

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XXIII, № 3

1956

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ս. ԻԱՎԹՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս,
Ա. Լ. ԽԱՏԱՋՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ թղթակից անդամ,
Վ. Զ. ՀԱՄԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս
(պատ. խմբագիր), Վ. Զ. ՂԱՋԱՊՅԱՆ, Ա. Լ. ՄՆՋՈՒ-
ԿԱՆ, ՀՍՍՐ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
ՀՍՍՐ ԳԱ թղթակից անդամ, Մ. Մ. ԶՐԱՇԵՅԱՆ, ՀՍՍՐ
ԳԱ թղթակից անդամ (պատ. խմբագիր սեզակայ):

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик АН АрмССР
(отв. редактор), Г. С. ДАВТЯН, академик АН
АрмССР, М. М. ДЖРБАШЯН, чл.-корресп. АН
АрмССР (зам. отв. редактора), В. О. КАЗАРЯН,
А. Л. МНДЖОЯН, академик АН АрмССР,
А. Г. НАЗАРОВ, чл.-корресп. АН АрмССР,
А. Л. ТАХТАДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ'աթեմատիկա

Մ. Մ. Զբրաբայան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ թղթակից-անդամ—Ամբողջ իրական
առանցքի վրա ֆունկցիաների կշռային-լուծագույն մասավորութեան քվադրատնա-
լիտիկ դասի մասին 37

Մ'եխանիկա

Կ. Ս. Զորանյան—Բազադրյալ ձողի ծուման մասին 101

Պրունտների մեխանիկա

Ս. Ռ. Մնսչյան—Կապակցված գրունտների սեղմման առանձնականութեան բնու-
թագրերի էքսպերիմենտալ որոշման հարցի շուրջը 111

Հիդրոէներգետիկա

Բ. Լ. Բունիարյան—Ռեակտիվ տուրբիններից ելքի ստեղծանափակիչի մասին 111

Ռիոքիմիա

Մ. Ա. Տեր-Կարապետյան, Հայկական ՍՍՏ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Մ. Օհան-
ջանյան և Շ. Ա. Ավագյան—Շաքարասնկային օրգանիզմների կողմից քաղցախաթթվի
օքսիդատիվ քայքայման և աերոբ ասիմիլյացիայի մի քանի հատկութունների
մասին 121

Օրկրաբանություն

Ս. Ս. Վանյուշին և Է. Գ. Մալխուսյան—Ղափանի հանքային դուշտի սուլֆուրա-
թային և կիսաիոքթային գոյացումների հասակի մասին 131

Քուլյսերի գեներետիկա

Ա. Գ. Ավագյան—Գյուղատնտեսական կուլտուրաների ձերատուժի Հազոր-
դում V 131

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математика

- М. М. Джрбашян*, чл.-корр. АН Армянской ССР—О квази-аналитическом классе функций взвешенно-полиномиального приближения на всей вещественной оси 97

Механика

- К. С. Чобанян*—Об изгибе составного стержня 103

Механика грунтов

- С. Р. Месчян*—К вопросу экспериментального определения характеристик связанных грунтов при сжатии 111

Гидроэнергетика

- Б. Л. Бунцатян*—Об ограничителе расхода через реактивные гидротурбины 119

Биохимия

- М. А. Тер-Карапетян*, чл.-корр. АН Армянской ССР, *А. М. Оганджанян* и *Ш. А. Авакян*—О некоторых особенностях окислительного распада и аэробной ассимиляции уксусной кислоты дрожжевыми организмами 125

Геология

- С. С. Ванюшин* и *Э. Г. Малхасян*—О возрасте субвулканических и гипабиссальных образований Кафанского рудного поля 133

Генетика растений

- А. Г. Авакян*—Чеканка сельскохозяйственных культур. Сообщение V . . . 137

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, чл.-корр. АН Армянской ССР

О квази-аналитическом классе функций взвешенно-полиномиального приближения на всей вещественной оси

(Представлено 27. IX. 1956)

1°. В работе (1) были введены два квази-аналитических класса функций, связанных с приближениями функций на всей оси $(-\infty, +\infty)$ целыми функциями экспоненциального типа и рациональными функциями с наперед заданным множеством полюсов.

В настоящей заметке вводится новый квази-аналитический класс функций, связанный с взвешенно-полиномиальным приближением функций на оси $(-\infty, +\infty)$.

2°. Пусть $y = p(x) \geq 0$ непрерывная четная функция, определенная на всей оси $(-\infty, +\infty)$, монотонно возрастающая при $x \geq 0$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-p(x)} x^n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пусть $x = q(y)$ — функция, обратная к $y = p(x)$, тогда, как известно (2), интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{dy}{q(y)} \quad (2)$$

расходятся одновременно.

Отнесем к классу $C[p(x)]$ функции $f(x)$, непрерывные на всей оси $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющие условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-p(x)} f(x) = 0. \quad (3)$$

Обозначим

$$E_n(f, p) = \inf_{\{Q_n\}} \left\{ \max_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |f(x) - Q_n(x)| \right\}, \quad (4)$$

где нижняя грань берется в семействе всех полиномов, степень которых не превосходит n .

В работе (2) (теорема 8 главы II) было доказано, что если для функции $f(x) \in C[p(x)]$



$$E_n(f, \rho) \leq K_1 \exp \left\{ -\gamma \int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где $K_1 > 0$ и $\gamma > 0$ постоянные, не зависящие от n , то при условии

$$\int_1^\infty \frac{\rho(x)}{x^2} dx = +\infty \quad (6)$$

функция $f(z)$ голоморфна в некоторой полосе вида $|\operatorname{Im} z| \leq a$, где

$$a \geq \gamma \frac{\eta}{2 + \pi}.$$

Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ — некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел.

Скажем, что функция $f(x) \in C[\rho(x)]$ принадлежит к квази-аналитическому классу $C_{n_k}[\rho(x)]$, если при условии (6)

$$E_{n_k}(f, \rho) \leq K_1 \exp \left\{ -\gamma \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где $K_1 > 0$ и $\gamma > 0$ постоянные, не зависящие от $k = 1, 2, \dots$.

Как отмечалось выше, функции класса $C_k[\rho(x)]$ голоморфны в некоторой полосе вида $|\operatorname{Im} z| \leq a$ и поэтому единственным образом определяются через свои значения, принимаемые на произвольно малом отрезке оси $(-\infty, +\infty)$.

Мы покажем ниже, что свойство единственности сохраняется для функций класса $C_{n_k}[\rho(x)]$, при произвольной бесконечной последовательности целых чисел $\{n_k\}$. Докажем теорему.

Теорема 1. *Функции класса $C_{n_k}[\rho(x)]$ единственным образом определяются на всей оси $(-\infty, +\infty)$, через свои значения на произвольном отрезке вещественной оси.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f(x) \in C_{n_k}[\rho(x)]$ и $f(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$ вещественной оси, то $f(x) \equiv 0$ на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Обозначим через $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ множества тех чисел, для которых $f(x) \equiv 0$ на любом отрезке вида $[\alpha, \beta]$. Эти множества, очевидно, непустые, так как $\alpha_0 \in \{\alpha\}$, $\beta_0 \in \{\beta\}$. Предполагая, вопреки утверждению теоремы, что $f(x) \not\equiv 0$ на всей оси $(-\infty, +\infty)$, заключаем, что хотя бы одно из чисел $\sup\{\beta\}$ и $\inf\{\alpha\}$ конечно.

Положим, не ограничивая общности, что $\sup\{\beta\} = \beta' < +\infty$, тогда из непрерывности функции $f(x)$ следует, что

1) $f(x) \equiv 0$, на отрезке $[\alpha_0, \beta']$

2) для произвольно выбранного $\epsilon > 0$ в отрезке $[\beta', \beta' + \epsilon]$ существуют точки, где $f(x) \neq 0$.

Если мы покажем, что в условиях теоремы, из свойства 1) функции $f(x)$ следует, что $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[\beta', a]$, где $a > \beta'$, то это будет противоречить свойству 2) функции $f(x)$ и теорема будет доказана.

Пусть $P_{n_k}(x)$ полином степени n_k , для которой

$$\max_{-\infty < x < +\infty} e^{-\rho(x)} |f(x) - P_{n_k}(x)| = E_{n_k}(f, \rho). \quad (8)$$

Тогда из того, что $f(x) \in C[\rho(x)]$ будет следовать

$$|P_{n_k}(x)| \leq K_2 e^{\rho(x)}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (9)$$

где $K_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от $k > 1$ (такие постоянные дальше будут обозначены через K_i , $(i = 1, 2, \dots)$).

Из свойства 1) функции $f(x)$ и из формул (7) и (8) вытекает, что

$$\max_{[\alpha_0, \beta']} |P_{n_k}(x)| \leq K_3 \exp \left\{ -\gamma \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Обозначим через C_γ эллипс с фокусами в точках α_0 и β' , проходящий через точки $\frac{\alpha_0 + \beta'}{2} \pm i\gamma$ плоскости z .

Покажем, что при $K \geq K_0$ в замкнутой области D_γ , ограниченной эллипсом C_γ , имеет место оценка

$$|P_{n_k}(x + iy)| \leq K_4 \exp \left\{ 2\gamma \frac{2 + \pi}{\pi} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}. \quad (11)$$

Действительно, в работе⁽³⁾ (теорема I главы II) было доказано, что для любого $C > 1$ при $q(n_k) > 1$ из оценки (9) следует оценка

$$|P_{n_k}(x + iy)| \leq C e^{(|x| + a)}. \quad (12)$$

справедливая в области G_{n_k} , определяемой из условий

$$-\infty < x < +\infty, \quad -y_{n_k} \leq y \leq y_{n_k}(x), \quad \text{где}$$

$y_{n_k}(x) > 0$ — непрерывная четная функция, которая для значений $|x| \leq q(n_k) - 1$ определяется таким образом:

$$y_{n_k}(x) = \frac{\pi}{2 + \pi} \log_c \left\{ \rho(|x| + 1) + \int_{\rho(|x|+1)}^{n_k} \frac{dy}{q(y) - |x|} \right\}^{-1} \quad (13)$$

Выберем сначала k_1 таким образом, чтобы при $k > k_1$ не только имели $q(n_k) > 1$, но и чтобы отрезок $[c, d]$, отсекаемый эллипсом C_γ на вещественной оси, содержался внутри отрезка $[-q(n_k) + 1, q(n_k) - 1]$.

Заметим теперь, что если в оценке (12) для C взять значение

$$c = \exp \left\{ 2\gamma \frac{2 + \pi}{\pi} \int_1^{n_k} \frac{qy}{q(y)} \right\}, \quad (14)$$

то из (13) в силу того, что $\int_1^{\infty} \frac{dy}{q(y)} = +\infty$, будет следовать, что рав-

номерно на всем отрезке $[c, d]$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k}(x) = 2\gamma. \quad (15)$$

Отсюда вытекает, что при таком выборе значения C для $k \geq k_0 \geq k_1$ будем иметь

$$\min_{[c, d]} y_{n_k}(x) \geq \gamma. \quad (15')$$

Из (15') следует, что при $k \geq k_0$ область D_γ будет содержаться в области G_{n_k} и поэтому в силу (12) и (14) получим

$$\max_{d_\gamma} |P_{n_k}(z)| \leq K_4 \exp \left\{ 2\gamma \frac{2 + \pi}{\pi} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\},$$

т. е. требуемую оценку (11).

Пусть функция $z = \varphi(w)$ конформно отображает внешнюю часть отрезка $[\alpha_0, \beta']$ на область $|\omega| > 1$, тогда эллипс C_γ переходит в определенную окружность $|\omega| = r_2 > 1$ плоскости ω .

Функция

$$\Phi_{n_k}(\omega) = P_{n_k}(\varphi(\omega))$$

голоморфна в кольце $1 \leq |\omega| \leq r_2$, при этом в силу оценок (10) и (11) имеем:

$$\max_{|\omega|=1} |\Phi_{n_k}(\omega)| = \max_{[\alpha_0, \beta']} |P_{n_k}(x)| \leq K_3 \exp \left\{ -\gamma \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

$$\max_{|\omega|=r_2} |\Phi_{n_k}(\omega)| = \max_{z \in C_\gamma} |P_{n_k}(z)| \leq$$

$$\leq K_4 \exp \left\{ 2\gamma \frac{2 + \pi}{\pi} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (k = k_0, k_0 + 1, \dots). \quad (17)$$

Пусть $1 \leq r \leq r_2$, тогда при $k \geq k_0$ из оценок (16) и (17) по теореме о трех окружностях получим:

$$\log \left\{ \max_{|\omega|=r} |\Phi_{n_k}(\omega)| \right\} \leq \log \left\{ K_3 \exp \left[-\gamma \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right] \right\} \frac{\log r/r_2}{\log r_2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \log \left\{ K_4 \exp \left[2\gamma \frac{2+\pi}{\pi} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right] \right\} \frac{\log r}{\log r_2} = - \frac{\gamma}{\log r_2} \left\{ \log r_2 - \right. \\
& \left. - \left[1 + \frac{2(2+\pi)}{\pi} \right] \log r \right\} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} + \log |K_3 \cdot K_4|. \quad (18)
\end{aligned}$$

Обозначая

$$\omega = \left[2 \left(1 + \frac{2(2+\pi)}{\pi} \right) \right]^{-1},$$

из оценки (18) получим при $k \geq k_0$

$$\log \left\{ \max_{1 < |\omega| < r_2^\omega} |\Phi_{n_k}(\omega)| \right\} \leq K_5 - \frac{\gamma}{2} \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)}. \quad (18')$$

Из (13') при $k \rightarrow +\infty$ заключаем, что последовательность функций $\{\Phi_{n_k}(\omega)\}$ равномерно сходится к нулю в замкнутом кольце $1 \leq |\omega| \leq r_2^\omega$. Но это значит, что последовательность полиномов $P_{n_k}(z)$ равномерно сходится к нулю в определенном замкнутом эллипсе с фокусами в точках α_0 и β' . Следовательно, в силу (8) и (7) можем утверждать, что $f(x) \equiv 0$ в определенном отрезке $[a', a]$, где $a' < \alpha_0$ и $a > \beta'$, и таким образом теорема доказана.

3°. Дифференциальные свойства функции $f(x) \in C_{n_k}[p(x)]$ существенно зависят от характера возрастания последовательности чисел

$\int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)}$ при $k \rightarrow \infty$. Справедлива следующая теорема, доказательство

которой опускаем.

Теорема 2. а) Если

$$\sup \left\{ \left(\int_1^{n_{k+1}} \frac{dy}{q(y)} \right) : \left(\int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right) \right\} < +\infty,$$

то функция $f(x) \in C_{n_k}[p(x)]$ голоморфна в некоторой полосе $|Imz| \leq a$.

б) Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right)^{-1} \log \int_1^{n_{k+1}} \frac{dy}{q(y)} = 0,$$

то функция $f(x) \in C_{n_k}[p(x)]$ бесконечно дифференцируема на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

в) Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right)^{-1} \log \int_1^{n_{k+1}} \frac{dy}{q(y)} = \rho > 0,$$

то функция $f(x) \in C_{n_k}[\rho(x)]$ имеет на всей оси ограниченное число производных или же вовсе не имеет.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Մաթրոզ փրական առանցքի վրա ֆունկցիաների կշռային-լավագույն մոտավորության քվադր անալիտիկ դասի մասին

Ենթադրենք, որ $y = \rho(x)$ ֆունկցիան սահմանված ու անընդհատ է ամբողջ $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա, զույգ է, մոնոտոն աճող և բավարարում է

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\rho(x)} x^n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

պայմաններին:

Վերադրենք $C[\rho(x)]$ դասին $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա անընդհատ ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)e^{-\rho(x)} = 0$$

պայմանին:

Նշանակենք

$$E_n(f; \rho) = \inf_{\{Q_n\}} \{ \max e^{-\rho(x)} |f(x) - Q_n(x)| \}.$$

որտեղ ստորին եզրը վերցվում է n -ից ոչ բարձր աստիճան ունեցող բաղմանդամների ընտանիքում:

$$\text{Քող} \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$$

լինի ամբողջ թվերի մի հաջորդականություն:

Կասենք, որ $f(x) \in C[\rho(x)]$ ֆունկցիան պատկանում է $C_{n_k}[\rho(x)]$ քվադր-անալիտիկ դասին, եթե

$$\int_1^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^2} dx = +\infty$$

պայմանի դեպքում

$$E_{n_k}(f; \rho) < K_1 \exp \left\{ -\gamma \int_1^{n_k} \frac{dy}{q(y)} \right\}, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

որտեղ $K_1 > 0$ և $\gamma > 0$, k -ից անկախ հաստատուններ են, իսկ $x = q(y)$ ներկայացնում $y = \rho(x)$ -ի հակադարձ ֆունկցիան:

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը

C_{n_k} դասի ֆունկցիաները միակ կերպով որոշվում են ամբողջ $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա. այդ առանցքի կամայական փոքր հարվածի վրա իրենց ընդունած արժեքների միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, Изв. АН Армянской ССР, Серия физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VIII, № 1 (1955). ² М. М. Джрбашян, Мат. сборник, 36 (78), № 3 (1955).

К. С. Чобанян

Об изгибе составного стержня

(Представлено Н. Х. Арутюняном 20.VIII.1956)

Задача об изгибе призматического составного стержня поперечной силой через функции кручения и изгиба Сен-Венана была поставлена и исследована академиком Н. И. Мусхелишвили^(1,2). В работах А. К. Рухадзе⁽³⁻⁵⁾ рассмотрены некоторые специальные случаи этой задачи.

В настоящей работе задача об изгибе составного призматического стержня поперечной силой рассматривается в постановке через функцию напряжений при изгибе, введенную С. П. Тимошенко⁽⁶⁾ для задачи об изгибе однородных стержней. Обобщена формула циркуляции касательных напряжений, полученная для изгиба однородных стержней Л. С. Лейбензоном⁽⁷⁾. Получено также контурное условие для функции напряжений при изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием в приближенной постановке задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стержень, составленный из различных призматических упругих тел, спаянных по боковым поверхностям. Коэффициенты Пуассона составляющих тел будем считать равными, а модули сдвига — различными.

Пусть один конец стержня заделан, а к свободному концу приложена сила P , параллельная одной из приведенных главных осей инерции⁽²⁾ постоянного по длине поперечного сечения стержня. Начало координат поместим в приведенном центре сечения заделанного конца, направляя ось z параллельно образующим призматического стержня, а оси x и y — по главным приведенным осям инерции его поперечного сечения.

Область поперечного сечения стержня будет состоять из нескольких областей D_1, D_2, \dots , соответствующих различным материалам. Обозначим через L_0 контур области поперечного сечения D_0 , а через L_{ij} — линию раздела областей D_i и D_j (фиг. 1).

Будем рассматривать случай, когда линии раздела либо целиком

находятся внутри области D_0 , либо пересекаются с ее контуром L_0 под определенным углом, не равном нулю ⁽⁸⁾.

Компоненты тензоров напряжений и деформаций в области D_0 обозначим через

$$\sigma_x^{(i)}, \dots, \tau_{xy}^{(i)}, \dots; \epsilon_x^{(i)}, \dots, \tau_{xy}^{(i)}, \dots$$

Так как коэффициенты Пуассона материалов, составляющих стержень, равны, принимаем, как и при изгибе однородных стержней, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (1.1)$$

Принимая, далее, гипотезу плоских сечений и направляя изгибающую силу параллельно оси x , будем иметь:

$$\epsilon_z^{(i)} = Ax, \quad (1.2)$$

где A — постоянная величина.

Используя закон Гука и условие равновесия части изгибаемого стержня, заключающейся между его свободным концом и произвольным поперечным сечением, на основании (1.2) получаем

$$\sigma_z^{(i)} = -\frac{E_i P}{I_E} (l - z)x,$$

где $I_E = \sum_i E_i \iint_{D_i} x^2 dx dy$, а E_i —

модуль упругости материала в области D_i .

Из дифференциальных уравнений упругого равновесия находим, что касательные напряжения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ ($i = 0, 2, \dots$) не зависят от координаты z и удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{E_i P}{I_E} x. \quad (1.3)$$

Так как боковая поверхность рассматриваемого стержня свободна от внешних сил, напряжения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ на контуре области поперечного сечения D_0 должны удовлетворять условию

$$\tau_{xz}^{(i)} l + \tau_{yz}^{(i)} m = 0. \quad (1.4)$$

Здесь

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$

где n — внешняя нормаль к контуру L_0 , x и y — координаты точек контура L_0 , ds — дифференциал ее дуги.

Введем функцию напряжений при изгибе $F(x, y)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение равновесия (1.3):

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(i)} &= \frac{\partial F_i}{\partial y} - \frac{E_i P}{2I_E} x^2 + \varphi_i(y), \\ \tau_{yz}^{(i)} &= -\frac{\partial F_i}{\partial x} + \psi_i(x).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Здесь F_i обозначает функцию F в области D_i , а $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции.

Согласно закону Гука имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{G_i} \tau_{xz}^{(i)} = \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} - \frac{E_i P}{2G_i I_E} x^2 + \frac{1}{G_i} \varphi_i(y), \\ \gamma_{yz}^{(i)} &= \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} = \frac{1}{G_i} \tau_{yz}^{(i)} = -\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{G_i} \psi_i(x),\end{aligned}\quad (1.6)$$

где u_i, v_i, w_i — составляющие вектора упругого перемещения, а G_i — модуль сдвига в области D_i .

Из соотношений (1.6) для производных w_i получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i}{\partial x} &= \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} - \frac{E_i P}{2G_i I_E} x^2 + \frac{1}{G_i} \varphi_i(y) - \frac{\partial u_i}{\partial z}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} &= -\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{G_i} \psi_i(x) - \frac{\partial v_i}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Составляя и приравнявая смешанные производные w_i , согласно (1.7) получаем

$$\Delta F_i = -\varphi_i'(y) + \psi_i'(x) - G_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right).\quad (1.8)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Условия совместности деформаций для рассматриваемой задачи примут следующий вид

$$\Delta \tau_{xz}^{(i)} = -\frac{E_i P}{(1+\nu)I_E}, \quad \Delta \tau_{yz}^{(i)} = 0,\quad (1.9)$$

где ν — коэффициент Пуассона материалов, составляющих стержень.

Используя (1.5), из (1.9) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \Delta F_i &= -\varphi_i''(y) + \frac{\nu E_i}{(1+\nu)} \frac{P}{I_E}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Delta F_i &= \psi_i''(x).\end{aligned}\quad (1.10)$$

Из (1.10) следует

$$\Delta E_i = \frac{\nu E_i P}{(1 + \nu) I_E} y - \varphi_i'(y) + \psi_i'(x) - \Sigma G_i c_i. \quad (1.11)$$

где c_i — постоянная интегрирования.

Приравнивая правые части (1.8) и (1.11), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} (\Omega_i) = c_i - \frac{\nu P}{I_E} y, \quad (1.12)$$

где $\Omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)$ — среднее вращение бесконечно малого элемента поперечного сечения изгибаемого стержня вокруг оси z .

Соотношение (1.12) показывает, что изменение поворота Ω_i по длине стержня состоит из двух частей: постоянной, соответствующей c_i , и переменной, зависящей линейно от координаты y . Первая часть этого изменения Ω_i обусловлена общим вращением поперечного сечения стержня, как в случае чистого кручения. Вторая часть представляет искажение поперечного сечения составного стержня при изгибе.

Так как по поверхностям раздела составного стержня имеем полный контакт, то поворот Ω_i , а также и его изменение по длине стержня на линиях раздела L_{ij} должны быть непрерывными:

$$c_i - \frac{\nu P}{I_E} y = c_j - \frac{\nu P}{I_E} y. \quad (1.13)$$

Условие (1.13) будет выполнено, если коэффициенты Пуассона материалов, составляющих стержень, равны, как это было принято нами выше, и

$$c_i = c_j = \vartheta$$

где ϑ — степень кручения изгибаемого стержня.

В случае, когда изгибающая сила P проходит через центр изгиба, кручения не будет. Тогда в уравнении (1.13) можно положить $c_i = 0$.

Таким образом, функция напряжения $F_i(x, y)$ при изгибе составных стержней без кручения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta F_i = \frac{\nu E_i P}{(1 + \nu) I_E} y - \varphi_i'(y) + \psi_i'(x) \quad (1.12)$$

в каждой из областей.

Подставляя (1.5) в (1.4), получим контурное условие, которому должна удовлетворять функция $F(x, y)$ на L_0

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = \frac{E_i P}{2 I_E} x^2 \frac{dy}{ds} - \varphi_i(y) \frac{dy}{ds} + \psi_i(x) \frac{dx}{ds}. \quad (1.13)$$

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела L_{ij} , имеем:

$$\tau_{xz}^{(i)}l + \tau_{yz}^{(i)}m = \tau_{xz}^{(j)}l + \tau_{yz}^{(j)}m. \quad (1.14)$$

Здесь l и m — направляющие косинусы нормали к L_{ij} .

Используя (1.5), из (1.14), получаем условие, которому удовлетворяет функция $F(x, y)$ на L_{ij} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} = & \frac{Px^2}{2I_E} (E_i - E_j) \frac{dy}{ds} - [\varphi_i(y) - \varphi_j(y)] \frac{dy}{ds} + \\ & + [\psi_i(x) - \psi_j(x)] \frac{dx}{ds}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Умножая первое соотношение (1.7) на $\frac{dx}{ds}$, а второе — на $\frac{dy}{ds}$ и складывая, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial s} = & - \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{E_i P}{2G_i I_E} x^2 \frac{dx}{ds} + \frac{1}{G_i} \varphi_i(y) \frac{dx}{ds} + \\ & + \frac{1}{G_i} \psi_i(x) \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь n — обозначает нормаль к линия раздела L_{ij} .

Принимая во внимание, что перемещения u_i, v_i и ω_i непрерывны на линиях раздела и коэффициенты Пуассона материалов равны, из (1.16) находим второе условие для функции $F(x, y)$ на линиях раздела L_{ij} .

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{1}{G_j} \frac{\partial F_j}{\partial n} = & \left[\frac{1}{G_i} \varphi_i(y) - \frac{1}{G_j} \varphi_j(y) \right] \frac{dx}{ds} + \\ & + \left[\frac{1}{G_i} \psi_i(x) - \frac{1}{G_j} \psi_j(x) \right] \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, задача об изгибе составного стержня поперечной силой P свелась к определению функции напряжений $F(x, y)$, удовлетворяющей в каждой из областей D_i уравнению (1.12), контурному условию (1.13) и условиям (1.15) и (1.17) на линиях раздела L_{ij} .

Заметим, что произвольные функции $\varphi_i(y), \psi_i(x)$ и неопределенные постоянные, появившиеся при определении функции $F(x, y)$, должны быть подобраны так, чтобы рассматриваемая задача была разрешима и имела единственное решение.

2. *Обобщение теоремы о циркуляции касательных напряжений при изгибе.* Вычислим циркуляцию касательных напряжений по некоторому замкнутому контуру C , целиком лежащему внутри одной из областей D_i .

$$I_C = \int_C \tau_{xz}^{(i)} dx + \tau_{yz}^{(i)} dy = - \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} ds + \int_C \varphi_i(y) dx + \int_C \psi_i(x) dy. \quad (2.1)$$

Используя (1.6), из (2.1) находим

$$I_C = G_i \int_C d\omega_i + G_i \frac{\partial}{\partial z} \int_C u_i dx + v_i dy \quad (2.2)$$

Так как перемещение ω_i является однозначной функцией координат x и y , то интеграл от $d\omega_i$ по любому замкнутому контуру, лежащему внутри области поперечного сечения D_0 , должен быть равен нулю.

На основании формулы Грина-Остроградского, принимая во внимание (1.12), из (2.1) и (2.2) получаем:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial F_i}{\partial n} ds + 2G_i \vartheta S - \frac{\nu G_i E_i P}{I_E} \iint_S y dx dy + \\ + G_i \iint_S [\varphi_i'(y) - \psi_i'(x)] dx dy = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где S — площадь области, ограниченной контуром C .

Формула (2.3) является обобщением формулы для циркуляции касательных напряжений при изгибе однородных призматических стержней, полученной Л. С. Лейбензоном (?).

Для контуров C , проходящих через несколько областей D_i , формула (2.3) примет другой вид.

Используя условие (1.17) и формулу (2.4), для рассматриваемого случая будем иметь:

$$\int_C \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} ds + 2\vartheta S - \frac{\nu P}{I_E} \iint_S E_i y dx dy + \iint_S [\varphi_i'(y) - \psi_i'(x)] dx dy. \quad (2.4)$$

В случае многосвязного поперечного сечения стержня для обеспечения однозначности решения рассматриваемой задачи на внутренних контурах области D_0 должно быть удовлетворено условие (2.3), если этот контур является частью границы только одной из областей D_i . В противном случае должно быть выполнено более общее условие (2.4).

3. *Изгиб стержня с тонким усиливающим покрытием.* Пусть составной стержень с продольными отверстиями по внешней и внутренней поверхностям покрыт тонкими усиливающими слоями. Предположим, что толщина δ покрытия пренебрежительно мала по сравнению с остальными размерами поперечного сечения стержня.

Обозначим через D_i часть области поперечного сечения, соответствующую одному из покрытий. Для краткости изложения положим, что область D_i граничит только с одной из остальных областей D_j .

Для области D_i введем местную координатную систему s и n , где s — длина дуги линии раздела D_{ij} , отсчитываемая от произвольно-выбранной на ней точки, а n — длина нормали к L_{ij} , направленной в сторону области D_i (фиг. 2).

На основании малости толщины покрытия δ можно положить, что функция напряжений F_i в области D_i от координаты n зависит линейно

$$F_i = A_i(s)n + B_i(s). \quad (3.1)$$

Используя (3.1), в условиях (1.13), (1.15) и (1.16), получаем

$$A_i'(s)\delta + B_i'(s) = \frac{E_i P x^2}{2I_E} \frac{dy}{ds} - \varphi_i(y) \frac{dy}{ds} + \psi_i(x) \frac{dx}{ds}, \quad (3.2)$$

$$B_i(s) - \frac{\partial F_j}{\partial s} = \frac{P x^2}{2I_E} (E_i - E_j) \frac{dy}{ds} - [\varphi_i(y) - \varphi_j(y)] \frac{dy}{ds} + [\psi_i(x) - \psi_j(x)] \frac{dx}{ds}. \quad (3.3)$$

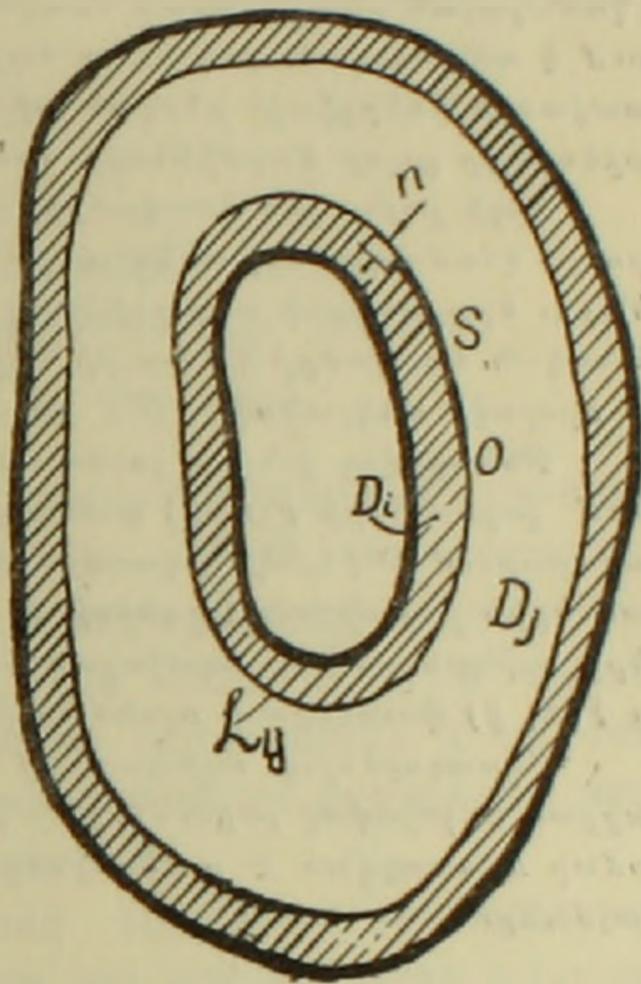
$$\frac{1}{G_i} A_i(s) - \frac{1}{G_i} \frac{\partial F_j}{\partial n} = \left[\frac{1}{G_i} \varphi_i(y) - \frac{1}{G_j} \varphi_j(y) \right] \frac{dx}{ds} + \left[\frac{1}{G_i} \psi_i(x) + \frac{1}{G_j} \psi_j(x) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (3.4)$$

Проинтегрируя соотношения (3.2) и (3.3) и исключая функции $A_i(s)$ и $B_i(s)$ из (3.4) получаем, что функция F_j на L_{ij} должна удовлетворять условию:

$$G_j F_j + \delta G_i \frac{\partial F_j}{\partial n} = \frac{E_i G_i P}{2I_E} \int x^2 dy - G_j \int \varphi_i(y) dy + \psi_i(x) dx - [G_j \varphi_i(y) - G_i \varphi_j(y)] \frac{dx}{ds} - [G_j \psi_i(x) - G_i \psi_j(x)] \frac{dy}{ds} + c_i. \quad (3.5)$$

Таким образом, при наличии усиливающего слоя контурное условие (1.13) заменяется условием (3.5).

Заметим, что при случайном подборе произвольных функций $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ рассматриваемая задача может оказаться неразрешимой или в постановке может иметь особенности.



Фиг. 2.

Քաղաղարյալ ձողի ծուման մասին

Ներկա աշխատանքում լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ քննարկվում է կողմա-
յին մակերևութներով իրար հետ զոդված տարրեր պրիզմաձև մարմիններից բաղկացած
և կամայական ընդլայնական հատվածք ունեցող ձողի խնդիրը: Ձողի մի ծայրը ենթադր-
վում է ամրակցված, իսկ մյուս ծայրում ազդում է մի P ուժ, որն ուղղված է լայնական
հատվածքի իներցիայի բերված գլխավոր առանցքներից մեկի ուղղությամբ: Պուասսոնի
զործակիցը բոլոր մարմինների համար ընդունված է նույնը:

Ձողի լայնական հատվածքի տիրույթը բաղկացած է լինի մի շարք տիրույթներից,
որոնք կհամապատասխանեն ձողը կազմող տարրեր նյութերին: Դիտարկվում է այն
դեպքը, երբ տարրեր տիրույթների բաժանման դժերը կամ ամբողջությամբ պտնվում են
լայնական հատվածքի կոնտուրի ներսում կամ հատվում են նրա հետ զերոյից տարրեր
մի որոշակի անկյունով:

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է ձողի ընդլայնական հատվածքի տիրույ-
թում լարումների $F(x, y)$ ֆունկցիայի որոնմանը, որը համապատասխան D_i տիրույթում
բավարարում է $(1,12)$ հավասարմանը, $(1,13)$ եղբային պայմանին և $(1,15)$, $(1,17)$ պար-
մաններին բաժանման L_{ij} դժերի վրա: Ընդ որում $\varphi_1(y)$ և $\psi_1(x)$ կամայական ֆունկցիա-
ները և ինտեգրումից առաջացած անորոշ հաստատունները պետք է այնպես ընտրվեն,
որ $F(x, y)$ ֆունկցիայի որոնման խնդիրը լինի լուծելի և եզակիությամբ շուրջնա:

Օգտագործելով աշխատանքի առաջին մասում ստացված արդյունքները ընդհան-
րացրած է շոշափող լարումների ցիրկուլյացիայի մասին թնորեման դիտարկված խնդրի
համար և ստացված է ուժեղացնող բարակ ծածկույթով ձողի ծուման խնդրի եզրային
պայմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. И. Мусхелишвили, К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составлен-
ных из различных материалов. Изв. АН СССР, № 7, 1932. ² Н. И. Мусхелишвили,
Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН ССР, М.-Л.
1954. ³ А. К. Рухадзе, Изгиб поперечной силой кругового цилиндра, армированного
продольным круговым стержнем. Известия АН СССР, № 9, 1933. ⁴ А. К. Рухадзе, Кру-
чение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитро-
хоидами. Труды Тбил. мат. инст., т. 1, 1937. ⁵ А. К. Рухадзе, К задаче изгиба упругих
брусьев, составленных из различных материалов. Сообщения Груз. филиала АН
СССР, т. 1, № 2, 1940. ⁶ Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости. Гостехиздат, 1948
⁷ С. П. Тимошенко, Теория упругости, Гостехиздат, 1934. ⁸ К. С. Чобанян, Приме-
нение функции напряжений в задаче [о кручении призматических стержней, состав-
ленных из различных материалов. Известия АН Арм.ССР, т. VIII, № 2, 1955.

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

К вопросу экспериментального определения
 упругих характеристик связных грунтов при сжатии

(Представлено Н. Х. Арутюняном 20. VIII. 1956)

Известно, что для определения упругих постоянных связных грунтов упругие перемещения определяются путем многократных последовательных нагружений и разгрузений образца грунта при разных значениях уплотняющих нагрузок. При этом, модуль нормальной упругости определяется как отношение напряжения к величине упругих перемещений, определяемых как разность показаний мессур при нагрузке и последующей разгрузке (^{1, 2}).

Вышеуказанная методика определения упругих перемещений страдает недостатком, заключающимся в том, что при нагрузке и последующей разгрузке образца изменяются его механические свойства за счет необратимых (остаточных) деформаций и, следовательно, так называемые упругие перемещения, получаемые по разным циклам нагрузок-разгрузок, делаются не сопоставимыми между собой.

Существенным недостатком вышеуказанной методики является и то, что не учитывается влияние фактора времени (^{1, 2, 3}).

Рассмотрим механическое поведение грунта под нагрузкой при его нагружении и последующем разгрузении во времени.

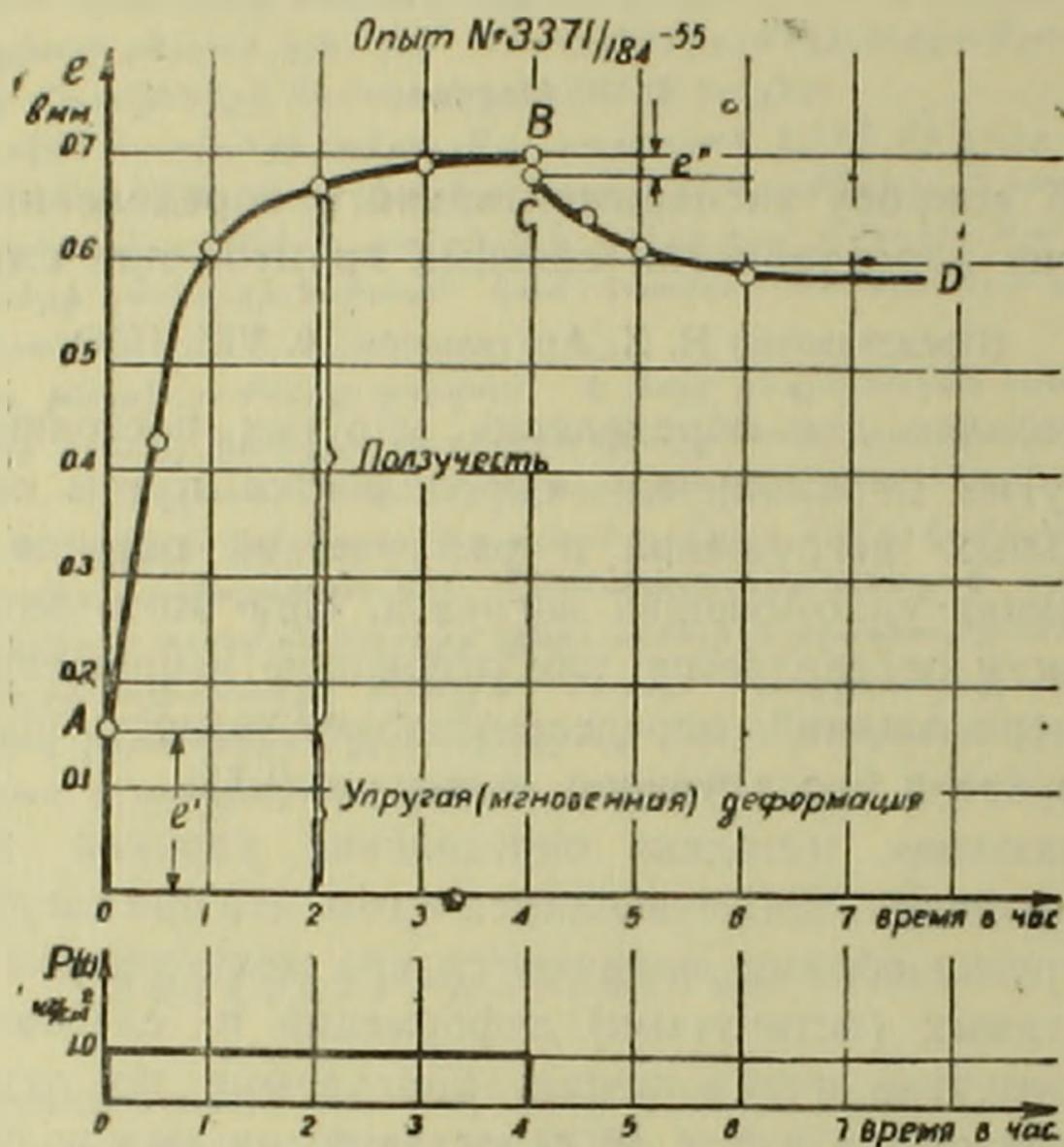
Согласно Н. Я. Денисову (⁴), в момент приложения внешней нагрузки на грунт проявляется упруго-мгновенная деформация, которая складывается из упругих деформаций скелета грунта и газосодержащей воды, структурных и структурно-адсорбционных деформаций, протекающих в течение времени. Структурные деформации необратимы, а структурно-адсорбционные деформации в зависимости от конкретных условий могут быть как остаточными, так и обратимыми.

На фиг. 1 представлен график механического поведения связного грунта нарушенной структуры при его нагрузке и последующей разгрузке в компрессионно-фильтрационном приборе Г. И. Тер-Степаняна (⁵). Опыт был проведен после предварительного уплотнения образца нагрузкой $0,25 \text{ кг/см}^2$ в течение одного часа.

Из графика (фиг. 1) следует, что в момент приложения нагрузки в 1 кг/см^2 грунт претерпевает упруго-мгновенную деформацию, вслед за чем, в течение времени, развиваются структурные и структурно-адсорбционные деформации (ползучесть), которые на графике

выражены интегральной кривой AB . В момент разгрузки образец грунта претерпевает упруго-восстанавливающую деформацию по BC , а в дальнейшем в течение времени развиваются деформации упругого последействия и набухания.

Из этого же графика следует, что за счет необратимых (структурных) деформаций со временем повышаются механические свойства грунта, что в конечном итоге выражается значительным умень-



шением величин мгновенных деформаций в момент разгрузки по сравнению с моментом нагрузки, т. е. в результате структурных и структурно-адсорбционных деформаций грунт уплотняется и его прежние механические свойства не восстанавливаются.

Следовательно, при последующем цикле нагрузки-разгрузки исходное состояние грунта, по сравнению с первым циклом, совсем иное и ясно, что результаты, полученные из этих разных исходных состояний, не могут быть сопоставимы.

Механические свойства связных грунтов повышаются не только за счет уплотнения в течение времени, но и за счет проявления сцепления упрочнения⁽⁴⁾, которое является результатом протекания физико-химических процессов на границе раздела твердых и жидких фаз грунта в течение времени.

Для выяснения вышензложенного воспользуемся результатами серии опытов, проведенных над образцами нарушенной структуры грунта (лаб. № 3454), физические свойства которых перед опытом приведены в нашей работе⁽⁶⁾.

Четыре образца грунта нарушенной структуры были нагружены двумя ступенями нагрузок по 0.25 кг/см^2 , в компрессионных приборах, с фиксацией мгновенных деформаций в момент приложения вторых ступеней нагрузок. Причем первая пара образцов была выдержана под первой ступенью в течение шести суток, а вторая пара — одного часа. Результаты опытов сведены в таб. 1.

Таблица 1

№№ п/п.	№№ опытов	Деф., соотв. первому часу после приложения первой ступени нагр., в микронах	Деф., соотв. 6 суткам после приложения первой ступени нагрузки, в микронах	Мгновенная деформация от второй ступени нагрузки, в микронах
1	167—55	327	341	5
2	174—55	317	320	4
3	172—55	366	—	41
4	175—55	357	—	37

Анализируя результаты опытов, можно отметить следующее: несмотря на то, что за время выдерживания образцов грунта в течение шести суток имел место сравнительно небольшой рост деформации, упругие качества образцов, по сравнению с теми, которые были нагружены по истечению одного часа после приложения первой ступени нагрузки, очень повысились. Такое поведение грунта нельзя объяснить иначе, как проявлением сцепления упрочнения.

Следовательно, в повышении упругих свойств грунта участвует не только фактор уплотнения в течение времени, но и фактор проявления сцепления упрочнения, который обусловлен временем выдерживания образцов под нагрузками (6).

Учитывая непостоянство механических свойств связных грунтов, необходимо пересмотреть общепринятое понятие „упругое постоянное“ грунта и пользоваться таким понятием, которое будет наиболее точно отражать действительные механические свойства материала с учетом такого независимого переменного — как время.

Известно, что в теории ползучести (7), разработанной для бетонных и железобетонных конструкций, исходя из специфических свойств бетона стареть в течение времени, пользуются понятием модуля мгновенной деформации, который для бетона не является постоянным, а изменяется в течение времени, вплоть до достижения бетоном своей старости.

Учитывая то обстоятельство, что связные грунты, как и бетоны, меняют свои механические свойства в течение времени под воздействием тех или иных факторов, от понятия модуля упругости грунта (8) мы перешли к понятию модуля мгновенной деформации, который не является постоянным и изменяется в течение времени вплоть до достижения грунтом упруго-уплотненного состояния. Модуль мгновенной



венной деформации соответствует конкретным физико-механическим свойствам грунта в определенный момент времени.

Что касается методики определения модуля мгновенной деформации, т. е. зависимости между мгновенными деформациями и напряжениями, то для этого необходимо оперировать не с одним, а с несколькими образцами-близнецами, имеющими одинаковые физико-механические свойства.

Для определения мгновенных деформаций по разным значениям нагрузок, образцы-близнецы грунта параллельно испытывались под несколькими нагрузками, путем их мгновенного, безударного нагружения с фиксацией мгновенных или условно-мгновенных деформаций (°).

Опыты проводились двумя способами: 1) способом испытания предварительно неуплотненных и 2) предварительно уплотненных образцов грунта нагрузками $0,25 \text{ кг/см}^2$ в течение одного часа. При этом по первому способу определялись условно-мгновенные деформации, а по второму способу — мгновенные деформации.

Нами были использованы четыре значения нагрузок: $0,25$; $0,5$, $1,0$ и $2,0 \text{ кг/см}^2$.

Результаты испытания шести различных грунтов показали, что зависимость как между условно-мгновенными деформациями и напряжениями, так и между мгновенными деформациями и напряжениями с достаточной точностью выражается линейным законом.

Рассмотрим два примера определения вышеуказанной зависимости по двум вышеизложенным способам для грунта нарушенной структуры под лаборат. № 3454. Основные физические характеристики испытываемых образцов приведены в табл. 2 и 3. Опыты проводились под водой в приборах, указанных выше. В таблицах 2 и 3 помимо основных физических характеристик испытываемых образцов приведены значения внешних нагрузок, под которыми они испытывались в течение времени.

Таблица 2

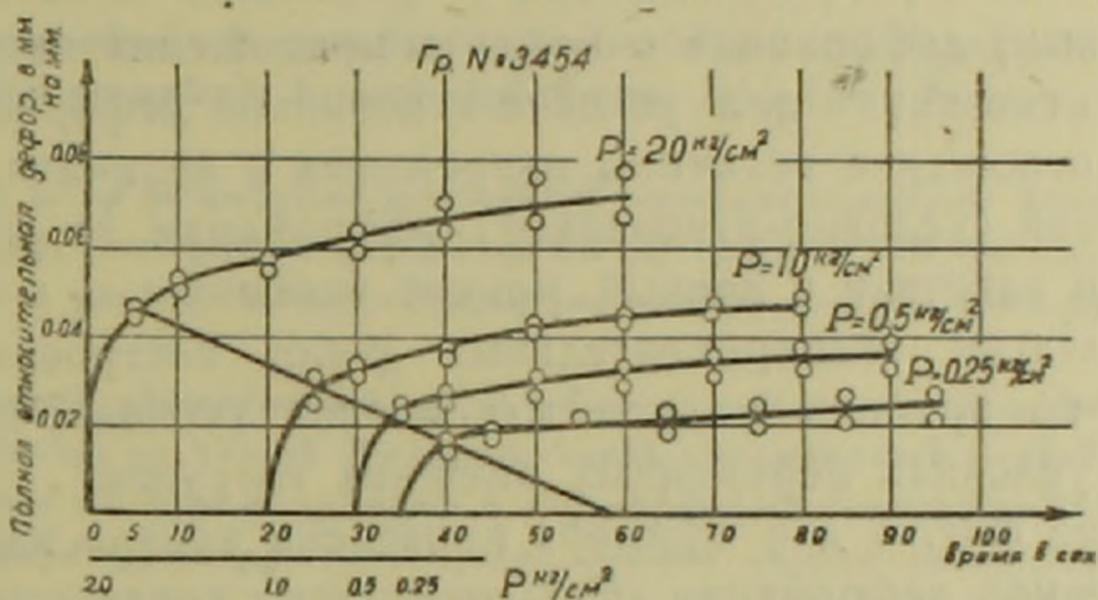
№ № п/п	№ № опытов	Удельный вес в г/см^3	Объемный вес в г/см^3	Влажн. в %	Коэффиц. порист.	Внешняя нагрузка в кг/см^2
1	32—55	2,76	1,85	34,0	1,00	0,25
2	154—55	.	1,86	36,4	1,02	0,25
3	33—55	.	1,85	32,4	0,97	0,50
4	155—55	.	1,83	34,5	1,02	0,50
5	34—55	.	1,83	32,8	1,01	1,00
6	162—55	.	1,82	37,0	1,07	1,00
7	163—55	.	1,81	37,0	1,09	1,00
8	37—55	.	1,83	34,0	1,02	2,00
9	31—55	.	1,88	34,0	0,96	2,00

Результаты экспериментальных исследований приведены на графиках фиг. 2 и 3.

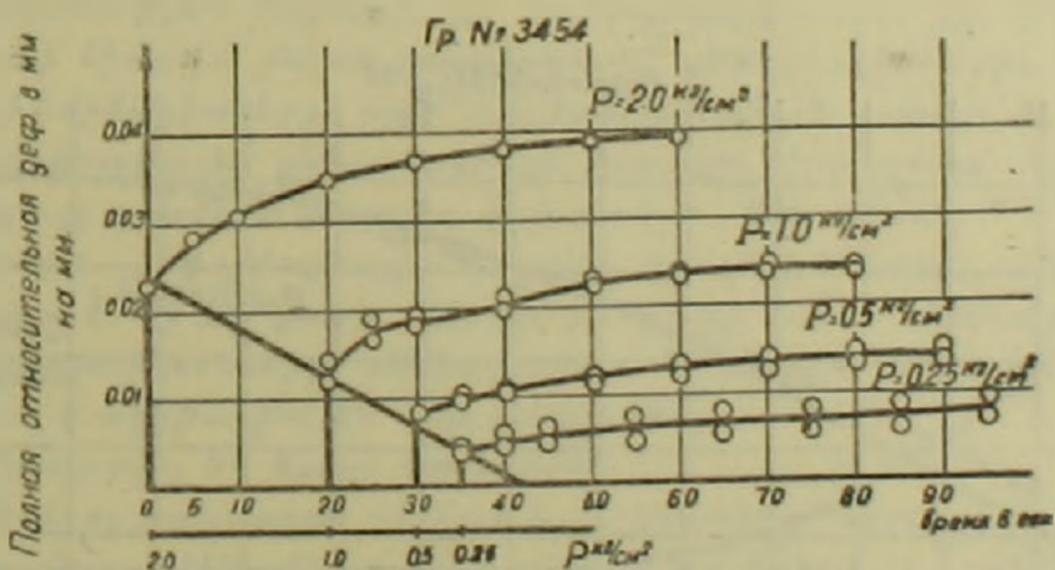
В этих графиках для построения кривых зависимостей между мгновенными (условно-мгновенными) деформациями и напряжениями использована двухшкальная ось абсцисс со шкалами времени и нагрузок.

Из графиков следует, что вышеуказанные зависимости с достаточной точностью выражаются линейным законом. При этом модуль мгновенной (условно-мгновенной) деформации определяется как отношение напряжения к относительной мгновенной (условно-мгновенной) деформации.

Наконец рассмотрим вопрос изменяемости во времени модуля мгновенной деформации, который тесно связан с переходом от понятия модуля упругости к понятию модуля мгновенной деформации.



Фиг. 2



Фиг. 3.

Изменяемость механических свойств образца грунта во времени (старение) под действием постоянной нагрузки была показана на примере фиг. 1.

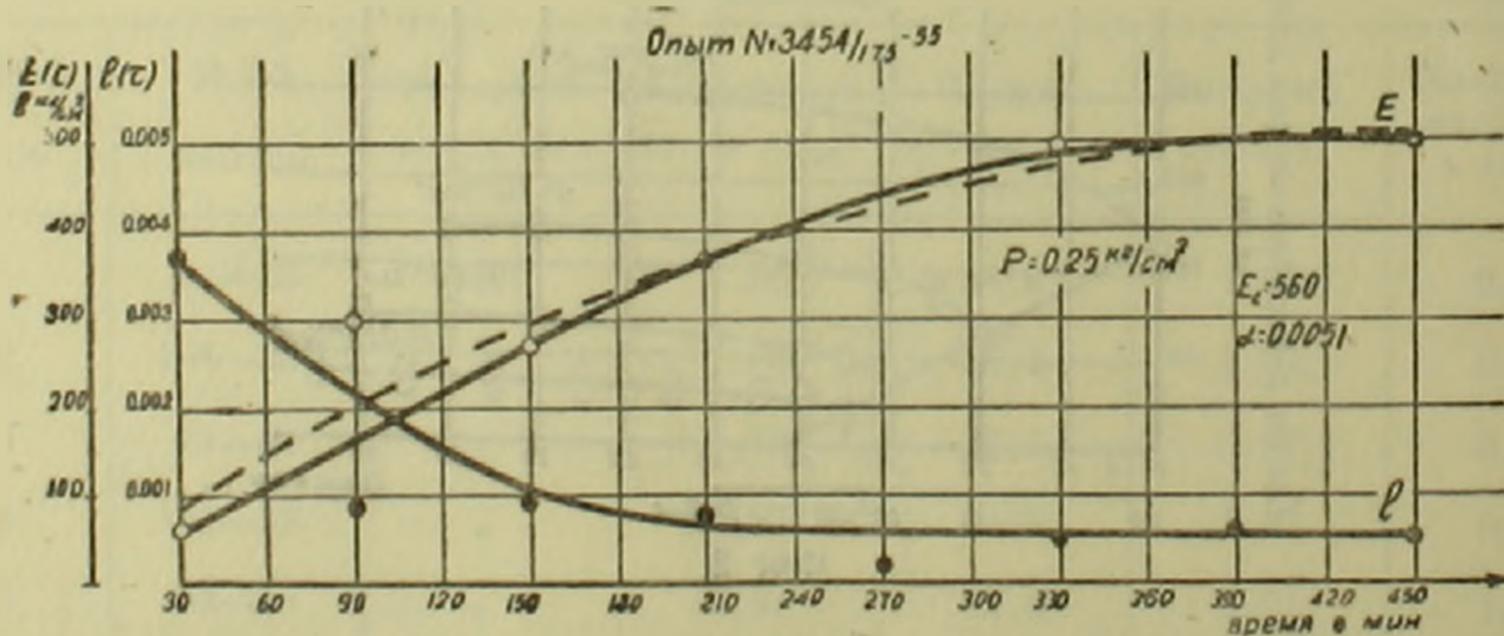
Для выяснения вопроса изменяемости мгновенных деформаций, когда внешняя нагрузка не постоянна, а нарастает во времени по не-

№ № пп.	№ № опытов	Удельный вес в г/см ³	Объемный вес в г/см ³	Влажн. в %	Коэффиц. порист.	Внешняя нагр. в кг/см ²
1	172—55	2,76	1,825	31,4	0,98	0,25
2	175—55	.	1,859	37,7	1,04	0,25
3	173—55	.	1,850	31,4	0,96	0,50
4	177—55	.	1,845	37,7	1,06	0,50
5	171—55	.	1,798	31,4	1,01	1,00
6	176—55	.	1,850	37,4	1,05	1,00
7	178—55	.	1,840	37,4	1,06	2,00

которому закону, рост нагрузок был представлен в виде последовательно приложенных равных ступеней с фиксацией мгновенных (условно-мгновенных) деформаций в моменты приложения нагрузок. При этом, модуль мгновенной или условно-мгновенной деформации определялся, как отношение величины напряжения к величине относительной мгновенной (условно-мгновенной) деформации от приложения данной ступени нагрузки в данный момент времени.

По результатам экспериментальных работ построены графики изменчивости во времени модуля мгновенной (условно-мгновенной) деформации в условиях переменных внешних нагрузок.

На графике фиг. 4 для примера приведена кривая изменчивости модуля мгновенной деформации (E_t) совместно с соответствующей ей кривой изменчивости относительных мгновенных деформаций (I_t) во времени рассмотренного выше нами грунта при последовательном приложении равных ступеней нагрузок по $0,25 \text{ кг/см}^2$, при выдерживании образца грунта под каждой ступенью нагрузки в течение одного часа.



Фиг. 4

Кривая изменчивости во времени модуля мгновенной деформации описана известным выражением (1) из теории ползучести Н. Х. Арутюняна (7)

$$E(\tau) = E_c (1 - \beta e^{-\alpha \tau})$$

(1)

при $\beta = 1$ и соответствующем подборе параметров E_c и α по экспериментальной кривой (значения параметров показаны на графике). Построенная кривая по вышеуказанной зависимости на графике фиг. 5 показана пунктирной линией.

В вышешприведенной зависимости $E(\tau)$ — модуль мгновенной деформации при возрасте материала τ .

Институт стройматериалов и сооружений
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ռ. ՄԵՍՉՅԱՆ

Կապակցված գրունտների սեղմման առաձգականության բնութագրերի էքսպերիմենտալ որոշման հարցի շուրջը

Հայտնի է, որ կապակցված գրունտների առաձգականության հաստատունների որոշման ժամանակ, առաձգական դեֆորմացիաները որոշվում են նմուշը հետևողականորեն բեռնավորման և բեռնաթափման միջոցով լարումների տարբեր մեծությունների պայմաններում:

Առաձգական դեֆորմացիաների որոշման վերահիշյալ մեթոդիկան ունի այն կարևոր թերությունը, որ նմուշի հետևողականորեն բեռնավորման և բեռնաթափման ժամանակ փոփոխվում են նրա ֆիզիկական և մեխանիկական հատկությունները ի հաշիվ մասնորոշային դեֆորմացիաների, հետևաբար, այսպես կոչված «առաձգական դեֆորմացիաները», որոնք ստացվում են նմուշի բեռնավորման-բեռնաթափման տարբեր ցիկլերից համեմատելի չեն իրար հետ:

Վերահիշյալ մեթոդիկայի կարևոր թերություններից մեկն է, այն է, որ հաշվի չի առնվում այնպիսի կարևոր անկախ փոփոխականի ազդեցությունը, ինչպիսին — ժամանակն է:

Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ վերահիշյալ եղանակով որոշված այսպես կոչված «առաձգականության մոդուլը» չի համապատասխանում իր իսկական կոչմանը, քանի որ հաշվարկի հիմքում ընկած «առաձգական դեֆորմացիաների» մեջ մտնում են նաև սողքային դեֆորմացիաները, ապա առաձգականության մոդուլի փոխարեն առաջարկվում է որոշել ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլը: Հստ որում ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլը դիտվում է որպես փոփոխական մեծություն:

Ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի էքսպերիմենտալ որոշման էությունը կայանում է նրանում, որ մի քանի նմուշներ, որոնք ունեն միևնույն ֆիզիկական և մեխանիկական հատկությունները, բեռնավորվում են տարբեր մեծություն ունեցող բեռներով և որոշվում է ակնթարթային դեֆորմացիաները:

Փորձերը կատարվել են նրկու եղանակով՝

1. նմուշների ոչ նախնական ճնշման և 2) նմուշներ նախնական ճնշման եղանակներով: Հստ որում, առաջին դեպքում որոշվել են պայմանական — ակնթարթային դեֆորմացիաները (որոնք համապատասխանում են բեռնավորումից հետո 5-րդ վայրկյանին), իսկ երկրորդ եղանակով՝ ակնթարթային դեֆորմացիաները: էքսպերիմենտների միջոցով պարզված է, որ խախտված ստրուկտուրա ունեցող գրունտների համար ակնթարթային և պայմանական — ակնթարթային դեֆորմացիաների ու լարվածությունների միջև ճշտության թույլատրելի սահմաններում գոյություն ունի գծային կապ և ակնթարթային ու պայմանական — ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլների փոփոխման կորը ժամանակի ընթացքում գրանցվում է Ն. Ս. Հարությունյանի սողքի տեսության հայանի առնչությամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Д. Д. Баркан, Динамика оснований и фундаментов, изд. Стройвоснмориздат, М., 1948. ² Р. З. Ляндрес, Сборник трудов, № 16, Вибрации оснований и фундаментов, М., 1950. ³ О. А. Савинов, Фундаменты под машины, изд. лит-ры по ст-ву в яр-ре, Л.—М., 1955. ⁴ Н. Я. Денисов, О природе деформирования глинистых пород, изд. Минречфлота, М., 1951. ⁵ Г. И. Тер-Степанян, Изв. АН Арм ССР, серия ФМЕТ наук, т. IX, № 4, 1966. ⁶ С. Р. Месчян, ДАН АН Арм. ССР, т. XXIII, № 1, 1956. ⁷ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, Изд. технико-теоретической лит., М., 1952. ⁸ С. Р. Месчян, ДАН АН Арм ССР, т. XXI, № 2, 1955.

ГИДРОЭНЕРГЕТИКА

Б. Л. Буниатян

Об ограничителе расхода через реактивные гидротурбины

(Представлено Н. Х. Арутюняном 20.VIII.1956)

При расчете гидравлического удара в реактивных гидротурбинах изменения расхода Q и давления P в течение всего периода неустановившегося режима определяют в зависимости от изменения величины открытия направляющего аппарата (^{1,2}), т. е. принимают, что при работе турбины ограничителем расхода является величина межлопаточной площади просвета F_n направляющего аппарата.

Если расход ограничивается сечением F_n и при переходных процессах он уменьшается с уменьшением F_n , то согласно общей теории гидравлического удара (³), от сечения F_n вверх по течению потока, давление увеличивается, а вниз по течению уменьшается, т. е. в зоне рабочего колеса давление уменьшается.

Такое положение не соответствует реальным условиям работы турбины и противоречит фактическим данным, поскольку в действительности при быстром уменьшении расхода давление над рабочим колесом увеличивается, а в отсасывающей трубе уменьшается, что сказывается на мощности турбины, на ее регулировании (⁴).

Для выявления этого несоответствия, в данной работе приводится анализ движения потока через проточный тракт турбины, что делает возможным установить, где именно происходит изменение расхода и появляется перепад давления неустановившегося движения, ибо от этого существенно зависит метод расчета гидравлического удара, его влияние на работу турбины при переходных процессах и наши представления о режиме ее регулирования.

Расход через турбину при установившемся движении есть функция от напора H_p и от некоторого коэффициента расхода A , характеризующего данную турбину при данном режиме работы, т. е.

$$Q = f(H_p; A). \quad (1)$$

Здесь напор турбины, под которым протекает расход при любом установившемся режиме, равен

$$H_p = h + H, \quad (2)$$

где: h — расходуется на преодоление вредного сопротивления направляющего аппарата,

H — расходуется на преодоление полезных и вредных сопротивлений рабочего колеса и отсасывающей трубы, причем

$$h = \zeta \frac{Q^2}{2gF_n^2}, \quad (3)$$

где ζ — суммарный коэффициент сопротивления направляющего аппарата, отнесенный к сечению F_n .

Поскольку при регулировании расхода через турбины сечение F_n изменяется, то для любой турбины можно написать

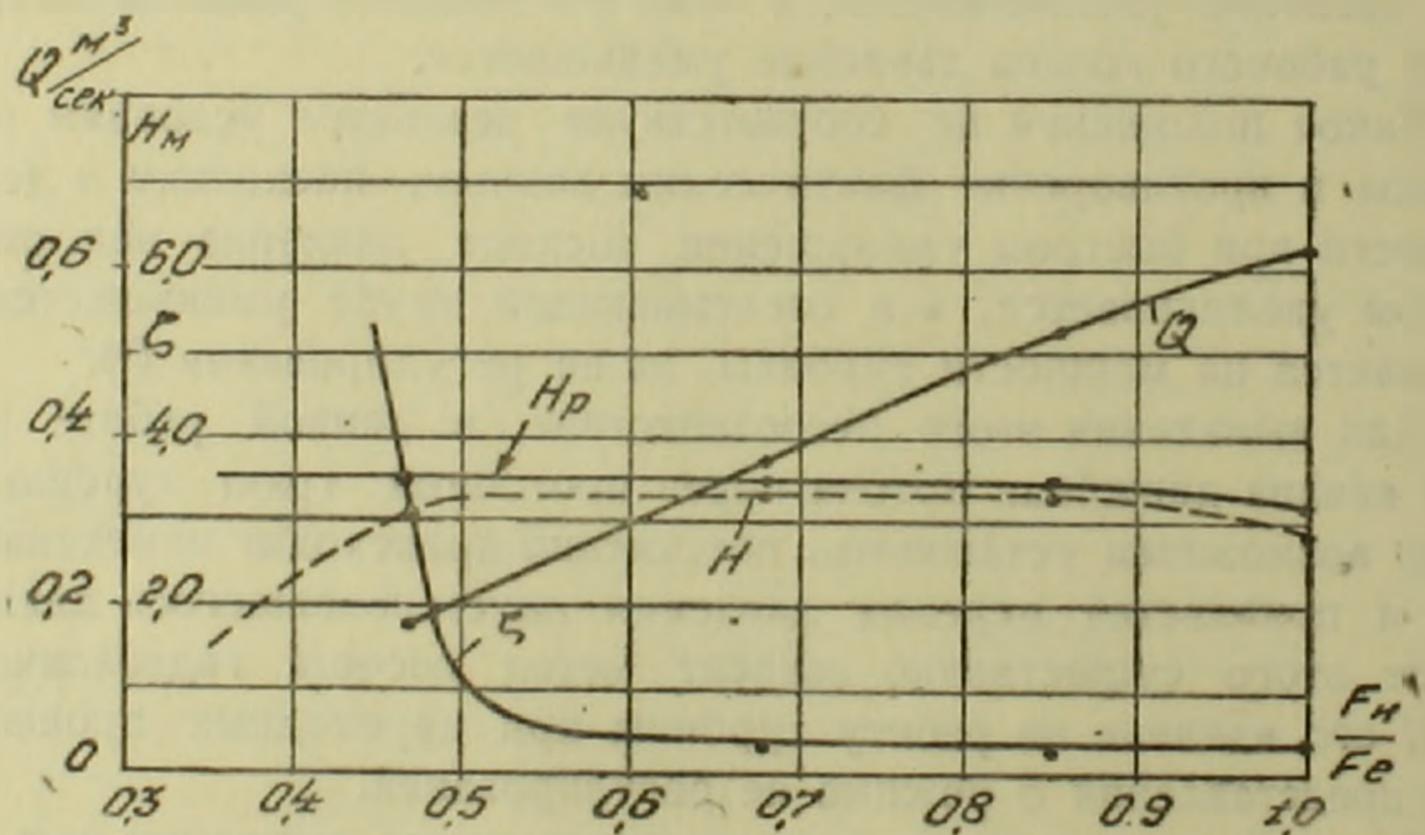
$$\zeta = \Phi \left(\frac{F_n}{F_c} \right), \quad (4)$$

где $F_c = \text{const.}$ — есть максимальное сечение направляющего аппарата.

При этих обозначениях выражение (2) запишется в виде:

$$H_p = \Phi \left(\frac{F_n}{F_c} \right) \frac{Q^2}{2gF_n^2} + H. \quad (5)$$

Здесь Φ — вполне определенная функция для данной турбины. По экспериментальным данным В. С. Квятковского⁽⁵⁾ вид этой функции для модельной турбины с рабочим колесом К 201 при $n'_1 = 130$ приведен на фиг. 1, там же нанесены кривые изменения Q ; H_p и H в зависи-



Фиг. 1.

мости от изменения $\frac{F_n}{F_c}$. Как видно из этой фигуры, при изменении величины относительного открытия от 1,0 до 0,5 значения ζ и $h = H_p - H$ очень мало изменяются и практически остаются постоянными. Следовательно, при изменении открытия направляющего аппарата в указанных пределах влияние изменения h на расход исчезающе

мало и согласно уравнению (1) расход изменяется только в зависимости от коэффициента A , так как $H_p \approx H = \text{const}$.

Если $\frac{F_n}{F_c}$ достаточно мало и находится в пределах от нуля до близости открытия холостого хода, тогда изменения h будут значительными, как это видно из фиг. 1, и расход через турбину теперь будет зависеть от $\frac{F_n}{F_c}$.

Таким образом, в рабочей зоне турбины, где $\zeta = \text{const}$, $h = \text{const}$ очень малая величина; в уравнении (1) H_p можно заменить через H и расход турбины определится функцией

$$Q = f(H : A). \quad (6)$$

Чтобы раскрыть вид этой функции и установить аналитическую зависимость между этими величинами, обратимся к теории гидротурбины.

Из этой теории известно, что протекающий расход воды, входя в рабочее колесо, совершает там некоторую работу, которая выражается вращением турбины с числом оборотов n при вращающем моменте M .

Эта работа является результатом взаимодействия потока с лопастями рабочего колеса и она меняется при изменении поля скоростей перед и за колесом.

Если вектор абсолютной скорости v_1 у входа и v_2 у выхода из рабочего колеса составляют углы α_1 и α_2 с соответствующими окружными скоростями u_1 и u_2 , то при изменении этих углов работа турбины изменится, что следует и из основного уравнения работы гидротурбины, записанного в виде

$$gH\eta = u_1 v_1 \cos \alpha_1 - u_2 v_2 \cos \alpha_2, \quad (7)$$

где η — кпд турбины при данном режиме работы,

$$v_1 = \frac{v_{n1}}{\sin \alpha_1}, \quad v_2 \cos \alpha_2 = u_2 - v_{n2} \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (8)$$

v_{n1} и v_{n2} — составляющие v_1 и v_2 по направлению нормали к сечениям у входа F_1 и у выхода F_2 из рабочего колеса.

β_2 — угол между относительной скоростью потока w_2 и u_2 .

Из условия неразрывности

$$v_{n2} = \frac{F_1}{F_2} v_{n1} = \frac{2\pi r_1 l_1}{2\pi r_2 l_2} v_{n1} = \frac{r_1 l_1}{r_2 l_2} v_{n1} \quad (9)$$

r_1 и r_2 — расстояния центра тяжести сечений F_1 и F_2 от оси вращения турбины,

l_1 и l_2 — размах лопасти у входа и у выхода из рабочего колеса.

Подставляя (8) и (9) в (7) и учитывая, что $u = \psi \sqrt{2gH}$ $Q = v_{w2} F_2$, и $u = \omega r$, где ψ — коэффициент окружной скорости, после преобразования получим

$$Q = \sqrt{2gH} \frac{F_2 \left(\frac{\eta}{2\psi} + \psi \right)}{\left(\frac{l_2}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_2 \right)}. \quad (10)$$

Согласно формуле (10) изменение расхода через турбину, в пределах ее рабочей зоны, можно осуществить только путем изменения угла α_1 и β_2 , поскольку все величины, входящие в эту формулу, за исключением кпд, постоянные для данной турбины.

Следовательно, при повороте направляющего аппарата, независимо от того, изменяется ли его открытие или нет, согласно формуле (10) расход изменится.

Обозначим для сокращения

$$A = \frac{F_2 \left(\frac{\eta}{2\psi} + \psi \right)}{\left(\frac{l_2}{l_1} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_2 \right)}, \quad (11)$$

тогда получим

$$Q = A \sqrt{2gH}. \quad (12)$$

Коэффициент A характеризует закон изменения расхода через реактивную турбину и определяется ее геометрическими и энергетическими характеристиками.

Принимая статические и динамические характеристики турбины одинаковыми (6), можно пользоваться формулой (12), записанной в безразмерных величинах в виде

$$q = \tau \sqrt{\xi}, \quad (13)$$

где $q = \frac{Q}{Q_0}$; $\tau = \frac{A}{A_0}$; $\xi = \frac{H}{H_0}$.

Здесь величины с индексом (0) относятся к значениям расхода, коэффициента расхода и напора в начальный момент неустановившегося режима, а величины без индексов — к их значениям при неустановившемся режиме.

Как видно из формулы (11) и (13), величина τ является безразмерным коэффициентом относительного изменения расхода через реактивные турбины при переходных процессах и имеет выражение и физический смысл совершенно отличных от принятых в литературе.

Отметим, что при выводе формулы (10) принято, что вектор скорости ω_2 направлен по дужке лопасти у выхода из рабочего колеса.

Это положение имеет место только при режиме работы турбины с „безударным входом“, а в других режимах ω_2 несколько отходит от направления дужки, что влияет на КПД турбины.

Поскольку значения A определяются из характеристики турбины, где влияния этих отклонений учтены, то в формуле (10) для всех режимов жестко-лопастных турбин $\beta_2 = \text{const}$, а для поворотно-лопастных турбин β_2 меняется в соответствии с комбинаторной связью с регулятором. Имея изменения α_1 и β_2 по времени, из энергетических характеристик турбины можно определить A и τ при переходных процессах.

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԲՈՒՆԻՍԻԱՅԱՆ

Ուեակտիվ տուրբիններից ելքի սահմանափակիչի մասին

Ռեակտիվ տուրբիններում հիդրավիկական հարվածի հաշվման դեպքում, ընդունում են, որ ամբողջ շհաստատված շարժման ժամանակամիջոցում ջրի ծախքը կախված է տուրբինային ուղղիչ ապարատի բացվածքի մեծությունից:

Այդպիսի ընդունելությունը կամովին է և չի համապատասխանում ոչ տուրբինային և ոչ էլ հիդրավիկական հարվածի տեսությանը:

Իրականում տուրբինային ծախքի արագ փոքրացման դեպքում, ջրի ճնշումը աշխատող անիվի մուտքի մոտ աճում է իսկ ելքի մոտ նվազում, հետևաբար, համաձայն հիդրավիկական հարվածի տեսության ծախքի փոփոխությունները պետք է տեղի ունենան աշխատող անիվի սահմաններում:

Այդ ապացուցելու համար հոդվածում զիջվում է ռեակտիվ տուրբինների ծախքի փոփոխման օրենքը, ելնելով տուրբինների աշխատանքի հիմնական հավասարումից:

Հիշյալ հավասարման և տուրբինային աշխատանքի ֆիզիկական կողմի վերլուծման միջոցով ապացուցվում է, որ տուրբինային ծախքը նրա տվյալ աշխատանքային ռեժիմում, սահմանափակվում է աշխատող անիվով և կախված չէ ուղղիչ ապարատի բացվածքի մեծությունից:

Տեսական վերլուծությունների միջոցով ստացվում է մի հաշվային բանաձև, որով կարելի է որոշել ռեակտիվ տուրբինային ծախքը, նրա ցանկացած աշխատանքային ռեժիմում: Այդ բանաձևից հետևում է, որ տվյալ տուրբինային ծախքի մեծությունը կախված է նրա աշխատող անիվի մուտքի մոտ ջրի հոսանքի բացարձակ արագության ուղղությունից: Փոխելով այդ արագության ուղղությունը փոխվում է նաև ծախքը՝ անկախ նրա ուղղիչ ապարատի բացվածքի մեծությունից:

Հիշյալ բանաձևը բացի տուրբինային ծախքի օրենքի պարզաբանելուց, հնարավորություն է տալիս ավելի ճշգրտորեն հաշվելու հիդրավիկական հարվածի մեծությունը, ինչպես անշարժ-թիակային, այնպես էլ պտտվող — թիակային ռեակտիվ տուրբինների դեպքում և լիովին համապատասխանում է երևույթի ֆիզիկական բնույթին:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. А. Мостков, Гидравлический удар в гидроэлектрических станциях, ГОНТИ, 1938. ² Г. И. Кривченко, Гидравлический удар и рациональные режимы регулирования турбин гидроэлектростанций. Госэнергоиздат, 1951. ³ Н. Е. Жуковский, Собрание сочинений, т. III, 1949. ⁴ И. В. Егуазаров, Гидроэлектрические силовые установки, ч. III, ОНТИ, 1937. ⁵ В. С. Кватковский, Труды ВИГМ, выпуск XIV. ⁶ И. В. Егуазаров, Известия ОНТН АН АрмССР, № 2, 1953.

БИОХИМИЯ

М. А. Тер-Карапетян, член.-корр. АН Армянской ССР.

А. М. Оганджян и Ш. А. Авакян

О некоторых особенностях окислительного распада и аэробной ассимиляции уксусной кислоты дрожжевыми организмами

(Представлено 16.VIII.1956)

В последние годы изучению путей окислительного распада и ассимиляции уксусной кислоты, а также участию последней в биосинтезе аминокислот у дрожжевых организмов уделялось большое внимание.

Наряду с этим сравнительно меньше внимания обращалось на изучение закономерностей размножения дрожжевых организмов при аэробной ассимиляции уксусной кислоты, когда последняя присутствует в качестве единственного источника углерода.

Недостаточно изучались в частности соотношения: $\frac{\text{максимально усвоенная заданная}}{\text{синтезированная биомасса}} \cdot \frac{\text{потребленный усвоенная}}{\text{усвоенная } \text{CH}_3\text{COOH}}$, $\frac{\text{CH}_3\text{COOH}}{\text{CH}_3\text{COOH}}$ (коэффициент усвоения), $\frac{\text{O}_2 \text{ выделившийся}}{\text{CH}_3\text{COOH}' \text{ усвоенная } \text{CH}_3\text{COOH}}$ и $\frac{\text{углерод биомассы} + \text{углерод } \text{CO}_2}{\text{углерод субстрата}}$.

Эти количественные соотношения представляют определенный теоретический и практический интерес — они характеризуют количественную сторону окислительного распада и ассимиляции уксусной кислоты, а в условиях производства служат критерием для установления норм расхода кислорода, выхода биомассы и др.

Настоящая работа посвящена изучению вышеуказанных количественных соотношений при аэробной ассимиляции уксусной кислоты в качестве единственного источника углерода. Кроме того, проведено исследование в условиях применения уксусной кислоты, меченой в карбоксильной группе радиоактивным углеродом C^{14} , для определения участия каждого из атомов углерода в образовании CO_2 и клеточной массы.

Исследования окислительного распада и аэробной ассимиляции уксусной кислоты проведены отдельными исследователями не всегда в одинаковых условиях, что лишает возможности сравнения полученных результатов. В частности, ряд исследований проведен не всегда в полноценных для роста и размножения клеток условиях (¹⁻⁷).

Особенность приведенного нами экспериментального материала заключается в том, что он получен с дрожжевой культурой, усваивающей уксусную кислоту без предварительной адаптации и лаг фазы роста культуры, представляющей высокую степень усвоения, обладающей и высокой степенью синтеза биомассы, из уксусной кислоты, при образовании в среде 3—4 генераций клеток.

Методика исследования. Объектом исследования служил штамм дрожжей из рода *Candida*, содержащийся постоянно на агаре с 1% ксилозы. Перед опытом, за 18—24 часа, он пересевался в жидкую среду с 1% ксилозы.

После тщательного промывания дистиллированной водой молодая культура засеивалась в опытную среду из расчета 5—8 мг сухой массы на 100 мл среды.

Опытная среда имела следующий состав — уксусная кислота 8—10 г, половина которой нейтрализовалась 1 N раствором NH_4OH , KH_2PO_4 —6 г, $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ —1,00 г, $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ —0,10 г, Zn^{++} (из $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$)—60γ, Fe^{++} (из $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$)—100 γ, вода водопроводная—1 л.

В качестве источника биологических активаторов к среде добавлялся экстракт солодовых ростков из расчета 33,3 мл на 1 л. В этом количестве экстракта содержались 17 мг органического азота, из коих 5 мг амидного азота аспарагина и 116 мг органического углерода, из коих 14,6 мг аспарагинового.

Опыты проводились частично в специальной аппаратуре (8) в T-образных сосудах, наполненных 15—30 мл среды и частично в аппарате Варбурга при содержании 1,6—2,2 мл среды в сосудике.

Продолжительность опытов колебалась от 9 до 12 час., температура поддерживалась при $34 \pm 1^\circ\text{C}$, а pH колебалась в пределах 5—7.

Опыты с радиоактивной уксусной кислотой проводились с $\text{CH}_3\text{C}^{14}\text{OON}$ активностью 11,5 мС в 1 мл, которая добавлялась к основной среде после разбавления до концентрации $12 \cdot 10^{-4}$; активность последнего раствора равнялась 13,8 мС /мл соответствующей $3 \cdot 10^7$ распад мин/мл.

Активность препаратов была подсчитана торцовым счетчиком с помощью известной техники. Результаты подсчетов корректировались на самоослабление. Перед каждой серией подсчетов была определена доля испускаемых препаратом β-частиц по счетчику; в отдельных сериях она колебалась от 0,4 до 1,0%.

1. Коэффициент усвоения, синтез биомассы и выделение CO_2 при аэробной ассимиляции уксусной кислоты. Экспериментальные результаты приведены в табл. 1.

Результаты экспериментов показывают, что исследуемый дрожжевой организм способен усвоить более 94% заданной уксусной

Таблица 1

№№ опыт.	Исходная CH ₃ COOH мг	Усвоенная CH ₃ COOH мг	Синтезиро- ванная биомасса мг	Выделен- ный CO ₂ мг	Усвоен. CH ₃ COOH	Синтезиро- ванная био- масса	Выделен. CO ₂
					исходная CH ₃ COOH %	усвоенная CH ₃ COOH %	Усвоенная CH ₃ COOH %
1	438	421	186	233	96,4	44,0	55,2
2	272	252	108	164	92,8	42,8	65,0
Средн.	—	—	—	—	94,6	43,4	60,1

кислоты в среде с исходной концентрацией ее около 0,80% и синтезирует биомассу до 44% (в абсолютно сухих веществах) от усвоенной уксусной кислоты. Последние данные превышают на 5% выход биомассы, полученной в подобной среде культурой *Togulopsis utilis* (?).

2. Поглощение кислорода при аэробной ассимиляции CH₃COOH и CH₃C¹⁴OON. Динамика и количество поглощенного кислорода были параллельно исследованы, с одной стороны, при ассимиляции ксилозы и CH₃COOH и с другой — при ассимиляции CH₃COOH и CH₃C¹⁴OON.

Результаты этих исследований приведены в табл. 2 и на рис. 1 и 2.

Таблица 2

	I серия		II серия			
	Кси- лоза	CH ₃ COOH	CH ₃ COOH	CH ₃ COOH+CH ₃ C ¹⁴ OON		
Объем среды в сосуди- ках (мл)	2,2	2,2	1,6	1,6	1,6	1,6
Исходн. концентрация субстрата в среде в %	0,89	0,81	0,70	0,70+ 0,0036*	0,70+ 0,0072*	0,70+ 0,072*
Исходн. колич. субстра- та в сосудах (мг)	19,5	17,2	11,2	11,2+ 0,006*	11,2+ 0,012*	11,2+ 0,12*
Исходная активность в одном сосудике (тС)	—	—	—	0,069	0,138	1,38
Усвоенный субстрат (мг)	7,5	4,84	3,0	—	—	—
Потребленный O ₂ (мг)	2,71	2,84	1,74	1,66	1,84	1,53
Синтезированная био- масса (мг)	3,85	2,17	1,5	1,6	1,6	1,5
Синтезирован. биомас- са % усвоен. субстрат %	50,0	45,0	50,0	—	—	—
г-атом кислорода на 1 г-моль субстрата	3,4	2,2	2,2	—	—	—
Генерации клеток	3	2	2	2	2	2

* означает концентрацию или количество CH₃C¹⁴OON.

Полученные результаты показывают следующее:

а) окислительный распад и аэробная ассимиляция уксусной кислоты происходят у исследуемого организма без предварительного периода адаптации или лаг фазы; в этих условиях динамика поглощения кислорода не представляет никакого расхождения в средах

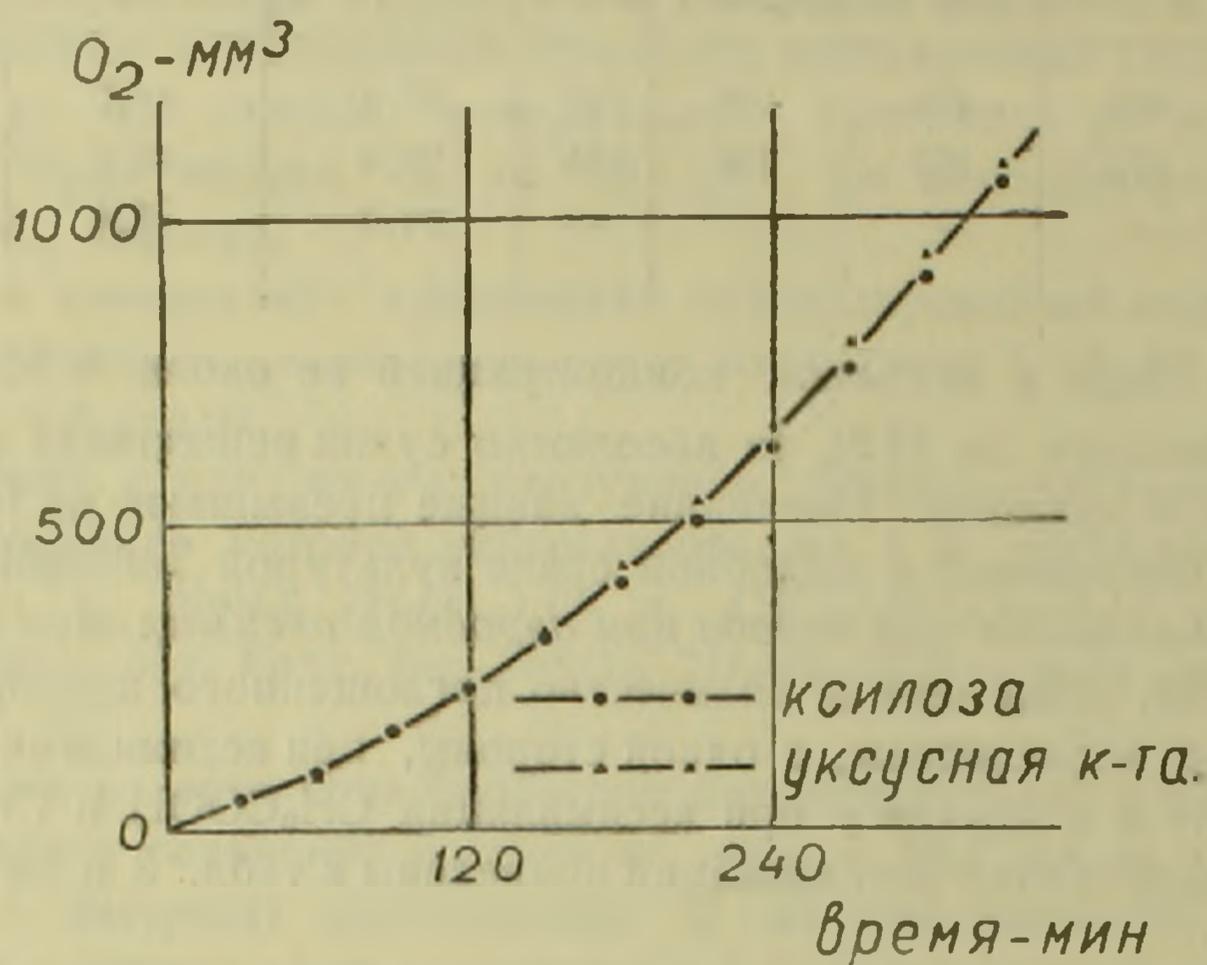


Рис. 1.

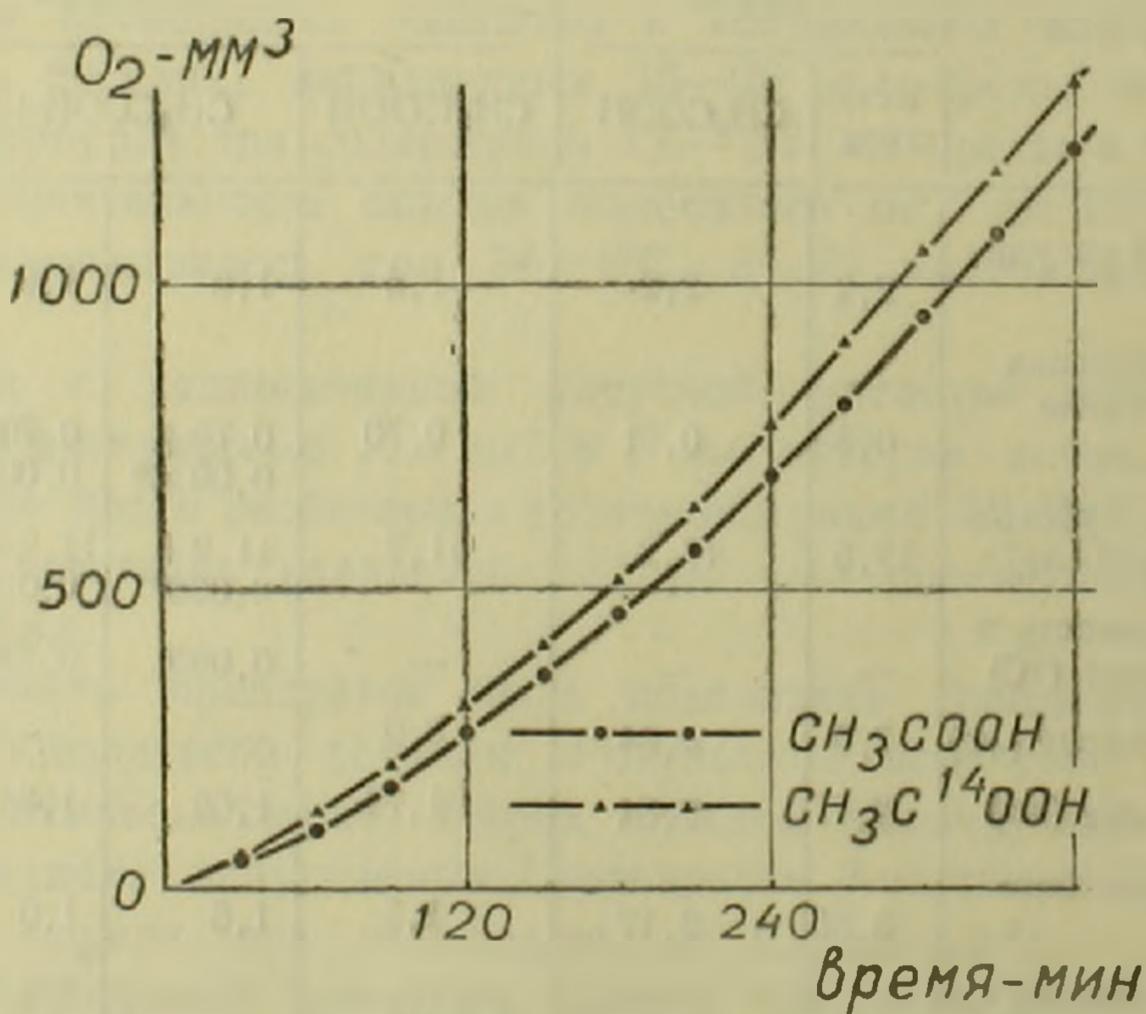


Рис. 2.

с ксилозой или уксусной кислотой; окислительный распад субстрата происходит медленнее в случае с уксусной кислотой, чем с ксилозой, вследствие чего в первом случае размножение клеток происходит медленнее, чем во втором;

б) при окислительном распаде уксусной кислоты, сопровождающемся размножением дрожжевых клеток, поглощается 2,2 грамма кислорода на каждую молекулу субстрата; такое количество значительно превышает расход кислорода, присущий окислительному распаду и ассимиляции глюкозы и ксилозы (¹⁰);

в) наличие в основной среде уксусной кислоты, меченой в карбоксиле радиоактивным изотопом C¹⁴ в концентрациях в пределах 0,86—86 μ C в 100 мл, не оказывает заметного влияния на динамику поглощения кислорода и слабо угнетает синтез биомассы.

Это дало нам основание провести опыты по усвоению CH₃C¹⁴OOH в широком диапазоне концентраций радиоактивного соединения.

Явление временного угнетения дыхания дрожжей, описанное П. А. Власюком (¹¹) с радиоактивным фосфором (P³²) в дозах выше 10 μ C в 100 мл, нами не наблюдалось.

3. *Баланс углерода при аэробной ассимиляции CH₃COOH и CH₃C¹⁴OOH.* Результаты параллельных опытов, проведенных с CH₃COOH и CH₃C¹⁴OOH, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Источник углерода		CH ₃ COOH			CH ₃ COOH + CH ₃ C ¹⁴ OOH		
		мг	% от общего	% от усвоенного	активность во всей пробе имп/мин	% от общего	% от усвоенного
В начале опыта	В исходной среде	5,3	98,2	—	12100	100	—
	в том числе:						
	в уксусной кислоте	5,2	96,4	—	—	—	—
	в биоактиваторах	0,1	1,8	—	—	—	—
	В посевных дрожжах	0,1	1,8	—	—	—	—
	Сумма	5,4	100	—	—	—	—
В конце опыта	В остаточной среде	4,05	75,0	—	2100	17,4	—
	в том числе:						
	в уксусной кислоте	3,8	70,5	—	—	—	—
	в биоактиваторах	0,1	1,8	—	—	—	—
	в продуктах метаболизма	0,15	2,7	11,0	—	—	—
	В дрожжах	0,78	14,5	—	2215	18,3	24
	в том числе: в размножившихся	0,68	12,6	48,5	—	—	—
	В CO ₂	0,57	10,5	40,5	7035 ²	58,3	76
	Сумма	5,40	100	—	1:350	94,0	100

¹ усвоенный углерод подсчитан по формуле: углерод первоначальной уксусной кислоты — углерод остаточной уксусной кислоты.

² представляет сумму газообразного и растворимого C¹⁴O₂

Полученные результаты показывают следующее:

а) при аэробной ассимиляции немеченой уксусной кислоты углерод распределяется так—48,5 % в размножившихся клетках дрожжей, 40,5 % в выделенном CO_2 и до 11 % накапливается в среде, в виде промежуточных продуктов метаболизма; эти данные опровергают результаты Виндлера, указывающие окисление $2/3$ уксусной кислоты до CO_2 (¹²) и значительно отклоняются от уравнения, предложенного Ван-Нилем и Коэном (¹³), в котором каждый из двух атомов углерода распределяется по-одному в CO_2 и в биомассе;

б) при аэробной ассимиляции меченой уксусной кислоты наблюдается совершенно иная картина.

Усвоенный C^{14} распределяется: в дрожжах только 24 %, а в CO_2 выделяется 76 %.

Кажущееся противоречие результатов в двух случаях можно истолковать на основе некоторых известных фактов о разнозначности каждого из атомов углерода уксусной кислоты в образовании биомассы и CO_2 .

Полученные нами результаты доказывают, что при аэробной ассимиляции радиоактивного углерода $\text{CH}_3\text{C}^{14}\text{OON}$ суммарная картина сводится к следующему: из каждых 4 атомов C^{14} при распаде субстрата 3 атома выделяются в виде C^{14}O_2 и только 1 атом включается в реакции по биосинтезу.

Сопоставление результатов параллельных опытов с CH_3COON и $\text{CH}_3\text{C}^{14}\text{OON}$ приводит нас к заключению, что метильная группа уксусной кислоты участвует преимущественно в реакциях по синтезу клеточной массы и частично только в образовании CO_2 . Наши данные, полученные с новым видом дрожжевого организма из рода *Candida* и по другой методике, дополняют результаты Эренсверда и др. (⁶) с *Torulopsis utilis*. Эти исследователи путем применения дважды меченой уксусной кислоты ($\text{C}^{13}\text{H}_3\text{C}^{14}\text{OON}$) с соотношением $\frac{\text{C}^{14}}{\text{C}^{13}} = 1$ установили, что соотношение это в выделенном CO_2 доходит до двух.

Вышеприведенные исследования приводят нас к следующим выводам.

1. Исследуемый дрожжевой организм из рода *Candida* обладает высоким коэффициентом усвоения уксусной кислоты, который достигает до 96 % заданного количества.

2. В условиях аэробноза исследуемый организм синтезирует в среднем 43,4 % клеточной биомассы (в абсолютно-сухом веществе) и выделяет 60 % CO_2 от усвоенной уксусной кислоты. При этом потребляются 2,2 грамм-атома кислорода на каждую молекулу уксусной кислоты.

3. При аэробном размножении дрожжей *Candida* суммарное распределение углерода субстрата происходит следующим образом: 48,5 % в синтезированной биомассе в выделенном CO_2 , а 11 % остается в среде.

Опыты с меченой уксусной кислотой ($\text{CH}_3\text{C}^{14}\text{OOH}$) показали, что оба атома углерода уксусной кислоты не равнозначны в процессе аэробного метаболизма: C^{14} карбоксильной группы выделяется на 76 % в виде C^{14}O_2 и только 24 % его накапливается в биомассе и в промежуточных метаболитах.

При этом наибольшая доля углерода метильной группы идет по пути биосинтеза клеточной массы.

Институт животноводства и ветеринарии
МСХ Армянской ССР

Մ. Ա. ՏԵՐ-ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ,
Ա. Ս. ՕՅԱՆՁԱՆՅԱՆ ԵՎ Ե. Ա. ԱՎԱԳՅԱՆ

Շաքարասնկային օրգանիզմների կողմից քացախաթթվի օքսիդատիվ քայքայման և աերոբ ասիմիլյացիայի մի քանի հատկությունների մասին

Վերջին ժամանակներս մեծ ուշադրություն է դարձված քացախաթթվի օքսիդատիվ քայքայման ուղիների ուսումնասիրությանը և նրա մասնակցությունը շաքարասնկային օրգանիզմների կողմից կատարվող ամինոթթուների սինթեզի մեջ:

Համեմատարար ավելի քիչ ուշադրություն է դարձված շաքարասնկերի բաղադրամասն օրինաչափությունների վրա, քացախաթթվի աերոբ ասիմիլյացիայի պայմաններում, երբ վերջինս ածխածնի միակ աղբյուրն է:

Ոչ բավարար են ուսումնասիրված հետևյալ փոխհարաբերությունները $\frac{\text{մաքսիմալ յուրացված } \text{CH}_3\text{COOH}}{\text{ված } \text{CH}_3\text{COOH}}$ (յուրացման գործակից), $\frac{\text{սինթեզված բիոմասսա}}{\text{յուրացված } \text{CH}_3\text{COOH}}$, $\frac{\text{սպտազործված } \text{O}_2}{\text{ված } \text{CH}_3\text{COOH}}$, $\frac{\text{անջատված } \text{CO}_2}{\text{յուրացված } \text{CH}_3\text{COOH}}$ և $\frac{\text{բիոմասսայի ածխածին} + \text{CO}_2 \text{ ածխածին}}{\text{սուբստրատի ածխածին}}$:

Այս քանակական հարաբերությունները տեսական և սյրակտիկ հետաքրքրություն են ներկայացնում:

Ներկա աշխատանքը վերաբերվում է վերոհիշյալ քանակական փոխհարաբերությունների ուսումնասիրությանը քացախաթթվի աերոբ մետաբոլիզմի պայմաններում, երբ միջավայրում չկա ածխածնի ուրիշ աղբյուր:

Բացի դրանից հետազոտվել է նաև ռադիոակտիվ իզոտոպային քացախաթթվի ածխածնի (C^{14}) մասնակցությունը CO_2 -ի և ըջջային մասսայի առաջացման մեջ:

Հետազոտությունների մեթոդիկական և էքսպերիմենտալ մասը նկարագրված են սերատում:

Ստացված արդյունքները հանգեցնում են հետևյալ եզրակացություններին.

1. Հետազոտվող շաքարասնկային օրգանիզմը, որը պատկանում է *Candida* ցեղին, ունի քացախաթթվի յուրացման բարձր գործակից, մինչև 96 տոկոսի:

2. Աերոբիոզի պայմաններում հետազոտվող օրգանիզմը յուրացված քացախաթթվից սինթեզում է միջին հաշվով 43,4 տոկոս ըջջային բիոմասսա (բացարձակ չոր քաշով) և անջատում է 60 տոկոս CO_2 : Այս դեպքում քացախաթթվի ամեն մի մոլեկուլի օքսիդացման համար օդազործվում է 2,2 գրամ-ատոմ թթվածին:

3. *Candida* ցեղի շաքարասնկերի աերոբ բաղադրամասն պայմաններում սուբստրատի ածխածնի գումարային տեղարաշխումը կատարվում է հետևյալ կերպ. 48,5 տոկոսը անցնում է սինթեզված բիոմասսայի մեջ, 40,5 տոկոսը՝ անջատված CO_2 -ի մեջ, իսկ 11 տոկոսը մնում է միջավայրի մեջ:

4. Իզոտոպային քացախաթթվով ($\text{CH}_3\text{C}^{14}\text{OOH}$) փորձերը ցույց տվեցին, որ աերոբ մետաբոլիզմի ղեկավարում ածխածնի հրկու ատոմները համարժեք չեն՝ կարրո-

Բսիլ խմբից C^{14} -ի 76 տոկոսն անջատվում է որպես $C^{14}O_2$ և միայն 24 տոկոսը կուտակվում է բիոմասայի և միջավայրի մետաբոլիտների մեջ:

Այս դեպքում մեթիլ խմբի ածխածնի մեծ մասը դնում է բջջային նյութի բիոսինթեզի ուղղությամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. Виланд и А. Зондергоф, *Ann.* 499, 213, 1932. ² А. Виртанен и Сундман, *Biochem. Z.* 313, 236, 1942. ³ С. Вейнгауз и Р. Миллингтон, *J. Amer. Chem. Soc.* 69, 3089, 1947. ⁴ Ч. Гильварг и К. Блок, *J. Amer. Chem. Soc.* 72, 5791, 1950; *J. Biol. Chem.* 193, 339, 1951. ⁵ Ч. Ванг, Р. Лаббэ, В. Кристенсен и В. Шельделин, *J. Biol. Chem.* 197, 645, 1952. ⁶ Дж. Баддлей, Г. Эренсверд и др. *J. Biol. Chem.* 183, 771, 1951. ⁷ И. Веселов, В. Левачева, Э. Фролова, Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии (1–5 VII, 1955 г.), отдел биол. наук, стр. 271, 1955. ⁸ М. Тер-Карапетян, Известия АН Арм.ССР (серия биологическая) 8, 33, 1955. ⁹ Г. Финк и И. Кребс, *Biochem. Z.* 300, 59, 1938. ¹⁰ М. Тер-Карапетян, М. Малатян, ДАН Арм.ССР, 23, (1), 29, 1956. ¹¹ И. А. Власюк, Труды научн. сессии Инст. биол. физ. АН СССР, стр. 28, 1955. ¹² Р. Винцлер, *Cell. and Comp. Physiol.* 15, 343, 1940. по *Biol. Abstracts* 15, 294, 1941. ¹³ К. Ван Ниль и А. Коэн, *J. of Cell. and Comp. Physiol.* 20, 95, 1942, по *Ann. Rev. Biochem.* 15, 452, 1946.

ГЕОЛОГИЯ

С. С. Ванюшин и Э. Г. Малхасян

О возрасте субвулканических и гипабиссальных образований Кафанского рудного поля

(Представлено И. Г. Магакьяном 23.VII.1956)

Кафанский рудный район по своему геологическому строению и металлогении является одним из интереснейших и сложных регионов Малого Кавказа.

Согласно произведенному по работам ИГН АН Арм. ССР тектоно-магматического районирования, впервые И. Г. Магакьян⁽¹⁾, а затем С. С. Мкртчян⁽²⁾ и другие исследователи разделяют Кафанский регион крупным Гиратахским разломом на две части: западную, включающую Каджаранский рудный район, и восточную, включающую Кафанский рудный район, резко отличающиеся друг от друга по своему геологическому строению, слагающим их породам, типам оруденения.

Кафанский рудный район с типичным для него медным и полиметаллическим оруденением характеризуется широким развитием образований юрского периода, представленными породами эффузивной фации и их пирокластическими продуктами, а также мелкими субвулканическими и гипабиссальными интрузивными телами. В тектоно-магматическом отношении он входит в Сомхето-Кировабадскую зону.

Характерной чертой Каджаранского рудного района является широкое развитие медно-молибденового оруденения, наличие крупных гранитоидных интрузивных массивов третичного времени, а также отсутствие мезозойских отложений и медного оруденения Кафанского типа.

Целью настоящего сообщения является уточнение возраста субвулканических (кварцевые порфиры и кварцевые альбитофиры) и гипабиссальных (габбро-диабазы, микродиориты) образований Кафанского рудного района, а также установление взаимоотношений оруденения с указанными породами.

До настоящего времени все указанные разновидности пород относились многими исследователями (В. Г. Грушевой⁽³⁾, В. Н. Котляр⁽⁴⁾, А. Л. Додин^(4, 5), Ю. А. Арапов и Д. Н. Логвин) к типичным интрузивным образованиям и рассматривались как сателлиты крупного Конгур-Алангезского плутона третичного возраста, находящегося, как

известно, в другой (Еревано-Ордубадской) тектоно-магматической зоне, имеющей иную геологическую историю развития. Возраст указанных сателлитов также рассматривался как третичный.

Впервые в 1953 году в работе Р. А. Аракеляна и Г. О. Пиджяна (⁶) был обоснован доверхнеюрский возраст магматических пород и оруденения Кафанского месторождения, что явилось ценным вкладом в дело изучения месторождения. Вместе с тем, ряд вопросов взаимоотношений интрузивных и эффузивных пород трактуется авторами без подтверждения фактами наблюдения таковых в природе.

Кварцевые порфиры, кварцевые альбитофиры, габбро-диориты и диабазы рассматриваются Р. А. Аракеляном и Г. О. Пиджяном как корни доверхнеюрских эффузий, образовавших покровы кварцевых, кварц-плагноклазовых и авгитовых порфиритов. К сожалению, в подтверждение выдвинутой идеи, указанные авторы не могли привести в своей работе ни одного факта действительного перехода даек в покровы, что должно было иметь место в особенности в районе установленных ими многочисленных центров излияния эффузивов.

Фактический материал относительно взаимоотношений интрузивных и эффузивных пород в районе находится в полном противоречии с мнением указанных авторов.

В результате многолетнего изучения геологии рудников, детальных полевых работ, а также петрографических исследований изверженных пород Кафанского рудного поля нам удалось в фациальном отношении интрузивный комплекс подразделить на: 1) субвулканические образования (кварцевые порфиры, кварцевые альбитофиры) и 2) гипабиссальные образования (габбро-диабазы, микродиориты).

Кварцевые порфиры. Наблюдения Ю. А. Лейе, а также авторов статьи подтвердили мнение о среднеюрском возрасте кварцевых порфиров на горе Саяд-даш, где последние перекрываются фаунистически охарактеризованной верхней осадочной толщей средней юры, что и позволяет считать возраст кварцевых порфиров среднеюрским. Однако в районе исследования кварцевые порфириты залегают гипсометрически гораздо ниже кварцевых порфиров, последние прорывают всю среднеюрскую толщу вплоть до основания верхней юры (гора Саяд-даш, у с. Норашеник и в Банном ручье).

Поэтому кварцевые порфиры никак нельзя рассматривать как „корни“ кварцевых порфиритов.

Кварцевые альбитофиры. В районе селения Башкенд небольшое тело кварцевых альбитофиров прорывает свиту туфобрекчий и туфоконгломератов верхней юры, что было отмечено еще в 1945 году Ю. А. Араповым. Л. К. Конюшевский (⁷), посетивший Кафанский район в 1911 году, считал возраст кварцевых альбитофиров дотитонским, с чем следует согласиться, основываясь на возрасте кварцевых альбитофиров соседних областей Сомхето-Кировабадской тектонической зоны, где их возраст решен как верхнеюрский.

Несостоятельность мнения Р. А. Аракеляна и Г. О. Пиджяна об отнесении кварцевых альбитофиоров к корням кварц-плагиоклазовых порфиритов средней юры, убедительно опровергается фактом пересечения кварцевыми альбитофиорами свиты туфобрекчий и туфоконгломератов в основании верхней юры, перекрывающих в районе рудника № 7—10 покровы плагиоклазовых и кварцевых порфиритов средней юры.

Габбро-диабазы. Самыми молодыми интрузивными образованиями Кафанского рудного района являются штокообразные магматические тела габбро-диабазов (ранее именовавшиеся габбро-диоритами) и микродиоритов гипабиссального характера, завершающими мезозойский магматический цикл данного региона. Это подтверждается фактами прорывания габбро-диабазами гидротермально измененных пород и рудных жил в рудниках (№ 6, Халадж) района с. с. Бех и Каварт. ущелье р. Гюткумчет.

Р. А. Аракелян и Г. О. Пиджян (1953 г.) габбро-диабазы (габбро-диориты) и микродиориты считали корнями авгитовых порфиритов, залегающих в нижних горизонтах среднеюрской толщи. Между тем, выходы этих пород, как указано выше, рвут эффузивы средней и верхней юры. Следовательно, нет никаких оснований считать габбро-диабазы корнями среднеюрских порфиритовых толщ; нет оснований также относить их к дериватам Конгур-Алангезского плутона, как это считали В. Н. Котляр, В. Г. Грушевой и А. Л. Додин и др., так как нахождение последних в другой тектонической зоне, а также сравнение многочисленных химических анализов показывает, что эти породы по своим петрохимическим особенностям довольно сильно отличаются от одноименных пород Конгур-Алангезского плутона.

Возможно Кафанские габбро-диабазы и микродиориты связаны с крупным Цавским интрузивом мелового (?) возраста, который находится в той же тектонической зоне и имеет черты сходства с этими интрузивами.

О связи оруденения с интрузиями. Большинство предыдущих исследователей (4, 5, 7) связывали генетически оруденение Кафанского месторождения с габбро-диоритами; нами установлено, однако, что последние рвут рудные жилы и гидротермально измененные породы и не несут никаких следов оруденения, являясь, таким образом, порудными образованиями.

Результатами многочисленных исследований и спектральных анализов вмещающих пород мнение Аракеляна Р. А. и Пиджяна Г. О. о генетической связи оруденения с кварцевыми альбитофиорами и кварцевыми порфирами подтверждается.

Мезозойский возраст оруденения, впервые предположительно отмеченный И. Г. Магакьяном, затем подтвержденный Р. А. Аракеляном и Г. О. Пиджяном, также подтверждается нашими исследованиями. Учитывая факт прорывания туфоконгломератов и туфобрекчий верхней юры кварцевыми альбитофиорами, с которыми связано оруденение, возраст оруденения следует считать не среднеюрским, а сред-

не-верхнеюрским, считая, что формирование Кафанского месторождения происходило в конце средней и в начале верхней юры.

Резюмируя вышесказанное, мы приходим к следующим выводам:

1. Формирование интрузивных тел в Кафанском рудном поле имело место в условиях различных глубин, по отношению к земной поверхности, что получило выражение в возникновении двух фаций магматических пород — субвулканической (кварцевые порфиры и кварцевые альбитофиры) и гипабисальной (габбро-диабазы и микродиориты).

2. Возраст кварцевых порфиров датируется средней юрой, а возраст кварцевых альбитофиров началом верхней юры.

3. Возраст габбро-диабазов и микродиоритов мы склонны считать меловым. По отношению к оруденению эти породы являются пострудными.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ՎԱՆՅՈՒՇԻՆ ԵՎ Է. Գ. ՍԱԼԽԱՍՅԱՆ

Ղափանի հանքային զաշտի սուբհրաբխային և կիսախորքային գոյացումների հասակի մասին

Ղափանի հանքային շրջանն իր երկրաբանական կառուցվածքով և մետալոգենիայով համարվում է Փոքր Կովկասի ամենահետաքրքիր և բարդ սեդիմենտներից մեկը:

Չնայած այն բանին, որ այդ շրջանում ուսումնասիրությունները տարվում են 100 տարուց ավելի, սակայն ստրատիգրաֆիային, երկրաբանությունը, պետրոգրաֆիային և օգտակար հանածոներին նվիրված շատ հարցեր մինչև օրս մնացել են չլուծված:

Ուսումնասիրելով Ղափանի հանքային զաշտի սուբհրաբխային և կիսախորքային գոյացումները, որոնց նշանակությունը մեծ է հանքայնացման գործում, հեղինակները նրանց հասակի մասին հանդել են հետևյալ եզրակացությունների.

1. Ղափանի հանքային շրջանի ինտրուզիվ մարմինների ձևակերպումը երկրի մակերևսի հանդեպ տեղի են ունեցել տարբեր խորություն պայմաններում, որն իր արտահայտությունն է գտել մագմատիկական ապարների 2 ֆազիաների առաջացմամբ՝ սուբհրաբխային (կվարցային պորֆիրներ և կվարցային ալբիտոֆիրներ) և կիսախորքային (գարրո-դիարագներ և միկրոդիորիտներ):

2. Կվարցային պորֆիրների հասակը որոշվում է որպես միջին յուրա, իսկ կվարցային ալբիտոֆիրներինը՝ վերին յուրայի սկիզբը:

3. Գարրո-դիարագները և միկրոդիորիտները կարող են համարվել կավճի հասակի Ղափանացման հանդեպ այս ապարները հանդիսանում են հետհանքային:

4. Ղափանի կոլչեզանային հանքավայրի հանքայնացումը ղենհտիկորեն կապված է կվարցային ալբիտոֆիրների և կվարցային պորֆիրների հետ և ունի միջին — վերին յուրայի հասակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1) И. Г. Магакьян, ДАН Арм. ССР, т. 1, № 5, (1944); 2) С. С. Мкртчян, Новые данные о геологическом строении южной части Армянской ССР. Изд. АН Арм. ССР, 1948 3) В. Г. Грушевой, Мат. ВСЕГЕИ, сб. № 5, 1940; 4) В. Н. Котляр и А. Л. Додин, Цветные металлы, № 3, 1937.; 5) А. Л. Додин, Труды ВСЕГЕИ, вып. 133, 1940; 6) Р. А. Аракелян и Г. О. Пиджян, ДАН Арм. ССР, т. XXII, № 1, (1956), 7) Л. К. Конюшевский, Мат. для геологии Кавказа, кн. 10, серия III, 1911.

ГЕНЕТИКА РАСТЕНИЙ

А. Г. Авакян

Чеканка сельскохозяйственных культур

Сообщение V. Влияние глубокой чеканки на урожай и качество дыни

(Представлено В. О. Гулканяном 10. IX. 1956)

Известно, что рост ассимиляционного аппарата тыквенных, как правило, продолжается долго, при этом появляются новые побеги и листья, на что растение тратит пластические вещества, которые могут быть использованы исключительно для формирования плода. Известно также, что для формирования репродуктивных органов растения дыни (также как и всех бахчевых) требуется значительно больше тепла, чем для ростовых процессов. Это и является основной причиной того, что в условиях средней полосы СССР бахчевые сильно вегетируют до заморозков, а задолго до этого прекращают завязывание плодов.

В опытах 1950 г., проведенных нами на овощной станции Тимирязевской Академии, мы наблюдали, как из испытываемых 10 сортов среднеазиатских дынь только два сорта (раннеспелые Хандаляк и Заами) завязали плоды, а все остальные усиленно развивали листья и побеги, а формирование репродуктивных органов отставало. Эти сорта в основном были средне-позднеспелые и позднеспелые. Первые женские цветки на этих растениях появлялись на 50—60-й день после посева.

В других наших опытах, проведенных в условиях Средней Азии и Армении, было выявлено, что до конца вегетации сильный рост растений бахчевых сопровождается непрерывным завязыванием новых плодовых органов. Например, на растениях сортов дынь Амери-Хтай, Ич-Кызыл, Заами, Бухарка процессы цветения и плодообразования продолжались до конца вегетации, а обильное плодообразование на них отмечалось после появления побегов второго и третьего порядков и перед концом вегетации, когда рост растений резко замедлялся. Однако и в условиях, благоприятствующих нормальному плодоношению, бахчевые растения не успевают полноценно формировать урожай. Особенно это заметно при созревании первого плода на растениях дыни, арбуза и тыквы. В этот период часть листьев (обычно от основания побега до первого плода) начинает желтеть и рост плетей

почти прекращается. Однако после поливов, подкормок и уборки зрелых плодов растения начинают снова ветвиться и цвести, но в дальнейшем завязавшиеся плоды получаются мелкими и уродливыми. Часто и такое мероприятие (удобрение, полив) не дает эффекта, ибо эти мелкие плоды в основном не созревают, а если и успевают созреть, то преобладающей частью бывают некачественными. С другой стороны, эти новообразующиеся плоды и цветы, а также находящиеся до этого периода (до созревания первого плода) на растениях плети без завязавшихся плодов нарушают нормальный ход обмена веществ в растениях. В подобных случаях многие плоды даже в зрелом состоянии бывают некачественными (в основном по меньшему содержанию сахарозы).

В условиях умеренного климата, как сказано выше, завязывание новых плодовых элементов прекращается задолго до заморозков, а ростовые процессы продолжают до этого периода. В. И. Эдельштейн указывает, что „...мощная листва является условием не менее мощного и продолжительного плодоношения“. В таких случаях для формирования полноценного урожая в условиях короткого вегетационного периода растения не нуждаются в таком чрезмерно развитом ассимиляционном аппарате (¹).

На растениях бахчевых отмечается и такое интересное явление: в пределах одного и того же сорта чем меньше плодов на растениях одинаковой мощности, тем быстрее растения доводят эти плоды до их созревания и наоборот. Это объясняется тем, что плоды при меньшем количестве на растении получают соответственно больше питательных веществ, в результате чего и ускоряется их созревание (^{2, 3}).

В некоторых наших опытах было показано, что удаление излишней листо-стеблевой части растений дыни в начале созревания первого плода ускоряет созревание последних на 6—7 дней и увеличивает суточные привесы плодов (особенно в ночные часы суток). В этих исследованиях было выявлено также, что рост плодов дыни и арбуза в основном происходит ночью, тогда как днем вес или уменьшается или, в лучшем случае, остается неизменным (^{4, 5}). Проведенные наблюдения показали эффективность глубокой чеканки на изменение соотношения накопления при ассимиляции и расхода при дыхании. Например, в опытах с дынями глубокая чеканка на 10% уменьшила потери веса за дневные часы и на 45% увеличила привес плодов за ночные часы суток (⁶).

Таким образом, для формирования урожая бахчевых и других культур необходимо постоянно регулировать перераспределение питательных веществ в растениях. В этом деле помимо общеизвестных агротехнических приемов важны также эффективные способы и сроки чеканки растений.

Согласно существующим представлениям нарушение роста главного и боковых побегов в длину путем чеканки верхушек их в зна-

Таблица 1

Влияние глубокой чеканки на урожай и качество дыни

Варианты	Измерение	Общий урожай	Урожай зрелых плодов	Отходы				Общие отходы (в том числе незрелые плоды)	Съедоб. мякоть	Прибавка урожая			Сухие вещества в плодах	Сахара		
				плацента	семена	корка	всего			Общего	зрелого	мякоти		глюкоза	сахароза	всего
№ 1 (контроль)	В г.	10607	9537	789	296	1793	2877	3947	6660	—	—	—	—	—	—	—
	В %	100,0	100,0	7,4	2,8	16,9	27,1	37,2	62,8	—	—	—	7,6	2,03	2,33	4,53
№ 2	В г.	11165	10830	899	336	2036	3271	3606	7559	335	1293	899	—	—	—	
	В %	105,3	113,6	8,1	3,0	18,2	29,3	32,3	67,7	5,3	13,6	8,1	8,4	3,55	3,33	7,60
№ 3	В г.	10385	10385	862	322	2152	3336	3336	7049	-222	848	389	—	—	—	
	В %	97,9	108,9	8,3	3,1	20,7	32,2	32,2	67,8	-2,1	8,9	5,8	12,5	3,51	6,30	10,14

чительной степени способствует направлению питательных веществ в другие части растения, в том числе и плодовые органы, вследствие чего уменьшается осыпание последних и увеличивается средний их вес и количество (6-9). Чеканка значительно действует также и на интенсивность фотосинтеза растений. Некоторые исследователи указывают, что частичное удаление листьев вызывает весьма заметное усиление энергии фотосинтеза и тем самым повышает накопление ассимилятов (10-12).

В работе Н. М. Сисакяна и А. М. Кобяковой (13) выявлено, что сокращение ассимиляционной поверхности растений сдвигает ферментное равновесие в направлении гидролиза, а следовательно, к усилению оттока пластических веществ.

О благоприятном действии чеканки на сокращение опадения плодовых органов технических, плодовых, овощных культур и винограда имеются указания в работах Т. Д. Лысенко и А. А. Авакяна (14), А. Ф. Макаровского (15), В. О. Гулканяна (2, 3, 16), З. И. Журбицкого (17), К. Д. Соева и Д. Ц. Лилова (18) и ряда других авторов. Встречаются и некоторые работы, где исследователи указывают на целесообразность применения чеканки в деле улучшения химического состава плодов овощных культур (19, 20).

В настоящем сообщении мы приводим данные одного из наших опытов, где изучалось действие глубокой чеканки на урожай и качество дыни. Чеканка, в отличие от вышеуказанных работ (с овощными культурами), проводилась в более поздние сроки вегетации растений—в момент, когда на растениях начали созревать первые плоды. Чеканка производилась вручную. Удалялась не только часть листьев, но и те плоды и завязи, которые не могли созреть. Исследование проводилось в 1952 г. на опытном участке Лаборатории агрохимии Арм. НИИЗ.

Опыт имел три варианта: 1) растения не подвергались чеканке—контроль (вариант № 1); 2) на растениях оставлялись по два плода и удалялись 18,9% листьев (вариант № 2) и 3) на растениях оставлялось по одному плоду и удалялись 58,6% листьев (вариант № 3). В вариантах № 2 и № 3 при чеканке были прищипнуты все точки роста оставленных побегов. Рассада дынь выращивалась в бумажных горшочках и через 20 дней—25 мая переносилась в открытый грунт. Опыт имел три повторности, в каждом варианте опыта имелось по девять растений. Применяемый сорт дыни Заами—раннеспелый, урожайный, районирован в основном в Средней Азии. Вегетационный период этого сорта достигает до 70—80 дней, а период плодоношения—25 дней. Сахаристость съедобной мякоти доходит до 6% (21).

Сбор урожая проводился по мере созревания плодов, при этом учитывались общий урожай, средний вес плодов, выход отходов (семян, корки и плаценты). Во время сборов урожая, в среднем из трех повторностей опыта 2 раза проводился анализ качества урожая путем

определения содержания сухих веществ рефрактометром Цейса и сахаров методом Бертрана.

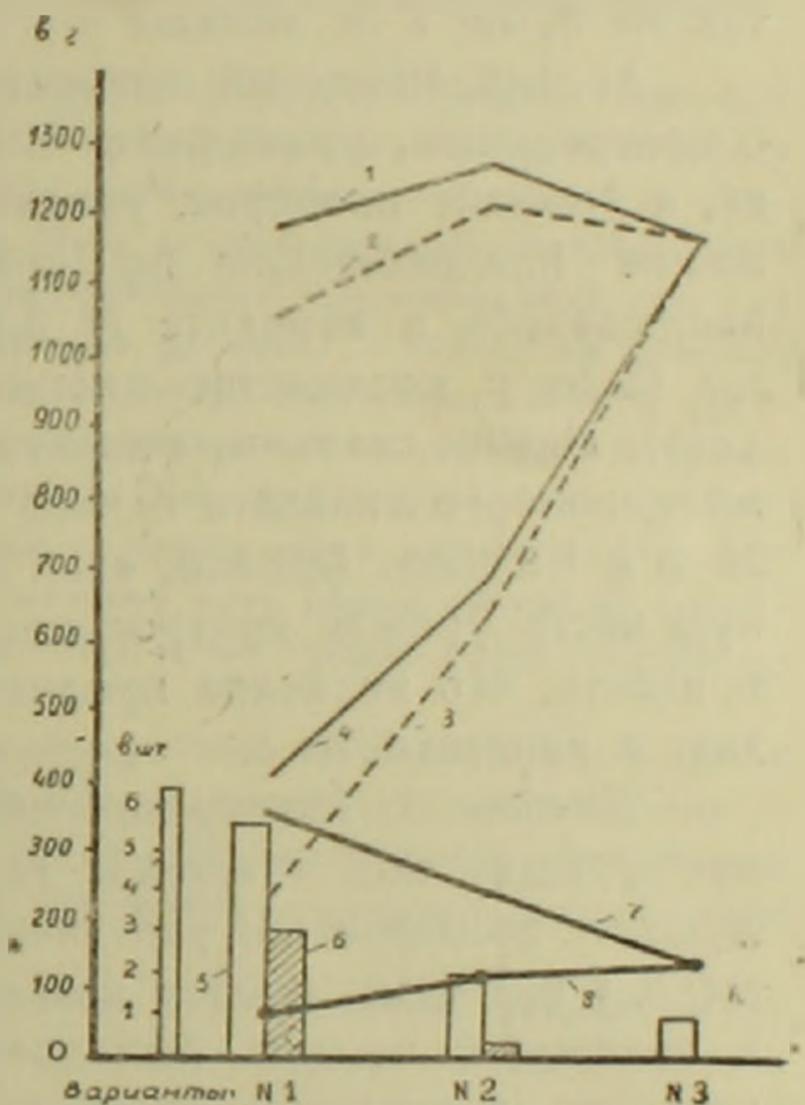
Данные, полученные со сборов урожая, а также химических и механических анализов плодов, приведены в табл. 1.

Из данных табл. 1 видно, что чеканка, произведенная в начале созревания первых плодов, благоприятно сказывается на количестве урожая. Исключение составляет вариант № 3, где общий урожай по сравнению с контролем снизился на 2,1%. Однако в этом варианте не было незрелых плодов и выход съедобной части урожая увеличился по сравнению с контролем на 8,9%. Наибольшая прибавка общего урожая была получена в варианте № 2 (5,3%). Интересно, что и в этом варианте, благодаря интенсивному созреванию плодов, урожай увеличился еще на 8,3% и общая прибавка составила—13,6%. Незрелые плоды были только в вариантах № 1 и № 2. При этом в среднем на одно растение незрелые плоды в варианте № 1 составили 53,0%, а в варианте № 2—11,1% (фиг. 1.).

Анализ плодов показал, что чеканка способствовала увеличению выхода корки, семян и плаценты. Это особенно сильно заметно в варианте, где на каждом растении было оставлено по одному плоду. На кожуре этих плодов появлялись неглубокие трещины, что следует объяснить усилением притока питательных веществ к ним. Наряду с увеличением отходов (плаценты, семян и корки) увеличился и урожай съедобной мякоти плода. Лучшими в этом отношении были также варианты № 2 и № 3.

Из данных табл. 1 видно, что глубокая чеканка способствовала значительному увеличению содержания сухих веществ и сахаров в плодах. Интересно, что в обоих чеканенных вариантах количество содержащейся в плодах глюкозы почти одинаково, в то время как в варианте № 3 увеличение процента общих сахаров по сравнению с вариантом № 2 шло за счет роста процента сахарозы.

В чеканенных вариантах заметно увеличился и средний вес плодов, что и было основным показателем увеличения урожая в этих вариантах. Средний вес незрелых плодов в контрольном варианте составил 40 г, а в варианте № 2—620 г.



Фиг. 1. Влияние глубокой чеканки на урожай и качество дыни.

1—средний урожай на одно растение; 2—средний урожай созревших плодов на куст; 3—средний вес плодов; 4—средний вес созревших плодов на одно растение; 5—количество плодов на одно растение; 6—количество незрелых плодов на одно растение; 7—количество листьев на одно растение; 8—количество листьев в среднем на один плод.

Подсчет показал, что в варианте № 1 из общего количества плодов (51 шт.) не вызрело 27, т. е. в среднем 3 на каждое растение. Однако не все эти плоды можно отнести к числу невызревших, ибо многие из них еще в раннем возрасте сгнили. Такими плодами большей частью оказались третьи и четвертые по счету — от основания побега.

Чеканка оказала большое влияние и на листовую поверхность кустов. Как видно из фиг. 1, наибольшее количество листьев обнаруживается в варианте без чеканки. Второе место занимает вариант № 2 и наименьшее количество наблюдается в варианте № 3. Однако при чеканке удалялись также и плоды, следовательно в этом случае количество листьев в среднем на один плод было больше в вариантах № 3, № 2 и меньше — в нечеканенном — контрольном варианте.

Ассимиляционный аппарат кустов в варианте № 2 по сравнению с контрольным, уменьшился в 1,5 раза, количество плодов — в 2,8 раза, а урожай, наоборот, увеличился в 1,1 раза. Незначительное уменьшение плодоношения по сравнению с контрольными растениями наблюдалось в варианте № 3 (в 1,02 раза). Здесь значительно меньше было и количество листьев и плодов (соответственно: 2,8 и 5,7 раза). Иными словами, в варианте № 2 продуктивность единицы ассимиляционного аппарата одного куста увеличилась в 2,5, а в варианте № 3 в 1,8 раза. Однако, если учесть полученные отходы — несъедобную часть урожая контрольного варианта и варианта № 2, то следует признать, что величина продуктивности листьев значительно возрастает в варианте № 3.

Выводы. 1. Анализ полученных данных показывает, что повышение урожая под влиянием глубокой чеканки складывалось из следующих показателей: увеличения среднего веса плодов, уменьшения выхода незрелых плодов и значительного увеличения сухих веществ и сахаров в плодах. Эти элементы урожая более высокие в том варианте, где чеканка была проведена глубоко, когда на растениях оставлялось меньше плодов.

2. При удалении возможно большего количества плодов и всех точек роста побегов в момент, когда в растении начался процесс созревания урожая, значительно увеличивается содержание сухих веществ в плодах, а прибавка общих сахаров происходит в большей мере за счет образования сахарозы.

3. Эффективность применения глубокой чеканки не только ограничивается удалением листовой поверхности растений, но и удалением плодов и завязей, не могущих дойти до полного созревания.

4. Для оценки действия глубокой чеканки помимо общего урожая следует учесть и качество съедобной части его. При этом способе чеканки необходимо учесть также условия выращивания, биологию и сортовые свойства данной культуры. Используемый в нашем опыте сорт дыни Заами в условиях Средней Азии и Армении, при хорошей агротехнике, успевает формировать и довести к полной

спелости до 6—7 плодов весом от 300 г до 2 кг каждый. В подобных случаях при глубокой чеканке на каждом растении следует оставлять до 3—4 плодов, а на слабом фоне выращивания от 1 до 2.

Лаборатория агрохимии Арм. НИИЗ

Ա. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Պյուղատնտեսական կուլտուրաների ծերատում

Հաղորդում V: խոր ծերատման ազդեցությունը սեխի բերքի և որակի վրա:

Հայտնի է, որ բոստանային կուլտուրաների ասիմիլյացիոն ապարատի աճը երկար է տևում: Այդ ժամանակամիջոցում բույսի վրա անընդհատ առաջանում են նոր ցողուններ և տերևներ, որոնք զգալի չափով սննդանյութեր են խլում պտուղներից ու դանդաղեցնում նրանց հասունացումը:

Մեր կողմից կատարված փորձերից պարզվել է, որ Միջին Ասիայի և Հայաստանի պայմաններում բոստանային կուլտուրաների աճին զուգընթաց բույսերի վրա անընդհատ առաջանում են նոր պտուղներ: Այդ բույսերի մոտ ուժեղ պտղակալում տեղի է ունենում 2-րդ և 3-րդ կարգի ցողունների առաջացումից հետո և վեղետացիայի վերջին օրերին: Բայց մինչև անգամ զարգացման լավագույն պայմաններում այդ պտուղների մեծ մասը չեն հասունանում, կամ շատ դեպքերում հասունացած վիճակում ունենում են աննորմալ ձև և վատ որակ: Այդ երևույթը բոստանային կուլտուրաների մոտ (սեխ, ձմերուկ, դդում) հատկապես լավ է դրսևորվում, երբ բույսերի մոտ գերիշխում են զարգացման պրոցեսները և համարյա հասունանում է առաջին պտուղը: Բույսերի զարգացման այդ պահը բնորոշ է նրանով, որ զգալի չափով կրճատվում է նրանց աճը և սննդանյութերի գերիշխող մասը դնում է դեպի պտուղները: Այդ ժամանակ որոշ չափով սկսում են շորանալ նաև տերևները (հատկապես զլխավոր ցողունի մոտ) սկսած հիմքից մինչև առաջին պտուղները):

Առաջին հասունացած պտուղները հավաքելուց հետո պարարտացման և ջրման շնորհիվ բույսերը նորից են աճում ու պտղաբերում, բայց պտուղները մեծ մասամբ յինում են աննորմալ և փոքր, իսկ եթե հասնում են լրիվ հասունացման վիճակի, ապա նրանց մեջ պարունակված շաքարների տոկոսը (հատկապես սախարոզա շաքարի) զգալի չափով պակասում է:

Մեր հետազոտությունների նպատակն է հղել, խոր ծերատման միջոցով, ստիպել բույսին պտուղների հասունացման պրոցեսում ավելի ուղիղաբար օգտագործի սննդանյութերը: Այդ իսկ պատճառով մեր փորձերում հեռացվել են ոչ միայն բույսի ավելորդ տերևա-ցողունային մասսան, այլև այն պտուղները, որոնք ենթակա չեն եղել լրիվ հասունացման:

Կատարված զիտոգոլոթյունները և փորձի սվյալները ցույց են տալիս որ՝

1. Սեխի բույսի վրա կատարած խոր ծերատումից ստացված բերքի հավելումը հիմնականում արդյունք է՝ պտղի բաշի ավելացման, հասունացած պտուղների թվի կրճատման և պտղի մեջ պարունակվող շոր նյութերի և շաքարների ավելացման: Թերթատվող թյան այս ցուցանիշները ավելի բարձր են այն դեպքում, երբ խոր ծերատումը սեխի բույսի վրա կատարվում է ավելի խորը, այսինքն բույսերի վրա թողնվում է քիչ քանակությամբ պտուղներ:

2. Սեխի բույսի վրա կատարած խոր ծերատումը (առաջին հասունացած պտուղների երևալու մոմենտին) զգալի չափով նպաստում է պտուղների շոր նյութերի և բնդհանուր շաքարների տոկոսի ավելացմանը: Ընդհանուր շաքարների տոկոսի ավելացումը հիմնականում արդյունք է սախարոզայի գոյացման:

3. խոր ծերատման էֆեկտիվությունը պայմանավորված է ոչ միայն տերևային մասսայի հեռացումից, այլև այն պտուղների հեռացումից, որոնք չեն կարող հասնել լրիվ հասունացման:

4. խոր ծերատման էֆեկտիվությունը որոշելիս ընդհանուր բերքի քանակի հետ միասին անհրաժեշտ է հաշվի առնել պտղի որակը: Այսպիսի մեթոդով ծերատելիս անհրա-

ժեշտ է հաշվի առնել նաև բույսերի աճեցման պայմանները, նրանց բիոլոգիան և սորտա-
յին առանձնահատկությունները:

Մեր փորձում օգտագործված սելի Ջաամի սորտը, Միջին Ասիայի և Հայաստանի
պայմաններում, լավ ադրոտելիկայի ֆոնի վրա աճեցնելիս հասցնում է լրիվ հասունաց-
ման 6—7 պտուղ (300—2000 գր քաշով): Նման դեպքում խոր ծերատում կատարելիս
ամեն մի բույսի վրա անհրաժեշտ է թողնել 3—4 պտուղ, իսկ թույլ ադրոտելիկայի
ֆոնի վրա աճեցնելիս 1—2 պտուղ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. И. Эдельштейн, Овощеводство, 1953. ² В. О. Гулканян, Изд. АН Арм. ССР, т. II, 4, 1949. ³ В. О. Гулканян, Изд. АН Арм. ССР, т. VII, 12, 1950. ⁴ А. Г. Авакян, Изв. АН Арм. ССР, т. V, 1, 1952. ⁵ А. Г. Авакян, Изв. АН Арм. ССР, т. VIII, 10, 1955. ⁶ А. С. Мержанян, Тр. Анапск. оп. ст., вып. 5, 1929. ⁷ Н. П. Бузин и В. И. Кантария, Тр. Закавказск. ин-та виноград. и виноделия, вып. 1, 1936. ⁸ Н. П. Бузин, Агробиология, 3, 1950. ⁹ А. Г. Авакян, ДАН Арм. ССР, т. XXI, 5, 1955. ¹⁰ В. Н. Любименко, Изв. Петроград. научного ин-та им. Лесгафта, VI, 1921. ¹¹ С. И. Кокина, Ботанич. ж., 22, вып. 1, 1937. ¹² В. М. Катунский, Сб. Президенту АН СССР акад. В. Л. Комарову к 70-летию со дня рождения и 45-летию научной деятельности, 1939. ¹³ Н. М. Сисакян и А. М. Кобякова, Биохимия, 6, вып. 1, 1941. ¹⁴ Т. Д. Лысенко и А. А. Авакян, Чеканка хлопчатника, 1949. ¹⁵ Ф. А. Макаровский, „Сад и огород“, 6, 1949. ¹⁶ В. О. Гулканян, Изв. АН Арм. ССР, т. VI, 8, 1953. ¹⁷ З. И. Журбицкий, „Сад и огород“, 6, 1949. ¹⁸ К. Д. Стоев и Д. Ц. Лилов, Физиология растений, АН СССР, т. 3, вып. 2, 1956. ¹⁹ А. Г. Авакян, ДАН Арм. ССР, т. XXII, 3 (1956). ²⁰ А. Ф. Макаровский, Сборник н.-и. работ, 10, 1940, Новочеркасск. ²⁰ А. И. Филов, Бюлл. по плод., виноград. и овощевод., II, Ташкент, 1950.



МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О решении задачи Дирихле уравнений с неразделяющимися переменными для прямоугольника*

(Представлено А. Л. Шагиняном 10. VIII. 1956)

В заметке дается эффективное решение задачи Дирихле уравнения эллиптического типа с неразделяющимися переменными для прямоугольника**.

Пусть функция $U(x, y)$ удовлетворяет в области $OABC$ (фиг. 1) уравнению

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = P(x, y), \quad (1)$$

$$(\beta - \alpha^2 > 0)$$

и следующим краевым условиям:

$$U(x, 0) = S_0(x); U(x, d) = S(x),$$

$$U(0, y) = T_0(y); U(b, y) = T_1(y). \quad (2)$$

Относительно $P(x, y)$ предполагаем, что она суммируема, что касается $S_0(x)$, $S(x)$, $T_0(y)$ и $T_1(y)$, предполагаем, что они непрерывны и обладают суммируемыми первыми производными, а также, что $S_0(0) = T_0(0)$, $S_0(b) = T_1(0)$, $S(0) = T_0(d)$, $S(b) = T_1(d)$.

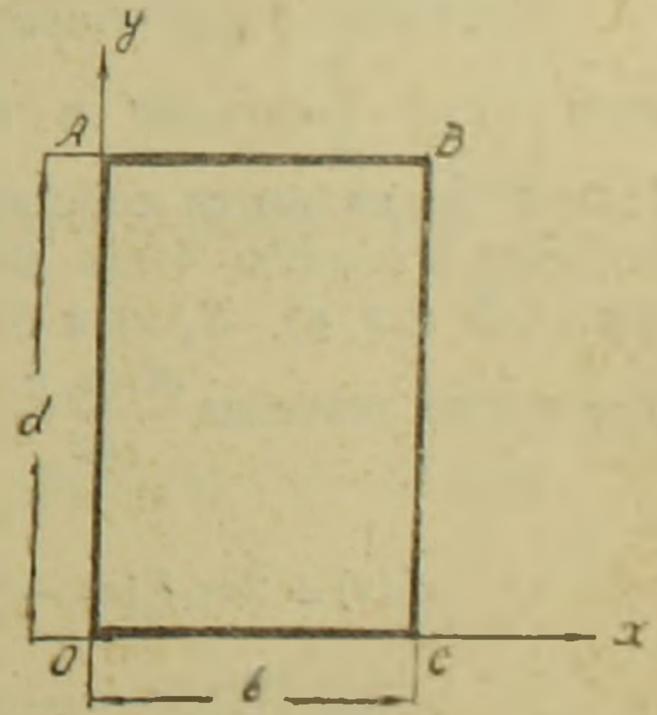


Рис. 1

Будем искать решение в виде ряда Фурье, расположенного по $\sin \frac{k\pi y}{d}$ (1)

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \quad (3)$$

* Доложено на III Всесоюзном математическом съезде.

** В случае, если область представляет произвольный параллелограмм линейным преобразованием координат, очевидно, ее легко свести к прямоугольнику.



где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{d}; \quad f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U(x, y) \sin \gamma_k y dy.$$

Одновременно представим функцию $U(x, y)$ в виде ряда, расположенного по $\cos \gamma_k y$:

$$U(x, y) = \frac{\varphi_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \gamma_k y, \quad (4)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U(x, y) \cos \gamma_k y dy.$$

Для определения коэффициентов $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ умножим уравнение (1) на $\frac{2}{d} \sin \gamma_k y dy$ и проинтегрируем от 0 до d . Принимая во внимание граничные условия (2), будем иметь

$$f_k'(x) - 2\alpha \gamma_k \varphi_k'(x) - \beta \gamma_k^2 f_k(x) = \frac{2}{d} \left\{ \int_0^d P(x, y) \sin \gamma_k y dy - \beta \gamma_k [S_0(x) - (-1)^k S(x)] \right\}. \quad (5)$$

Чтобы получить второе соотношение между $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, умножим (1) на $\frac{2}{d} \cos \gamma_k y dy$ и вновь проинтегрируем от 0 до d . Однако $\{\cos \gamma_k y\}$ не являются собственными функциями данной краевой задачи, поэтому в правую часть получаемого уравнения, помимо заданных функций $P(x, y)$, $S_0(x)$ и $S(x)$, будут входить также и неизвестные граничные значения $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$ на прямых $y = 0$ и $y = d$:

$$\varphi_k'(x) + 2\alpha \gamma_k f_k'(x) - \beta \gamma_k^2 \varphi_k(x) = \frac{2}{d} \left\{ \int_0^d P(x, y) \cos \gamma_k y dy + 2\alpha [S_0'(x) - (-1)^k S'(x)] + \beta [S_1(x) - (-1)^k S_2(x)] \right\}. \quad (6)$$

Здесь обозначено

$$S_1(x) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}; \quad S_2(x) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=d}.$$

Граничные условия для $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, согласно (2), будут

$$f_k(0) = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(y) \sin \gamma_k y dy; \quad f_k(b) = \frac{2}{d} \int_0^d T(y) \sin \gamma_k y dy;$$

$$\varphi_k(0) = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(y) \cos \gamma_k y dy; \quad \varphi_k(b) = \frac{2}{d} \int_0^d T(y) \cos \gamma_k y dy. \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7) для $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ получим следующие выражения

$$f_k(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-x)}{d \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \left\{ \int_0^d T_0(y) \sin \gamma_k (ax+y) dy - \frac{1}{\nu \gamma_k} \int_0^x [\rho_k(t) \cos \alpha \gamma_k (x-t) + \right.$$

$$\left. + q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (x-t)] \operatorname{sh} \nu \gamma_k t dt \right\} - \frac{2 \operatorname{sh} \nu \gamma_k x}{d \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \left\{ \int_0^d T(y) \sin \gamma_k (ab - ax - y) dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\nu \gamma_k} \int_x^b [\rho_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t-x) - q_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t-x)] \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-t) dt \right\}. \quad (8)$$

$$\varphi_k(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-x)}{d \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \left\{ \int_0^d T_0(y) \cos \gamma_k (ax+y) dy + \frac{1}{\nu \gamma_k} \int_0^x [\rho_k(t) \sin \alpha \gamma_k (x-t) - \right.$$

$$\left. - q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (x-t)] \operatorname{sh} \nu \gamma_k t dt \right\} + \frac{2 \operatorname{sh} \nu \gamma_k x}{d \operatorname{sh} \nu \gamma_k b} \left\{ \int_0^d T(y) \cos \gamma_k (ab - ax - y) dy - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nu \gamma_k} \int_x^b [\rho_k(t) \sin \alpha \gamma_k (t-x) + q_k(t) \cos \alpha \gamma_k (t-x)] \operatorname{sh} \nu \gamma_k (b-t) dt \right\}.$$

где

$$\nu = \sqrt{\beta - \alpha^2}, \quad \rho_k(x) = \int_0^d P(x, y) \sin \gamma_k y dy - \beta \gamma_k [S_0(x) - (-1)^k S(x)],$$

$$q_k(x) = \int_0^d P(x, y) \cos \gamma_k y dy + 2\alpha [S_0'(x) - (-1)^k S'(x)] +$$

$$+ \beta [S_1'(x) - (-1)^k S_2'(x)]. \quad (9)$$

В дальнейшем следуем работе⁽²⁾. Для определения неизвестных функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$, входящих в (8), потребуем, чтобы вторым представлением функции $U(x, y)$ также выполнялись граничные условия задачи на прямых $y=0$ и $y=d$:

$$\frac{\varphi_0(x)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x) = S_0(x); \quad \frac{\varphi_0(x)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \varphi_l(x) = S(x) \quad (10)$$

Умножим оба уравнения (10) на $\frac{2}{d} \sin \delta_k x dx$, где $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$,

проинтегрируем от 0 до b . При этом, вследствие абсолютной сходимости рядов (10), возможна перестановка знаков суммы и интеграла.

Для нахождения значения $\int_0^b \varphi_l(x) \sin \delta_k x dx$ воспользуемся уравнениями

(5) и (6), а также условиями (2). После некоторых преобразований для определения коэффициентов Фурье функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$ получим следующие соотношения:

$$a_k = 2\alpha\lambda\sqrt{\beta} \delta_k^3 \frac{\operatorname{ch}\lambda\delta_k d + \operatorname{cos}\mu\delta_k d}{d \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \sum_{l=1}^{\infty} \times$$

$$\times [1 - (-1)^l] \frac{[1 - (-1)^k]m_l + [1 + (-1)^k]n_l}{(\beta\gamma_l^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_l^2\delta_k^2} + r_k$$

$$b_k = 2\alpha\lambda\sqrt{\beta} \delta_k^3 \frac{\operatorname{ch}\lambda\delta_k d - \operatorname{cos}\mu\delta_k d}{d \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \sum_{l=1}^{\infty} \times$$

$$\times [1 + (-1)^l] \frac{[1 - (-1)^k]m_l + [1 + (-1)^k]n_l}{(\beta\gamma_l^2 + \delta_k^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_l^2\delta_k^2} + s_k.$$

Здесь обозначено

$$a_k = 2\sqrt{\beta} \delta_k \int_0^b [S_1(x) + S_2(x)] \sin \delta_k x dx,$$

$$b_k = 2\sqrt{\beta} \delta_k \int_0^b [S_1(x) - S_2(x)] \sin \delta_k x dx$$

$$m_k = \gamma_k d[f'_k(0) + f'_k(b)], \quad n_k = \gamma_k d[f'_k(0) - f'_k(b)], \quad \lambda = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\beta}, \quad \mu = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$r_k = \frac{2\lambda\delta_k^3}{\sqrt{\beta} \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \int_0^d [T_0(y) - (-1)^k T(y)] \left\{ \gamma [\operatorname{cos}\mu\delta_k y \operatorname{sh}\lambda\delta_k (d-y) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{cos}\mu\delta_k (d-y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k y] + \alpha [\operatorname{sin}\mu\delta_k y \operatorname{ch}\lambda\delta_k (d-y) - \operatorname{sin}\mu\delta_k (d-y) \operatorname{ch}\lambda\delta_k y] \right\} dy -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\delta_k}{V\sqrt{\beta} \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \left\{ \nu\delta_k(\operatorname{ch}\lambda\delta_k d + \cos\mu\delta_k d) \int_0^b [S_0(x) - S(x)] \sin\delta_k x dx + \right. \\
& + (\alpha \operatorname{sh}\lambda\delta_k d - \nu \sin\mu\delta_k d) \int_0^b [S'_0(x) + S'(x)] \sin\delta_k x dx + \\
& + \int_0^b \int_0^d P(x, y) [\sin\delta_k(x - \mu y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k(d - y) - \\
& \quad \left. - \sin\delta_k(x + \mu d - \mu y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k y] dy dx \right\} \\
s_k = & \frac{2\lambda\delta_k}{V\sqrt{\beta} \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \int_0^d [T_0(y) - (-1)^k T(y)] \left\{ \nu [\cos\mu\delta_k y \operatorname{sh}\lambda\delta_k(d - y) + \right. \quad (12) \\
& \left. + \cos\mu\delta_k(d - y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k y] + \alpha [\sin\mu\delta_k y \operatorname{ch}\lambda\delta_k(d - y) + \sin\mu\delta_k(d - y) \operatorname{ch}\lambda\delta_k y] \right\} dy -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\delta_k}{V\sqrt{\beta} \operatorname{sh}\lambda\delta_k d} \left\{ \nu\delta_k(\operatorname{ch}\lambda\delta_k d - \cos\mu\delta_k d) \int_0^b [S_0(x) + S(x)] \sin\delta_k x dx + \right. \\
& + (\alpha \operatorname{sh}\lambda\delta_k d + \nu \sin\mu\delta_k d) \int_0^b [S'_0(x) - S'(x)] \sin\delta_k x dx + \\
& \left. + \int_0^b \int_0^d P'(x, y) [\sin\delta_k(x - \mu y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k(d - y) + \sin\delta_k(x + \mu d - \mu y) \operatorname{sh}\lambda\delta_k y] dy dx \right\}.
\end{aligned}$$

В свою очередь m_k и n_k , входящие в (11), выразятся посредством a_i и b_k из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned}
m_k = & 2\alpha\nu\sqrt{\beta} \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch}\nu\gamma_k b + \cos\alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \sum_{i=1}^{\infty} \times \\
& \times [1 - (-1)^i] \frac{[1 - (-1)^k] a_i + [1 + (-1)^k] b_i}{(\delta_i^2 + \beta\gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_i^2} + \eta_k \quad (13)
\end{aligned}$$

$$n_k = 2\alpha\nu\sqrt{\beta} \gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch}\nu\gamma_k b - \cos\alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \sum_{i=1}^{\infty} \times$$

$$\times [1 + (-1)^i] \frac{[1 - (-1)^k]a_i + [1 + (-1)^k]b_i}{(\delta_i^2 + \beta\gamma_k^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_i^2} + \theta_k.$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \eta_k = & \frac{2\gamma_k}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \int_0^b \left\{ \beta\gamma_k [\cos\alpha\gamma_k x \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) - \cos\alpha\gamma_k(b-x) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] [S_0(x) - \right. \\ & - (-1)^k S(x)] + 2\alpha [\sin\alpha\gamma_k x \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) + \sin\alpha\gamma_k(b-x) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] [S'_0(x) - \\ & - (-1)^k S'(x)] + \int_0^a P(x, y) [\sin\gamma_k(\alpha x - y) \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) + \\ & + \sin\gamma_k(ab - \alpha x + y) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] dy \Big\} dx - 2\gamma_k^2 \left\{ \nu \left(\operatorname{cth}\nu\gamma_k b + \frac{\cos\alpha\gamma_k b}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \right) \int_0^a [T_0(y) - \right. \\ & - T(y)] \sin\gamma_k y dy - \left(a - \nu \frac{\sin\alpha\gamma_k b}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \right) \int_0^a [T_0(y) + T(y)] \cos\gamma_k y dy \Big\} \quad (14) \\ \theta_k = & \frac{2\gamma_k}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \int_0^b \left\{ \beta\gamma_k [\cos\alpha\gamma_k x \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) + \cos\alpha\gamma_k(b-x) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] [S_0(x) - \right. \\ & - (-1)^k S(x)] + 2\alpha [\sin\alpha\gamma_k x \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) - \sin\alpha\gamma_k(b-x) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] [S'_0(x) - \\ & - (-1)^k S'(x)] + \int_0^a P(x, y) [\sin\gamma_k(\alpha x - y) \operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-x) - \\ & - \sin\gamma_k(ab - \alpha x + y) \operatorname{sh}\nu\gamma_k x] dy \Big\} dx - 2\gamma_k^2 \left\{ \nu \left(\operatorname{cth}\nu\gamma_k b - \frac{\cos\alpha\gamma_k b}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \right) \int_0^a [T_0(y) - \right. \\ & + T(y)] \sin\gamma_k y dy - \left(a + \nu \frac{\sin\alpha\gamma_k b}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b} \right) \int_0^a [T_0(y) - T(y)] \cos\gamma_k y dy \Big\}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученная совокупность бесконечных систем линейных уравнений (11) и (13) сильно разрежена, — в каждое из этих уравнений входят не все неизвестные a_k, b_k, m_k, n_k , а лишь весьма малая их часть. Это обстоятельство существенно облегчает работу при нахождении решений усеченных систем.

Займемся теперь исследованием полученной совокупности. Сумма модулей коэффициентов k -го уравнения первой из систем (11) равна

$$\sigma_k = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta} \frac{\sin \mu \delta_k d}{\operatorname{sh} \lambda \delta_k d}}. \quad (15)$$

Аналогичные выражения имеют суммы модулей коэффициентов остальных систем. В выражении (15) второе слагаемое убывает со скоростью экспоненциального типа, так что, начиная с некоторого k , σ_k становится меньше 1. В частности, если $\beta > \frac{5}{4} \alpha^2$, суммы модулей коэффициентов строго меньше единицы для всех k , начиная от $k = 1$ до ∞ и при любых отношениях $\frac{d}{b}$, т. е. система вполне регулярна. Что касается свободных членов систем (11) и (13), то, как легко видеть из (12) и (14), они ограничены в своей совокупности. Из теории регулярных систем⁽³⁾ следует единственность ограниченного решения и сходимость методов последовательных приближений.

Заметим, что, как видно из соотношений (11) и (13), с уменьшением по модулю α уменьшается влияние рядов на значение величин a_k , b_k , m_k , и n_k , и в пределе, когда α исчезает, т. е. когда уравнение (1) обращается в уравнение с разделяющимися переменными, бесконечные системы линейных уравнений (11) и (13) вырождаются в простые равенства. Заметим, кроме того, следующее. Ряды (3) и (4), вследствие неоднородности граничных условий, обладают слабой сходимостью, — коэффициенты их $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ убывают со скоростью соответственно $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{k^2}$. Усилим последнюю. Для этого выделим и просуммируем часть, обуславливающую слабую сходимость:

$$U(x, y) = \left(1 - \frac{y}{d}\right) S_0(x) + \frac{y}{d} S(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \times \\ \times \left[f_k(x) + 2 \frac{S_0(x) - (-1)^k S(x)}{\gamma_k d} \right] \sin \gamma_k y \quad (16)$$

Аналогично получаем для второго представления:

$$U(x, y) = \left[y \left(1 - \frac{y}{2d}\right) - \frac{d}{3} \right] S(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{d} - \frac{d}{3} \right) S_2(x) + \\ + \frac{\varphi_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k(x) + 2 \frac{S_1(x) - (-1)^k S_2(x)}{\gamma_k d} \right] \cos \gamma_k y. \quad (17)$$

Ряды в этих выражениях обладают усиленной сходимостью, — коэффициенты их убывают в точках разрыва производной со скоростью соответственно $\frac{1}{k^2}$ и $\frac{1}{k^3}$, в точках же непрерывности производной — со скоростью $\frac{1}{k^3}$ и $\frac{1}{k^4}$. Таким образом, в ходе решения задачи для

функции $U(x, y)$ мы получили два представления, любым из которых мы можем воспользоваться.

В заключение отметим, что изложенное выше применимо, если в уравнение (1) будут входить также низшие производные $U(x, y)$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջտրոսկող փոփոխականներով հավասարումների Գիրիխուլեի խնդրի լուծման մասին ուղղանկյան համար

Հոդվածում տրվում է շտրոսկող փոփոխականներով էլիպտիկ տիպի հավասարման Գիրիխուլեի խնդրի էֆեկտիվ լուծումն ուղղանկյան համար: Ննդիրը լուծվում է որոնելի ֆունկցիան երկու տեսակ շարքերի ներկայացմամբ: Այդ շարքերի $f_k(x)$ և $\varphi_k(x)$ գործակիցները որոշելու համար բազմապատկում ենք (1) հավասարումը համապատասխանաբար $\frac{2}{d} \sin \gamma_k y dy$ և $-\frac{2}{d} \cos \gamma_k y dy$ -ով, որտեղ $\gamma_k = \frac{k\pi}{d}$, և ինտեգրում 0-ից մինչև d :

Կատարելով մասերով ինտեգրումը, ստանում ենք $f_k(x)$ -ի և $\varphi_k(x)$ -ի համար երկու շրջանակաձև հավասարումներ, որոնց աջ մասում մտնում են որոնելի $U(x, y)$ ֆունկցիայի $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$ ածանցյալի անհայտ եզրային արժեքները $y=0$ և $y=d$ դեպքի վրա: Այդ

եզրային արժեքները որոշելու համար պահանջում ենք, որպեսզի $U(x, y)$ ֆունկցիայի երկրորդ ներկայացումով նույնպես բավարարվեն խնդրի եզրային պայմանները: Կատարելով միջանկյալ գործողություններ, գործակիցների արժեքների համար ստանում ենք դժային հավասարումների լիովին ուղղակի անվերջ սխեմա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1918. ² Р. С. Минасян, ДАН Арм.ССР, т. XXII, № 5, (1956) ³ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.

С. А. Маркосян

Достаточные условия существования нескольких
 предельных циклов

(Представлено А. Л. Шагиняном 28. VIII. 1956)

Условия существования нескольких предельных циклов уравнения нелинейного колебания второго порядка были установлены, например, в работах (1-3).

В настоящей заметке приводятся досточные условия существования не менее любого, наперед заданного числа предельных циклов системы уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + by]\Phi(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = [ax + \varphi(y)]F(x, y), \quad (1)$$

где $a, b = \pm 1$, далее, рассматривая частные виды системы (1), устанавливаются условия, при выполнении которых уравнение

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0 \quad (2)$$

имеет не менее любого числа предельных циклов.

В заметке предполагается, что начало координат для рассматриваемых систем единственная особая точка (на всей плоскости) и что правые части рассматриваемых уравнений определены и непрерывны во всей плоскости и удовлетворяют условию Липшица во всякой ограниченной области этой плоскости.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть дана система уравнений (1),

где $b = -1, a = 1$,

если:

- 1) вне отрезков $[D_3, D_1]$, оси x и $[D_2, D_4]$ оси y , заключающих на себе особую точку $x = y = 0$ соответственно. $xf(x) \leq 0, y\varphi(y) \leq 0$, причем во втором соотношении равенство не может выполняться одновременно для двух симметричных значений аргумента относительно оси x ;
- 2) существует $\bar{x} > 0$ такое, что $f(x) \leq \min(-d_2, -d_4)$ для $x > \bar{x}$, где d_2, d_4 , соответственно, расстояние точек D_2, D_4 , от начала координат;
- 3) существует \bar{y} такое, что $-\varphi(y) > d_1$, когда $y > \bar{y}$, $-\varphi(y) \leq -d_3$, когда $y < -\bar{y}$, где d_1, d_3 , соответственно, расстояния точек D_1, D_3 от начала координат;

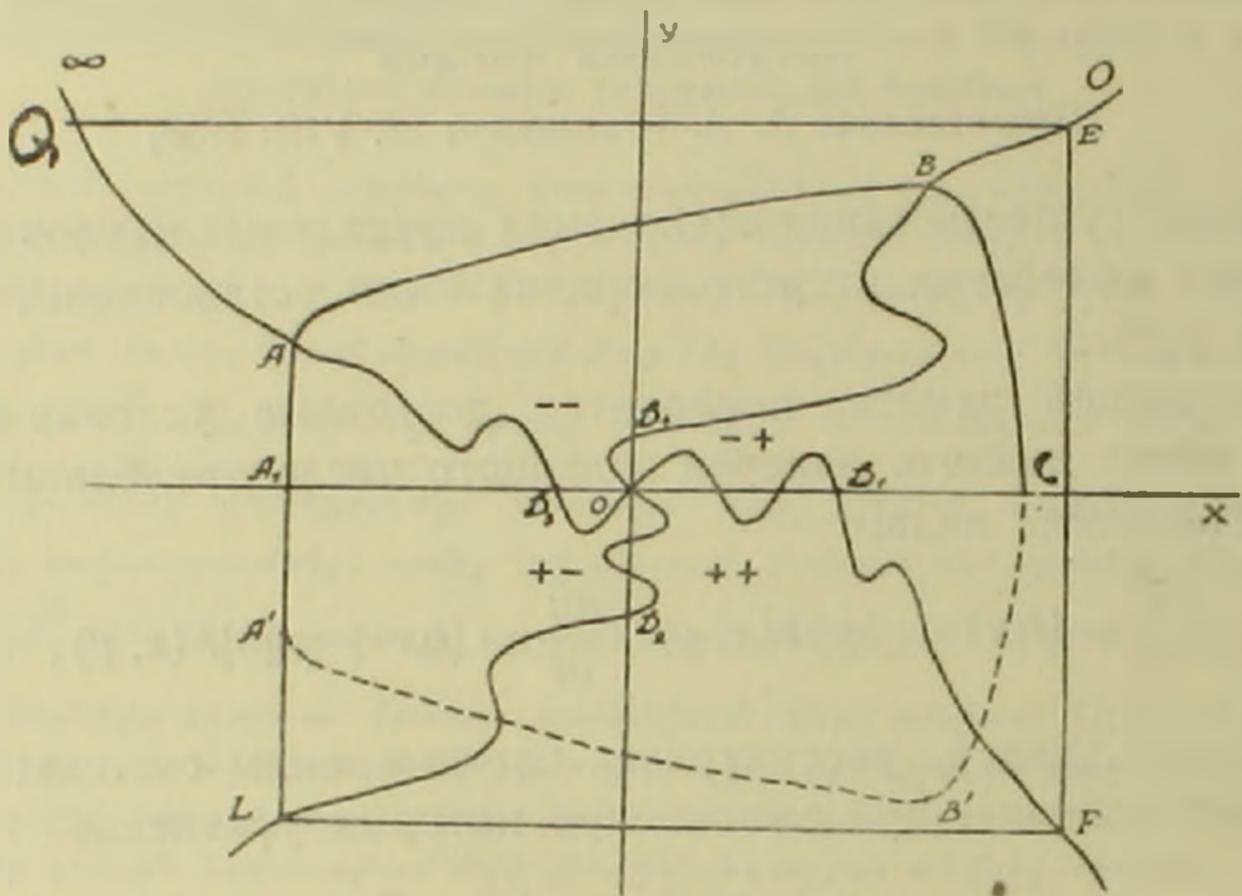
4) $\sup_{-\infty < x < 0} f(x) > N = \max(\bar{y}, \underline{y})$, где \bar{y} наименьшее значение $y \in [D_1, \infty)$,

удовлетворяющее уравнению $\bar{x} + \varphi(y) = 0$, если уравнение $\bar{x} + \varphi(y) = 0$ имеет решение; в противном случае в качестве N достаточно выбрать y ;

5) $\inf_{-\infty < y < 0} [-\varphi(y)] < -x$, где $-x$ — наибольшее из значений $x \in (-\infty, 0)$,

удовлетворяющих уравнению $f(x) - N = 0$;

6) $\inf_{0 < x < \infty} |f(x)| < -y^*$, где $-y^*$ — наибольшее из значений $y \in (-\infty, 0)$,



Фиг. 1

удовлетворяющих уравнению $-x + \varphi(y) = 0$;

7) $\sup_{0 < y < \infty} [-\varphi(y)] > x^*$, где x^* — наименьшее значение $x \in (0, \infty)$, удовлетворя-

ющее уравнению $f(x) + y^* = 0$;

8) $x \frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} \geq x \frac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)}$, то для систем (2) можно построить

такую замкнутую кривую, которую все и/к* пересекают снаружи и внутри при возрастании t .

Для доказательства леммы, принимая точку $A(-\bar{x}, N)$ изоклины бесконечности за исходную, проведем отрезки AL , LF , FE и прямую $y = y_E$ (фиг. 1.). Если прямая $y = y_E$ пересекает изоклину бесконечности в точке A или ее точка пересечения Q по изоклине ближе к точке $x = y = 0$, чем точка A , то искомая замкнутая кривая построена. Если же прямая $y = y_E$ не пересекается с изоклиной бесконечности или ее точка пересечения дальше от точки $x = y = 0$, чем точка A , то из точки A проводим и/к в сторону убывания t . При этом продол-

* Выражение „интегральная (—ые) кривая (—ые)“ сокращенно будем обозначать через и/к.

жении мы рассматриваем тот случай, когда и/к, не пересекаясь ни с прямой $y = y_E$, ни с отрезком EF , достигает положительной полуоси ox в некоторой точке C (так как в противном случае искомая кривая построена). Отобразив фигуру A_1ABC (фиг. 1) относительно оси x , доказывается, что полученная замкнутая кривая $ABCB'A'A$ — искомая.

Замечание. Легко видеть, что при $x^* > \bar{x}$ достаточно требовать выполнения условия 2) на $[\bar{x}, x^*]$, условия 3) на $[\hat{y}, \bar{y}]$, $[-\hat{y}, -\bar{y}]$, где \hat{y} наименьшее значение $y \in [d_1, \infty)$, удовлетворяющее уравнению $x^* + \varphi(y) = 0$, а в противном случае (если $x^* < \bar{x}$) мы получаем тот случай, когда $\hat{y} < N$ и при построении искомой кривой условия 2), 3) не используются.

Заметим также, что выполнения условия 1) достаточно, соответственно, на отрезках

$$[-\bar{x}, -d_3], [D_1, x^*]; [-y^*, -d_2], [d_1, \hat{y}].$$

Легко проверить, что заменой x на $-x$, t на $-t$ к лемме 1 приводится

Лемма 2. Если выполняются условия:

1) $\lambda f(x) \geq 0$, $y_{\mp}(u) \geq 0$, соответственно, вне отрезков $[D_3, D_1]$ оси x и $[D_2, D_4]$ оси y , заключающих на себе особую точку $x = y = 0$, причем; во втором соотношении равенство не может выполняться одновременно для двух симметричных значений аргумента относительно оси x ,
 2) существует $\bar{x} > 0$ такое, что $f(x) \leq \min(-d_2, -d_4)$, когда $x \leq -\bar{x}$ где d_2, d_4 расстояние, соответственно точек D_2, D_4 от начала координат;

3) существует $\bar{y} > 0$ такое, что $-\varphi(y) \leq -d_3$, когда $y > \bar{y}$, $-\varphi(y) \geq d_1$, когда $y \leq -\bar{y}$, где d_1, d_3 расстояние, соответственно точек D_1, D_3 от начала координат;

4) $\sup_{0 < x < \infty} f(x) > N = \max(\bar{y}, \underline{y})$, где \bar{y} наименьшее значение $y \in [d_1, \infty)$,

удовлетворяющее уравнению $-\bar{x} + \varphi(y) = 0$, если это уравнение имеет решение; в противном случае в качестве N достаточно выбрать \bar{y} ;

5) $\sup_{-\infty < y < 0} [-\varphi(y)] > \bar{x}$, где \bar{x} наименьшее значение $x \in (0, \infty)$, удовлетворя-

ющее уравнению $f(x) - N = 0$;

6) $\inf_{-\infty < x < 0} [f(x)] < -y^*$, где $-y^*$ наименьшее значение $y \in (-\infty, 0)$, удов-

летворяющее уравнению $x + \varphi(y) = 0$;

7) $\inf_{0 < y < \infty} [-\varphi(y)] < -x^*$, где $-x^*$ наибольшее значение $x \in (-\infty, 0)$,

удовлетворяющее уравнению $x + \varphi(y) = 0$;

8) $x \frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} \leq x \frac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)}$, то можно построить замкнутую кривую, содержащую особую точку u , пересекаемую при возрастании t и/к системы уравнений (1) только изнутри к наружи.

Замечание. Легко видеть, что при $-x^* < -\bar{x}$ достаточно выполнение условия 2 на $[-x^*, -\bar{x}]$ и условия 3 на $[\bar{y}, \hat{y}]$, $[-\hat{y}, -\bar{y}]$, где \hat{y} наименьшее значение y , удовлетворяющее уравнению $-x^* + \varphi(y) = 0$. При $-x^* > -\bar{x}$ получаем тот случай, когда $\hat{y} < N$; при построении искомой кривой условия 2,3 не используются.

Ниже мы будем пользоваться обозначениями:

$$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \tilde{y}_i, x_i^*, \hat{y}_i,$$

причем при нечетном и четном i эти величины являются величинами $\bar{x}, \bar{y}, \tilde{y}, x^*, \hat{y}$, соответственно, лемм 1,2.

Некоторые точки на полуосях обозначим через D_i^k ; индекс сверху обозначает полуось, причем нумерация ведется по часовой стрелке, начиная с положительной полуоси ox , а снизу — номер точки на полуосях в порядке возрастания расстояния точек от начала координат. Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть дана система уравнений (1) и в некоторой окрестности начала координат изоклины нуля и бесконечности расположены, соответственно, в квадрантах II, IV и I, III; если существуют 4_n гочек D_i^k ; $k = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2, \dots, n$ таких, что для каждого нечетного номера m выполняются условия 1—7 леммы 1, при $m < n$ и $x_i^* > \bar{x}_i$ *) в следующих предположениях:

а) $[\bar{x}_m, x_m^*] \subset [D_m^1, D_{m+1}^1]$, $[\tilde{y}_m, \hat{y}_m] \subset [D_m^4, D_{m+1}^4]$, $[-\hat{y}_m, -\bar{y}_m] \subset [D_{m+1}^2, D_m^2]$,

б) условия 4—7 выполняются, соответственно, на отрезках $[D_{m+1}^3, D_m^3]$, $[D_{m+1}^2, D_m^2]$, D_m^1 , $[D_{m+1}^1]$, $[D_m^4, D_{m+1}^4]$;

условия 3 на отрезках

$$[D_{m+1}^3, D_m^3], [D_m^1, D_{m+1}^1],$$

а после каждого четного номера j выполняются условия 1—8 леммы 2, причем при $j < n$ и $-x_j^* < -\bar{x}_j$ в следующих предположениях:

в) $[-x_j^*, -\bar{x}_j] \subset [D_{j+1}^3, D_j^3]$, $[\bar{y}_j, \tilde{y}_j] \subset [D_{j+1}^1, D_j^1]$, $[-\hat{y}_j, -y_j] \subset [D_{j+1}^2, D_j^2]$,

г) условия 4—7 выполняются, соответственно, на отрезках $[D_j^1, D_{j+1}^1]$, $[D_{j+1}^2, D_j^2]$, $[D_{j+1}^3, D_j^3]$, $[D_j^4, D_{j+1}^4]$;

условие 8 выполняется на отрезках (предполагая, что j принимает и

) При $x_m^ < \bar{x}_m$ приходим к случаю $\hat{y} < N$ (фиг. 1), что и обеспечивает возможность построения замкнутой кривой.

значения 0 и $D_0 = 0$): $[D_{j+1}^3, D_j^3]$, $[D_j^1, D_{j+1}^1]$, то система (1) имеет не менее n предельных циклов.

Из теоремы 1 при $n = 1$, как следствие, вытекает

Теорема 1-а. Пусть в некоторой окрестности начала координат изо-клины нуля и бесконечности расположены, соответственно, в квадран-тах II, IV и I, III и $f(z)$, $\varphi(z) \rightarrow \pm \infty$, когда $z \rightarrow \mp \infty$; если на неко-тором отрезке оси x , содержащем на себе особую точку $x = y = 0$, выполняется условие

$$x \frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} > x \frac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)},$$

а вне этого или некоторого другого отрезка выполняются то же со-отношение с обратным знаком, то система (1) имеет по крайней мере один предельный цикл.

Существование не менее произвольного числа предельных циклов можно доказать и для некоторых частных видов системы (1), так, например, верна

Теорема 2. Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - y, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x), \quad (3)$$

если

1) $f(x)$ непрерывная функция и в некоторой окрестности начала ко-ординат $xf(x) > 0$;

2) существуют числа $\delta_1^i > \delta_2^i$; $x_i^*, l_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l_k < x_k^* < l_{k+1}$ при $k < n$; $l_n < x_n^*$, такие, что при каждом нечетном i $f(x) < \delta_2^i$, когда $l_i < x < x_i^*$, $f(x) > \delta_1^i$, когда $-x_i^* < x < -l_i$; при каждом четном i $f(x) > \delta_1^i$, когда $l_i < x < x_i^*$, $f(x) < \delta_2^i$, когда $-x_i^* < x < -l_i$;

3) $\varphi(x)$ непрерывная функция $x\varphi(x) > 0$, $x \neq 0$;

$$\int_{-l_i}^{-x_i^*} \varphi(x) dx \geq H_i, \quad \int_{l_i}^{x_i^*} \varphi(x) dx \geq H_i, \quad \text{где}$$

$$H_i = \frac{1}{2} \left(M^i + \frac{N^i}{K_i} + \bar{\delta}^i \right)^2, \quad K_i = \frac{\delta^i}{l_i}, \quad \delta^i = \delta_1^i - \delta_2^i, \quad \bar{\delta}^i = \max(|\delta_1^i|, |\delta_2^i|),$$

$$M^i = \max(M_1^i, M_2^i); \quad M_1^i = \sup_{0 < x < l} f(x), \quad -M_1^i = \inf_{-l < x < 0} |f(x)| \quad \text{при нечетном } i;$$

$$-M_1^i = \inf_{-l < x < 0} |f(x)|, \quad M_2^i = \sup_{-l < x < 0} f(x) \quad \text{при четном } i;$$

$$N^i = \max(N_1^i, N_2^i), \quad N_1^i = \sup_{0 < x < l} \varphi(x), \quad N_2^i = \inf_{-l < x < 0} \varphi(x), \quad \text{то система (1) имеет не}$$

менее n предельных циклов.

Заметим, что системе (3) соответствует уравнение нелинейного

колебания (2) и если $f(x) = - \int_0^x g(x) dx$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют усло-

թվեր այնպիսին, որ յուրաքանչյուր կենտ i թվի համար $f(x) < \delta_2^i$, երբ $l_i < x < x_i^*$,
 $f(x) > \delta_1^i$, երբ $-x_i^* < x < -l_i$ յուրաքանչյուր զույգ i թվի համար $f(x) < \delta_1^i$, երբ
 $l_i < x < x_i^*$ $f(x) < \delta_2^i$, երբ $-x_i^* < x < -l_i$:

3) $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիա է, $x\varphi(x) > 0$, $x \neq 0$;

$$\int_{-l_i}^{-x_i^*} \varphi(x) dx > H_i, \quad \int_{l_i}^{x_i^*} \varphi(x) dx > H_i, \quad \text{որտեղ}$$

$$H_i = \frac{1}{2} \left(M^i + \frac{N^i}{K_i} + \bar{\delta}_i \right)^2, \quad K_i = \frac{\delta^i}{l_i}, \quad \delta^i = \delta_1^i - \delta_2^i, \quad \bar{\delta}^i = \max(|\delta_1^i|, |\delta_2^i|).$$

$$M^i = \max(M_1^i, M_2^i); \quad M_1^i = \sup_{0 < x < l_i} f(x), \quad -M_2^i = \inf_{-l_i < x < 0} |f(x)|$$

$$\text{երբ } i \text{ կենտ է; } -M_1^i = \inf_{0 < x < l_i} |f(x)|, \quad M_2^i = \sup_{-l_i < x < 0} f(x) \text{ երբ } i \text{ զույգ է:}$$

$$N^i = \max(N_1^i, N_2^i), \quad N_1^i = \sup_{0 < x < l_i} \varphi(x), \quad N_2^i = \inf_{-l_i < x < 0} \varphi(x), \quad \text{այսպես}$$

(3) սխառեմը ունի ոչ պակաս քան n սահմանային դիկլի:

ЛИТЕРАТУРА — ЧИՐԱԿԱՆ ՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H. I. Eckweiler, Nonlinear differential equations of the Van der Pol type with a variety of periodic Solutions. Studies in nonlinear vibration theory, New-York University. (1946) 4—64. ² Duff, Levinson, On the non-uniqueness of periodic solutions for on asymmetric Lienard equations, Quart. appl. math. X, № 1 (1952), ³ С. С. Рышков, О режимах работы лампового генератора. ДАН СССР, т. ХСVI, № 3, 1954. 921—924.