ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

XXVIII, № 3
1959

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս. Ա. Լ. ՄՆՋՈՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ թղթակից անդամ. Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր). Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Ա. Լ. ՄՆՋՈՅԱՆ. ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս. Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ. ՀՍՍՌ ԳԱ թղթակից անդամ. Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. ՀՍՍՌ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ):

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик АН АрмССР (отв. редактор). Г. С. ДАВТЯН, академик АН АрмССР. М. М. ДЖРБАШЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора). В. О. КАЗАРЯН. А. Л. МНДЖОЯН, академик АН АрмССР. А. Г. НАЗАРОВ, чл.-корресп. АН АрмССР. А. Л. ТАХТАДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկա

Հ. Մ. Մարտիրոսյան—*Մի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների լրիվության մասին* 97

Առաձգականության տեսություն

Բ. Լ. Աբրահամյան—*Սեպաձև քնդերկայնական ակոսներով կլոր գլանաձև ձողերի ոլորումը* 109

Ֆիզիկա

Ֆ. Ռ. Հարությունյան, Թ. Լ. Ասաթիանի, Վ. Մ. Գրիգորյան և Ռ. Հ. Շահխաթունյան—*Մեզոնների ցրումը պղնձի մեջ* 111

Գ. Ս. Սահակյան—*Ինդուկցված չերենկովյան ճառագայթում* 121

Քիմիական տեխնոլոգիա

Ա. Մ. Գասպարյան և Ա. Հ. Ջամբինյան—*Մոնոդիսպերս սուսպենզիայի ուղղահայաց շարժումը* 129

Բույսերի ֆիզիոլոգիա

Վ. Հ. Վազարյան և Է. Ս. Հավունջյան—*Ծագկափթթության վերած ցույց տվող կարճ օրվա պերիլլայի տերևների ամինոթթվային կազմի փոփոխության մասին* 131

Արախնոլոգիա

Ա. Տ. Բաղդասարյան.—Petrobia *սեռի նոր տեսակներ Հայաստանից* 139

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

Р. М. Мартиросян—О полноте решений одного интегро-дифференциального уравнения 97

Теория упругости

Б. Л. Абрамян—Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы 109

Физика

Ф. Р. Арутюнян, Т. А. Асатиани, В. М. Крищян и *Р. О. Шархатунян*—Рассеяние μ-мезонов в меди 117

Г. С. Саакян—Индуцированное черенковское излучение 121

Химическая технология

А. М. Гаспарян А. А. Заминян—Вертикальное движение монодисперсной суспензии 127

Физиология растений

В. О. Казарян и *Э. С. Авунджян*—Об изменении аминокислотного состава листьев краснолистной периллы, показывающей вегетативное израстание соцветия 133

Арахнология

А. Т. Багдасарян—Новые виды рода Petrobia из Армянской ССР (Acarina Tetranychoidea) 139

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О полноте решений одного интегро-дифференциального уравнения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28. II. 1959)

В работе рассматривается вопрос о полноте в $L_2(0, \infty)$ суммируемых с квадратом решений $\psi(x, \lambda_n)$ уравнения

$$\psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x, \lambda) + \int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt = 0 \qquad (1)$$

при $\lambda = \lambda_n$ в предположении, что решения $\varphi(x, \lambda_n)$ уравнения

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x))\varphi(x, \lambda) = 0 \qquad (2)$$

при тех же $\lambda = \lambda_n$ образуют полную систему. Оказывается, что если функции $\varphi(x, \lambda_n)$ образуют полную ортонормальную систему, то к уравнению (1) можно присоединить некоторое неоднородное уравнение того же типа и поставить для нее определенную задачу Коши так, чтобы решения $\chi(x, \lambda_n)$ этой задачи были суммируемы с квадратом на полуоси и дополняли фукции $\psi(x, \lambda_n)$ до полной биортогональной системы. Как следствие получается одно обобщение известной теоремы Мюнца о полноте системы степеней.

Рассматриваемая задача в несколько иной постановке была впервые предложена М. М. Джрбашяном, и ряд интересных результатов по обобщенной задаче Штурма-Лиувилля для интегро-дифференциальных уравнений такого рода был получен А. Б. Нерсесяном [1].

В основном результаты получены путем построения соответствующих операторов преобразования, переводящих решения уравнения (2) в решения уравнения (1). Во всем дальнейшем будем предполагать, что $q(x)$—гладкая комплекснозначная функция, а $r(x)$ и $T(x, t)$—гладкие комплекснозначные и финитные функции (т. е. обращаются в нуль вне некоторых компактов), причем $T(x, t)$ задана в угле $0 \leqslant x \leqslant t$. При этом на рост функции $q(x)$ никаких ограничений не накладываем, а значения параметра λ считаем, вообще говоря, комплексными. Переходя к построению указанных операторов преобразования, докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. *В области* $0 \leqslant x \leqslant t$ *существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое финитное решение уравнения*

$$K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) + (q(t) - q(x) - r(x)) K(x, t) +$$

$$+ T(x, t) + \int_x^t T(x, s) K(s, t)\, ds = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty r(t)\, dt. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью обычной замены переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ нетрудно убедиться, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче об определении дважды непрерывно-дифференцируемого и финитного решения $u(\xi, \eta)$ уравнения

$$u(\xi, \eta) = -\int_\xi^\infty \left\{ \int c(s, t)\, u(s, t)\, dt \right\} ds -$$

$$- \int_\xi^\infty \left\{ \int_\eta^0 T_1(s, t)\, dt \right\} ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{\xi}{2}}^\infty r(t)\, dt -$$

$$- \int_\xi^\infty \left\{ \int_\eta^0 \left[\int_t^0 T_2(s, t; x)\, u(x + s - t, x)\, dx \right] dt \right\} ds \tag{5}$$

в области $0 \leqslant -\eta \leqslant \xi < \infty$, где положено

$$c(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left\{ q\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) - q\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - r\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \right\},$$

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} T\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

$$T_2(\xi, \eta; t) = \frac{1}{4} T\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{2t + \xi - \eta}{2}\right).$$

Ясно, что $T_1(\xi, \eta)$ обращается в нуль при достаточно больших ξ и $T_2(\xi, \eta; t)$ обращается в нуль при достаточно больших $\xi + t$.

Предположим N настолько большим, чтобы $r(x) = 0$ при $x \geqslant 2N$, $T_1(\xi, \eta) = 0$ при $\xi \geqslant N$ и $T_2(\xi, \eta; t) = 0$ при $\xi + t \geqslant N$. Далее, пусть

$$|c(s, t) N| \leqslant M \quad (0 \leqslant s \leqslant N, \quad -N \leqslant t \leqslant 0),$$

$$|T_1(s, t)| \leqslant M, \quad |T_2(s, t; x) N^2| \leqslant M, \quad |r(t)| \leqslant 2M.$$

Решая уравнение (5) методом последовательных приближений, положим

$$u_0(\xi, \eta) = -\int_{\xi}^{\infty}\left\{\int_{\eta}^{0} T_1(s, t)\,dt\right\}ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty} r(t)\,dt. \tag{6}$$

Далее, n-ое приближение $u_n(\xi, \eta) = 0$ при $\xi \geqslant N$, как это видно из (5) и (6), ибо всегда $\xi \leqslant x + s - t$. Чтобы оценить $u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)$, заметим, что

$$u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta) = -\int_{\xi}^{\infty}\left\{\int_{\eta}^{0} c(s, t)\,(u_{n-1}(s, t) - u_{n-2}(s, t))\,dt + \right.$$

$$+ \int_{\eta}^{0}\left[\int_{s}^{s-t} T_2(s, t; \lambda + t - s)\,(u_{n-1}(\lambda, \lambda + t - s) - \right.$$

$$\left.\left. - u_{n-2}(\lambda, \lambda + t - s))\,d\lambda\right]dt\right\}ds.$$

Отсюда, учитывая вытекающую из (6) оценку $|u_0(\xi, \eta)| \leqslant 2MN^2$, получим без труда

$$|u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)| \leqslant 2MN^2\,\frac{(2M)^n (N - \xi)^n}{n!},$$

что и доказывает лемму. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x, \lambda)$ *есть произвольное решение уравнения* (2). *Тогда, если* $K(x, t)$ *есть решение задачи* (3)—(4), *то функция*

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_{x}^{\infty} K(x, t)\,\varphi(t, \lambda)\,dt \tag{7}$$

является решением уравнения (1). *Обратно, всякое решение уравнения* (1) *представимо в виде* (7), *где* $\varphi(x, \lambda)$ *некоторое решение уравнения* (2).

Доказательство. Пусть $\psi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (2). Определив отсюда $\lambda\varphi(x, \lambda)$, пользуясь финитностью $K(x, t)$ и дважды интегрируя по частям, находим

$$\lambda\psi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda) + \int_{x}^{\infty}\{q(t)\,K(x, t) - K_{tt}(x, t)\}\,\varphi(t, \lambda)\,dt +$$

$$+ K(x, x)\,\varphi'(x, \lambda) - K_t(x, t)|_{t=x}\,\varphi(x, \lambda).$$

Далее, меняя порядок интегрирований, без труда убеждаемся, что

$$\int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt = \int_x^\infty \left\{ T(x, t) + \int_x^t T(x, s) K(s, t)\,ds \right\} \varphi(t, \lambda)\,dt.$$

Теперь уже нетрудно видеть, что

$$\psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x, \lambda) + \int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt =$$

$$= \int_x^\infty \left\{ K_{x^2}(x, t) - K_{t^2}(x, t) + (q(t) - q(x) - r(x)) K(x, t) + \right.$$

$$\left. + T(x, t) + \int_x^t T(x, s) K(s, t)\,ds \right\} \varphi(t, \lambda)\,dt -$$

$$- \left(K_x(x, t)_{|t=x} + K_t(x, t)_{|t=x} + \frac{dK(x, x)}{dx} + r(x)\right)\varphi(x, \lambda).$$

Этим доказана первая часть теоремы. Чтобы доказать вторую часть, обозначим через $R(x, t)$ резольвенту ядра $K(x, t)$. Пусть $\psi(x, \lambda)$ какое-нибудь решение уравнения (1). Положим

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) - \int_x^x R(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt. \tag{8}$$

Как и выше, нетрудно убедиться прямым вычислением, что

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x))\varphi(x, \lambda) = \psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x))\psi(x, \lambda) +$$

$$+ \int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda)\,dt + \int_x^\infty \left\{ R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) + (q(x) - \right.$$

$$\left. - q(t) - r(t) R(x, t) + \int_x^t R(x, s) T(s, t)\,ds - T(x, t) \right\} \psi(t, \lambda)\,dt +$$

$$+ \left(R_t(x, t)_{|t=x} + R_x(x, t)_{|t=x} + \frac{dR(x, x)}{dx} + r(x) \right)\psi(x, \lambda).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться доказанной ниже леммой 2. Однако, прежде чем перейти к доказательству этой леммы, обозначим через $R(x, t)$ резольвенту ядра $K(x, t)$ и напомним, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R(x, t) &= K(x, t) - \int_x^t K(x, s) R(s, t)\,ds, \\ R(x, t) &= K(x, t) - \int_x^t R(x, s) K(s, t)\,ds, \end{aligned} \tag{9}$$

которые показывают, что $R(x, t)$ финитна и дважды непрерывно дифференцируема.

Лемма 2. Резольвента $R(x, t)$ ядра $K(x, t)$ может быть определена как единственное финитное решение уравнения

$$R_{tt}(x, t) - R_{xx}(x, t) + (q(x) - q(t) - r(t)) R(x, t) + \\ + \int_x^t R(x, s) T(s, t)\, ds - T(x, t) = 0 \tag{10}$$

в области $0 \leqslant x \leqslant t$, удовлетворяющее условию

$$R(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty r(t)\, dt. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ произвольное решение уравнения (2). Как мы уже видели, функция $\psi(x, \lambda)$, определенная формулой (7), удовлетворяет уравнению (1), и $\varphi(x, \lambda)$ может быть выражена через $\psi(x, \lambda)$ посредством равенства (8). Отсюда, точно таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, дважды применяя интегрирование по частям и используя финитность $R(x, t)$, а также тождество

$$\int_x^\infty R(x, t) \left\{ \int_t^\infty T(t, s) \psi(s, \lambda)\, ds \right\} dt = \int_x^\infty \left\{ \int_x^t R(x, s) T(s, t)\, ds \right\} \psi(t, \lambda)\, dt,$$

выразим $\lambda\varphi(x, \lambda)$ через $\psi(x, \lambda)$. После этого легко убедиться, что

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x)) \varphi(x, \lambda) = \psi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x) - r(x)) \psi(x, \lambda) + \\ + \int_x^\infty T(x, t) \psi(t, \lambda)\, dt + \int_x^\infty \Big\{ R_{tt}(x, t) - R_{xx}(x, t) + \\ + (q(x) - q(t) - r(t)) R(x, t) - T(x, t) + \\ + \int_x^t R(x, s) T(s, t)\, ds \Big\} \psi(t, \lambda)\, dt + \Big\{ R_x(x, t)_{|t=x} + R_t(x, t)_{|t=x} + \\ + \frac{dR(x, x)}{dx} + r(x) \Big\} \psi(x, \lambda).$$

Но последняя скобка равна нулю в силу (9) и (4). Учитывая еще, что $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям (2) и (1) соответственно, находим окончательно

$$\int_x^\infty \Big\{ R_{tt}(x, t) - R_{xx}(x, t) + (q(x) - q(t) - r(t)) R(x, t) - T(x, t) +$$

$$+ \int_x^t R(x, s) T(s, t) ds \Big\} \psi(t, \lambda) dt = 0.$$

Отсюда следует, что подинтегральная функция тождественно равна нулю. В самом деле, поскольку эта функция финитна, то нам следует лишь доказать, что из условия

$$\int_x^\infty f(t) \psi(t, \lambda) dt = 0,$$

где $f(t)$ финитна, следует $f(t) \equiv 0$ $(t > x)$. Но в самом деле, подставляя в последнее равенство $\psi(t, \lambda)$ из (7) и меняя порядок интегрирований, будем иметь

$$\int_x^\infty \Big\{ f(t) + \int_x^t K(s, t) f(s) ds \Big\} \varphi(t, \lambda) dt = 0.$$

Далее, из финитности $K(x, t)$ следует финитность подинтегральной функции в этом равенстве. Поэтому, заметив, что система всех решений $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (2) полна на любом конечном интервале, заключаем отсюда, что подинтегральная функция в последнем равенстве, а следовательно и $f(t)$ тождественно равна нулю.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\omega(x, \lambda)$ *некоторое решение уравнения*

$$\omega''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)}) \omega(x, \lambda) = 0. \tag{12}$$

Тогда оператор преобразования

$$\chi(x, \lambda) = \omega(x, \lambda) - \int_0^x \overline{R(t, x)} \omega(t, \lambda) dt \tag{13}$$

переводит $\omega(x, \lambda)$ *в решение следующей задачи Коши*

$$\chi''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)} - \overline{r(x)}) \chi(x, \lambda) + \int_{t_0}^x \overline{T(t, x)} \chi(t, \lambda) dt =$$

$$= \overline{R_t(0, x)} \omega(0, \lambda) - \overline{R(0, x)} \omega'(0, \lambda), \tag{14}$$

$$\chi(0, \lambda) = \omega(0, \lambda), \quad \chi'(0, \lambda) = \omega'(0, \lambda) - \frac{\omega(0, \lambda)}{2} \int_0^\infty \overline{r(t)} dt. \tag{15}$$

Обратно, если $\chi(x, \lambda)$ есть решение уравнения

$$\chi''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\chi(x, \lambda) + \int_0^x \overline{T(t, x)}\,\chi(t, \lambda)\,dt =$$

$$= \chi(0, \lambda)\left\{\overline{R_t(0, x)} - \frac{1}{2}\overline{R(0, x)}\int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt\right\} - \chi'(0, \lambda)\overline{R(0, x)}, \qquad (16)$$

то оператор преобразования

$$\omega(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + \int_0^x \overline{K(t, x)}\,\chi(t, \lambda)\,dt \qquad (17)$$

переводит $\chi(x, \lambda)$ в решение следующей задачи Коши

$$\omega''(x, \lambda) + (\lambda - \overline{q(x)})\,\omega(x, \lambda) = 0,$$

$$\omega(0, \lambda) = \chi(0, \lambda), \quad \omega'(0, \lambda) = \chi'(0, \lambda) + \frac{\chi(0, \lambda)}{2}\int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt.$$

Доказательство. Учитывая очевидное тождество

$$\int_0^x T(t, x)\,\overline{\chi(t, \lambda)}\,dt = \int_0^x \left[T(t, x) - \int_t^x R(t, s)\,T(s, x)\,ds\right]\overline{\omega(t, \lambda)}\,dt,$$

совершенно таким же образом, как при доказательстве теоремы 1, найдем

$$\overline{\chi''(x, \lambda)} + (\bar{\lambda} - q(x) - r(x)\,\overline{\chi(x, \lambda)} + \int_0^x T(t, x)\,\overline{\chi(t, \lambda)}\,dt =$$

$$= \int_0^x \Big\{ R_{t^2}(t, x) - R_{x^2}(t, x) + (q(x) + r(x) - q(t))\,R(t, x) +$$

$$+ T(t, x) - \int_t^x R(t, s)\,T(s, x)\,ds\Big\}\,\overline{\omega(t, \lambda)}\,dt +$$

$$+ R_t(0, x)\,\overline{\omega(0, \lambda)} - R(0, x)\,\overline{\omega'(0, \lambda)} - \Big[R_x(t, x)_{t=x} +$$

$$+ R_t(t, x)_{t=x} + \frac{dR(x, x)}{dx} + r(x)\Big]\,\overline{\omega(x, \lambda)}.$$

Отсюда и следует, в силу леммы 2, что $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (14). Условия (15) следуют из (11). Пусть теперь $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (16). Тогда аналогичные выкладки показывают, что для $\omega(x, \lambda)$, определенного формулой (17), выполняется равенство

$$\omega''(x,\lambda)+(\lambda-\overline{q(x)})\,\omega(x,\lambda)=\chi''(x,\lambda)+(\lambda-\overline{q(x)}-\overline{r(x)})\,\chi(x,\lambda)+$$

$$+\int_0^x \overline{T(t,x)}\,\chi(t,\lambda)\,dt+\int_0^x\Big\{\overline{K_{x^2}(t,x)}-\overline{K_{t^2}(t,x)}+(\overline{q(t)}+\overline{r(t)}-$$

$$-\overline{q(x)})\,\overline{K(t,x)}-\int_t^x \overline{T(t,s)}\,\overline{K(s,x)}\,ds-\overline{T(t,x)}\Big\}\chi(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\left(\overline{K_t(t,x)}_{|t=x}+\overline{K_x(t,x)}_{|t=x}+\frac{\overline{dK(x,x)}}{dx}+\overline{r(x)}\right)\chi(x,\lambda)+$$

$$+\chi(0,\lambda)\Big\{-\overline{K_t(0,x)}+\int_0^x \overline{K(t,x)}\Big[\overline{R_s(0,t)}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\overline{R(0,t)}\int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt\Big]\,dt\Big\}+\chi'(0,\lambda)\Big\{\overline{K(0,x)}-$$

$$-\int_0^x \overline{K(t,x)}\;\overline{R(0,t)}\;dt\Big\}.$$

Отсюда легко видеть, что лемма будет доказана, если мы обнаружим, что

$$\overline{R_t(0,x)}-\frac{1}{2}\,\overline{R(0,x)}\int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt-\overline{K_t(0,x)}+$$

$$+\int_0^x \overline{K(t,x)}\Big[\overline{R_s(0,t)}-\frac{1}{2}\,\overline{R(0,t)}\int_0^\infty \overline{r(t)}\,dt\Big]\,dt=0,$$

$$-\overline{R(0,x)}+\overline{K(0,x)}-\int_0^x \overline{K(t,x)}\;\overline{R(0,t)}\;dt=0.$$

Второе из этих равенств совпадает по существу со вторым из равенств (9), а первое получается дифференцированием (9), если еще принять во внимане, что

$$K(0,0)=R(0,0)=\frac{1}{2}\int_0^\infty r(t)\,dt.$$

Теперь мы докажем следующую основную теорему.

Теорема 2. *Пусть при некоторых, вообще говоря, комплексных* λ_n *и* λ_n^* *функции* $\varphi(x,\lambda_n)$ *и* $\omega(x,\lambda_n^*)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\varphi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\varphi(x, \lambda_n) = 0,$$

$$\omega''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)})\omega(x, \lambda_n^*) = 0,$$

соответственно и образуют полную биортогональную систему в $L_2(0, \infty)$. *Тогда, если через* $\psi(x, \lambda_n)$ *обозначить решение уравнения* (1) *при* $\lambda = \lambda_n$, *удовлетворяющее условию* $\lim\limits_{x\to\infty} |\psi(x, \lambda_n) - \varphi(x, \lambda_n)| = 0$ *(такое решение существует), а через* $\chi(x, \lambda_n^*)$ *обозначить решение задачи Коши* (14)—(15) *при* $\lambda = \lambda_n^*$, *то функции* $\psi(x, \lambda_n)$ *и* $\chi(x, \lambda_n^*)$ *суммируемы с квадратом и образуют полную биортогональную систему в* $L_2(0, \infty)$.

Доказательство. Положим

$$\psi(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_n) + \int_x^\infty K(x, t)\varphi(t, \lambda_n)\,dt,$$

$$\chi(x, \lambda_n^*) = \omega(x, \lambda_n^*) - \int_0^x \overline{R(t, x)}\,\omega(t, \lambda_n^*)\,dt,$$

то из теоремы 1 и леммы 3 следует, что достаточно лишь обнаружить полноту и биортогональность этой системы. Для доказательства заметим, что для любых $f(x)$ и $g(x)$, суммируемых с квадратом, имеем

$$\int_0^\infty f(x)\left\{g(x) - \int_0^x R(t, x)\,g(t)\,dt\right\}dx = \int_0^\infty \left\{f(x) - \right.$$

$$\left. - \int_x^\infty R(x, s)\,f(s)\,ds\right\} g(x)\,dx. \tag{18}$$

Далее, как это следует из (9), для любой $f(x) \in L_2(0, \infty)$ имеет место равенство

$$\int_x^\infty K(x, t)\,f(t)\,dt - \int_x^\infty R(x, s)\left[f(s) + \int_s^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt\right]ds = 0. \tag{19}$$

Далее, на основании (18), имеем

$$\int_0^\infty \psi(x, \lambda_n)\,\overline{\chi(x, \lambda_m^*)}\,dx = \int_0^\infty \left\{\varphi(x, \lambda_n) + \int_x^\infty K(x, t)\,\varphi(t, \lambda_n)\,dt\right\}\left\{\overline{\omega(x, \lambda_m^*)} - \right.$$

$$\left. - \int_0^x R(t, x)\,\overline{\omega(t, \lambda_m^*)}\,dt\right\}dx = \int_0^\infty \left\{\varphi(x, \lambda_n) + \int_x^\infty K(x, t)\,\varphi(t, \lambda_n)\,dt - \right.$$

$$-\int_x^\infty R(x, s)\left[\varphi(s, \lambda_n)+\int_s^\infty K(s, t)\varphi(t, \lambda_n)\,dt\right]ds\Bigg\}\overline{\omega(x, \lambda_m^*)}\,dx,$$

откуда в силу (19) следует биортогональность системы $\psi(x, \lambda_n)$ и $\chi(x, \lambda_n^*)$.

Остается доказать, что всякая функция $f(x) \in L_2(0, \infty)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty f(x)\,\overline{\chi(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\psi(x, \lambda_n). \tag{20}$$

А для этого, как легко видеть, достаточно лишь проверить сходимость последнего ряда, ибо система $\psi(x, \lambda_n)$ полна. Но в силу (18)

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty f(x)\,\overline{\chi(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\psi(x, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty\left\{f(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_x^\infty R(x, s)f(s)\,ds\right\}\overline{\omega(x, \lambda_n^*)}\,dx\right)\varphi(x, \lambda_n) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^\infty\left\{f(x) - \int_x^\infty R(x, s)f(s)ds\right\}dx\right)\int_x^\infty K(x, t)\varphi(t, \lambda_n)\,dt.$$

Но первая сумма в правой части сходится в среднем в силу биортогональности системы $\omega(x, \lambda_n^*)$ и $\varphi(x, \lambda_n)$. Вторая же сумма сходится в силу того, что если

$$F(t) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, F_N(t), \text{ то и } \int_x^\infty K(x, t)F(t)\,dt = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_x^\infty K(x, t)F_N(t)\,dt.$$

Укажем теперь одно следствие доказанных теорем.

Теорема 3. *Пусть $q(x)$ и $T(x, t)$ гладкие комплекснозначные функции, причем $T(x, t)$ финитна, а $q(x)$ неотрицательна при достаточно больших x. Пусть далее задана последовательность отрицательных чисел λ_k. Тогда для того, чтобы система $\psi(x, \lambda_n)$ суммируемых с квадратом на полуоси решений уравнения*

$$\psi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\psi(x, \lambda_n) + \int_x^\infty T(x, t)\psi(t, \lambda_n)\,dt = 0$$

была полна в $L_2(0, \infty)$, достаточно, а в случае финитности $q(x)$ и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_n|}} = \infty.$$

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 достаточность есть следствие известного результата Шноля [2], а необходимость вытекает из того, что при $q(x) \equiv 0$, $T(x, t) \equiv 0$ имеем $\varphi(x, \lambda_n) = e^{-\sqrt{|\lambda_n|}\, x}$. Теперь подстановка $t = e^{-x}$ сводит вопрос к известной теореме Мюнца.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների լրիվության մասին

Դիցուք $q(x)$-ը ողորկ կոմպլեքս ֆունկցիա է որոշված դրական կիսաառանցքի վրա, իսկ $r(x)$-ը և $T(x, t)$ ողորկ են և ֆինիտ, այսինքն զառնում են զրո որոշ կոմպակտից դուրս։ $R(x, t)$-ով նշանակենք

$$R_{t^2}(x, t) - R_{x^2}(x, t) + (q(x) - q(t) - r(t))\, R(x, t) +$$

$$+ \int_x^t R(x, s)\, T(s, t)\, ds - T(x, t) = 0$$

հավասարման միակ ֆինիտ լուծումը $0 \leq x \leq t$ տիրույթում, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$R(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} r(t)\, dt.$$

Աշխատանքի հիմնական արդյունքը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

Թեորեմ: *Դիցուք $\varphi(x, \lambda_n)$ և $\omega(x, \lambda_n^*)$ ֆունկցիաները կազմում են լրիվ բիօրթոգոնալ սիստեմ $L_2(0, \infty)$-ում և համապատասխանաբար բավարարում են*

$$\varphi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x))\, \varphi(x, \lambda_n) = 0, \qquad \omega''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)})\, \omega(x, \lambda_n^*) = 0$$

հավասարումներին։ Այդ գոյություն ունեն քառակուսու հետ մեկտեղ հանրագումարելի ֆունկցիաներ $\psi(x, \lambda_n)$, որոնք բավարարում են

$$\psi''(x, \lambda_n) + (\lambda_n - q(x) - r(x))\, \psi(x, \lambda_n) + \int_x^{\infty} T(x, t)\, \psi(t, \lambda_n)\, dt = 0$$

հավասարմանը և $\lim\limits_{x \to \infty} |\psi(x, \lambda_n) - \varphi(x, \lambda_n)| = 0$ պայմանին։

Բացի այդ եթե $\chi(x, \lambda_n^*)$-ով նշանակենք հետևյալ կոշիի խնդրի լուծումը

$$\chi''(x, \lambda_n^*) + (\lambda_n^* - \overline{q(x)} - \overline{r(x)})\chi(x, \lambda_n^*) +$$

$$+ \int_0^x \overline{T(t, x)}\, \chi(t, \lambda_n^*)\, dt = \overline{R_t(0, x)}\, \omega(0, \lambda_n^*) - \overline{R(0, x)}\, \omega'(0, \lambda_n^*),$$

$$\chi(0, \lambda_n^*) = \omega(0, \lambda_n^*), \qquad \chi'(0, \lambda_n^*) = \omega'(0, \lambda_n^*) - \frac{\omega(0, \lambda_n^*)}{2} \int_0^\infty r(t)\, dt,$$

ապա $\psi(x, \lambda_n)$ և $\chi(x, \lambda_n)$ ֆունկցիաները կազմում են լրիվ բիօրթոգոնալ սիստեմ $L_2(0, \infty)$-ում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Б. Нерсесян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат. наук, т. XII, № 5 (1959). [2] *Э. Шноль*, ДАН СССР, т. 109, № 5 (1956), стр. 910—912.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 5.II.1959)

Для задачи о кручении круглого стержня с одним клиновидным продольным пазом приближенное решение получено методом конформного отображения в недавней работе Стэнеску и Думитреску [1].

Кручению круглых стержней с продольными пазами других форм посвящены работы [2–8].

В настоящей работе приводится точное решение задачи о кручении круглых призматических стержней с продольными пазами клиновидной формы, расположенными симметрично, или стержня с зубцами.

При решении задачи использован метод введения вспомогательных функций, предложенный Н. Х. Арутюняном [9] в 1948 году. Решение получено в виде рядов и интегралов Фурье.

1. *Постановка задачи.* Определение функции напряжения при кручении $U(r, \varphi)$, как известно, в полярных координатах сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \tag{1.1}$$

при условии, что $U = 0$ на контуре поперечного сечения. Рассмотрим сплошной призматический стержень с поперечным сечением в виде круга с симметрично расположенными выемками клиновидной формы, или зубцами (фиг. 1).

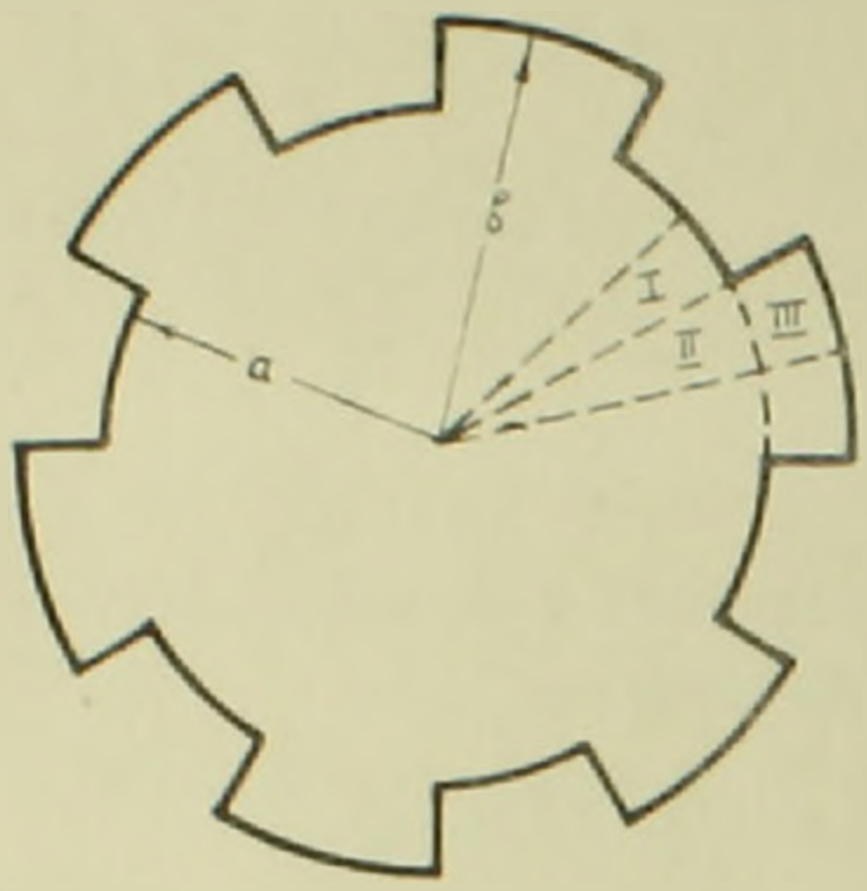
Ввиду симметрии области сечения достаточно рассмотреть ее $\frac{1}{2n}$-ую часть, где n — число выточек или зубцов (фиг. 2).

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{\alpha n} \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}\right| \tag{1.2}$$

где $1 \leqslant \alpha < \infty$.

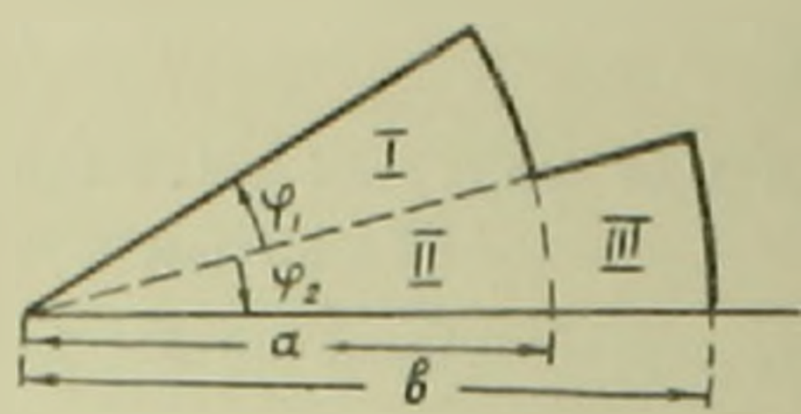
Полагаем, что в области I функция $U(r, \varphi)$ принимает значение $U_1(r, \varphi)$, в области II — значение $U_2(r, \varphi)$, а в области III — значение $U_3(r, \varphi)$.



Фиг. 1.

Чтобы определить функции $U_i(r, \varphi)$, удобно перейти к переменным t, φ, где

$$t = \ln \frac{r}{a}; \quad r = ae^t. \tag{1.3}$$



Фиг. 2.

Тогда дифференциальное уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2a^2 e^{2t}. \tag{1.4}$$

Ищем функции U_i $(i = 1, 2, 3)$ в виде

$$U_i(t, \varphi) = -\frac{a^2 e^{2t}}{2} + \Phi_i(t, \varphi), \tag{1.5}$$

где гармонические функции $\Phi_i(t, \varphi)$ должны удовлетворять следующим условиям

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = \Phi_1(0, \varphi) - \frac{a^2}{2} = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0,\\
&\left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-\varphi_2} = \Phi_3(t, 0) - \frac{a^2 e^{2t}}{2} = \Phi_3(t_1, \varphi) - \frac{b^2}{2} = 0,\\
&\Phi_1(t, 0) = \Phi_2(t, 0), \quad \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0},\\
&\Phi_2(0, \varphi) = \Phi_3(0, \varphi), \quad \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_{t=0}.
\end{aligned}\right| \tag{1.6}$$

Ищем функции $\Phi_i(t, \varphi)$ в виде рядов и интегралов Фурье.

$$\Phi_1(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} e^{\alpha_k t} \sin \alpha_k \varphi + \tag{1.7}$$

$$+ \int_0^{\infty} [C^{(1)}(z) \operatorname{sh} z\varphi + D^{(1)}(z) \operatorname{ch} z\varphi] \sin zt\,dz \qquad (0 \leqslant \varphi < \varphi_1; \quad -\infty < t \leqslant 0)$$

$$\Phi_2(t,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{(2)}e^{\gamma_k t}\sin\gamma_k\varphi+$$

$$+\int_0^{\infty}[C^{(2)}(z)\operatorname{sh}z\varphi+D^{(2)}(z)\operatorname{ch}z\varphi]\sin zt\,dz\quad(-\varphi_2<\varphi<0;\quad-\infty<t<0) \tag{1.8}$$

$$\Phi_3(t,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}[A_k^{(3)}\operatorname{sh}\gamma_k t+B_k^{(3)}\operatorname{ch}\gamma_k t]\sin\gamma_k\varphi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[C_k^{(3)}\operatorname{sh}\beta_k\varphi+D_k^{(3)}\operatorname{ch}\beta_k\varphi]\sin\beta_k t\qquad(-\varphi_2<\varphi<0;\quad 0<t<t_1), \tag{1.9}$$

где

$$\alpha_k=\frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1};\qquad \gamma_k=\frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2};\qquad \beta_k=\frac{k\pi}{t_1};\qquad t_1=\ln\frac{b}{a}. \tag{1.10}$$

Неопределенные коэффициенты $A_k^{(1)}$, $B_k^{(3)}$, $C_k^{(3)}$, $D_k^{(3)}$, $C^{(1)}(z)$ и $D^{(1)}(z)$ подлежат определению из условий (1.6).

2. *Определение коэффициентов интегрирования.* Пользуясь выражениями (1.7)—(1.9) и удовлетворив условиям (1.6), для определения коэффициентов интегрирования получим следующие соотношения

$$C^{(1)}(z)\operatorname{ch}z\varphi_1+D^{(1)}(z)\operatorname{sh}z\varphi_1=0,$$

$$A_k^{(1)}=\frac{a^2}{\alpha_k\varphi_1},$$

$$C^{(2)}(z)\operatorname{ch}z\varphi_2-D^{(2)}(z)\operatorname{sh}z\varphi_2=0,$$

$$C_k^{(3)}\operatorname{ch}\beta_k\varphi_2-D_k^{(3)}\operatorname{sh}\beta_k\varphi_2=0,$$

$$D_k^{(3)}=\frac{a^2\beta_k}{t_1(4+\beta_k^2)}[(-1)^{k+1}e^{2t_1}+1],$$

$$A_k^{(3)}\operatorname{sh}\gamma_k t_1+B_k^{(3)}\operatorname{ch}\gamma_k t_1=-\frac{b^2}{\gamma_k\varphi_2},$$

$$D^{(1)}(z)=D^{(2)}(z), \tag{2.1}$$

$$C^{(2)}(z)-C^{(1)}(z)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k A_k^{(1)}}{\alpha_k^2+z^2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k A_k^{(2)}}{\gamma_k^2+z^2},$$

$$B_k^{(3)}=A_k^{(2)},$$

$$A_k^{(2)}-A_k^{(3)}=-\frac{2}{\varphi_2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p D_p^{(3)}}{\beta_p^2+\gamma_k^2}+\frac{2}{\varphi_2}\int_0^{\infty}\frac{zD^{(2)}(z)}{z^2+\gamma_k^2}\,dz.$$

При этом использованы также формулы синус-преобразования Фурье ([10]):

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty B(z)\sin zt\,dz \qquad (-\infty < t < 0) \\ B(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^0 f(t)\sin zt\,dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(-t)\sin zt\,dt \end{aligned}\right| \tag{2.2}$$

Из соотношений (2.1) коэффициенты $A_k^{(1)}$, $D_k^{(3)}$ и $C_k^{(3)}$ определяются. Коэффициенты $B_k^{(3)}$ и $A_k^{(3)}$ выражаются через $A_k^{(2)}$, $D^{(1)}(z)$, $C^{(1)}(z)$ и $C^{(2)}(z)$ — через $D^{(2)}(z)$, а для определения $A_k^{(2)}$ и $D^{(2)}(z)$ получаем следующую систему уравнений

$$D^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi(\operatorname{th} z\varphi_2 + \operatorname{th} z\varphi_1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k A_k^{(2)}}{\gamma_k^2 + z^2} - \frac{a^2 \operatorname{th}\varphi_1 z}{\pi z(\operatorname{th}\varphi_1 z + \operatorname{th}\varphi_2 z)}. \tag{2.3}$$

$$(0 < z < \infty)$$

$$A_k^{(2)} = \frac{2}{\varphi_2(1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1)}\int_0^\infty \frac{zD^{(2)}(z)}{z^2 + \gamma_k^2}\,dz - \frac{b^2}{\gamma_k\varphi_2(\operatorname{sh}\gamma_k t_1 + \operatorname{ch}\gamma_k t_1)} -$$

$$- \frac{a^2}{\varphi_2(\gamma_k^2 - 4)(1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1)}\left[e^{2t_1}\left(\frac{2}{\operatorname{sh} 2t_1} - \frac{\gamma_k}{\operatorname{sh}\gamma_k t_1}\right) +\right.$$

$$\left. + \gamma_k \operatorname{cth}\gamma_k t_1 - 2\operatorname{cth} 2t_1\right] \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

При этом использованы значения сумм

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{at_1}{\operatorname{sh} at_1}\right),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2 + a^2} = \frac{t_1}{2a}\left(\operatorname{cth} at_1 - \frac{1}{at_1}\right). \tag{2.4}$$

Введя новые неизвестные

$$\pi z D^{(2)}(z) = mY(z),$$

$$\gamma_k\varphi_2 A_k^{(2)} = X_k, \tag{2.5}$$

где m — постоянное число, системы (2.3) приведем к виду

$$X_k = \frac{2m\gamma_k}{\pi(1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1)}\int_0^\infty \frac{Y(z)\,dz}{z^2 + \gamma_k^2} + b_k \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\gamma(z) = \frac{2z}{m\varphi_2(\operatorname{th} z\varphi_2 + \operatorname{th} z\varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\gamma_k^2 + z^2} + \beta(z) \quad (0 < z < \infty) \tag{2.6}$$

Здесь введены обозначения

$$b_k = \frac{\gamma_k}{(\gamma_k^2 - 4)(1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1)} \left[4b^2 \left(\frac{1}{\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k t_1} - \frac{1}{2\operatorname{sh} 2t_1} \right) + \right.$$

$$\left. + a^2 (\gamma_k \operatorname{cth} \gamma_k t_1 - 2 \operatorname{cth} 2 t_1) \right]. \tag{2.7}$$

$$\beta(z) = -\frac{a^2 \operatorname{th} \varphi_1 z}{m(\operatorname{th} \varphi_1 z + \operatorname{th} \varphi_2 z)}.$$

Чтобы из системы (2.6) можно было определить неизвестные величины методом последовательного приближения, необходимо, чтобы интеграл от модулей коэффициентов первой системы и сумма от модулей коэффициентов второй системы были бы меньше единицы. Это условие для систем (2.6) выполняется при соответствующем выборе произвольного постоянного числа m.

Действительно, для коэффициентов систем (2.6) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{2m\gamma_k dz}{\pi(1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1)(z^2 + \gamma_k^2)} = \frac{m}{1 + \operatorname{cth}\gamma_k t_1} < \frac{m}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{m\varphi_2(\operatorname{th} z\varphi_2 + \operatorname{th} z\varphi_1)(\gamma_k^2 + z^2)} = \frac{\operatorname{th} \varphi_2 z}{m(\operatorname{th} z\varphi_2 + \operatorname{th} z\varphi_1)} < \frac{1}{m}. \tag{2.8}$$

При этом использованы значения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k^2 + z^2} = \frac{\varphi_2}{2z} \operatorname{th} \varphi_2 z,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + \gamma_k^2} = \frac{\pi}{2\gamma_k}. \tag{2.9}$$

Постоянное число m выбираем равным $m = 1/2$.

Легко видеть, что свободные члены системы (2.6) ограничены сверху.

3. *Определение функции напряжения.* Подставляя значения определенных коэффициентов в выражения (1.7)—(1.9), получим

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{a^2}{2\varphi_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1}}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2\varphi_1}} \right) + \int_0^{\infty} D^{(2)}(z) \frac{\operatorname{ch} z(\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} z\varphi_1} \sin tz dz \tag{3.1}$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1; \quad -\infty < t \leqslant 0)$$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} e^{\gamma_k t} \sin \gamma_k \varphi + \int_0^{\infty} D^{(2)}(z) \frac{\operatorname{ch} z(\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{ch} z \varphi_2} \sin zt\, dz \tag{3.2}$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0; \qquad -\infty < t < 0),$$

$$\Phi_3(t, \varphi) = -\frac{b^2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k t}{\operatorname{sh} \gamma_k t_1} \frac{\sin \gamma_k \varphi}{\gamma_k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (t_1 - t)}{\operatorname{sh} \gamma_k t_1} \sin \gamma_k \varphi +$$

$$+ \frac{a^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{4 + \beta_k^2} [(-1)^{k+1} e^{2t_1} + 1] \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t \tag{3.3}$$

$$(-\varphi_2 < \varphi < 0; \qquad 0 < t < t_1),$$

где $t = \ln \frac{r}{a}$.

При этом использовано значение ряда

$$\sum_{k=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-kz} \sin kx}{k} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} z}\right) \qquad z > 0. \tag{3.4}$$

В частном случае, когда $b = a$, сечение стержня принимает вид сплошного круга. Для этого случая из (2.3), переходя к пределу при $t_1 \to 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(2)} &= -\frac{a^2}{\varphi_2 \gamma_k}, \\ D^{(2)}(z) &= -\frac{a^2}{\pi z}. \end{aligned}\right| \tag{3.5}$$

Подставляя эти значения в (3.1)–(3.3), будем иметь

$$\Phi_1(t, \varphi) = \Phi_2(t, \varphi) = \Phi_3(t, \varphi) = \frac{a^2}{2}. \tag{3.6}$$

При этом использованы значения суммы (3.4) и интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z(\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} z \varphi_1} \cdot \frac{\sin zt}{z} dz =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin \frac{\pi \varphi}{2\varphi_1}}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2\varphi_1}}\right) \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1, \quad -\infty < t \leqslant 0). \tag{3.7}$$

4. *Определение жесткости и напряжений при кручении.* Жесткость при кручении и напряжения определяются по формулам

$$C = 4nG \iint_{\Omega} U(r, \varphi)\, r dr d\varphi =$$

$$= 4nG \left\{ -\frac{a^4\varphi_1}{8} - \frac{b^4\varphi_2}{8} + \frac{a^4}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2(\alpha_k+2)} + \right.$$

$$+ \frac{2b^4}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k^2(4-\gamma_k^2)} - \frac{b^4}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}\gamma_k t_1}{\gamma_k(4-\gamma_k^2)} +$$

$$+ \frac{a^2b^2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k(4-\gamma_k^2)\operatorname{sh}\gamma_k t_1} + \frac{a^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \operatorname{th}\beta_k\varphi_2}{(4+\beta_k^2)^2} [1+(-1)^{k+1}e^{2t_1}]^2 -$$

$$- a^4 \int_0^{\infty} D^{(2)}(z) \frac{\operatorname{th} z\varphi_1 + \operatorname{th} z\varphi_2}{4+z^2} dz +$$

$$\left. + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^{(2)}(1+\operatorname{cth}\gamma_k t_1)}{4-\gamma_k^2} - b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^{(2)}}{(4-\gamma_k^2)\operatorname{sh}\gamma_k t_1} \right\}, \tag{4.1}$$

где Ω — площадь $\frac{1}{2n}$-ой части сечения стержня,

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} G\tau = \frac{e^{-t}}{a}\frac{\partial U}{\partial \varphi} G\tau,$$

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{\partial U}{\partial r} G\tau = -\frac{e^{-t}}{a}\frac{\partial U}{\partial t} G\tau. \tag{4.2}$$

Аналогичным методом могут быть получены решения задач о кручении и изгибе призматических стержней с сечениями в виде круга с симметрично расположенными выточками и отверстиями в форме кольцевого сектора.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ՍԲՐՈՅԱՆ

Սեպաձև ընդերկայնական ակոսներով կլոր գլանաձև ձողերի պտրումը

Սեպաձև ընդերկայնական մեկ ակոսով կլոր գլանաձև ձողերի ոլորման համար կոնֆորմ արտապատկերման եղանակի օգտագործմամբ մոտավոր լուծում է ստացված Ստենակուի և Իումիտարեսկուի աշխատանքում (1)։

Այլ ձևի ընդերկայնական ակոսներով կլոր ձողերի ոլորման հարցին են նվիրված (2–8) աշխատանքները։

Ներկա հոդվածում բերվում է սիմետրիկ դասավորված, սեպաձև ընդերկայնական ակոսներով կլոր գլանաձև ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը։

Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործված է 1948 թվին Ն. Խ. Հարությունյանի [9] կողմից առաջարկված օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակը։

Հայտնի է, որ ձողերի ոլորման խնդիրներում լարման ֆունկցիան ձողի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթում բավարարում է (1.1) հավասարմանը, իսկ կտրվածքի տիրույթի եզրագծի վրա դառնում է զերո։

Հիմնելով կտրվածքի տիրույթի սիմետրիկությունից (նկ. 1), $U(r,\varphi)$ լարման ֆունկցիան որոնում ենք միայն կտրվածքի տիրույթի $\frac{1}{2n}$-րդ մասում (գծ. 2), որտեղ n-ը ակոսների թիվն է։ Լուծումը կտրվածքի ամբողջ տիրույթի վրա տարածելու համար պահանջում ենք, որ լարման ֆունկցիայի նորմալ ածանցյալները սիմետրիկայի առանցքների վրա հավասար լինեն զերոյի (այդ բխում է ոլորման մեխանիկական անալոգիայից)։ $U(r,\varphi)$ ֆունկցիան կտրվածքի տիրույթի $\frac{1}{2n}$-րդ մասում որոշելիս՝ այդ տիրույթը իր հերթին բաժանում ենք 3 պարզագույն տիրույթների։ Լարման ֆունկցիան որոշվում է այդ տիրույթներում օժանդակ ֆունկցիաներով, որոնք տիրույթների կցման գծերի վրա բավարարում են կցման պայմաններին։

Խնդրի լուծումը ստացված է Ֆուրյեի շարքերով և ինտեգրալներով։ Օգտագործված է նաև Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունը։

Առաջարկված եղանակով կարելի է ստանալ սիմետրիկ դասավորված օղակային սեկտորի տեսքի ընդերկայնական փորվածքներով սնամեջ ձողերի ոլորման և ծռման մի շարք խնդիրների լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Стэнеску* и *Думитреску*, „Torsiunea barelor cilindrice prevăzute cu canal de pană". Comun. Acad. RPR, 8, № 6, 563–570, 1958. [2] *Гронвол*, Trans. American Mathematical Society, Vol. 20, 234–344, 1919. [3] *К. Вебер*, Forschungsarbeiten, Heft № 249, 1921. [4] *C. Weber, W. Günther*, Torsionstheorie, S. 30—31 und 75—76, Berlin, 1958. [5] *Шепферд*, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. „A", Vol. 138, 607—634, 1932. [6] *Х. Окубо*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, № 4, 359—362, 1950. [7] *Х. Окубо*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 3, part 2, 162—172, 1950. [8] *Паркус*, Österrech. Ing.-Arch. 3, 336—344, 1949. [9] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. XIII, в. 1, 107—112 (1949); ДАН АрмССР, т. IX; № 2 (1948). [10] *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, М.-Л., ОГИЗ, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

ФИЗИКА

Ф. Р. Арутюнян, Т. Л. Асатиани, В. М. Крищян и Р. О. Шархатунян

Рассеяние μ-мезонов в меди

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. И. Алиханяном 2. II. 1959)

Многочисленные экспериментальные данные по рассеянию μ-мезонов на различных ядрах, полученные за последние восемь лет, указывают, что μ-мезоны с импульсами от 10^8 до 10^{11} *эв/с* рассеиваются на большие углы сильнее, чем это следует из теории кулоновского рассеяния заряженных частиц. Подробный анализ всех этих работ приведен Фаулером и Вольфендалем [1]. Они пытаются объяснить явление „аномального" рассеяния μ-мезонов в рамках электромагнитных взаимодействий. Однако с помощью электромагнитных взаимодействий нельзя объяснить полученные экспериментально большие значения сечений „аномального" рассеяния μ-мезонов (5.10^{-27} *см*²/нуклон) малых энергий ($P = 5.10^8$ *эв/с*).

В работе [2] исследовано рассеяние μ-мезонов в интервале импульсов $P = (1,0 \div 1,8) \cdot 10^8$ *эв/с* в свинцовых пластинах толщиной 7 *мм*. Из этой работы следует, что экспериментальное распределение углов рассеяния μ-мезонов хорошо согласуется с кривой многократного кулоновского рассеяния с учетом конечных размеров ядра. Если „аномалия" в рассеянии μ-мезонов исследованных энергий *и* существует, то она в десятки раз меньше наблюдаемой различными авторами ($\sigma_{ан} < 10^{-28}$ *см*²/нуклон).

В настоящей работе приводятся экспериментальные данные по рассеянию μ-мезонов в интервале импульсов $P = (0,7 \div 1,3) \cdot 10^8$ *эв/с* в медных пластинах толщиной 5, 4 и 2 *мм*.

Нами проведены две серии измерений. Одна серия проводилась на высотной станции по изучению космических лучей на г. Арагац (3200 *м* над уровнем моря) с помощью магнитного масс-спектрометра в сочетании с многопластинными камерами Вильсона. Частицы идентифицировались по импульсу, измеренному в магнитном поле, и остаточному пробегу. Рассеяние исследовалось в медных пластинах толщиной 5 и 2 *мм*, расположенных внутри нижней камеры Вильсона. Подробное описание экспериментальной установки и методики исследования рассеяния приведены в работе [2].

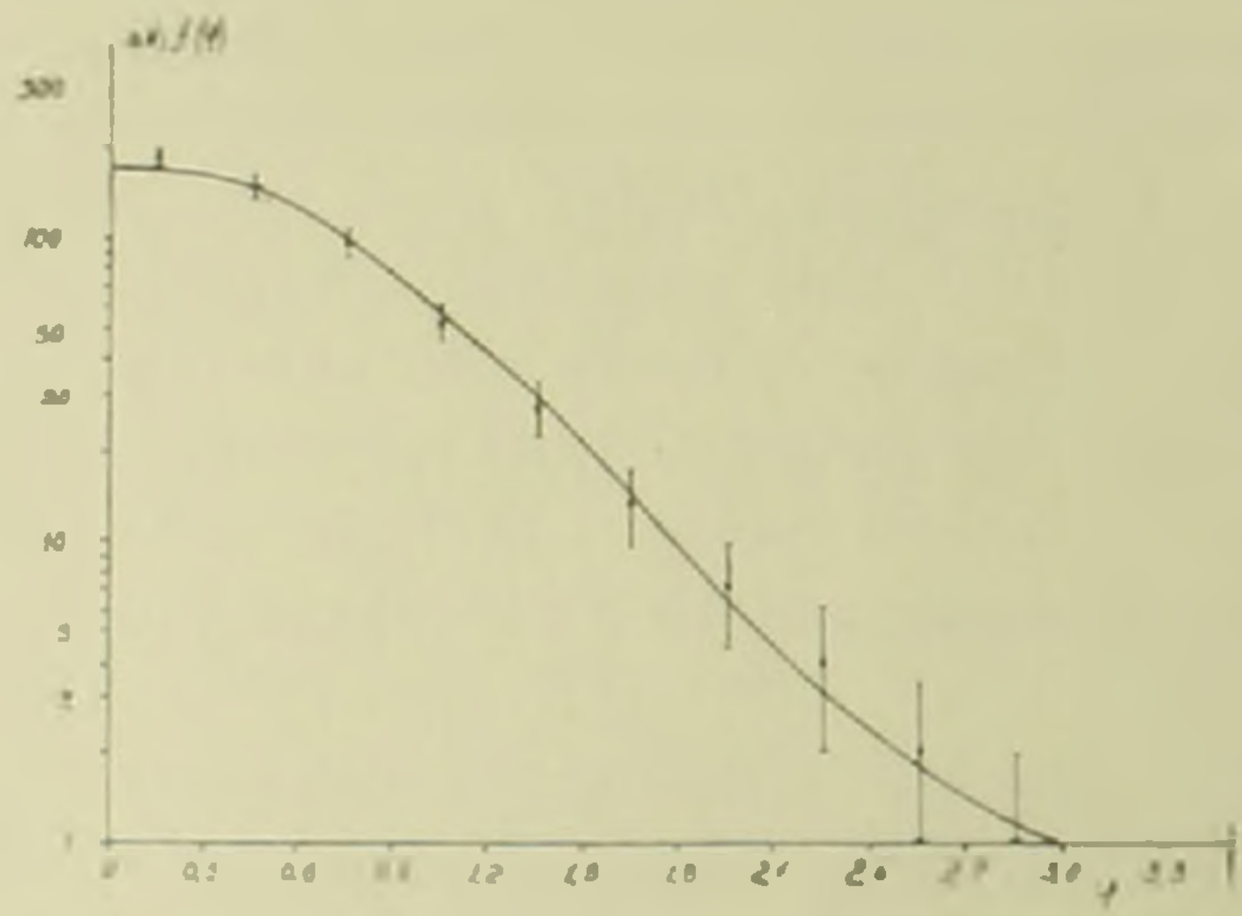
Вторая серия измерений проводилась с помощью многопластинной камеры Вильсона на высоте 960 *м* над уровнем моря. Регистрировались частицы, остановившиеся внутри камеры. Рассеяние исследовалось в медных пластинах толщиной 4 *мм*.

Из всех ионизационно остановившихся частиц μ-мезоны идентифицировались визуально по плотности ионизации. При таком отборе μ-мезонов есть некоторая опасность примеси протонов и π-мезонов, регистрируемых установкой на данной высоте.

Однако число протонов, идентифицированных нами по ионизации, невелико и согласуется с числом протонов, полученных по данным работы ([3]), выполненной на этой же высоте. Этим сравнением устраняется опасность примеси протонов.

Что касается π-мезонов, то их примесь не может быть больше 5%, как это следует из работы ([3]).

Для данных первой серии измерений, где есть возможность отдельного исследования рассеяния π-мезонов, экспериментально полученное распределение углов рассеяния для π-мезонов с тем же интервалом пробегов, что и у μ-мезонов, приводится на фиг. 1. Экспериментальные данные сравниваются с кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра по теории Мольер ([4]). Влияние конечных размеров ядра для медных пластин толщиной 5, 4 и 2 *мм* для исследуемого интервала импульсов и углов пренебрежимо мало. На фиг. 1 приводится распределение величины $\varphi = \theta/Z_c B^{1/2}$, где θ — угол рассеяния, $Z_c B^{1/2}$ — характеристический угол многократного рассеяния, смысл которого подробно освещен в работе ([4]). Преимуществом построения кривых рассеяния в единицах φ является возможность объединения данных по рассеянию в пластинах различной толщины и различных импульсных интервалов.



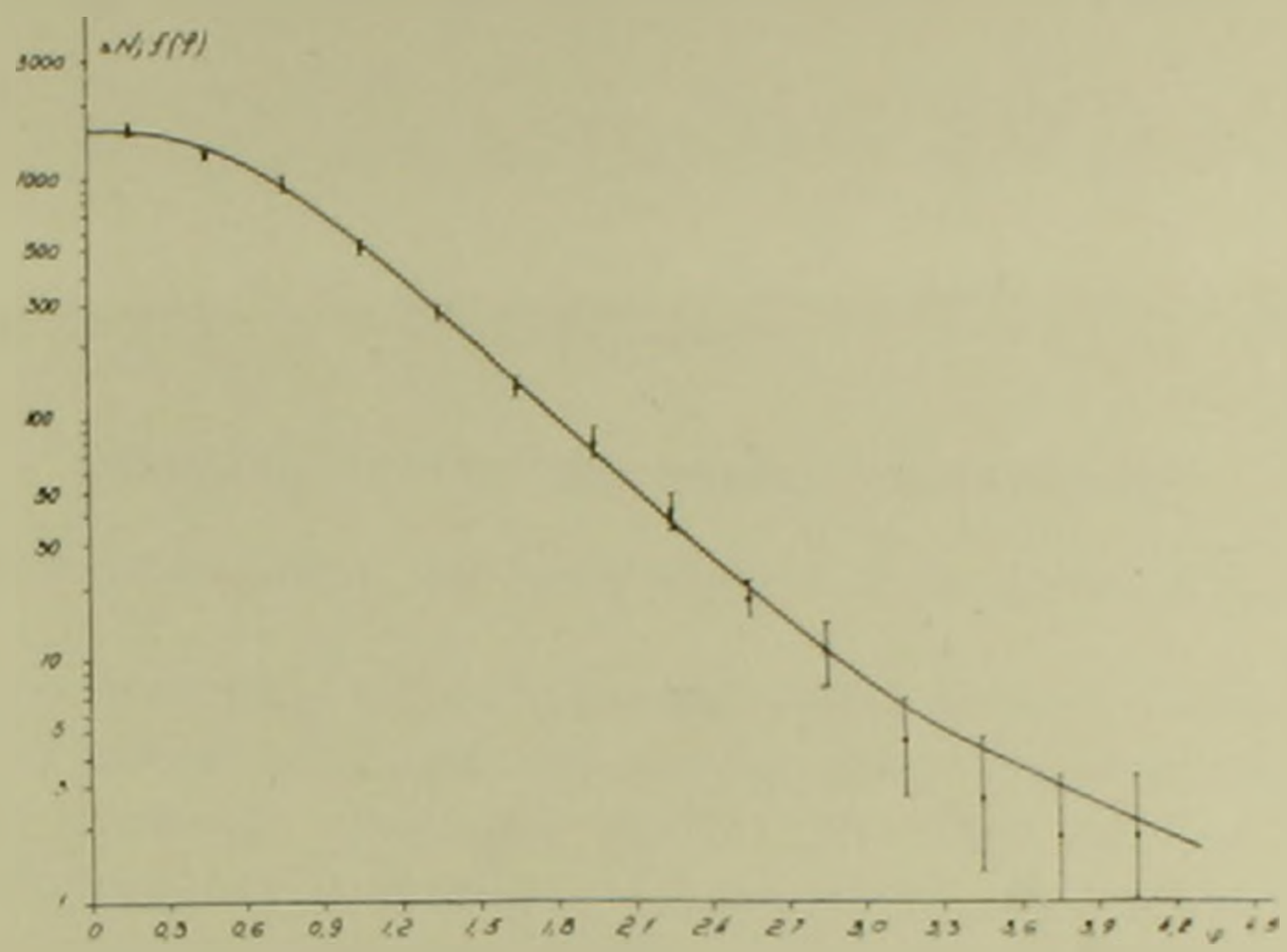
Фиг. 1. Кривая рассеяния π-мезонов.

Экспериментальные данные по рассеянию π-мезонов хорошо согласуются с кривой многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра и поэтому примесь π-мезонов для данных второй серии измерений не может привести к избытку рассеяния μ-мезонов над теоретической кривой.

Экспериментально полученное распределение углов рассеяния для μ-мезонов, рассеявшихся в медных пластинах толщиной 5, 4 и 2 *мм*, и соответствующая кривая многократного кулоновского рассеяния для точечного ядра приведены на фиг. 2.

Экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретической кривой и не наблюдается никакого избытка рассеяния на большие углы.

Экспериментальные данные по рассеянию μ-мезонов в Be, Fe и



Фиг. 2. Кривая рассеяния μ-мезонов.

Cu, полученные Кирилловым-Угрюмовым и др ([5, 6]), в Pb, полученные нами и описанные в работе ([2]), вместе с данными, приводимыми в настоящей статье, указывают на отсутствие „аномального" рассеяния для медленных μ-мезонов.

Сечение „аномального" рассеяния μ-мезонов, если оно существует, из приведенных экспериментальных данных не больше, чем 10^{-28} *см*²/нуклон.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ռ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Թ. Լ. ԱՍԱԹԻԱՆԻ, Վ. Մ. ՔՐԻՇՉՅԱՆ ԵՎ Ռ. Հ. ՇԱՀԽԱԹՈՒՆՅԱՆ

μ-Մեզոնների ցրումը պղնձի մեջ

Ուսումնասիրված է (0,7—8,3). 10³ ev/c իմպուլսային ինտերվալում գտնվող μ-մեզոնների ցրումը 5, 4, 2 մմ. հաստություն ունեցող պղնձի թիթեղներում: Էքսպերիմենտալ անկյունային բաշխումը համեմատվել է ըստ Մոլիերի տեսության կետային միջուկի համար կուլոնյան բազմապատիկ ցրման կորի հետ: Ստացված էքսպերիմենտալ արդյունքները ցույց են տալիս, որ դանդաղ μ-մեզոնների մոտ չի նկատվում որևէ «անոմալ» ցրում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *I. G. Nilson*, Wouthuysen S. A., Progress in elementary particle and cosmic ray physics, vol. 4., Amsterdam, 1958. [2] *А. И. Алиханян, Ф. Р. Арутюнян*, ЖЭТФ, 36, 32 (1959), nucl. phys., в печати, 1958. [3] *Н. М. Кочарян* и др., ЖЭТФ, 23, 532, 1952. [4] *G. Moliere*, Hs. F. Naturforcn, 3a, 78 (1948), 2a, 193 (1947). [5] *В. Г. Кирулов-Угрюмов* и др., ЖЭТФ, 31, 322, (1058). [6] *В. Г. Кирилов-Угрюмов* и др., ЖЭТФ, февраль 1959 г.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

ФИЗИКА

Г. С. Саакян

Индуцированное черенковское излучение

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. Кочаряном 27.II.1959)

Хорошо известно, что если скорость заряженной частицы, равномерно движущейся в среде, превышает фазовую скорость света, то она в определенном диапазоне частот излучает электромагнитные волны, известные под названием черенковского излучения ([1-3]). При тех же физических условиях, когда в среде имеется поле излучения, появляется дополнительное черенковское излучение, а также поглощение, вероятности которых пропорциональны интенсивности внешнего поля. Однако вероятности индуцированного излучения и поглощения равны, поэтому в конечном счете в потерях энергии частицы вклад дает лишь обычное черенковское излучение.

Пусть релятивистская частица движется в однородной диспергирующей среде, в которой имеется поле электромагнитных волн. При таких физических условиях матричный элемент черенковского излучения (ниже все время используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$; $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$) равен ([4-6]),

$$S_i = i\frac{(2\pi)^4}{V^{3/2}} e \sqrt{\frac{\mu(N_k+1)}{2n^2\varkappa\omega}} (\bar{u}_f \gamma_\nu u_i)\, \delta(\tilde{p} - \tilde{p}' - \tilde{k}), \tag{1}$$

где V — объем, в котором происходит процесс, $u_f(\vec{p}')$ и $u_i(\vec{p})$ — амплитуды Дирака для конечного и начального состояний частицы. γ_ν — проекция матрицы $\vec{\gamma}$ на направление поляризации испущенного кванта; последний множитель представляет собою четырехмерную δ — функцию, $\tilde{k}$ — четырехмерный импульс фотона, $n^2 = \varepsilon\mu$, где $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$ являются соответственно диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости среды. Далее

$$\varkappa = 1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}, \tag{2}$$

и наконец N_k — число квантов заданного импульса и поляризации в рассматриваемом объеме. Мы можем N_k представить через плотность энергии излучения

$$N_k = (2\pi)^3 \cdot \frac{\rho(\omega, \vartheta, \varphi)}{\omega \cdot k^2} \frac{d\omega}{dk}, \tag{3}$$

где $k = n\omega$ и $\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{n\alpha}$, $\rho(\omega, \vartheta, \varphi)\, d\omega\, d\Omega$ — плотность энергии излучения, имеющего направление распространения внутри элемента телесного угла $d\Omega$ и частоту, лежащую в интервале ω, $\omega + d\omega$. Ради простоты предполагается, что излучение неполяризовано.

Число квантовых состояний с определенной проекцией спина равно

$$V \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \cdot V \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{4}$$

Из законов сохранений энергии и импульса

$$E = E' + \omega; \quad \vec{p} = \vec{p'} + \vec{k}$$

получаем

$$\cos\vartheta = \frac{E}{np} + \frac{k}{2p} \frac{n^2 - 1}{n^2}, \tag{5}$$

где ϑ — угол между направлениями движения частицы и фотона.

Далее, общеизвестными методами находим вероятность в единицу времени для испускания кванта любой поляризации,

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\mu}{2n^2\alpha\omega} (N_k + 1)\beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \delta(\vec{p} - \vec{p'} - \vec{k})\, d^3p'\, d^3k, \tag{6}$$

где $\beta = \frac{p}{E}$ — скорость частицы.

Интегрируя по d^3p' и, далее учитывая (3), снова интегрируя по фотонной переменной φ, получаем

$$dW = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{\mu}{n^2\alpha\omega} \left[8\pi^3 \frac{\rho(\omega, \vartheta)}{\alpha k^3} + 1\right] \beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \delta\left(E - E' - \frac{k}{n}\right) k^2 dk \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{7}$$

где

$$\rho(\omega, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\omega, \vartheta, \varphi)\, d\varphi. \tag{8}$$

Для интегрирования по k вспомним, что энергия конечного состояния равна

$$E_f = E' + E = \sqrt{E^2 + k^2 - 2pk\cos\vartheta} + \frac{k}{n}$$

и что, согласно (5),

$$\frac{d}{dk}\cos\vartheta \approx \frac{1}{2p}\frac{n^2-1}{n^2}\left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha(n^2-1)}\cdot\frac{2E}{\omega}\right]$$
$$\frac{dE_f}{dk} \approx \frac{k}{2E}\frac{n^2-1}{n^2}\left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha(n^2-1)}\cdot\frac{2E}{\omega}\right]. \tag{9}$$

При получении (9) использована $k \ll p$. Интегрируя (7) по k, получим

$$dW = \mu\cdot\frac{e^2}{4\pi}\left[8\pi^3\frac{\rho(\omega,\vartheta)}{\alpha k^3} + 1\right]\beta\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right)d\omega, \tag{10}$$

где в аргументе функции ρ угол ϑ определяется формулой (5).

Если (10) умножить на $\frac{\omega}{\beta}$ и интегрировать по разрешенным областям частот черенковского излучения $\beta\cdot n(\omega) > 1$, то мы получим полные потери энергии заряженной частицы на черенковское излучение при наличии внешнего поля излучения. При $\rho(\omega,\vartheta) = 0$ формула (10) совпадает с формулой обычного черенковского излучения в отсутствии поля.

Теперь перейдем к черенковскому поглощению квантов поля. Матричный элемент поглощения кванта определяется формулой

$$S'_{if} = i\frac{(2\pi)^4}{V^{3/2}}e\sqrt{\frac{\mu N_k}{2n^2\alpha\omega}}(\bar{u}_f\gamma_\nu u_i)\,\delta(\vec{p} + \vec{k} - \vec{p}'). \tag{11}$$

Из законов сохранения $E = E' + \omega$ и $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{k}$ следует

$$\cos\vartheta = \frac{E}{np} - \frac{k}{2p}\frac{n^2-1}{n^2}, \tag{12}$$

так как $k \ll p$, то (12) практически совпадает с (5), т. е. фотоны поглощаются под тем же углом, под которым они испускаются.

Число конечных состояний в этом случае равно $(2\pi)^{-3}Vd^3p'$. Для вероятности поглощения кванта любой поляризации в единицу времени получаем

$$W' = \mu\pi e^2\frac{\beta^2}{n^2\alpha\omega}\frac{N_k}{V}\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right)\delta(E + \omega - E'). \tag{13}$$

(13) дает вероятность для строго определенного импульса фотонов $\vec{k}$. Чтобы получить соответствующую формулу для фотонов с импульсами в интервале $\vec{k}$, $\vec{k} + d\vec{k}$, мы должны в (13) произвести замену.

$$\frac{N_k}{V} \to N_k\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\rho(\omega,\vartheta,\varphi)}{\omega}d\omega d\Omega. \tag{14}$$

Если после этой замены проинтегрировать по азимутальному углу φ, то получим

$$dW' = \mu 2\pi^2 e^2 \frac{\rho(\omega, \vartheta)}{\omega^2 \alpha n^2} \beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \delta(E + \omega - E')\, d\omega \sin\vartheta d\vartheta.$$

Интегрируя это выражение по ω, получаем

$$dW' = \mu 2\pi^2 e^2 \frac{\rho(\omega, \vartheta)}{\alpha k^2} \beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \left|\frac{\partial\omega}{\partial u}\right| \sin\vartheta d\vartheta,$$

где $u = E' - \omega = \sqrt{E^2 + k^2 + 2kp\cos\vartheta} - \omega$. Далее, учитывая соотношения

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} \approx \frac{1}{\alpha(n^2-1)} \cdot \frac{2E}{\omega}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha(n^2-1)} \cdot \frac{2E}{\omega}\right)^{-1}$$

и (9')

$$\frac{d}{d\omega}\cos\vartheta \approx \frac{\alpha(n^2-1)}{n} \cdot \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha(n^2-1)} \cdot \frac{2E}{\omega}\right),$$

наконец получаем

$$dW' = \mu 2\pi^2 e^2 \frac{\rho(\omega, \vartheta)}{\alpha k^3} \beta \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) d\omega, \tag{15}$$

где ϑ определена соотношением (12).

Сравнивая (15) с (10) мы приходим к заключению, что вероятности индуцированного испускания и поглощения черенковского излучения равны. Следовательно, присутствие внешнего поля излучения не вносит никаких систематических изменений в потерях энергии частицы. Однако наличие поля вызывает флуктуации в интенсивности черенковского излучения, а также в значение энергии частицы.

В заключение выражаю благодарность Н. М. Кочаряну, Г. М. Гарибяну, М. Л. Тер-Микаеляну, А. Ц. Аматуни и В. А. Джрбашяну за обсуждение работы.

Ереванский Государственный
университет

Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ինդուկցված չերենկովյան ճառագայթում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Չերենկովի էֆեկտը, երբ միջավայրում գոյություն ունի ճառագայթման դաշտ: Ցույց է տրված, որ երբ բացի մնացած ֆիզիկական պայմաններից սրոնք անհրաժեշտ են չերենկովյան ճառագայթման առաջացման համար, միջավայրում կա նաև ճառագայթման դաշտ, ապա հանդես է գալիս ինդուկցված չերենկովյան առաքում, ինչպես նաև կլանում:

Ինդուկցված չերենկովյան կլանման և առաքման հավանականություններն իրար հավասար են և տրվում է (15) բանաձևով:

Այսպիսով լիցքավորված մասնիկի էներգիայի կորուստները հաշվելիս մնում է միայն սովորական չերենկովյան ճառագայթումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Е. Там* и *И. М. Франк*, ДАН СССР, 14, 107, 1937. [2] *И. Е. Там*, J. Phys., USSR, 1, 439, 1939. [3] *В. Л. Гинзбург*, ЖЭТФ, 10, 589, 1940. [4] *А. И. Ахиезер* и *В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, ГИТТЛ, М., 1953. [5] *K. M. Watson* and *J. M. Jauch*, Phys. Rev., 75, 1249, 1949. [6] *М. М. Рязанов*, ЖЭТФ, 32, 1244, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

А. М. Гаспарян и А. А. Заминян

Вертикальное движение монодисперсной суспензии

Измерение скорости стесненного падения взвеси в потоке суспензии

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 26. II. 1959)

В химической технологии и в других областях техники, а также в лабораторных исследованиях все чаще встречаются процессы, связанные с движением суспензий-взвесей твердых частиц в жидкости. Вследствие того, что плотности фаз суспензий обычно отличаются, при изменениях скоростей и направлений их движения возникают и изменения концентрации твердой фазы в соответствующих частях трубопроводов и аппаратов. Только при учете этих изменений концентраций можно правильно рассчитывать процессы и аппараты, найти оптимальные условия их осуществления.

Настоящая статья посвящена нахождению взаимосвязи (при вертикальности движения):

$$\varphi = f(V, \varepsilon, C), \tag{1}$$

отсутствующей в литературе.

φ — объемная концентрация твердой фазы, V — скорость движения суспензии, ε — объемная доля твердой фазы в расходе суспензии. C (или U) — скорость стесненного падения монодисперсной твердой фазы, определяемой для сфер выражением:

$$C = kC_0 m^n = kC_0 (1 - \varphi)^n, \tag{2}$$

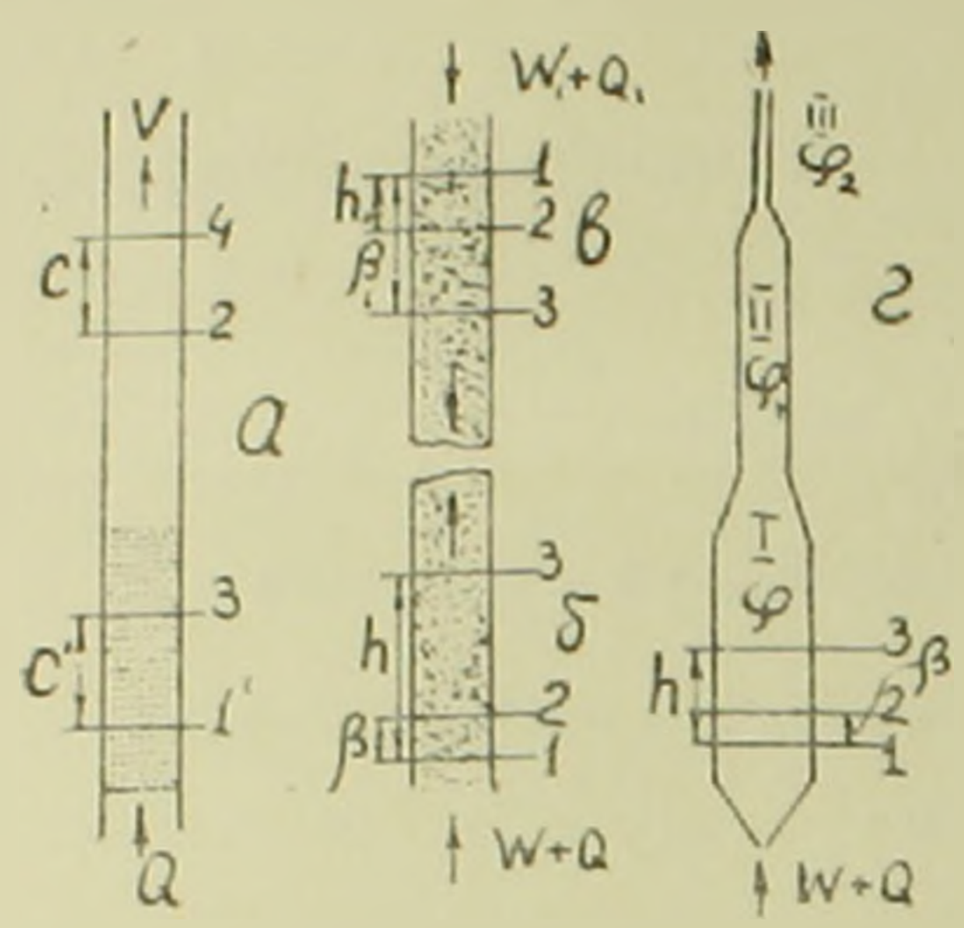
а для бесформенных частиц выражением:

$$U = \frac{kC_0}{\sqrt[3]{\alpha}} [1 - \alpha (1 - m)]^n. \tag{2a}$$

Здесь k и n зависят от режима движения, и их цифровые значения приведены в литературе. C_0 — скорость свободного падения сферической (или эквивалентной) частицы, α — соотношение объемов псевдошара и эквивалентного шара.

Предварительно уточним, что подразумевается под словами: скорость стесненного падения C (или U).

Пусть жидкость, проходя через слой частиц, поднимает их во взвесь (фиг. *1а*). Концентрация φ взвеси постоянна при постоянстве скорости и температуры жидкости. Отметим в начале секунды два сечения: *1* во взвеси и *2* в свободной от взвеси части колонки. Через секунду уровень жидкости переместится: во взвеси до *3*, а в свободной части до *4*. Большинство авторов считает, что за скорость падения взвеси следует принимать C, так как взвесь такой концентрации, при таких же условиях, в неподвижной жидкости падала бы именно с этой скоростью (при строгом рассмотрении обнаруживается неполная точность такого утверждения, однако оно весьма близко к истине). Другие же авторы считают, что за скорость падения взвеси нужно принимать C', так как разница в скоростях частиц и их обтекающей жидкости именно равняется этой величине. Очевидно, что:



Фиг. 1.

$$C' = C : (1 - \varphi). \tag{3}$$

Допущение, что C' есть истинная скорость струй во взвеси, конечно условно. Скорее можно утверждать, что последняя больше C', однако с точки зрения точности расчетов эти два взгляда принципиально не отличаются. Но, чтобы не заблуждаться при рассмотрении вопросов движения суспензии, нужно придерживаться одного из них. Впредь мы будем исходить из того, что скорость стесненного падения равняется C, но не C', что учтено также уравнениями (2—2а).

Если в колонке (фиг. *1б*) имеет место сплошной, установившийся поток суспензии, допустим снизу вверх, то, очевидно, между жидкой и твердой фазами будет иметь место непрерывное скольжение, последняя будет отставать. Пусть в начале секунды данные частицы и окружающая их жидкость находятся в сечении *1*. В конце секунды эти частицы поднялись до уровня сечения *2*, и жидкость — до сечения *3*. Хотя частицы отстали от жидкости на величину $(h - \beta)$, но эта величина не равняется скорости падения частиц. Скорость падения частиц в данном случае составляет:

$$C = (h - \beta)(1 - \varphi). \tag{4}$$

При таком же потоке сверху вниз (фиг. 1*в*) имеем следующее. Если в начале секунды данные частицы и окружающая их жидкость находились в сечении *1*, а через секунду жидкость пришла в *2*, а частицы в *3*, то скорость их падения определится выражением:

$$C_1 = (\beta_1 - h_1)(1 - \varphi). \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) определяют скорость опередившего или отставшего от рассматриваемых частиц объема, отнесенную к полному сечению колонки. Эта величина и есть скорость стесненного падения взвеси в неподвижной среде, определяемой уравнениями (2—2а).

Теперь рассмотрим взаимосвязь (1).

Пусть в колонку (фиг. 1г) вводится, за секунду, суспензия, состоящая из жидкости Q и твердых частиц W (в объемных единицах). Пусть частицы монодисперсны и их плотность больше плотности жидкости. Очевидно, что при установившемся потоке в различных частях колонки возникнут различные концентрации твердой фазы, причем так, что $\varphi > \varphi_1 > \varphi_2$. Очевидно также, что через любое сечение колонки секундный расход суспензии постоянен и составляет $(Q + W)$. Выражение:

$$\varepsilon = W : (Q + W) \tag{6}$$

определяет объемную концентрацию твердой фазы в расходе, что также зависит от сечения колонки и всегда меньше объемной концентрации φ той же фазы в любом сечении реальной колонки. Формула:

$$V = (Q + W) : F \tag{7}$$

выражает скорость суспензии в колонке, где ее сечение составляет F. Нетрудно заметить, что с увеличением V будет уменьшаться φ. Если сечение колонки в части III очень мало и скорость V поэтому очень большая (стремится к бесконечности), то здесь будет иметь место равенство $\varphi_2 = \varepsilon$.

Пусть в начале секунды данные частицы и окружающая их жидкость находятся в сечении *1*. Через секунду жидкость поднялась до сечения *3*, а частицы, отстающие от жидкости благодаря их непрерывному относительно нее падению, поднялись только до *2*. Очевидно, что:

$$Q = hF(1 - \varphi), \qquad W = \beta F\varphi \tag{8}$$

из уравнений (4, 6, 7 и 8) получается:

$$V = C + \beta; \qquad \beta = V\varepsilon : \varphi, \tag{9}$$

а отсюда:

$$\varphi = \frac{V\varepsilon}{V - C}. \tag{10}$$

Если поток суспензии имеет направление сверху вниз, то тогда наибольшая концентрация твердой фазы возникает в участке III и будет иметь место: $\varphi_2 > \varphi_1 > \varphi$.

Взаимосвязь (1) для этого случая имеет вид:

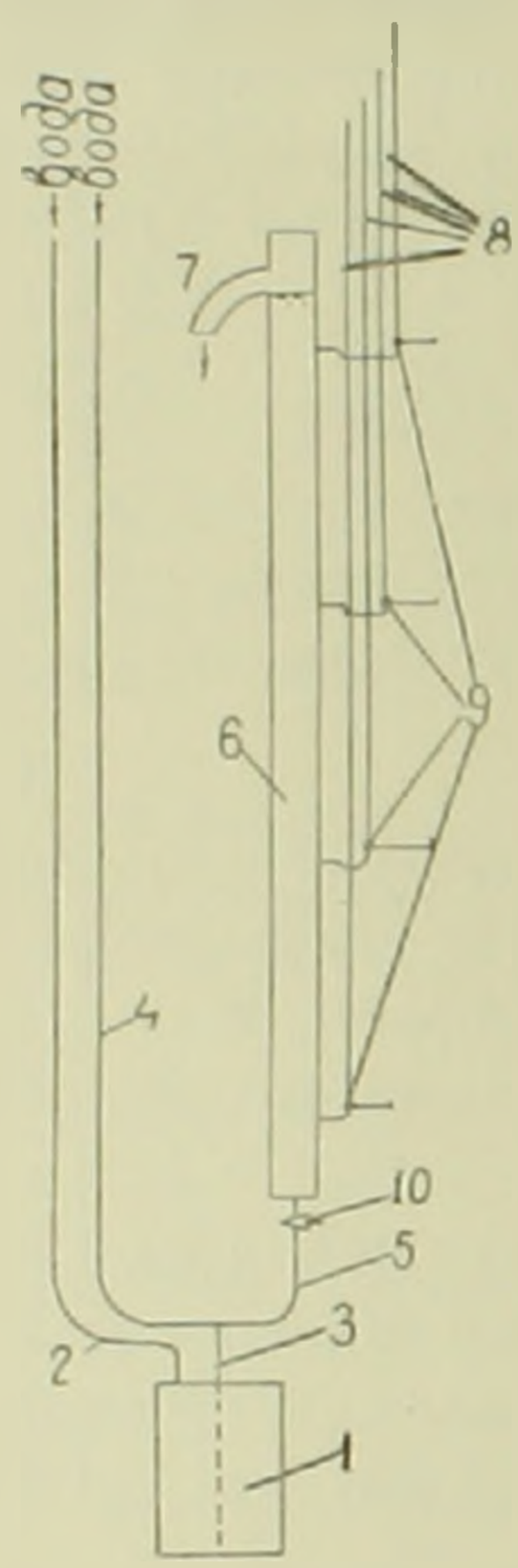
$$\varphi = \frac{V\varepsilon}{V + C}. \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) написаны для суспензий с шарообразными частицами. В случае бесформенных частиц в них C заменяется через

U, определяемой уравнением (2а). С помощью этих уравнений и уравнений (2—2а) можно решать любые задачи относительно вертикальных потоков монодисперсных суспензий, когда известны характеристики частиц и жидкости и две из величин, входящих в уравнение (10).

Уравнение (10) дает возможность также лабораторного измерения скоростей стесненного падения в потоке суспензии.

Разработанный нами способ схематически представлен на фиг. 2. Сосуд *1* заполняется частицами определенной узкой фракции и водой. Образуется густая паста. Подачей воды через *2* с заданной скоростью выдавливается паста через монжусную трубку *3*, особой конструкции, обеспечивающей полное выдавливание пасты с постоянной скоростью и концентрацией. Подаваемая одновременно через *4* вода увлекает пасту в смеситель-трубку *5*, образуя суспензию, которая, заполняя колонку *6*, вытекает через *7*. Концентрация питающей колонку суспензии — ε — может быть изменена путем изменения расходов 2 и 4, в пределах от 0 до 0,4 и более.



Фиг. 2.

Пьезометрические трубки *8*, расположенные на равных расстояниях друг от друга и заполненные водой, служат для измерения перепада давлений. Трехходовые краны *9* служат для подключения воды из водопровода для быстрого и полного опорожнения соответствующего участка колонки от взвеси. Эта операция производится одновременным открытием *9* и закрытием крана *10*.

По достижении стационарности процесса, о чем свидетельствует одинаковость и постоянство разницы уровней воды между соседними трубками *8*, из перелива *7* берутся пробы суспензии и по ним определяются ε и V. Затем закрывается кран *10* и все содержимое колонки переносится в стакан. По весу высушенного материала и по объему колонки определяется возникшая при данном опыте концентрация частиц в *6*, φ.

Этот метод, более сложный и громоздкий, чем метод взвешенного слоя, отличается тем, что создаются условия, подобные условиям непрерывных производственных процессов. По этому методу скорости стесненного падения могут быть определены также для очень малых концентраций φ. Наконец, при помощи этого способа можно проверить достоверность данных, получаемых другими способами.

Возникшую в колонке *6* объемную концентрацию частиц можно определить также по показаниям пьезометрических трубок. Если отсутствуют или незначительны другие факторы, вызывающие разницу между показателями пьезометрических трубок (такими являются тре-

ние жидкости о стенки колонки, потери на инерционные силы), и эта разница вызвана только (или почти только) большей, чем у жидкости, плотностью взвеси, то, очевидно:

$$\rho_c = \rho' + \frac{\Delta h}{l}\rho'. \tag{12}$$

Здесь ρ_c — плотность взвеси: ρ' — плотность жидкости, Δh — разность показаний пьезометрических трубок: l — расстояние между точками присоединений этих трубок к колонке.

Нетрудо заметить, что:

$$\varphi' = \frac{\rho_c - \rho'}{\rho - \rho'}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получается:

$$\varphi' = \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \cdot \frac{\Delta h}{l}. \tag{14}$$

Здесь ρ — плотность частиц.

Ввиду того, что указанные выше факторы, также влияющие на Δh, всегда существуют, то рассчитанная по (14) концентрация φ' всегда несколько больше истинной. Однако при не очень малых концентрациях разница эта незначительна.

Ա. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ ԵՎ Ա. Հ. ՁԱՄԻՆՅԱՆ

Մոնոդիսպերս սուսպենզիայի ուղղահայաց շարժումը

Կախվածքի կաշկանդված անկման չափումը սուսպենզիայի հոսանքում

Քիմիական արդյունաբերության մեջ լայնորեն օգտագործվում են պրոցեսներ շարժվող սուսպենզիայի հետ:

Այս հաղորդման մեջ դուրս են բերված բանաձևեր (10) և (11) որոնց միջոցով նկարագրվում է մոնոդիսպերս սուսպենզիայի ուղղահայաց շարժումը:

Բանաձև (10)-ը դուրս է բերված սուսպենզիայի ներքևից-վերև շարժվելու դեպքում և (11)-ը նույն վերևից-ներքև շարժվելու դեպքում (տես. նկ. 1 ե և ը):

Մշակված է եղանակ, որը դուրս բերված (10)-ը բանաձևի հիման վրա թույլ է տալիս չափելու կաշկանդված անկման արագությունները սուսպենզիայի հոսանքի մեջ (տես. նկ. 2):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Гаспарян* и *Н. С. Икарян*, ДАН АрмССР, XXVI, № 2 (1958). [2] *А. М. Гаспарян* и *А. А. Заминян*, ДАН АрмССР, XXV, № 4 (1957).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 3

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЯ

В. О. Казарян и Э. С. Авунджян

Об изменении аминокислотного состава листьев краснолистной периллы, показывающей вегетативное израстание соцветия

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Буниятяном 10. II. 1959)

Вегетативное израстание соцветия однолетних короткодневных или длиннодневных растений, вызываемое изменением светового режима, с давних пор привлекало внимание исследователей. Несмотря на наличие значительного количества исследований, проведенных с рядом растений ([1-4]), до сих пор не существует единого представления о физиологической природе этого явления. М. Х. Чайлахян ([5]) и Л. П. Жданова ([6]) израстание соцветия пытаются объяснить с позиций гормональной теории цветения, предполагая, что образование вегетативных органов на соцветиях обусловлено прекращением поступления гормонов цветения из листьев. Б. С. Мошков ([7]) это явление связывает с деятельностью молодых листьев, образовавшихся после фотопериодической индукции. Одним из авторов настоящего сообщения ([8]) дано другое объяснение, согласно которому переход цветущих растений к повторной вегетации связан с наличием в конусе нарастания соцветия клеток, не завершивших световую стадию развития. Энергичный рост и размножение этих клеток после фотопериодической индукции за счет ассимилятов, поступающих из молодых листьев, не подверженных фотопериодическому воздействию, приводит к образованию вегетативных органов на вершине цветочного стебля.

В настоящее время получены некоторые факты, которые показывают, что образование качественно нового органа, будет это вегетативный или генеративный, обусловлено лишь качественно различными ассимилятами, поступающими из листьев и корней к клеткам растущего конуса нарастания. В числе этих веществ наиболее важными являются аминокислоты, которые служат для синтеза разнообразных белков, составляющих главные компоненты конституционных веществ плазмы клеток тех или иных органов и тканей. С этой точки зрения изучение изменения состава свободных аминокислот, поступающих из листьев к клеткам конуса нарастания в разные фазы развития растения, может дать ценные данные для обогащения наших знаний о причинах наступления генеративного развития.

Мецнер [9] в своих первых работах, исследовав аминокислотный состав у Kalanchoe blossfeldiana, выращенного в условиях длинного и короткого дня, не обнаружил существенного различия в них. Но в последующих исследованиях [10], проводя опыты на том же растении в условиях короткого дня, он установил, что ацетоновая вытяжка из конусов нарастания содержит больше аминокислот, чем вытяжка из растений, находившихся на длинном дне. Этот факт уже свидетельствует о том, что переход вегетирующих растений к цветению приводит к изменению аминокислотного состава в листьях. Некоторое различие в составе свободных аминокислот в вегетативных органах растений, находящихся на различных фазах развития, выявлено и Миэттиненом [11].

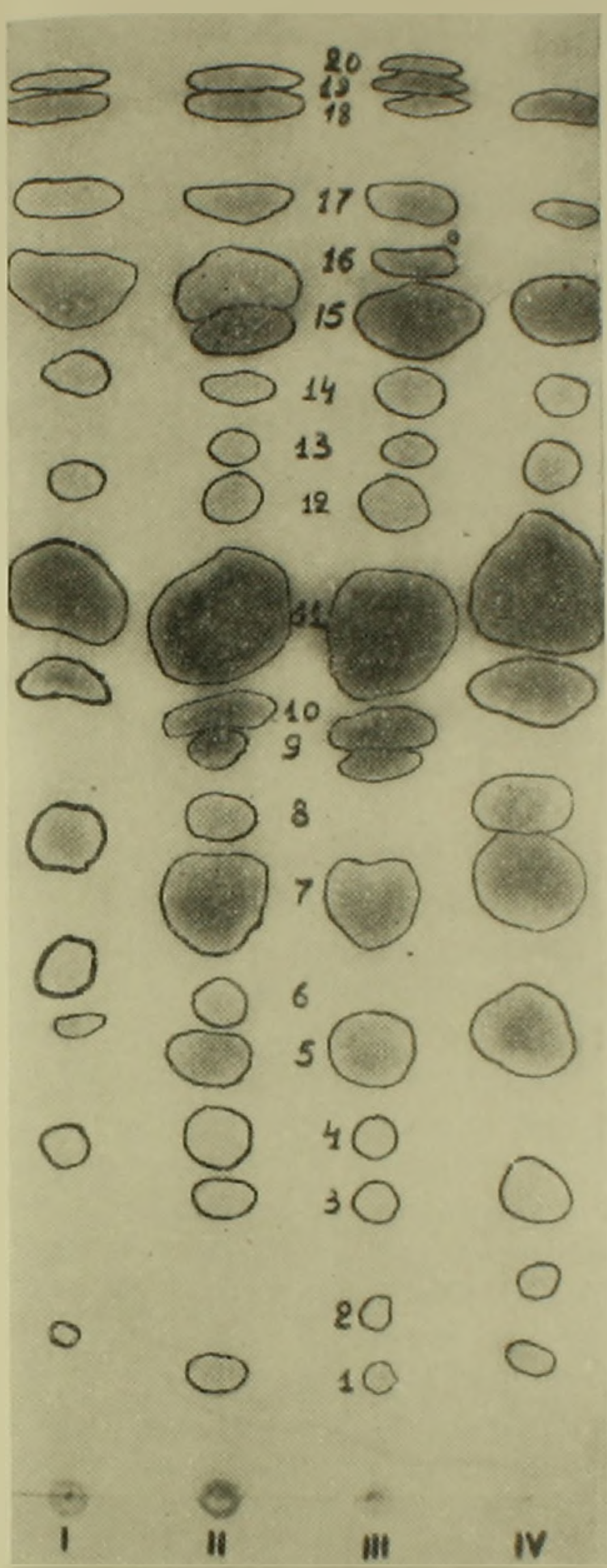
Более наглядные данные в этом отношении получены нами у однолетнего растения краснолистной периллы [12] и кустарника каллистемона красивого [13]. В этих исследованиях установлено численное нарастание свободных аминокислот в листьях цветущих растений.

Результаты всех этих исследований несомненно показывают, что наступление вегетативного израстания соцветия должно быть обусловлено количественным и качественным изменением свободных аминокислот, поступающих из листьев к клеткам конуса нарастания. С целью экспериментального установления этой связи нами в вегетационном сезоне 1958 г. были проведены некоторые опыты с растением краснолистной периллы.

Одна группа растений сначала выращивалась в условиях короткодневных фотопериодов до наступления фазы бутонизации. После этого растения переставлялись на длинный день. Спустя 16—18 дней, растения начали цвести. Однако после формирования ограниченного числа цветков они вновь перешли к вегетативному росту, образуя новые и новые молодые листья на вершине цветочного стебля. В результате на каждом подопытном растении образовалось два яруса листьев, нижний—более старый, подвергшийся короткодневному фотопериодическому воздействию и верхний — молодой, сформировавшийся в условиях длинного дня.

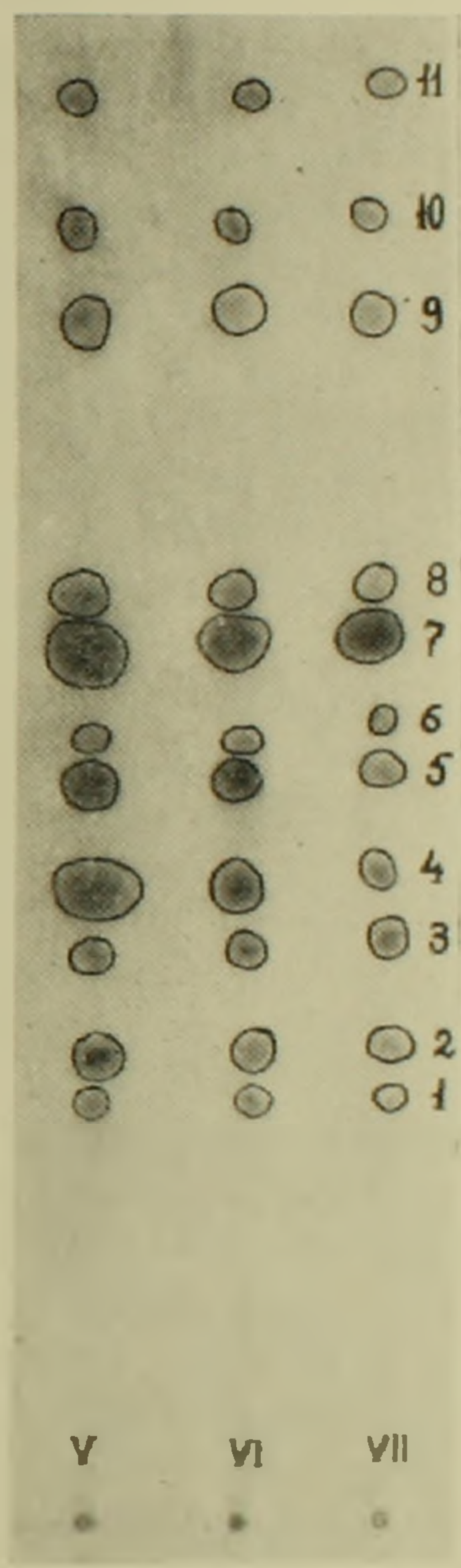
Вторая группа растений, будучи контрольной, в течение опыта находилась в условиях длинного дня, у растений же третьей группы, в отличие от растений предыдущей группы, регулярно, через каждые 2—3 дня, удалялись верхушечные, вновь образующиеся молодые листья, с тем расчетом, чтобы всегда главная почка находилась на питании возрастно зрелых нижних листьев. Как известно, этот прием способствует цветению короткодневных растений в условиях длинного дня [8—14].

От подопытных групп брались соответствующие листья и сразу фиксировались в кипящем 80% этаноле. Методика получения хроматограмм свободных аминокислот описана нами в прежних работах [12—13].



Фиг. 1. Хроматограмма свободных аминокислот в различных листьях растений перилла, показывающие вегетативное израстание соцветия

1—цистин-цистеин; *2*—гистидин; *3*—лизин; *4*—аспарагин; *5*—аргинин; *6*—неидентифицированная аминокислота; *7*—аспарагиновая кислота; *8*—серин; *9*—глютаминовая кислота; *10*—треонин; *11*—α-аланин; *12*—пролин и β-аланин; *13*—γ-аминомасляная кислота; *14*—тирозин; *15*—триптофан; *16*—валин; *17*—метионин; *18*—изолейцин; *19*—фенилаланин; *20*—лейцин.



Фиг. 2. Хроматограмма свободных аминокислот в старых листьях перилла

1—аспарагин; *2*—аргинин; *3*—серин; *4*—гликокол; *5*—глютаминовая кислота; *6*—треонин; *7*—α-аланин; *8*—γ-аминомасляная кислота; *9*—триптофан; *10*—валин; *11*—лейцин.

Для получения первой хроматограммы в качестве объекта были взяты листья следующих групп растений:

I—листья растений первой группы, получивших 6 коротких дней;

II—молодые растущие листья второй группы;

III—молодые растущие листья, взятые от зоны израстания растений первой группы;

IV—зрелые листья, расположенные непосредственно ниже израстающих соцветий растений первой группы.

Приведенные в хроматограмме (фиг. 1) данные интересны тем, что показывают, прежде всего, почти идентичную картину свободных аминокислот, обнаруженных в молодых листьях растений первой и второй групп, а также в старых листьях, расположенных непосредственно ниже израстающего соцветия. При этом молодые листья у обеих групп растений содержат сравнительно большее число аминокислот, чем листья, подвергшиеся сначала короткодневному фотопериоду, а затем переставленные на длинный день. Этот факт, по всей вероятности, свидетельствует о том, что многие аминокислоты поступают из корневой системы, так как последняя, как установлено экспериментально [15–18], является очагом для синтеза ряда специфических аминокислот.

Количественное и численное сходство аминокислот, обнаруженное в молодых листьях контрольных и вегетативно израстающих растений, в конечном счете свидетельствует о физиологической их равноценности, хотя один из них формируется на вершине вегетирующих растений, другие — цветущих растений. Отсюда следует, что одна из существенных причин наступления вегетативного израстания должна заключаться в численном изменении свободных аминокислот в листьях, подвергшихся фотопериодической индукции. Под влиянием оптимальных фотопериодов увеличивается число аминокислот, поступающих из листьев к клеткам конуса нарастания. Численное нарастание аминокислот в листьях приводит к образованию цветков. После же перенесения растений в условия длинного дня, вновь сокращается число синтезирующихся в листьях и поступающих в клетки конуса нарастания аминокислот, что способствует повторному переходу растений к вегетативному росту.

Этот вывод частично подтверждается данными следующей хроматограммы (фиг. 2), для получения которой подвергались анализу листья, взятые из следующих групп растений:

V—старые листья от растений первой группы;

VI—старые листья от растений второй группы;

VII—старые листья от бутонизирующих растений третьей группы.

Как показывает приведенная хроматограмма, не наблюдается количественного различия в аминокислотах, обнаруженных в листьях пятых, шестых и седьмых групп. Этот факт является весьма наглядным для иллюстрации того положения, что со старением листьев по-

следние, независимо от того, получили ли до этого кратковременную фотопериодическую индукцию или нет, синтезируют примерно одни и те же аминокислоты. Таким образом, одним из проявлений фотопериодического последействия, впервые описанного С. А. Эгизом [19], затем Н. А. Максимовым [20] и В. А. Разумовым [21], является изменение аминокислотного состава листьев, подвергшихся в начальной фазе их развития кратковременному фотопериодическому воздействию.

Все эти данные одновременно подтверждают наше прежнее заключение о том, что наступление цветения и формирование генеративных органов, т. е. дифференциация меристематических клеток конуса нарастания в направлении образования генеративных органов, связано именно с качеством пластических веществ, поступающих в растущие клетки конуса нарастания.

Ботанический институт Академии наук
Армянской ССР

Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ ԵՎ Է. Ս. ՀԱՎՈՒՆՋՅԱՆ

Ծաղկափթթության վերաճ ցույց տվող կարճ օրվա պերիլլայի տերևների ամինոթթվային կազմի փոփոխության մասին

Կարճ և երկար օրվա միամյա բույսերի ծաղկափթթությունների վեգետատիվ աճը, կապված լուսային ռեժիմի փոփոխության հետ, վաղուց հանդիսացել է հետազոտողների ուշադրության առարկա։ Չնայած դրան, ժամանակակից ֆիզիոլոգիական գրականության մեջ չկա մի ընդհանուր կարծիք այս երևույթի բնույթի մասին։

Այժմ կուտակվել են որոշ փաստեր, որոնք ցույց են տալիս, որ բույսերի մոտ նոր օրգանների առաջացումը, լինի դա գեներատիվ կամ վեգետատիվ, պայմանավորված է հիմնականում տերևներից և արմատներից դեպի աճման կոնը տեղափոխվող ասիմիլյատների որակով։ Այս նյութերից ամենակարևորների շարքին են պատկանում ամինոթթուները։ Հեղինակների նախկին աշխատանքներից, ինչպես և մի քանի այլ տվյալներից երևում է, որ ծաղկափթթության վեգետատիվ աճը պետք է հիմնականում կապված լինի այն նյութերի որակական կազմով, որոնցով սնվում են աճման կոնի ինտենսիվ բաժանվող բջիջները։

Այս հարցի պարզաբանման նպատակով հեղինակների կողմից պերիլլայի հետ կատարված փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ ծաղկափթթության վեգետատիվ աճի հիմնական պայմաններից մեկը պետք է համարել ֆոտոպերիոդիկ ինդուկցիայի ենթարկված տերևներում ազատ ամինոթթուների կազմի փոփոխությունը։ Ինդուկցիայի ժամանակ տեղի է ունենում ամինոթթուների թվական աճ, որոնք նպաստում են բույսերի ծաղկմանը։ Հետագայում, երբ բույսերը տեղափոխվում են երկար օրվա պայմանների նրանց տերևներում նորից պակասում է ամինոթթուների թիվը։ Դրա հետևանքով նրանք անցնում են կրկնակի վեգետացիայի։ Ֆոտոպերիոդիկ հետազոտության արտահայտություններից մեկը հանդիսանում է կարճ օրվա ազդեցության ենթարկված, այնուհետև երկար օրվա պայմանները տեղափոխված բույսերի տերևներում ազատ ամինոթթուների քանակական կազմի փոփոխումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Клебс.* Произвольные изменения растительных форм., соч. К. А. Тимирязева 6, 1939. [2] *В. В. Гарнер* и *Г. А. Аллард*, Journ. Agr. Res., 18, 1920. [3] *В. Н. Любименко*, „Сов. бот“., 6, 1933. [4] *В. В. Ботвиновский*, „Бот. журн. СССР“, 1, 1933. [5] *М. Х. Чай-*

лахин. Гормональная теория развития растений, Изд. АН СССР, 1937. [6] *Л. П. Жданова*, ДАН СССР, 60, 8, 1948. [7] *Б. С. Мошков*, ДАН СССР, 31, 7, 1941. [8] *В. О. Казарян*, Стадийность развития и старения однолетних растений, Изд. АН АрмССР, 1952. [9] *Г. Мецнер*, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen. Math. Phys., 2, 19, 1954. [10] *Г. Мецнер*, Abhandl. Dtsch Akad. Wiss. Berlin Kl. Chem. Geol. u-Biol., 5, 83, 1955 (1956). [11] *Дж. К. Мизиттинен*, Suomalais, tiedcakat, toimituks, Ser. A. II 60, 520, 1955. [12] *В. О.Казарян* и *Э. С. Авунджян*, ДАН АрмССР, 27, 2, 1958. [13] *В. О. Казарян*, *Э. С. Авунджян* и *К. А. Карапетян*, ДАН АрмССР, 26, 5, 1958. [14] *В. О. Казарян* и *А. П. Мелконян*, ДАН АрмССР, 21, 5, 1955. [15] *А. Л. Курсанов*, Физ. раст., 6, 1957. [16] *М. Г. Потапов*, Тез. докл. делег. съезда всес. бот. об-ва, 1957. [17] *А. Л. Курсанов*, *О. Ф. Туева* и *А. Г. Верещагин*, Физ. раст., 1, 12, 1954. [18] *Э. С. Авунджян*, „Изв. АН АрмССР", 11, 9, 1959. [19] *С. А. Эгиз*, Тр. Детсельхозаклим. станц. при Ленингр. с.-х. ин-те, 9, 1928. [20] *Н. А. Максимов*, Тр. по прикл. бот. ген. и сел., 20, 1929. [21] *В. И. Разумов*, Тр. по прикл. бот., ген. и сел., 23, 1930.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVIII 1959 3

АРАХНОЛОГИЯ

А. Т. Багдасарян

Новые виды рода Petrobia из Армянской ССР (Acarina, Tetranychoidea)

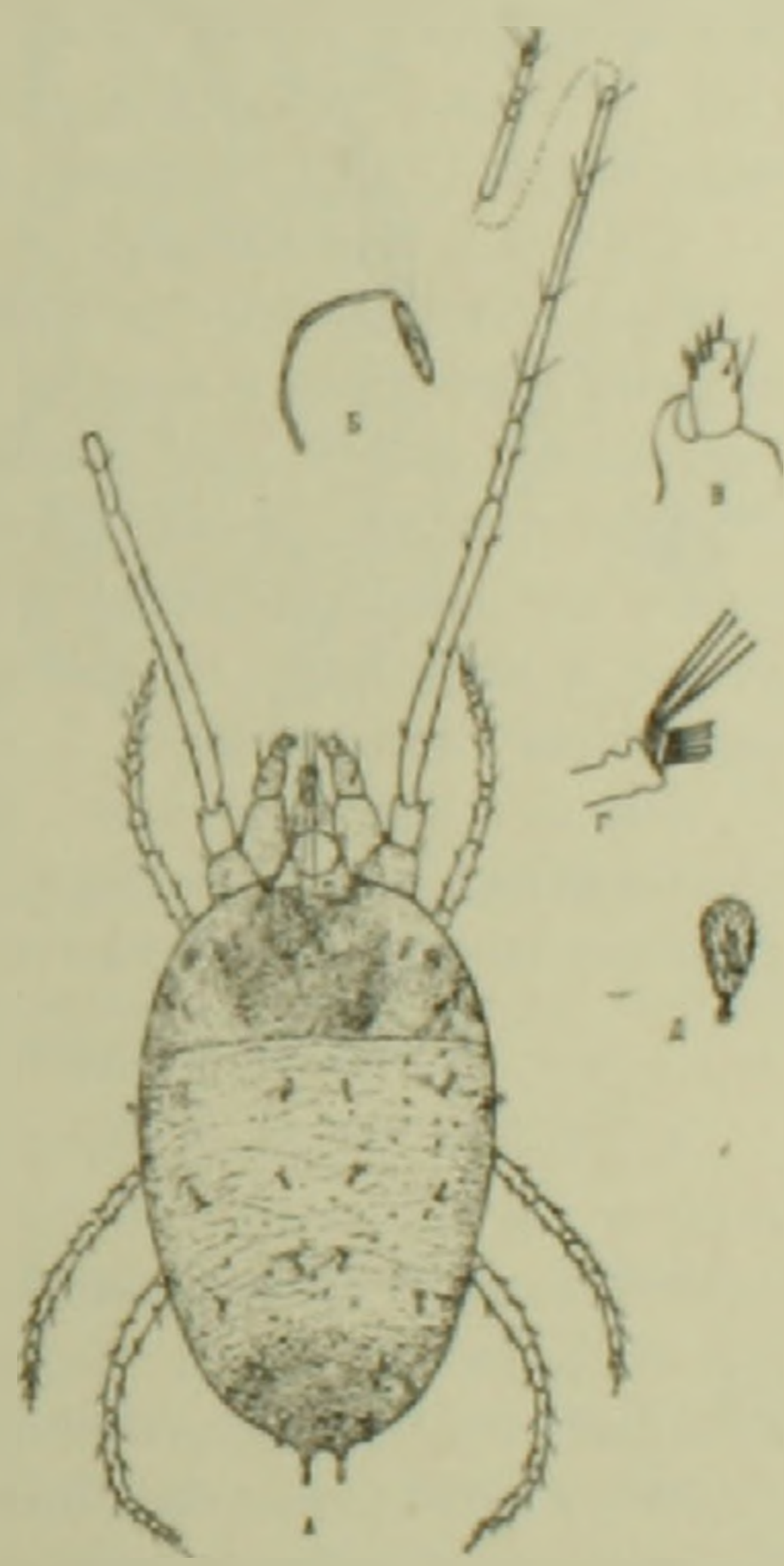
(Представлено академиком АН Армянской ССР В. Фанарджяном 9. I. 1959)

В сборах тетранихоидных клещей из Армянской ССР выявлены три новых вида, описание которых приведено в настоящей статье*.

Типы новых видов хранятся в коллекциях Зоологического института Академии наук Армянской ССР в г. Ереване.

Petrobia ter-poghossiani Bagdasarian, sp. n. (фиг. 1).

Самка. Тело овальное, умеренно стройное. Дорсально граница между проподосомой и гистеросомой довольно явственная. Кожные складки на спине сравнительно мелкие, но значительно грубее, чем у P. latens; на проподосоме по бокам они волнисто-линейные, продольные или несколько косые, а в середине в виде мелкой продольно вытянутой сетчатости; на метаподосоме и в передней половине опистосомы складки поперечные, более редкие, волнисто-линейные, а на заднем конце опистосомы — мелкосетчатые; местами на спине сетчатая складчатость создает впечатление очень мелкой бугорчатости. Стилофор овальный или яйцевидный, впереди без выемки. Перитремы с цилиндрическим раструбом, длина которого в 5—6 раз больше ширины. Вершина коготка голени щупалец не дости-



Фиг. 1. Petrobia ter-poghossiani Bagdasarian sp. n. А-самка со спинной стороны, Б-перитрема; В-лапка щупальца; Г-эмподий и амбулакры ног I; Д-щетинка спины.

* В приведенных новоописаниях размеры для Petrobia ter-poghossiani sp. n. и P. vediensis sp. n. даются средние из 10 промеров, а для P. sisianensis sp. n. — толь-

гает конца лапки, длина которой примерно вдвое больше ширины. Веретено стройное, цилиндрическое, значительно короче шипиков; булава по форме и величине почти такая же, как шипики. Спинных щетинок 13 пар; из них внутренние крестцовые щетинки не смещены к краю тела. Все спинные щетинки веерoвидные, мелко и редко шиповато-опушенные; отходят от бугорков. Бугорки несущие теменные и хвостовые щетинки, наиболее крупные, расположены на самом краю тела и заметно из него выступают. Задние щетинки на тазиках I и II очень мелко опушенные; остальные щетинки брюшной стороны тела щетинковидные, гладкие. На ноге I макрохеты более, чем вдвое короче лапки; микрохеты не поддаются обнаружению. Количество щетинок на члениках ноги I: на бедре—10, колене—4, голени—15, лапке—16. Конус лапки I с 4 щетинками; его длина не больше ширины. Амбулакры ног I брусковидные, короткие, несут по паре длинных железистых волосков; эмподий короткий, прямой, усажен до вершины двумя рядами железистых волосков. Размеры в микронах: длина тела—460, ширина—280; длина стилофора—117,6, ширина—84; длина ног I—720, ног II и III—220, ног IV—260; длина бедра I—231, колена—63, голени—273, лапки—138.

Самец. Не найден.

Вид описывается по материалу, собранному на еже сборной (Dactylis glomerata) и пырее (Agropyron elongatiforme) на горе Атис. Котайкского района, на высоте 2200—2450 *м* над уровнем моря.

Описываемый новый вид по форме спинных щетинок, по топографии крестцовых щетинок и по величине бугорков, несущих теменные и хвостовые щетинки, сильно отличается от всех известных видов рода Petrobia.

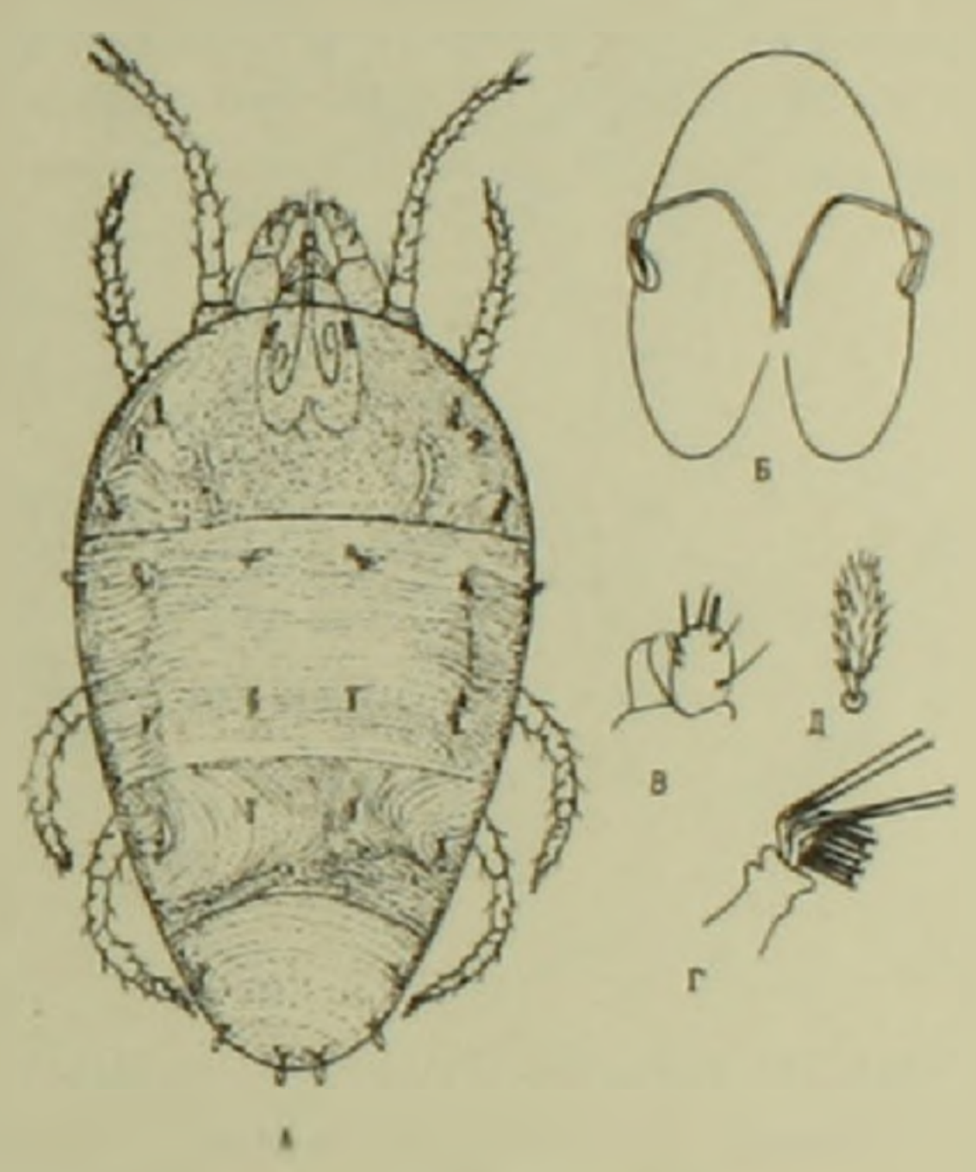
Новый вид называю именем покойного профессора Аветика Григорьевича Тер-Погосяна, отдавшего много сил и энергии для развития зоологической науки в Армянской ССР.

Petrobia vediensis Bagdasarian, sp. n. (фиг. 2)

Самка. Тело яйцевидное. На спине граница между проподосомой и гистеросомой хорошо выражена; довольно явственно отграничена также и метаподосома от опистосомы. Прижизненная окраска тела темновато-зеленая. Кожные складки на спине мелкие, волнисто-линейные; по бокам проподосомы они продольные, а в середине переходят в мелкую зернистость; на гистеросоме они в основном поперечные, но местами (в особенности позади ног IV) дают ряд изгибов, образующих неправильный рисунок. Стилофор яйцевидный, на вершине округлый или с неглубокой выемкой. Раструб перитрем широко-овальный, отогнут назад; его длина в 2—3 раза больше ширины.

ко из двух промеров. Длина ног дается без тазиков и без амбулакрально-эмподиального вооружения; длина отдельных члеников приводится только для ног I. При измерении длины лапки I за крайнюю дистальную точку принималось место прикрепления амбулакр.

Коготок голени щупалец почти достигает вершины лапки; последняя почти цилиндрическая, с округлой вершиной; ее длина примерно в полтора раза больше ширины. Булава почти цилиндрическая, на вершине округлая, немного короче шипиков; веретено цилиндрическое, стройное, примерно на $^1/_3$ короче булавы. Спинных щетинок 13 пар; из них внутренние крестцовые смещены к краю тела, а теменные расположены позади от переднего края тела. Спинные щетинки короткие, веретеновидные, грубо опушенные; из них хвостовые, теменные и частично лопаточные и крестцовые щетинки немного длиннее и стройнее остальных. Хвостовые и крестцовые щетинки отходят от маленьких бугорков; у остальных щетинок бугорки если и имеются, то они настолько маленькие, что с трудом отличаются от базальных колец. Все щетинки брюшной стороны тела и в том числе газиковые,— щетинковидные, гладкие. На ногах I макрохеты почти такой же длины как лапка; микрохеты хорошо видимы. Количество щетинок на члениках ноги I: на бедре—6, колене—4, голени—4, лапке—14. Конус лапки I с шестью щетинками; его длина заметно меньше ширины. Амбулакры на ногах I довольно длинные, брусковидные, несут на вершине по паре длинных железистых волосков; эмподий брусковидный, немного длиннее амбулакр, усажен до вершины двумя рядами железистых волосков. Размеры в микронах: длина тела—540, ширина—300; длина стилофора—92, ширина—54,5; длина ног I—222, ног II—176,4, ног III—193,2, ног IV—210; длина бедра I—63, колена—42, голени—50,4, лапки—54,6; длина теменных щетинок—20, внутренних поясничных—12, хвостовых—22.



Фиг. 2. Petrobia vedensis Bagdasarian sp. n. *А*-самка со спинной стороны; *Б*-стилофор и перитремы; *В*-лапка щупальца; *Г*-эмподий и амбулакры ног I; *Д*-щетинка спины

Самец. Не найден.

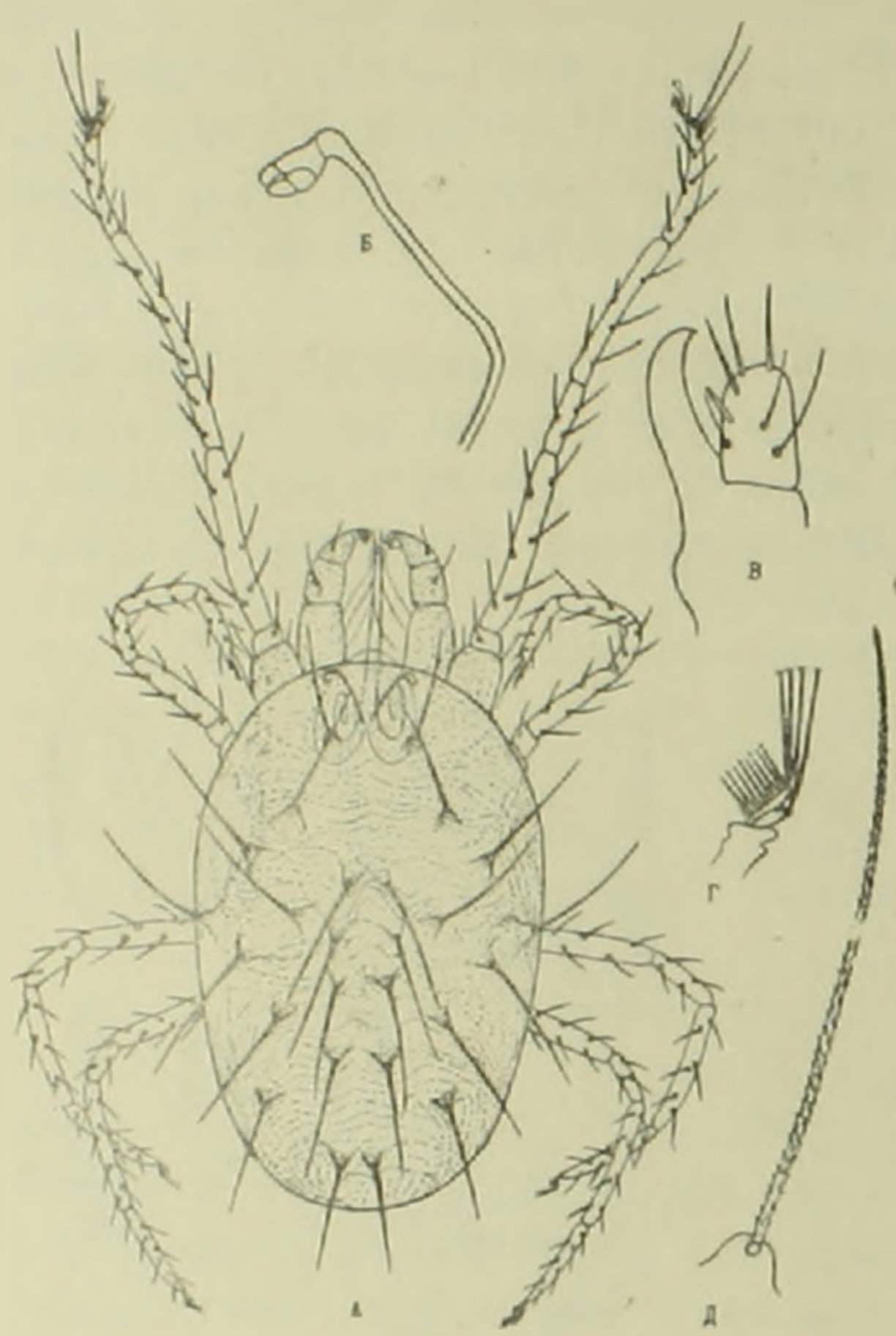
Клещ собран в окрестностях с. Веди, Вединского района, на Noaea leptoclada.

Описываемый новый вид по форме тела приближается к Petrobia dzhulfaensis Bagdasarian (in litt.) Однако наш новый вид отличается от P. dzhulfaensis устройством лапки щупалец и перитремального раструба, хетомом ног и некоторыми другими признаками.

Petrobia sisianensis Bagdasarian sp. n. (фиг. 3).

Самка. Тело овальное, со слабо выраженной границей между проподосомой и гистеросомой. Кожные складки на спине умеренно грубые, волнисто-линейные; по бокам гистеросомы они залегают продольно, а в середине—поперечно. Стилофор широко-яйцевидный, с

округлой вершиной. Перитремальные раструбы сравнительно маленькие, заметно расширенные, более или менее овальные; их длина примерно вдвое больше ширины. Лапка щупальца приближенно цилиндрической формы, умеренно стройная. Булава коническая, почти такой же длины, как шипики; веретено стройное, цилиндрическое, с округлой вершиной, почти вдвое короче булавы. Коготок голени щупалец заходит за вершину лапки. Спинных щетинок 13 пар; из них теменные, внутренние крестцовые и хвостовые не смещены к краю тела. Все спинные щетинки длинные (их длина заметно больше ширины междурядий), конические, опушенные, отходят от крупных бугорков. Тазиковые щетинки, за исключением передних на тазиках I, мелко и редко опушенные, немного утолщенные; передние щетинки на тазиках I, а также и остальные щетинки брюшной стороны тела щетинковидные, гладкие. На ногах I макрохеты заметно короче лапки; микрохеты хорошо видимы.



Фиг. 3. Petrobia sisianensis Bagdasarian sp. n. *А*-самка со спинной стороны; *Б*-перитрема; *В*-лапка щупальца; *Г*-эмподий и амбулакры ног I; *Д*-щетинка спины.

Количество щетинок на члениках ноги I: на бедре—8, колене—5, голени—14, лапке—21. Конус лапки I относительно стройный (его длина заметно больше ширины), с шестью щетинками. Амбулакры на ноге I брусковидные, умеренно укороченные, несут на вершине по паре длинных железистых волосков; эмподий брусковидный, примерно вдвое длиннее амбулакр, усажен до вершины двумя рядами железистых волосков. Размеры в микронах: длина тела—640, ширина—440; длина стилофора—117,5, ширина—84; длина ног I—660, ног II—400, ног III—450, ног IV—520; длина бедра I—230, колена—60, голени—270, лапки—135.

Самец. Не найден.

Вид описывается по трем самкам, найденным 8.VII.1957 г. в окрестностях с. Сисиан, Сисианского района, на тысячелистнике (Achillea sp.).

Новый вид, несомненно, очень схож с Petrobia harti (Ewing, 1909), от которой отличается хетомом ног I, формой эмподия на них и другими особенностями.

Ա. Տ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Petrobia սեռի նոր տեսակներ Հայաստանից

Ներկա հոդվածում նկարագրվում է Հայաստանում հավաքած նյութերի հիման վրա հայտնաբերված տետրանիխիդ տզերի 3 նոր տեսակ։

Այդ նոր տեսակներն են.

1. Petrobia ter-poghossiani Bagdasarian, sp. n. *Հավաքվել է ոզնախոտի* (Dactylis) *և սեզի* (Agropyron) *վրայից Կոտայքի շրջանի Հատիս սարից, ծովի մակերևույթից 2200—2450 մետր բարձրության վրա։ Այս նոր տեսակը մեջքային խոզանների ձևով, գավակային խոզանների դասավորությամբ և գագաթային ու պոչային խոզանները կրող մաշկային թմբիկների մեծությամբ խիստ տարբերվում է սեռի հայտնի բոլոր տեսակներից։*

2. Petrobia vediensis Bagdassarian, sp. n. *Հավաքվել է նոեա* (Noaea) *բույսի վրայից, Վեդու շրջանի Վեդի գյուղի շրջակայքից։ Այս տեսակն բոլոր մարմնի ձևի միանգամայն տարբերվում է* Petrobia *սեռի բոլոր տեսակներից, բացառությամբ* Petrobia dzhulfa nsis Bagdassarian *տեսակից։ Սակայն վերջինից էլ մեր այս նոր տեսակը տարբերվում է շոշափուկի թաթիկի կազմությամբ, պերիտրեմային խողովակների առաջնային մասի կազմությամբ, ոտքերի խոզանների թվով և այլն։*

3. Petrobia sisianensis Bagdasarian, sp. n.: *Հավաքվել է հազարատերևակի* (Achillea) *վրայից, Սիսիանի շրջանի Սիսիան գյուղի շրջակայքից։ Այս նոր տեսակը շատ նման է* Petrobia harti (Ewing) *տեսակին, սակայն նրանից տարբերվում է առաջին զույգ ոտքերի էմպոդիալ օրգանների կազմությամբ և խոզանների թվով։*