

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

AX 144
XXX, № 1

1960

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս,
Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ քղրակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ (պատ. խմբագրի
տեղակալ), Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ
ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՌ ԳԱ
ակադեմիկոս, Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ, ՀՍՍՌ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր):

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик АН
АрмССР, Г. С. ДАВТЯН, академик АН
АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, академик
АН АрмССР (отв. редактор), В. О.
КАЗАРЯН (зам. отв. редактора), С. С.
МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г.
НАЗАРОВ, академик АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

Մարեմաթիկա

- Հ. Մ. Մարտիրոսյան—Հապլառի օպերատորի որոշ զրդուումների սպեկտրի մասին բաղմաչափ և եռաչափ տարածություններում 3
- Ս. Ա. Մարկոսյան—Երկու ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի սահմանային ցիկլի դոյությունը 13

Կիրառական մարեմաթիկա

- Ռ. Ս. Մինասյան—Քառակուսածև անցք ունեցող քառակուսածև սալի ծուման խառը եզրային խնդրի մասին 19

Առանգականության հետաքննում

- Բ. Լ. Աբրահամյան—Կոնական և կոնական մասով դրանաձև ձողերի ոլորումը 31
- Ս. Ա. Համբարձումյան, ՀՍՄԽ ԴԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ա. Խաչատրյան—Փոքր կորություն ունեցող օրթոտրոպ պլանելի կայունության և տատանումների մասին 39

Ֆիզիկա

- Դ. Ս. Սահակյան—Դիսպերսիայի սրենքը շատ մեծ խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում: Հաղորդում | 47

Աստրոֆիզիկա

- Լ. Վ. Միրզայան—Օդրտի A հաստատունի մեծությունը և Արեգակի շարժման արագությունն ըստ O—B0 աստղերի 55

Ագրոֆիմիա

- Ա. Շ. Դալստյան—Ֆերմենտների ակտիվության մասին աղումներում 61

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Математика	
<i>Р. М. Мартиросян</i> —О некоторых возмущениях оператора Лапласа в многомерном пространстве	3
<i>С. А. Маркосян</i> —Существование предельного цикла системы двух нелинейных дифференциальных уравнений	13
Прикладная математика	
<i>Р. С. Минасян</i> —О смешанной задаче изгиба квадратной пластинки с квадратным вырезом	19
Теория упругости	
<i>Б. Л. Абрамян</i> —Кручение конических стержней и цилиндрических стержней с конической частью	31
<i>С. А. Амбарцумян</i> , чл.-корр. АН АрмССР, и <i>А. А. Хачатрян</i> —Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели . . .	39
Физика	
<i>Г. С. Саакян</i> —О дисперсионных свойствах среды при очень больших плотностях и температурах. Сообщение I	47
Астрофизика	
<i>Л. В. Мирзоян</i> —Величина постоянной Оорта А и скорость движения солнца по О-В0 звездам	55
Агрохимия	
<i>А. Ш. Галстян</i> —Об активности ферментов в солончаках	61

Р. М. Мартиросян

О некоторых возмущениях оператора Лапласа в многомерном пространстве

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 13. VI 1959)

Изучению оператора Штурма-Лиувилля посвящено много исследований, однако в многомерном пространстве соответствующий оператор $-\Delta u + cu$ изучен с значительно меньшей полнотой даже в самосопряженном случае. Только в последние годы появилось несколько работ (И. М. Гельфанд ⁽¹⁾, М. В. Келдыш ⁽²⁾), посвященных изучению этого оператора в случае, когда $c(Q)$ — комплекснозначная функция. Укажем также работу М. А. Наймарка ⁽³⁾, в которой, однако, рассмотрен одномерный оператор, точнее, оператор $-u'' + cu$ на полупрямой при различных предположениях относительно комплексной функции $c(x)$. Далее, исследованию спектра оператора $-\Delta u + cu$ была посвящена диссертация автора. Предлагаемая заметка содержит ряд неопубликованных результатов этой диссертации, существенно дополненный новыми фактами, вполне согласующимися с известными положениями квантовой механики.

Переходя к изложению, обозначим через Ω_n область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, определенных на всем n -мерном евклидовом пространстве E_n и суммируемых с квадратом. Как известно, этот оператор является замыканием в $L_2(E_n)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на совокупности всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Нетрудно также показать, что Ω_n фактически совпадает с совокупностью всех функций из $L_2(E_n)$, имеющих суммируемый с квадратом обобщенный лапласиан в смысле С. Л. Соболева ⁽⁴⁾.

Предполагая теперь комплекснозначную функцию $c(Q)$ ограниченной и суммируемой с квадратом, введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -\Delta u + cu \quad (u \in \Omega_n), \quad (1)$$

область определения которого совпадает с Ω_n .

Характер спектра этого оператора тесно связан с поведением резольвенты B_λ оператора $-\Delta u$. Поэтому прежде всего дается интегральное представление оператора B_λ . Оказывается, что для всех $f(Q) \in L_2(E_n)$ и для всех λ , не принадлежащих положительной полуоси

$$B_\lambda f(M) = \int_{E_n} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q) dQ \quad (\lambda \neq 0, \arg \lambda \neq 0, \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0), \quad (2)$$

где r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q , $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а функция $\Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r)$ выражается через функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ первого рода порядка ν следующей формулой

$$\Phi_{n, \lambda}(r) = \frac{i}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) \quad (r > 0, n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Для получения представления (2) предварительно доказываем, пользуясь асимптотикой функций Ханкеля и известными рекуррентными соотношениями, что $\Phi_{n, \lambda}(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{n, \lambda}''(r) + \frac{n-1}{r} \Phi_{n, \lambda}'(r) + \lambda^2 \Phi_{n, \lambda}(r) = 0 \quad (4)$$

и условиям

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_n(r) \Phi_{n, \lambda}(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \omega_n(r) \Phi_{n, \lambda}'(r) = -1, \quad (5)$$

где через $\omega_n(r)$ обозначена площадь поверхности сферы радиуса r в пространстве E_n . После этого, с помощью формулы Грина без труда устанавливаем, что для любой финитной и неограниченно дифференцируемой функции $u(Q)$ справедливо тождество

$$u(M) \equiv - \int_{E_n} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) \{ \Delta u(Q) + \lambda u(Q) \} dQ.$$

Таким образом (2) будет доказано, если мы установим ограниченность оператора, стоящего в правой части (2), и плотность в $L_2(E_n)$ многообразия функций вида $-\Delta u - \lambda u$, где $u(Q)$ пробегает совокупность всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Но плотность в $L_2(E_n)$ этого многообразия устанавливается без труда, а ограниченность указанного оператора следует из оценки

$$\left| \int_{E_n} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q) dQ \right|^2 \leq \int_{E_n} |\Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|^2 dQ \int_{E_n} |f(Q)|^2 dQ,$$

если заметить, что первый из интегралов правой части существует в силу известной асимптотики ханкелевых функций и не зависит от выбора точки M . Интегрируя это неравенство по переменной M и пользуясь теоремой Фубини, немедленно убеждаемся в ограниченности интересующего нас оператора. При этом интересно отметить, что ядро $\Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ оператора B_λ не типа Карлемана при $n > 3$ из-за высокой особенности при $M = Q$.

Во всей работе существенную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. Для всех целых q , $1 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, справедливо равен-

ство

$$\underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{q \text{ раз}} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1}) \cdots \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{Q_{q-1}Q_q}) \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{Q_qQ}) dQ_1 \cdots dQ_q =$$

$$= \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^q \Phi_{n-2q, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}). \quad (6)$$

где $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а $\Phi_{n, \lambda}(r)$ определена формулой (3).

Идея доказательства состоит в следующем. Можно показать, что левая часть (6) представляет собой ядро оператора B_λ^{q+1} . С другой стороны, как известно (5)

$$B_\lambda^{q+1} = \frac{1}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} B_\lambda,$$

где дифференцирование в правой части следует понимать в смысле равномерной сходимости операторов. Таким образом, достаточно показать, что ядро оператора $\frac{d^q}{d\lambda^q} B_\lambda$ получается формальным дифференцированием q раз ядра B_λ и что результат выражается формулой, стоящей в правой части (6). Подробное доказательство в частном случае $n = 3$ приведено в нашей работе (6).

Предполагая теперь $c(Q)$ ограниченной, введем в рассмотрение при $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ вспомогательную функцию (при $\text{Im} \lambda > 0$)

$$K_{n, \lambda}(M, Q) = \underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{q \text{ раз}} \Phi_{n, \lambda}(r_{MQ_1}) \cdots \Phi_{n, \lambda}(r_{Q_qQ}) c(Q_1) \cdots c(Q_q) dQ_1 \cdots dQ_q, \quad (7)$$

нужные нам свойства которой приводятся в следующей лемме.

Лемма 2. Если функция $c(Q)$ ограничена, то при фиксированном значении одной из переменных $K_{n, \lambda}(M, Q)$ является непрерывной функцией другой переменной. Кроме того, $K_{n, \lambda}(M, Q)$ ограничена и непрерывна в среднем, т. е.

$$\lim_{P \rightarrow M} \int_{E_n} |K_{n,\lambda}(M, Q) - K_{n,\lambda}(P, Q)|^2 dQ = 0.$$

Если предположить еще, что $c(Q)$ суммируема с квадратом, то

$$\int_{E_n} \int_{E_n} |K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q)|^2 dM dQ < \infty.$$

Доказательство существенно опирается на лемму 1. Эти леммы позволяют сделать ряд заключений о собственных функциях и о спектре оператора $Tu = -\Delta u + cu$ в многомерном пространстве.

Прежде всего, из (2) вытекает, что если

$$-\Delta u - cu = \lambda^2 u \quad (u \in \Omega_n), \quad (8)$$

то

$$u(M) = \int_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ}) c(Q) u(Q) dQ, \quad (\text{Im } \lambda > 0) \quad (9)$$

Итерируя это уравнение $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ раз, получим, как легко видеть,

$$u(M) = \int_{E_n} K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q) u(Q) dQ, \quad (\text{Im } \lambda > 0) \quad (10)$$

где $K_{n,\lambda}(M, Q)$ определена формулой (7). Воспользовавшись леммой 2, нетрудно прийти к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда каждая собственная функция оператора T , определенного формулой (1), непрерывна, ограничена и суммируема.

Далее имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда, если $u(Q)$ — какая-нибудь собственная функция оператора T , то $\Delta u(Q)$ суммируема и

$$\int_{E_n} \Delta u(Q) dQ = 0.$$

Суммируемость $\Delta u(Q)$ является следствием теоремы 1 и поэтому из (8) следует, что достаточно обнаружить справедливость равенства

$$\int_{E_n} c(Q) u(Q) dQ = -\lambda^2 \int_{E_n} u(Q) dQ.$$

Но на основании теоремы Фубини из (9) находим

$$\int_{E_n} u(M) dM = \int_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ}) dM \int_{E_n} c(Q) u(Q) dQ$$

С другой стороны, из (4) и (5) следует, что

$$\lambda^2 \int_0^\infty \Phi_{n,\lambda}(r) \omega_n(r) dr = - \int_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r) \omega_n(r) dr - (n-1) \int_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r) \frac{\omega_n(r)}{r} dr.$$

Учитывая равенство $\frac{n-1}{r} \omega_n(r) = \omega'_n(r)$, находим отсюда

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_0^\infty \Phi_{n,\lambda}(r) \omega_n(r) dr &= - \int_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r) \omega_n(r) dr - \\ &- \int_0^\infty \Phi'_{n,\lambda}(r) \omega'_n(r) dr. \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно заключить, что

$$\lambda^2 \int_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ}) dM = -1,$$

а это и доказывает теорему.

Далее, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Тогда оператор T не имеет остаточного спектра, а непрерывный спектр его совпадает с положительной полуосью. Собственные значения этого оператора, лежащие вне положительной полуоси, не могут иметь точек накопления вне этой полуоси.

Это утверждение также можно получить, пользуясь леммой 2. Именно, из этой леммы можно заключить, что вполне непрерывна некоторая итерация оператора $B_\lambda c$, состоящего в том, что функции из $L_2(E_n)$ сперва умножаются на $c(Q)$, а затем к результату применяется оператор B_λ . С другой стороны, известно, что если некоторая итерация оператора A вполне непрерывна, то для уравнения $(E + A)u = f$ справедливы теоремы Фредгольма ⁽¹⁾. Это замечание позволяет доказать теорему путем, намеченным в заметке ⁽¹⁾. Другое доказательство этой теоремы приведено в нашей работе ⁽⁶⁾.

Теперь мы укажем достаточные условия, при которых собственные значения оператора $-\Delta u + cu$ не имеют предельных точек на конечном расстоянии.

Теорема 4. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $c(Q)e^{\varepsilon r_Q}$, где r_Q означает расстояние от точки Q до начала координат, ограничена и суммируема. Тогда собственные значения оператора T , определенного формулой (1), не имеют предельных точек на ко-

нечном расстоянии, если n нечетно и, быть может, имеют единственную предельную точку 0 в случае, когда n четно.

Идея доказательства состоит в следующем. Как мы уже видели, собственная функция, соответствующая собственному значению λ^2 , удовлетворяет уравнению (10). Вводя параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(M) = \mu \int_{E_n} K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q) u(Q) dQ,$$

замечаем, что при каждом фиксированном значении λ из верхней полуплоскости это есть однородное интегральное уравнение типа Фредгольма, обращающееся при $\mu = 1$ в исходное уравнение (10). Нетрудно показать, что к этому уравнению применим аппарат теории Фредгольма. Поэтому, если положить

$$d_k(\lambda) = \underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{k \text{ раз}} \det \| K_{n,\lambda}(Q_i, Q_j) c(Q_j) \| dQ_1 \cdots dQ_k,$$

то можно утверждать, что собственные значения оператора T совпадают с нулями функции

$$D(\lambda, 1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{d_k(\lambda)}{k!},$$

лежащими в верхней полуплоскости. Для доказательства теоремы $D(\lambda, 1)$ рассматриваем в несколько большей области, а именно в полуплоскости $\text{Im} \lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$, где ε то же самое, что и в формулировке теоремы, и показываем, что $D(\lambda, 1)$ голоморфна в этой области при n нечетном и может иметь особенность в нуле при n четном. При этом существенно используется получаемая из леммы 1 оценка

$$|K_{n,\lambda}(M, Q)| \leq L_n(\lambda) A^q \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^q \Phi_{n-2q, 1-\frac{\varepsilon}{4}}(r_{MQ}) e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M+r_Q)},$$

где через A обозначена верхняя грань функции $c(Q) e^{\varepsilon r_Q}$, $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, а $L_n(\lambda)$ определена следующим образом

$$L_n(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-2}{2}q} & \text{если } |\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \left(\frac{4|\lambda|}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-2}{2}q}, & \text{если } |\lambda| > \frac{\varepsilon}{4}, \text{ Im} \lambda > -\frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Переходя к следующей теореме, введем постоянную L , которая в неявном виде определяется с помощью следующего соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{n-2}{2}} L^k}{k!} = 1. \quad (11)$$

Далее, считая $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, введем обозначения

$$\psi_n(R) = \max \left\{ 1, R^{\frac{n-2}{2} q} \right\} \quad (12)$$

$$\gamma = \sup_{0 < r < \infty} \{ -r H_1(ir) \}. \quad (13)$$

Используя некоторые оценки, полученные при доказательстве предыдущей теоремы, можно указать условия, при которых внутри заданной ограниченной области комплексной плоскости не попадают собственные значения оператора T . Именно, имеет место

Теорема 5. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$|c(Q)| e^{\varepsilon r_Q} \leq A, \quad \int_{\dot{E}_n} |c(Q)| e^{\varepsilon r_Q} dQ = M < \infty.$$

Тогда, если при четном n выполняется условие

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^{\frac{n-2}{2} q} \frac{L \cdot q! (4\pi)^q \varepsilon^2}{8\pi \gamma \cdot \psi_n(R)},$$

а при нечетном n выполняется условие

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{n-2}{2} q} \frac{L \cdot q! (4\pi)^q \varepsilon}{2\psi_n(R)},$$

где $\psi_n(R)$ и γ определены соответственно формулами (12) и (13), а L определяется из (11), то внутри круга радиуса R с центром в начале координат нет собственных значений оператора T .

Отметим следующее очевидное следствие этой теоремы.

Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $c(Q) e^{\varepsilon r_Q}$ ограничена и суммируема. Пусть кроме того известно, что для всякой функции $\mu c(Q)$, где μ постоянная, $|\mu| \leq 1$, спектр оператора $-\Delta u + \mu c u$ лежит внутри некоторой фиксированной ограниченной области. Тогда можно указать такое $\alpha > 0$, что для всех μ , $|\mu| \leq \alpha$, оператор $-\Delta u + \mu c u$ не имеет дискретного спектра.

В случае трехмерного пространства оказывается, что если $c(Q)$ достаточно мала в известном смысле, то дискретный спектр оператора

T отсутствует. Этот результат получен в нашей работе ⁽⁹⁾ и находится в полном соответствии с известным фактом квантовой механики, состоящим в том, что частица может „проскочить“ через небольшие барьеры. Приводимая ниже теорема существенно дополняет этот результат, ибо не только получен значительно более удобный признак отсутствия спектра, но и показано, что в этом случае нет положительных собственных значений. Как известно, последний вопрос в общей постановке очень сложен, но в рассматриваемом случае нам удалось найти чрезвычайно простое доказательство.

Теорема 6. Пусть $n = 3$ и при некотором $\varepsilon > 0$ комплекснозначная функция $c(Q)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

$$A) \sup |c(Q)e^{\varepsilon r_Q}| < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad B) \int_{E_1} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ < 2\pi\varepsilon.$$

Тогда весь спектр оператора $Tu = -\Delta u + cu$ совпадает с положительной полуосью, причем собственных значений у этого оператора нет.

Прежде всего устанавливается, что если при некотором положительном $\lambda = \lambda_0$ уравнение $-\Delta u - \lambda_0 u = c(Q)f(Q)$ имеет решение, причем $f(Q)$ суммируемо с квадратом, а $c(Q)$ удовлетворяет одному из условий (A) или (B), то

$$u(M) = \int_{E_1} \frac{e^{iV\bar{\lambda}_0 r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q)f(Q) dQ.$$

Доказательство этого опирается на то, что если $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, то решения u_n уравнения $-\Delta u_n - \lambda_n u_n = cf$ в каждой ограниченной области равномерно сходятся к $u(Q)$. После этого вопрос сводится к оценке нормы интегрального оператора $A\varphi$, ядро которого $K(M, Q)$ определяется формулой

$$K(M, Q) = - \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_M} c(Q) e^{\frac{\varepsilon}{4} r_Q} e^{iV\bar{\lambda} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}}.$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

2. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Լապլասի օպերատորի որոշ գրգռումների օպերերի մասին բազմաչափ և եռաչափ տարածություններում

Դիցուք Ω_n նշանակում է ամբողջ E_n էվկլիդեսյան n — չափանի տարածության մեջ սահմանված և բառակապակցված ինտեգրելի ֆունկցիաների $L_2(E_n)$ հիլբերտյան տարածության մեջ գիտարկված $-\Delta u$ հիպերմարսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը: Ω_n — ի վրա

դիտարկենք $Tu = -\Delta u + cu$ սպերատորը, $c(Q)$ կոմպլեքս ֆունկցիան սահմանափակ և բառակուսով ինտեգրելի: Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. T սպերատորի յուրաքանչյուր սեփական ֆունկցիան անընդհատ է սահմանափակ և հանրագումարելի:

Թեորեմ 2. Եթե $u(Q)$ -ն T սպերատորի սեփական ֆունկցիան է, ապա $\Delta u(Q)$ -ն հանրագումարելի է և

$$\int_{E_n} \Delta u(Q) dQ = 0.$$

Թեորեմ 3. T սպերատորը չունի մնացորդային սպեկտր, իսկ նրա անընդհատ սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքի հետ: Դրական կիսաառանցքից դուրս գտնվող սեփական արժեքները չեն կարող ունենալ կուտակման կետեր այդ կիսաառանցքից դուրս:

Թեորեմ 4. Դիցուք մի որևէ ε դրական թվի համար $c(Q)e^{\varepsilon r Q}$ ֆունկցիան, որտեղ rQ նշանակում է Q կետի հեռավորությունը մինչև կորդինատների սկզբնակետը, սահմանափակ է և հանրագումարելի: Այդ դեպքում T սպերատորի սեփական արժեքները չունեն սահմանային կետեր վերջավոր հեռավորության վրա, երբ n -ը կենտ է և նրանց միակ սահմանային կետը կարող է լինել 0 կետը, երբ n -ը գույգ է:

Թեորեմ 5. Դիցուք մի որևէ ε դրական թվի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|c(Q)e^{\varepsilon r Q}| < A, \quad \int_{E_n} |c(Q)e^{\varepsilon r Q}| dQ = M < \infty,$$

իսկ $\psi_n(R)$, γ և L -ը սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$\psi_n(R) = \max \left\{ 1, R^{\frac{n-2}{4}q} \right\}, \quad \gamma = \sup_{0 < r < \infty} \{-rH_1(ir)\}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}} L^k}{k!} = 1,$$

որտեղ $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$: Այդ դեպքում, եթե գույգ և կենտ n -ի համար համապատասխանաբար տեղի ունեն

$$A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L \cdot q! (4\pi)^q \varepsilon^2}{8\pi \psi_n(R)}, \quad A^q M < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}q} \frac{L \cdot q! (4\pi)^q \varepsilon}{2\psi_n(R)}$$

պայմանները, ապա 0 կենտրոնով և R շառավիղով շրջանի ներսում T սպերատորը չունի սեփական արժեքները:

Թեորեմ 6. Դիցուք $n = 3$ և մի որևէ ε դրական թվի համար բավարարվում է

$$A) \sup |c(Q)e^{\varepsilon r Q}| < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad B) \int_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r Q} dQ < 2\pi\varepsilon$$

պայմաններից մեկն ու մեկը: Այդ դեպքում T սպերատորը չունի սեփական արժեքներ և նրա սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ч И С Л О П Р О З В Р А

¹ И. М. Гельфанд, УМН, т. УП, вып. 6 (1952). ² М. В. Келдыш, ДАН СССР новая серия, т. 77, № 1 (1951). ³ М. А. Наймарк, ДАН СССР, новая серия, т. 85, № 1 (1952). ⁴ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ⁵ А. И. Плеснер, ч. 1, УМН, вып. IX (1941). ⁶ Р. М. Мартиросян, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 1 (1957). ⁷ С. М. Никольский, ДАН СССР, новая серия, т. II(XI), № 8 (1936). ⁸ Р. М. Мартиросян, ДАН АрмССР, т. XXIX.

С. А. Маркосян

Существование предельного цикла системы двух нелинейных дифференциальных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17.VI 1959)

В настоящей заметке „геометрическим методом“ устанавливаются достаточные условия существования предельного цикла системы вида

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + \varphi(y)] P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = [g(x) + \psi(y)] Q(x, y). \quad (1)$$

Рассматривается также один частный случай этой системы.

Вопросы существования предельных циклов системы (1) при $\varphi(y) \equiv y$, $g(x) \equiv x$ рассматривались в работах ^(1,2).

В заметке предполагается, что начало координат для системы (1) — единственная особая точка на всей плоскости и что правые части рассматриваемых уравнений определены, непрерывны во всей плоскости и удовлетворяют условию Липшица во всякой ограниченной части этой плоскости. Существование предельного цикла доказывается с помощью известной теоремы Бендиксона. Предельный цикл всегда существует в кольцевой области, не содержащей особой точки, через границы которой интегральные кривые только входят или только выходят, при этом внутренняя граница кольца может совпасть с особой точкой.

При сделанных выше предположениях докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть дана система уравнений (1), где $P(x, y) > 0$, $Q(x, y) > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Если:

1) в некоторой окрестности начала координат

$$xf(x) > 0, \quad xg(x) < 0, \quad x \neq 0; \quad y\varphi(y) > 0, \quad y\psi(y) > 0 \quad y \neq 0;$$

2) существует отрезок на оси x $[a, b]$ $a < 0$, $b > 0$, вне которого $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$;

3) существует отрезок на оси y $[c, d]$ $c < 0$, $d > 0$, вне которого $y\varphi(y) > 0$, $y\psi(y) < 0$,

4) $\varphi(y)$ нечетна, $g(x)$ и $\varphi(y)$ монотонные функции;

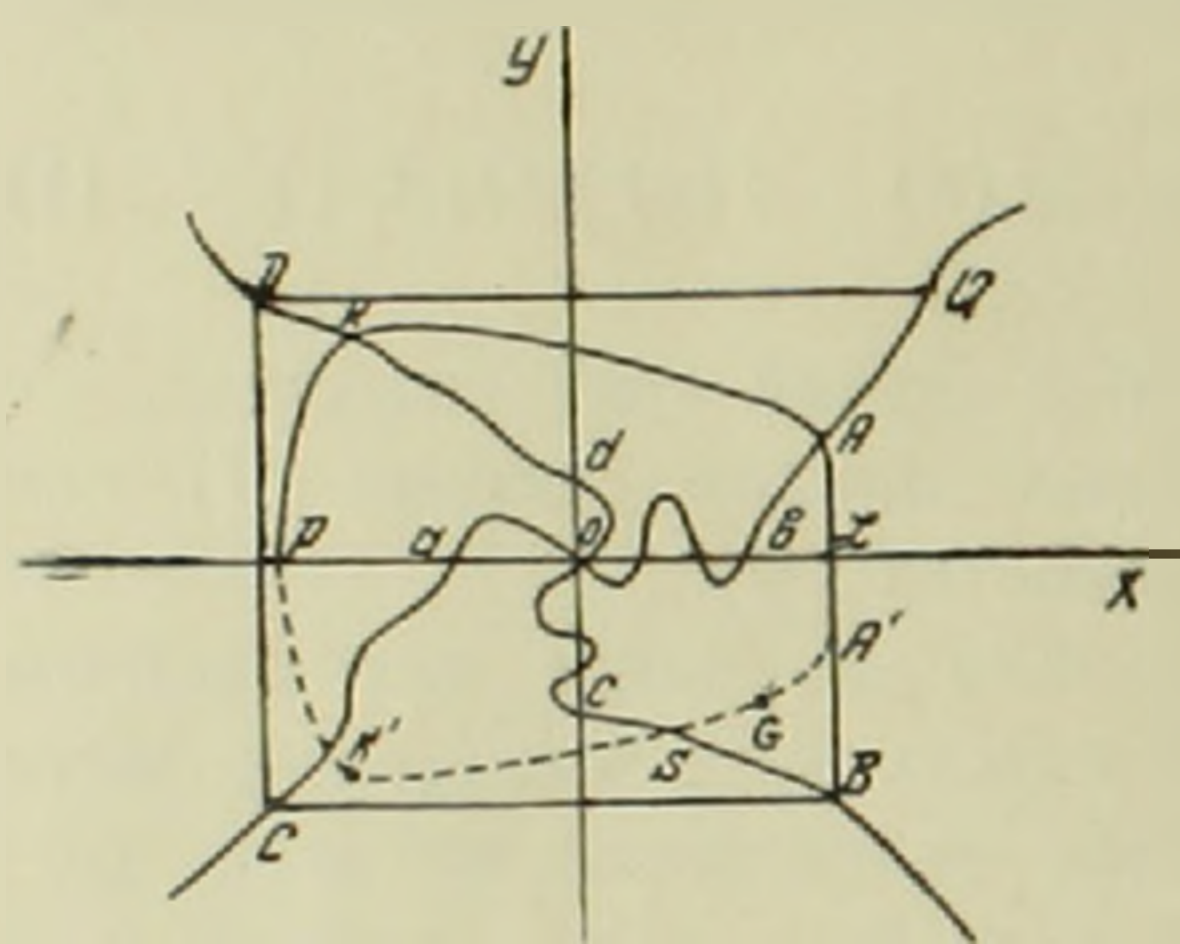
5) $|f(z)|, |\varphi(z)|, |g(z)|, |\psi(z)| \rightarrow \infty$ при $|z| \rightarrow \infty$;

6) вне отрезка $a \leq x \leq b$, $x \frac{Q(x, -|y|)}{P(x, -|y|)} \leq x \frac{Q(x, |y|)}{P(x, |y|)}$ и на отрезке $a \leq x \leq b$ или в некоторой его части выполняется то же соотношение с обратным знаком,

то система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Условие 6 соблюдается, если P и Q — четные функции по отношению y .

Доказательство. Прежде всего выясним расположения кривых $f(x) + \varphi(y) = 0$ и $g(x) + \psi(y) = 0$. Из уравнения $f(x) + \varphi(y) = 0$, в силу монотонности $\varphi(y)$ мы получим, что функция $y = \varphi^{-1} | -f(x) |$, где φ^{-1} функция, обратная функции φ , однозначна. График функции $y = \varphi^{-1} | -f(x) |$ — изоклина бесконечности в той окрестности начала координат, где выполняется условие 1, расположена в квадрантах II, IV, а вне отрезка $[a, b]$ в силу неравенства $xf(x) < 0$ — в квадрантах I, III (фиг. 1). Из уравнения $g(x) + \psi(y) = 0$, аналогично получим, что изоклина нуля — график функции $x = g^{-1} | -\psi(y) |$, где g^{-1} функция, обратная функции $g(x)$, в той окрестности начала координат, где выполняется условие 1, расположена в квадрантах I, III, а вне отрезка $[c, d]$ в квадрантах II, IV (фиг. 1).



Фиг. 1

Для доказательства теоремы достаточно построить кольцевую область, не содержащую особой точки, через границы которой все интегральные кривые входят внутрь при возрастании t .

Построим внешнюю границу этой области.

Обозначим через

$$N = \sup_{c < y < d} |g^{-1} | -\psi(y) |, \quad M = \sup_{a < x < b} |\varphi^{-1} | -f(x) |, \quad y^* = \max \{M, N, |c|, |d|\}$$

Пусть x наименьший корень уравнения $M = \varphi^{-1} | -f(x) |$, обозначим через $l = \max \{b, x\}$. При $x^* > l$ выберем точку $A(x^*, y^*)$ в I квадранте, на изоклине бесконечности и проведем прямые $AB, BC, CD, y = y_D$ (фиг. 1). В силу условия 5 точки A, B, C, D на изоклинах существуют. Если точка пересечения Q прямой $y = y_D$ с изоклиной бесконечности совпадает с точкой A или по изоклине ближе к точке $O(0, 0)$, чем точка A , то искомая замкнутая кривая построена. Если же точка Q дальше от точки $O(0, 0)$, чем точка A , то из точки A проведем интегральную кривую системы (1) в сторону убывания t . Рассмотрим

тот случай, когда эта интегральная кривая при продолжении достигает отрицательной полуоси x в некоторой точке P , не пересекаясь ни с прямой $y = y_D$, ни с отрезком CD , так как во всех остальных случаях полученная замкнутая кривая, как легко видеть, будет требуемой. Отобразим теперь фигуру $LAKP$ (фиг. 1) относительно оси x . Обозначим точки, симметричные точкам A, K относительно оси x , соответственно через A', K' и докажем, что замкнутая кривая $AKPK'A'$ — искомая. В самом деле, AKP — дуга интегральной кривой системы (1) и в силу единственности решения другие интегральные кривые не имеют с ней общих точек. Вдоль отрезка AA' , как легко видеть, $\frac{dx}{dt} < 0$, и потому все интегральные кривые пересекают этот отрезок снаружи внутрь при возрастании t . В любой точке кривой $A'K'P$, сопоставляя тангенс угла касательной к этой кривой, составленного с осью x , с полем направления, т. е. со значением $\frac{dy}{dx}$, легко показать, что все интегральные кривые пересекают кривую $A'K'P$ снаружи внутрь при возрастании t . Так, например, в точке $G(x', -y')$ дуги $A'S$, где S — точка пересечения кривой $A'K'P$ с изоклиной нуля, тангенс угла касательной к этой кривой, составленного с осью x , имеет значения:

$$(\operatorname{tg} \alpha)_G = -\frac{g(x') + \psi(y')}{f(x') + \varphi(y')} \cdot \frac{Q(x', y')}{P(x', y')},$$

а

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G = \frac{g(x') + \psi(-y')}{f(x') + \varphi(-y')} \cdot \frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')}$$

по условиям 2, 3 теоремы имеем:

$$g(x') < 0, f(x') < 0, \psi(y') < 0, \psi(-y') > 0, \varphi(-y') < 0, \varphi(y') > 0, \\ g(x') + \psi(-y') < 0, f(x') + \varphi(y') > 0$$

и потому получим:

$$|g(x') + \psi(-y')| < |g(x') + \psi(y')| \\ |f(x') + \varphi(-y')| > |f(x') + \varphi(y')|$$

(последнее неравенство имеет место в силу нечетности $\varphi(y)$).

$$\text{В силу условия 3 имеем } \frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')} \leq \frac{Q(x', y')}{P(x', y')}.$$

Итак, мы получим

$$\frac{g(x') + \psi(-y')}{f(x') + \varphi(-y')} \cdot \frac{Q(x', -y')}{P(x', -y')} < -\frac{g(x') + \psi(y')}{f(x') + \varphi(y')} \cdot \frac{Q(x', y')}{P(x', y')}.$$

т. е.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G < (\operatorname{tg} \alpha)_G$$

в силу чего, как легко убедиться, интегральная кривая через точку G , при возрастании t , входит внутрь области, ограниченной замкнутой кривой $AP A' A$. Аналогичным образом, в области выполнения условия 1, можно построить внутреннюю границу кольца, чем завершается доказательство теоремы.

Приведенным методом можно установить и асимптотическую устойчивость в целом тривиального решения системы (1), так, например, верна

Теорема 2. Пусть дана система (1).

Если:

1) $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$, $y\varphi(y) > 0$, $y\psi(y) < 0$,

2) $|f(z)|$, $|g(z)|$, $|\varphi(z)|$, $|\psi(z)| \rightarrow \infty$, $|z| \rightarrow \infty$,

3) $x \frac{Q(x, -|y|)}{P(x, -|y|)} < x \frac{Q(x, |y|)}{P(x, |y|)}$,

то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Рассмотрим один частный случай системы (1):

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \psi(y), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x). \quad (2)$$

При $\psi(y) \equiv y$, эта система соответствует уравнению нелинейных колебаний. Комбинируя геометрический метод со вторым методом Ляпунова, доказывается следующая теорема:

Теорема 3. Пусть дана система уравнений (2).

Если:

1) в некоторой окрестности начала координат $xF(x) > 0$, $x \neq 0$;

2) $\psi(y)$ монотонна, $y\psi(y) < 0$,

3) существуют такие числа l и $\delta_1 > \delta_2$, что $F(x) < \delta_2$, когда $x > l$, $F(x) > \delta_1$, когда $x < -l$;

4) $x\varphi(x) > 0$, $\int_0^\infty \varphi(x) dx = \infty$, $\int_0^\infty \varphi(x) dx = \infty$,

то система (2) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Для доказательства теоремы прежде всего покажем, что особая точка $x = y = 0$ системы (2) отталкивающего типа. В самом деле, производная по t от определенно-положительной функции

$$v(x, y) = \int_0^x \varphi(x) dx - \int_0^y \psi(y) dy$$

в силу системы (2) имеет вид $\frac{dv}{dt} = F(x) \varphi(x)$, но в области выполнения условия 1 функции $F(x)$ и $\varphi(x)$ одинакового знака, поэтому в этой области $\frac{dv}{dt} > 0$, чем доказывается наше утверждение. Далее, геометрическим методом можно построить замкнутую кривую, ограничивающую область, в которую интегральные кривые заданной системы только входят при возрастании t . Тем самым доказывается теорема.

При доказательстве этой теоремы не требуется выполнения условия Липшица.

Из теоремы 3 при $\psi(y) \equiv y$ мы получим теорему А. В. Драгилева³⁾, однако без требования выполнения условия Липшица.

Ленинканский педагогический институт
им. М. Налбандяна

Ս. Ա. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Երկու ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի սահմանային ցիկլի գոյությունը

Ներկա աշխարհում բերվում են

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + \varphi(y)] P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = [g(x) - \psi(y)] Q(x, y) \quad (1)$$

տիպի սիստեմի սահմանային ցիկլի գոյության բավարար պայմաններ: Քննարկվում է նաև այդ սիստեմի մի մասնավոր դեպք: Աշխարհում ենթադրվում է, որ սկզբնականորեն (1) սիստեմի համար միակ եզակի կետն է և որ (1) սիստեմի աջ մասերը որոշված են ու անընդհատ ողջ հարթության վրա և բավարարում են Լիպշիցի պայմանին նրա յուրաքանչյուր սահմանափակ մասում: Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. Եթե ուրիշ տված է (1) սիստեմը, որտեղ

$$P(x, y) > 0, \quad Q(x, y) > 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

երե

1. սկզբնականի մի որոշ մերձակայքում

$$xf(x) > 0, \quad xg(x) < 0, \quad x \neq 0; \quad y\varphi(y) > 0, \quad y\psi(y) > 0, \quad y \neq 0;$$

2) գոյություն ունի x առանցքի այնպիսի $[a, b]$ հատված $a < 0, b > 0$, որից դուրս $xf(x) < 0, \quad xg(x) < 0$,

3) գոյություն ունի y առանցքի այնպիսի $[c, d]$ հատված $c < 0, d > 0$, որից դուրս $y\varphi(y) > 0, \quad y\psi(y) > 0$,

4) $\varphi(y)$ կենս է, $g(x)$ և $\psi(y)$ ֆունկցիաները մոնոտոն են,

5) $|f(z)|, |\varphi(z)|, |g(z)|, |\psi(z)| \rightarrow \infty$, երբ $|z| \rightarrow \infty$,

6) $x \frac{Q(x, -|y|)}{P(x, -|y|)} \leq x \frac{Q(x, |y|)}{P(x, |y|)}$ $[a, b]$ հատվածից դուրս, իսկ այդ հատվածում կամ

նրա որևէ մասում, տեղի ունի նույն առնչությունը հակառակ նշանով, ապա (1) սիստեմը ունի գոնե մեկ կայուն սահմանային ցիկլ:

Թեորեմ 2. Եթե ուրիշ տված է



$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \psi(y), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x) \quad (2)$$

սխառեմք: երե

- 1) սկզբնականի մի որոշ մերձակայքում $x F(x) > 0$, $x \neq 0$,
- 2) $\psi(y)$ մոնոտոն է և $y \psi(y) < 0$,
- 3) գոյություն ունենալնայիսի l և $\delta_1 > \delta_2$ թվեր, որ $F(x) < \delta_2$, երբ $x > l$, $F(x) > \delta_1$, երբ $x < -l$,

$$4. \quad x \varphi(x) > 0, \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \infty \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \infty,$$

ապա (2) սխառեմն ունի զոնե մեկ կայուն սահմանային գիկլ:

Վերջին թեորեմից, երբ $\psi(y) = y$ ստացվում է Ա. Վ. Դրազիլյովի թեորեմը¹, «առանց լիպչիցի պայմանի պահանջի»:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Маркосян, ДАН АрмССР, т. XXIII, № 4, 153—159, (1956). ² С. А. Маркосян, Известия высших учебных заведений, Математика, вып. 2, 114—121 (1959). ³ В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 153—161, 1949.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О смешанной задаче изгиба квадратной пластинки с
 квадратным вырезом

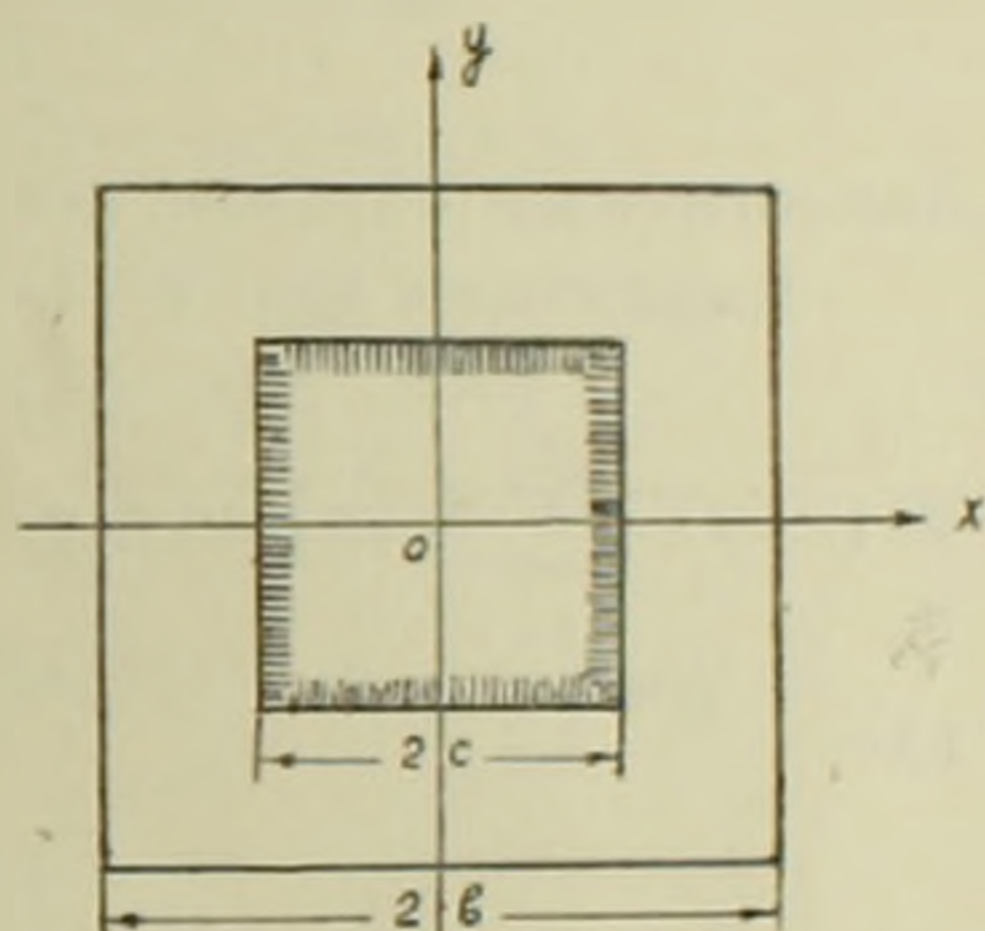
(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 5. X 1959)

В данной заметке приводится решение задачи поперечного изгиба квадратной пластинки с квадратным вырезом, опертой по наружному и закрепленной по внутреннему контуру (фиг. 1), под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, y)$.

1. Прогиб $W(x, y)$ пластинки, как известно ⁽¹⁾, удовлетворяет уравнению

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right] = P(x, y), \quad (1)$$

где E — модуль упругости пластинки, h — ее толщина, σ — коэффициент Пуассона, и граничным условиям



Фиг. 1.

$$W(x; \pm b) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = W(\pm b; y) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm b} = 0; \quad (2)$$

$$W(x, \pm c) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm c} = 0; \quad W(\pm c; y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\pm c} = 0.$$

$(-c \leq x \leq c) \qquad \qquad \qquad (-c \leq y \leq c)$

Для простоты ограничимся случаем симметрии относительно осей координат и диагоналей. В силу симметрии достаточно рассмотреть четвертую часть пластинки (фиг. 2), причем на осях координат должны выполняться условия

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (3)$$

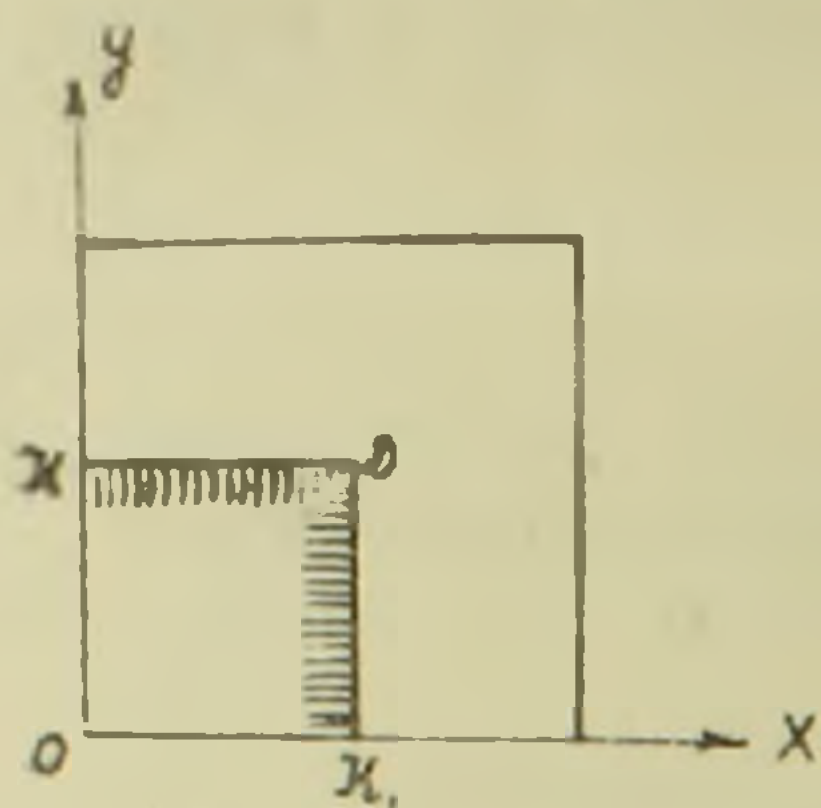
кроме того, $W(x, y) = W(y, x)$.

Прежде чем перейти к решению, обозначим

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = U(x, y), \quad (4)$$

тогда, согласно (1) и (4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} &= \\ &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} P(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$



Фиг. 2.

Представим, далее, функцию $W(x, y)$ в виде⁽²⁾

$$W(x, y) = \begin{cases} W_1(x, y) & \text{при } c \leq y \leq b \\ W_2(x, y) & \text{при } 0 \leq y < c. \end{cases} \quad (6)$$

Аналогичным образом представим функцию $U(x, y)$.

Выражения для $W_1(x, y)$ и $U_1(x, y)$ ищем в виде рядов Фурье⁽³⁾

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \alpha_k (y - c); \quad U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \alpha_k (y - c), \quad (7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{b-c}; \quad f_k(x) = \frac{2}{b-c} \int_c^b W_1(x, y) \sin \alpha_k (y - c) dy; \quad (8)$$

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{b-c} \int_c^b U_1(x, y) \sin \alpha_k (y - c) dy.$$

Для нахождения коэффициентов $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ умножим уравнения (4) и (5) на $\frac{2}{b-c} \sin \alpha_k (y - c) dy$ и проинтегрируем от c до b .

Интегрируя по частям и принимая во внимание граничные условия (2), получим

$$f_k''(x) - \alpha_k^2 f_k(x) + \frac{2\alpha_k S(x)}{b-c} = \varphi_k(x)$$

$$\varphi_k''(x) - \alpha_k^2 \varphi_k(x) + \frac{2\alpha_k S^*(x)}{b-c} = \frac{2}{b-c} p_k(x). \quad (9)$$

Здесь обозначено

$$S(x) = W(x, c); S^*(x) = U(x, c);$$

$$p_k(x) = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} \int_c^b P(x; y) \sin \alpha_k(y-c) dy. \quad (10)$$

Решая уравнения (9) и выполняя соответствующие граничные условия (2) и (3), будем иметь

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{\alpha_k(b-c) \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b [\alpha_k S^*(t) - p_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k(b-t) dt + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \alpha_k(b-x) \int_0^x [\alpha_k S^*(t) - p_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\}; \quad (11)$$

$$f_k(x) = \frac{2}{(b-c) \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \int_x^b \left[S(t) - \frac{1}{2\alpha_k^3} (\alpha_k S^*(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - p_k(t)) (1 - \alpha_k(b-t) \operatorname{cth} \alpha_k(b-t) - \alpha_k x \operatorname{th} \alpha_k x + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_k b \operatorname{th} \alpha_k b) \right] \operatorname{sh} \alpha_k(b-t) dt + \operatorname{sh} \alpha_k(b-x) \int_x^b \left[S(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\alpha_k^3} (\alpha_k S^*(t) - p_k(t)) (1 - \alpha_k(b-x) \operatorname{cth} \alpha_k(b-x) - \alpha_k t \operatorname{th} \alpha_k t + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_k b \operatorname{th} \alpha_k b) \right] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\}.$$

В выражения для $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ входят неизвестные значения $S^*(x)$ и $S(x)$. Прежде чем перейти к их определению, заметим следующее: оба ряда, входящие в (7), обладают слабой сходимостью, первый—в промежутке (c, b) , а второй—в $(0, b)$. Ее можно усилить, выделив выражения, обуславливающие слабую сходимост:

$$W_1(x, y) = \left(1 - \frac{y-c}{b-c} \right) \left\{ S(x) + \frac{y-c}{6} (2b-c-y) [S^*(x) - S''(x)] \right\} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k(x) - 2 \frac{\alpha_k^2 S(x) - S^*(x) + S''(x)}{\alpha_k^3 (b-c)} \right] \sin \alpha_k(y-c) \quad (12)$$

$$U_1(x, y) = \left(1 - \frac{y-c}{b-c} \right) S^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k(x) - \right.$$

$$-\frac{2S^*(x)}{\alpha_k(b-c)} \Big] \sin \alpha_k(y-c).$$

Для определения значения $S^*(x)$ в $(0, c)$ выполним условие равенства нулю угла поворота пластинки на стороне KD :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) = 0. \quad (13)$$

Умножив (13) на $\frac{2}{c} \cos \beta_k x dx$, где $\beta_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{c}$, и проинтегрировав от 0 до c , получим

$$a_k = \frac{8(-1)^{k+1} \beta_k^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k(b-c)}{c [\operatorname{sh} 2\beta_k(b-c) - 2\beta_k(b-c)]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_k^2} \left[f_i(c) - \frac{\varphi_i(c)}{\alpha_i^2 + \beta_k^2} \right] + q_k. \quad (14)$$

Здесь обозначено

$$a_k = \frac{2}{c} \int_0^c S^*(x) \cos \beta_k x dx;$$

$$q_k = \frac{48(1-\sigma^2) \operatorname{sh} \beta_k(b-c)}{Eh^3c [\operatorname{sh} 2\beta_k(b-c) - 2\beta_k(b-c)]} \int_0^c \int_c^b P(x, y) [(b-c) \times \\ \times \operatorname{cth} \beta_k(b-c) - (b-y) \operatorname{cth} \beta_k(b-y)] \operatorname{sh} \beta_k(b-y) \cos \beta_k x dx dy. \quad (15)$$

Для неизвестных $f_k(c)$ и $\varphi_k(c)$, входящих в (14), из выражений (11), а также принимая во внимание, что в промежутке (c, b)

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(c) \sin \alpha_i(x-c); \quad S^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c) \sin \alpha_i(x-c), \quad (16)$$

получим

$$f_k(c) = \frac{\operatorname{ch} \alpha_k c \operatorname{sh} \alpha_k(b-c)}{(b-c) \operatorname{ch} \alpha_k b} \left[2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i f_i(c)}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \varphi_i(c)}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \xi_k \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \beta_i \alpha_i}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \right) \right] + r_k; \quad (17)$$

$$\varphi_k(c) + \frac{2\operatorname{ch}x_k c \operatorname{sh}x_k(b-c)}{(b-c)\operatorname{ch}x_k(b-c)} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l \varphi_l(c)}{\alpha_l^2 + \alpha_k^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \beta_l a_l}{\beta_l^2 + \alpha_k^2} \right] + t_k,$$

где

$$\zeta_k = \alpha_k \frac{(b-c) \operatorname{ch}^2 x_k c - c \operatorname{sh}^2 x_k(b-c)}{\operatorname{sh} x_k(b-c) \operatorname{ch} x_k c \operatorname{ch} x_k b}$$

$$\begin{aligned} r_k = \frac{1}{2\alpha_k^3 \operatorname{ch} x_k b} & \left\{ \operatorname{ch} x_k c \int_c^b p_k(t) [1 - x_k(b-t) \operatorname{cth} x_k(b-t) - x_k \operatorname{cth} x_k c + \right. \\ & \left. + x_k b \operatorname{th} x_k b] \operatorname{sh} x_k(b-t) dt + \operatorname{sh} x_k(b-c) \int_0^c p_k(t) [1 - x_k(b-c) \operatorname{cth} x_k(b-c) - \right. \\ & \left. - x_k t \operatorname{th} x_k t + x_k b \operatorname{th} x_k b] \operatorname{ch} x_k t dt \right\}; \\ t_k = -\frac{1}{\alpha_k \operatorname{ch} x_k b} & \left[\operatorname{ch} x_k c \int_c^b p_k(t) \operatorname{sh} x_k(b-t) dt + \right. \\ & \left. + \operatorname{sh} x_k(b-c) \int_0^c p_k(t) \operatorname{ch} x_k t dt \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что, согласно (15), в промежутке $(0, c)$

$$S^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k x. \quad (19)$$

2. Выполнение граничных условий задачи привело к совокупности трех систем линейных алгебраических уравнений (14) и (17) для определения неизвестных постоянных a_k , $f_k(c)$ и $\varphi_k(c)$. Преобразуем эти системы с целью их регуляризации. Обозначив

$$m_k = \alpha_k(b-c) [\varphi_k(c) + \alpha_k^2 f_k(c)]; \quad n_k = \alpha_k^3(b-c) f_k(c); \quad (20)$$

$$a_k^* = 12(-1)^{k+1} \beta_k c a_k + \frac{48\beta_k}{b-c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l^2 n_l + \beta_k^2 m_l}{(\alpha_l^2 + \beta_k^2)^2},$$

после некоторых преобразований окончательно получим

$$m_k = \frac{\alpha_k \operatorname{ch} x_k c \operatorname{sh} x_k(b-c)}{(b-c) \operatorname{ch} x_k b} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_l^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}{\alpha_l^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \right) - H_1(i; k) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\zeta_k L_1(i; k) \Big] m_i - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{3\alpha_i^2 + \alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \right) + H_2(i; k) + \right. \\
& \left. + \zeta_k L_2(i; k) \right] n_i + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{c} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\beta_i^2 - \alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \right) a_i^* \Big\} + r_k^*; \\
n_k = & - \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k c \operatorname{sh} \alpha_k (b-c)}{(b-c) \operatorname{ch} \alpha_k b} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} - \zeta_k \right) - H_3(i; k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \zeta_k L_1(i; k) \right] m_i + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2} + \zeta_k \right) - H_4(i; k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \zeta_k L_2(i; k) \right] n_i + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{c} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left(\frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \zeta_k \right) a_i^* \right\} + t_k^*; \tag{21}
\end{aligned}$$

$$a_k^* = - \frac{48 \beta_k [2\beta_k(b-c) - 1 + e^{-2\beta_k(b-c)}]}{(b-c) [\operatorname{sh} 2\beta_k(b-c) - 2\beta_k(b-c)]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2 m_i + \alpha_i^2 n_i}{(\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} + q_k^*.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$r_k^* = \alpha_k (b-c) (\alpha_k^2 r_k + t_k); \quad t_k^* = \alpha_k^3 (b-c) r_k; \quad q_k^* = 12 (-1)^{k+1} \beta_k c q_k;$$

$$\begin{aligned}
H_1(i; k) = & \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) + 2\alpha_k^2 [4\alpha_i^2 \times \\
& \times \Phi(k) - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2(i; k) = & \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^2} \{ (\alpha_i^4 + 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 + \alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^4 - \alpha_k^4) \Psi(i) - \\
& - 2\alpha_i^2 [2(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3(i, k) = & \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 2\alpha_i^2 \alpha_k^2 + 9\alpha_k^4) \Phi(i) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) (\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2) \times \\
& \times \Psi(i) - 2\alpha_k^2 [2(\alpha_i^2 + \alpha_k^2) \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \}; \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4(i; k) = & \frac{1}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^3} \{ (\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2 \alpha_k^2 - 3\alpha_k^4) \Phi(i) - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) (\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2) \times \\
& \times \Psi(i) + 2\alpha_i^2 [4\alpha_k^2 \Phi(k) + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) \Psi(k)] \};
\end{aligned}$$

$$L_1(i;k) = \frac{1}{2} [H_1(i;k) + H_2(i;k)]; \quad L_2(i;k) = \frac{1}{2} [H_2(i;k) + H_4(i;k)]$$

$$\Phi(k) = \frac{2\alpha_k}{\pi \operatorname{ch} \alpha_k c} \int_0^c \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi(c-t)}{4c} \cdot \operatorname{sh} \alpha_k t dt;$$

$$\Psi(k) = \frac{2\alpha_k^2}{\pi \operatorname{ch} \alpha_k c} \int_0^c \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi(c-t)}{4c} \cdot (t \operatorname{cth} \alpha_k t - \operatorname{cth} \alpha_k c) \operatorname{sh} \alpha_k t dt.$$

Исследуем полученную совокупность трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (21). Произведенные оценки показывают, что сумма модулей коэффициентов k -го уравнения первой из систем (21), начиная с $k > \frac{1,15}{\pi} \left(\frac{b}{c} - 1 \right)$ (или, что одно и то же, для $\frac{b}{c} > \left[1 + \frac{k\pi}{1,15} \right]^{-1}$), будет меньше 0,75, а второй из систем (21) — меньше 0,8; что касается третьей системы, то, начиная от значений k таких, что $\frac{b}{c} > 1 + \frac{7}{4(2k+1)}$, сумма модулей коэффициентов k -го уравнения этой системы становится меньше единицы и быстро стремится к нулю со скоростью $\frac{48\beta_k(b-c)}{\operatorname{sh} 2\beta_k(b-c)}$.

При этом, как легко видеть из (22), (15) и (18), свободные члены r_k^* , t_k^* , q_k^* стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{k}$. Согласно общей теории бесконечных систем⁽⁴⁾, совокупность систем (2.2) имеет единственное ограниченное решение, получаемое методом последовательных приближений.

Как нетрудно видеть, неизвестные m_k , n_k и a_k^* , начиная с некоторого $k = k_1$, зависящего от отношения сторон c и b , стремятся к нулю со скоростью $\frac{C}{k^{0,5}}$, причем постоянная C определится из максимального значения отношений свободных членов k -го уравнения и разности между единицей и суммой модулей коэффициентов⁽⁴⁾.

3. Перейдем теперь к нахождению выражений для прогиба $W(x, y)$ и составляющих напряжений X_x , Y_y и X_y .

Подставляя в (11) выражения $S(x)$ и $S^*(x)$ из (16) и (19) и принимая во внимание (20), после некоторых преобразований получим из (7):

$$W(x, y) = \frac{1}{b-c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (y-c)}{\alpha_k^3 \operatorname{ch} \alpha_k c} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \left[n_k + \alpha_k (x \operatorname{th} \alpha_k x - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{cth} \alpha_k c) (m_k - n_k) + (b - c) \int_0^c p_k(t) [1 - \alpha_k (c - t) \operatorname{cth} \alpha_k (c - t) - \\
& - \alpha_k t \operatorname{th} \alpha_k t + \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k c] \operatorname{sh} \alpha_k (c - t) dt \Big] + \\
& + (b - c) \operatorname{sh} \alpha_k (c - x) \int_0^x p_k(t) [1 - \alpha_k (c - x) \operatorname{cth} \alpha_k (c - x) - \alpha_k t \operatorname{th} \alpha_k t + \\
& + \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k c] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \Big] + \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta_k \operatorname{sh} \beta_k (b - y)}{\beta_k^3 \operatorname{sh} \beta_k (b - c)} [(b - c) \operatorname{cth} \beta_k (b - c) - \\
& - (b - y) \operatorname{cth} \beta_k (b - y)] \cos \beta_k x dx
\end{aligned} \quad (23)$$

при $0 \leq x \leq c$.

Здесь

$$\eta_k = (-1)^{k+1} \beta_k c \alpha_k. \quad (24)$$

При $c \leq x \leq b$, $c \leq y \leq b$ аналогичным образом получим:

$$\begin{aligned}
W(x, y) = & \frac{1}{2(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b - y)}{\alpha_k^3 \operatorname{sh} \alpha_k (b - c)} \{ 2n_k - \alpha_k [(b - c) \operatorname{cth} \alpha_k (b - c) - \\
& - (b - y) \operatorname{cth} \alpha_k (b - y)] (m_k - n_k) \} \sin \alpha_k (x - c) + \\
& + \frac{1}{2(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (y - c)}{\alpha_k^3 \operatorname{sh} \alpha_k (b - c)} \left\{ \operatorname{sh} \alpha_k (b - x) \left[2n_k + \right. \right. \\
& + \alpha_k [(b - x) \operatorname{cth} \alpha_k (b - x) - (b - c) \operatorname{cth} \alpha_k (b - c)] (m_k - n_k) + \\
& + (b - c) \int_0^x p_k(t) [1 - \alpha_k (b - x) \operatorname{cth} \alpha_k (b - x) + \alpha_k (b - c) \operatorname{cth} \alpha_k (b - c) - \\
& - \alpha_k (t - c) \operatorname{cth} \alpha_k (t - c)] \operatorname{sh} \alpha_k (t - c) dt \Big] + \\
& + (b - c) \operatorname{sh} \alpha_k (x - c) \int_x^b p_k(t) [1 - \alpha_k (b - t) \operatorname{cth} \alpha_k (b - t) + \\
& + \alpha_k (b - c) \operatorname{cth} \alpha_k (b - c) - \alpha_k (x - c) \operatorname{cth} \alpha_k (x - c)] \operatorname{sh} \alpha_k (b - t) dt \Big\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

При этом нормальные напряжения X_x , Y_y и касательное напряжение X_y при $0 \leq x \leq c$ будут иметь вид:

$$X_x = - \frac{Eh}{2(1 - \sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{Eh}{2(1+\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (y-c)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k c} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \left[\frac{2m_k - (1+\sigma)n_k}{1-\sigma} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_k (x \operatorname{th} \alpha_k x - \operatorname{cth} \alpha_k c) (m_k - n_k) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (b-c) \int_0^x p_k(t) \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \alpha_k (c-t) \operatorname{cth} \alpha_k (c-t) + \alpha_k x \operatorname{th} \alpha_k x - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k c) \cdot \operatorname{sh} \alpha_k (c-t) dt \right] - (b-c) \operatorname{sh} \alpha_k (c-x) \int_0^x p_k(t) \left[\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_k (c-x) \operatorname{cth} \alpha_k (c-x) + \alpha_k t \operatorname{th} \alpha_k t - \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k c \right] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\} + \\
& + \frac{Eh}{4(1+\sigma)c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-y)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-c)} \left[\frac{2\sigma}{1-\sigma} + \beta_k (b-c) \operatorname{cth} \beta_k (b-c) - \right. \\
& \quad \left. - \beta_k (b-y) \operatorname{cth} \beta_k (b-y) \right] \cos \beta_k x; \\
Y_y &= - \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} \right) = \\
&= \frac{Eh}{2(1-\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (y-c)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k c} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k x \left[\frac{(1+\sigma)n_k - 2\sigma m_k}{1-\sigma} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_k (x \operatorname{th} \alpha_k x - \operatorname{cth} \alpha_k c) \operatorname{sh} \alpha_k (c-t) dt \right] + \right. \\
& \quad \left. + (b-c) \operatorname{sh} \alpha_k (c-x) \int_0^x p_k(t) \left[\frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \alpha_k (c-x) \operatorname{cth} \alpha_k (c-x) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_k t \operatorname{th} \alpha_k t + \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k c \right] \operatorname{ch} \alpha_k t dt \right\} + \\
& + \frac{Eh}{4(1+\sigma)c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-y)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-c)} \left[\frac{2}{1-\sigma} - \beta_k (b-c) \operatorname{cth} \beta_k (b-c) + \right. \\
& \quad \left. + \beta_k (b-y) \operatorname{cth} \beta_k (b-y) \right] \cos \beta_k x; \tag{26}
\end{aligned}$$

$$Y_x = - \frac{Eh}{2(1+\sigma)(b-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (y-c)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k c} \left\{ \operatorname{sh} \alpha_k x \left[m_k + \alpha_k (x \operatorname{cth} \alpha_k x - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{ctha}_k c) (m_k - n_k) - \alpha_k (b - c) \int_x^c p_k(t) x \operatorname{ctha}_k x + (c - t) \operatorname{ctha}_k c (c - t) - \\
& - \operatorname{ctha}_k c) \operatorname{sh} \alpha_k (c - t) dt \Big| + \alpha_k (b - c) \operatorname{cha}_k (c - x) \int_0^x p_k(t) [(c - \\
& - x) \operatorname{tha}_k (c - x) + t \operatorname{tha}_k t - \operatorname{ctha}_k c] \operatorname{cha}_k t dt \Big\} + \\
& + \frac{Eh}{4(1+\sigma)c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \tau_{lk} \operatorname{ch} \beta_k (b - y)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b - c)} \left[1 - \beta_k (b - c) \operatorname{cth} \beta_k (b - c) + \right. \\
& \left. + \beta_k (b - y) \operatorname{th} \beta_k (b - y) \right] \sin \beta_k x.
\end{aligned}$$

Как видно из (26), при ограниченной нагрузке $P(x, y)$ коэффициенты рядов, входящих в выражения напряжения, при $0 \leq x < c$ убывают со скоростью $\frac{A}{\alpha_k^3} + \frac{1}{\alpha_k^{1.5}} [F \alpha_k (c - x) + B] e^{-\alpha_k (c - x)} +$
 $+ \frac{1}{\beta_k^{1.5}} [F_1 \beta_k (y - c) + B_1] e^{-\beta_k (y - c)}$. Задаваясь величинами $P(x, y)$

E, h, σ , а также отношением сторон $\frac{c}{b}$, из (20), (21) и (24) получим значения m_k, n_k и τ_{lk} сверху и снизу, после чего способом, описанным в работе⁽⁵⁾, определим из (23), (25) и (26) величины прогиба $W(x, y)$ и напряжений X_x, Y_y и X_y с избытком и недостатком.

В заключение оценим по модулю n -ый остаток $\rho_n(x, y)$ рядов, входящих в выражение (26) для X_x . Предполагая ограниченность $P(x, y)$, будем иметь;

$$|\rho_n(x, y)| < \frac{A^*}{n^2} + \frac{B^*}{\sqrt{n}} e^{-\alpha_n (c-x)} + \frac{C^*}{\sqrt{n}} e^{-\beta_n (y-c)}, \quad (27)$$

где постоянные A^*, B^* и C^* , так же, как и приведенные выше A, B, F, B_1, F_1 , зависят от величины нагрузки $P(x, y)$, а также от E, h, σ и отношения сторон $\frac{c}{b}$.

Институт математики и механики
 Академии наук Армянской ССР

**Քառակուսանի անցք ունեցող քառակուսանի ուսլի ծուման
խառն եզրային խնդրի մասին**

Հոգվածում դիտարկվում է քառակուսան անցք ունեցող քառակուսան ուսլի ծուման
խնդիրը, երբ սալն ազատ հենված է արտաքին՝ ու ամրակցված է ներքին կոնտուրի
երկայնքով:

Ննդրի լուծումը որոնվում է Ֆուրյեի շարքի ներկայացմամբ:

Սալի ամրակցված մասերում պտտման անկյան դերոյի հավասարվելու պայմանի
բավարարումը բերում է հանրահաշվային դժային հավասարումների անվերջ սխտեմ-
ների լուծմանը: Ցույց է տրվում այդ սխտեմների լիովին ռեզոլյարության պայմանը:
Որոշվում է մաթորանս սխտեմների լուծումների նվազման կարգը: Ինահատվում է X_x
լարման արտահայտության մեջ մտնող շարքի ըն մնացորդը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Б. Г. Галеркин, Собрание сочинений, т. II, изд. АН СССР, 1953. ² Р. С. Ми-
насян, ДАН АрмССР, т. XXII, №. 5 (1956). ³ Г. А. Гринберг, Избранные вопросы
математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
⁴ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гос-
техиздат, 1950. ⁵ Р. С. Минасян, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том
XI, № 3 (1958).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Кручение конических стержней и цилиндрических стержней
 с конической частью

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 2.VI 1959)

При кручении валов переменного сечения функция перемещения $\Psi(r, z)$ в цилиндрических координатах удовлетворяет в области осевого сечения вала уравнению (^{1, 2})

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Условия для функции $\Psi(r, z)$ на контуре осевого сечения задаются законом распределения скручивающей нагрузки на торцах и боковой поверхности вала.

Рассмотрим полый конический вал (фиг. 1), скручиваемый моментами M_1 и M_2 , приложенными на торцах вала, и произвольной нагрузкой, приложенной по боковым поверхностям вала по степенному закону:

$$M_1 = -2\pi \int_{r_2}^{R_2} r^2 \tau_{\varphi z}(r, a) dr, \quad (2)$$

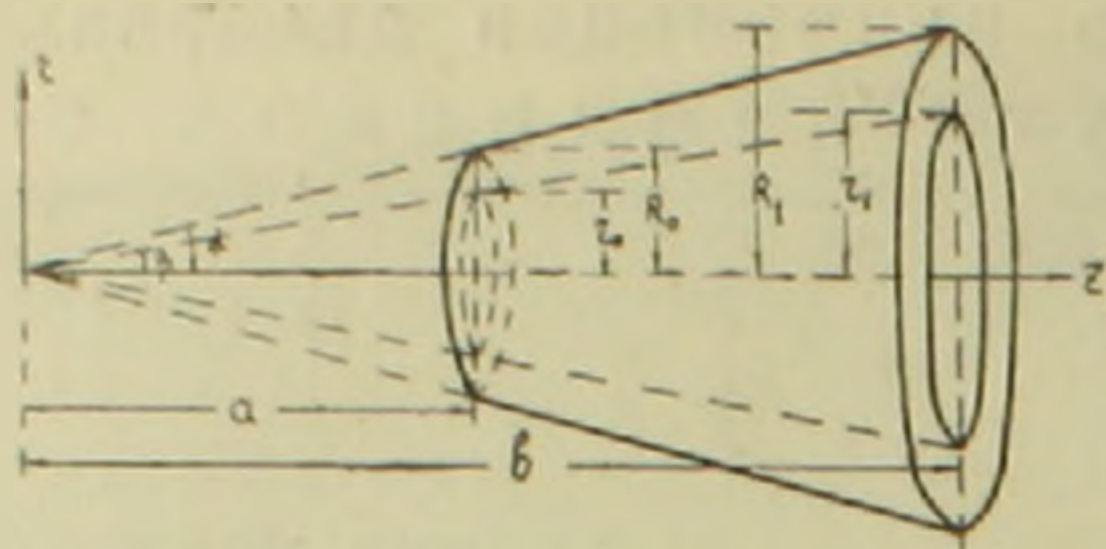
$$M_2 = 2\pi \int_{r_1}^{R_1} r^2 \tau_{\varphi z}(r, b) dr, \quad (3)$$

$$P_v[r(z), z]_{r=z \operatorname{tg} \alpha} = f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{b} \right)^k, \quad (4)$$

$$P_v[r(z), z]_{r=z \operatorname{tg} \beta} = f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{z}{b} \right)^k, \quad (5)$$

где $P_v(r, z) = \tau_{r\varphi} \cos(\nu, r) + \tau_{z\varphi} \cos(\nu, z) \quad (6)$

—проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения вала,



Фиг. 1

$$\cos(\nu, r) = \frac{dr}{ds} = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos(z, \nu) = \frac{dz}{ds} = -\frac{dr}{ds}. \quad (7)$$

Для определения функции $\Psi(r, z)$ воспользуемся сферическими полярными координатами

$$r = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad \Psi(r, z) = \Psi_1(\rho, \theta), \quad (8)$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор точки в осевом сечении стержня, а θ — угол наклона радиуса-вектора к оси z ($\beta \leq \theta \leq \alpha$). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{3}{\rho^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$\Psi_1(\rho, \theta) = \rho^m \Phi(\theta), \quad (10)$$

где m — пока произвольное постоянное число.

Функция $\Phi(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''(\theta) + 3 \operatorname{ctg} \theta \cdot \Phi'(\theta) + m(m+3)\Phi(\theta) = 0. \quad (11)$$

Пользуясь подстановкой

$$\Phi(\theta) = \varphi(\zeta), \quad \zeta = \cos \theta \quad (12)$$

уравнение (11) приведем к виду

$$(\zeta^2 - 1)\varphi''(\zeta) + 4\zeta\varphi'(\zeta) - m(m+3)\varphi(\zeta) = 0 \quad (13)$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi_n(\zeta) = A P_n'(\zeta) + B Q_n'(\zeta), \quad (14)$$

где

$P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$ — сферические функции Лежандра, соответственно, первого и второго рода⁽¹⁾

$$n = \frac{-1 \pm (2m+3)}{2} \quad (15)$$

Пользуясь соотношениями (10), (14) и (15) и выбирая те решения, для которых n — положительное натуральное число, для функции $\Psi_1(\rho, \theta)$ получим следующее выражение:

$$\Psi_1(\rho, \theta) = \frac{A_0}{\rho^3} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^k P_{k+1}'(\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^k Q_{k+1}'(\zeta). \quad (16)$$

$$\zeta = \cos \theta$$

В цилиндрических координатах функция перемещения $\Psi(r, z)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + 3C_1 z + \frac{3}{2} C_2 (4z^2 - r^2) + \frac{5}{2} C_3 (4z^3 - 3z r^2) + \\ &+ \frac{15}{8} C_4 (8z^4 - 12z^2 r^2 + r^4) + \dots \dots + \\ &+ E_1 \left[\frac{3}{2} z \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} + z}{\sqrt{r^2 + z^2} - z} - \left(2 - \frac{z^2}{r^2} \right) \sqrt{r^2 + z^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Удовлетворив условиям (2) — (5), для определения постоянных интегрирования получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_1}{2\pi G} &= -A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+3} (C_k b_k + E_k c_k), \\ \frac{M_2}{2\pi G} &= -A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b^{k+3} (C_k b_k + E_k c_k), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} -G \sin^2 \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\cos^k \alpha} [C_k P'_{k+1}(\cos \alpha) + \\ + E_k Q'_{k+1}(\cos \alpha)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{b} \right)^k \\ G \sin^2 \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\cos^k \beta} [C_k P'_{k+1}(\cos \beta) + \\ + E_k Q'_{k+1}(\cos \beta)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{z}{b} \right)^k. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При этом использованы следующие обозначения:

$$a_0 = \cos^3 \alpha - \cos^3 \beta + 3(\cos \beta - \cos \alpha), \quad (20)$$

$$b_k = \frac{1}{a^{k+3}} \int_{r_0}^{R_0} r^3 \left[k a (r^2 + a^2)^{\frac{k-2}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + r^2 (r^2 + a^2)^{\frac{k-3}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \Big| dr = \\
& = \frac{1}{a^{k+3}(k+3)} \left[r^4 (r^2 + a^2)^{\frac{k-1}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] \Big|_{r_0}^{R_0} = \\
& = \frac{1}{k+3} \left[\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^{k+3} \alpha} P'_{k+1}(\cos \alpha) - \frac{\sin^4 \beta}{\cos^{k+3} \beta} P'_{k+1}(\cos \beta) \right], \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k & = \frac{1}{b^{k+3}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 \left[kb (r^2 + b^2)^{\frac{k-2}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{k-3}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] dr = \\
& = \frac{1}{(k+3)b^{k+3}} \left[r^4 (r^2 + b^2)^{\frac{k-1}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] \Big|_{r_1}^{R_1} = \\
& = \frac{1}{k+3} \left[\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^{k+3} \alpha} Q'_{k+1}(\cos \alpha) - \frac{\sin^4 \beta}{\cos^{k+3} \beta} Q'_{k+1}(\cos \beta) \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Приравнивая в соотношениях (19) коэффициенты при равных степенях z и разрешая полученные равенства относительно C_k и E_k , получим

$$C_k = \frac{q_k}{b^k}, \quad E_k = \frac{p_k}{b^k}, \quad (23)$$

где введены обозначения

$$q_k = \frac{\beta_k h_k - \gamma_k H_k}{N_k h_k - n_k H_k}, \quad p_k = \frac{\gamma_k N_k - \beta_k n_k}{N_k h_k - n_k H_k}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} N_k & = -\frac{G \sin^2 \alpha P'_{k+1}(\cos \alpha)}{\cos^k \alpha}, & H_k & = -\frac{G \sin^2 \alpha Q'_{k+1}(\cos \alpha)}{\cos^k \alpha} \\ n_k & = \frac{G \sin^2 \beta P'_{k+1}(\cos \beta)}{\cos^k \beta}, & h_k & = \frac{G \sin^2 \beta Q'_{k+1}(\cos \beta)}{\cos^k \beta} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Пользуясь значениями (23), из (18) получим

$$A_0 = \frac{M_1}{2\pi G a_0} + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k+3}}{b^k} (q_k b_k + p_k c_k), \quad (26)$$

$$\frac{M_1 + M_2}{2\pi G} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k+3} - a^{k+3}}{b^k} (q_k b_k + p_k c_k). \quad (27)$$

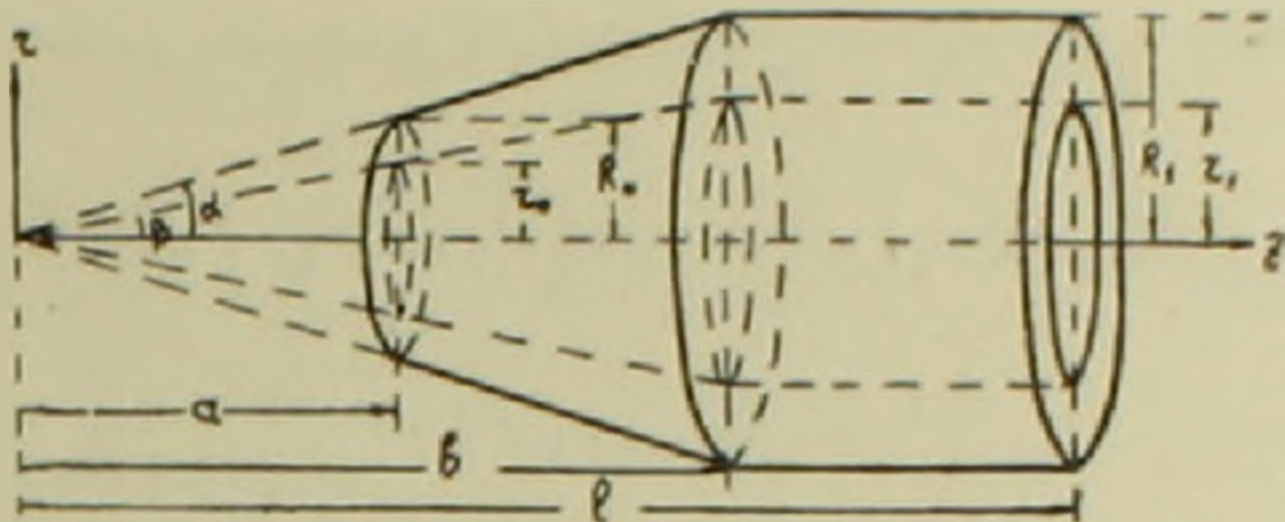
Соотношение (27) является уравнением равновесия скручивающих вал нагрузок.

В частном случае, когда $\beta = 0$ и боковая поверхность свободна от нагрузок, получаем:

$$A_0 = \frac{M_1}{2\pi G (2 - 3\cos \alpha + \cos^3 \alpha)}, \quad C_k = E_k = 0, \quad M_1 = -M_2, \quad (28)$$

то есть: из (17) получается решение А. Феппля (2).

Рассмотрим полый вал переменного сечения, имеющий форму полого усеченного конуса в одной части и полого круглого цилиндра в другой части (фиг. 2). Пусть вал скручивается моментами M_1 и M_2 , приложенными на торцах; произвольной степенной нагрузкой, приложенной на боковых по-



Фиг. 2.

верхностям конической части и произвольной нагрузкой, приложенной на боковых поверхностях цилиндрической части.

Для этой задачи граничные условия задаются такими же соотношениями (2) — (5), а также

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\varphi r}(R_1, z) &= f_3(z) \\ \tau_{\varphi r}(r_1, z) &= f_4(z) \end{aligned} \right\} (b < z < l), \quad (29)$$

где функции f_3 и f_4 — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в указанном интервале.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) & (a < z < b) \\ \Psi_2(r, z) & (b < z < l). \end{cases} \quad (30)$$

При этом, кроме соответствующих граничных условий, на линии контакта конической и цилиндрической областей осевого сечения функции Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, b) = \Psi_2(r, b), \quad \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right)_{z=b} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right)_{z=b}. \quad (31)$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 берем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, z) &= \frac{A_0}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (a < z < b) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Psi_2(r, z) = A_z + D + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r) \right] \sin \lambda_k (z - b) +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} (F_k \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \operatorname{ch} \mu_k z) W_1(\mu_k r) \quad (b < z < l), \quad (33)$$

где $\lambda_k = \frac{k\pi}{l-b}$, а μ_k — корни уравнения

$$W_2(x r_1) = 0 \text{ или } J_2(x r_1) Y_2(x R_1) - J_2(x R_1) Y_2(x r_1) = 0, \quad (34)$$

$$W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R_1)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k R_1)}, \quad (35)$$

$J_i(x)$ и $Y_i(x)$ — функции Бесселя i -го порядка, соответственно, первого и второго рода с действительным аргументом, $I_i(x)$ и $K_i(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента ⁽⁶⁾.

Для функции $W_n(\mu_k r)$ справедливы следующие формулы:

$$\int_{r_1}^{R_1} r W_1(\mu_k r) W_1(\mu_p r) dr = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_{r_1}^{R_1} r W_2(\mu_k r) W_2(\mu_p r) dr =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ \omega_k & \text{при } p = k, \end{cases} \quad (36)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left\{ |R_1 W_1(\mu_k R_1)|^2 - |r_1 W_1(\mu_k r_1)|^2 \right\}. \quad (37)$$

Удовлетворив условиям (2)—(5), (29) и (31), для постоянных интегрирования получаем значения (23), (26), а также

$$A = \frac{4}{R_1^4 - r_1^4} \left\{ \frac{M_2}{2\pi G} + \frac{1}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} (d_k r_1^2 - a_k R_1^2) \right\}, \quad (38)$$

$$D = \frac{4b}{R_1^4 - r_1^4} \left\{ \frac{d_0}{a_0} \left[\frac{M_1}{2\pi G} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k+3}}{b^k} (b_k q_k + p_k c_k) \right] + \right.$$

$$\left. + b^3 \sum_{k=1}^{\infty} (q_k f_k + p_k g_k) - \frac{M_2}{2\pi G} + \frac{1}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} (a_k R_1^2 - d_k r_1^2) \right\}, \quad (39)$$

$$A_k = \frac{d_k K_2(\lambda_k R_1) - a_k K_2(\lambda_k r_1)}{G \lambda_k \Delta_k(r_1, R_1)},$$

$$B_k = \frac{d_k I_2(\lambda_k R_1) - a_k I_2(\lambda_k r_1)}{G \lambda_k \Delta_k(r_1, R_1)} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{1}{\omega_k} (L_k \operatorname{ch} \mu_k b - M_k \operatorname{sh} \mu_k b) \\ D_k &= \frac{1}{\omega_k} (M_k \operatorname{ch} \mu_k b - L_k \operatorname{sh} \mu_k b) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

При этом использованы обозначения

$$d_k = \frac{2}{l-b} \int_b^l f_4(z) \sin \lambda_k (z-b) dz, \quad a_k = \frac{2}{l-b} \int_b^l f_3(z) \sin \lambda_k (z-b) dz \quad (42)$$

$$\Delta_k(x, y) = I_2(\lambda_k x) K_2(\lambda_k y) - I_2(\lambda_k y) K_2(\lambda_k x) \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1 + \cos^2 \beta}{\cos \beta} \\ f_k &= \frac{1}{b^{k+4}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 (r^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} P'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) dr \\ g_k &= \frac{1}{b^{k+4}} \int_{r_1}^{R_1} r^3 (r^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} Q'_{k+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) dr \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} M_k &= A_0 \int_{r_1}^{R_1} \frac{r^2 W_1(\mu_k r) dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) W_1(\mu_k r) dr + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s}{2}} Q'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) W_1(\mu_k r) dr, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{\mu_k} \left\{ -3A_0 b \int_{r_1}^{R_1} \frac{r^2 W_1(\mu_k r) dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 \left[sb (r^2 + b^2)^{\frac{s-2}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s-3}{2}} P'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \right] W_1(\mu_k r) dr + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{b^s} \int_{r_1}^{R_1} r^2 \left[sb (r^2 + b^2)^{\frac{s-2}{2}} Q'_{s+1} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r^2 (r^2 + b^2)^{\frac{s-3}{2}} Q_{s+1}^* \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \Big| W_1(\mu_k r) dr - \\
& - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left[A_s \int_{r_1}^{R_1} r I_1(\lambda_s r) W_1(\mu_k r) dr + \right. \\
& \left. + B_s \int_{r_1}^{R_1} r K_1(\lambda_s r) W_1(\mu_k r) dr \right] \Big\}, \quad (46)
\end{aligned}$$

а уравнение равновесия скручивающих моментов будет иметь вид

$$\frac{M_1 + M_2}{2\pi G} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k+3} - a^{k+3}}{b^k} (b_k q_k + p_k c_k) - \frac{2}{G} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{R_1^2 a_k - r_1^2 d_k}{\lambda_k}. \quad (47)$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱՔՐՍԶԱՄՅԱՆ

Կոնական և կոնական մասով գլանաձև ձողերի ոլորումը

Դիտարկվում է կոնական և կոնական մասով դլանաձև սնամեջ ձողերի ոլորման խնդիրը: Ինքնազրկում է, որ ձողը կամ լիսեռ ոլորվում է հիմքերի վրա կիրառված մոմենտներով և կողմնային մակերևույթի վրա կամավոր ձեռով կիրառված ոլորող ուժերով:

Խնդիրը լուծվում է Ա. Ֆեպլի տեղափոխության¹ ֆունկցիայով, որը լիսեռի առանցքային կտրվածքի տիրույթում բավարարում է (1) հավասարմանը: Այդ ֆունկցիան որոշելու համար լիսեռի առանցքային կտրվածքը բաժանվում է երկու պարզագույն տիրույթների:

Այդ տիրույթներից կոնական մասում² ֆունկցիան որոշվում է Լեժանդրի դնդային ֆունկցիաների օղնությամբ: Գլանաձև մասում³ ֆունկցիան որոշվում է եռանկյունաչափական, հիպերբոլիկ և Բեսսելի ֆունկցիաների օղնությամբ:

Խնդրի եզրային պայմանների բավարարման ժամանակ լիսեռի կոնական մասի կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված բեռը ներկայացվում է աստիճանային շարքով: Գլանաձև մասի կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված բեռը ներկայացվում է բաժանկյունաչափական ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. П. Тимошенко, Теория упругости. М., 1937. ² А. Фенпль, Über die Torsion von runden Stäben mit Veränderlichen Durchmesser, Sitzungsberichte Bayerische Akademie der Wissenschaften, München, Bd. 35, 1905, 249—262, Berichtigung 504. ³ Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, Иноиздат, М., 1952. ⁴ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М.—Л., 1951. ⁵ Б. Л. Абрамян, ПММ, т. 22, вып. 5 (1958), 679—683. ⁶ Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Госиноиздат, М., 1953.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной
 цилиндрической панели

(Представлено 25. XI 1959)

1. Рассмотрим пологую цилиндрическую панель, шарнирно опер-
 тую по всему контуру и изготовленную из ортотропного материала.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность
 панели, которая представляется координатами: α — вдоль образующей
 и β — по дуге поперечного сечения, а также радиусом кривизны $R =$
 $= \text{const}$. Координатная ось γ направлена по внешней нормали к сре-
 динной поверхности панели и меняется в пределах $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$

(h — толщина панели).

Пусть в каждой точке панели плоскости упругой симметрии ма-
 териала перпендикулярны к координатным линиям α , β , γ .

Принимаются следующие гипотезы ⁽¹⁾:

(а) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных сре-
 динной поверхности, по сравнению с прочими напряжениями значи-
 тельно малы, поэтому они могут быть пренебрежены;

(б) расстояния по нормали (γ) между двумя точками панели по-
 сле деформации остаются неизменными;

(в) для касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеем:

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \varphi(\alpha, \beta), \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \psi(\alpha, \beta), \quad (1.1)$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ — произвольные искомые функции.

В работе ⁽²⁾ при рассмотрении равновесия пологих ортотропных
 оболочек получена разрешающая система четырех дифференциальных
 уравнений относительно четырех искомых функций: функции напря-
 жений $F(\alpha, \beta)$, нормального перемещения $w(\alpha, \beta)$ и функций $\varphi(\alpha, \beta)$,
 $\psi(\alpha, \beta)$.

Указанную систему в случае круговой цилиндрической оболочки
 легко можно привести к следующей системе двух дифференциаль-
 ных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} L_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} L_{22} - \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi - Z = 0 \\
& \frac{1}{\Omega B_{66}} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) F - \frac{h}{R} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right. \\
& \left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $F(\alpha, \beta)$, $\Phi(\alpha, \beta)$ — искомые функции, через которые внутренние мембранные силы (T_1, T_2, S) , нормальное перемещение (w) и функции φ, ψ представляются следующим образом:

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad S = - \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}; \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
w &= \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi, \\
\varphi &= - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} L_{11} + \frac{\partial}{\partial \beta} L_{12} - a_{44} \frac{h^2}{10} \frac{\partial}{\partial \alpha} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi, \\
\psi &= - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} L_{12} + \frac{\partial}{\partial \beta} L_{22} - a_{55} \frac{h^2}{10} \frac{\partial}{\partial \beta} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi;
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Z — интенсивность нормально приложенной поверхностной нагрузки; a_{ik}, B_{ik} — упругие постоянные ⁽³⁾, $\Omega = B_{11} B_{22} - B_{12}^2$,

$$\begin{aligned}
L_{11} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\
L_{12} &= (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\
L_{22} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

В настоящей работе исходной будем считать систему разрешающих уравнений (1.2).

2. Рассмотрим задачу статической устойчивости цилиндрической панели, сжатой вдоль образующих равномерно распределенной нагрузкой, приложенной по торцам и равной P на единицу длины.

В (1.2), полагая ⁽⁴⁾

$$Z = -P \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \tag{2.1}$$

и учитывая (1.4), получим следующую систему уравнений статической устойчивости цилиндрической панели

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} L_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} L_{22} - \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi + P \left[1 - \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (2.2) \\
& \frac{1}{\Omega B_{66}} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) F - \frac{h}{R} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right. \\
& \left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0.
\end{aligned}$$

Полагая

$$F = A \sin \lambda_1 \alpha \sin \lambda_2 \beta \quad (2.3)$$

$$\Phi = B \sin \lambda_1 \alpha \sin \lambda_2 \beta$$

(A, B — некоторые постоянные; $\lambda_1 = m\pi/a$, $\lambda_2 = n\pi/b$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$), a — длина панели, b — длина дуги поперечного сечения панели), удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя значения F и Φ из (2.3) в (2.2), относительно коэффициентов A и B получим однородную систему. Приравнявая нулю определитель этой системы, для критической силы получим:

$$\begin{aligned}
P_{mn}^* = \frac{h^3}{12 \lambda_1^2} \cdot \frac{\lambda_1^2 l_{11} + 2 \lambda_1 \lambda_2 l_{12} + \lambda_2^2 l_{22} + \frac{h^2}{10} (a_{44} \lambda_1^2 + a_{55} \lambda_2^2) (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)}{1 + \frac{h^2}{10} (a_{55} l_{11} + a_{44} l_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)} + \\
+ \frac{h \Omega B_{66}}{R^2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \lambda_1^2 B_{11} + \lambda_2^2 B_{66} \\
l_{12} &= \lambda_1 \lambda_2 (B_{12} + B_{66}) \\
l_{22} &= \lambda_1^2 B_{66} + \lambda_2^2 B_{22}.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

При безграничном возрастании R второй член выражения (2.4) стремится к нулю, и мы получим значение критической силы шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластинки, сжатой по направлению α (5).

Принимая в (2.4) $a_{44} = a_{55} = 0$, получим значение критической силы рассматриваемой задачи, вычисленное по классической теории оболочек.

В случае, когда материал панели представляет собой transversально-изотропное тело и плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной поверхности панели, для упругих постоянных имеем:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad B_{12} = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'},$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями α и γ , β и γ .

Учитывая (2.6), из (2.4) для критической силы получим

$$P_{mn}^* = \frac{D}{\lambda_1^2} \cdot \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{1 + ka^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}, \quad (2.7)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad k = \frac{1}{10} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot \frac{E}{(1 - \mu^2)G'}. \quad (2.8)$$

Из (2.7) при $k = 0$ получается значение критической силы для изотропной панели, полученное на основании классической теории оболочек⁽³⁾. Отметим, что это совпадение результатов вполне естественно, так как классическая теория оболочек не может различать изотропное тело от трансверсально-изотропного тела.

3. Уравнения свободных колебаний ненагруженной панели получим*, полагая⁽⁶⁾ в (1.2)

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где γ_0 — удельный вес материала панели, g — ускорение силы тяжести.

В силу (1.4) и (3.2) из (1.2) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} L_{22} - \frac{h^2}{10} \left(a_{41} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi + \frac{\gamma_0 h}{g} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right. \\ & \left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2) \\ & \frac{1}{\Omega B_{66}} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) F - \frac{h}{R} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right. \\ & \left. + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Принимая

* Здесь и в дальнейшем пренебрегается влияние тангенциальных сил инерции.

$$F = A \sin \lambda_1 x \sin \lambda_2 y \cos \omega t, \quad (3.3)$$

$$\Phi = B \sin \lambda_1 x \sin \lambda_2 y \cos \omega t,$$

где A, B — некоторые постоянные, удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя (3.3) в (3.2) и приравнявая нулю определитель полученной однородной системы, для частот собственных колебаний (ω_{mn}) имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 = \frac{gh^2}{12 \gamma_0} \cdot \frac{\lambda_1^2 l_{11} + 2\lambda_1 \lambda_2 l_{12} + \lambda_2^2 l_{22} + \frac{h^2}{10} (a_{44} \lambda_1^2 + a_{55} \lambda_2^2) (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)}{1 + \frac{h^2}{10} (a_{55} l_{11} + a_{44} l_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)} + \\ + \frac{g \Omega B_{66}}{\gamma_0 R^2} \cdot \frac{\lambda_1^4}{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В случае панели, изготовленной из трансверсально-изотропного материала (см. п. 2), из (3.4) получим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{gD}{\gamma_0 h} \cdot \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{1 + ka^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} + \frac{Eg}{\gamma_0 R^2} \cdot \frac{\lambda_1^4}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}. \quad (3.5)$$

Аналогично задаче статической устойчивости, из (3.4) и (3.5) можно найти формулу для частот собственных колебаний шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластинки (*), а также формулу для частот собственных колебаний трансверсально-изотропной (изотропной) панели, найденной по классической теории оболочек (*).

4. Рассмотрим задачу динамической устойчивости цилиндрической ортотропной панели.

Пусть внешняя нагрузка, равномерно распределенная по торцам панели, меняется периодически во времени:

$$P = P_0 \cos \Omega t.$$

Уравнения динамической устойчивости получим (*), полагая в (1.2)

$$Z = -P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

В силу (1.4) и (4.2) из (1.2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L_{12} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{22} - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi + \left(P \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{55} L_{11} + a_{44} L_{22}) + a_{44} a_{55} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{2 B_{66}} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) F - \frac{h}{R} \left[1 - \frac{h^2}{10} (a_{33} L_{11} + a_{44} L_{22}) + \right. \\ \left. + a_{44} a_{33} \frac{h^4}{100} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} = 0.$$

Принимая

$$F = T_0(t) \sin \lambda_1 x \sin \lambda_2 y, \\ \Phi = T(t) \sin \lambda_1 x \sin \lambda_2 y, \quad (4.4)$$

где T_0 , T — некоторые функции только от времени, удовлетворим условиям шарнирного опирания панели по всему контуру.

Подставляя (4.4) в (4.3), далее исключая $T_0(t)$ и учитывая (2.4), (3.4) и (4.1), для $T(t)$ получим известное уравнение Матье:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega_{mn}^2 (1 - 2\lambda_{mn} \cos \theta t) T = 0, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda_{mn} = P_0 / 2P_{mn}^*$$

Таким образом, определение областей динамической неустойчивости рассматриваемой задачи сводится к нахождению областей неустойчивости решений уравнения Матье, которые хорошо изучены (⁸).

Отметим только, что уравнение (3.5), внешне ничем не отличаюсь от аналогичного уравнения, полученного по классической теории оболочек ($a_{44} = a_{33} = 0$), содержит принципиальное отличие. Отличие это заключается в том, что в ω_{mn} и λ_{mn} содержатся величины, связанные с коэффициентами a_{44} , a_{33} (чего нет в классической теории), в силу которых вся картина динамической устойчивости может измениться как количественно, так и качественно, как это видно на примере пластинки (³).

Институт математики и механики

Академии наук Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ ԵՎ Ա. Ա. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ

Փոփոխությունների օրոգորոպ պահելի կայունության և
անասունների մասին

Հոգաբանության գիտարկում են հարերով հոգաբանություն հենված փոքր կորուսյուն
ունեցող օրոգորոպ պահելի անփական տատանումների և աստիճանի ալ գիշամիկ կայուն
նույն խնդիրները:

Հետազոտությունը հիմքում ընկած են հետևյալ հիպոթեզները:

ա) ասլի միջին մեկերենյութին նորմալ գծային էլեմենտները գեոմետրիայից
հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները:

բ) σ_1 նորմալ լարումները կարող են արհամարհվել մյուս լարումների նկատմամբ:

գ) $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները բոլոր պահելի հաստության փոխվում են տրված
օրենքով (1.1):

(1) Գտագործված է (1) աջիտանքում արված փոքր կտրուկի մասերից մեկը
ներքին համապատասխան համար ստացված չորս համապատասխաններից բաղկացած խ-
անձր. որը բերված է (1.2) երկու համապատասխաններից բաղկացած խանձր: Այսպես
հայտնի հանապարհներով ստացված են ստատիկ կայունության, ստատիկների և զի-
նմիկ կայունության համապատասխանները:

Հստակ է հարեբո՞ւմ ազատ հենված պանելի ստատիկ կայունության խնդիրը. երբ
ևս սեղմված է պանելի ծնիշների ուղղությամբ: Կրիտիկական ուժի համար ստացված է
բանաձև, որից որպես ժամանակի զեպը բերված է արանձնաբաշխվող Նյութից պա-
րամետրի պանելի կրիտիկական ուժի արտահայտությունը:

Հստակ է հարեբո՞ւմ ազատ հենված շրեռնաժողոված պանելի ազատ ստատիկների
խնդիրը: Ստացված է բանաձև սեփական ստատիկների հանդիմանության համար և
որպես ժամանակի զեպը բերված է արանձնաբաշխվող Նյութից պարամետրի պա-
նելի սեփական ստատիկների հանդիմանության արտահայտությունը:

Հստակ է ազատ հենված պանելի զինմիկ կայունության խնդիրը. երբ նրա վր-
ածնիշի ուղղությամբ ազդող ուժը ժամանակի բնութագրով փոփոխվում է պարբերաբար:
Ցույց է տրվում, որ զիտարկված խնդրի առկայության տիրույթների որոշումը բե-
րվում է Մատյեի համապարժան լուծմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, ПММ, АН СССР, XXII, 2 (1958). ² С. А. Амбарцумян,
Д. В. Пештмалджян, Изв. АН АрмССР, XII, 1 (1959). ³ С. Г. Лежницкий, Теория
упругости анизотропного тела, Гостехиздат, 1950. ⁴ С. П. Тимошенко, Устойчивость
упругих систем, Гостехиздат, 1946. ⁵ С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, Изв. АН
СССР ОТН, 6 (1959). ⁶ А. П. Филиппов, Колебания упругих систем, Изд. АН УССР,
1953. ⁷ В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956.
⁸ Н. В. Мах-Лахлян, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.

ФИЗИКА

Г. С. Саакян

О дисперсионных свойствах среды при очень больших
 плотностях и температурах

Сообщение I. Рассеяние электромагнитных волн электронами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 15.VI 1959)

В работе ⁽¹⁾ было показано, что при определенных физических условиях в диспергирующей среде, с показателем преломления меньше единицы, могут произойти процессы однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар $\gamma \rightarrow e_{+} + e_{-}$. В вакууме эти процессы могут произойти лишь при наличии посторонней частицы. Однако не во всяких средах, где показатель преломления меньше единицы, могут протекать эти процессы. Кроме этого условия необходимо также накладывать определенные ограничения на плотность частиц и на температуру среды. Ограничение на плотность частиц среды непосредственно следует из рассмотрения предела применимости самого понятия показателя преломления. По-видимому о показателе преломления имеет смысл говорить лишь при соблюдении условия

$$l \lesssim l, \quad (1)$$

где l — среднее расстояние между электронами, а λ — длина электромагнитной волны, деленная на 2π . Из условия (1), а также из того факта, что при рождении и аннигиляции электронных пар энергия фотона должна превышать $2mc^2$, где m — масса электрона, следует, что рассмотренное явление может иметь место лишь при достаточно больших плотностях частиц в среде.

$$N \gtrsim 8\lambda_c^{-3} \approx 1,4 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}, \quad (2)$$

где $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ — комптоновская длина волны электрона деленная на 2π .

Такие большие плотности по-видимому существуют во внутренних областях белых ультракарликов.

При таких физических условиях, очевидно, атомы полностью ионизированы, а совокупность электронов представляет собою релятивистский идеальный газ. Средняя кинетическая энергия электронов

при плотностях (2) будет порядка mc^2 и больше, а отношение потенциальной энергии $\frac{ze^2}{r}$ к кинетической cp будет $\frac{ze^2}{rpc} \approx z \frac{e^2}{hc} \ll 1$.

Важно также выяснить, в каком состоянии находится электронный газ: в вырожденном или невырожденном. Температура вырождения для релятивистского газа определяется формулой

$$\chi T_0 = \pi hc N^{1/3} - mc^2, \quad (3)$$

где χ — постоянная Больцмана. Из (2) и (3) следует, что для интересующих нас плотностей

$$T_0 \gtrsim 4 \cdot 10^{10}. \quad (4)$$

Если в соответствующих областях звезд $T \ll T_0$, то мы будем иметь дело с вырожденным электронным газом, наоборот, при температурах, превышающих T_0 , электронный газ не будет вырожденным. Какой именно случай на самом деле имеет место — трудно сказать. Возможно, что в природе встречаются белые карлики того и другого типа. Эти два случая приводят к совершенно разным физическим результатам. В первом случае, при достаточно высоких плотностях материи, мы будем иметь дело со средой, дисперсионные свойства которой, при весьма высоких частотах, определяются не электронами, а нейтронами. В такой среде показатель преломления больше единицы, и поэтому процесс $\gamma \rightleftharpoons e_+ + e_-$ запрещен. Наоборот, в ней будет иметь место другое явление, а именно заряженные частицы, движущиеся со скоростью, превышающей фазовую скорость света, будут испускать жесткое черенковское излучение с энергией квантов до 150 Мэв. В случае же отсутствия вырождения дисперсионные свойства среды всегда определяются электронами. В такой среде при плотностях (2) процесс $\gamma \rightleftharpoons e_+ + e_-$ разрешен, а о черенковском излучении не может быть и речи.

Ниже подробно обсуждаются эти два крайних случая. Сперва рассмотрим второй случай, когда электронный газ не вырожден. В этом случае очевидно, что дисперсия волн всегда будет определяться электронами.

Как известно, при частотах выше атомных частот показатель преломления среды определяется формулой

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (5)$$

Однако в нашем случае нельзя пользоваться этой формулой, так как при ее выводе предположено, что электроны нерелятивистские, тогда как в данном случае они являются релятивистскими.

Не трудно видеть, что при плотностях (2) электроны являются квазиклассическими частицами. Действительно, учитывая (1), получаем

$$\frac{mhF}{p^3} \sim \frac{me^2}{h^2} z^{1/3} l < \frac{e^2}{hc} z^{1/3}, \quad (6)$$

где $p \sim h/l$ — средний импульс электрона и $F = \frac{ze^2}{r^2} \approx z^{1/3} \frac{e^2}{l^2}$ — сила, действующая на электрон. Итак, при вычислении показателя преломления, мы можем пользоваться методами классической физики. Этот метод можно применить и при плотностях, меньших чем 10^{32} см^{-3} . Из (6) видно, что для выполнения условия квазиклассичности необходимо, чтобы среднее расстояние между частицами удовлетворяло соотношению $l \ll 0,5 \cdot 10^{-8} \cdot z^{-1/3}$, т. е. была бы намного меньше фермиевского радиуса атома.

Напишем уравнение Гамильтона—Якоби для электрона, находящегося в поле электромагнитной волны

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{ze^2}{r} \right)^2 + m^2 c^2 = 0, \quad (7)$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ — вектор-потенциал поля

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (8)$$

Мы видели, что средняя кулоновская энергия взаимодействия значительно меньше средней кинетической энергии электронов, поэтому в (7)

мы можем пренебречь членом $\frac{ze^2}{r}$.

Решение уравнения (7) будем искать в следующем виде (2)

$$S = \vec{a} \cdot \vec{r} + bt + f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (9)$$

где $\vec{a}$ и b — постоянные, а f — неизвестная функция. Подставив (9) в (7) мы получаем уравнение, содержащее первую степень f' . Интегрируя это уравнение, мы сразу находим функцию f . В результате для S получается

$$S = \vec{a} \cdot \vec{r} + bt + \frac{1}{2} \left[(\vec{a} \cdot \vec{k}) + \frac{m}{c^2} b \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{b^2}{c^2} - m^2 c^2 - a^2 \right) (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \frac{2e}{c} i (\vec{a} \cdot \vec{A}) + i \frac{e^2}{2c^2} A^2 \right\}. \quad (10)$$

Дальше мы будем опускать члены пропорциональные A^2 , считая интенсивность излучения достаточно малой.

Теперь мы можем вычислить импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nabla S - \frac{e}{c} \vec{A} =$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} \left[(\vec{a} \vec{k}) + \frac{\omega}{c^2} b \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{b^2}{c^2} - m^2 c^2 - a^2 \right) \vec{k} + \right. \\ \left. + \frac{2e}{c} (\vec{a} \vec{A}) \vec{k} \right\} - \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (11)$$

Подставляя здесь $A=0$, мы находим импульс и скорость электрона в отсутствии поля

$$\vec{p}_0 = \frac{m \vec{v}_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \vec{a} + \left(\frac{b^2}{c^2} - m^2 c^2 - a^2 \right) \left[(\vec{a} \vec{k}) + b \frac{\omega}{c^2} \right]^{-1}.$$

Однако по своему физическому смыслу p_0 не должен содержать ω и k , а это будет иметь место, если мы предположим

$$\vec{a} = \vec{p}_0 \quad \text{и} \quad b = E_0, \quad (12)$$

где $E_0 = c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$ — начальная энергия электрона. Подставляя (12) в (11), получаем

$$\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \vec{p}_0 + \frac{e}{c (\vec{p}_0 \vec{k}) + k E_0} (\vec{p}_0 \vec{A}) \vec{k} - \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (13)$$

Нам необходимо определить добавочную скорость, приобретаемую электроном в поле электромагнитной волны $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$. С этой целью $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ разложим в ряд по степеням v' , и так как эта скорость пропорциональна вектору-потенциалу $\vec{A}$, то мы должны ограничиться членами, содержащими не выше первой степени v' . В результате получаем

$$\frac{m \vec{v}_0 (\vec{v}_0 \vec{v}')}{c^2 (1 - \beta_0^2)^{3/2}} + \frac{m \vec{v}'}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \frac{e (\vec{p}_0 \vec{A}) \vec{k}}{c (\vec{p}_0 \vec{k}) + k E_0} - \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Решая это уравнение относительно $\vec{v}'$, находим

$$\vec{v}' = -\frac{ec}{E_0} \vec{A} + \frac{ec^2 (\vec{p}_0 \vec{A}) \vec{k}}{E_0 [c (\vec{p}_0 \vec{k}) + k E_0]} - \frac{ec^4 (\vec{p}_0 \vec{k}) (\vec{p}_0 \vec{A})}{E_0^3 [c (\vec{p}_0 \vec{k}) + k E_0]} \vec{p}_0 + \\ + \frac{ec^3 (\vec{p}_0 \vec{A})}{E_0^3} \vec{p}_0. \quad (14)$$

В (14) мы можем вектор-потенциал заменить через напряженность электрического поля

$$\vec{A} = -i \frac{c}{\omega} \vec{E}. \quad (15)$$

Теперь мы можем определить ток, индуцированный внешним электромагнитным полем

$$\vec{j}' = e \int \vec{v}' f(p_0) dp_0 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (16)$$

где $f(p) dp \sin \theta d\theta d\varphi$ — число электронов в единице объема с импульсами в интервале $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$. Далее мы не будем больше писать индекс нуль при импульсе и энергии. Направление волнового вектора примем в качестве полярной оси; соответственно оси x -ов и y -ов направим вдоль векторов электрического и магнитного полей. Следовательно, угол φ в плоскости (xy) отсчитывается от направления вектора $\vec{E}$.

Из (14) и (16) видно, что $j'_y = j'_z = 0$, т. е. направление $\vec{j}'$ совпадает с направлением вектор-потенциала. Подставив (14) в (16) и проведя интегрирование по углам (по начальным направлениям движения электронов) и учитывая (15), получаем

$$\vec{j}' = i \frac{2\pi e^2 \cdot c^2}{\omega} \vec{E} \int \left(1 + \frac{m^2 c^3}{Ep} \ln \frac{E + cp}{mc^2} \right) \frac{f(p)}{E} dp. \quad (17)$$

Далее, мы должны написать микроскопические и макроскопические уравнения поля

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}' = -\frac{i\omega}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}',$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} n^2 \vec{E}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) находим

$$n^2 = 1 - \frac{8\pi^2 e^2 c^2}{\omega^2} \int \left(1 + \frac{m^2 c^3}{Ep} \ln \frac{E + cp}{mc^2} \right) \frac{f(p) dp}{E}, \quad (19)$$

где интегрирование должно производиться в случае вырождения в пределах от нуля до граничного импульса Ферми p_f , а в случае отсутствия вырождения, в пределах от нуля до ∞ .

Сначала рассмотрим случай вырождения. В этом случае

$$f(p) = \frac{p^2}{4\pi^3 h^3}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), интегрируя в пределах от нуля до p_f , где

$$p_f = h (3\pi^2 N)^{1/3}, \quad (21)$$

находим, при импульсах $p_f \ll mc$, известную формулу

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2},$$

а при импульсах $p_f \gtrsim mc$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (22)$$

где

$$\omega_0^2 \approx \frac{3\pi N e^2 c}{p_f} \approx \frac{3c^2}{137} N^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, в релятивистском случае постоянная пропорциональна не N , а $N^{1/2}$.

Теперь перейдем к рассмотрению случая отсутствия вырождения электронного газа. В этом случае имеем ⁽³⁾

$$f(p) = \frac{N\varphi(T)}{4\pi} \cdot \frac{p^2}{(mc)^3} e^{-\frac{E}{T}}, \quad (24)$$

где $E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$ и

$$\varphi(T) = \left[\frac{2}{u^2} K_1(u) + \frac{1}{u} K_0(u) \right]^{-1}. \quad (25)$$

K_1 и K_0 — функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента, и $u = \frac{mc^2}{T}$.

При $u \gg 1$; $K_1(u) \approx K_0(u) \approx \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} e^{-u}$ и следовательно $\varphi \approx 4\pi (mc)^3 (2\pi m T)^{-3/2} e^u$. А при $u \ll 1$, $K_1(u) \approx \frac{1}{u}$, $K_0(u) \approx \ln \frac{2}{\gamma u}$, где $\ln \gamma = 0,577 \dots$, и следовательно $\varphi \approx \frac{1}{2} u^3$.

Как и в предыдущем случае, после подстановки (24) в (19) получается интеграл, который невозможно интегрировать точно. При $u \lesssim 1$ приблизительно имеем

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{4,8 \pi e^2}{m\omega^2} \cdot \frac{N\varphi}{u} e^{-u} \quad (26)$$

При $u \gg 1$, формула (26) становится неверной и не дает правильного перехода к известной формуле. Как мы видим, в отсутствии вырождения показатель преломления зависит от температуры.

Очевидно, что в этом случае в области применимости понятия диэлектрической постоянной среды, дисперсия волн всегда определяется электронами. Следовательно при плотностях электронов $N_e \gtrsim 1,4 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}$ процессы однофотонной аннигиляции и рождения электронных пар могут идти с участием среды.

Теперь рассмотрим второй предельный случай, когда электронный газ полностью вырожден. При этом возможны еще два случая: первый—когда нейтроны невырождены, и второй случай, когда и нейтронный газ также вырожден.

При таких физических условиях (электроны вырождены, плотности большие) оказывается термодинамически более выгодным реакция, когда ядро захватывает электрон и одновременно испускает нейтрино ⁽³⁾. При рассмотренных нами плотностях благодаря этой реакции число протонов в ядре сильно уменьшается и в конце концов ядра становятся неустойчивыми и распадаются. В результате мы будем иметь дело с идеальным газом, состоящим из электронов, протонов и нейтронов. Число частиц разных сортов определяется из условия равновесия, т. е. из условия минимума термодинамического потенциала при постоянном давлении и температуре. Для рассматриваемой реакции $e^- + p \rightleftharpoons n$, где e^- , p и n — соответственно означают электрон, протон и нейтрон, условие равновесия гласит,

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n, \quad (27)$$

где μ_e , μ_p и μ_n — химические потенциалы соответствующих частиц. Химический потенциал электронов равен

$$\mu_e = \varepsilon_f = c \sqrt{m^2 c^2 + p_f^2} \approx \pi c h N_e^{1/2}, \quad (28)$$

где E_f — граничная энергия Ферми. Если нуклонный газ не вырожден, то имеем ⁽³⁾

$$\mu_p = \chi T \ln \left[\frac{N_p}{2} \left(\frac{2\pi h^2}{M\chi T} \right)^{3/2} \right], \quad \mu_n = \chi T \ln \left[\frac{N_n}{2} \left(\frac{2\pi h^2}{M\chi T} \right)^{3/2} \right]. \quad (29)$$

Подставляя значения химических потенциалов в (27) и учитывая очевидное равенство $N_p = N_e$, находим

$$N_n = N_e \exp \left(\frac{\pi c h N_e^{1/2}}{\chi T} \right). \quad (30)$$

Поскольку электронный газ считается полностью вырожденным, то $\chi T \ll \pi c h N_e^{1/2}$, и следовательно $N_n \gg N_e$.

А теперь допустим, что при рассматриваемых плотностях температуры настолько низкие, что электронный, нейтронный и протонный газы полностью вырождены. Тогда имеем

$$\mu_p = M c^2 + \frac{h^2}{2M} (3\pi^2 N_e)^{2/3},$$

$$\mu_n = M_n c^2 + \frac{h^2}{2M_n} (3\pi^2 N_n)^{2/3}, \quad (31)$$

где $M_n = M + \alpha m$ — масса нейтрона, а $\alpha \approx 2,54$ — разность масс нейтрона и протона в единицах массы электрона. Здесь мы считаем про-

тоны и нейтроны нерелятивистскими частицами, что имеет место при плотностях материи вплоть до порядка ядерных плотностей. Подставив (28) и (31) в условие равновесия (27), находим

$$N_e = \frac{N_0}{x^3} \left\{ \left[1 + x \frac{\alpha}{\pi} + x^2 \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^{2/3} \right]^{3/2} - 1 \right\}^3, \quad (32)$$

где введены обозначения $N_0 = 8\lambda_p^{-3} = 1,4 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}$, и $x = \frac{2\pi m}{M}$.

Если ограничиться рассмотрением плотностей порядка ядерных и меньше $N_n \lesssim 10^{38} \text{ см}^{-3}$, то (32) можно упростить

$$N_e \approx \frac{N_0}{8} \left[\frac{\alpha}{\pi} + x \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^{2/3} \right]^3, \quad (32')$$

Чтобы в этом случае выяснить возможность или невозможность разыгрывания процесса $\gamma \rightarrow e_+ + e_-$ с участием среды, для этого сперва необходимо выяснить роль нуклонов в рассеянии электромагнитных волн. Изучению этого вопроса будет посвящено второе сообщение.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Դիսպերսիայի օրենքը ռազմած խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում

Հաղորդում է: էլեկտրամագնիսական ալիքների ցրումը էլեկտրոններով

Առաջադրվում ուսումնասիրված է միջավայրի դիսպերսիոն հատկությունների ռազմած խտությունների և ջերմաստիճանների դեպքում՝ մոտավորապես այնպիսի ֆիզիկական պայմաններում, ինչպիսին հնարավոր է, որ դոմինանտ ռոնեն ոչ նորմալ աստղերում (ուլտրաթվուկներ): Խտությունները ենթադրվում են այնքան մեծ, որ միջավայրի բոլոր աստիճանները իոնացված են:

Այն դեպքում, երբ էլեկտրոնային դադր ալիքներված է, միջավայրի բեկման ցուցիչը որոշվում է բանաձև (22)-ով, իսկ ալիքների մանրացման դեպքում բանաձև (26)-ով:

Երբ էլեկտրոնային դադր ուժեղ ալիքներված է, ապա բավականին մեծ խտությունների դեպքում, էներգետիկորեն ավելի ձեռնտու է դառնում $P + e_- \rightarrow N + \gamma$ սեպիան, որտեղ P , e_- , N և γ համապատասխանաբար նշանակում են սրտոն, էլեկտրոն, նեյտրոն և նեյտրինո: Հաշվված է էլեկտրոնների խտությունը: Նեյտրոնների և էլեկտրոնների խտությունները, նույնիսկ այն դեպքում, երբ ալիքների մանրացման դեպքում, իրար հետ կապված են բանաձև (30)-ով, իսկ ուժեղ ալիքների դեպքում բանաձև (32)-ով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. С. Саакян, ДАН АрмССР, 29, 23, 1959. ² Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1948. ³ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., 1951.

Л. В. Мирзоян

Величина постоянной Оорта A и скорость движения Солнца по $O-B0$ звездам

[Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 20. X 1959]

В статье ⁽¹⁾, посвященной K -эффекту, в движениях горячих звезд были обсуждены некоторые результаты анализа лучевых скоростей 330 звезд спектральных классов $O-B0.5$ до 10-й величины.

В основе этого анализа лежала общеизвестная формула

$$V_r = -V_{\odot} \cos \lambda + A \cdot \bar{r} \sin 2(l-l_0) \cos^2 b + K,$$
 (1)

где обозначения — общепринятые.

Использованный материал подробно описан ⁽¹⁾. Он был разбит на семь групп по фотометрическим расстояниям звезд, причем с целью исследования зависимости K -эффекта от расстояния для каждой из групп отдельно были получены решения систем уравнений вида (1).

Решения этих систем уравнений способом наименьших квадратов одновременно давали скорость движения Солнца относительно центра звезд каждой группы и произведение постоянной Оорта- A на среднее расстояние звезд этой группы.

В настоящей заметке рассматриваются эти результаты. Из них определенный интерес представляют данные о величине постоянной Оорта, в связи с тем, что в последнее время в литературе появился ряд работ ⁽²⁻⁴⁾, в которых для этой постоянной получены значения, существенно отличающиеся от значений, принятых до сих пор ^(5,6).

В нижеследующей таблице представлены упомянутые результаты.

Таблица 1

Скорость движения Солнца и постоянная Оорта A (ошибки вероятные)

Группа (r в пс)	n	$\bar{r}$ (кпс)	$V_{\odot}$ (км/сек)	$A \cdot \bar{r}$ (км/сек)	A (км/сек/кпс)
0—600	33	0.41	20.2 ± 2.1	3.1 ± 2.1	7.7 ± 5.1
600—1000	47	0.83	12.6 ± 2.1	10.3 ± 2.1	12.4 ± 2.4
1000—1300	42	1.15	24.4 ± 3.1	15.2 ± 3.4	13.2 ± 2.9
1300—1600	53	1.44	18.7 ± 2.4	16.1 ± 2.6	11.2 ± 1.8
1600—2000	56	1.88	16.3 ± 2.7	21.9 ± 3.0	11.6 ± 1.6
2000—2500	46	2.25	11.9 ± 2.6	27.4 ± 2.5	12.2 ± 1.1
>2500	53	3.34	17.8 ± 2.5	29.3 ± 2.3	8.8 ± 0.7
Среднее	—	1.73	16.9 ± 0.9	—	11.1 ± 0.8

В первых трех столбцах этой таблицы для каждой группы отдельно даются: пределы расстояний звезд, число звезд и среднее расстояние. В четвертом и пятом столбцах приведены скорость движения Солнца относительно центроидов групп и произведение $A \cdot r$. Наконец в последнем столбце дается величина постоянной A по данным третьего и пятого столбцов. В последней строке таблицы приводятся взвешенные средние значения соответствующих величин.

Согласно данным табл. 1 скорость движения Солнца показывает довольно сильные колебания вокруг среднего значения 16.9 км/сек , заметно меньшего стандартного (20 км/сек) (^{5,6}).

Эти колебания, по-видимому, свидетельствуют о наличии в скоростях рассматриваемых звезд составляющей, обусловленной движениями внутри спиральных рукавов Галактики. При этом величина этой составляющей должна быть различной для центроидов звездных групп, представленных в табл. 1, т. е., для различных расстояний от Солнца. В этом отношении показательно, что когда вся совокупность звезд, лежащих в основе этой таблицы, была разделена на три группы уже по другому параметру — видимым величинам: ярче 6^m0 , от 6^m0 до 8^m0 и наконец от 8^m0 до 10^m0 , то вследствие сглаживания последствий упомянутого эффекта для скорости движения Солнца были получены следующие, почти совпадающие значения: 16.5 , 16.0 и 15.9 км/сек .

Величина постоянной Оорта для всех групп, за исключением ближайшей и наиболее далекой, почти одинакова. Среднее взвешенное этой величины равно 11.1 км/сек/кпс для всех групп и 12.2 км/сек/кпс , если исключить первую и последнюю группы. Оба эти значения сильно отличаются от общепринятых (^{5,6}) и близки к результатам работ (²⁻⁴). В табл. 2 приводится сводка всех новых результатов.

Таблица 2

Величина постоянной Оорта A (ошибки стандартные)

Источник	A (км/сек/кпс)	Материал
Уивер (²)	10.8 ± 1.8	79 цефеид
Уивер (²)	13.2 ± 1.8	187 В-звезд
Уивер (²)	11.5 ± 1.5	Среднее по цефеидам и В-звездам
Банг, Код, Уитфорд (⁴)	11.5 ± 1.5	Цефеиды и В-звезды
Настоящая работа	11.1 ± 1.2	330 O—B0.5 звезд
	12.2 ± 1.3	244

К этим результатам примыкает также величина, выведенная Мором и Майером (⁷) по OB-звездам и O-ассоциациям для окрестностей Солнца: 8.0 км/сек/кпс .

Результаты, полученные различными методами и представленные в табл. 2, показывают хорошее согласие между собою, однако они значительно отличаются от общепринятых значений.

Возможной причиной такого расхождения может быть различие шкал расстояний, использованных в этих и ранних работах, поскольку при любом методе определения постоянной Оорта A требуется знание точных расстояний звезд. С другой стороны, несмотря на различие методов, примененных в работах ⁽²⁻⁴⁾ и нашей, они привели к сходным результатам. Поэтому следует считать, что как раз принятая шкала расстояний, основанная для ранних звезд на абсолютных величинах системы МК, и общая для последних работ, приводит к наблюдаемому отклонению значений постоянной Оорта от общепринятых.

Если допустить, что величина постоянной Оорта верно определена в работах, представленных в ^(5,6), то следует считать, что результаты, представленные в табл. 2, искажены вследствие того, что МК-система дает завышенные абсолютные величины для ранних звезд. В работе Фиста и Таккери ^{(8)*}, исходя из величины постоянной Оорта 17.5 км/сек/кпс и приближения Оорта, показано, что абсолютные величины О - В0 звезд в системе МК в среднем завышены, причем почти на 2^m0 для О9-звезд классов светимости II и III. В работе же Петри, Катла и Андрюса ⁽⁹⁾ отмечается, что абсолютные величины О - В звезд в системе МК на 0^m7 ярче Викторинских, основанных на интенсивностях водородных линий в спектрах.

Таким образом, следует считать, что различия в значениях величины постоянной Оорта на самом деле обусловлены различием использованных шкал расстояний в упомянутых работах.

Однако это различие в значениях постоянной Оорта, по-видимому, скорее всего свидетельствует в пользу шкалы абсолютных величин системы МК, то есть в пользу новых определений этой постоянной. Действительно, прежде всего следует иметь в виду, что в работах ⁽²⁾ и ⁽⁴⁾ при выводе величины этой постоянной наряду с ранними звездами были использованы цефеиды, расстояния которых не зависят от указанной неопределенности в системе абсолютных величин МК.

Затем, некоторые результаты последних лет, по-видимому, свидетельствуют против представления о том, что абсолютные величины О - В0 звезд в системе МК завышены *в среднем*. Здесь имеется в виду, во-первых, работа Сандиджа ⁽¹⁰⁾, где показано, что во внешних спиральных галактиках встречаются голубые звезды с абсолютной величиной — 8^m0 — 9^m0. Голубые звезды очень высокой светимости ($M = -7^m0 - -8^m0$) открыты также в Магеллановых облаках ⁽¹¹⁾. Было бы естественным допустить существование таких звезд также в нашей Галактике. Прямое подтверждение такого допущения содержится в последней работе Кода и Хаук ⁽¹²⁾.

* В этой работе скорость движения Солнца принята равной 20 км/сек.

В свете изложенных результатов предположение о том, что система МК дает завышенные абсолютные величины для О - В0 звезд, в среднем, представляется мало вероятным.

Поэтому следует, по-видимому, отдать предпочтение шкале абсолютных величин МК и следовательно также новым определениям постоянной Оорта А. Если это так, то величина постоянной Оорта, возможно, до сих пор была значительно завышена.

Если же придерживаться другой возможности и считать, что абсолютные величины О-В0.5 звезд в системе МК действительно нуждаются в исправлении, то для приведения полученной величины постоянной Оорта А в согласие с общепринятым ее значением $[20 \text{ км/сек} / \text{кпс}]$ требуется ввести в абсолютные величины указанных звезд поправку равную, в среднем, $\Delta M = 1^m 2$.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ՍԻՐՁՈՅԱՆ

Օորտի А հաստատունի մեծությունը և Արեգակի շարժման արագությունը ըստ О-В0 աստղերի

О-В0 դասերի 330 աստղերի տեսադժային արագությունների վերլուծությունից ստացված է Գալակտիկայի պտտման Օորտի А հաստատունը և Արեգակի շարժման արագությունը՝ հեռավորության վեց տարբեր ինտերվալների համար (աղյուսակ 1)։

Այդ արդյունքներից հետևում է՝ որ Արեգակի շարժման արագությունը զգալիորեն տարբեր է՝ տարբեր ինտերվալների համար, իսկ բոլոր խմբերի համար միջին արագությունը 16.9 կմ/վրկ ։ Փոքր է հայտնի ստանդարտ մեծությունից (20 կմ/վրկ)։ Չգալի շեղումները՝ միջին արժեքից, թերևս, վկայում են այն մասին, որ քննարկվող աստղերի արագություններում առկա է Գալակտիկայի սպիրալաձև թևերում տեղի ունեցող շարժումներով պայմանավորված մի բաղադրիչ։ Այդ հաճանական բացատրության օգտին է խոսում այն փաստը, որ օգտագործված բոլոր աստղերի բաժանումը երեք խմբի ըստ տեսանելի մեծության՝ $6^m 0$ - ից պայծառ, $6^m 0$ — $8^m 0$ և $8^m 0$ — $10^m 0$, երբ հիշյալ եֆեկտը հարթվում է, հանդեպել է Արեգակի արագության զրեթև համընկնող արժեքների՝ 16.5, 16.0 և 15.9 կմ/վրկ։

Օորտի А հաստատունի համար ստացված մեծությունները՝ բոլոր խմբերի համար (աղյուսակ 1) իրար շատ մոտ են (միջինը $11.1 \text{ կմ/վրկ/կիլոպարսեկ}$) և խիստ տարբերվում են նրա հանրահայտ մեծությունից ($20 \text{ կմ/վրկ/կիլոպարսեկ}$)։ Մակայն նրանք զրեթև համընկնում են վերջին տարիներս մի շարք հեղինակների կողմից ստացված արդյունքների հետ (աղյուսակ 2)։ Հանրահայտ մեծությունից դիտվող շեղումներն, այս դեպքում, պայմանավորված են հեռավորությունների օգտագործված սխառնումների տարբերությամբ։ Մերված են փաստարկներ նոր արդյունքների օգտին, այդ տեսակետից՝ Հակոբակի դեպքում, ելնելով А հաստատունի հանրահայտ մեծությունից պետք է ընդունել, որ О - В0 աստղերի բացարձակ մեծությունները Մորգան — Կենանի սխեմայում դերահանադատված են և անհրաժեշտ շտկումը կազմում է միջին հասցիով $1^m 2$ ։

- ¹ Л. В. Мирзоян, Известия АН Армянской ССР (серия физ.-мат. наук), 11, № 5, 1958.
- ² Г. Уивер, А. J. 60, 201, 1955.
- ³ Г. Уивер, А. J. 60, 208, 1955.
- ⁴ Дж. Банг, А. Код и А. Уитфорд, Sky and Telescope, 16, 521, 1957.
- ⁵ П. П. Паренаго, Курс звездной астрономии, М., 1954, стр. 157.
- ⁶ R. J. Trumpler and H. F. Weaver, Statistical Astronomy, 1953, p. 577.
- ⁷ И. Мор и П. Майер, VAS, 8, 142, 1957.
- ⁸ М. Фист и А. Таккери, MN, 118, 125, 1959.
- ⁹ Р. Петри, П. Катл и Д. Андрус, А. J., 61, 289, 1956.
- ¹⁰ А. Сандидж, Ap. J., 127, 513, 1958.
- ¹¹ А. Код и Т. Хаук, А. J., 61, 173, 1956.
- ¹² А. Код и Т. Хаук, PASP, 70, 261, 1958.

АГРОХИМИЯ

А. Ш. Галстян

Об активности ферментов в солончаках

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 4. VIII 1959)

Ферментативная активность солончаковых почв почти не изучена. Известно, что высокое содержание солей в почве создает неблагоприятную среду для развития культурных растений. Изучение направленности и интенсивности биохимических процессов с помощью определения ферментативной активности солончаков может представлять определенный интерес в связи с мелиорацией этих почв.

В этом сообщении приводятся некоторые данные об активности карбогидраз, уреазы, каталазы и интенсивности дыхания солончаков. Исследование проводилось на солончаках Приараксинской низменности (Октемберянский район). Эти почвы характеризуются бесструктурностью и тяжелым механическим составом. В изученных солончаках содержание органических веществ очень мало. В солончаках, где растительный покров почти отсутствует, основным источником продуцирования ферментов являются микроорганизмы.

Образцы почвы после высушивания при комнатной температуре до воздушно-сухого состояния сразу поступали в анализ. Активность ферментов определялась в воздушно-сухих и стерилизованных образцах, последние служили в качестве контролей. При определении активности уреазы, после инкубации почвы с мочевиной, аммиак определялся перегонкой. Каталаза определялась газометрически. Активность карбогидраз определялась учетом редуцирующих сахаров по Бертрону. Следует упомянуть, что высокое содержание солей, в частности соды, в засоленных почвах сильно диспергирует коллоиды, которые, набухая, затрудняют процесс фильтрования. Поэтому при определении редуцирующих сахаров после инкубации почвы с субстратом, кроме фильтрационного способа, мы пользовались также декантацией. Дыхание определялось в колбе с хлоркальциевой трубкой ⁽¹⁾.

Результаты определения сравнительной активности ферментов и интенсивность дыхания пухлого сульфатно-содового хлоридно-натриевого солончака приведены в табл. 1.

Таблица 1

Активность ферментов и интенсивность дыхания пухлого солончака 21. V 1958 г.

Разрез 25. Горизонты в см	Уреаза, мг NH ₃ на 1 г почвы за сутки	Каталаза, O ₂ в см ³ на 1 г почвы за мин.	Инвертаза, мг глюкозы на 1 г почвы за сутки	Амилаза, мг мальтозы на 1 г почвы за сутки	β-глюкози- даза, мг глюкозы на 1 г почвы за сутки	Дыхание, мг CO ₂ на 1 г поч- вы за час
0—25	0,54	1.8	0.0	0.0	0.0	18,7
25—45	0,63	4.9	0.0	0.0	0.0	20,3
45—70	0,06	3.5	0.0	0.0	0.0	18,7
70—90	0,03	3.3	0.0	0.0	0.0	12,1
95—120	0,0	0.3	0.0	0.0	0.0	9,9
120—145	0,0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.5

В условиях засоленных почв не все продуцированные микрофлорой ферменты сохраняют свою активность. Солончаки своей повышенной щелочной реакцией (в частности содовые, характеризующиеся $pH = 10$ и больше) и высоким содержанием солей (²) полностью инактивируют карбогидразы, оптимальный pH которых слабокислый. Поэтому активность инвертазы, амилазы и β-глюкозидазы в солончаках не обнаруживается. Активность уреазы подавлена. Несмотря на весьма неблагоприятные условия, в солончаках обнаруживается сравнительно высокая активность каталазы. Причем, в верхнем горизонте, где общее содержание солей доходит до 1—3%, активность каталазы низкая, а в ряде случаев не обнаруживается. Здесь высокая засоленность подавляет действие каталазы. Активность каталазы значительно возрастает в подпахотном слое, затем по профилю она постепенно падает (несмотря на снижение содержания солей — 0,2 — 0,3% в нижних горизонтах). Такая же закономерность наблюдается и в отношении дыхания почвы. Снижение интенсивности дыхания и активности каталазы связано с уменьшением количества микроорганизмов по профилю.

Исследования показали, что в корковом и мокром солончаках также не обнаруживается активности карбогидраз. Мокрые солончаки имеют более бедное и однородное микробное население по сравнению с пухлыми и корковыми солончаками (³). Это обстоятельство отражается на активности каталазы, уреазы и интенсивности дыхания почвы (табл. 2). В мокром солончаке активность каталазы, уреазы и интенсивность дыхания, по сравнению с пухлыми и корковыми солончаками, сравнительно низкая. Падение активности каталазы и уреазы наблюдается с верхнего горизонта.

В исследованных солончаках развиваются галофиты: камфоросма и солянки. Интересно было выяснить биологическую активность ризосферы галофитов. Поэтому из ризосферы камфоросмы были взяты образцы для исследования. Выяснилось, что даже в ризосфере камфоросмы активность карбогидраз не обнаруживается. Интенсивность дыхания и активность каталазы в ризосфере галофита значительно выше, чем вне ризосферы.

Таблица 2

Активность ферментов и интенсивность дыхания мокрого солончака (сульфатно-хлоридный натриевый солончак) 20 VI 1958 г.

Разрез 27 Горизонты в см	Каталаза, О, в см ³ на 1 г почвы за мин.	Уреаза, мг NH ₃ на 1 г почвы за сутки	Инвертаза, мг глюкозы на 1 г почвы за сутки	Амилаза, мг мальтозы на 1 г почвы за сутки	β-глюкози- даза, мг глюкозы на 1 г почвы за сутки	Дыхание мг СО ₂ на 100 г почвы за час
0—25	0,7	0,42	0,0	0,0	0,0	18,2
25—50	0,6	0,14	0,0	0,0	0,0	7,7
50—100	0,4	0,14	0,0	0,0	0,0	3,3

На основании проведенных исследований можно заключить, что гидролитические процессы в почве в условиях высокой засоленности подавлены. Активность инвертазы, амилазы и β-глюкозидазы в солончаках не обнаруживается, а уреаза отличается низкой активностью. В злостных солончаках не обнаруживается также активности каталазы и уреазы. В солончаках с высокой интенсивностью протекают окислительно-восстановительные процессы, что отражается в интенсивности дыхания и разложения перекиси водорода почвой. В пухлом и корковом солончаках биологические процессы интенсивно протекают в подпахотном слое почвы.

Лаборатория агрохимии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Շ. ԳՍԼՍՏՅԱՆ

Ֆերմենտների ակտիվության մասին աղուտներում

Աղուտային հողերի ֆերմենտների ակտիվությունը համարյա չի ուսումնասիրված: Այս աշխատության մեջ բերվում են մի քանի տվյալներ հեղեղակայանի շրջանի աղուտային հողերի ֆերմենտային ակտիվության և շնչառության մասին: Ուսումնասիրվել են 3 տեսակի աղուտներ՝ փափրիկ, թաց և կեղևային:

Պարզվել է, որ բոլոր տեսակի աղուտներում կարբոհիդրատների ակտիվությունը չի հայտնաբերվում: Ուրեմի ֆերմենտը գործում է աննշան ակտիվությամբ: Ինչ վերաբերում է կատալազային, ապա նրա ակտիվությունը աղուտային հողերում անհամեմատ բարձր է: Ընդ որում նրա ամենաբարձր ակտիվությունը հայտնաբերվում է ենթափարեկաշերտում: Նույն օրինաչափությունը գոյություն ունի նաև շնչառության նկատմամբ: Այստեղ յուրահատուկ պետք է նշել աղուտային հողերի շնչառության ուժգնության մասին: Բոլոր տեսակի կուլտուրապահանջված հողերի հետ համեմատած աղուտների շնչառությունը ամենաբարձրն է: Այս փաստը ասում է այն մասին, որ միայն շնչառությունը չի կարող հանդիսանալ հողի ընդհանուր բիոլոգիական ակտիվության և բերրիության ցուցանիշ:

Թաց աղուտներում կատալազայի և ուրեմի ակտիվությունը համեմատաբար ցածր է: Այսպիսով աղուտային հողերում հիգրոլիտիկ պրոցեսները կամ բացակայում են, կամ թույլ են արտահայտված: Այստեղ առավել զերակշռում են օքսիդացող և վերականգնող պրոցեսները, որը արտահայտվում է ջրածնի պերօքսիդի քայքայման ռեակցիայով և շնչառության ուժգնությամբ: Այսպիսով հողի ֆերմենտների ուսումնասիրությունը նախադրություն է տալիս պարզելու նրա մեջ ընթացող բիոքիմիական պրոցեսների ուղղությունը և ուժգնությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Չ Ի Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. Ш. Галстян, Г. П. Цюпа, Сообщение Лаборатории агрохимии АН Арм. ССР. 2, 1959. ² П. С. Погосов, Известия АН АрмССР (серия биологических наук), т. 8, № 3 (1955). ³ А. К. Паносян, Микробиологическая характеристика солончаков АрмССР в связи с вопросами их освоения, Ереван, 1948.

