт, Основания геометрии. ² D. Blanusa, Monatshefte für Mathema-
tik, B. 59, H. 3, 1955, 217—229.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной смешанной задаче изгиба крестообразной пластинки

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19. I 1960)

В работе дается решение задачи поперечного изгиба крестообразной пластинки, свободно опертой на торцах $y = \pm b$, $x = \pm b$ и защемленной вдоль сторон $y = \pm d$ ($|x| \geq d$) и $x = \pm d$ ($|y| \geq d$) (фиг. 1), под действием нагрузки $P(x, y)$.

Прогиб $W(x, y)$ пластинки, как известно ⁽¹⁾, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right] = P(x, y), \quad (1)$$

где E — модуль упругости материала пластинки, h — толщина, σ — коэффициент Пуассона, и граничным условиям

$$W|_s = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm b} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=\pm d, |x| \geq d} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=\pm d, |y| \geq d} = 0.$$

Здесь s — контур пластинки.

Для простоты ограничиваемся случаем симметрии относительно осей координат и диагоналей $y = \pm x$.

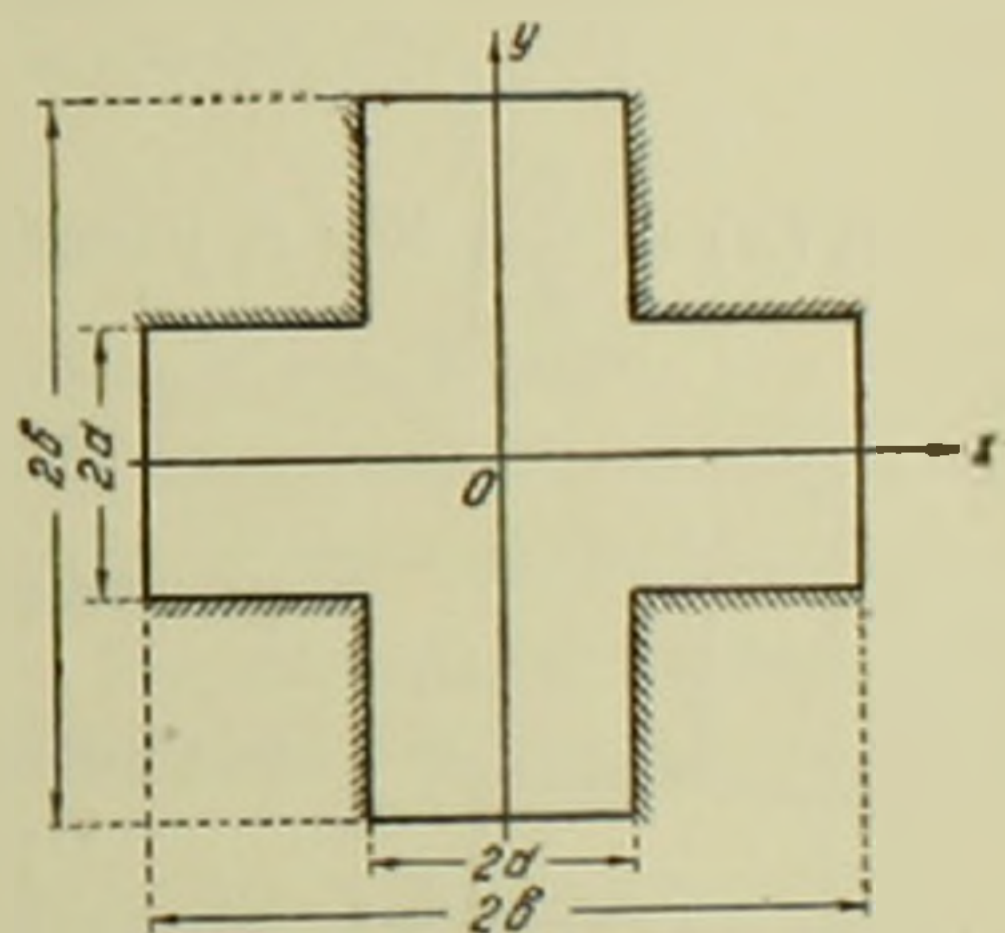
В силу симметрии достаточно рассмотреть одну четвертую часть пластинки (фиг. 2), причем для продолжения решения на остальную область на прямых $y = 0$ и $x = 0$ должны выполняться условия

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = 0 \quad (3)$$

Кроме того,

$$W(x, y) = W(y, x). \quad (4)$$

Прежде чем перейти к построению решения, прогиб $W(x, y)$ пластинки в области $OABCDF$ представим в следующем виде ⁽²⁾



Фиг. 1

$$W(x, y) = \begin{cases} W_1(x, y) & \text{при } 0 \leq y \leq d \\ W_2(x, y) & \text{„ } d \leq y \leq b, \end{cases} \quad (5)$$

где функции $W_i(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1), соответствующим граничным условиям (2) и условиям сопряжения на линии раздела KC :

$$W_1(x, d) = W_2(x, d); \quad \left. \frac{\partial^i W_1}{\partial y^i} \right|_{y=d} = \left. \frac{\partial^i W_2}{\partial y^i} \right|_{y=d} \quad (i = 1; 2; 3).$$

В силу условия (4) достаточно найти выражение лишь для $W_1(x, y)$. Обозначим, для упрощения дальнейших выкладок,

$$\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial y^2} = U_1(x, y). \quad (6)$$

Тогда из (1) и (5) для функции $U_1(x, y)$ получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = \frac{12(1 - \sigma^2)}{Eh^3} P(x, y). \quad (7)$$

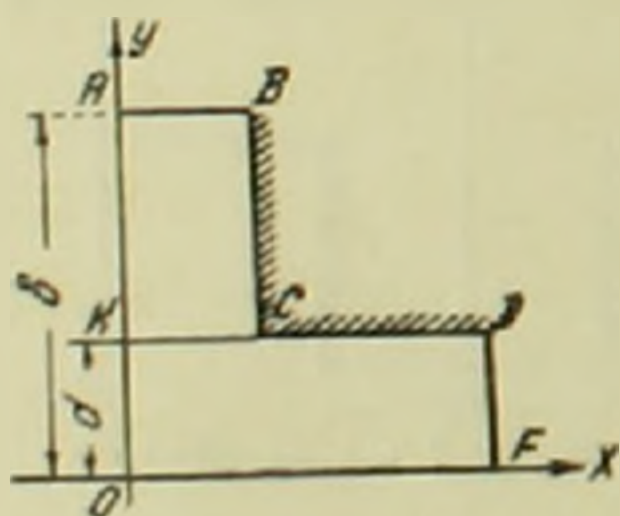
Будем искать выражения для $W_1(x, y)$ и $U_1(x, y)$ в виде рядов

Фурье, расположенных по $\cos \alpha_k y$, где $\alpha_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{d}$.

$$W_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cos \alpha_k y; \quad U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \alpha_k y, \quad (8)$$

где

$$f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d W_1(x, y) \cos \alpha_k y dy; \quad \varphi_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_1(x, y) \cos \alpha_k y dy.$$



Фиг. 2.

Для нахождения коэффициентов $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ умножим уравнения (5) и (6) на $\frac{2}{d} \cos \alpha_k y dy$ и проинтегрируем от 0 до d .

Произведя интегрирование по частям и принимая во внимание граничные условия (2), получим

$$f_k''(x) - \alpha_k^2 f_k(x) = \varphi_k(x) + \frac{2(-1)^k \alpha_k S(x)}{d},$$

$$\varphi_k''(x) - \alpha_k^2 \varphi_k(x) = \frac{2}{d} [p_k(x) + (-1)^k \alpha_k S^*(x)]. \quad (9)$$

Здесь введены обозначения

$$S(x) = W(x, d); \quad S^*(x) = U(x, d);$$

$$p_k(x) = \frac{12(1 - \sigma^2)}{Eh^3} \int_0^d P(x, y) \cos \alpha_k y dy. \quad (10)$$

Граничные условия для функций $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, согласно (2) и (3), будут

$$f'_k(0) = \varphi'_k(0) = f_k(b) = \varphi_k(b) = 0. \quad (11)$$

Решая уравнения (8) и выполняя соответствующие граничные условия для $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & \frac{2}{\alpha_k d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b [(-1)^{k+1} \alpha_k S^*(t) - p_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt + \right. \\ & \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b-x) \int_0^x [(-1)^{k+1} \alpha_k S^*(t) - p_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\}; \\ f_k(x) = & \frac{1}{\alpha_k^3 d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b [2(-1)^{k+1} \alpha_k^3 S(t) + (\alpha_k (-1)^k S^*(t) + \right. \\ & \left. + p_k(t))(1 - \xi_k(t, x))] \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt + \right. \\ & \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b-x) \int_0^x [2(-1)^{k+1} \alpha_k^3 S(t) + \right. \\ & \left. + (\alpha_k (-1)^k S^*(t) + p_k(t))(1 - \xi_k(x, t))] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

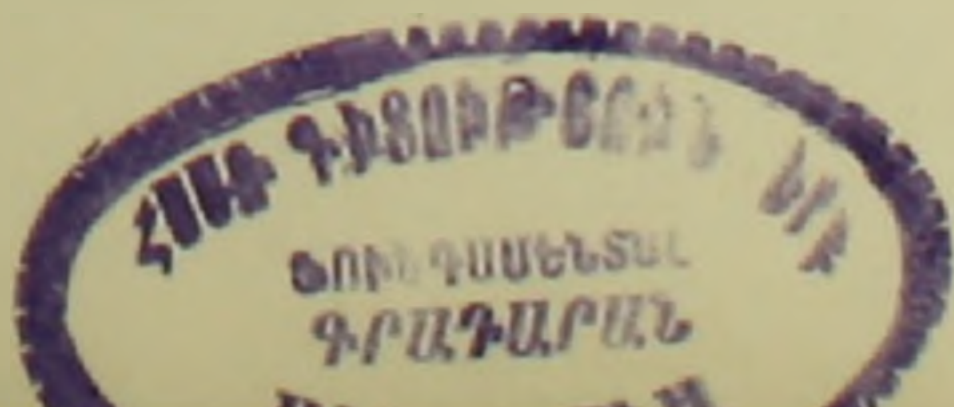
где для краткости обозначено

$$\xi_k(t, x) = \alpha_k (b-t) \operatorname{cth} \alpha_k (b-t) + \alpha_k x \operatorname{th} \alpha_k x - \alpha_k b \operatorname{th} \alpha_k b. \quad (13)$$

В выражения (12) для $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ входят неизвестные значения функций $S^*(x)$ и $S(x)$. Прежде чем переходить к их определению, заметим следующее: оба ряда, входящие в (8), обладают слабой сходимостью—члены первого ряда в промежутке $(0, d)$, а второго—в $(0, b)$ убывают со скоростью $\frac{1}{k}$. Сходимость этих рядов можно усилить, выделив выражения, обуславливающие слабую сходимость:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & S(x) - \frac{d^2 - y^2}{2} [S^*(x) - S''(x)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) + \\ & + 2(-1)^k \frac{\alpha_k^2 S(x) - S^*(x) + S''(x)}{\alpha_k^3 d}] \cos \alpha_k y; \end{aligned} \quad (14)$$

$$U(x, y) = S^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k(x) + \frac{2(-1)^k S^*(x)}{\alpha_k d} \right] \cos \alpha_k y.$$



Для определения значения $S^*(x)$ в (d, b) выполним условие равенства нулю угла поворота пластинки на стороне CD :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i f_i(x) = 0. \quad (d \leq x \leq b) \quad (15)$$

Умножим (15) на $\frac{2}{b-d} \sin \gamma_k (x-d)$, где $\gamma_k = \frac{k\pi}{b-d}$, и проинтегрируем от d до b . При этом, вследствие равномерной сходимости ряда, входящего в левую часть (15), возможна перестановка знаков суммы и интеграла. Принимая во внимание (9), получим

$$a_k = \frac{8\gamma_k^2 \operatorname{ch}^2 \gamma_k d}{(b-d)(\operatorname{sh} 2\gamma_k d + 2\gamma_k d)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} a_i}{\alpha_i^2 + \gamma_k^2} [f_i(d) - \frac{\varphi_i(d)}{\alpha_i^2 + \gamma_k^2}] + \rho_k. \quad (16)$$

Здесь обозначено

$$a_k = \frac{2}{b-d} \int_d^b S^*(x) \sin \gamma_k (x-d) dx; \\ \rho_k = \frac{48(1-\sigma^2) \operatorname{ch} \gamma_k d}{Eh^3(b-d)(\operatorname{sh} 2\gamma_k d - 2\gamma_k d)} \int_0^d \int_a^b P(x, y) (d \operatorname{th} \gamma_k d - \\ - y \operatorname{th} \gamma_k y) \operatorname{ch} \gamma_k y \sin \gamma_k (x-d) dx dy. \quad (17)$$

Принимая, далее, во внимание, что в $(0, d)$

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(c) \sin \alpha_i x; S^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c) \sin \alpha_i x, \quad (18)$$

для определения $f_k(d)$ и $\varphi_k(d)$, входящих в (16), из соотношений (12) получим

$$\varphi_k(d) = \frac{2(-1)^k \operatorname{ch} \alpha_k d \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)}{d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i a_i \varphi_i(d)}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} \right] - q_k, \\ f_k(d) = \frac{(-1)^k \operatorname{ch} \alpha_k d \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)}{d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i a_i f_i(d)}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} \left[\frac{\gamma_i^2 + 3\alpha_k^2}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} - \xi_k(d, d) \right] - \right.$$

$$-\frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha_i \varphi_i(d)}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \left| \frac{\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} - \xi_k(d, d) \right| + \eta_k, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{2}{\alpha_k d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left| \operatorname{ch} \alpha_k d \int_d^b p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b-d) \int_0^d p_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right|; \\ \eta_k &= \frac{1}{\alpha_k^3 d \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k d \int_d^b p_k(t) [1 - \xi_k(t, d)] \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b-d) \int_0^d p_k(t) [1 - \xi_k(d, t)] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Заметим, что, согласно (17), в промежутке (d, b)

$$S^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \gamma_k (x - d). \quad (21)$$

Выполнение граничных условий привело к совокупности трех систем линейных алгебраических уравнений для определения $a_k, f_k(d)$ и $\varphi_k(d)$. Преобразуем эти системы с целью их регуляризации. Обозначив

$$\begin{aligned} m_k &= (-1)^{k+1} \alpha_k d [\varphi_k(d) + \alpha_k^2 f_k(d)]; \quad n_k = (-1)^{k+1} \alpha_k^3 d f_k(d); \\ a_k^* &= 12 \gamma_k (b-d) a_k + \frac{48 \gamma_k}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2 n_i + \gamma_k^2 m_i}{(\alpha_i^2 + \gamma_k^2)^2}, \quad (22) \end{aligned}$$

после некоторых преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned} a_k^* &= \frac{48 \gamma_k (2 \gamma_k d - 1 - e^{-2 \gamma_k d})}{d (\operatorname{sh} 2 \gamma_k d - 2 \gamma_k d)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2 n_i + \gamma_k^2 m_i}{(\alpha_i^2 + \gamma_k^2)^2} + \rho_k^*; \\ m_k &= -\frac{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2} + H_1(i; k) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(L_1(i; k) - \frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \right) \xi_k(d; d) \right] m_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{3 \alpha_i^2 + \alpha_k^2}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2} + H_2(i; k) + \left(L_2(i; k) + \frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \right) \xi_k(d; d) \right] n_i + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12(b-d)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^*}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} \left[\frac{\gamma_i^2 - \alpha_k^2}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} - \xi_k(d; d) \right] \Bigg\} + q_k^*; \\
n_k = & - \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2} - H_3(i; k) + \right. \right. \\
& + \left(L_1(i; k) - \frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \right) \xi_k(d; d) \Bigg] m_i + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2} - H_4(i; k) + \right. \\
& + \left(L_2(i; k) + \frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \right) \xi_k(d; d) \Bigg] n_i + \frac{1}{12(b-d)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^*}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} \left[\frac{\gamma_i^2 + 3\alpha_k^2}{\gamma_i^2 + \alpha_k^2} - \right. \\
& \left. \left. - \xi_k(d; d) \right] \right\} + r_k^*.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\rho_k^* &= 12\gamma_k(b-d)\rho_k; \quad q_k^* = (-1)^{k+1} \alpha_k d (q_k + \alpha_k^2 \eta_k); \quad r_k^* = (-1)^{k+1} \alpha_k^3 d \eta_k; \\
H_1(i; k) &= \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} [(\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) + \\
& + 8\alpha_i^2 \alpha_k^2 \Phi(k) - 2(\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Psi(k)]; \\
H_2(i; k) &= \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} [(\alpha_i^4 + 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 + \alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) - \\
& - 4(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Phi(k) - 2(\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Psi(k)]; \\
H_3(i; k) &= \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} [(\alpha_i^4 - 2\alpha_i^2 \alpha_k^2 + 9\alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^4 - 4\alpha_i^2 \alpha_k^2 + \\
& + 3\alpha_k^4) \Psi(i) - 4(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Phi(k) + 2(\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Psi(k)]; \\
H_4(i; k) &= \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} [(\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^4 - 4\alpha_i^2 \alpha_k^2 + \\
& + 3\alpha_k^4) \Psi(i) + 8\alpha_i^2 \alpha_k^2 \Phi(k) - 2(\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \alpha_k^2 \Psi(k)]; \\
L_1(i; k) &= \frac{1}{2} [H_1(i; k) + H_3(i; k)]; \quad L_2(i; k) = \frac{1}{2} [H_2(i; k) + H_4(i; k)];
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= - \frac{4\alpha_k}{\pi \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} \int_0^{b-d} \ln \left[2 \sin \frac{\pi x}{2(b-d)} \right] \cdot \operatorname{ch} \alpha_k (b-d-x) dx; \\
\Psi(k) &= - \frac{4\alpha_k^2}{\pi \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} \int_0^{b-d} \ln \left[2 \sin \frac{\pi x}{2(b-d)} \right] \cdot [(b-d) \operatorname{cth} \alpha_k (b-d) - \\
& - (b-d-x) \operatorname{cth} \alpha_k (b-d-x)] \operatorname{ch} \alpha_k (b-d-x) dx.
\end{aligned}$$

Исследуем полученную совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (23). Произведенные оценки показывают, что суммы модулей коэффициентов k -х уравнений второй и третьей систем совокупности (23) остаются меньше 0,8, причем при стремлении отношения $\frac{d}{b}$ к 1 эти суммы стремятся к нулю. Что касается первой из систем (23), то, начиная от значений k таких, что $\frac{d}{b} > \frac{7}{8k+7}$, сумма модулей коэффициентов k -го уравнения этой системы становится меньше 0,85, и с возрастанием k стремится к нулю со скоростью $96\gamma_k d e^{-2\gamma_k d}$. При этом, как легко видеть из (24), (17) и (20), свободные члены p_k^*, q_k^*, η_k^* этих систем стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{k}$. Согласно общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (3), совокупность систем (23) имеет единственное ограниченное решение, которое можно получить методом последовательных приближений.

Как нетрудно видеть, неизвестные m_k, n_k и a_k^* , начиная с некоторого $k = k_1$, зависящего от отношения сторон $\frac{d}{b}$ и величины $P(x, y)$,

стремятся к нулю со скоростью $\frac{M}{\sqrt{k}}$, причем постоянная M определится из максимального значения отношений свободных членов k -го уравнения и разности $1 - \zeta_k$, где ζ_k — сумма модулей коэффициентов k -го уравнения соответствующей системы.

Перейдем теперь к нахождению выражений для функции $U(x, y)$ и прогиба $W(x, y)$. Подставляя в (12) значения $S(x)$ и $S^*(x)$ из (18) и (21), а также принимая во внимание (22), после несложных преобразований получим:

при $0 \leq x \leq d; 0 \leq y \leq d$

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & -\frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \left\{ \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch} \alpha_k d} [(\cos \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k x + \cos \alpha_k x \operatorname{ch} \alpha_k y)(m_k - n_k) - \right. \\
 & \left. - \cos \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k x (q_k^* - \eta_k^*)] + \right. \\
 & \left. + \frac{2 \cos \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt + \operatorname{sh} \alpha_k (b-x) \int_0^x p_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right] \right\}; \\
 W(x, y) = & -\frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^3 \operatorname{ch} \alpha_k d} \left\{ (-1)^k \operatorname{ch} \alpha_k x \cos \alpha_k y [n_k - \eta_k^* - \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha_k}{2} (d \operatorname{th} \alpha_k d - x \operatorname{th} \alpha_k x) (m_k - n_k - q_k^* + \eta_k^*)] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \alpha_k x \left[n_k - \frac{\alpha_k}{2} (d \operatorname{th} \alpha_k d - x \operatorname{th} \alpha_k x) (m_k - n_k) \right] - \\
& - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k d \cos \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b p_k(t) (1 - \xi_k(t, x)) \operatorname{sh} \alpha_k (b - t) dt + \right. \\
& \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b - x) \int_0^x p_k(t) (1 - \xi_k(x, t)) \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right] \Bigg\}; \quad (25)
\end{aligned}$$

при $d \leq x \leq b$

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k y}{\alpha_k} \left[\frac{(-1)^k \operatorname{sh} \alpha_k (b - x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b - d)} (m_k - n_k - q_k^* + \eta_k^*) + \right. \\
& + \frac{2}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b - t) dt + \operatorname{sh} \alpha_k (b - x) \int_0^x p_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right] \Bigg\} + \\
& + \frac{1}{b - d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \operatorname{ch} \gamma_k y}{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k d} \sin \gamma_k (x - d); \\
W(x, y) = & - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k y}{\alpha_k^3} \left[\frac{(-1)^k \operatorname{sh} \alpha_k (b - x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b - d)} [n_k - \eta_k^* - \right. \\
& - \alpha_k \frac{(b - d) \operatorname{cth} \alpha_k (b - d) - (b - x) \operatorname{cth} \alpha_k (b - x)}{2} (m_k - n_k - q_k^* + \eta_k^*)] - \\
& - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b p_k(t) (1 - \xi_k(t, x)) \operatorname{sh} \alpha_k (b - t) dt + \right. \\
& \left. + \operatorname{sh} \alpha_k (b - x) \int_0^x p_k(t) (1 - \xi_k(x, t)) \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right] \Bigg\} - \\
& - \frac{1}{2(b - d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \operatorname{ch} \gamma_k y}{\gamma_k^2 \operatorname{ch} \gamma_k d} (d \operatorname{th} \gamma_k d - y \operatorname{th} \gamma_k y) \sin \gamma_k (x - d). \quad (26)
\end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$A_k = \gamma_k (b - d) \alpha_k.$$

Как видно из (25), при ограниченной нагрузке $P(x, y)$ коэффициенты рядов, входящие в выражения для $U(x, y)$ и $W(x, y)$, убывают при $0 \leq x \leq d$; $0 \leq y \leq d$ соответственно со скоростью

$$\frac{\rho}{\alpha_k^3} + \frac{M^*}{\alpha_k^{1.5}} e^{-\frac{\alpha_k}{2}(2d - x - y)} \operatorname{ch} \frac{\alpha_k(x - y)}{2}$$

и

$$\frac{P}{a_k^5} + \frac{1}{a_k^{3.5}} \{ [M_1 a_k (d-x) + M_2] e^{-a_k(d-x)} + \\ + [N_1 a_k (d-y) + N_2] e^{-a_k(d-y)} \},$$

где постоянные, входящие в эти выражения, зависят от величины $P(x, y)$ и отношения $\frac{d}{b}$ и определяются из (23). Аналогичные выражения получаются и при $d \leq x \leq b$.

Значения напряжений X_x, Y_y и X_y определяются из следующих соотношений:

$$X_x = -\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} [U(x, y) - (1-\sigma) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2}]; \\ Y_y = -\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} [\sigma U(x, y) + \\ + (1-\sigma) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2}]; X_y = -\frac{Eh}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (27)$$

Задаваясь величиной нагрузки $P(x, y)$ и отношением сторон $\frac{d}{b}$, из (23) получим значения m_k, n_k, a_k сверху и снизу ^(3,4), после чего способом, описанным в работе ⁽⁴⁾, найдем величины прогиба $W(x, y)$ и напряжений X_x, Y_y, X_y с избытком и недостатком.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Խառը եզրային պայմաններով խաչաձև սալի ծռման մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է $P(x, y)$ բևեռի ազդեցության տակ խաչաձև սալի ընդլայնական ծռման խնդիրը, երբ սալն ազատ հենված է $y = \pm b; x = \pm b$ ու ամրակցված է $y = \pm d (|x| \geq d), x = \pm d (|y| \leq d)$ կողերի երկայնքով (նկ. 1): Պարզության համար սահմանափակվում ենք կոորդինատային առանցքների ու $y = \pm x$ անկյունագծերի նկատմամբ սիմետրիայի դեպքով, որի պատճառով բավական է դիտարկել սալի մեկ քառորդ մասը (նկ. 2): Սալի $w(x, y)$ ճկվածքն այդ մասում ներկայացվում է

$$W(x, y) = \begin{cases} W_1(x, y) & \text{երբ } 0 \leq y \leq d, \\ W_2(x, y) & \text{երբ } d \leq y \leq b \end{cases}$$

տեսքով, ընդ որում $W_2(x, y) = W_1(y, x)$

Խնդրի լուծումն որոնվում է Ֆուրյեի շարքի միջոցով: Իզրային պայմաններին բավարարելը բերում է գծային հանրահաշվային հավասարումների անվերջ սխեմաների լուծմանը: Ցույց է տրվում այդ սխեմաների լիովին ռեզոլյարությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости, Физматгиз, 1959. ² Р. С. Минасян, ДАН АрмССР, т. XXII, № 5 (1956). ³ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1950. ⁴ Р. С. Минасян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XI, 3 (1958).

Г. С. Саакян

О дисперсионных свойствах среды при очень больших плотностях и температурах

Сообщение II

(Представлено чл.-корресп. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 15. VI 1959)

Рассеяние волн на нуклонах. При определенных физических условиях, а именно при достаточно больших плотностях вещества, достаточно низких температурах (чтобы электронный газ можно было считать полностью вырожденным) и достаточно больших частотах, рассеяние электромагнитных волн происходит не на электронах, а на нуклонах. При таких физических условиях неизбежно возникает явление жесткого черенковского излучения.

Для выяснения сути дела исследуем дисперсионные свойства среды, состоящей из нейтронов. Вычислим показатель преломления электромагнитных волн для такой среды и посмотрим, при каких частотах и плотностях нейтронов дисперсионные свойства среды будут определяться не электронами, а нейтронами (вообще следует говорить о нуклонах, однако число протонов в интересующих нас физических условиях мало по сравнению с числом нейтронов, поэтому ниже мы будем говорить о последних, но полученные все выводы в равной мере относятся и к протонам).

Несмотря на то, что нейтроны электрически нейтральны, тем не менее они способны рассеивать γ -кванты. Действительно из эксперимента известно, что γ -кванты могут поглощаться нейтронами, в результате чего рождаются нейтральные и отрицательные π -мезоны. Это хорошо известное явление фоторождения мезонов. С другой стороны, всякая система, способная поглощать электромагнитное излучение, с необходимостью должна также их рассеивать.

Свойство нейтронов поглощать и рассеивать электромагнитные волны обусловлено электромагнитной структурой их, т. е. существованием виртуального мезонного облака вокруг нуклона. При взаимодействии фотонов с нейтронами могут рождаться как виртуальные, так и реальные мезоны. Реальное рождение мезонов вызывает поглоще-

ние волны, поэтому показатель преломления среды, состоящей из нейтронов, будет комплексной величиной,

$$\sqrt{\varepsilon} = n + i n_1, \quad (1)$$

где ε — диэлектрическая постоянная среды, n_1 определяет поглощение волны, а n — скорость ее распространения в среде. Между действительной и мнимой частями показателя преломления существует связь ⁽¹⁾

$$n(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x n_1(x)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad (2)$$

где черта означает, что интеграл следует понимать в смысле главного значения.

Пусть $\sigma(\omega)$ — полное поперечное сечение фоторождения мезонов. Тогда коэффициент поглощения γ -квантов в нейтронном веществе равен $N_n \sigma$, где N_n — число нейтронов в единице объема. С другой стороны этот коэффициент поглощения равен $\frac{2\omega}{c} n_1$, следовательно

$$n_1(\omega) = \frac{c N_n \sigma(\omega)}{2\omega}. \quad (3)$$

Из (3) и (2) находим,

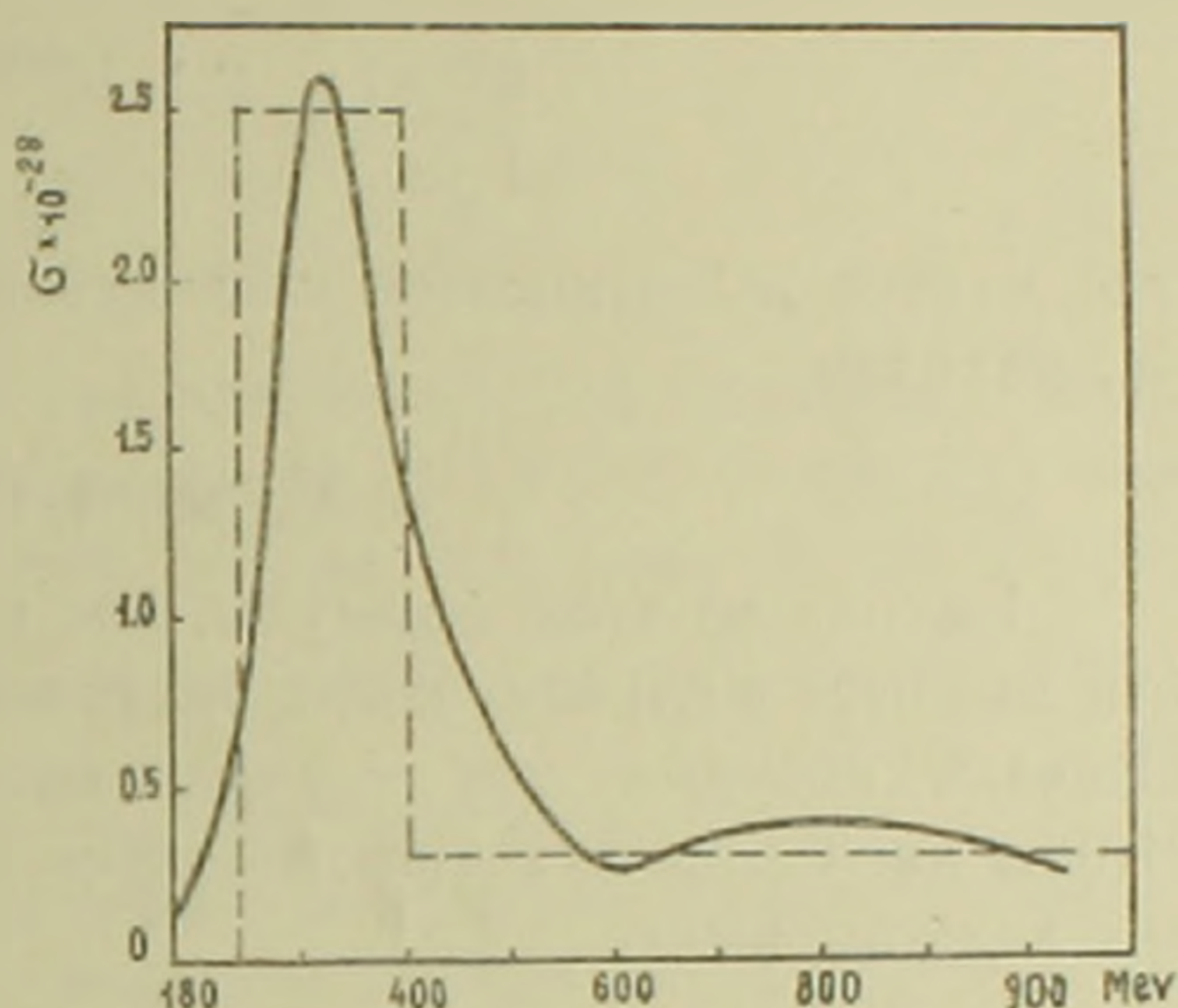
$$n(\omega) = 1 + \frac{c N_n}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma(x) dx}{x^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

В настоящее время точной теории фоторождения не существует. В работе ⁽²⁾ была построена феноменологическая теория, в основу которой легла гипотеза ^(3, 4) о существовании изобарического состояния нуклона с квантовыми числами $I = 3/2$ и $T = 3/2$ (I — полный момент количества движения и T — полный изотопический спин) и с резонансным уровнем $E_0 = 154$ Мэв. В настоящее время эта гипотеза подтверждена опытом. Помимо этого, эксперименты указывают на наличие еще двух других изобарных состояний $(3/2, 1/2)$ и $(3/2, 5/2)$, с более высокими уровнями энергии возбуждения. Дисперсионная формула Гелл-Манна и Ватсона ⁽²⁾ удовлетворительно описывает опытные данные, до энергии 400 Мэв. Однако она имеет громоздкий вид и нецелесообразна в смысле ее применения для вычисления $n(\omega)$.

Мы будем исходить из экспериментальной кривой фоторождения π^0 -мезонов на протонах, изображенной на фиг. 1. Эта кривая имеет два максимума: Первый очень резкий и хорошо выраженный при $h\omega = 320$ Мэв, соответствует первому изобару нуклона $3/2, 3/2$, второй слабовыраженный и широкий при $E \sim 700$ Мэв, соответствует изобару $3/2, 1/2$.

По мере продвижения к центру звезды плотность нейтронов повышается и согласно условию (1) соответственно расширяется область применимости понятия показателя преломления в сторону больших энергий квантов. В предельном случае мы имеем дело с ядерной плотностью. Среднее расстояние между частицами в этом случае равно $h/\mu c$ (μ — масса π -мезона) и соответственно предельная энергия фотонов должна быть порядка 150 Мэв. Следовательно, нам придется говорить о показателе преломления нейтронного вещества лишь при энергиях квантов $h\omega < 150$ Мэв. В этой области энергии $\varepsilon(\omega) = 0$, а главный

максимум этой функции находится при энергии, в два раза превышающей 150 Мэв. Отсюда ясно, что поскольку нас интересуют частоты $h\omega \lesssim 150$ Мэв, то для определения $n(\omega)$ детальная картина зависимости $\sigma(\omega)$ от ω будет несущественна. Итак, в качестве хорошего приближения мы можем истинную кривую фиг. 1 заменить ломанной линией, показанной пунктиром. Причем пунктирная линия выбрана так, чтобы площадь, образованная ею с осью абсцисс, приблизи-



Фиг. 1.

тельно совпала с площадью, образованной экспериментальной кривой. Далее предположим, что поперечные сечения фоторождения π^0 — и π^+ -мезонов на протонах приблизительно равны (что на самом деле приблизительно имеет место ^(5, 6)), и что сечения фоторождения на нейтронах и протонах также равны. Таким образом для $\varepsilon(\omega)$ предполагается

$$\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_1 \\ \sigma_1 & \text{при } \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ \sigma_2 & \text{при } \omega > \omega_2, \end{cases} \quad (5)$$

где $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$; $\sigma_2 = 0,62 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$; $\omega_1 = 3,7 \cdot 10^{23}$ — частота, соответствующая энергии фотонов 240 Мэв и наконец $\omega_2 = 6,1 \cdot 10^{23}$ — то же самое для энергии 400 Мэв.

Подставляя (5) в (4) и произведя интегрирование, получаем

$$n^2 - 1 = \frac{cN_n\sigma_1}{\pi\omega} \ln \frac{\omega_1 + \omega}{\omega_1 - \omega} + \frac{cN_n(\sigma_2 - \sigma_1)}{\pi\omega} \ln \frac{\omega_2 + \omega}{\omega_1 - \omega}. \quad (6)$$

Здесь, предполагая $\omega \ll \omega_1$ (напомним, что понятие показателя преломления в предельном случае ядерных плотностей $\sim 10^{28}$ ограничено энергиями квантов $h\omega \lesssim 150$ Мэв, тогда как $h\omega_1 = 240$ Мэв), получаем

$$n^2 - 1 = \frac{2cN_n}{\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\omega_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\omega_2} \right) = 2,1 \cdot 10^{-41} N_n. \quad (7)$$

Таким образом, диэлектрическая постоянная нейтронного вещества практически не зависит от частоты и весьма мало отличается от единицы.

Чтобы выяснить в конечном счете, чем определяются дисперсионные свойства среды: электронами или нейтронами, следует (7) сравнить с (22)*. Дисперсия будет определяться нейтронами в том случае, когда

$$\frac{n^2 - 1}{1 - n_e} = \frac{2,1 \cdot 10^{-41} N_n}{\omega_0^2} \omega^2 > 1, \quad (8)$$

где индекс e относится к электрону. Из (23) подставив значение ω_0 , находим

$$\omega^2 N_n > 0,94 \cdot 10^{60} N_e^{2/3}. \quad (9)$$

Исходя из этой формулы, мы можем выяснить, какие возможности имеются в случае, когда электронный газ полностью не вырожден. Сначала обсудим тот случай, когда нуклонный газ не вырожден. Чтобы дисперсия волн определялась электронами согласно (30)** и (9), мы должны иметь

$$N_e^{1/3} \exp \left(\frac{a}{T} N_e^{1/3} \right) < 3,6 \cdot 10^{17} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, \quad (10)$$

где введены следующие обозначения $\hbar\omega_0 = 2me^2$, $a = \frac{\pi c \hbar}{\chi} \approx 0,72$. Мы

должны заботиться и о выполнении условия (1), т. е. $\omega \leq CN_e^{1/3}$. Так, в качестве примера того, что равенство (10) может выполняться, примем

$N_e^{1/3} \frac{a}{T} = 15$, тогда получаем $N_e < 1,7 \cdot 10^{33} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^6$. Это неравенство

удовлетворится, если примем $\omega \sim \omega_0$ и $N_e \sim N_0$. А если $N_e^{1/3} \frac{a}{T} = 10$,

то из (10) получается $N_e < 4,4 \cdot 10^{30} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^6$. Из приведенных примеров

мы убеждаемся, что при условии $\frac{a}{T} N_e^{1/3} \leq 15$ процесс $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ с

участием среды вполне возможен, при меньших же температурах,

когда $T < \frac{a}{15} Ne^{-1/3}$ этот процесс невозможен. При тех физических

условиях, когда процесс $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ возможен, обратный процесс $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ запрещен принципом Паули, однако он имеет место, как только в распределении электронов, из-за различных возможных процессов, появляются свободные места.

* См. Сообщение I, ДАН АрмССР, т. XXX, № 1 (1960).

** Там же.

Дисперсия будет определяться нейтронами, когда

$$3,6 \cdot 10^{17} \left(\frac{N_0}{N_e} \right)^{2/3} \exp \left(- \frac{2a}{3T} N_e^{1/3} \right) \lesssim 3,6 \cdot 10^{17} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 < N_e^{1/3} \exp \left(\frac{a}{T} N_e^{1/3} \right). \quad (11)$$

Здесь с левой стороны написано условие применимости понятия среды $\omega \lesssim c N_n^{1/3}$. Правая сторона есть условие (9), учтено также (30)*.

Опять в качестве примера примем $\frac{a}{T} N_e^{1/3} = 15$ (условие вырождения электронного газа), тогда получим,

$$1,2 \cdot 10^{20} \left(\frac{N_0}{N_e} \right)^2 \lesssim 1,3 \cdot 10^{33} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^6 < N_e. \quad (11')$$

Здесь левая сторона неравенства автоматически выполняется, когда правая выполнена. (11') выполняется при $N_e > 1,4 \cdot 10^{28}$ и $\omega \gtrsim 7\omega_0$, температуры соответствующих областей звезды при этом будут $T \gtrsim 10^8$

градусов. Итак при $\frac{a}{T} N_e^{1/3} = 15$ и $\omega \gtrsim 7\omega_0$ дисперсия волн определяется нейтронами, а при частотах ниже $7\omega_0$ — электронами.

В случае, когда нуклонный газ также вырожден, плотность электронов сравнительно слабо зависит от плотности нейтронов. При $N_n < 10^{36}$ имеем $N_e \sim 1/8 N_0$, $c N_e^{1/3} \approx 0,5 \omega_0$, так что процессы $\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$ с участием среды или совсем не идут, или могут идти у самого порога явления при $\hbar\omega \approx 2mc^2$. При плотностях же $N_n \gtrsim 8 \cdot 10^{35}$ плотности электронов будут достаточны для рождения и аннигиляции пар. Но прежде чем утвердить наличие или отсутствие этого явления, необходимо также выяснить, при каких частотах дисперсия определяется электронами и при каких нейтронами. Для решения этого вопроса обратимся опять к условию (9). Согласно (32)* и (9) дисперсия определяется нейтронами, когда

$$N_n > 2,4 \cdot 10^{38} \frac{1}{v^2} \left[\frac{\alpha}{\pi} + \chi \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^{2/3} \right]^2, \quad (12)$$

где $v = \frac{\omega}{\omega_0}$. Условию (12), как всегда, должно сопровождать условие

применимости понятия среды, т. е. $\omega \lesssim c N_n^{1/3}$.

Дисперсия волн определяется электронами, если

$$N_n < 2,4 \cdot 10^{38} \frac{1}{v^2} \left[\frac{\alpha}{\pi} + \chi \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^{2/3} \right]^2. \quad (13)$$

Напомним, что при этом плотность электронов определяется формулой (32')**. Как мы видим при $N_n \lesssim 10^{36}$, процесс $\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$ сможет

* См. Сообщение I, ДАН АрмССР, т. XXX, № 1 (1960).

** Там же.

идти лишь при пороговой энергии, а при $N_n \gtrsim 10^{36} \text{ см}^{-3}$ уже имеются необходимые, а также достаточные (конечно с обязательным учетом условия $\omega \leq cN_n^{1/3}$) условия для разыгрывания этого процесса.

Жесткое излучение Черенкова. На основании материала, изложенного в предыдущем параграфе, мы приходим к выводу, что при заданной плотности вещества существует некоторая граничная частота, так что, когда частоты выше нее, дисперсия волн уже определяется не электронами, как это было до этого, а нейтронами. Согласно (7) при таких частотах показатель преломления больше единицы, и практически имеет постоянное, независящее от частоты значение. Поскольку показатель преломления среды больше единицы, то ясно, что в такой среде заряженные частицы, движущиеся со скоростью, превышающей фазовую скорость света, будут испускать черенковское излучение. Согласно условиям (1) и (9) излучаться могут лишь кванты, удовлетворяющие неравенству

$$10^3 N_e^{1/3} N_n^{-1/2} < h\omega \leq ch N_n^{1/3}. \quad (14)$$

В этом интервале энергии, распределение числа квантов по их энергиям является равномерным. Согласно (32)* эффект Черенкова наступает при энергиях частиц

$$E \gtrsim 2,2 \cdot 10^{20} N_n^{-1/2} Mc^2,$$

где Mc^2 — собственная энергия, частицы.

В случае, когда нуклонный газ невырожден, связь между плотностями N_e и N_n дается формулой (30)*. Для иллюстрации примем

$\frac{a}{T} N_e^{1/3} = 10$, тогда из (14) при $N_e = 10^{32}$ (т. е. $N_n = 2,2 \cdot 10^{36}$) находим $20 < h\omega \leq 28 \text{ Мев}$, а при $N_e = 4,5 \cdot 10^{33}$ (т. е. $N_n = 10^{38}$) имеем $10 < h\omega \leq 100 \text{ Мэв}$.

В случае, когда нуклонный газ также вырожден, связь между N_e и N_n определяется формулой (32')*. Для этого случая (14) принимает следующий вид,

$$2,6 \cdot 10^{13} N_n^{-1/2} \left[\frac{\alpha}{\pi} + \chi \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^{2/3} \right] < h\omega \leq hc N_n^{1/3}. \quad (14)'$$

Отсюда получается, что плотность нейтронов должна быть $N_n \gtrsim 8 \cdot 10^3$. При $N_n = 10^{36} \text{ см}^{-3}$ из (14') имеем $13 < h\omega \leq 20 \text{ Мэв}$, а при $N_n = 10^{38}$ получается $1,6 < h\omega \leq 100 \text{ Мэв}$.

Полученные выше результаты можно резюмировать так.

1. В работе исследованы дисперсионные свойства среды при весьма больших плотностях и температурах, а именно примерно при таких физических условиях, которые возможно имеются в белых ультракарликах.

* См. Сообщение I, ДАН АрмССР, т. XXX, № 1 (1960).

Если электронный газ не вырожден (что нам кажется мало вероятным), то показатель преломления среды зависит от температуры и выражается формулой (26)*. При плотностях электронов $N_e \gtrsim 10^{32} \text{ см}^{-3}$ в среде будут разыгрываться процессы однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар.

2. Если при рассматриваемых физических условиях температуры настолько низкие, что электронный газ вырожден, то при соблюдении условия $\omega^2 N_n < 10^{80} N_e^{3/2}$ (N_n — плотность нейтронов) дисперсия электромагнитных волн будет определяться электронами. Показатель преломления в этом случае определяется формулой (22)*.

3. Если электронный газ вырожден, а нуклонный газ нет, то связь между плотностями нейтронов и электронов определяется формулой (30)*. В этом случае при определенных, вполне выполняемых условиях, а именно при соблюдении условия (10), процессы $\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$ могут идти с участием среды.

Когда нуклонный газ также вырожден, связь между плотностями электронов и нейтронов определяется формулой (32')*. При $N_n < 10^{36} \text{ см}^{-3}$ плотность электронов не зависит от плотности нейтронов и имеет постоянное значение, равное примерно $1,5 \cdot 10^{31}$. При этом по видимому процессы $\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$ с участием среды невозможны, а если они возможны, то лишь у пороговой энергии $\hbar\omega = 2mc^2$. При плотностях же нейтронов $N_n \gtrsim 10^{36} \text{ см}^{-3}$ плотность электронов с ростом N_n начинает расти и этот процесс с участием среды будет иметь место. Условие существования этого явления определяется формулой (13).

4. Когда электронный газ вырожден, то при сравнительно больших плотностях и частотах волн $\omega^2 N_n > 10^{80} N_e^{3/2}$ дисперсионные свойства среды определяются не электронами, а нейтронами. Необходимые частоты волн и плотности нейтронов, при которых это имеет место, в случае невырожденного нуклонного газа, определяются условием (11), а в случае вырождения — условием (12).

5. В том случае, когда дисперсия волн определяется нейтронами, показатель преломления среды больше единицы и определяется формулой (7). А это значит, что, если заряженная частица в такой среде будет двигаться со скоростью, превышающей фазовую скорость света, то она будет испускать и поглощать (*) черенковское излучение. Спектр черенковского излучения определяется формулой (14). В случае вырожденного нуклонного газа энергии квантов определяются условием (14').

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за ценные указания, а также Н. М. Кочаряну, И. И. Гольдману, Г. М. Гарибяну и А. Ц. Амадуни за многочисленные обсуждения и проявление интереса к работе.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

* См. Сообщение I, ДАН АрмССР, т. XXX, № 1 (1960).

Դիսպերսիայի օրենքը լուսությունների և ջերմաստիճանների դեպքում

Հաղորդում II:

Այս աշխատանքի առաջին մասում ուսումնասիրված էր միջավայրի դիսպերսիոն հատկությունները շատ մեծ խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում:

Երբ էլեկտրոնային գազը այլասերված չէ, ապա $Ne \gtrsim 10^{32} \text{ սմ}^{-3}$ դեպքում, որտեղ Ne — էլեկտրոնների խտությունն է, միջավայրում տեղի կունենան մի ֆոտոնային անի-գիլիացիա և զույգերի ծնում $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma$:

Ի՞նչ թնաքակվող ֆիզիկական պայմաններում ջերմաստիճանները այնքան ցածր են, որ էլեկտրոնային գազը այլասերված է, ապա $\omega^2 Nn < 10^{40} N_e^{2/3}$ պայմանի դեպքում ալիքների ցրումը որոշվում է էլեկտրոններիով [բանաձև (22)]: Եթե նուկլոնային գազը այլասերված չէ, ապա պայման (10)-ը բավարարելու դեպքում $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma$ պրոցեսը կարող է բնթանալ միջավայրի աջակցությամբ: Երբ նուկլոնային գազը նույնպես այլասերված է, ապա $Nn \lesssim 10^{36} \text{ սմ}^{-3}$ դեպքում (Nn -ը նեյտրոնների խտությունն է) միջավայրի աջակցությամբ բնթացող $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma$ պրոցեսները կամ արգելված են, կամ կարող են տեղի ունենալ շեմային էներգիայի մոտակայքում $\hbar\omega \approx 2mc^2$, իսկ $Nn \lesssim 10^{36} \text{ սմ}^{-3}$ դեպքում այդ պրոցեսները դառնում են հնարավոր:

Երբ էլեկտրոնային գազը այլասերված է, ապա համեմատաբար մեծ խտությունների և հաճախականությունների դեպքում $\omega^2 Nn > 10^{40} N_e^{2/3}$ միջավայրի դիսպերսիոն հատկությունները որոշվում են ոչ թե էլեկտրոններիով, այլ նեյտրոններիով:

Ոչ այլասերված նուկլոնային գազի դեպքում, նեյտրոնների անհրաժեշտ խտությունը որոշվում է պայման (11)-ով, իսկ այլասերման դեպքում (12)-ով:

Այն դեպքում, երբ ալիքների ցրումը որոշվում է նեյտրոններիով, միջավայրի բեկման ցուցիչը մեծ է մեկից և որոշվում է (7)-ով: Դա նշանակում է, որ եթե այդպիսի միջավայրում լիցքավորված մասնիկի շարժման արագությունը մեծ է լույսի ֆազային արագությունից, ապա նա կառաքի և կկլանի Ջերենկովյան կոշտ ճառագայթներ: Ջերենկովյան ճառագայթման սպեկտրը որոշվում է բանաձև (14)-ով: Այլասերված նուկլոնային գազի դեպքում քվանտների էներգիան որոշվում է (14)-ով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.
² М. Gell-Mann, К. М. Watson, Ann. Rev. Nucl. Sci., 4, Stanford, 1954. ³ И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд и В. Я. Файнберг, ЖЭТФ, 26, 449, 1954. ⁴ К. А. Bruecner, Phys. Rev., 86, 106, 1952. ⁵ М. Heinberg, W. М. Mc Cbelland, F. Turkot, W. W. Woodward, R. R. Wilson and D. M. Zipoy, Phys. Rev., 110, 1211, 1958. ⁶ J. I. Vette, Phys. Rev., 111, 622, 1958. ⁷ Г. С. Саакян, ДАН АрмССР, XXV, 121 (1959).

1. См. Сообщение I, ДАН АрмССР, т. XXX, № 1 (1960).

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Об одном решении уравнения турбулентной теплопроводности

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 10. X 1959)

В работе (¹) впервые рассматривается вопрос о влиянии глубины водоема на испарение с его поверхности, применительно к условиям оз. Севан. Для этого решается уравнение турбулентной теплопроводности в водной массе, при заданном годовом ходе температуры поверхности воды. Уравнение это имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = k' \Delta T + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь x, y, z — координаты точки; начало координат расположено на поверхности воды; z — направлено вертикально вниз; x — вдоль скорости течения; t — время; T — температура частиц воды; u, w — составляющие скорости движения по осям координат; ε — приток тепла; k', k — коэффициенты турбулентной температуропроводности по горизонтали и вертикали соответственно, причем $k' = \text{const}$.

Далее считалось, что в условиях оз. Севан это уравнение может быть значительно упрощено и решалось следующее простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Здесь принято допущение об отсутствии каких-либо течений в озере, кроме того, считается, что теплообмен по горизонтали по сравнению с таковым по вертикали сравнительно мал, отсутствуют объемные источники тепла и коэффициент обмена — величина постоянная.

Дальнейший анализ показал, что некоторые из этих допущений очень тяжелые и приводят к неудовлетворительным результатам. Это в первую очередь относится к коэффициенту обмена, величина которого на основании косвенных наблюдений меняется в зависимости от времени и глубины, причем в поверхностных слоях она примерно на два порядка больше величины молекулярного коэффициента для больших

глубин. Кроме того, как показали наблюдения 1957—58 гг., воды оз. Севан отличаются большой прозрачностью, поэтому солнечная радиация проникает до больших глубин, порядка десятков метров, и пренебречь этим дополнительным притоком тепла нельзя.

На основании сказанного более точным должно быть следующее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \varepsilon, \quad (3)$$

которое мы и рассмотрим в настоящей статье. Если обозначить через S_0 — суммарную солнечную радиацию, падающую на единицу поверхности воды в единицу времени, A — альбедо водной поверхности, α — коэффициент поглощения, c^* — теплоемкость воды и ρ^* — ее плотность, то на основании наблюдений можно положить

$$\varepsilon = S_0 (1 - A) \frac{\alpha}{c^* \rho^*} e^{-\alpha z}. \quad (4)$$

Что касается коэффициента обмена, то здесь следует отметить два обстоятельства. Во-первых, вертикальный турбулентный обмен в значительной степени обусловлен волновым перемешиванием, если считать, что в малых водоемах, в отличие от морей и океанов, отсутствуют ветровые течения. С другой стороны, на такой обмен оказывает известное влияние стратификация водных масс, причем в период охлаждения вод эта стратификация бывает неустойчивой вследствие того, что холодные массы оказываются на поверхности, а более теплые — на глубине. Это приводит к дополнительному перемешиванию. Кроме того, само перемешивание с глубиной быстро затухает и на достаточно больших глубинах турбулентное перемешивание затухает, теплопроводность носит уже молекулярный характер.

На основании сказанного можно положить

$$k = k_0 + k_1 (1 + a \cos \Omega t) \left(1 - \frac{z}{h} \right), \quad z < h \quad (5)$$

$$k = k_0, \quad z > h.$$

Здесь: $k_0 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$ — коэффициент молекулярной теплопроводности; $k_1 \approx 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$ — среднее значение коэффициента обмена на поверхности воды; h — некоторая глубина, до которой коэффициент обмена линейно уменьшается, приближаясь к k_0 , независимо от времени; $\Omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца; a — безразмерная величина, характеризующая амплитуду годового хода коэффициента перемешивания. Так как k_1 в среднем на два порядка больше k_0 , то можно положить:

$$k \simeq k_1 (1 + a \cos \Omega t) \left(1 - \frac{z}{h} \right), \quad (6)$$

причем при $z = h$ $k = k_0$, а не нулю, как это дает (6).

Таким образом нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (1 + a \cos \Omega t) \left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{\partial T'}{\partial z} \right] + S_0 (1 - A) \frac{\alpha}{c^* \rho^*} e^{-\alpha z}, \quad (7)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} z = 0 \quad T'(z, t) &= T'_0(t), \\ z \geq h \quad T'(t) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

причем T' отклонение температуры воды от некоторого стационарного ее распределения.

Так как мы ищем периодическое решение, то начальные условия отсутствуют, кроме того, пусть

$$T'_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (T_m \cos m \Omega t + T'_m \sin m \Omega t). \quad (9)$$

Перепишем уравнение (7) в следующем виде, отбросив для простоты штрихи

$$\frac{1}{1 + a \cos \Omega t} \frac{\partial T}{\partial t} = k_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{\alpha S_0 (1 - A) e^{-\alpha z}}{c^* \rho^* (1 + a \cos \Omega t)}$$

и сделаем замену переменных

$$\tau = \Omega t + a \sin \Omega t. \quad (10)$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \Omega (1 + a \cos \Omega t) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и уравнение наше примет следующий вид

$$\Omega \frac{\partial T}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + S(\tau) e^{-\alpha z}. \quad (11)$$

Известную функцию $S(\tau)$ можно разложить в ряд

$$S(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n \cos n\tau + \beta'_n \sin n\tau). \quad (12)$$

Обратимся к граничному условию (9). Его нужно переписать по новой переменной τ . Для этого положим

$$T_m \cos m \Omega t + T'_m \sin \omega \Omega t = \sum_{n=0}^{\infty} (R_n^m \cos n\tau + R_n'^m \sin n\tau).$$

Тогда получим:
$$T_0(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (R_n^m \cos n\tau + R_n^m \sin n\tau) \right],$$

или, переменив порядок суммирования и проведя его по m , получим:

$$T_0(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\tau + \alpha_n' \sin n\tau), \quad (13)$$

причем

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{\infty} R_n^m, \quad \alpha_n' = \sum_{m=1}^{\infty} R_n^{m'}. \quad (14)$$

Итак, нужно найти решение уравнения (11), обращающееся в (13) при $z=0$ и в нуль, при $z=h$, если $S(\tau)$ представлено согласно (12).

Ищем решение в следующем виде:

$$T(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(z) \cos n\tau + B_n(z) \sin n\tau]. \quad (15)$$

Если обозначить

$$U_n(z) = A_n(z) + i B_n(z), \quad \alpha_n + i \alpha_n' = K_n, \\ \beta_n + i \beta_n' = L_n, \quad a_0 = k_1/h, \quad (16)$$

то для определения U_n получается уравнение

$$(k_1 - a_0 z) \frac{d^2 U_n}{dz^2} - a_0 \frac{dU_n}{dz} + in \Omega U_n = -L_n e^{-a_0 z}. \quad (17)$$

Решением этого уравнения является

$$U_n(z) = C_{1,n} I_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) + \\ + C_{2,n} H_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) + N_n(z) + M_n(z). \quad (18)$$

Здесь: $C_{1,n}$ и $C_{2,n}$ — постоянные интегрирования, $I_0(y_n)$ и $H_0(y_n)$ функции Бесселя и Ханкеля нулевого рода и первого порядка от комплексного аргумента,

$$N_n(z) = L_n I_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) \int_0^z \frac{e^{-a_0 z} H_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) dz}{\sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} (I_0 H_1 - H_0 I_1)}, \quad (19)$$

$$M_n(z) = L_n H_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) \int_z^h \frac{e^{-a_0 z} I_0 \left(\frac{2}{a_0} \sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} \right) dz}{\sqrt{in \Omega (k_1 - a_0 z)} (I_0 H_1 - H_0 I_1)}.$$

где $I_1(y_n)$ и $H_1(y_n)$ — функции первого рода того же аргумента. Граничные условия согласно (13), (15) и (16) примут вид:

$$\text{при } z=0 \quad U_n = a_n + i a_n' = K_n,$$

$$\text{при } z=h \quad U_n = 0,$$

воспользуясь которыми, из (18) получим:

$$C_{1,n} = \frac{N_n(h) H_0(0) - H_0(h) [M_n(0) - K_n]}{I_0(0) H_0(h) - H_0(0) I_0(h)},$$

$$C_{2,n} = \frac{-N_n(h) I_0(0) + I_0(h) [M_n(0) - K_n]}{I_0(0) H_0(h) - H_0(0) I_0(h)}. \quad (20)$$

Обозначим:

$$N_n(z) = N_n'(z) + i N_n''(z), \quad M_n(z) = M_n'(z) + i M_n''(z),$$

$$C_{1,n} = C_{1,n}' + i C_{1,n}'', \quad C_{2,n} = C_{2,n}' + i C_{2,n}'', \quad (21)$$

$$y_n = \frac{2}{a_0} \sqrt{i n \Omega(k_1 - a_0 z) = x_n} \sqrt{i}, \quad x_n = \frac{2}{a_0} \sqrt{n \Omega(k_1 - a_0 z)}.$$

Из (18) получим:

$$A_n(z) = C_{1,n}' ber_0 x_n - C_{1,n}'' bei_0 x_n + C_{2,n}' her_0 x_n - C_{2,n}'' hei_0 x_n +$$

$$+ N_n'(z) + M_n'(z), \quad (22)$$

$$B_n(z) = C_{1,n}' bei_0 x_n + C_{1,n}'' ber_0 x_n + C_{2,n}' hei_0 x_n + C_{2,n}'' her_0 x_n +$$

$$+ N_n''(z) + M_n''(z).$$

Здесь:

$$I_0(x_n \sqrt{i}) = ber_0 x_n + i bei_0 x_n, \quad (23)$$

$$H_0(x_n \sqrt{i}) = her_0 x_n + i hei_0 x_n.$$

Имея A_n и B_n по (22), легко по (15) подсчитать $T(z, \tau)$ и при $z = \text{const}$ построить ход температуры по τ на различных глубинах, затем по (10) перейти к истинному времени, т. е. к годовому ходу, или при различных $\tau = \text{const}$ ($t = \text{const}$) построить профили температуры.

Путем подбора соответствующих параметров (a , k_1 , a и h) можно добиться наилучшего согласия теории с наблюдениями, что даст возможность косвенно оценить k_1 , a (следовательно и k) и h . Что касается a , то этот коэффициент определяется сравнительно легко и надежно. Полученное решение даст возможность вычислить величину

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0},$$

которая определяет временной ход теплообмена между поверхностью и нижележащими слоями воды, важной характеристики входящей в уравнение теплового баланса поверхности воды.

Это последнее уравнение даст тогда возможность определить испарение с поверхности озера за такие промежутки времени, как месяц и меньше независимым методом, чего пока еще не удастся делать при других подходах.

Этим вопросам будет посвящена наша следующая статья.

Институт энергетики и гидравлики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ՏՈՒՐՈՒԹՅԱՆ ՋԵՐՄԱՆԱԳՈՐԴԱԿԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԻՐ ԼՈՒԺՈՒՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ ջերմահաղորդականության (1) ընդհանուր տեսքն ունեցող հավասարման պարզեցումը (2) տեսքով և նրա լուծումը ջրամբարների համար բերում է ոչ բավարար արդյունքի՝ օրինակ Սևանա լճի պայմաններում: Հատկապես անհրաժեշտ է լինում հաշվի առնել նախ տուրբուլենտ փոխանակման գործակիցի փոփոխական լինելը կախված ժամանակից և խորությունից և ապա Սևանա լճի ջրերի բացառիկ թափանցիկությունը, որի հետևանքով արեգակի ճառագայթային էներգիան թափանցում է մինչև տասնյակ մետրերի հասնող խորություններ, ի տարբերություն ուրիշ ջրամբարների, որոնց ջրերի պղտորության հետևանքով նշված էներգիան համարյա ամբողջովին կլանվում է ջրի մերձակերևսային շերտերում: Ելնելով նորագույն դիտումների կոնկրետ արդյունքներից, ցույց է տրվում, որ նշված երկու ազդեցությունները Սևանա լճի պայմաններում, կարելի է մեծ ճշտությամբ հաշվի առնել (4) և (5) տեսքով և լուծել (7) հավասարումը (8) սահմանային պայմանների դեպքում: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում (10) տեսքով և ձևափոխելով սահմանային պայմանները ըստ նոր փոփոխականի, ստացվում է (11) հավասարումը (13) պայմանների դեպքում: Լուծումը փնտրվում է (15) տեսքով, ըստ որում շարքի փոփոխական գործակիցների համար ստացվում է (17) դիֆերենցիալ հավասարումը փոփոխական գործակիցների, որի լուծումը ունի (18) տեսքը: Հիշյալ գործակիցների որոշման համար ստացվում են (22) արտահայտությունները: Լուծումը հնարավորություն է տալիս անուղղակի ճանապարհով պնահատել տուրբուլենտ փոխանակման գործակիցը, ապա նաև հաշվել ջերմափոխանակությունը ջրի շերտերի միջև: Վերջինս շատ կարևոր է, քանի որ նա մտնում է ջերմային բալանսի հավասարման մեջ, հավասարում, որն այս դեպքում հնարավորություն է տալ մի նոր անկախ մեթոդով հաշվել զուրոշիացումը, ջրամբարի մակերևույթից: Ջերմային բալանսի մեթոդը մինչև այժմ հնարավորություն է տալիս գոլորշիացումը հաշվել ժամանակի մեծ ինտերվալների համար (օրինակ, տարվա), այժմ հնարավոր կլինի հաշիվներ կատարել ամսվա և ժամանակի ավելի փոքր ինտերվալների համար, որի կարևորությունն անփնդելի է:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

А. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР [серия техн. наук], т. XI, № 5 (1958).

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

О. А. Чалтыкян и Н. М. Бейлерян

Кинетика реакций персульфата калия с аминами
 в водных растворах

III. О порядке реакции некоторых вторичных аминов с персульфатом калия

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 29. XII 1959)

При исследовании кинетики взаимодействия вторичных аминов с перекисью бензоила (ПБ) было установлено ⁽¹⁾, что по кинетике и механизму реакции с ПБ вторичные амины делятся на две группы. При реакции с ПБ аминов первой группы суммарный порядок второй, по компонентам—первый, как по ходу реакции, так и при изменении начальных концентраций порядок реакции не меняется, промежуточное образование свободных радикалов не наблюдается.

При реакции с ПБ аминов второй группы начальная скорость (W_0 , т. е. скорость при $t \rightarrow 0$) также второго порядка (первая по отдельным компонентам), но меняется по ходу реакции и при увеличении начальных концентраций. Имеет место промежуточное образование свободных радикалов. Природа конечных стабильных продуктов иная, чем в случае аминов первой группы, т. е. реакция протекает с осложненным механизмом ⁽²⁾.

К аминам первой группы относятся диэтиловый, дипропиловый, дибутиловый, диизобутиловый, пиперидин и, по-видимому, все алифатические вторичные амины ⁽¹⁾. К аминам второй группы относятся дибензиловый, дифениловый ^(3,4), а также третичный амин—диметиланилин ^(5,6), т. е. арилалкил- и ариламины.

Интересно было проверить, наблюдается ли такая же закономерность и при реакции персульфата калия с аминами в водных растворах. Такой интерес оправдывается тем, что персульфат калия очень часто применяется в качестве компонента инициатора полимеризации в водных эмульсиях.

В настоящей работе для реакции с персульфатом калия были взяты диэтиловый, диизобутиловый амины, пиперидин, а также диэтаноламин. Первые три амина, согласно вышесказанному, принадлежат к первой группе аминов, отличаясь друг от друга своим строением. В качестве представителя второй группы аминов брать дифенил-

или дибензиламины в данном случае было нецелесообразно из-за того, что они не растворимы или очень мало растворимы в воде и водных растворах. Мы предположили, что таким амином мог быть диэтаноламин, так как спиртовые группы могли бы осложнить его реакцию с персульфатом калия.

Скорость реакции была определена при 20°С при различных начальных концентрациях амина (A) или персульфата (P). Непрореагировавший амин определялся ацидиметрически, а персульфат—иодометрически. В течение всего периода определения скорости реакции (2—11 часов) окрашенные продукты не образовались. Так как при реакции образуется кислая сернокислая соль калия, то на каждый моль прореагировавшего персульфата затрачивается два моля амина—один моль на реакцию с персульфатом, второй моль на нейтрализацию бисульфат-иона, если реакция не осложняется. Это обстоятельство надо учитывать при внесении текущей концентрации амина в уравнение скорости реакции, если к реагирующей смеси не добавляется другая (кроме амина) щелочь. Из полученных экспериментальных данных количества вошедшего в реакцию персульфата (или амина) в моль/л (x) за время t в минутах рассчитывались значения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Из последних данных определялись порядок реакции как общий,

так и по компонентам, а также начальные скорости w_0 при $t \rightarrow 0$.

Ниже приводим результаты нашего исследования.

I. а) Для реакции персульфата калия с диэтиловым амином ранее одним из нас (¹) было найдено, что скорость ее также, как и с перекисью бензоила, при 20°С удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = k(A - 2x)(P - x), \quad (1)$$

где $A=0,050$ моль/л—начальная концентрация амина,

$P=0,025$ моль/л—начальная концентрация персульфата,

$(A - 2x)$ —текущая концентрация свободного, реакционноспособного, амина (с учетом солеобразования), а

$(P - x)$ —текущая концентрация персульфата.

В той же работе (¹) было показано, что второй порядок скорости реакции сохраняется вплоть до 35°С.

Для вывода порядка реакции по компонентам в настоящей работе определяли скорость при различных начальных концентрациях компонентов. Данные этих определений в координатах $x-t$ приведены на фиг. 1.

Порядок реакции по компонентам был вычислен методом Вант-Гоффа

$$n = \frac{\lg\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_1 - \lg\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_2}{\lg c_1 - \lg c_2}. \quad (2)$$

Были найдены следующие средние значения

$$\bar{n}_{\text{ам.}} = 0,92 \cong 1,$$

$$\bar{n}_{\text{перс.}} = 0,95 \cong 1.$$

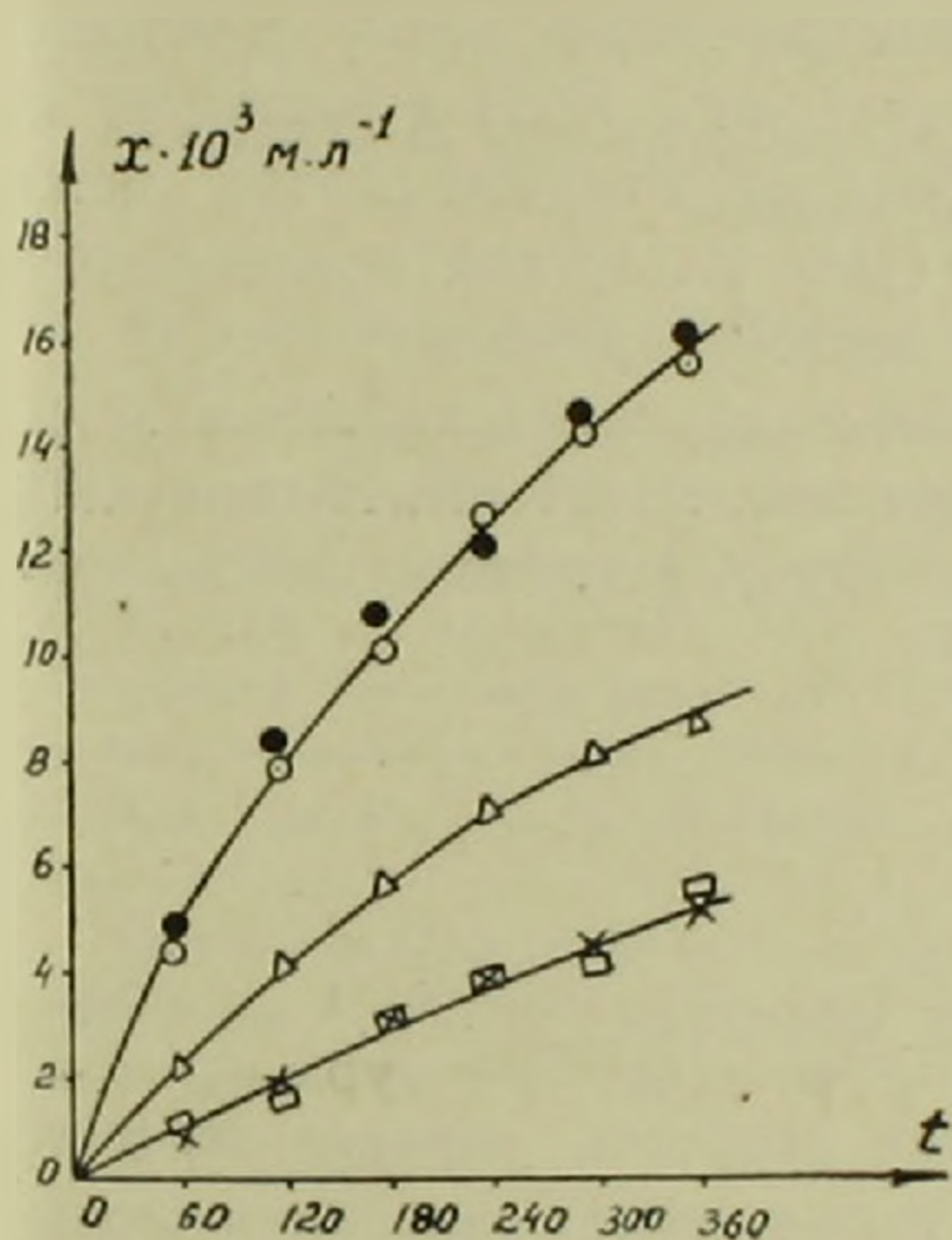
Из графиков $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — время, путем экстраполяции найдены начальные скорости w_0 при $t \rightarrow 0$ для различных исходных концентраций компонентов.

Из этих данных следует, что начальная скорость

$$w_0 = k(A)(P), \quad (3)$$

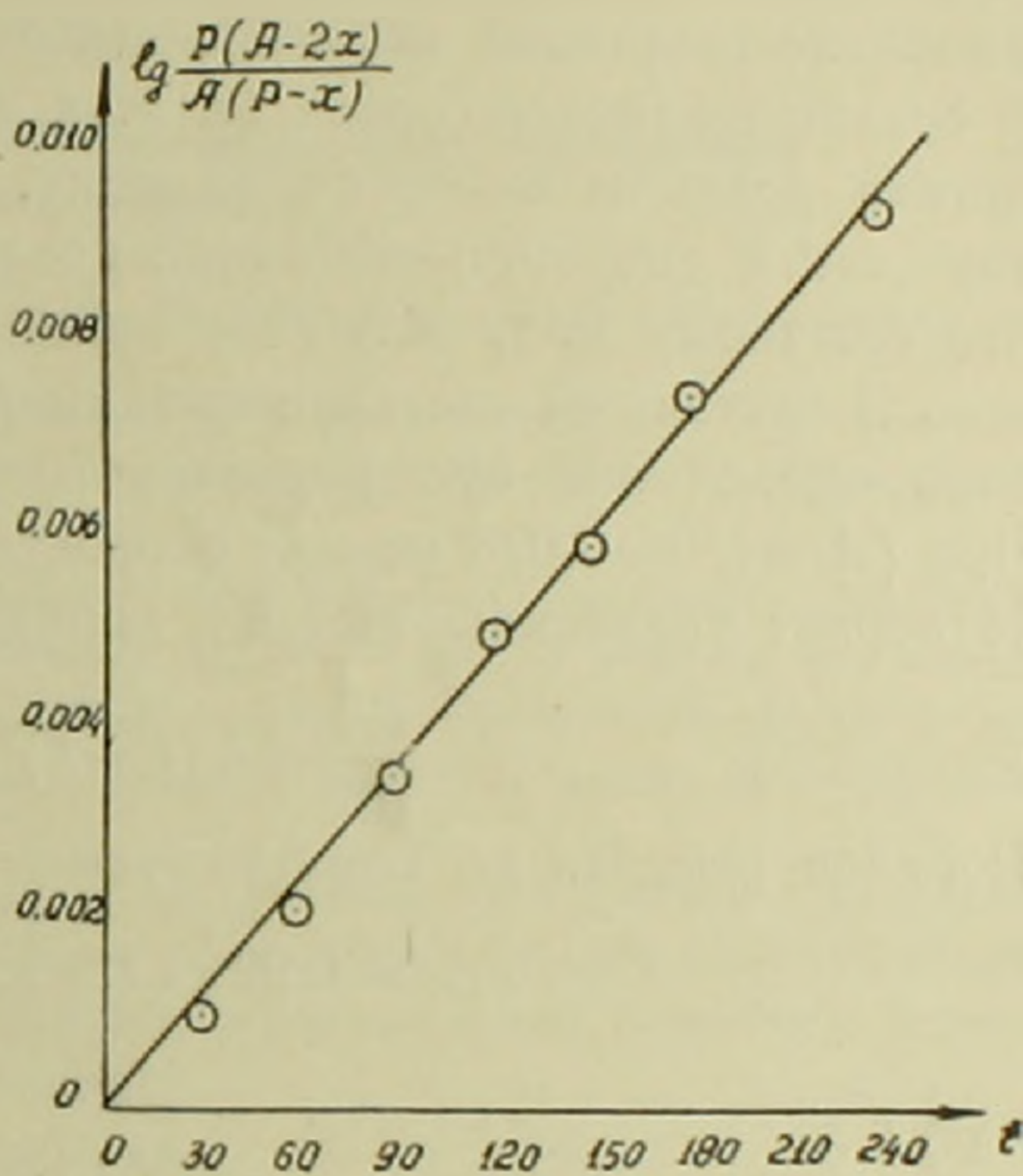
а текущая скорость

$$w = k(A - 2x)(P - x). \quad (4)$$



Фиг. 1.

- $[P] = 0,025$ моль/л; $[A] = 0,10$
- $[A] = [P] = 0,050$;
- △ $[A] = 0,050$; $[P] = 0,025$
- $[A] = [P] = 0,025$;
- × $[A] = 0,050$; $[P] = 0,0125$



Фиг. 2.

б) Для реакции персульфата калия с пиперидином нами найдены аналогичные данные.

Как видно из фиг. 2, зависимость $\lg \frac{P(A-2x)}{A(P-x)}$ от времени прямолинейна, т. е. удовлетворяет интегрированной форме уравнения (1):

$$\lg \frac{P(A-2x)}{A(P-x)} = \frac{(A-2p)k_t}{2,303} t. \quad (5)$$

Средние значения порядка по компонентам, вычисленные по (2), оказались следующие:

$$\bar{n}_{\text{ам.}} = 0,98 \cong 1,$$

$$\bar{n}_{\text{перс.}} = 0,96 \cong 1.$$

Из наших данных следует, что и в этом случае имеют место уравнения (3) и (4).

в) Реакция персульфат калия — диизобутиламин также не составляет исключения из этого правила. Следует отметить, что глубина упомянутых нами реакций доведена до 60—70% превращения и не наблюдаются никакие отклонения от второго порядка, т. е. как начальные, так и текущие скорости второго порядка, а по компонентам первого порядка.

II. Реакция персульфата калия с диэтаноломином.

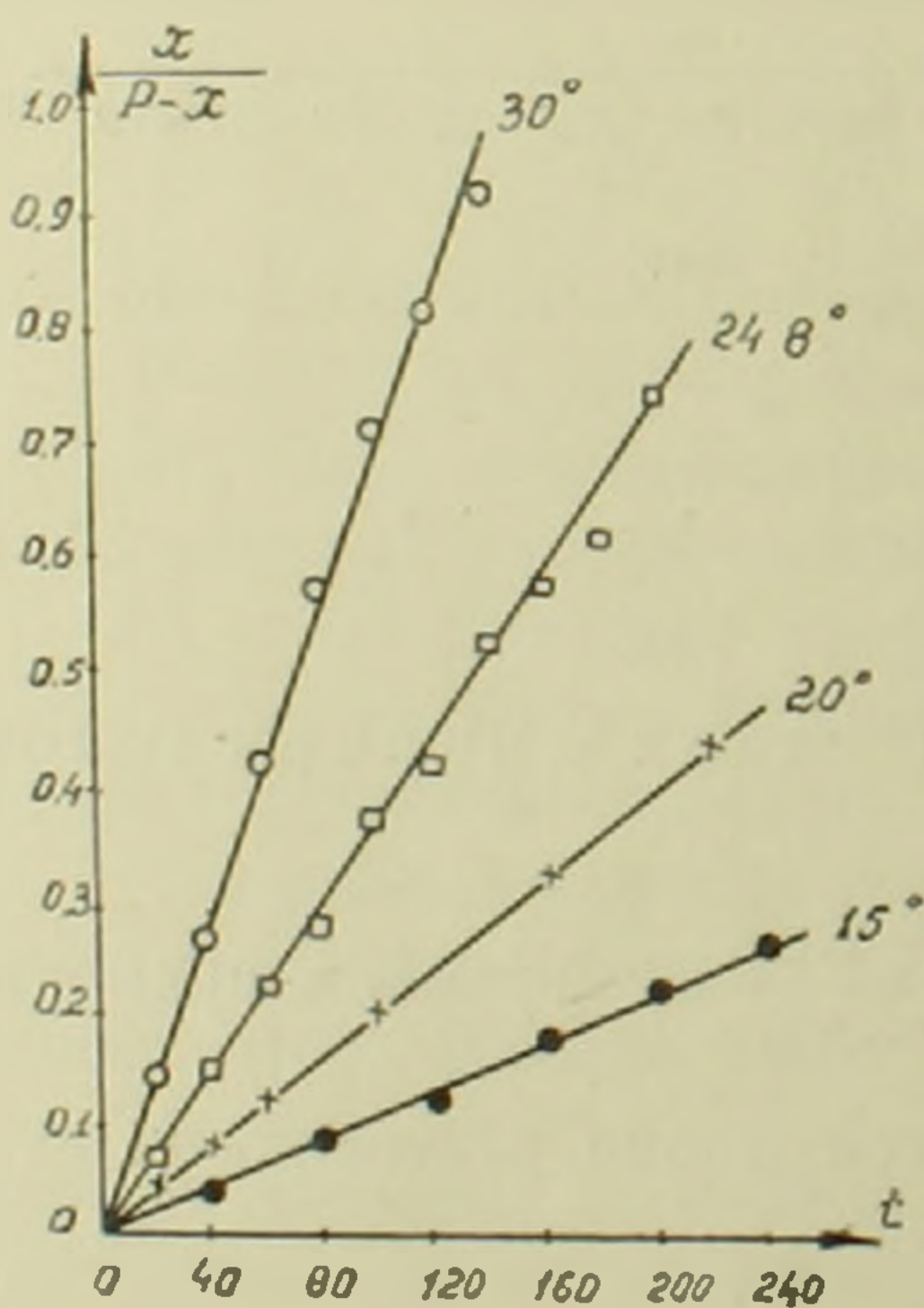
При изучении этой реакции нами было замечено, что кинетика ее в умеренно-щелочных и сильно-щелочных растворах резко отличается. В сильно-щелочной среде (т. е. в присутствии КОН в растворе) кинетика реакции меняется по ходу, реакция самоускоряется, между тем как в умеренно-щелочной среде (рН=10,14) ход реакции подобен обычному ходу в случае аминов первой группы.

В настоящей статье приводим данные изучения кинетики в умеренно-щелочном, буферированном растворе с рН=10,14 при 20°C. При (A)=(P)=0,025 моль/л скорость реакции по нашим данным удовлетворяет уравнению второго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = k(P-x)^2. \quad (6)$$

Порядок реакции по компонентам:

$$\bar{n}_{\text{ам.}} = 0,92 \cong 1, \quad \bar{n}_{\text{перс.}} = 1,03 \cong 1.$$



Фиг. 3

Начальная скорость реакции w_0 в этом случае также имеет линейную зависимость от концентраций компонентов. Казалось бы, что при повышении температуры спиртовые группы диэтанол-амина также должны были бы окисляться персульфатом и, осложняя ход реакции, привести ее к отклонению от второго порядка. Однако наши измерения скорости этой реакции в растворах с рН = 10,14 в интервале температур от 15 до 30°C не показали никакого отклонения от второго порядка, что видно из фиг. 3, показывающей строгую прямолинейную зависимость $\frac{x}{P-x}$ от времени вплоть до 30°C включительно.

Выводы. 1) Кинетика реакций алифатических вторичных аминов: диэтилового, диизобутилового и пиперидина с персульфатом калия такая же, как и с перекисью бензола, т. е. и в случае персульфата они ведут себя как амины первой группы.

2) Аминоспирт—диэтаноламин в водной среде с невысокой щелочностью ($\text{pH}=10,14$) проявляет такое же кинетическое поведение по отношению к персульфату калия как амины первой группы вплоть до 30°C . При повышении щелочности растворов кинетическое поведение диэтаноламина меняется.

Ереванский государственный университет

Հ. Հ. ԶԱԼԹԻՎՅԱՆ 4 Ն. Ս. ԲԵՅԼԵՐՅԱՆ

Կալիումի պերսուլֆատ-ամինների ռեակցիաների կինետիկան ջրային լուծույթներում

III. Մի քանի երկրորդային ամինների և կալիումի պերսուլֆատի ռեակցիայի կարգը

Ուսումնասիրված է ջրային լուծույթում կալիումի պերսուլֆատի և ալիֆատիկ ամինների՝ դիէթիլամինի, դիիզոբուտիլամինի, պիպերիդինի, ինչպես նաև ամինոսպիրտ՝ դիէթանոլամինի ռեակցիայի կինետիկան:

Պարզվել է, որ առաջին երեք ամինների կինետիկական վարքագիծը կալիումի պերսուլֆատի նկատմամբ ջրային լուծույթներում նույնն է, ինչ որ բենզոլի պերօքսիդի նկատմամբ օրդանական լուծույթներում, այսինքն՝ նրանք պատկանում են առաջին խմբի ամինների շարքին, որոնց ռեակցիան պարզ երկրորդ կարգի է, առանց կինետիկական բարդացումների:

Դիէթանոլամինը $10,14 \text{ pH}$ -ով ջրային լուծույթներում իրեն պահում է նույնպես առաջին խմբի ամինների նման, մինչև՝ նույնիսկ 30°C , բայց լուծույթի pH -ը բարձրացնելու դեպքում այդ ամինի կինետիկական վարքագիծը պերսուլֆատի նկատմամբ կտրականապես փոխվում է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. А. Чалтыкян и др., Ж. Ф. Х. 32, 2501 (1958); ² О. А. Чалтыкян и др. Ж. Ф. Х. 33, 36 (1959). ³ О. А. Чалтыкян, Изв. Ун-та АрмССР, 5, 253 (1930). ⁴ О. А. Чалтыкян и Е. Н. Атанасян, ДАН АрмССР, XXVII, 65 (1953). ⁵ Ф. Грабак, кандидатская диссертация, М. (1958). ⁶ М. Imoto and S. Choe, J. Poly. Sci. XV, 485 (1955). ⁷ Н. М. Бейлерян, Тр. Ереванского гос. университета 60, 143 (1957).

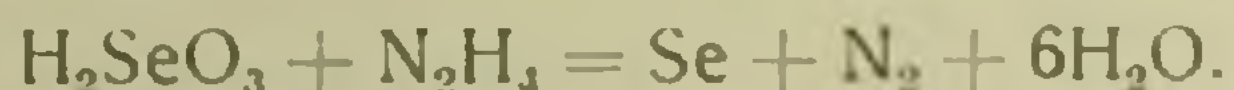
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. М. Тараян, чл.-корресп. АН Армянской ССР, и Т. Т. Авакян

О каталитическом восстановлении селенистой кислоты

(Представлено 16. II 1960)

В аналитической химии селена и теллура широко применяются реакции восстановления селенистой и теллуристой кислот до элементарного селена и теллура. Эти реакции служат для отделения селена и теллура от сопутствующих элементов и положены в основу имеющего большое практическое значение колориметрического метода определения указанных элементов (¹⁻³). В качестве восстановителей применяются: хлорид олова (II), гидразин, гидроксилламин, аскорбиновая кислота и другие восстановители. Количественное выделение и коагуляция селена из разбавленного его раствора и в особенности такими восстановителями, как гидразин и гидроксилламин, протекает очень медленно и сильно задерживает ход количественного его определения. Вместе с тем применение гидразина позволяет осуществить процесс количественного восстановления селенистой кислоты в присутствии теллуристой, согласно реакции:

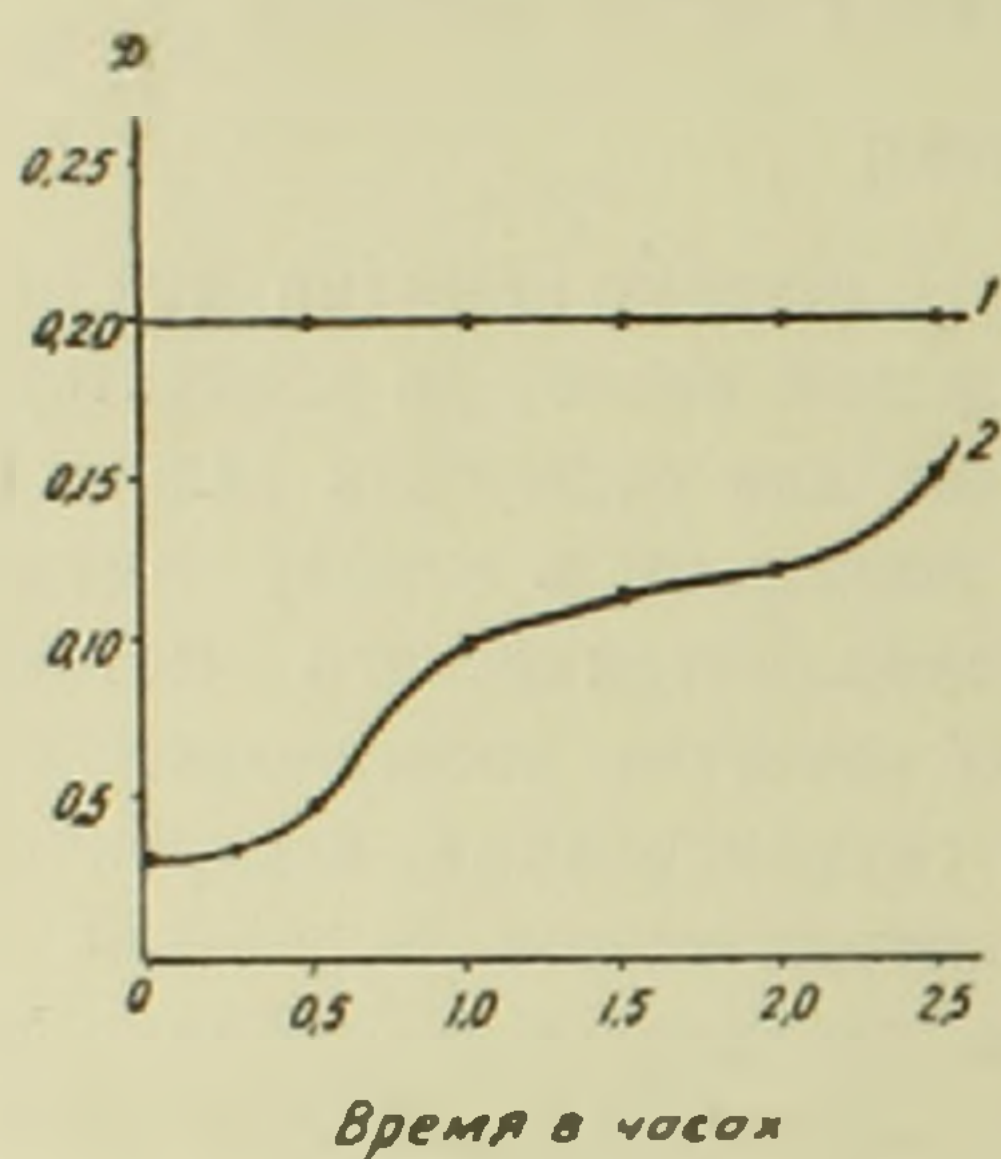


Для сокращения времени, необходимого при количественном определении селена в его разбавленных растворах, было предусмотрено исследовать влияние различных факторов на скорость протекания процессов восстановления и коагуляции селена и, в первую очередь, катализаторов. На основании литературных данных (⁴⁻⁶) в качестве катализатора был избран монохлорид иода. Влияние указанного катализатора на скорость реакции восстановления селенистой кислоты гидразином никем не изучалось.

В качестве испытуемого, был использован типовой раствор селенистой кислоты, полученный растворением металлического селена в соляной кислоте с добавлением нескольких капель азотной. Монохлорид иода готовился согласно приведенной в литературе прописи (⁷). Каталитические свойства последнего были предварительно проверены фотометрическим методом. Для этого в 50-миллилитровую мерную колбу вводили известное количество типового раствора селенистой кислоты, к которой прибавляли азотную кислоту с таким расчетом,

чтобы при конечном объеме получился 5 % ее раствор. Затем после введения 4 мл 1 % раствора желатины, 10 мл монохлорида иода и 15 мл 10 % раствора гидразина, раствор довели до метки и после тщательного перемешивания, без предварительного нагревания, переносили в кювету фотометра Пульфриха. Светопоглощение этого раствора измеряли через равные промежутки времени, при длине волны 428 $m\mu$. На основании полученных данных строились графики оптическая плотность — время. Параллельно проводились контрольные опыты в отсутствие катализатора (фиг. 1).

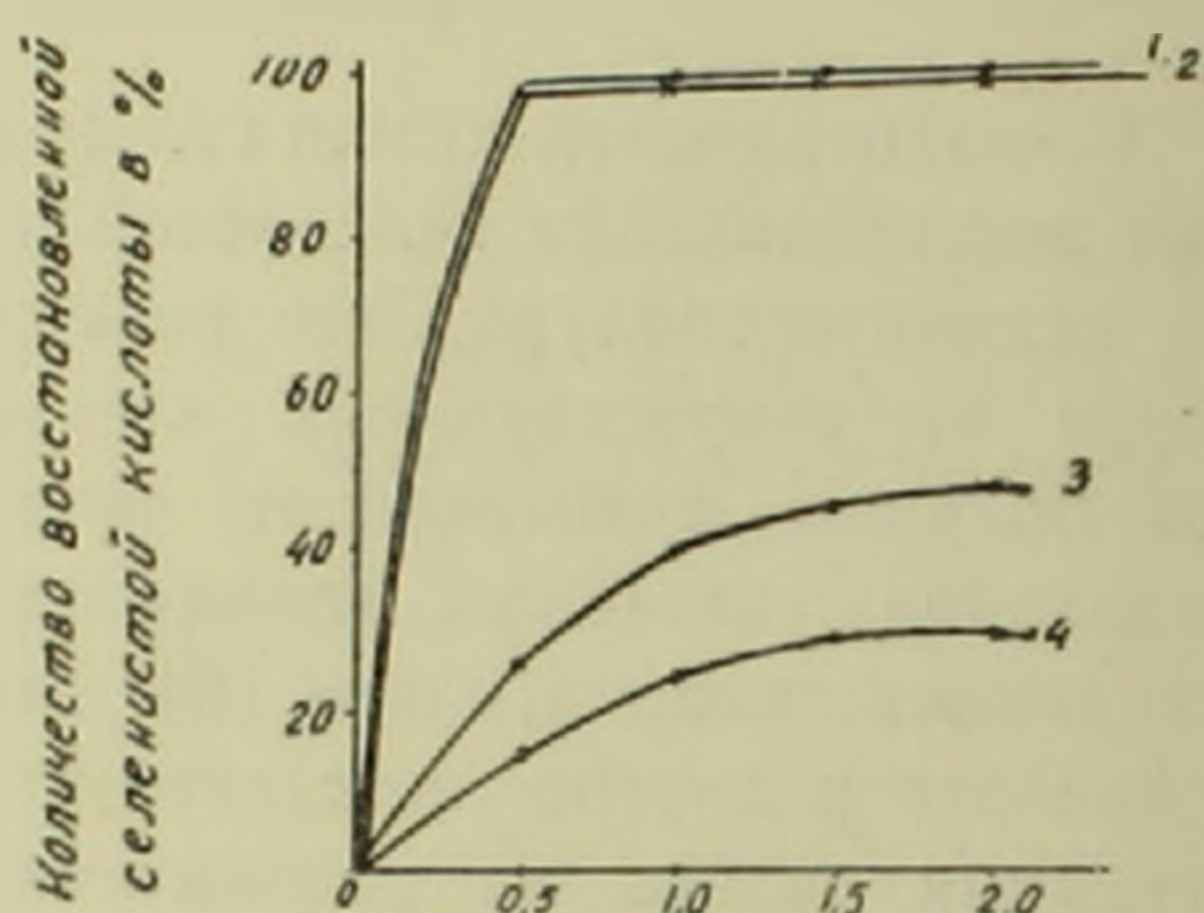
Из приведенной фиг. 1 (кривая 1) следует, что оптическая плотность раствора, содержащего катализатор (моноклорид иода), сначала же приобретает постоянное значение, что говорит о завершении



Фиг. 1.

Скорость реакции восстановления селенистой кислоты соляно-кислым гидразином (взято селена 0,25 мг):

- 1) в 5% растворе азотной кислоты, в присутствии катализатора монохлорида иода,
- 2) в 5% растворе азотной кислоты.



Фиг. 2.

Скорость реакций восстановления селенистой кислоты солянокислым гидразином (взято селена 0,25 мг.):

- 1) в 5% растворе азотной кислоты в присутствии монохлорида иода,
- 2) в 5% растворе азотной кислоты, содержащей одновременно 10% соляной кислоты в присутствии монохлорида иода,
- 3) в 5% растворе азотной кислоты, содержащей одновременно 10% соляной кислоты,
- 4) в 5% растворе азотной кислоты.

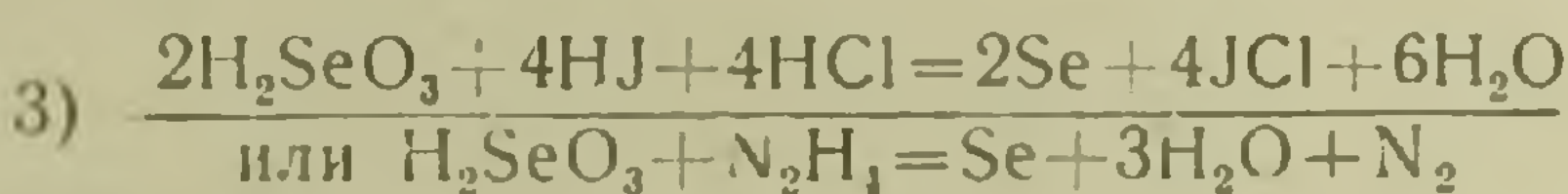
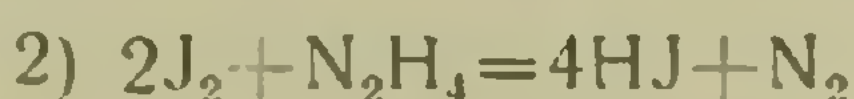
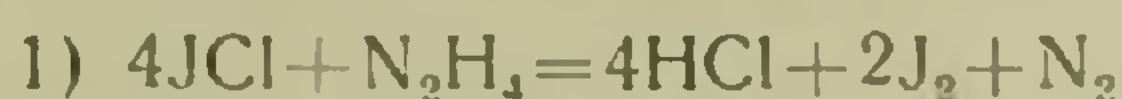
процесса восстановления селенистой кислоты гидразином. В отличие от этого, оптическая плотность контрольного раствора, не содержащего катализатор (кривая 2), медленно и постепенно возрастая, даже через сравнительно большой промежуток времени не достигает значения оптической плотности раствора, содержащего катализатор.

Тем самым подтвердилось каталитическое влияние монохлорида иода на скорость восстановления селенистой кислоты гидразином. В связи с этим необходимо было исследовать, насколько количественно проходит процесс восстановления и коагуляции селенистой кислоты в присутствии указанного катализатора.

В этой серии опытов восстановление проводили в нагретом до 40° растворе, выделившийся в результате восстановления элементар-

ный селен отфильтровывали через определенные промежутки времени, считая с момента добавления восстановителя, промывали горячей водой, растворяли на фильтре в 5—7 мл горячей концентрированной соляной кислоты, содержащей 3 капли азотной. Фильтрат собирали в 25-миллилитровые мерные колбы и заканчивали определение фотометрически, после восстановления селена до коллоидного состояния в условиях, рекомендуемых Земель (2). Светопоглощение полученного раствора измеряли на фотометре Пульфриха при длине волны в 428 *mμ*. Результаты, приведенные в виде кривых на фиг. 2, говорят о том, что процесс восстановления и коагуляции селенистой кислоты гидразином как в азотнокислой, так и в соляно-азотнокислой среде, в присутствии катализатора количественно завершается за 30 минут (кривые 1 и 2), в то время как в отсутствии катализатора даже по истечении 2 часов восстанавливается только 30—50% селенистой кислоты (кривые 3 и 4).

Механизм реакции восстановления селенистой кислоты гидразином, в присутствии катализатора монохлорида иода, представляется нам следующим образом:



В дальнейшем предполагается исследование поведения вышеупомянутого катализатора при восстановлении теллуристой кислоты до элементарного теллура.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՅԱՌՍՅԱՆ և Թ. Թ. ԱՎԱԳՅԱՆ

ՍԵԼԵՆԱՅԻՆ ԹԹՎԻ ԿԱՏԱԼԻՏԻԿ ՈՆԴՈՒԿՑՈՒՄԸ

ՍԵԼԵՆԱՅԻՆ ԹԹՎԻ ՆՈՍՐ ԼՈՒԺՈՒԹՅՈՒՆԻ ՈՆԴՈՒԿՑՈՒՄԸ ՆԻՂՐԱԳԻՆՈՎ

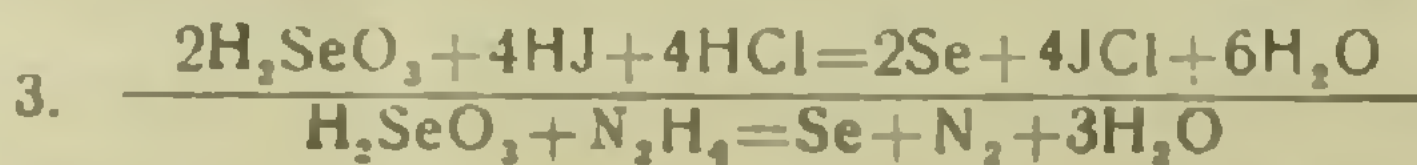
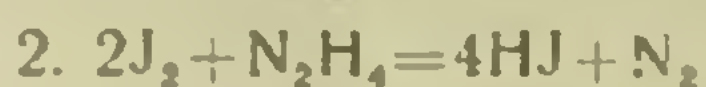
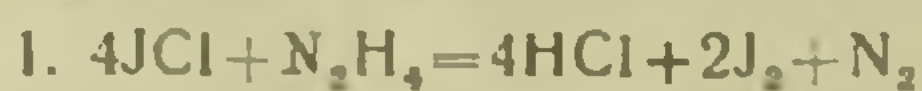


և հետագա էլեմենտար սելենի անջատումն ու կոագուլյացիան ընթանում է դանդաղ. այդ պատճառով հետազոտված է կատալիզատորի՝ յոդի մոնոքլորիդի ազդեցությունը վերահիշյալ ռեակցիայի արագության վրա: Յոդի մոնոքլորիդի կատալիտիկ հատկությունները նախօրոք ստուգվել է ֆոտոմետրիկ եղանակով. քստ որում սելենային թթուն ռեդուցվում էր Նիղրադինով առանց կատալիզատորի և կատալիզատորի ներկայությամբ: Կոլոիդալ լուծույթի լույսակլանումը չափվել է ֆոտոմետրի միջոցով և ստացված տվյալների հիման վրա կառուցվել են դրաֆիկներն օպտիկ խտություն — ժամանակ (նկ. 1):

Այսպիսով հաստատվեց, որ յոդի մոնոքլորիդը կատալիզում է սելենային թթվի ռեակցիան Նիղրադինով: Այնուհետև նույն պրոցեսները հետազոտվել են քանակական. քստ որում սխալվեց, որ սելենային թթվի ռեակցիան ընթացքը կատալիզատորի առկայությամբ լրիվ ավարտվում է 30 րոպեի ընթացքում: Ի տարբերություն դրանից, կա-

առաջագոյն թիվը անգամ երկու ժամից ունեցի՞ր ընթանում է միմիայն
30—40 րոպե:

Սկսելով թթվի ռեդուցման ունեցի՞ր մեխանիզմը կատալիզատորի առկայու-
թյամբ կարելի է պատկերացնել հետևյալ սխեմայով:



ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Г. Волков, „Заводская лаборатория“, V, 1429 (1936). ² В. К. Земмель, „За-
водская лаборатория“, V, 1433 (1936). ³ Шахов, „Заводская лаборатория“ XI, 893 (1945).
⁴ R. Lang, Z. anorg. allg. Chem. 42, 280 (1925). ⁵ W. C. Collemann, C. R. Me. Crosky,
J. Amer. Chem. Soc. 59, 1458 (1937). ⁶ В. С. Сырокомский и Р. Н. Князева, „Завод-
ская лаборатория“, XV, 1149 (1949). ⁷ И. М. Кольтгоф, Е. Б. Сендэл, Количествен-
ный анализ, стр. 633, ГНТИ М.—Л., 1948.

Б. Н. Аствацатрян

О фиксации калия в полупустынных каменистых почвах предгорной зоны Армении

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 24. IX 1959)

При многократном смачивании и высушивании почвы, в которой преобладают минералы монтмориллонитовой группы, имеет место фиксация иона калия. В природе это явление происходит при чередовании влажного и сухого периодов года, а на поливных почвах в промежутках между поливами.

Полупустынные каменистые почвы предгорной зоны Армении находятся в самой жаркой и малоувлажненной зоне. Они сильно нуждаются в частых поливах в течение вегетационного периода сельскохозяйственных культур. Из минералов монтмориллонитовой группы в них преобладают бейделлиты⁽¹⁾. С этой точки зрения изучение фиксации калия как обменного почвенного, так и внесенных удобрений для полупустынных каменистых почв предгорной зоны Армении представляет практический интерес.

Исследования проводились на следующих почвах:

1) светло-каштановая, тяжелосуглинистая, сильно карбонатная, каменистая, на карбонатной коре выветривания туфов, с. Талин;

2) бурая, среднесуглинистая, в пахотном слое бескарбонатная, каменистая, целинная на карбонатной коре выветривания туфов, ст. Кармрашен;

3) светло-бурая, тяжелосуглинистая, карбонатная, каменистая, целинная на карбонатной коре выветривания туфов, ст. Кармрашен.

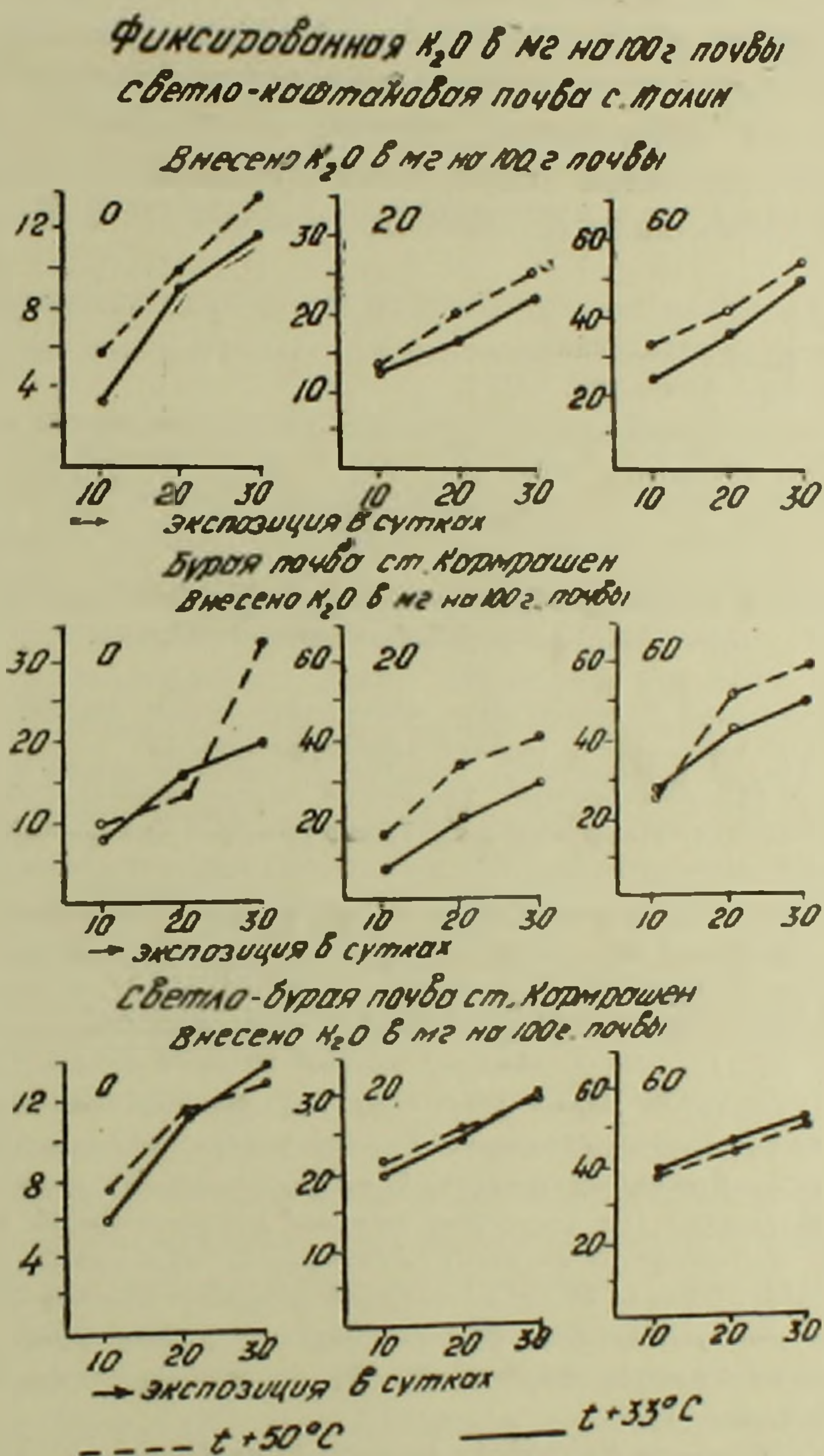
Определение обменного калия проводилось в 0,2н вытяжке $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ с помощью пламенного спектрофотометра. Калий вносился в почву в виде KCl из расчета 0,2 г K_2O на 1 кг почвы или 20 мг K_2O на 100 г почвы—одинарная доза и 0,6 г K_2O на 1 кг почвы или 60 мг K_2O на 100 г почвы—тройная доза калия. Ежедневно почвы поливались дистиллированной водой до полной влагоемкости, после чего прибавляли по 1 мл толуола для предотвращения деятельности микроорганизмов и исключения возможности фиксации калия ими. Температура воздуха, при которой изучалась фиксация калия, соответствовала температуре воздуха районов распространения этих почв в период от конца весны до начала осени (от 33 до 50° С)⁽²⁾. Иссле-

Таблица 1

Фиксация почвенного (обменного) калия и калия внесенных удобрений в полупустынных каменистых почвах предгорной зоны Армении

П о ч в ы	В а р и а н т ы	K ₂ O в мг/100 г почвы						Фиксированная K ₂ O в $\frac{\text{мг 100 г почвы}}{\%}$						
		обменная в необра- ботан. почве	при температуре воз- духа 33°С и экспо- зиции			при температуре воздуха 50°С и экспозиции			при температуре воздуха 33°С и экспозиции			при температуре воздуха 50°С и экспозиции		
			10 суток	20 суток	30 суток	10 суток	20 суток	30 суток	10 суток	20 суток	30 суток	10 суток	20 суток	30 суток
Светло-каштановая, кар- бонатная, с. Галин. 0—25 см	контроль	35,37	31,99	26,23	23,51	29,51	25,17	21,55	3,38	9,14	11,86	5,86	10,20	13,82
	внесено 20 мг K ₂ O на 100 г почвы		43,15	38,90	33,21	42,17	35,90	30,20	9,56	25,84	33,53	16,57	28,84	39,07
	внесено 60 мг K ₂ O на 100 г почвы		72,28	61,66	46,30	63,10	54,54	41,89	12,22	16,47	22,16	13,20	19,47	25,17
			22,07	29,75	40,02	23,84	35,16	45,46						
Бурая, в пахотном слое бескарбонатная, ст. Карм- рашен. 0—18 см	контроль	127,41	119,14	111,18	107,40	117,50	103,76	94,64	23,09	33,71	49,07	32,27	40,83	53,48
	внесено 20 мг K ₂ O на 100 г почвы		72,28	61,66	46,30	63,10	54,54	41,89	24,21	35,22	51,45	33,84	42,81	56,08
	внесено 60 мг K ₂ O на 100 г почвы		119,14	111,18	107,40	117,50	103,76	94,64	8,27	16,23	20,01	9,91	13,65	32,77
			6,51	12,74	15,71	7,78	10,71	25,72						
Светло-бурая, карбонат- ная, ст. Кармрашен. 0—20 см	контроль	21,06	139,96	127,66	123,32	131,24	113,78	106,18	7,45	19,75	24,09	16,17	33,63	41,23
	внесено 20 мг K ₂ O на 100 г почвы		160,70	145,24	137,04	162,56	135,22	128,14	5,05	13,40	16,34	10,97	22,81	27,97
	внесено 60 мг K ₂ O на 100 г почвы		14,96	10,05	7,38	13,63	9,50	8,20	26,71	42,17	50,37	24,85	52,19	59,27
			14,25	22,50	26,88	13,26	27,85	31,63						
									6,10	11,01	13,68	7,43	11,46	12,86
									28,96	52,28	64,96	35,28	54,42	61,06
									19,73	25,22	29,83	22,88	25,94	29,06
									48,05	61,42	72,65	55,72	63,18	70,77
									39,37	45,94	51,82	36,59	43,25	49,40
									48,57	56,67	63,93	45,14	53,36	60,94

дования показали, что содержание обменного калия уменьшилось с увеличением температуры и экспозиции (табл. 1). При температуре воздуха 33°C и экспозиции в 10 суток переход обменного почвенного калия в необменное состояние колеблется в пределах 3,4—8,3 мг/100 г почвы. С увеличением температуры воздуха до 50°C при той же экс-



позиции фиксация обменного калия возрастает от 5,9 до 9,9 мг/100 г почвы. При увеличении экспозиции количество фиксированного калия также возрастает. Наибольшая фиксация отмечается при экспозиции в 30 суток и температуре воздуха 50°C от 13,8 до 32,8 мг/100 г почвы. Когда же вносится калийное удобрение в дозе 20 мг/100 г почвы, то количество фиксированного калия возрастает и при экспозиции в 30 суток и температуре 50 С доходит до 29,1—41,2 мг/100 г

почвы. С увеличением дозы калия до тройной, т. е. 60 мг/100 г почвы, количество фиксированного калия еще более резко возрастает и при экспозиции в 30 суток, в зависимости от почвы, колеблется в пределах 49—59 мг/100 г почвы.

Таким образом исследования показали, что в полупустынных, каменистых почвах предгорной зоны Армении отмечается довольно высокая фиксация обменного калия. При внесении калийного удобрения и увеличении температуры воздуха количество фиксированного калия резко возрастает. Отмеченное явление необходимо учитывать при освоении почв каменистой полупустыни Армении, так как оно объясняет условия эффективности калийных удобрений на этих своеобразных почвах.

Лаборатория агрохимии
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ն. ԱՍՏՎԱԾԱՏՐՅԱՆ

Կալիումի ֆիքսացիան Հայաստանի հալիտեղեղային գոտու կիսաանապատային բարձրադիր հողերում

Հողի խոնավացումը և չորացումը, որում դերակշռում են մոնոմորֆիզմային խմբի միներալները, նպաստում է կալիում իոնի ֆիքսացիային:

Հայաստանի կիսաանապատային քարքարոտ հողերը զանվում են սևադուբլիկայի ամենաչոր և շոգ գոտում, ուստի ոռոգումը նրանց իրացման անհրաժեշտ պայմաններից մեկն է:

Հետազոտություններից պարզված է, որ այդ հողերում մոնոմորֆիզմային խմբի միներալներից դերակշռում են բեյդելիտները: Այդ տեսակետից կալիումի ֆիքսացիայի ուսումնասիրությունը, ինչպես փոխանակային, այնպես էլ մուծված պարարտանյութերի ձևով ուսումնասիրվող հողերում, ներկայացնում է գործնական հետաքրքրություն:

Կալիումը (KCl) տրվել է հետևյալ հաշվով՝ 20 մգ. և 60 մգ. K_2O 100 գ. հողին: Փորձերը ամեն օր ջրվել են թորած ջրով: Բացի այդ, ջրումից հետո ավելացվել է 1 մլ. տոլուոլ կալիումի ֆիքսացիան միկրոօրգանիզմների կողմից կանխելու նպատակով:

Ուսումնասիրություններից պարզվել է, որ ջերմաստիճանի բարձրացման և փորձի տևողության երկարացման հետ զուգընթաց նվազում է փոխանակային կալիումի քանակությունը: Հողի փոխանակային կալիումի ամենաբարձր ֆիքսացիան նկատվել է $50^{\circ}C$ օդի ջերմաստիճանի ու փորձի 30 օր տևողության դեպքում: Իրի հող ևն մուծվում կալիումական պարարտանյութեր, ասպա ֆիքսված կալիումի քանակությունը ավելանում է:

Կալիումի ամենաբարձր ֆիքսացիան տեղի է ունեցել 60 մգ. K_2O -ի դեպքում (49—59 մգ. 100 գ. հողում):

Այսպիսով, հետազոտություններից պարզվել է, որ Հայաստանի կիսաանապատային քարքարոտ հողերում տեղի է ունենում փոխանակային կալիումի քափակման քարձր ֆիքսացիա, որի աստիճանը հատկապես բարձրանում է, երբ հող է մուծվում կալիումական պարարտանյութերի բարձր քանակներ: Նշված երևույթն տնհրաժեշտ է հաշվի առնել Հայաստանի կիսաանապատային քարքարոտ հողերի իրացման ժամանակ, քանի որ այն բացատրում է կալիումական պարարտանյութերի էֆեկտիվության պայմաններն այդ յուրահատուկ հողերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. Н. Аствацатурян, Известия АН АрмССР, (сер. биол.), т. XI, № 3 (1958).
- ² А. Б. Багдасарян, Климат Армянской ССР, изд. АН АрмССР, Ереван, 1958.

МИНЕРАЛОГИЯ

Б. М. Меликсетян, А. С. Фарамазян и Э. Х. Хуршудян

Теллуровисмутит и некоторые другие теллуриды из
 Калерского месторождения молибденита

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 26. XI 1959)

В процессе исследования пегматитовых образований района с. Калер (Мегринский район, Армянской ССР) в некоторых жилах наше внимание привлек минерал с сильным металлическим блеском, внешне напоминающий молибденит. В отличие от соседних молибденовых месторождений молибденит здесь образует крупные идиоморфные кристаллы, достигающие иногда 5—6 см в поперечнике.

Проверка неизвестного минерала микрохимическим методом на висмут и теллур дала положительные результаты. Дальнейшими детальными химико-минералогическими исследованиями удалось установить редкий теллурид висмута — теллуровисмутит. В тесной парагенетической ассоциации с теллуровисмутитом были установлены также сільванит, гессит, алтант, минерал группы креннерит-калаверита и висмутин (?).

Теллуровисмутит в месторождениях СССР является редкой находкой. Насколько нам известно из опубликованной литературы, теллуровисмутит (сурьмянистая разновидность) достоверно установлен лишь на Зодском (Армянская ССР) золоторудном месторождении И. Г. Магакьяном ⁽¹⁾. Теллуровисмутит в ассоциации с самородным В и Те предположительно отмечен на Северном Кавказе С. П. Соловьевым, Н. А. Голубевым и Б. Розиной ⁽²⁾. Ф. В. Чухровым ⁽³⁾ на золоторудном месторождении Манка (Ю. Алтай) был установлен теллурид висмута, дебаеграмма которого оказалась наиболее сходной с теллуровисмутитом. Следует однако отметить, что в указанной заметке Ф. В. Чухров не приводит межплоскостные расстояния описываемого теллурида. В связи с этим полагаем, что приводимый в настоящей статье материал представляет определенный интерес.

Калерское месторождение молибденита, открытое и описанное С. С. Мкртчяном ⁽²⁾, расположено на западном склоне Мегри-Гюнейского хребта в полкилометрах от с. Калер.

В строении месторождения принимают участие монцониты, габбро-диориты, которые внедрились в первую фазу формирования полифазного Мегринского плутона.

Наиболее интересными на месторождении являются две пегматитовые жилы мощностью 15—25 см, падающие на СЗ 330° под углом 30—35°. На поверхности указанные жилы прослеживаются на несколько метров, а затем перекрываются делювиальными отложениями.

Пегматитовые жилы воздействием гидротермальных растворов на отдельных участках превращены в кварцево-карбонатную массу. Местами проявляется первичное строение пегматитовых жил, состоящих из розового блокового микроклина, реже молочно-белого кварца и биотита. В виде второстепенных минералов здесь присутствуют крупные кристаллы бледно-зеленого апатита, а также циркон, монацит, сфен и др.

Из рудных минералов отмечаются крупные пластинчатые агрегаты молибденита, а также идиоморфные кристаллы халькопирита и пирита.

Изучение минералогического состава гидротермальных образований и их текстурно-структурных взаимоотношений указывает на наличие по крайней мере двух стадий минерализации.

1. Более высокотемпературной—представленной двумя различными минеральными ассоциациями: а) сульфидов (молибденит, халькопирит, пирит) и б) несколько поздней—теллуридов (теллуровисмутит, сиванит, гессит, алтаит). К последней приурочено также незначительное количество сульфидов (пирит, галенит, халькопирит, висмутин и медновисмутовые минералы). Сопутствующий жильный минерал представлен мелкими зернами прозрачного кварца, реже, сплошными массами дымчатого кварца.

2. Сравнительно низкотемпературной (безрудной)—представленной сплошной массой халцедона и доломита, цементирующих образования предыдущей стадии.

Под воздействием гипергенных процессов, гипогенные рудные минералы замещаются лимонитом, малахитом, повеллитом, базобисмутитом, церусситом и монтанитом (?).

Теллуровисмутит в описываемой жиле пегматита является довольно редким минералом, однако встречается в виде крупных пластинчатых агрегатов размером 8—10 мм в поперечнике. Минерал отличается оловянно-белым цветом, на плоскостях спайности наблюдается побежалость желтого и индигово-синего цвета. Черта серая. Спайность весьма совершенная по {0001}. Твердость 1,5—2 (марает бумагу). Пластинки упругие, но не эластичные.

В полированных шлифах обладает белым цветом с кремовым оттенком. Отражательная способность высокая и при сравнении с алтаитом, пиритом и сиванитом оценивается $\approx 50-55\%$. Двухотражение слабое, заметно лишь при наблюдениях с иммерсией. Эффект анизотропии в воздухе слабый, в сечениях разноориентированных индиви-

дов заметный, в иммерсии отчетливый. Вследствие очень низкой твердости полируется плохо: на поверхности шлифа, даже при очень тонкой доводке, остаются многочисленные штрихи, которые вызывают ложный эффект анизотропии, затрудняя наблюдению истинной анизотропии минерала. Рельеф низкий: заметно ниже гессита, почти как у сильванита. Спайность в шлифах отчетливая и по своему характеру напоминает спайность молибденита. В скрещенных николях в полях теллуrowисмутита обнаруживаются удлиненные (таблитчатые) формы отдельных кристаллических индивидов, которые иногда напоминают изогнутые таблитчатые кристаллы молибденита.

При травлении HNO_3 поверхность минерала быстро буреет, ирризирует, FeCl_3 —ирризирует, KCl , KCN , KOH — не действуют.

По трещинкам спайности часто наблюдаются удлиненные выделения гессита, иногда имеющие причудливые края, с тонкими язычками, проникающими в поле теллуrowисмутита и очень редко алтанта.

По краям пластинчатых агрегатов теллуrowисмутита тонкой реакционной каемкой развивается сильванит, в полях которого, при сильных увеличениях, заметны тонкие включения пирита, халькопирита, галенита, а также ангедральные выделения гессита и висмута (фиг. 1).



Фиг. 1.

Ангедральные выделения гессита (*Hs*) в полях сильванита (*Sv*) и теллуrowисмутита (*Te*). Вверху в срастании с гесситом небольшое выделение алтанта (*Al*). Черное кварц (*q*). Полированный шлиф. Ув. 720 х.

Таблица 1

Пересчет химического анализа теллуrowисмутита

Элементы	Содержание в вес. %		Атомные количества	Коэффициенты
	данные анализа	исключая механические примеси		
Bi	51,27	52,49	0,251	2
Te	46,40	47,51	0,372	3
Pb	0,58	—	—	—
S	0,54	—	—	—
n/o	0,88	—	—	—
Сумма	99,67	100,00		

Судя по структурным взаимоотношениям, наблюдаемым в шлифах, теллуrowисмутит выделился одним из первых в числе присутствующих здесь теллуридов. Наблюдаемая реакционная каемка этих тел-

Таблица 2

Межплоскостные расстояния и относительные интенсивности исследуемого образца и теллуrowисмутита*

Исследуемый образец				Теллуrowисмутит	
<i>l</i>	d_a/n	d_b/n	$hKil$	<i>l</i>	d_a/n
4	5.11		0006	2	5.05
	—			1	3.77
4	3.57	3.21	1015		
10	3.21		1015	10	3.21
	—			1	2.69
3	2.62	2.37	000·13		
10	2.37		000·13 101·10	8	2.37
5	2.24	2.02			
	—			2	2.23
5	2.19		1120	5	2.19
9	2.03		000·15, 1126	5	2.03
	—			1	1.996
1	1.883	1.1700			
3	1.809		1129	4	1.809
4	1.696		112·12	2	1.696
2	1.643	1.483			
4	1.608		302·10, 101·17	4	1.608
1	1.564	1.412			
	—			1	1.568
9	1.485		202·13	5	1.486
2	1.451		202·16	1	1.450
8	1.412		2134	3	1.410
4	1.393		2135	3	1.393
3	1.340		2138	2	1.339
4	1.294		213·10	3	1.297
1	1.262		213·11	2	1.297
1	1.249		3033	2	1.247
4	1.210		21·314	2	1.207
4	1.185		213·16	2	1.186
5	1.158		303·11	4	1.157
3	1.118		213·17	2	1.118
	—			1	1.092
3	1.070		2246, 303·15	3	1.072
6	1.043		2249	4	1.045
	—			1	1.038
2	1.025		3147	1	1.025
1	1.012		224·12,	1	1.016
5	0.994		314·10	3	0.995
2	0.962		224·15	1	0.964
2	0.952		314·14, 224·16	1	0.951
2	0.927		4047	1	0.928
5	0.920		314·16	3	0.920
3	0.906		404·10		
2	0.872		404·14		
2	0.863		3255		
6	0.848		3258		
2	0.836		3258		
5	0.826		4150		
5	0.813		325·14		
4	0.803		4159		
4	0.796		415·10		
4	0.792		415·11		

* Теллуrowисмутит по данным В. И. Михеева (В. И. Михеев, Рентгенометрический определитель минералов, Госгеолыздат, 1957). Анализ исследуемого образца выполнен в рентгеновской лаборатории ИГН АН Армянской ССР.

луридов и незначительного количества сульфидов является более поздней, образовавшейся в результате воздействия новых порций растворов.

Химический анализ тщательно отобранного мономинерального теллуровисмутита, произведенного Л. Е. Новороссовой (ИМГРЭ АН СССР), показал следующие результаты: $\text{Te } 46,40\%$, $\text{Bi } 51,27\%$, $\text{Pb } 0,58\%$, $\text{S } 0,54$, нерастворимый остаток $0,88\%$.

Результаты спектрального анализа* той же пробы следующие: Bi и Te более десяти процентов (основа), Pb и $\text{Si} - 0,3 - 1\%$, Ag более $0,3\%$, Fe , Mo , Cu , Sb , Zn , Au , Al , Mg , Ca сотые и тысячные доли процента.

Результаты химического и спектрального анализов хорошо согласуются с данными микроскопических исследований в отраженном свете. По-видимому повышенное содержание Pb , Fe , Cu и S обусловлено незначительной механической примесью мелких включений сульфидов, Ag и Au — включениями сивьянита и гессита, Si , Al , Mg и Ca — нерастворимого остатка. Поэтому, для правильного пересчета химического состава исследуемой пробы, необходимо Pb , S и нерастворимый остаток исключить из данных химического анализа.

Пересчет химического анализа показывает, что состав исследуемого минерала точно соответствует теллуровисмутиту с стехиометрической формулой Bi_2Te_3 .

Исследуемый минерал был подвергнут рентгенометрическому исследованию методом порошка. Излучение $K_{\alpha,\beta} - \text{Cu}$, камера PKD ($2R = 57,3 \text{ мм}$). Поправки вводились по особому снимку смеси с NaCl .

Для исследования была отобрана проба очень высокой чистоты. Полуколичественным спектральным анализом в указанной пробе обнаружены следующие элементы: Bi , $\text{Te} > 10\%$, $\text{Ag} \geq 0,3$, Pb , Sb , Fe , Al , $\text{Si} - 0,1 - 0,03\%$, Mo , Cu , Zn , Au , Mg , $\text{Ca} - 0,03 - 0,001\%$.

Сопоставление межплоскостных расстояний исследуемого образца с теллуровисмутитом (эталон) показало их полную идентичность. После индицирования рентгенограммы были рассчитаны параметры элементарной ячейки: $a_0 = 4,368 \pm 0,005 \text{ \AA}$, $c_0 = 30,49 \text{ \AA}$, $a_{rh} = 10,44$, $\alpha = 24^\circ 5'$.

В литературе для теллуровисмутита приводятся параметры несколько отличные друг от друга (табл. 3).

Таблица 3

Местонахождение	Параметры (Å)		А в т о р
	a_0	c_0	
Искусственный	4,37	30,42	Ланге (1)
Руд. Уайтгорн (Колорадо)	4,38	30,60	Фрондель (2)
Брадшау Крик, Брит. Колумбия	4,37	30,39	Харкорт (3), Томсон (4)
Зодское м-е, Армянская ССР	4,32	30,00	И. Г. Магакьян (1)
Калерское м-е, Армянская ССР	4,68	30,49	Авторы

Из приводимых в табл. 3 параметров элементарной ячейки следует, что теллуровисмутит Калерского месторождения близок к образцу из рудника Уайтгорн (Колорадо).

* Спектральные анализы произведены в спектроскопической лаборатории ИГН АН Армянской ССР аналитиками Г. Н. Мкртчяном и М. Я. Мартиросяном.

В заключение необходимо отметить, что наличие теллуридов в рудоносных жилах Калерского месторождения хотя не представляет промышленного интереса, однако, учитывая широкое развитие в районе, прилегающем к Калерскому месторождению, зон гидротермально-измененных пород, не исключена возможность распространения в ассоциации с сульфидами также теллуридов редких элементов.

Институт геологических наук
Академии наук АрмССР

Բ. Մ. ՄԵԼԻՔՍԵՅԱՆ, Ա. Ս. ՖԱՐԱՄԱԶՅԱՆ և Է. Խ. ԽՈՒՐՇՈՒԴՅԱՆ

ՏԵԼԼՈՒՐՈՐԻՍՄՈՒՄԻՆ և ՈՐՈՇ ՏԵԼԼՈՒՐԻԴՆԵՐ ԿԱԼԵՐԻ ՄՈՒԻՐԳԵՆԻՏԱՅԻՆ ԽԱՆՐԱՎԱՅՐԻԳ

Կալեր գյուղի շրջանում տարածված պեգմատիտային երակներում որոշված են տելլուրոորիսմոտիտ, սիլվանիտ, հեսիտ միներալները, որոնք ասոցացվում են սուլֆիդների հետ: Նշված պեգմատիտային երակների վրա վերադրվում է հիդրոթերմալ հանքայնացում, որը ներկայացված է հիմնականում երկու ստադիայով:

1. Բարձր ջերմաստիճանային միներալային ասոցիացիայով, որը ներկայացված է մուիրգենիտով, խալկոպիրիտով, պիրիտով, դալմնիտով և տելլուրիդներով:

2. Համեմատաբար ավելի ցածր ջերմաստիճանային միներալային ասոցիացիայով, որը ներկայացված է կվարց-կարբոնատային դանգվածով (կվարց, խալցեդոն, դոլոմիտ):

Հոգվածում նկարագրվում են բիսմուտի հաղվադեպ հանդիպող տելլուրիդի՝ տելլուրոորիսմոտիտի մանրադիտակային քիմիական, սպեկտրալ և ռենտգենոմետրիկ ուսումնասիրությունների արդյունքները:

Ուսումնասիրվող միներալի քիմիական կազմը՝ $\text{Te } 52,49\%$, $\text{Bi } 47,51\%$ լրիվ համապատասխանում է տելլուրոորիսմոտիտի տեսական բանաձևին Bi_2Te_3 : Ռենտգենոմետրիկ հաշվումների հիման վրա ստացված են տարրական բջի պարամետրերը $a_0 = 4.381 \pm 0.013$, $c_0 = 30,73 \text{ \AA}$, որոնք համապատասխանում են էտալոնային տելլուրոորիսմոտիտի պարամետրերին:

Տելլուրոորիսմոտիտը, սիլվանիտը, հեսիտը և ալտաիտը կալերի հանքաքեր երակներում արդյունաբերական նշանակություն չունեն, սակայն հաշվի առնելով հանքավայրի շրջանում լայն տարածված հիդրոթերմալ փոփոխված ասպրնների ներկայությունը և նրանց հետ կապված սուլֆիդային հանքայնացումը, կարելի է ենթադրել, որ այստեղ բիսմուտի, արծաթի և ոսկու տելլուրիդների առկայությունը սուլֆիդների հետ մեկտեղ նույնպես հնարավոր է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. Г. Магакьян, ЗВМО, 86, вып. 3, 1957. ² С. С. Мкртчян, Зап. Арм. отд. ВМО, вып. 1, 1959. ³ С. П. Соловьев, Н. А. Голубев, Б. Б. Розина, Изв. АН СССР, сер. геол., 5, 1937. ⁴ Ф. В. Чухров, ЗВМО, 76, вып. 2, 1947. ⁵ Фрондель, Am. Journ. of Science, 238 pp. 880—888, 1940. ⁶ Харкорт, Am. Min. 27p. 100, 1942. ⁷ Ланге, Die Naturwiss. 27, 133, 1939. ⁸ Томсон, Am. Min. 34 pp. 342—382.

МИНЕРАЛОГИЯ

Ш. О. Амирян

Характер оруденения золота на одном месторождении

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 20. II 1960)

Месторождение находится в Севано-Амасийской структурно-металлогенической зоне (по схеме И. Г. Магакьяна), для которой характерна минерализация Cr, Ni, As, Sb, Hg, Au, Ag, Bi, Te. Оно располагается среди ультраосновных, основных и вулканогенно-осадочных пород мелового-третичного возраста и связано генетически с умеренно-кислыми породами верхнетретичного возраста.

По имеющимся данным месторождение относится к средне и низкотемпературным образованиям умеренных до малых глубин.

Минералогический состав руд характеризуется многочисленными видами, среди которых особое место занимают теллуриды Au, Ag, Bi, Ni, Hg, Cu, Pb.

В настоящей статье вкратце обобщены данные о поведении в рудах золота.

Характер оруденения. В рудах исследованного месторождения золото является одним из главных компонентов и отлагалось из рудоносных растворов в двух стадиях минерализации: 1) в ассоциации с сульфидами и 2) с теллуридами. Рудные тела, сложенные продуктами этих стадий, представлены жилами, прожилками, гнездообразными и линзообразными телами различных размеров, которые частично обособлены, но чаще представляют сложную картину наложения агрегатов более поздних стадий на ранние. Устанавливаются следующие формы нахождения золота в рудах:

- а) Самородное свободное золото среди жильных и рудных минералов, в интерстицах их зерен и т. д.
- б) Самородное тонкодисперсное золото в полях сульфидов.
- в) Теллуриды золота.
- г) Вторичное золото (за счет окисления теллуридов).

Самородное свободное золото представлено разнообразными формами: листоватыми, комковатыми, нитевидными, чешуйковидными,

изометрическими, пластинчатыми, скелетообразными сростками и иногда мелкими недоразвитыми кристаллами. Размер золотинок колеблется в широких пределах: до 0,3 см для изометрических, 0,5 см в длину для удлиненных и 1—1,5 см² для пластинчатых, листоватых. Надо отметить преобладание тонкозернистого золота.

Оно развивается по трещинам, контактам зерен жильных и рудных минералов, иногда образуя прожилки длиной 1,5—2 см с частичным замещением вмещающих минералов.

Формы золотинок обусловлены формами тех пустот, в которых они отлагались. Так, пластинчатые и удлиненные формы характерны для золотинок, отложившихся в трещинах, межзерновых пространствах жильных и рудных минералов, а изометрические для золотинок, находящихся внутри зерен рудных и нерудных минералов, и тех, которые развивались в местах пересечений трещин. В сульфидах формы золотинок обусловлены, по всей вероятности, твердостью и спайностью вмещающих минералов: в хрупких и твердых минералах, как арсенопирит, пирит, кварц, преобладают остроугольные, жилкообразные золотины, а в мягких—теллуридах, пирротине—изометрические с плавными контурами. Среди сульфидов золотосодержащими являются: пирит, арсенопирит, бравоит, халькопирит, полидимит, линнеит, галенит, сфалерит, блеклые руды, буланжерит.

Чаще всего золото находится в пирите, пирротине, бравоите, арсенопирите. Тяготение золота преимущественно к минералам богатым железом объясняется В. Гольдшмидтом сидерофильными свойствами золота.

Судя по структурным взаимоотношениям золота с сульфидами можно выделить две генерации золота: тонкодисперсное, которое было захвачено сульфидами во время кристаллизации, и крупнодисперсное, отложившееся позднее сульфидов. Тонкодисперсное золото наблюдается только под микроскопом при больших увеличениях и количество частиц такого золота увеличивается при переходе к иммерсии; очень возможно наличие пылевидного золота, которое находится вне границ разрешающей способности микроскопа, что подтверждается данными спектральных и химических анализов.

Тонкодисперсное, сингенетическое с сульфидами золото ассоциируется с некоторыми теллуридами, особенно с теллуrowисмутитом и алтаитом, а также висмутином. Такие выделения имеют округлые, овальные, каплевидные формы с максимальными размерами 0,005—0,01 мм. Любопытно отметить, что тонкодисперсное золото, переходящее в субмикроскопическое, в основном наблюдается в пирите, в других же минералах золотины относительно крупные. По всей вероятности субмикроскопическое золото начало выделяться из растворов одновременно с пиритом, а остальные сульфиды начинают выделяться после этой генерации золота. Вторая генерация золота выделяется после сульфидов, отлагаясь в трещинах и на зернах этих

сульфидов. Такое золото отличается более крупными размерами и яными формами выделений.

Как указывалось, часть золота находится в ассоциации с теллуридами, среди которых установлено несколько теллуридов золота: креннерит, калаверит, сильванит, петцит, нагиагит. В поверхностных и приповерхностных частях рудных тел теллуриды золота разрушаются и золото, содержащееся в них, восстанавливается до самородного состояния. Такое вторичное („горчичное“) золото в виде точечных, червеобразных, губчатых форм, размером 0,003—0,01 мм, сконцентрировано вокруг первичных золотинок, уцелевших от разрушения выделений теллуридов, или образует рыхлый моховидный агрегат, состоящий из мельчайших шаровидных частиц. Оно отличается также своим бледно-желтым цветом. Освобожденное при разрушении сульфидов и теллуридов золото часто образует прожилочки в трещинах усыхания лимонитов или же выделяется в виде округлых зерен среди полуокисленных сульфидов. Внутреннее строение агрегатов вторичного золота мелкозернистое.

Проба золота. Как микроскопически, так и под бинокулярным микроскопом наблюдаются золотины разных оттенков: золотисто-желтого, светло-желтого, зеленовато-желтого и красновато-желтого. Как следует из данных химических анализов, это обусловлено содержанием в золоте примесей других элементов. Преобладающей примесью является Ag, чем и объясняется наличие большого количества золотинок светло-желтого цвета. Но и в таких случаях проба золота относительно высокая.

*Химические анализы** этого золота дали следующие результаты: (в %) Au=84,14; Ag=14,85; Fe=0,024; Cu=0,01; Sb=0,005; Bi=0,005—0,01; Te=0,01; As=0,004; Se=0,002; нерастворившийся остаток 0,52.

Анализируемое золото было отложено во вторую золотоносную стадию минерализации, в ассоциации с теллуридами. Проба такого золота ниже, чем золота, отложившегося в более раннюю стадию, в ассоциации с сульфидами.

Результаты химического анализа золота из сульфидной ассоциации таковы: (в %) Au=93,03; Ag=6,13; Fe=0,26; Cu=0,005; Sb=0,005; Bi=0,005; Te=0,03; Se=0,003; As=0,009; нерастворившийся остаток 0,58.

Самую высокую пробу на месторождении имеет золото, образовавшееся в процессе окисления сульфидов и теллуридов. Результаты химического анализа такого золота следующие: (в %) Au=95,3; Ag=5,00; Fe=0,051; Cu=0,005; Sb=0,005; Bi=0,005; Te=0,02; As=0,001; нерастворившийся остаток 0,26.

*Химические анализы проведены в ЦНИГРИ Ф. А. Ферьянчиком

Рассматривая данные химических анализов, можно отметить, что проба золота, в основном, обусловлена колебаниями в содержании серебра, которое преобладает в относительно низкотемпературном золоте. Колебания в содержании других элементов незначительны. Повышенное содержание Fe в пробе вторичного золота объясняется наличием поверхностных пленок лимонита на золотилах, а повышенное иногда содержание теллура — частичным сохранением остатков теллуридов.

Из вышеизложенного следует, что данное золото характеризуется пробой 840—950, но не исключена возможность нахождения золотин более низкой и высокой пробы, что подтверждается присутствием частиц, противоположные концы которых сложены соответственно самородным золотом и серебром.

Высокая проба золота объясняется: а) Температурой образования месторождения. Золоторудная минерализация в основном происходила в среднетемпературных условиях. Сравнение с пробой золота из других среднетемпературных месторождений мира показывает полное соответствие (так, для сорока сходных месторождений проба колеблется в пределах 730—980). б) Низким отношением серебра к золоту. По многочисленным анализам руд $Ag: Au$ составляет 1—15:1, что в свою очередь свидетельствует о пониженной роли Ag в рудоносных растворах вообще. При этом серебро, в основном, в силу его геохимических особенностей, выпало во вторую золотоносную стадию, что и обусловило относительно более низкую пробу золота этой стадии [840]. в) Минералогическим составом руд. В них участвуют золотоносные сульфиды и соединения Au с теллуром, вследствие окисления которых ряд элементов выносится и в результате остается высокопробное вторичное золото.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Շ. 2. ԱՄԻՐՅԱՆ

Ոսկու հանքայնացման բնույթը հանքավայրերից մեկում

Նկարագրվող հանքավայրը գտնվում է Սևան—Ամասիա ստրուկտուրո-մետալոգենի գոնայում, ուլտրահիմքային, հիմքային, հրաբխածին-նստվածքային ապարների մեջ և գենետիկորեն կապված է վերին երրորդականի չափավոր թթու ապարների հետ:

Այն առաջացել է միջին—ցածր ջերմաստիճաններում, չափավորից մինչև փոքր խորությունների վրա: Միներալոգիական կազմում մասնակցում են բազմաթիվ միներալներ, որոնց թվում հատուկ տեղ են զբաղեցնում Au , Ag , Bi , Ni , Pb , Cu , Hg -ի տելուրիդները:

Հանքավայրում ոսկին հանքաքեր լուծույթներից անջատվել է միներալիզացման երկու ստադիաներում՝ 1) սուլֆիդների հետ և 2) տելուրիդների: Սրանք առաջացել են տարբեր չափերի երակային, բնանման, ոսպնյականման մարմիններ:

Հանքանյութերում ոսկին ներկայացված է տարբեր ձևերով՝

ա) բնածին խոշորահատիկ ոսկու, երակային և հանքային միներալներում, նրանց հատիկների միջև և այլն:

բ) Ցվրված նուրբ հատիկային բնածին ոսկու, սուլֆիդներում:

գ) Ոսկու տելուրիդների:

դ) Նրկրորդական ոսկու (տելուրիդների և սուլֆիդների քայքայումից):

Բնածին ոսկին ներկայացված է տարբեր չափերի տարբեր ձևերով՝ թերթանման, թելանման, թեփուկանման, ոչ լրիվ զարդադած բյուրեղներով և այլն: Նշված ձևերը սլայմանավորված են այն դատարկութունների ձևերով, որտեղ առաջացել է ոսկին և ներփակող միներալների կարծրությամբ, հերձամբ:

Սուլֆիդներից ոսկերեր են համարվում՝ պիրիտը, արսենոպիրիտը, բրավոիտը, խալկոպիրիտը, պոլիդիմիտը, լիննեիտը, գալենիտը, սֆալերիտը և այլ միներալներ:

Համաձայն սուլֆիդների հետ ունեցած ստրուկտուրային փոխհարաբերութունների՝ տարրերվում է երկու պեներացիայի ոսկի, նուրբ ցվրված՝ որն անջատվել է սուլֆիդների հետ և խոշորահատիկ, որն անջատվել է սուլֆիդներից հետո:

Տելուրիդների մեջ կարևոր են ոսկու տելուրիդները՝ կալավերիտը, կրեններիտը, սիլվանիտը, պետցիտը, նագիագիտը, որոնց քայքայումից անջատվում է մաքուր ոսկին:

Բերվում է բնածին ոսկու քիմիական անալիզները, որոնց համաձայն նրանում գիտվում է՝ Ag, Cu, Bi, Fe, Te, Se, Sb, As-ի խառնուրդները: Սրանցից գերակշռողը արժաթն է, որի պարունակութունը հասնում է մինչև 15 տոկոսի:

Համաձայն անալիզների տվյալների ոսկու հարզը տատանվում է 840—950 սահմաններում և սլայմանավորված է հետևյալով՝ ա) առաջացման ջերմաստիճանով (միջին ջերմաստիճաններում), բ) լուծույթներում արժաթի ցածր պարունակությամբ, ըստ բազմաթիվ անալիզների $Ag: Au = 1-15:1$: գ) Հանքանյութերի միներալոգիական կազմով: Նրանցում ժամանակցում են ոսկերեր սուլֆիդներ և ոսկու տելուրիդներ, որոնց քայքայումից անջատված ոսկին լինում է բարձր հարզի:

