

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXIX, № 4

1959

Խմբագրական կազմակերպություն

Դ. Ո. ԴԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս.
Ա. Լ. ԹԱԽՏԱՆՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ բրգակից անդամ.
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմի-
կոս (սյուտ. խմբագիր). Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ.
Ա. Լ. ՄՆՋՈՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս.
Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՐ ԳԱ բրգակից անդամ.
Մ. Մ. ՋՐՈՒՇՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս
(պատ. խմբագրի տեղակալ):

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРУМЯН, академик АН АрмССР
(отв. редактор). Г. С. ДАВТЯН, акка-
демик АН АрмССР. М. М. ДЖРБАШЯН,
академик АН АрмССР (зам. отв. редакто-
ра). В. О. КАЗАРЯН, А. Л. МНДЖОЯН,
академик АН АрмССР. А. Г. НАЗАРОВ,
чл.-корресп. АН АрмССР. А. Л. ТАХТА-
ДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՐ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՎԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ'աքեմասիկա

Ա. Ա. Գոլդբերգ — Տարրական դիսոդոթյուններ շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների կարգի և տիպի որոշման բանաձևերի մասին 145

Մեխանիկա

Ա. Գ. Բազդեյ — Հեղուկի մեջ ճնշման որոշման նոր եղանակ 153

Առանցականությունը բնության

Ս. Ա. Համբարձումյան, ՀՍՍՌ ԳԱ Թղթակից-անդամ, և Ա. Ա. Խաչատրյան — Անի-դոտրոպ սալերի կայունություն և տատանումների մասին 159

Աստրոֆիզիկա

Մ. Ա. Առաքելյան — Բունկմոդ աստղերի սպեկտրներում անընդհատ առաքման մասին 167

Գեոֆիզիկա

Շ. Ս. Հովհաննիսյան — Գրավիմետրական գծահանման կիրառման փորձ Ալավերդու տիպի կոլչեդանային կույր հանքային մարմինների որոնումների և հետախույզման ժամանակ 175

Ագրոֆիզիկա

Գ. Բ. Բաբայան և Ս. Ա. Կարազուլյան — Կորնդանի ադոտա-ֆոսֆորական անընդհատության մի քանի առանձնահատկություններ 181

Դեպագործական բիմիս

Ա. Լ. Մկրչյան, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս, Դ. Տ. Թադևոսյան, Ս. Գ. Աղբալյան և Ռ. Խ. Բոստանջյան — Հետադոտոթյուն հասարակ մոխրոթերների բնագավառում հաղորդում II 187

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- А. А. Гольдберг*—Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных 145

Механика

- А. Г. Багдоев*—Новый способ определения давления в жидкости 153

Теория упругости

- С. А. Амбарцумян*, чл.-корр. АН АрмССР, и *А. А. Хичатрян*—Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок 159

Астрофизика

- М. А. Аракелян*—О непрерывной эмиссии в спектрах вспыхивающих звезд 167

Геофизика

- Ш.С. Оганисян*—Опыт применения гравиметровой съемки при поисках и разведке слепых колчеданных рудных тел алавердского типа 175

Агрохимия

- Г. Б. Бабаян* и *С. А. Карагулян*—Некоторые особенности азотно-фосфорного питания эспарцета 181

Фармацевтическая химия

- А. Л. Мнджоян*, академик АН Армянской ССР, *Г. Т. Татевосян*, *С. Г. Агбалян* и *Р. Х. Бостанджян*—Исследование в области простых аминокэфиров. Сообщение II 187

А. А. Гольдберг

Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 30.III.1959)

В последнее время различные авторы публиковали результаты, посвященные перенесению на случай целых функций многих комплексных переменных известных формул, позволяющих определить порядок и тип целой функции одной переменной по ее тейлоровским коэффициентам. Так как исчерпывать пространство $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных можно различными способами, то, естественно, в зависимости от принятого определения порядка и типа для них получались различные формулы. Целью настоящей заметки является обратить внимание на то, что ряд известных формул можно получить единым совершенно простым приемом, при этом получается некоторое обобщение известных результатов.

Пусть $\bar{G}_r$ — семейство замкнутых поликруговых областей в пространстве $(z_1, \dots, z_n)$, зависящее от параметра $r > 0$ и обладающее тем свойством, что $(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_r$ тогда и только тогда, когда $(z_1/r, \dots, z_n/r) \in \bar{G}_1$.

Пусть

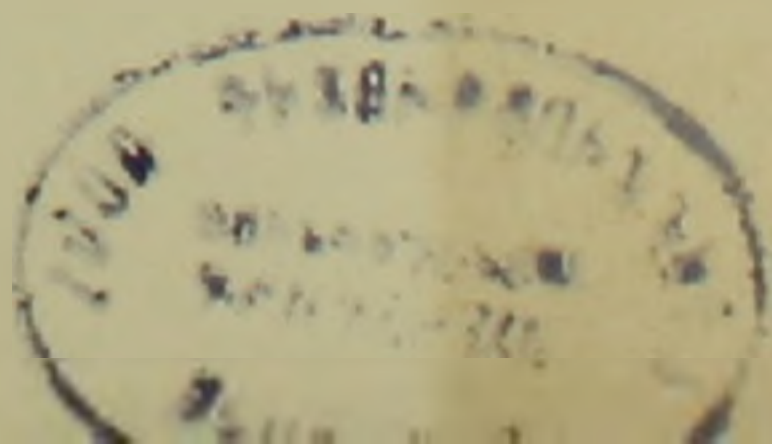
$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

целая функция. Обозначим

$$M_G(r) = M_G(r, f) = \max_{(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_r} |f(z_1, \dots, z_n)|.$$

G — порядком и G — типом $f(z_1, \dots, z_n)$ будем называть соответственно

$$\rho_G = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_G(r)}{\ln r} \quad \text{и} \quad \lambda_G = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln M_G(r) / r \rho_G.$$



Обозначим

$$\Phi_G(k_1, \dots, k_n) = \max_{(z_1, \dots, z_n) \in G_1} |z_1|^{k_1} \dots |z_n|^{k_n}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Все порядки ρ_G равны и $\rho = \rho_G$ может быть вычислено по формуле

$$\rho = \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{(k_1 + \dots + k_n) \ln(k_1 + \dots + k_n)}{\ln |a k_1 \dots k_n|}. \quad (1)$$

G -типы σ_G удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{(e^{\rho \sigma_G})^{\frac{1}{\rho}}} = \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \left\{ (k_1 + \dots + k_n)^{\frac{1}{\rho}} [\Phi_G(k_1, \dots, k_n) |a k_1 \dots k_n|]^{\frac{1}{k_1 + \dots + k_n}} \right\}. \quad (2)$$

Формула (1) встречается по существу уже у Э. Бореля ⁽¹⁾, а в применении к целым функциям комплексных аргументов — у Ж. Сира ⁽²⁾, где рассматривалось исчерпание по полицилиндрам $Z_r = \{ |z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r \}$. То, что $\rho_G = \rho$ для всех G_r , конечно, очевидно, но мы приводим формулу (1) как для полноты, так и потому, что этот факт ускользнул от внимания А. А. Темлякова ⁽³⁾ и С. А. Ерёмина ⁽⁴⁾, которые рассматривали случаи $\bar{G}_r = C_r = \{ |z_1| + \dots + |z_n| \leq r \}$ и $\bar{G}_r = \bar{Z}_r^*$.

Доказательство теоремы использует ряд лемм.

Лемма 1. Пусть $\Phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$, $A_k \geq 0$, $\sqrt[k]{A_k} \rightarrow 0$, и некоторая функция $\Psi(r)$, $r \in [a, \infty)$, удовлетворяет неравенству

$$\max_{0 \leq k < \infty} A_k r^k \leq \Psi(r) \leq \Phi(r). \quad (3)$$

Тогда функции $\Psi(r)$ и $\Phi(r)$ имеют одинаковые порядок и тип.

Доказательство этой леммы в неявной форме содержится в обычном выводе формул для определения порядка и типа целой функции одной переменной (А. И. Маркушевич ⁽⁵⁾, гл. VII, § 1).

Лемма 2. Функции $\Phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$, $A_k \geq 0$, $\sqrt[k]{A_k} \rightarrow 0$ и

* У А. А. Темлякова ⁽³⁾ формула для ρ_C имеет более сложный вид, так как там не было использовано, что

$$\lim_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \ln(k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n}) [(k_1 + \dots + k_n) \ln(k_1 + \dots + k_n)]^{-1} = 1.$$

В таком усложненном виде формула применялась в работах других авторов (С. А. Ерёмин ⁽⁴⁾, М. М. Джрбашян ⁽⁵⁾).

$\Phi_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k B_k r^k$, $B_k \geq 0$, $\sqrt[k]{B_k} \rightarrow 1$, имеют одинаковый порядок и тип.

Это сразу следует из известных формул для определения порядка и типа.

Лемма 3. Пусть $P(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ — многочлен степени k , $M_G(1, P) = \max_{(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_1} |P(z_1, \dots, z_n)|$.

Тогда

$$1 \leq M_G(1, P) / \max_{k_1 + \dots + k_n = k} \{|a_{k_1, \dots, k_n}| \Phi_G(k_1, \dots, k_n)\} \leq (k+1)^n. \quad (4)$$

Действительно, правая сторона неравенства очевидна. Пусть $\Phi_G(k_1, \dots, k_n) = |\zeta_1|^{k_1} \dots |\zeta_n|^{k_n}$, где $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \bar{G}_1$. Левую сторону неравенства получим, если для $P(z_1, \dots, z_n)$ запишем неравенство Коши в полицилиндре $\{|z_1| \leq |\zeta_1|, \dots, |z_n| \leq |\zeta_n|\}$ и заметим, что максимум $|P(z_1, \dots, z_n)|$ в этом полицилиндре достигается на его остоле, следовательно, в точке из $\bar{G}_1$ ($\bar{G}_1$ — поликруговая область) и не превышает поэтому $M_G(1, P)$.

Теперь доказательство теоремы получается сразу. Пусть t — новое комплексное переменное, $\zeta_i = z_i/t$, $i = 1, \dots, n$, $f(z_1, \dots, z_n) = f(\zeta_1 t, \dots, \zeta_n t) = F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Очевидно, что

$$M_G(r, f) = \max_{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \bar{G}_1, |t|=r} |F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n)|.$$

Но

$$F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n) t^k,$$

$$P_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} a_{k_1, \dots, k_n} \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_n^{k_n}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{0 \leq k < \infty} M_G(1, P_k) r^k \leq M_G(r, f) \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_G(1, P_k) r^k = \Phi(r).$$

Левая сторона получается, если к $F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$, где $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ — точка на $\bar{G}_1$, в которой достигается $r^k \max_{\bar{G}_1} |P_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n)| = r^k M_G(1, P_k) = \max_{0 \leq k < \infty} r^k M_G(1, P_k)$ применить неравенство Коши в круге $|t| \leq r$ как к целой функции от одной переменной t . Правая сторона неравенства очевидна. По лемме 1 порядок (тип) $M_G(r, f)$ равен соответственно порядку (типу) $\Phi(r)$, а этот в свою очередь равен порядку (типу)

$$\Phi_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \max_{k_1 + \dots + k_n = k} \{ |a_{k_1 \dots k_n}| \Phi_0(k_1, \dots, k_n) \}$$

что следует из леммы 2 и оценки (4): $(k+1)^{-n} < B_k < 1, \sqrt[n]{B_k} \rightarrow 1$. Используя формулы для определения порядка и типа $\Phi_1(r)$, получим для ρ_0 формулу

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{-\ln \left(\max_{k_1 + \dots + k_n = k} \{ |a_{k_1 \dots k_n}| \Phi_0(k_1, \dots, k_n) \} \right)} = \\ &= \lim_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{(k_1 + \dots + k_n) \ln (k_1 + \dots + k_n)}{-\ln (|a_{k_1 \dots k_n}| \Phi_0(k_1, \dots, k_n))} \end{aligned} \quad (1')$$

и для τ_0 формулу (2) с $\rho = \rho_0$. Остается показать, что для всех исчерпаний $\bar{G}$, $\rho_0 = \rho$. $\bar{G}_1$, как ограниченная область, содержится в некотором полицилиндре $Z_L = \{ |z_i| \leq L \}$. Возьмем точку $(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_1$ такую, что $l = \min_{n \geq i \geq 1} |z_i| > 0$, существование такой точки очевидно.

Обозначим Z_l полицилиндр $\{ |z_i| \leq l \}$, $i = 1, \dots, n$. Так как максимум $|f|$ достигается на остоле полицилиндра, то $M_{Z_l}(1, f) \leq M_0(1, f)$ и, очевидно, $M_0(1, f) \leq M_{Z_L}(1, f)$. Отсюда сразу следует, что $M_{Z_l}(lr, f) = M_{Z_l}(r, f) \leq M_0(r, f) \leq M_{Z_L}(r, f) = M_{Z_l}(Lr, f)$. Так как порядки $M_{Z_l}(Lr, f)$ и $M_{Z_l}(lr, f)$ одинаковы и равны порядку $M_{Z_l}(r, f)$, то доказано, что для всех $\bar{G}$, $\rho_0 = \rho$. Чтобы получить формулу (1), остается заметить, что для $Z_1: \{ |z_1| \leq 1, \dots, |z_n| \leq 1 \}$ $\Phi_{Z_1}(k_1, \dots, k_n) \equiv 1$. Теорема доказана.

Примеры. При исчерпании $\bar{G}_r = Z_r$, $\Phi_Z(k_1, \dots, k_n) \equiv 1$ (ср. (4)); при $\bar{G}_r = \bar{C}_r$, $\Phi_C(k_1, \dots, k_n) = k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n} (k_1 + \dots + k_n)^{-(k_1 + \dots + k_n)}$ (ср. (3)); при $\bar{G}_r = \bar{S}_r = \{ \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \leq r \}$ $\Phi_S(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n} (k_1 + \dots + k_n)^{-(k_1 + \dots + k_n)}}$; при $\bar{G}_r: \{ (|z_1|/r)^{\rho_1} + \dots + (|z_n|/r)^{\rho_n} \leq 1 \}$, $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, (этот класс исчерпаний содержит как частные случаи оба предшествовавшие)

$$\Phi_0(k_1, \dots, k_n) = \left(\frac{k_1}{\rho_1} \right)^{\frac{k_1}{\rho_1}} \dots \left(\frac{k_n}{\rho_n} \right)^{\frac{k_n}{\rho_n}} \left(\frac{k_1}{\rho_1} + \dots + \frac{k_n}{\rho_n} \right)^{-\left(\frac{k_1}{\rho_1} + \dots + \frac{k_n}{\rho_n} \right)},$$

(всюду $0^0 = 1$).

Часто бывает полезным характеризовать рост целой функции многих комплексных переменных системой типов $\{\sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(\lambda)}\}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — целые числа ≥ 0 такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lambda$. Определение системы типов в наших обозначениях можно выразить так. Обозначив T_r поликруговую замкнутую область

$$T_r = \left\{ \left[\sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lambda} \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(\lambda)} |z_1|^{\lambda_1} \dots |z_n|^{\lambda_n} \right]^{\frac{1}{\lambda}} \leq r \right\},$$

$\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(1)} > 0$. Система $\{\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(1)}\}$ называется системой нормальных типов $f(z_1, \dots, z_n)$, если при таких коэффициентах в T , $\lim_{r \rightarrow \infty} \ln M_T(r, f)/r^{\rho} = 1$.

Если при любом выборе $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(1)} > 0$ $\ln M_T(r, f)/r^{\rho} \rightarrow 0$, то f имеет минимальный тип, если $\lim_{r \rightarrow \infty} \ln M_T(r, f)/r^{\rho} = \infty$, то — максимальный тип*. Системы нормальных типов, рассматриваемые как точки в некотором конечномерном действительном пространстве, образуют некоторую гиперповерхность, уравнение которой с помощью формулы (2) запишется

$$(r\rho)^{\frac{1}{p}} = \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)^{\frac{1}{p}}} |a_{k_1, \dots, k_n}| \Phi_T(k_1, \dots, k_n)^{\frac{1}{k_1 + \dots + k_n}}.$$

Неизвестные $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(1)}$ входят в $\Phi_T(k_1, \dots, k_n)$, например, в случае

$$\lambda = 1 \quad \Phi_T(k_1, \dots, k_n) = k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n} \cdot |\sigma_1^{k_1} \dots \sigma_n^{k_n} (k_1 + \dots + k_n)^{k_1 + \dots + k_n}|^{-1}, \quad \sigma_i = \sigma_{\lambda_i}^{(1)}, \quad \text{где } \lambda_j = 0 \text{ при } j \neq i \text{ и } \lambda_i = 1.$$

Укажем еще на одно применение указанного выше приема. Пусть исчерпание $(z_1, \dots, z_n)$ — пространства производится по замкнутым поликруговым областям $D_i = D_i(\rho_1, \dots, \rho_n): |z_1|^{\rho_1} + \dots + |z_n|^{\rho_n} \leq r$, $\rho_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Покажем справедливость следующей формулы:

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_D(r, f)}{\ln r} = \\ &= \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{k_1}{\rho_1} + \dots + \frac{k_n}{\rho_n} \right) \ln (k_1 + \dots + k_n)}{-\ln |a_{k_1, \dots, k_n}|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть сначала все $\rho_1, \dots, \rho_n$ — рациональные числа, q — общий наименьший знаменатель $1/\rho_1, \dots, 1/\rho_n$. Тогда $\rho_i = q/\rho_i$, $i = 1, \dots, n$. Произведем подстановку $z_i = \zeta_i t^{\rho_i}$, $f(z_1, \dots, z_n) = f(\zeta_1 t^{\rho_1}, \dots, \zeta_n t^{\rho_n}) = F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \max_{z_1, \dots, z_n \in \bar{D}_r} |f(z_1, \dots, z_n)| &= \max_{|t| = r^{1/q}, (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \bar{D}_1} |F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n)| = \\ &= M(r^{1/q}, \bar{D}_1; F), \end{aligned}$$

где $\bar{D}_1: ||\zeta_1|^{\rho_1} + \dots + |\zeta_n|^{\rho_n} \leq 1$. Поэтому

$$\rho = \frac{1}{q} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln \ln M(r, \bar{D}_1; F) / \ln r.$$

Но

$$\begin{aligned} F(t, \zeta_1, \dots, \zeta_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n) t^k, \\ A_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n) &= \sum_{\rho_1 k_1 + \dots + \rho_n k_n = k} a_{k_1, \dots, k_n} \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_n^{k_n}. \end{aligned}$$

* Такое определение нормальных типов при $\lambda > 1$ сообщил мне Л. И. Ронкин.

Те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 (лишь в лемме 3 слова „многочлен степени k^* ” надо заменить на „многочлен степени не выше k^* ”), приводят к формуле (5):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{q} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{-\ln \left(\max_{p_1 k_1 + \dots + p_n k_n = k} |a_{k_1 \dots k_n}| \Phi_{D_1}(k_1, \dots, k_n) \right)} = \\ &= \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{p_1}{q} k_1 + \dots + \frac{p_n}{q} k_n \right) \ln (p_1 k_1 + \dots + p_n k_n)}{-\ln (|a_{k_1 \dots k_n}| \Phi_{D_1}(k_1, \dots, k_n))} = \\ &= \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{(k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n) \ln (k_1 + \dots + k_n)}{-\ln |a_{k_1 \dots k_n}|}. \end{aligned}$$

Так как при $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i (1 \pm \varepsilon)} \right) &\leq (1 + \varepsilon) \ln \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i} \right) + \ln 2n, \\ \ln \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i / (1 \pm \varepsilon)} \right) &\geq (1 + \varepsilon)^{-1} \ln \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i} \right) - \ln 2n \end{aligned}$$

(верхний знак берем, если $|z_i| > 1$, нижний — если $|z_i| < 1$) и

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i (1 \pm \varepsilon)} \leq r \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i} \leq r \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^n |z_i|^{p_i / (1 \pm \varepsilon)} \leq r \right\},$$

то $\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln \ln M_D(r, f) / \ln r$ непрерывно зависит от $(p_1, \dots, p_n)$. Поэтому формула (5) справедлива не только для рациональных, но и для произвольных положительных $p_1, \dots, p_n$.

Систему $(p_1, \dots, p_n)$ назовем системой положительных порядков $f(z_1, \dots, z_n)$, если при таком выборе $p_1, \dots, p_n$ $\rho = 1$, т. е. если

$$\overline{\lim}_{r_1 + \dots + r_n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, \dots, r_n; f)}{\ln (r_1^{p_1} + \dots + r_n^{p_n})} = 1, \quad (6)$$

где $M(r_1, \dots, r_n; f) = \max_{\substack{|z_i| = r_i \\ i=1, \dots, n}} |f(z_1, \dots, z_n)|$. Если при любых положи-

тельных $p_1, \dots, p_n$ этот предел равен нулю, то скажем, что f имеет общий нулевой порядок, если он равен ∞ , то f — бесконечного порядка. Из (5) сразу следует

Теорема 2. Если $f(z_1, \dots, z_n)$ имеет систему положительных порядков $(p_1, \dots, p_n)$, то

$$\overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{(k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n) \ln (k_1 + \dots + k_n)}{-\ln |a_{k_1 \dots k_n}|} = 1. \quad (7)$$

Формула (7) была получена М. М. Джрбашьяном (*) для собственного подкласса целых функций конечного порядка—класса A , т. е. для функций, для которых помимо (7) выполняется

$$\lim_{r_l \rightarrow \infty} \ln \ln M(1, \dots, 1, r_l, 1, \dots, 1) / \ln r_l = \rho_l, \quad l = 1, \dots, n^*, \quad (8)$$

В заключение приведем один пример. $f(z_1, z_2) = e^{z_1 z_2}$ удовлетворяет условиям (8) при $\rho_1 = \rho_2 = 1$, но тогда не выполняется условие (6), результат М. М. Джрбашьяна не применим. На основании же теоремы 2 легко найти все системы положительных порядков (ρ_1, ρ_2) . Для нашей функции $a_{k,k} = 0$ при $k_1 \neq k_2$ и $a_{k,k} = 1/k!$ при $k_1 = k_2 = k$. По формуле (7) получаем $1 = 1/\rho_1 + 1/\rho_2$. Любые два числа $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$, удовлетворяющие этому условию, образуют систему положительных порядков (ρ_1, ρ_2) .

Ужгородский государственный университет

Ս. Ս. ԳՈԼԴԲԵՐԳ

Տարբերակի դիֆֆուզիուններում փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների
կարգի և տիպի որոշման բանաձևերի մասին

Պարզ և միօրինակ եղանակով շատ կոմպակտ փոփոխականների տարածության գա-
նադան ձևով սպասելու դեպքում ստացված են բանաձևեր, որոնց մասին խոսվում է հոդ-
վածի վերնագրում: Ի՞նչ շարք բանաձևեր (3, 4, 7) ստացվում են որպես հոդվածում
սպասելիք թեորեմների մասնավոր դեպքեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

* E. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, Paris, 1902, ch. VI. † J. Sire, Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini, Rendiconti Circolo mat. Palermo, 31 (1911), 1—91. ‡ A. A. Темляков, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, Труды кафедр мат., 20 (1954), 7—16. § С. А. Ермин, Укр. мат. журнал, 9 (1957), 30—43. ¶ М. М. Джрбашьян, Мат. сб., 41 (1957), 257—276. * А. Н. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.—Л., 1950. † М. М. Джрбашьян, Изв. АН АрмССР, физ.-матем., ест. и техн. н., 8, № 4 (1955), 1—23. ‡ G. Valiron, Sur un théorème de M. Hadamard, Bull. sci. math., 47 (1923), 177—192.

* Условия (8) записаны в (7) в более сложной форме, но их можно упростить, используя результат Ж. Сира (2) (см. также Ж. Валирон (3)).

А. Г. Багдоев

Новый способ определения давления в жидкости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 28. 7 1959)

Пусть в некоторой точке O границы полупространства, занятого сжимаемой неоднородной жидкостью, возникло некоторое давление, которое распространяется по поверхности жидкости ударной волной.

Возмущенное движение жидкости предполагаем малым и осесимметричным.

Выберем оси Or по поверхности жидкости, Oz перпендикулярно к ней. Уравнение движения для давления в жидкости $P(r, z, t)$ есть волновое уравнение с переменным коэффициентом ⁽¹⁾

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{a^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1)$$

На границе жидкости имеем ⁽²⁾

$$P(r, 0, t) = \begin{cases} P_1(r, t) & r < R(t) \\ 0 & r > R(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $R(t)$ — радиус фронта на поверхности, $P_1(r, t)$ — давление за фронтом, t — время.

Пусть функция $\frac{1}{a^2(z)}$ разлагается в ряд по степеням z :

$$\frac{1}{a^2(z)} = \frac{1}{a_0^2} + a_1 kz + a_2 (kz)^2 + \dots \quad (3)$$

Здесь k параметр, характеризующий неоднородность жидкости. Например, для экспоненциального изменения

$$a^2(z) = a_0^2 e^{kz}; \quad \frac{1}{a^2(z)} = \frac{1}{a_0^2} \sum_0^{\infty} \frac{k^n (-1)^n z^n}{n!}. \quad (4)$$

Ищем решение (1) посредством ряда по степеням k :

$$P = P_0 + kP_1 + k^2P_2 + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1) и приравнивая величины при одинаковых степенях k , имеем уравнения:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_0}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + a_1 z \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} + a_1 z \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + a_2 z^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \quad (8)$$

.....

Введем в уравнения (6), (7), (8) изображения по Лапласу P_0, P_1, P_2 . Решение уравнения (6) при поставленных граничных условиях можно искать методом неполного разделения переменных ⁽²⁾

$$P_0 = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\sqrt{\frac{p^2}{a_0^2} + \lambda^2} z} I_0(\lambda r) d\lambda, \quad (9)$$

где $P_0 = \int_0^\infty e^{-pt} P_0 dt$.

$A(\lambda)$ находится из граничных условий на поверхности (2).

Решение уравнения (7), при нулевых граничных условиях, ищем:

$$P_1 = \int_0^\infty A(\lambda) Z(z) I_0(\lambda r) d\lambda. \quad (10)$$

Подставляя (10) и (9) в (7) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\lambda) \left[Z''(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z(z) \right] I_0(\lambda r) d\lambda = \\ = a_1 z p^2 \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} I_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда получим уравнение $Z(z)$

$$Z''(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z(z) = a_1 z p^2 e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) при нулевых условиях найдется

$$\begin{cases} Z(z) = (C_0 z + C_1 z^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \\ C_0 = -\frac{a_1 p^2}{4 \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right)}; \quad C_1 = -\frac{a_1 p^2}{4 \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}. \end{cases} \quad (13)$$

Если подставить (13) в (10) получим

$$4P_1 = \int_0^\infty A(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \left(-\frac{a_1 p^2}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z - \frac{a_1 p^2}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} z^2 \right) d\lambda$$

Последнее выражение можно свести к P_0 , если учесть, что деление на $-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}$ соответствует интегрированию $e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}$ по z

$$P_1 = \frac{a_1}{4} z^2 \int_0^\infty p^2 P_0 dz - z \frac{a_1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty p^2 P_0 dz dz. \quad (14)$$

Или переходя к исходным функциям

$$P_1 = \frac{a_1}{4} z^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} dz - \frac{a_1}{4} z \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} dz dz. \quad (15)$$

Рассмотрим простейший случай $R'(t) = V_0 = a_0$; $P_1 = \text{const} = \bar{P}_1$. Тогда (4) имеем: $P_0 = \bar{P}_1 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a_0^2 t^2 - r^2}} \right)$. Подставляя это выражение в (15), получим:

$$\frac{P_1}{\frac{a_1}{4} \bar{P}_1} = -\frac{a_0^2}{3} \frac{r_0^2 + 2a_0^2 t^2}{(a_0^2 t^2 - r_0^2)^{3/2}} z^3 - \frac{a_0^2}{3} \frac{a_0^2 t^2 - r_0^2}{(a_0^2 t^2 - r_0^2)^{3/2}} z. \quad (16)$$

В случае переменной $R'(t)$ и $P_1(r, t) = P_\Phi(R)$ можно получить просто давление вдоль Oz (5):

$$P_0 = -a_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_0}^{t - \frac{z}{a_0}} P_\Phi(t') dt'.$$

Здесь P_Φ давление во фронте на границе:

$$R(t_*) = \sqrt{a_0^2 (t_* - t)^2 - z^2}$$

Подставляя в (15), имеем после простых вычислений вдоль оси Oz :

$$\frac{P_1}{\frac{a_1}{4} a_0} = -z^2 L(z, t) + z \int_{a_0 t}^z L(z, t) dz, \quad (17)$$

где

$$L(z, t) = \left[P_\Phi \left(t - \frac{z}{a_0} \right) - \left(\frac{\partial t^*}{\partial t} \right)^2 P_\Phi'(t^*) - P_\Phi(t_*) \frac{\partial^2 t_*}{\partial t^2} \right].$$

Решение для изображения P_2 из (8) ищем в виде:

$$P_2 = \int_0^\infty A(\lambda) I_0(\lambda r) Z_1(z) d\lambda. \quad (18)$$

Подставляя (18), (10) и (9) в (8) получим

$$Z_1(z) - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2} \right) Z_1(z) = a_1 z p^2 Z(z) + a_2 z^2 p^2 e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}. \quad (19)$$

Решение (19) при нулевых условиях запишется:

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1(z) &= (B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z} \\ B_3 &= + \frac{1}{3} \left(\frac{a_1}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} p^2 C_1 + \frac{4}{3} \frac{a_1 p^2 C_0}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} \frac{8a_2}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}} - \frac{p^2}{12} \right) \\ B_1 &= \frac{3}{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} \frac{B_3}{2}; \quad B_2 = - \frac{3B_3}{2\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}; \quad B_4 = - \frac{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}{8} B_3 - \\ &\quad - \frac{a_1 p^2 C_1}{8\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Если подставить (20) в (18) и заменить деление на $-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}}$

интегрированием $e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{a_0^2}} z}$ по z , а умножения на p дифференцированием по t , можно столь же просто получить выражение для P_2 , аналогичное (16) или (17). Остальные члены разложения $P_3, P_4, \dots$ найдутся приведенным единым методом, только выражения $Z_n(z)$, соответствующие (13) и (20), будут содержать все большее количество степеней и будут несколько длиннее. Однако дополнительных трудностей в вычислениях не будет.

В случае переменной с глубиной плотности приведенный метод также полностью применим.

Этот метод дает лучшие результаты, чем, например, метод разделения переменных в уравнении (1) или методы, близкие к методу Адамара (³).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հեղուկի մեջ ճնշման ուղղման հոր եղանակ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ճնշման տարածումը ոչ համասեռ սեղմվող հեղուկով զրազված կիսատարածությունների մեջ: Այս խնդրի լուծման հայտնի մեթոդները (փոփոակաանների տեմիջական անջատումը կամ Աղամարի մեթոդը) թույլ են տալիս գտնել էֆեկտիվ լուծումներ, միայն ալիքի ճակատի մոտ: Տվյալ աշխատանքում առաջարկվում է կիսատարածությունների մեջ ճնշման դաշտի որոշման էֆեկտիվ մեթոդ, որոնքի ֆունկցիան k պարամետրի աստիճաններով վերածելու միջոցով, որտեղ k -ն բնորոշում է հեղուկի անհամասեռությունը: Մասնավոր դեպքերում ստացված է պարզ բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
² А. Г. Багдоев, Проникание давления в сжимаемую жидкость, Вестник МГУ № 10, 1956.
³ J. Hadamard, Le problème de Cauchy, Paris, 1932.
⁴ А. Г. Багдоев, Кандидатская диссертация, МГУ.
⁵ А. Г. Багдоев, Исследование задачи о проникании давления, Вестник МГУ, 1956.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок

(Представлено 3.VI.1959)

1. Рассмотрим ортотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h . Пусть одна из плоскостей упругой симметрии параллельна срединной плоскости, а остальные две — параллельны ее сторонам.

Прямоугольная система координат (α, β, γ) выбрана так, что координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а оси α, β направлены по ее сторонам.

В основу ставятся следующие предположения ^(1,2):

а) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной плоскости, могут быть пренебрежены по сравнению с прочими напряжениями;

б) расстояние по нормали (γ) между двумя точками пластинки после деформации остается неизменным;

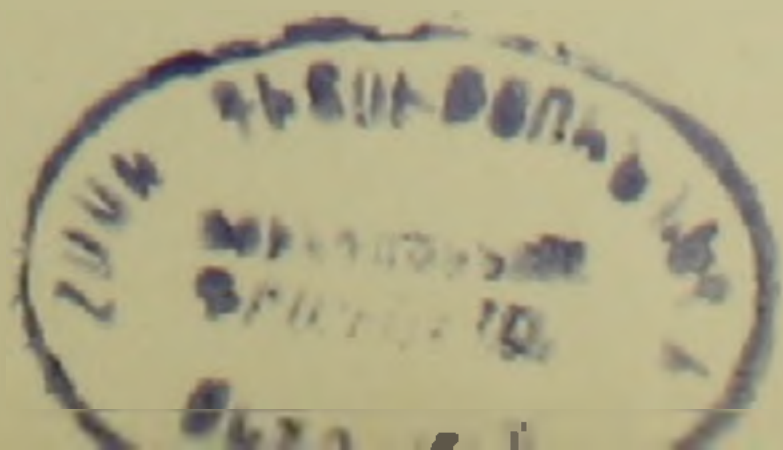
в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине пластинки меняются по заданному закону:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \varphi(\alpha, \beta) \\ \tau_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \psi(\alpha, \beta),\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$ — произвольные искомые функции координат α, β .

При этом уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{12}{h^3} Z &= 0 \\ \left[B_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \varphi + \right. \\ \left. + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \varphi &= 0;\end{aligned}$$



$$\left[(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[a_{33} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \right. \\ \left. + a_{44} \left(B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \psi \right] + \psi = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения статической устойчивости получим, если в (1.2) заменим Z выражением

$$Z = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad (1.3)$$

где T_1^0 , T_2^0 и S^0 — тангенциальные силы на единицу длины, действующие в срединной плоскости пластинки.

Уравнения свободных колебаний ненагруженной пластинки получим, если в уравнениях (1.2) положим $(^1)$

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

При рассмотрении задачи динамической устойчивости в уравнениях (1.2) для Z надо принимать

$$Z = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим устойчивость шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки, сжатой в одном главном направлении (a)

$$T_1^0 = -P, \quad T_2^0 = S^0 = 0 \quad (2.1)$$

Решение системы (1.2) с учетом (1.3) и (2.1) ищем в форме

$$w = w_0 \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \\ \varphi = \varphi_0 \cos \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \\ \psi = \psi_0 \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \cos \frac{n\pi\beta}{b} \quad (2.2)$$

(w_0 , φ_0 , ψ_0 — неизвестные постоянные), чем удовлетворим условиям шарнирного опирания по всему контуру пластинки.

Для критической силы получаем

$$P_{mn}^* = P_{mn} (1 + d), \quad (2.3)$$

где

$$P_{mn}^* = \frac{\pi^2 a^2}{m^2} \left[D_{11} \frac{m^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4}{b^4} \right] \quad (2.4)$$

представляет собой значение критической силы для аналогичной задачи, в предположении о справедливости гипотезы Кирхгоффа.

$$d = \frac{A - B}{1 + B}, \quad D_{ik} = \frac{h^3 B_{ik}}{12}$$

$$A = \frac{\pi^2 h^2}{10} \left(a_{44} \frac{m^2}{a^2} + a_{33} \frac{n^2}{b^2} \right) \times$$

$$\times \frac{\left(B_{11} \frac{m^2}{a^2} + B_{22} \frac{n^2}{b^2} \right) \left(B_{22} \frac{m^2}{a^2} + B_{11} \frac{n^2}{b^2} \right) - (B_{12} + B_{21})^2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}}{B_{11} \frac{m^4}{a^4} + 2(B_{12} + 2B_{21}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + B_{22} \frac{n^4}{b^4}} \quad (2.5)$$

$$B = \frac{\pi^2 h^2}{10} \left[(a_{33} B_{11} + a_{44} B_{22}) \frac{m^2}{a^2} + (a_{22} B_{11} + a_{44} B_{22}) \frac{n^2}{b^2} \right] +$$

$$+ a_{44} a_{33} \frac{\pi^4 h^4}{100} \left[\left(B_{11} \frac{m^2}{a^2} + B_{22} \frac{n^2}{b^2} \right) \left(B_{22} \frac{m^2}{a^2} + B_{11} \frac{n^2}{b^2} \right) - (B_{12} + B_{21})^2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right]$$

В случае, когда материал пластинки представляет собой трансверсально-изотропное тело, причем плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной плоскости пластинки, из (2.4) имеем:

$$P_{mn}^* = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m} n^2 \right)^2}{1 + k \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right)}, \quad (2.6)$$

где

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}, \quad c = \frac{a}{b},$$

$$k = \frac{\pi^2 h^2}{10 b^2} \frac{E}{G' (1 - \mu^2)} \quad (2.7)$$

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии,

G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней.

Нетрудно убедиться, что, как обычно, наименьшие значения критической силы получаются в том случае, когда по направлению, перпендикулярному к направлению сжатия, образуется только одна полуволна ($n = 1$).

Полагая в (2.6) $k = 0$, получим критическую силу, вычисленную по классической теории пластинок.

Анализ формулы (2.6) (при $n = 1$) показывает, что при увеличении коэффициента k критическая сила уменьшается по сравнению с ее значением, найденным по классической теории пластинок ($k = 0$).

Кроме того, при увеличении k суживаются границы каждой формы устойчивости.

3. Рассмотрим свободные колебания ненагруженной прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру.

Решение системы (1.2) с учетом (1.4) ищем в форме

$$\begin{aligned} w &= w_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t \\ \varphi &= \varphi_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t \\ \psi &= \psi_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (3.1)$$

чем удовлетворим условиям шарнирного опирания по всему контуру пластинки.

Для частот собственных колебаний получаем

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^0 \sqrt{1 + d}, \quad (3.2)$$

где d —так, как в (2.5),

$$\omega_{mn}^0 = \pi^2 \sqrt{\frac{g}{\gamma_0 h}} \left[D_{11} \frac{m^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4}{b^4} \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

представляет собой собственные частоты, найденные по классической теории пластинок.

Если пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала, то из (3.2) получим

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^0 \frac{1}{\sqrt{1 + k \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right)}}, \quad (3.4)$$

где

$$\omega_{mn}^0 = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma_0 h}} \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right)$$

k , c , D —как в (2.7).

Анализ формулы (3.4) показывает, что с увеличением коэффициента k частоты собственных колебаний ω_{mn} все больше различаются от соответствующих частот (ω_{mn}^0), найденных по классической теории пластинок. Это различие, менее заметное для частот низшего вида колебания (ω_{11}), становится более существенным для частот высших видов колебания (ω_{12} , ω_{22} и т. д.).

4. Рассмотрим задачу о динамической устойчивости шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки. Внешняя сила действует только в одном главном направлении x и во времени меняется периодически:

$$P = P_0 \cos \theta t \quad (4.1)$$

Решение системы (1.2) с учетом (1.5), (2.1) и (4.1) ищем в форме

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \varphi &= \bar{\varphi}(t) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \psi &= \bar{\psi}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Этим удовлетворим условиям шарнирного опирания по всему контуру пластинки.

Для $\bar{w}(t)$ получаем известное уравнение Матье:

$$\frac{d^2 \bar{w}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 (1 - 2\lambda_{mn} \cos \theta t) \bar{w}(t) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\lambda_{mn} = \frac{P_0}{2P_{mn}^*} \quad (4.4)$$

P_{mn}^* — критическая сила, определяется по формуле (2.3), ω_{mn} — частота собственных колебаний, определяется по формуле (3.2).

Области неустойчивости решений уравнения Матье хорошо изучены. Как известно (¹), границы областей неустойчивости можно определить по следующим приближенным формулам:

$$\theta^* = 2\omega_{mn} \sqrt{1 \pm \lambda_{mn}} \quad (4.5)$$

для первой (главной) области неустойчивости,

$$\theta^* = \omega_{mn} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \lambda_{mn}^2} \quad (4.6)$$

$$\theta^* = \omega_{mn} \sqrt{1 - 2\lambda_{mn}^2}$$

для второй области неустойчивости,

$$\theta^* = \frac{2}{3} \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{9\lambda_{mn}^2}{8 \pm 9\lambda_{mn}}} \quad (4.7)$$

для третьей области неустойчивости,

где θ^* — критические частоты внешней нагрузки, т. е. частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости.

Для сравнения полученных в настоящем пункте результатов с соответствующими результатами классической теории пластинок формулы (4.5) — (4.7) представим в следующем виде:

для первой области неустойчивости

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{mn}^0} = \sqrt{1+d \pm \lambda_{mn}^0}, \quad (4.8)$$

для второй области неустойчивости

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{mn}^0} = \frac{1}{2} \sqrt{1+d + \frac{1}{3(1+d)} (\lambda_{mn}^0)^2},$$

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{mn}^0} = \frac{1}{2} \sqrt{1+d - \frac{2}{1+d} (\lambda_{mn}^0)^2}, \quad (4.9)$$

для третьей области неустойчивости

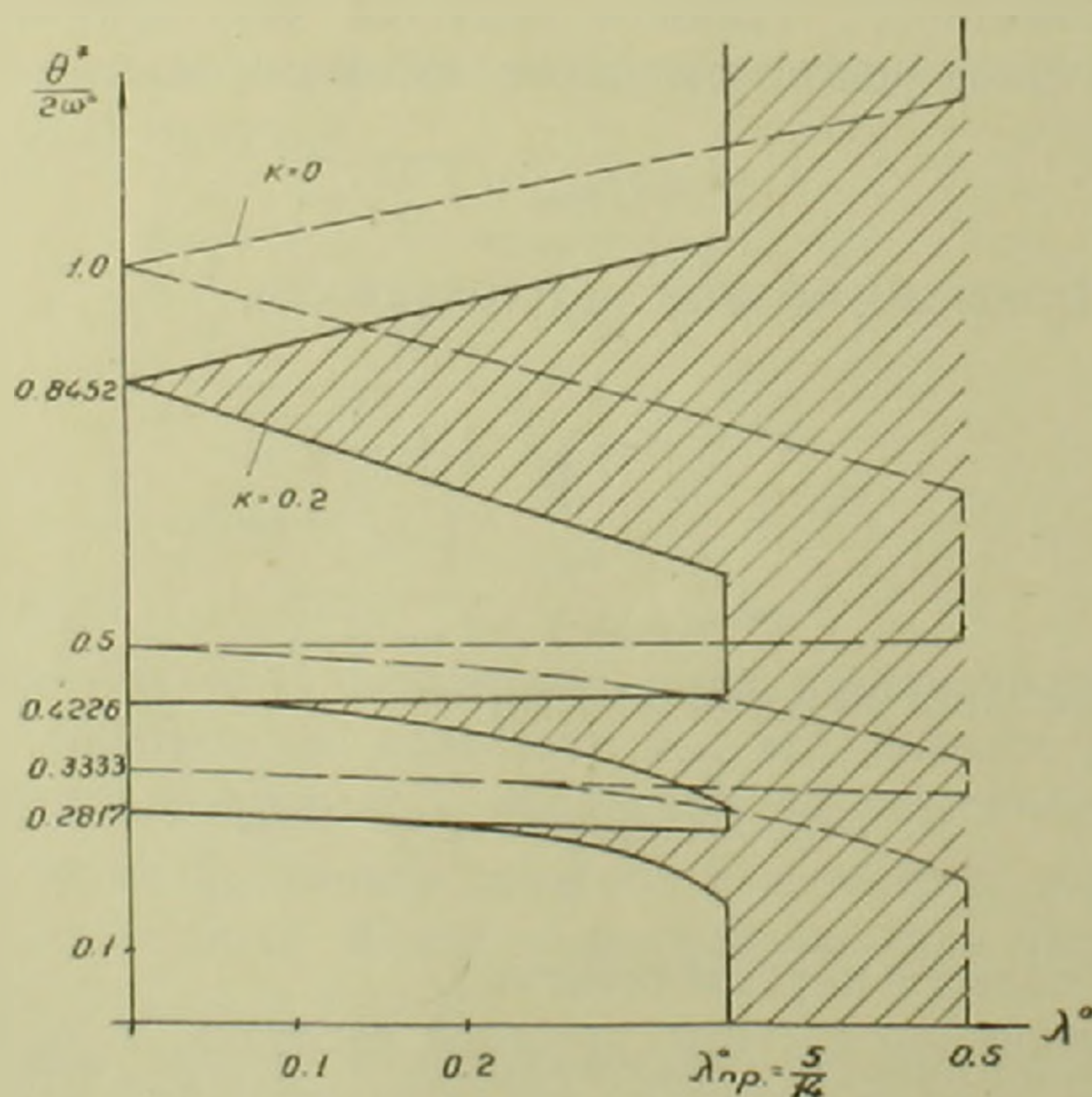
$$\frac{\theta^*}{2\omega_{mn}^0} = \frac{1}{3} \sqrt{1+d - \frac{9(\lambda_{mn}^0)^2}{8(1+d) \pm 9\lambda_{mn}^0}}, \quad (4.10)$$

где

$$\lambda_{mn}^0 = \frac{P_0}{2P_{mn}^0}. \quad (4.11)$$

Из (4.4) заключаем, что $\lambda_{mn} < \frac{1}{2}$, следовательно

$$\lambda_{mn}^0 < \frac{1+d}{2}. \quad (4.12)$$



Фиг. 1.

В формулах (4.8)—(4.10), принимая $d = 0$, получим соответствующие выражения, вычисленные по классической теории пластинок.

В случае, когда квадратная ($b = a$) пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала и $m = n = 1$, имеем

$$1 + d = \frac{1}{1 + 2k}, \quad (4.13)$$

где

$$k = \frac{\pi^2 h^2}{10a^2} \frac{E}{G'(1 - \nu^2)}.$$

Вычисления, выполненные для трансверсально-изотропного материала, показывают, что при увеличении коэффициента k области неустойчивости, вычисленные по (4.8)–(4.10) с учетом (4.13), все больше различаются от соответствующих областей, найденных по классической теории пластинок ($k = 0$).

Это различие заключается в том, что при увеличении k уменьшаются $\frac{1}{2\omega^0}$ и интервал изменения $\lambda^0 < \frac{1}{2(1+2k)}$.

На фиг. 1 показаны области неустойчивости при $k = 0$ и $k = 0,2$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲՈՐՁՈՒՄՅԱՆ ԷՎ Ս. Ա. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ

Անիզոտրոպ սալերի կայունության և առաջադիմությունների մասին

Հոդվածում դիտարկվում են օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալերի տատանումների և ստատիկ ու դինամիկ կայունության խնդիրները:

Հետազոտության նիւթում ընկած են հետևյալ ընդունելությունները. 1. Սալի միջին մակերևույթին նորմալ զծային էլեմենտները զեֆորմացիայից հետո չեն փոխում իրենց երկարությունները: 2. Չի նորմալ լարումները կարող են արհամարհվել մյուս լարումների նկատմամբ: 3. τ_{21} և τ_{31} շոշափող լարումները ըստ սալի բարձրության փոխվում են անփոփոխ օրենքով (1.1):

Ընդունված ենթադրությունների դեպքում հավասարակշռության հավասարումներին համապատասխանում է (1.2) հավասարումների սխեմա, որտեղից հայտնի ճանապարհներով ստացվում են սալերի ստատիկ կայունության, տատանումների և դինամիկ կայունության հավասարումները:

Լուծված է եզրերով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ստատիկ կայունության խնդիրը, երբ նա սեղմված է x զիջավոր ուղղությամբ:

Կրիտիկական ուժի համար ստացված է բանաձև: Ստացված կրիտիկական ուժը համեմատվում է կլասիկ տեսությամբ համապատասխանող կրիտիկական ուժի հետ:

Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալերի համար կրիտիկական ուժը որոշվում է (2.6) բանաձևով: Այս բանաձևի հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ k գործակցի (որը որոշվում է (2.7) բանաձևով) մեծացման հետ կրիտիկական ուժը, կլասիկ տեսությունից ստացված ուժի նկատմամբ փոքրանում է և խտանում են կայունության արարանչյուր ձևի ($m = 1, 2, \dots$) սահմանները:

Լուծված է եզրերով ազատ հենված, չրեռնափորված ուղղանկյուն սալի սեփական տատանումների խնդիրը: Ստացված է բանաձև սեփական ճոճումների հաճախականության համար: Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալի համար սեփական ճոճումների հաճախականությունը որոշվում է (3.4) բանաձևով:

Այս բանաձևից երևում է, որ k զործակցի մեծացման հետ սեփական հոճումների հաճախականություններն սկսում են ավելի շատ տարրերով կլասիկ տեսությունով որոշվող համապատասխան հաճախականություններից: Այդ տարրերությունը առավել նկատելի է բարձր ձևի տատանումների հաճախականությունների համար:

Լուծված է եզրերով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի զինամիկ կայունություն խնդիրը. երբ նրա վրա α դիսկոր ուղղությամբ ազդող ուժը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է պարբերաբար:

Փոփոխականների անջատումից հետո $\bar{\omega}(t)$ -ի համար ստացվել է Մատյեի հայտնի համասարումը (4.3), որի մեջ մտնող սլարամետրերի որոշակի կապերի դեպքում այդ համասարման լուծումները դառնում են անկայուն:

Տրանսվերսալ-իզոաչույ նյութից պատրաստված բառակուսի սալի համար նատորված հաշվումները ցույց են տալիս, որ k զործակցի մեծացման հետ անկայունություններ ունենալով սկսում են ավելի շատ տարրերով կլասիկ տեսությունով որոշվող համապատասխան տիրույթներից: Այդ տարրերությունը կայանում է նրանում, որ k -ի մեծացման հետ

0^*
փոքրանում են $\frac{0^*}{2m^0}$ և 1^* զործակցի փոփոխման միջակայքը:

Նկարի վրա ցույց են տրված անկայունության տիրույթները $k = 0$ (կլասիկ տեսություն) և $k = 0.2$ դեպքերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. А. Амбарцумян, Известия АН СССР, ОТН, 5, 1958. ² С. А. Амбарцумян, ПММ, т. XXII, в. 2, 1958. ³ С. Г. Лехницкий, Анизотропные пластинки, Гостехиздат, 1957. ⁴ В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956.

АСТРОФИЗИКА

М. А. Аракелян

О непрерывной эмиссии в спектрах вспыхивающих звезд

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 8. VI. 1959)

Непрерывная эмиссия в спектре вспыхивающего карлика UV Кита была обнаружена А. Джоем и М. Хьюмасоном (¹) почти одновременно с открытием ее в спектрах звезд типа Т Тельца. Вне вспышки абсорбционный спектр этой звезды является типичным для карлика типа M5, но на него накладываются интенсивные эмиссионные линии водорода и ионизованного кальция. Наблюдение спектра звезды во время вспышки 25 сентября 1948 года показало, что спектр поглощения полностью заливается накладывающимся непрерывным излучением. Это сопровождается резким ростом интенсивности эмиссионных линий водорода при неизменности интенсивности линий кальция и появлением эмиссионных линий нейтрального и ионизованного гелия.

Континуум, накладывающийся во время вспышки на абсорбционный спектр карлика, проявлялся во всей наблюдаемой области спектра и характеризовался заметным ростом интенсивности к ультрафиолету. Согласно Джою и Хьюмасону, интенсивность участка, лежащего в коротковолновую сторону от H_γ, значительно превышала интенсивность более длинноволнового участка.

К сожалению спектральные наблюдения вспышек звезд этого типа крайне ограничены и, в сущности, это наблюдение является единственным, дающим нам какие-то сведения о непрерывном спектре вспыхивающих звезд во время вспышки. Поэтому приобретают большой интерес трехцветные фотоэлектрические наблюдения, произведенные Г. Джонсоном и Р. Митчеллом (²), во время вспышки звезды HII 1306 в скоплении Плеяд. В то же время фотоэлектрические наблюдения Джонсона и Митчелла имеют то преимущество перед спектральными наблюдениями, что дают возможность судить о цвете звезды на разных фазах вспышки, в то время как спектральные наблюдения Джоя и Хьюмасона так или иначе дают средние данные за время экспозиции.

Этот карлик имеет вне вспышки показатели цвета $B-V = 1^m 35$ и $U-B = 1^m 18$, т. е. цвет звезды K6. Вспышка продолжалась около

сорока минут. Звезда, как упоминалось, является членом скопления Плеяд и вне вспышки находится примерно на половину звездной величины выше главной последовательности ($V = 13^m39$). Все эти данные делают ее типичной вспыхивающей (flash) звездой типа вспыхивающих переменных, обнаруженных Г. Аро (³) в Т-ассоциациях и молодых скоплениях. Тем не менее, анализ наблюдений вспышки этой звезды представляет значительный интерес и для понимания природы вспышек звезд типа UV Кита, так как нет никаких оснований полагать, что имеются какие-либо принципиальные различия между этими двумя группами вспыхивающих звезд.

В настоящей заметке делается попытка рассмотрения результатов, полученных Джонсоном и Митчеллом в свете развитого В. А. Амбарцумяном (⁴) представления о нетепловом характере изменений блеска и спектральных особенностей звезд типа UV Кита. Согласно В. А. Амбарцумяну, спектральные особенности (в частности, непрерывная эмиссия) и переменность этих звезд связаны с выбросом внутризвездного вещества и освобождением его энергии во внешних слоях звезды. Как известно, тот же вывод был сделан в отношении звезд типа Т Тельца. Не лишено поэтому интереса сравнение рассматриваемых данных с результатами наблюдений звезд типа Т Тельца.

Колориметрические данные о вспышке, полученные Джонсоном и Митчеллом, мы можем целиком отнести за счет непрерывной эмиссии и эмиссионных линий. Действительно, как было отмечено В. А. Амбарцумяном, продолжительность вспышек этих звезд столь невелика, что объяснить хотя бы часть энергии вспышки как результат разогрева фотосферы или увеличения радиуса звезды абсолютно невозможно. Следовательно, единственным возможным заключением является то, что вся энергия вспышки обусловлена излучением в оптически тонком слое, т. е. практически она может складываться из непрерывной эмиссии и излучения в бальмеровских линиях и континууме.

В результатах Джонсона и Митчелла обращает на себя внимание резкое различие амплитуд вспышки в трех спектральных участках: $\Delta V = 0^m76$, $\Delta B = 1^m62$ и $\Delta U = 3^m77$. Уже столь резкий рост амплитуды при переходе от визуальной области спектра к фотографической и ультрафиолетовой свидетельствует о нетепловом характере изменений блеска, поскольку известно, что при изменениях теплового характера отношение амплитуд в фотографических и визуальных лучах не должно превышать 1.3, соответствующее отношение для ультрафиолетовых и фотографических лучей получается равным 1.5.

Поскольку нас интересует избыточная энергия, излучаемая во время вспышки, то мы исключим из всех трех кривых блеска нормальную яркость звезды и рассмотрим ход выделения энергии вспышки со временем. На фиг. 1, 2 и 3 нанесены в звездных величинах кривые падения интенсивности излучения избыточной энергии вспышки после максимума. Интенсивности излучения в максимуме равны соот-

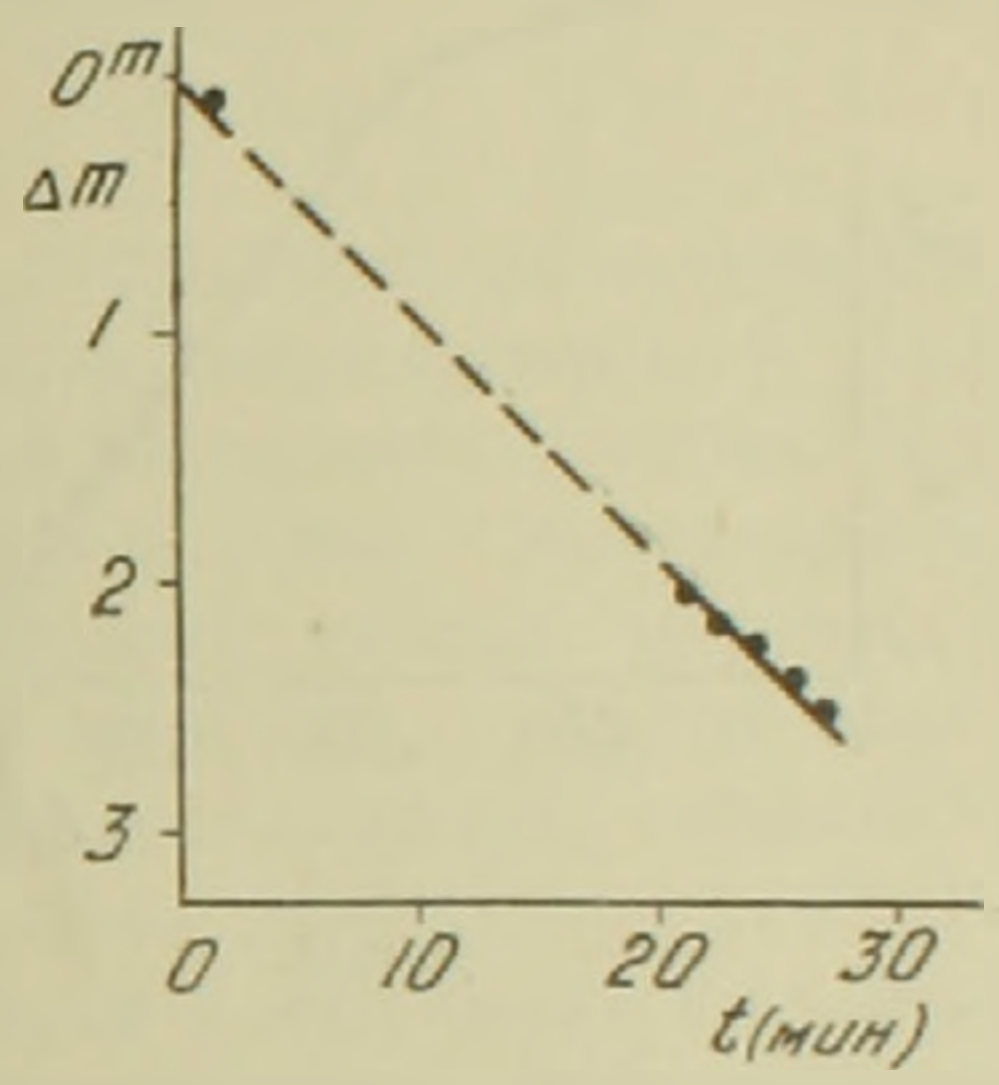
ответственно $I_V^{\max} = 1.0 I_V^0$, $I_B^{\max} = 3.4 I_B^0$, $I_U^{\max} = 31.2 I_U^0$, где через I^0 обозначены интенсивности излучения звезды в соответствующих спектральных участках вне вспышки.

Как видно из фиг. 1, падение интенсивности в визуальном участке спектра хорошо представляется экспоненциальной зависимостью от времени:

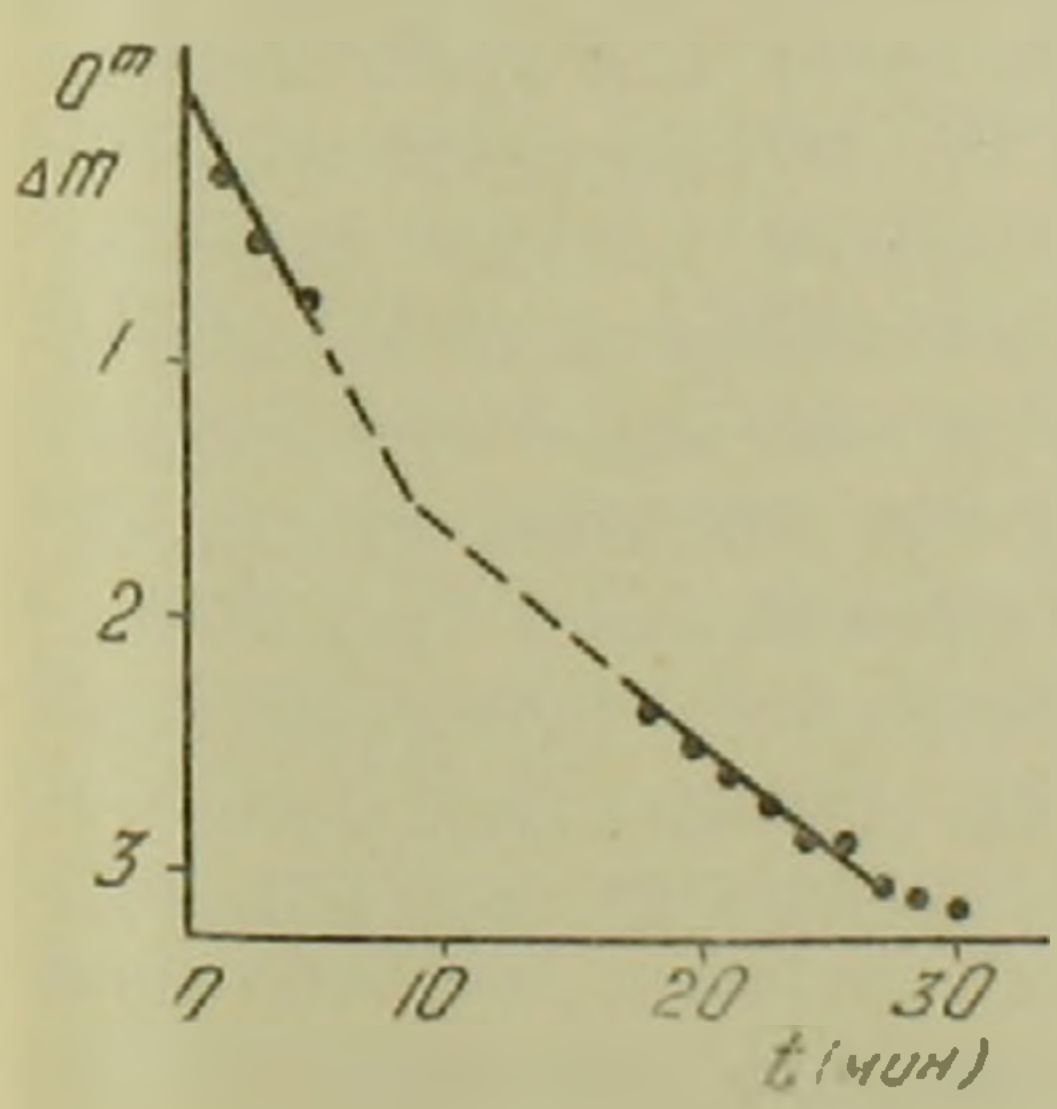
$$I(t) = I^{\max} e^{-at} \tag{1}$$

Если принять во внимание, что соответствующий фильтр V системы U, B, V охватывает полосу, практически лишенную балмеровских линий, то мы должны заключить, что экспоненциальное падение интенсивности излучения в этом случае целиком характеризует поведение непрерывной эмиссии. Величина a_V , характеризующая скорость падения интенсивности в этом участке, равна 0.0013 сек.^{-1} . Полное количество освобожденной в этом участке спектра энергии, без учета энергии, излученной до максимума, оказывается равным $770 I_V^0$.

Фиг. 2 представляет ход выделения избыточной энергии в спектральном участке В, включающем водородные линии H_β , H_γ , H_δ и H_ϵ . Следовательно, он изображает ход интенсивности непрерывной эмиссии и, возможно, интенсивности в этих линиях. Из фиг. 2 вид-



Фиг. 1.



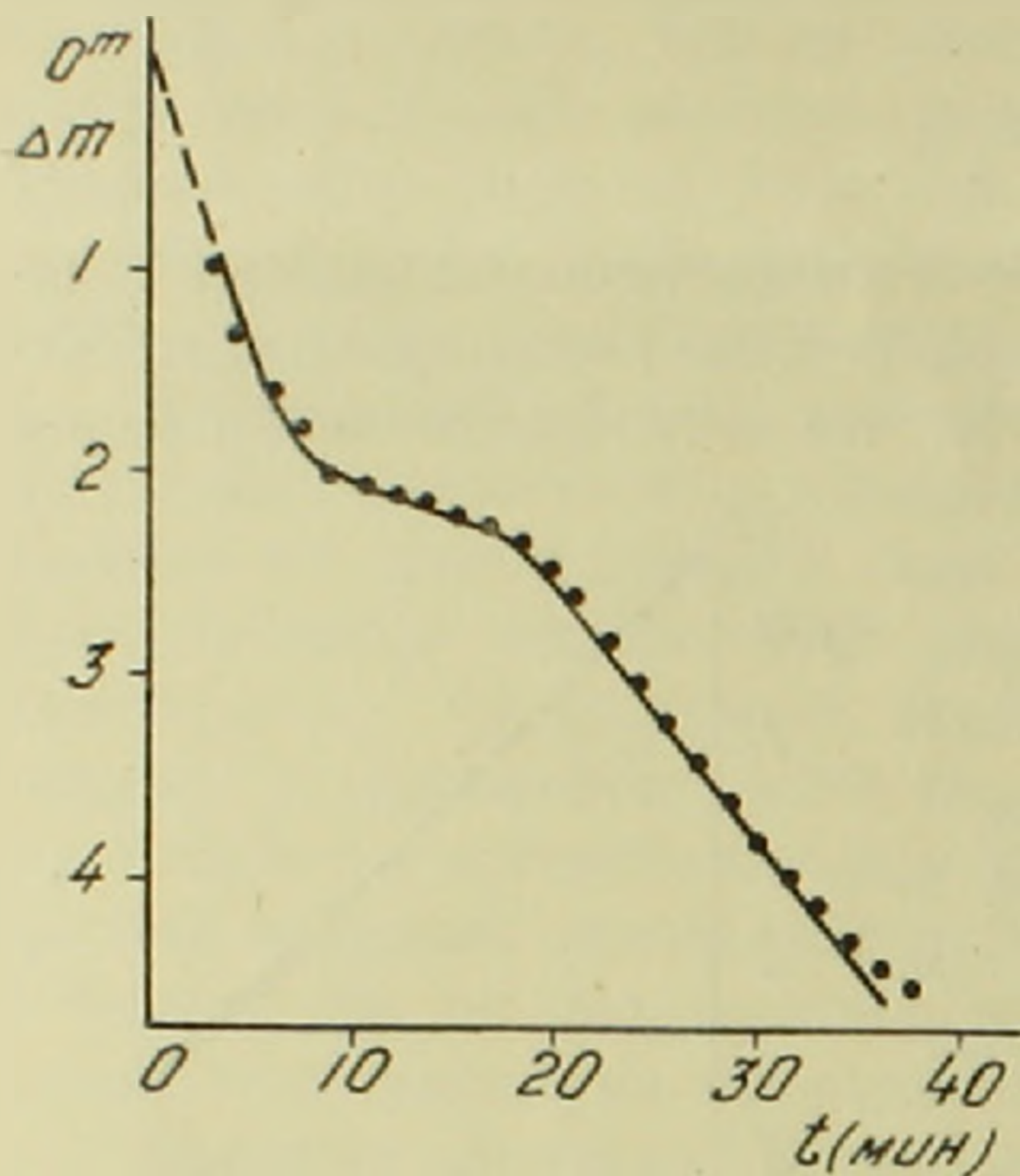
Фиг. 2.

но, что и в этом случае мы, по-видимому, имеем дело с экспоненциальным падением интенсивности, хотя в течение вспышки происходит переход одного экспоненциального закона (участок 1, $a_{\text{II}} = 0.0025 \text{ сек.}^{-1}$) в другой (участок 2, $a_B = 0.0011 \text{ сек.}^{-1}$). Если использовать значение a_B , соответствующее участку 1, то полное количество энергии, излученной во время вспышки, получается равным $1360 I_B^0$.

Наиболее полные данные мы имеем о ходе выделения энергий вспышки в ультрафиолетовой области спектра (фиг. 3).

Эта область включает в себя высокие члены балмеровской серии и часть балмеровского континуума, прилежащего к пределу серии. Мы видим, что в этом случае также имеет место экспоненциальное падение интенсивности после максимума, переходящее при $t \approx 5$ минут

в экспоненциальное же падение с несколько иным показателем. На участке 1 $a_U = 0.0042 \text{ сек.}^{-1}$, что приводит к полному количеству освобожденной во время вспышки энергии, равному $7430 I_U^0$. На участке 2 $a_U = 0.0019 \text{ сек.}^{-1}$. Ультрафиолетовая кривая очень хорошо



Фиг. 3.

представляется наложением двух вспышек. При этом максимум вторичной вспышки с интенсивностью примерно в семь раз меньшей, чем у основной, имеет место примерно на пятнадцать минут позже, чем максимум основной вспышки.

Таким образом, выделение энергии вспышки после максимума во всех трех спектральных участках происходит в экспоненциальной зависимости от времени. Такая зависимость хорошо согласуется с представлением о кратковременном выбросе определен-

ного количества энергии и ее последующем высвечивании.

Произведем оценку полной энергии, освобожденной во время вспышки. Абсолютная визуальная величина звезды вне вспышки с учетом модуля расстояния в $5^m 52$ оказывается равной $7^m 87$. Используя болометрическую поправку звезды типа K6 ($-1^m 14$), получим болометрическую светимость звезды, равную $6 \cdot 10^{32}$ эрг/сек. Для простоты положим, что фильтры U, B и V прозрачны соответственно в следующих участках спектра: $3100\text{Å} - 3800\text{Å}$, $3800\text{Å} - 4900\text{Å}$ и $4900\text{Å} - 6000\text{Å}$. Приняв далее, что распределение энергии в спектре звезды соответствует $T = 4000$ получим, что вне вспышки она излучает в этих участках спектра соответственно $1 \cdot 10^{31}$ эрг/сек., $3 \cdot 10^{31}$ эрг/сек. и $4 \cdot 10^{31}$ эрг/сек. Следовательно, интенсивности излучения избыточной энергии в этих участках в максимуме равны $31 \cdot 10^{31}$ эрг/сек., $10 \cdot 10^{31}$ эрг/сек. и $4 \cdot 10^{31}$ эрг/сек. Полные количества энергии, излученные за время вспышки, оказываются равными, соответственно, $6 \cdot 10^{31}$ эрг, $4 \cdot 10^{31}$ эрг и $3 \cdot 10^{31}$ эрг. Таким образом, только в области спектра, охватываемой фильтрами U, B, V, количество излученной за время вспышки энергии оказывается большим, чем 10^{35} эрг.

Рассмотрим далее возможность интерпретации этой энергии как энергии, излученной в эмиссионных линиях. Изменение числа ионизованных атомов при рекомбинационном излучении получается посредством интегрирования уравнения:

$$\frac{dn^+}{dt} = -n_e n^+ \sum_{i=1}^{\infty} C_i. \quad (2)$$

Экспоненциальная зависимость при этом может быть получена только в том случае, когда очень велика плотность свободных электронов. Но поскольку основным источником свободных электронов является водород, а в данном случае речь может идти только об излучении в бальмеровских линиях и континууме, то мы должны считать, что $n_e \approx n^+$. В этом случае число рекомбинирующих ионов будет изменяться согласно формуле:

$$\frac{1}{n^+(t)} - \frac{1}{n^+(0)} = -(t-t_0) \sum_{i=1}^{\infty} C_i. \quad (3)$$

Отсюда следует, что полученная экспоненциальная зависимость не связана с рекомбинационным процессом высвечивания. С другой стороны, заметный рост интенсивности в визуальном участке, лишенном бальмеровских линий, в свою очередь также свидетельствует о том, что энергия, излученная в эмиссионных линиях, составляет не основную часть энергии вспышки. Это дает нам основание целиком приписать энергию, излученную в процессе вспышки, непрерывной эмиссии.

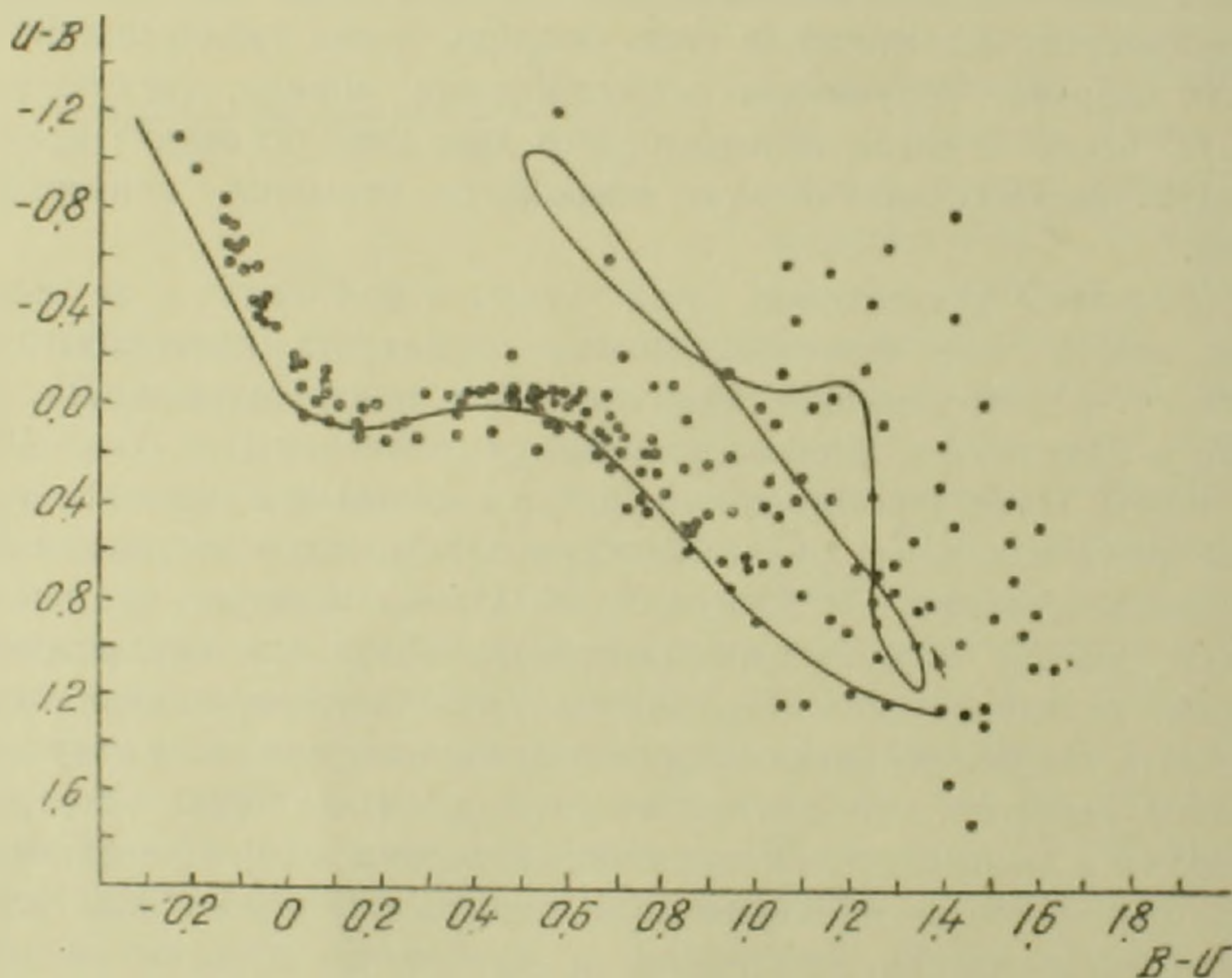
Сравнением показателей цвета звезды в максимуме с ее показателями цвета вне вспышки, можно определить цвет избыточной энергии, т. е. непрерывной эмиссии. Для показателей цвета этой эмиссии в максимуме блеска получаются значения $U - B = -1^m2$ и $B - V = 0^m0$. Нами ⁽⁵⁾ было показано, что минимальные значения показателей цвета излучения релятивистских электронов в магнитном поле равны соответственно -0^m90 и $+0^m05^*$. Отсюда следует, что энергия вспышки едва ли может быть интерпретирована как синхротронное излучение релятивистских электронов. С такой интерпретацией трудно согласовать также экспоненциальное падение интенсивности излучения, поскольку известно, что потери энергии релятивистских электронов происходят в зависимости от времени, аналогичной (3). Правда, можно предположить, что экспоненциальная зависимость представляет собой не закон высвечивания электронов, а зависимость от времени интенсивности их выброса. Но при этом необходимо предполагать, что

* Согласно А. Джою ⁽⁶⁾, во время вспышки UV Кита распределение энергии в спектре звезды соответствовало температуре, большей, чем 10000° . Это значит, что распределение энергии в спектре избыточного излучения соответствовало еще большей температуре. Если, например, считать, что во время вспышки блеск звезды вырос на 2 звездные величины, а непрерывный спектр звезды вне вспышки соответствовал $T = 3000^\circ$, то мы получим, что распределение энергии в спектре непрерывной эмиссии соответствует $T = 20000^\circ$. Это, в свою очередь, также свидетельствует против механизма синхротронного излучения, так как из ⁽⁵⁾ следует, что это излучение в фотографической области спектра должно быть менее голубым, чем излучение звезды типа АО.

электроны высвечиваются за очень короткие промежутки времени, а для этого требуются слишком большие напряженности магнитного поля и слишком высокие плотности релятивистских электронов.

Мы должны заключить, таким образом, что попытка согласования данных о нетепловом излучении вспышки H II 1306 с гипотезой излучения релятивистских электронов сталкивается с серьезными трудностями. Поскольку приведенные данные трудно согласовать также с представлением об энергии вспышки как энергии, излученной в эмиссионных линиях, то их можно рассматривать как дополнительные данные в пользу развитого В. А. Амбарцумяном (*) представления о действии в атмосферах нестационарных звезд неизвестных нам механизмов превращения внутризвездной энергии.

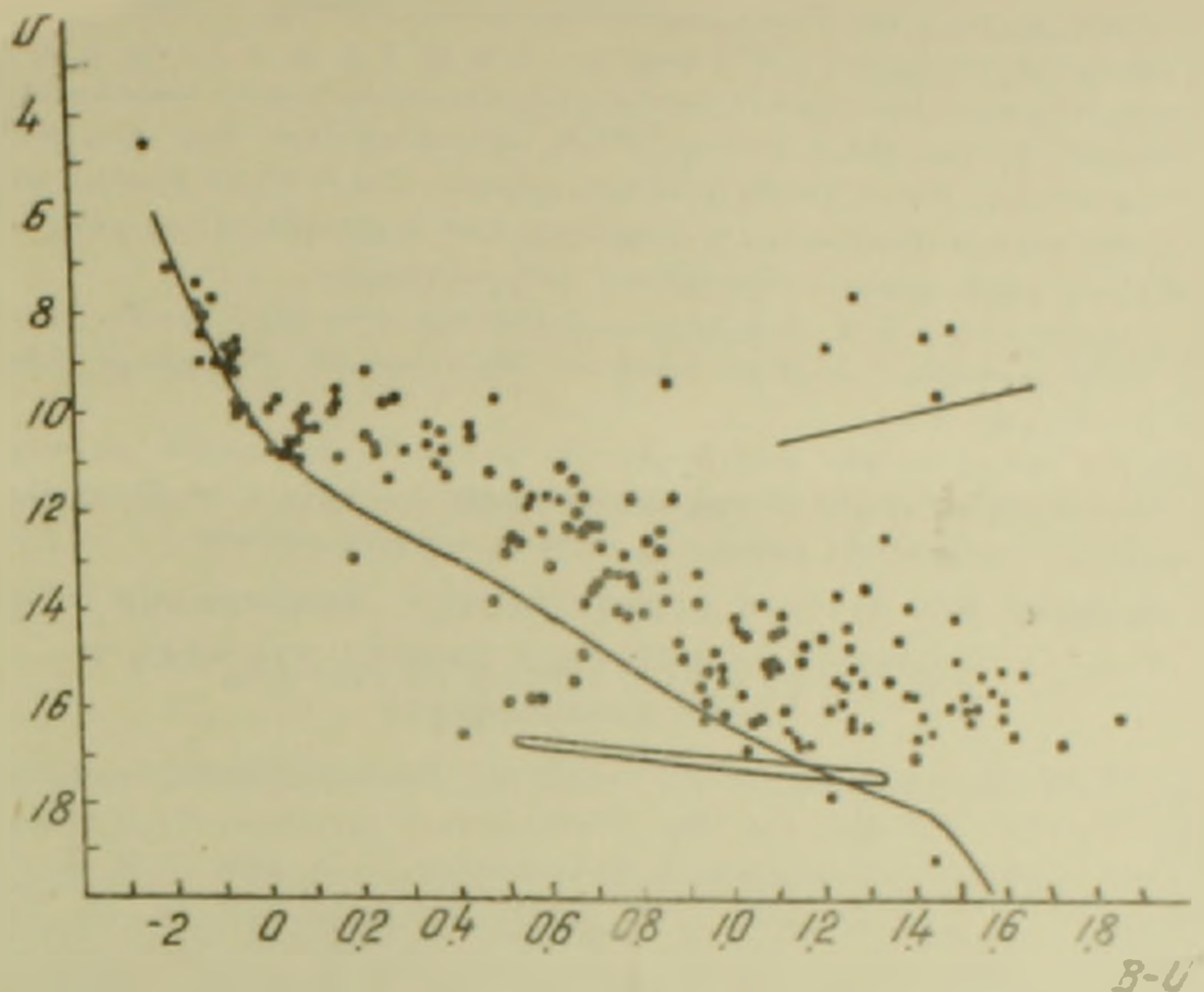
В заключение отметим следующий факт, который может представить интерес с точки зрения взаимоотношения звезд типов Т Тельца и UV Кита. На фиг. 4 и 5 приведены диаграммы $U-B$, $B-V$ и $V-B-V$, построенные М. Уокером (**) для звездного скопления NGC 2264.



Фиг. 4.

На этих диаграммах сплошными линиями нанесены последовательные положения звезды H II 1306 в течение вспышки (с учетом расстояния до двух скоплений). Обращают на себя внимание следующие два обстоятельства:

а) на обеих диаграммах последовательные положения вспыхивающей звезды в течение вспышки совпадают с областями, занимаемыми звездами типа Т Тельца; сходство было бы полным, если бы звезда до вспышки находилась выше главной последовательности;



Фиг. 5.

б) перемещение звезды на диаграмме $U, B-U$ происходит так же, как перемещение переменных типа Т Тельца на диаграммах, приведенных в работе П. Н. Холопова (*).

В свете этих фактов представляется возможным рассматривать звезды типа Т Тельца как сильно замедленные вспыхивающие звезды, наблюдаемые на различных фазах вспышки. При этом возможные наложения вспышек могут сильно усложнить как кривые блеска, так и спектры звезд этого типа. С таким представлением хорошо согласуется полученное Г. Аро ⁽¹⁰⁾ соотношение спектр--продолжительность вспышки. Если распространить это соотношение на звезды типа Т Тельца, относящиеся как правило к более ранним спектральным классам, чем вспыхивающие звезды, то продолжительность вспышек звезд типа Т Тельца должна достигать нескольких часов.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Азербайджанской ССР

Մ. Ա. ՍՈՍՔԵԼՅԱՆ

ԲԱՏԿԿՈՂ ԱՌՈՂԵՐԻ ՍԱԵԿՆՐԵՆՐՈՒՄ ԱՆՐԵՂԻԱՑ ԱՌԱՄՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Մշակված են HII 1306 կարմիր թզուկի բռնկման վերաբերյալ Զոնտանի և Միտչելի կողմից կատարված երեք դույնանի դիտումները: Մույց է տրված, որ U, B, V սխեմաներ երեք դույններում այդ բռնկման ինտենսիվության անկումը մաքրվածից հետո տեղի է ունենում էքսպոնենցիալ օրենքով: Բռնկման ամպլիտուդաների նորմալիզացիաներ երեք դույններում բացատրվում է բռնկման երկուսի շերտային բնույթը: Մյուս կողմից, ինտենսիվության անկման էքսպոնենցիալ օրենքը խոսում է էներգիայի որոշակի քանակության կարճատև ազատազրման և նրա հետագա առաքման տեսակետի ոգտին:

Բռնկման բնթացքում ազատագրված էներգիայի բանաձևը $U = B \cdot V$ «պեկտրա», տիրույթներում դերագանցում է 10^{11} էրգը:

Բռնկման ինտենսիվությամբ էրապոնենցիալ ալեկումբ դժգոք է համաձայնեցնել «ե-
լյատիվիստական» էլեկտրոնների ճառագայթման ինդիքների հետ: Իկյդ հիպոթեզի դեմ է
վկայում նաև ճառագայթման գույներ բռնկման մաքսիմումում: Բյուս կոզմից, վերոհիշյալ
էրապոնենցիալ «բենյո» հնարավոր չէ բացատրել նաև ենթադրելով, որ բռնկման էներ-
գիան հանգես է գալիս որպես ճառագայթման գծերի էներգիա:

Իկյա աժենը խոսում է Վ. Ն. Համբարձումյանի այն տեսակետի ոգտին, որ ալեկայուն
աստղերի մթնոլորտներում տեղի են ունենում ներաստգային էներգիայի մեափոխման
գեոեա ալեկայտ պրոցեսներ:

Բռնկվող աստղի գույնի փոփոխությունը բռնկման բնթացքում չի սարքերվում
T Ծուլի տիպի աստղերի գույնի փոփոխություններից: Իա հիմք է տալիս դիտել T Ծուլի
տիպի փոփոխականները որպես շափագանց դանդաղ բռնկվող աստղեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ A. Джой, M. Хьюмасон, P. A. S. P., 61, 133, 1948. ² Г. Джонсон, P. Митчелл, Ap. J., 128, 31, 1958. ³ Г. Аро, Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya, 11, 17, 1954. ⁴ В. А. Амбарцумян, Сообщения Бюраканской обсерватории, 13, 3, 1954. ⁵ М. А. Аракелян, ДАН Армянской ССР, 29, 35, 1959. ⁶ A. Джой, Non-Stable Stars, p. 31, Cambridge University Press, 1957. ⁷ В. А. Амбарцумян, Труды Четвертого совещания по вопро-сам космогонии, стр. 344, М., 1955. ⁸ M. Уокер, Ap. J. Suppl. Ser., 2, № 23, 1956. ⁹ П. Н. Холопов, Астр. журнал, 35, 434, 1958. ¹⁰ Г. Аро, Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya, 12, 3, 1955.

Ս. Տ. Օգանիսյան

**Опыт применения гравиметровой съемки при поисках
 и разведке слепых колчеданных рудных тел
 алавердского типа***

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. С. Мкртчяном 24. VI. 1959)

Институтом геологических наук Академии наук Армянской ССР в 1956 году были проведены опытные работы с гравиметром ГАК-ЗМ по выяснению возможностей гравиразведки при поисках и разведке медных и полиметаллических рудных тел алавердского типа. Опытный характер проведенных работ определялся не только постановкой геологической задачи, но и опробованием данного типа гравиметра при поисках и разведке слепых колчеданных рудных тел северной Армении.

Аналогичные опытные работы на месторождениях алавердского типа впервые ставились в 1954 году, однако гравиметровую съемку не удалось осуществить ввиду неисправности гравиметра и работы ограничились изучением плотности образцов, взятых из горных пород и руд данного района (1).

Результаты опытных работ, проведенных Геофизическим институтом Академии наук СССР (1930, 1941) и Армянской геофизической экспедицией (1956) методами электроразведки различных модификаций, магниторазведки и металлометрии на колчеданном месторождении северной Армении, показывают, что основные задачи, стоявшие перед геофизическими методами и заключавшиеся в прослеживании контакта между кварцевыми порфирами и порфиритами, а также в выявлении рудных тел, положительно не решались. Это объясняется, во-первых, выработанностью некоторых месторождений с поверхности и, во-вторых, тем, что высокие значения параметров электропроводности характерны не только для колчеданных руд, но и для некоторых рудовмещающих пород (2). Аномалии, создаваемые рудными телами и вмещающими породами, по характеру и интенсивности почти не отличаются друг от друга. Следовательно, электрические методы, основанные на этих

* Доклад, прочитанный на республиканском совещании по результатам геофизических исследований в Армении 3 сентября 1958 г. в г. Ереване.

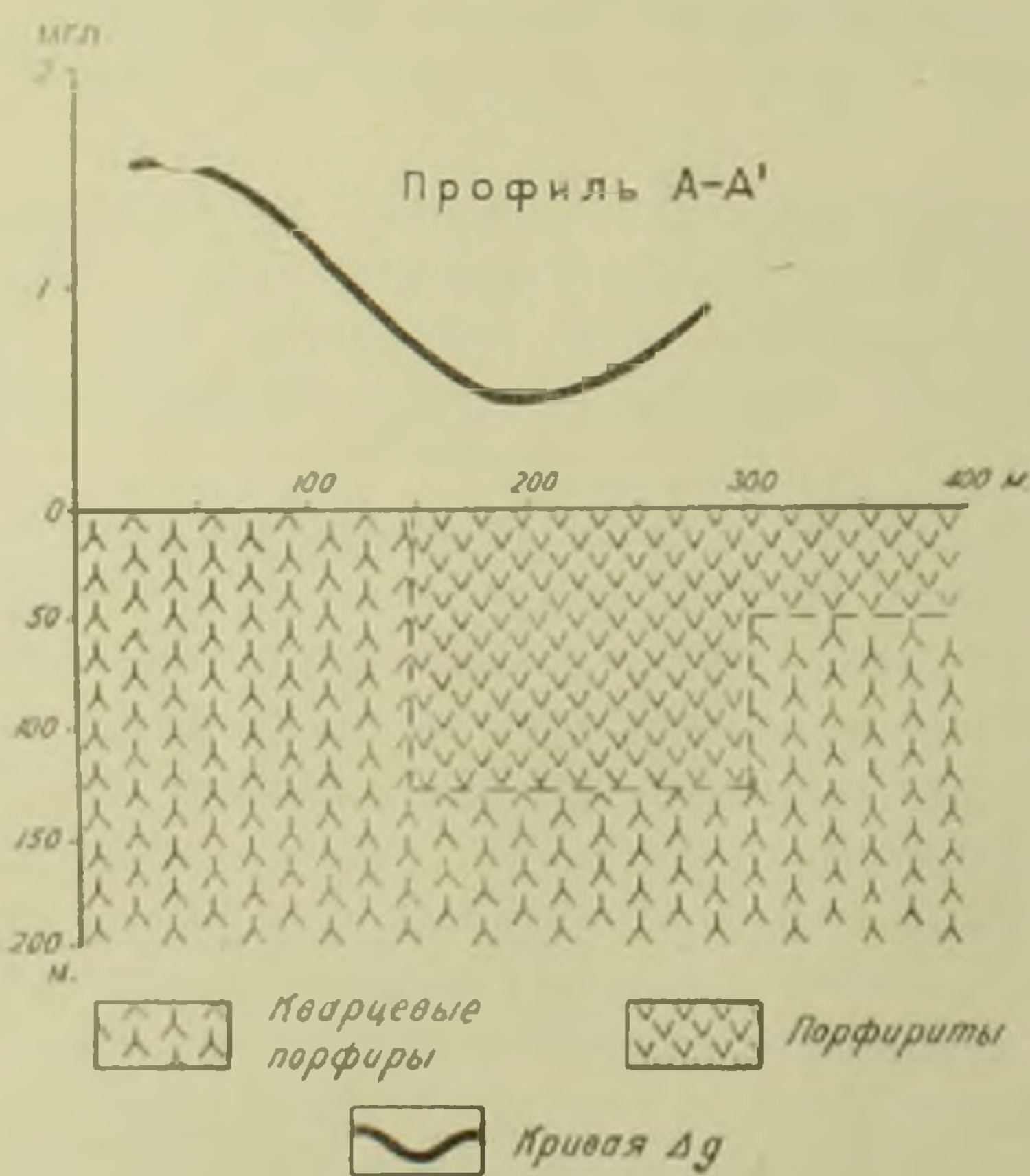
параметрах, не могут отделить рудные тела от вмещающих пород. В связи с этим возникла необходимость в подборе другого физического параметра, который позволил бы четко разграничить рудные тела от вмещающих пород. Изучение физических свойств горных пород и руд северной Армении показало, что таким параметром является плотность. Действительно, средняя плотность горных пород, слагающих геологический разрез месторождений колчеданных руд алавердского типа, с учетом удельных мощностей отдельных стратиграфических толщ, определенная по общепринятым формулам, составляет $2,7 \text{ г/см}^3$. Руды резко выделяются по своей плотности ($4,0 \text{ г/см}^3$) от вмещающих пород. Избыточная плотность составляет $1,3 \text{ г/см}^3$.

Следовательно, возможность обнаружения рудных тел методами гравиразведки во всех случаях определяется размерами и глубиной залегания этих тел, а также характером рельефа коренных пород.

Месторождения колчеданных руд алавердского типа пространственно связаны с субвулканическими интрузиями. Совершенно определенно отмечается также приуроченность оруденения к тектоническим структурам складчатого и разрывного характера как регионального, так и местного значения. Рудные тела имеют преимущественно линзообразную и гнездообразную форму. Встречается также оруденение жильного и прожилкового типов. Мощность рудных тел доходит до

10 метров; по простиранию и падению они прослеживаются на десятки и сотни метров (³).

На колчеданных месторождениях северной Армении все рудные тела, залегающие на небольшой глубине, оконтурены и почти полностью выработаны. Разрабатываемые в настоящее время рудные тела находятся на глубоких горизонтах. Гравитационные эффекты, создаваемые этими телами, не превышают $0,4-0,5 \text{ мгл}$. Следовательно, возможности гравиметровой съемки при поисках и разведке колчеданных руд-



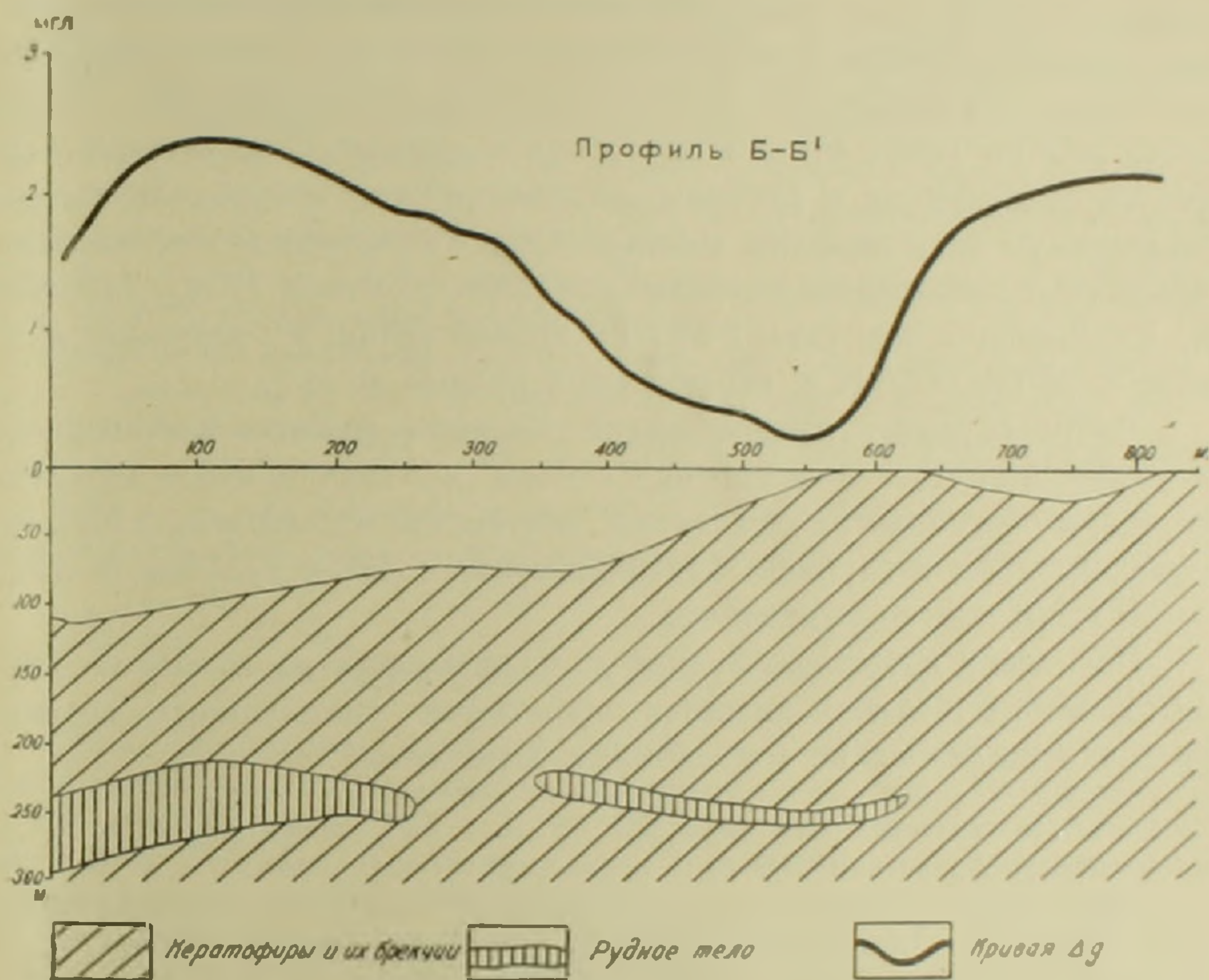
Фиг. 1.

ных тел алавердского типа весьма ограничены. Для выявления и прослеживания таких рудных тел необходимо повысить точность гравиметровой съемки. Имевшийся в нашем распоряжении гравиметр ГАК—3М обеспечивал среднюю точность съемки в пределах $0,3-$

0,5 мгл, что являлось одной из главных причин ограниченного применения гравиметрического метода с целью поисков и разведки рудных тел. Для выявления рудных тел гравиметром указанного типа, необходимо повысить точность его измерений до 0,1—0,2 мгл.

Максимальная точность, которая была нами достигнута при опытных работах, получалась равной 0,2 мгл. При такой точности измерений силы тяжести приходится считаться с рядом факторов, искажающих результаты наблюдений. К числу таких факторов относится рельеф окружающей местности, влияние которого несколько раз превышает величину аномалий, создаваемых рудными телами.

Нами были вычислены поправки за рельеф местности для всех



Фиг. 1.

пунктов. При вычислении поправок мы располагали топокартами с сечением горизонталей через 2 м, таблицами и номограммами, составленными П. И. Лукавченко (¹), и составленной нами палеткой. Влияние неровностей рельефа учитывалось на расстоянии 1 км от точки наблюдения. С увеличением радиуса палетки величина поправки становилась одинаковой для всех точек в связи с небольшой площадью съемки.

Гравиметровая съемка производилась на сравнительно небольшой площади (около 5 кв. км). Было задано 16 профилей вкрест простира-ния рудных тел и тектонических нарушений. Расстояние между профилями равнялось 100 метрам. Точки на профилях располагались на

расстоянии 20 метров друг от друга. На наиболее интересных в геологическом отношении участках, пункты наблюдений располагались гуще.

Результаты проведенных опытных работ представлены в виде графиков Δg по двум профилям (фиг. 1, 2). При общем рассмотрении гравиметрических профилей обращает на себя внимание, что съемкой достаточно уверенно фиксируются границы разных пород и некоторые рудные тела, расположенные сравнительно близко от земной поверхности. Профиль А—А (фиг. 1) пересекает контакты кварцевых порфиров и порфиритов, избыточная плотность которых составляет 0,1—0,2 г/см³. Наблюдаемый гравитационный эффект на этом профиле свидетельствует о возможности применения гравиметровой съемки для выявления и прослеживания структур, контролирующей оруденение. На профиле Б—Б (фиг. 2) аномалия Δg достигает величины 2,5 мг/г по левой ветви и находится в прямой качественной зависимости от мощности и глубины залегания рудного тела. Далее, резкий минимум силы тяжести соответствует уменьшению вертикальной мощности и увеличению глубины залегания рудного тела. Аномалия Δg , достигающая величины 2 мг/г по правой ветви, по величине и характеру весьма близка к наблюдаемой рудной зоне.

Таким образом, гравиметровой съемкой повышенной точности возможно выявить и проследить факторы, контролирующие оруденение, и при благоприятных условиях (достаточно избыточная плотность, формы, размеры и глубина залегания рудных тел и условия рельефа) можно вести поиски рудных тел.

Поскольку известные рудные тела находятся на глубоких горизонтах, целесообразным является проведение специальных гравиметрических исследований в подземных выработках.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Շ. Ս. ՇՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Գրավիմետրական դժանգման կիրառման փուլի Ալավերդու տիպի կոլչեդանային կուլը հանքային մարմինների որոնումների և էկսպլուզման ժամանակ

1956 թ. Հայկական ՄՍԽ Գիտությունների տեղեկատվության երկրաբանական ինստիտուտի կողմից կատարվել են փորձնական դրավիմետրական աշխատանքներ Ալավերդու տիպի պղնձի և բազմամետաղային հանքավայրերում դրավիմետրական դժանգման կիրառելիությունը պարզարանելու նպատակով: Կատարված աշխատանքները կրել են փորձնական բնույթ, ոչ միայն երկրաբանական հարցադրմամբ այլ և դրավիմետրի փորձարկման իմաստով:

Ալավերդու տիպի կոլչեդանային հանքային մարմինները տեղադրված են խոր հորիզոններում, որոնցով պայմանավորված դրավիտացիոն էֆեկտը չի գերազանցում 0,4—0,5 մգ/գ: Հետևաբար դրավիմետրական դժանգման կիրառման հնարավորությունը այդպիսի հանքային մարմինների վրա սահմանափակված է մեծ ճշտությամբ ունեցող դրավիմետրների

ըի բացակայութեան պատճառով: Մեր արամազրութեան տակ գտնվող ГЛК-3M գրավիմետրի միջին ճշտութիւնը, սովորական դժահանման մամանակ, հաճախ է 0,3—0,5 մվ: Կոլէկտանային կույր հանքային մարմինների հետախուզումը հնարավոր է կատարել այդպիսի գրավիմետրներով, եթե նրանց չափման ճշտութիւնը հասցնել մինչև 0,1—0,2 մվ: Լինանաձեծ ճշտութիւնը, որին հնարավոր է դառնալ փորձնական աշխատանքների մամանակ, հաճախ է 0,2 մվ:

Գժահանման աղպիսի ճշտութեան ղեկում ահհրաժէտ է հաշի առնել մի շարք գործոններ: Որոնք աղպաղում են ղիտարկման արդյունքները: Լեղպիսի գործոնների շարքին է դասվում տեղամասի սելեֆը: Որի աղղեցութիւնը մի քանի անգամ ղերաղանցում է հանքային մարմինների կողմիղ առաղացած անոմալիային: Լեղեֆի աղղեցութիւնը, որը որոշված է բոլոր կետերի համար, հասնում է մինչև 2 մվ:

Կատարված փորձնական աշխատանքների արդյունքները ներկայացված են ձգ-ի գրաֆիկներով: A—A՝ պրոֆիղը հատում է կվարց-պորֆիրների և պորֆիրիտների կոնտակտը, որոնղ խտութիւնների տարրերութիւնը կաղմում է 0,1—0,2 ղր/սմ: Դիտվող գրավիտաղիտն անոմալիան վկայում է այն մասին, որ գրավիմետրական գժահանումը հնարավոր է կիրառել հանքայնաղումը հսկող ստրուկտուրաներ հայտնարերելու և հետամտելու համար: B—B՝ պրոֆիղի ձախ մասում ձղ անոմալիան հասնում է 2,5 մվ և հանքային մարմնի հղորութեան և խորութեան հետ գտնվում է որակական հարաերութեան մեղ: Լյնուհետի ծանրութեան ուժի մինիմում արժերը համապատասխանում է հանքային մարմնի հղորութեան նվաղումին և նրա տեղաղման խորութեան ոճին: ձղ անոմալիան, որը աղ մասում հասնում է 2 մվ, ըստ մեղութեան և բնույթի մոտ է այն անոմալիային, որը ղիտվում է հանքային ղոնայի սահմաններում:

Լյսղխտվ մեծ ճշտութեամբ օժտված գրավիմետրական գժահանման օղնութեամբ հնարավոր է հայտնարերել և հետամտել հանքայնաղումը հսկող ստրուկտուրաներ, իսկ մի շարք բարենղաստ ողայմանների ղեկում կարելի է կատարել հանքային մարմինների հետախուղութիւն:

Մանի որ հայտնի հանքային մարմինները տեղաղրված են խորը հորիղոններում, աղա գրավիմետրական հետաղոտութիւնը նաղատակահարմար է կատարել հանքախորշերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. Б. Аджимамудов, Плотность горных пород и руд, и возможности гравиметрической разведки при изучении колчеданных месторождений алавердской группы, Библиотека ИГН АН АрмССР, Ереван, 1955. ² Д. Ф. Мурашов, Е. В. Беренгартен, А. В. Еченетово и Л. Д. Худякова, Электропроводность руд и горных пород, Издание геологического комитета, 1928. ³ С. С. Мкртчян, «Известия АН АрмССР», серия геологических и географических наук, том X, № 3 (1957). ⁴ П. И. Лукавченко, Таблицы и номограммы для вычисления поправок силы тяжести за рельеф местности при съемке гравиметрами, Госонтехиздат, 1951.

ԱԳՐՈՒԽԻՄԻԱ

Գ. Բ. Բաբայան և Ս. Ա. Կարապետյան

Некоторые особенности азотно-фосфорного питания эспарцета

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 30. III. 1959)

По вопросу удобрения эспарцета в литературе имеются разногласные данные. Одни авторы (¹⁻³) утверждают, что эспарцет совсем не реагирует на внесение удобрений, а фосфор даже отрицательно действует на урожай. Другие же (^{4,5}) приводят данные, показывающие положительное действие удобрений на эспарцет.

Разногласность этих данных объясняется тем, что опыты проводились в различных почвенно-климатических условиях и полученные данные распространялись вообще на культуру эспарцета. При этом не учитывались свойства почв, а отрицательное действие фосфора объяснялось биологической особенностью культуры эспарцета. Между тем, реакция эспарцета на внесение удобрений, в отличие от других бобовых культур, в более сильной степени зависит от карбонатности почвы. В действительности имеют место случаи как отрицательного, так и положительного действия удобрений на урожай эспарцета.

Нашей задачей было выяснить отзывчивость эспарцета на внесение удобрений на двух различных почвах Спитакского района: I — каштановой карбонатной (пос. Спитак¹, в пахотном слое которой содержится 2,7% гумуса, 5,9% CaCO_3 , 0,13% валовой P_2O_5 и II — выщелоченном черноземе (с. Мец Парни), который содержит 3,3% гумуса и 0,16% валовой P_2O_5 .

Вегетационные опыты проводились в сосудах Кирсанова, емкостью 3,5 литра, повторность опытов 3—5-кратная. Дозы удобрений: 0,7 г действ. вещества на сосуд.

Для сопоставления и выявления специфической реакции эспарцета на внесение удобрений параллельно проводились опыты с люцерной и яровой пшеницей, данные об урожаях которых приводятся в табл. 1. Яровая пшеница на каштановой карбонатной почве (почва I) сильно реагирует на внесение фосфора и очень слабо — на азот. На черноземе же (почва II), наоборот, она хорошо отзывается на азот и слабо на фосфор.

Реакция люцерны на каштановой карбонатной почве аналогична реакции пшеницы. На черноземе эффективность фосфора выше, чем азота.

Опыты с эспарцетом проводились в течение трех лет. При этом, почвы брались для каждого типа из одного и того же пункта ежегодно.

Данные табл. 2 показывают, что на каштановой карбонатной почве как азот, так и фосфор положительно действуют на урожай эспарцета. На выщелоченном черноземе азот, при отдельном внесении, дает

Таблица 1

Эффективность удобрений на исследуемых почвах

Схема опыта	Яр. пшеница, г/сосуд				Л ю ц е р н а					
	почва I		почва II		почва I			почва II		
	общий	зерно	общий	зерно	возд.-сух. вес г/сосуд. сумма пяти укосов	прибавка		возд.-сух. вес г/сосуд. сумма пяти укосов	прибавка	
						г	%		г	%
О	3,7	1,2	9,4	3,4	11,2	—	—	22,0	—	—
N	4,7	1,6	16,9	5,9	13,4	2,2	21	24,2	2,2	11
P	11,6	3,9	10,9	3,8	24,9	13,7	104	26,5	4,5	20

значительный эффект, а от фосфора урожай резко падает. В этом варианте растения имели вначале светло-зеленую окраску, затем постепенно, лишаясь хлорофилла, листья становились белесоватыми и растения погибали. При внесении азота отрицательное действие фосфора полностью устранялось. Очевидно, угнетающее действие фосфора обусловлено недостатком азота, в результате чего нарушается обмен азотистых веществ в растениях.

Таблица 2

Влияние минеральных удобрений на урожай эспарцета

Почва	Схема опыта	1 9 5 6 г.			1 9 5 7 г.			1 9 5 8 г.		
		возд.-сух. вес г/сосуд. сумма трех укосов	прибавка		возд.-сух. вес г/сосуд. сумма че- тырех уко- сов	прибавка		возд.-сух. вес г/сосуд. сумма че- тырех уко- сов	прибавка	
			г	%		г	%		г	%
I	О	12,0	—	—	13,9	—	—	13,0	—	—
	N	14,7	2,7	23	19,8	5,9	42	21,0	8,0	62
	P	21,2	9,2	77	19,0	5,1	37	17,7	4,7	36
	NP	21,5	9,5	79	26,4	12,5	90	—	—	—
II	О	11,9	—	—	12,8	—	—	16,3	—	—
	N	17,2	5,3	45	20,0	7,2	56	21,4	5,1	31
	P	5,8	—	—	9,0	—	—	12,0	—	—
	NP	24,5	12,6	106	21,9	9,1	71	—	—	—

Сопоставление данных урожаев яровой пшеницы, люцерны и эспарцета показывает, что эспарцет на обеих почвах сильнее реагирует на внесение азота, чем яровая пшеница и люцерна.

Специфическое отношение эспарцета к фосфору на черноземе, вероятно, объясняется его сильной способностью переводить трудно-растворимые фосфаты в доступные, в результате чего недостаток азота ощущается еще острее. На каштановой карбонатной почве такое нарушение не имеет места, так как эта почва сравнительно бедна фосфором, а ее карбонатность затрудняет деятельность корневой системы эспарцета по превращению нерастворимых фосфатов в доступные формы. Здесь имеет значение и тот факт, что доступного азота в этой почве сравнительно больше, чем в черноземе.

Для подтверждения факта о большом накоплении фосфора в растениях эспарцета на выщелоченном черноземе было определено содержание P_2O_5 в растениях (табл. 3). Данные показывают, что содержание фосфора в эспарцете, в варианте Р, на выщелоченном черноземе значительно больше, чем на каштановой карбонатной почве, что и очевидно приводит к нарушению нормальных физиологических процессов.

Таблица 3

Содержание P_2O_5 в надземной части и корнях эспарцета в % на воздушно-сухую навеску

Почва	Схема опыта	I укос		II укос	III укос	IV укос	
		надз. часть	корни	надз. часть	надз. часть	надз. часть	корни
I	O	0,40	0,32	0,52	0,49	0,59	0,99
	N	0,34	0,24	0,47	0,38	0,55	0,43
	P	0,65	0,82	0,78	0,83	0,75	1,16
II	O	0,52	0,63	0,77	0,71	0,57	1,30
	N	0,49	0,57	0,55	0,49	0,73	0,72
	P	1,41	2,05	1,73	0,97	0,91	2,03

Наблюдение над клубенькообразованием показало, что при внесении азота у эспарцета, на обеих почвах, не наблюдается такого угнетающего действия, как у люцерны, у которой в случае внесения азота клубеньки совершенно не образуются. Внесение фосфора положительно сказывается на образовании клубеньков, однако на выщелоченном черноземе, в варианте, где был внесен один фосфор уже со второго укоса, когда растения начинают угнетаться и погибать, клубеньки также погибают.

Объяснение отрицательного действия суперфосфата его кислотностью (4) неубедительно, так как в этом случае внесение азота, в виде аммиачной селитры совместно с суперфосфатом, не устраняло бы отрицательного действия фосфора.

Таким образом, эспарцет, в отличие от люцерны, на исследуемых почвах хорошо отзывается на внесение азотных удобрений. Отмечен факт отрицательного действия фосфора на урожай эспарцета на вы-

щелоченном черноземе, что, очевидно, объясняется способностью эспарцета извлекать из почвы много фосфора. в результате чего нарушается азотистый обмен и урожай резко падает. В условиях достаточного снабжения азотом отрицательное действие фосфора устраняется.

Отрицательное действие фосфора на урожай эспарцета на щелоченном черноземе представляет большой научный и практический интерес и является предметом дальнейшего изучения.

Лаборатория агрохимии
Академии наук Армянской ССР

Գ. Բ. ԲՄԲՈՅԱՆ ԵՎ Ս. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ

Կորնզանի պարարտագիտական ֆոսֆորական սինդատություն մի հանրապետական համալսարանում

Կորնզանի պարարտագիտական հարցերի վերաբերյալ դրականությամբ մեջ դրություն ունեն տարբեր կարծիքներ: Մի շարք հեղինակներ գտնում են, որ պարարտանյութերը կորնզանի բերքատվության վրա չափազանց ազդեցություն են թողնում, իսկ ֆոսֆորը բերքում նույնիսկ բացասական է ազդում: Որոշ հեղինակներ էլ ցույց են տալիս, որ պարարտանյութերն զգալի չափով բարձրացնում են կորնզանի բերքատվությունը:

Այդ տվյալների հակասականությունը բացատրվում է նրանով, որ փորձերը տարվել են տարբեր հողա-կլիմայական պայմաններում, և ստացված արդյունքները բնականաբար կորնզանի նկատմամբ, առանց հաշվի առնելու այն հանգամանքը, որ կորնզանի տարբերություն մյուս խիթենաձաղկավոր կուլտուրաների, չափազանց զգալի է հողի նկատմամբ: Իրականում, նայած թե ինչպիսի հողային պայմաններում է մշակվում կորնզանը, պարարտանյութերը կարող են և՛ բարձրացնել, և՛ իջեցնել նրա բերքատվությունը:

Աշխատանքի նստատեղի է եղել ուսումնասիրել կորնզանի վրա պարարտանյութերի ազդեցության բնույթը Սպիտակի շրջանի երկու տարբեր հողատիպերում (կարբոնատային շագանակագույն հող և յվացված սևահող):

Կորնզանի սպեցիֆիկ ռեակցիան բացահայտելու և համեմատական տվյալներ ստանալու նպատակով՝ այդ նույն հողերի վրա փորձեր են զրվել նաև դարնանացան ցորենի և առվույտի հետ: Այդ փորձերի արդյունքները ցույց են տվել, որ շագանակագույն հողում դարնանացան ցորենի բերքատվությունը խիստ կերպով բարձրանում է ֆոսֆորի իսկ ազոտի էֆեկտիվությունը համեմատաբար թույլ է արտահայտվում: Սևահողում, բնականապես, բարձր է ազոտի էֆեկտիվությունը, իսկ ֆոսֆորինը՝ ցածր:

Սովորյալ ռեակցիան պարարտանյութերի նկատմամբ շագանակագույն հողում նույնպես է դարնանացան ցորենին, իսկ սևահողում ֆոսֆորի էֆեկտիվությունը ավելի բարձր է քան ազոտին:

Կորնզանի պարարտագիտական փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ շագանակագույն հողում ինչպես ազոտը, այնպես էլ ֆոսֆորն զգալի կերպով բարձրացրել են բերքատվությունը: Սևահողում, առանձին ազոտը բարձրացրել է բերքատվությունը, իսկ ֆոսֆորը խիստ կերպով իջեցրել է այն: Այստեղ բույսերն սկզբնական շրջանում ունեցել են բաց-կանաչ գույն, այնուհետև աստիճանաբար դունաթափվել են և մահացել: Նրա ֆոսֆորի հետ հողի մեջ է մտցվել նաև ազոտ, ապա ֆոսֆորի բացասական ազդեցությունը լիովին վերացվել է:

Համեմատական է, որ ֆոսֆորի բացասական ազդեցությունը հետևանք է ազոտի պակասի, որը ավելի խիստ կերպով արտահայտվում է այն մասնակի, երբ ֆոսֆորի պարունակությունը բույսի մեջ միակողմանիորեն ավելանում է: Այդպիսի պայմաններում խախտվում է բույսի ազոտային սննդառությունը և բույսը մահանում է: Շագանակագույն

հոգում ֆոսֆորի միակողմանի ավելցուկ բույսի մեջ չի առաջանում. բանի որ այդ հողի կորրեկտությունը նւարափորություն չի տալիս կորնզանին յուրացնել մեծ քանակությամբ դժվարալույծ ֆոսֆատներ:

Այսպիսով, կորնզանը՝ ի տարբերություն ասիույտի, հետազոտվող հողերում ազատական պարարտանյութերի կիրառման շնորհիվ բերքի հավելում է տալիս: Ահա հողում միակողմանի ֆոսֆորական պարարտացումն իջեցնում է բերքատվությունը ազոտական նյութափոխանակության խախտման հետևանքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Ն Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Е. И. Бойко, Е. И. Лазня и А. Г. Снисаренко, Сборник научных трудов за 1944—1951 годы, Носовская Гос. селекционная опытная станция, 1953. ² Г. М. Давидовский, «Известия АН АрмССР» (биологические и сельскохозяйственные науки), т. IV, № 7 (1951). ³ Г. М. Давидовский, «Известия АН АрмССР» (биологические и сельскохозяйственные науки), т. IV, № 8 (1951). ⁴ Г. Ш. Асланян, Удобрение полевых культур в Армянской ССР, Ереван, 1958. ⁵ М. М. Буцерега, ДАН СССР, т. 81, № 2 (1952).

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

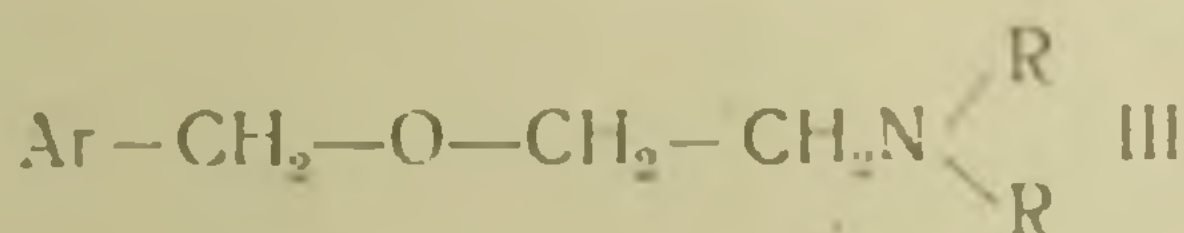
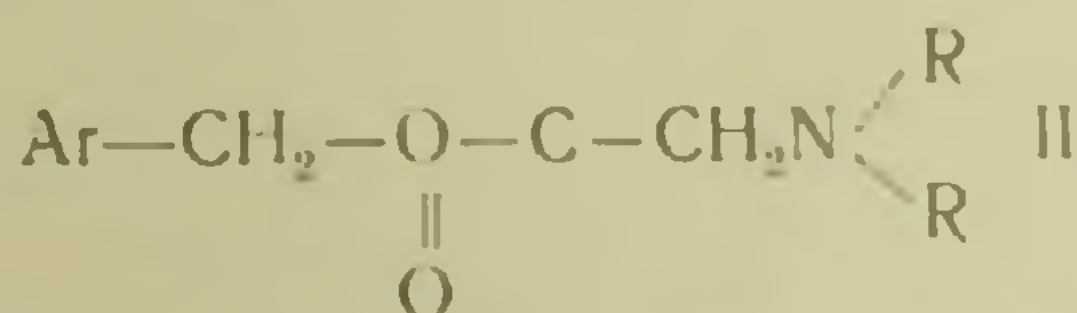
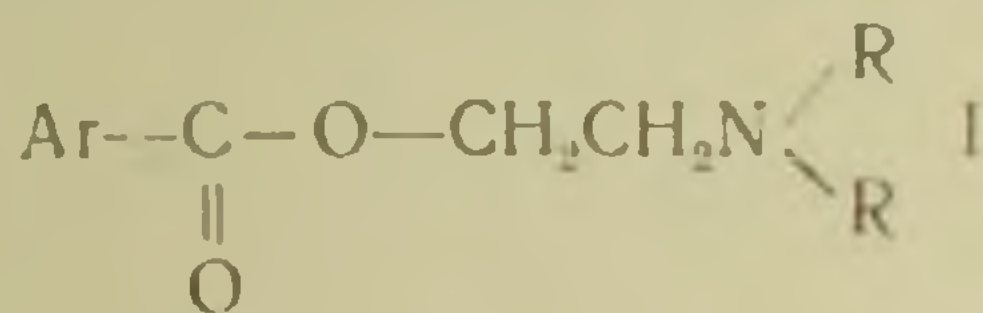
А. Л. Миджоян, академик АН Армянской ССР, Г. Т. Татевосян,
 С. Г. Агбалян и Р. Х. Бостанджян

Исследование в области простых аминоэфиров

Сообщение II. Синтез β-диалкиламиноэтиловых эфиров β,β,β-трехзамещенных
 этиловых спиртов.

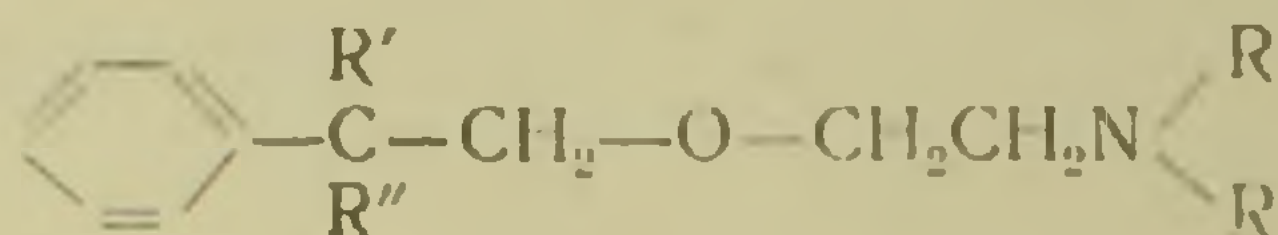
(Представлено 1. VIII. 1959)

Хорошо известна фармакологическая активность аминоэфиров различных органических кислот (I), а также некоторых изомерных им по структуре эфиров аминокислот (II). Некоторые простые аминоалкиловые эфиры (III), соответствующие по структуре активным холинотикам, например, аминоэфирам дифенилуксусной и бензиловой кислот, также обладают биологической активностью (I)

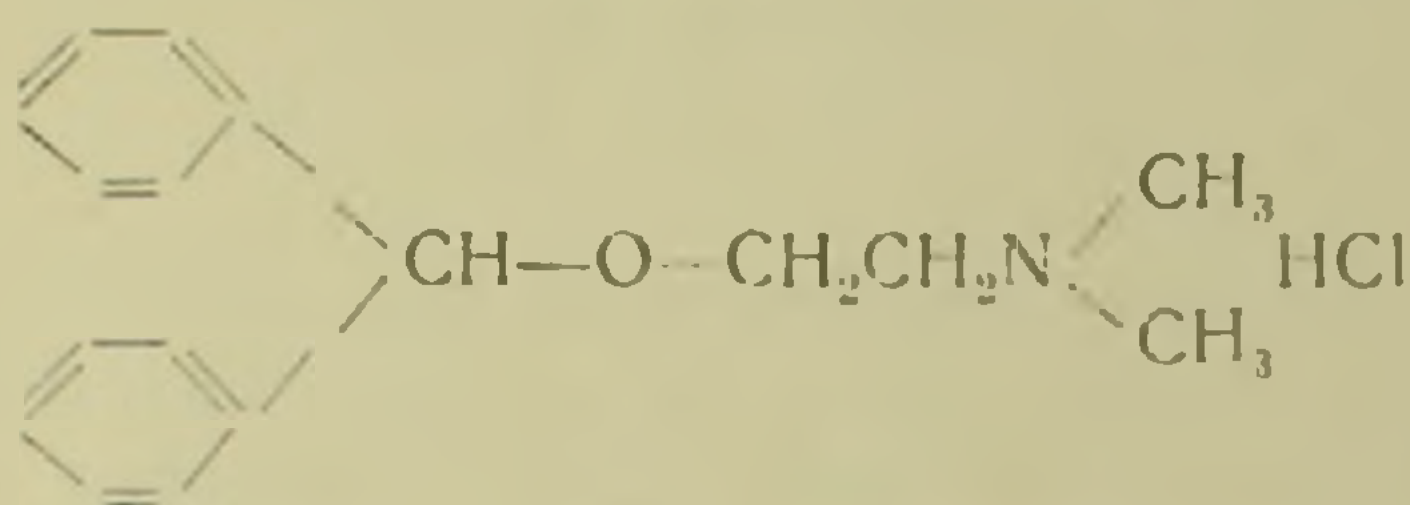


Вероятно сходством структур всех трех классов соединений (одинаковый углеродный скелет) и обусловлена их фармакологическая активность. Необходимо отметить, что аминоэфиры, простые аминоалкиловые эфиры и эфиры аминокислот синтезированы из крайне различных кислотных и спиртовых компонентов. Они содержат, несмотря на одинаковый углеродный скелет, разнообразные функциональные группы, наличием которых в молекуле определяются растворимость, основность, гидролизуемость и другие физико-химические свойства. Поэтому замена группы C=O в аминоэфирах на метиленовую (простые эфиры) может вызвать определенные изменения некоторых свойств препаратов, при сохранении их общебиологической ценности.

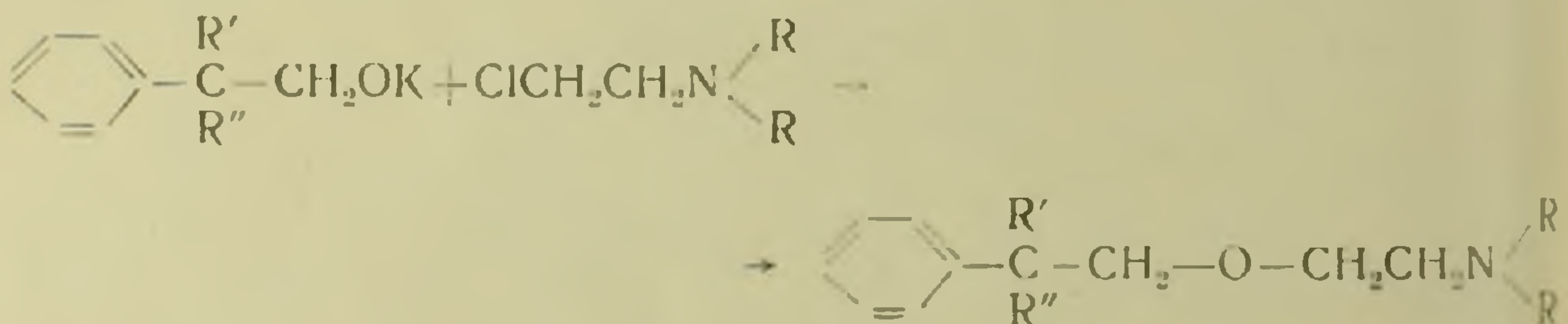
Продолжая наши исследования в области аминоэфиров трехзамещенных уксусных кислот, мы синтезировали диалкиламиноэтиловые эфиры β, β, β -трехзамещенных этиловых спиртов, представляющие собою ранее синтезированные диалкиламиноэтиловые эфиры диалкилфенил- и дифенилалкилуksусных кислот, в которых группа CO заменена метиленовой (²).



Литературные данные позволяют предполагать, что биологическая активность синтезированных соединений представит определенный интерес. В частности, заслуживает внимания структурное сходство синтезированных нами аминоэфиров с активными противогистаминными препаратами, например, бенадрилом.



Для получения вышеприведенных соединений алкоголяты β, β, β -диалкилфенил- и β, β, β -дифенилалкилэтанола, синтезированных ранее нами, конденсировались с диалкиламиноэтилхлоридами (³).

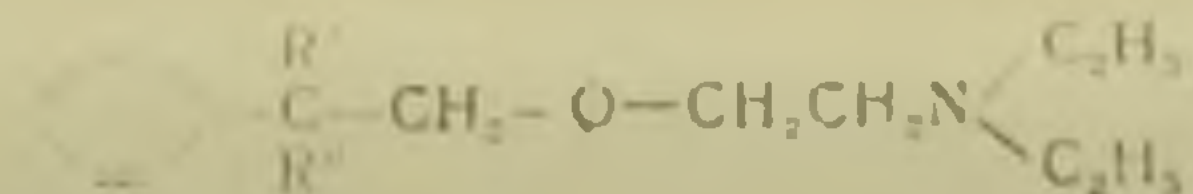


I $\text{R} = \text{CH}_3; \text{C}_2\text{H}_5; \text{R}' = \text{C}_6\text{H}_5; \text{R}'' = \text{CH}_3; \text{C}_2\text{H}_5; \text{C}_3\text{H}_7; \text{C}_4\text{H}_9.$

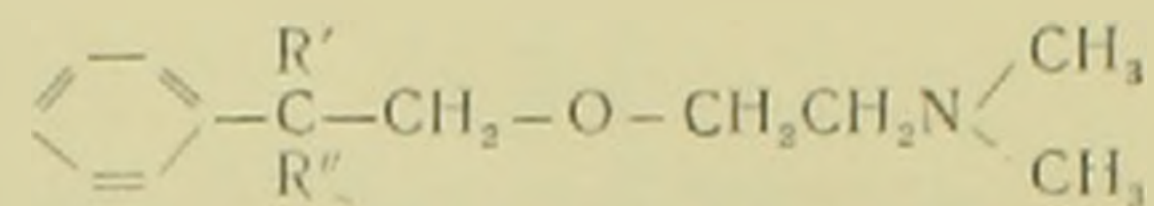
II $\text{R} = \text{CH}_3; \text{C}_2\text{H}_5; \text{R}' \text{ и } \text{R}'' = \text{CH}_3; \text{C}_2\text{H}_5; \text{C}_3\text{H}_7; \text{C}_4\text{H}_9.$

Металлический натрий реагирует с β -трехзамещенными этиловыми спиртами чрезвычайно трудно. Даже с металлическим калием в среде кипящего абсолютного бензола образование алкоголята происходит за 15—20 часов. При применении абсолютного толуола время образования алкоголята сокращается, причем замечено, что спирты с меньшими углеводородными радикалами реагируют в тех же условиях гораздо быстрее.

Синтезированные эфиры охарактеризованы в виде хлоргидратов и четвертичных аммониевых солей.



R	R''	Выход в %	Точка кипения в °C	Давление в мм	d_4^{20}	n_D^{20}	MRD		Анализ в %						Температура плавления солей в °C		
									N		C		H		хлоридатов	йодметилатов	йодэтилатов
							вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено			
CH ₃	CH ₃	66,3	135—140	4—5	0,9282	1,4865	78,01	77,15	5,61	5,60	77,05	76,94	10,91	10,89	104	106	90
CH ₃	C ₂ H ₅	65,7	140—142	1	0,9266	1,4865	82,68	81,68	5,32	5,04	77,51	77,28	11,00	10,97	—	—	84—85
CH ₃	C ₃ H ₇	60,0	146—150	1	0,9207	1,4866	87,30	86,59	5,05	4,88	77,93	77,55	11,30	11,12	70	—	98—100
CH ₃	C ₄ H ₉	50,0	150—168	3—4	0,9147	1,4860	91,92	91,45	4,81	4,76	78,31	79,09	11,41	10,71	—	—	—
C ₂ H ₅	C ₃ H ₅	57,8	144—147	1	0,9105	1,4858	87,30	87,15	5,05	5,38	77,93	78,24	11,30	11,33	96—98	—	—
C ₂ H ₅	C ₃ H ₇	54,6	162—168	1	0,9080	1,4850	91,92	91,99	4,81	4,49	78,31	78,33	11,41	11,34	—	—	—
C ₂ H ₅	C ₄ H ₉	65,7	198—200	3—4	0,9181	1,4895	96,51	96,11	4,58	4,51	78,65	78,02	11,55	11,45	—	—	—
C ₃ H ₇	C ₃ H ₇	63,0	180—182	5	0,9148	1,4840	96,54	95,63	4,58	4,87	78,65	79,01	11,55	11,82	97—98	126—127	—
C ₃ H ₇	C ₄ H ₉	72,0	151—157	1	0,9218	1,4830	101,16	98,96	4,38	4,49	78,96	79,21	11,67	10,48	—	—	—
C ₄ H ₉	C ₄ H ₉	63,6	178—182	2	0,9084	1,4850	105,77	105,24	4,20	4,21	79,21	79,02	11,71	11,30	—	—	—
CH ₃	C ₆ H ₅	52,0	195—200	1	1,0309	1,5385	97,56	97,57	4,49	4,30	80,99	80,63	9,38	9,39	142	116—117	122—123
C ₂ H ₅	C ₆ H ₅	53,6	186—189	1	0,9934	1,5366	101,17	102,29	4,30	3,99	81,17	80,96	9,60	9,76	141	96—97	98—99
C ₃ H ₇	C ₆ H ₅	50,5	202—207	4	0,9830	1,5332	106,79	107,22	4,16	3,86	81,36	81,11	9,79	9,54	64—67	133	—
C ₄ H ₉	C ₆ H ₅	51,7	190—195	1	0,9887	1,5300	111,41	110,46	3,96	4,08	81,52	81,70	9,98	9,97	76	149	—



R	R'	Выход в %	Точка кипения в °C	Давление в мм	d_4^{20}	n_D^{20}	MRD		А н а л и з в %						Температура плавления солей в °C		
									N		C		H		хлоргидратов	йодметилатов	йодэтилатов
							вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено			
CH ₃	CH ₃	67,8	110—113	3	0,9709	1,5065	68,36	67,77	6,33	6,15	75,98	75,60	10,47	10,54	123	134	93—95
CH ₃	C ₂ H ₅	50,5	118—125	1	0,9550	1,4930	74,45	74,62	5,95	5,80	76,56	75,59	10,70	10,56	—	92—94	—
CH ₃	C ₃ H ₇	58,3	140—143	4	0,9387	1,4890	78,07	76,67	5,61	5,34	77,05	77,21	10,91	10,79	—	—	—
CH ₃	C ₄ H ₉	65,4	129—135	1—2	0,9513	1,5020	82,69	81,74	5,32	5,67	77,51	77,22	11,09	10,71	—	—	—
C ₂ H ₅	C ₂ H ₅	61,7	132—135	1	0,9526	1,5060	78,07	77,79	5,61	5,43	77,05	77,27	10,91	10,69	—	—	—
C ₂ H ₅	C ₃ H ₇	63,1	145—146	3	0,9380	1,4908	82,69	81,30	5,32	5,27	77,51	77,79	11,09	11,18	—	—	—
C ₂ H ₅	C ₄ H ₉	64,5	149—153	1—2	0,9389	1,4995	86,97	86,80	5,05	5,15	77,93	77,19	11,30	11,54	—	—	—
C ₃ H ₇	C ₃ H ₇	60,0	160—167	5	0,9431	1,4880	86,97	84,72	5,05	4,80	77,93	77,70	11,30	10,94	—	—	—
C ₃ H ₇	C ₄ H ₉	67,8	147—152	1	0,9333	1,4860	91,92	89,66	4,81	4,82	78,31	78,46	11,41	11,55	—	—	—
C ₄ H ₉	C ₄ H ₉	61,1	190—193	7	0,9287	1,4960	96,54	96,25	4,58	4,21	78,65	79,85	11,55	11,30	—	—	—
CH ₃	C ₆ H ₅	50,5	160—165	1	1,0387	1,5435	88,32	86,06	4,52	4,85	80,52	80,85	8,89	9,20	144	169	104—105
C ₂ H ₅	C ₆ H ₅	40,9	170—175	1	1,0181	1,5505	92,94	93,13	4,71	5,03	80,64	80,86	9,15	9,04	136	142	—
C ₃ H ₇	C ₆ H ₅	54,0	180—182	2	1,0004	1,5404	97,56	97,73	4,49	4,29	80,99	81,22	9,38	9,25	122	146	97
C ₄ H ₉	C ₆ H ₅	41,7	208—212	6	1,0114	1,5427	101,39	93,2	4,30	4,02	81,17	81,19	9,69	9,29	127	104	97—99

Экспериментальная часть. Диалкиламиноэтиловые эфиры 3,3-диалкилфенил- и 3,3-дифенилалкилэтанолов. В колбу, снабженную механической мешалкой, обратным холодильником с хлоркальцевой трубкой и капельной воронкой, помещают 0,05 моля 3,3, 3-трехзамещенного этилового спирта, растворенного в 75 мл абсолютного толуола. Быстро вносят в колбу 2 г металлического калия, нарезанного мелкими кусочками. Смесь кипятят 2—8 часов, до полного растворения калия. Немного охладив колбу (толуол не должен кипеть) прибавляют через капельную воронку 0,06 моля диалкиламиноэтилхлорида. Реакция сильно экзотермична. Почти сразу же выпадает осадок хлористого калия. Для завершения реакции смесь кипятят еще 4—6 часов. Охлажденную смесь сливают на воду, экстрагируют дважды эфиром, эфирно-толуольные экстракты промывают избытком 10% соляной кислоты. Аминоэфир выделяют из солянокислых растворов содой, затем экстрагируют его в несколько приемов 250 мл эфира. Эфирные экстракты высушивают над прокаленным сульфатом натрия, остаток после отгонки эфира перегоняют в вакууме.

Полученные аминоэфиры—высококипящие жидкости, окрашенные в светло-желтые тона, иногда имеют приятный запах.

Выходы и физико-химические свойства полученных соединений приведены в таблицах.

Хлоргидраты аминоэфиров получены действием на их эфирные растворы сухого хлористого водорода, растворенного в эфире. Хлоргидраты представляют собою белые кристаллические вещества, однако многие из них сильно гигроскопичны, вследствие чего выпадают в виде масел.

Четвертичные соли получены действием йодистого метила и йодистого этила на эфирные растворы аминоэфиров. Соли выкристаллизовываются из эфира, часть выпадает в виде тяжелых масел.

Выводы. Конденсацией алкоголятов 3, 3, 3-трехзамещенных этиловых спиртов с диалкиламиноэтилхлоридами синтезирован ряд новых аминоэфиров, интересных в аспекте их биологической активности.

Институт тонкой органической химии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Լ. ՄԱՋՈՅԱՆ, Գ. Տ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ, Ս. Գ. ԱՂԲԱԼՅԱՆ ԵՎ Ռ. Խ. ԲՈՍՏԱՆՋՅԱՆ

Հետազոտությունն հասարակամիջոցների բնագավառում

Հաղորդում II: 3, 3, 3-Նուեղակալված էրիլ սպիրտների 3-դիալկիլամինների քիմիական սինթեզը

Որոշ ամինալիկիլ հթերներ, որոնք կառուցվածքով համապատասխանում են ալիլիկ և օլիգոէթերներին, ինչպես օրինակ դիֆենիլ քաջախաթթվի և բենզիլաթթվի ամինաէթերները, նույնպես օժտված են բիոլոգիական ալիլիկությամբ:

Մենք միշտ պահպանում ենք իրավունքները և իրավունքները մեր հայրենիքի հանդեպ և իրավունքները մեր հայրենիքի հանդեպ:

¹ С. Г. Кузнецов, Э. И. Бобышев, ЖОХ, 28, 521 (1958). ² А. Л. Митюков, Г. Т. Татевосян, С. Г. Агбалян, ДАН АрмССР, XXV, № 1-11 (1957). ³ А. Л. Митюков, Г. Т. Татевосян и С. Г. Агбалян, ДАН АрмССР — в печати.

